КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по дисциплине “ИНФОРМАТИКА”
Основы работы с пакетом прикладных программ MATHCAD.
Для студентов технических специальностей

Составители: А.А. Гончаров, доц.,
Л.В. Васильева, ст. преп.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4

Лекция 1-2. Основные сведения о пакете Mathcad. Простые арифметические вычисления. Табулирование функций. Форматирование результатов. Построение графиков функций. 4

Лекция 3. Векторы и матрицы. 12

Лекция 4. Интерполирование функций. 13

Лекция 5. Вычисление операторов. 18

Лекция 6. Решение уравнений и систем уравнений. 30

Лекция 7.Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. 35

Лекция 8. Построение графиков функции двух переменных. 40

Список литературы 41

ВВЕДЕНИЕ

Пакеты программ 2000 др. for Windows являются представителями нового поколения программных средств, существенно развивших достоинства предыдущих версий этого пакета программ.

Пакет прикладных программ *Mathcad* является универсальной системой для работы с формулами, числами, текстами и графиками. *Mathcad* позволяет записывать на экране компьютера формулы в их привычном виде и решить почти любую математическую задачу символьно либо численно. Возможности *Mathcad* используются в различных областях – от расчетов срока ссуды до конструирования электрических схем.

В данном конспекте лекций изложены краткие теоретические сведения и рассмотрены задачи, чаще всего встречающиеся в инженерной практике.

В начало

Лекции 1-2

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПАКЕТЕ Mathcad.

ПРОСТЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Основные сведения о пакете *Mathcad*

Mathcad является универсальной математической системой, позволяющей производить любые вычисления в их привычной записи. Она содержит текстовый, формульный и графический редакторы системы Windows.

Запуск *Mathcad* осуществляется из Windows двойным щелчком по соответствующей пиктограмме. Открывшееся окно приложения (рис.1) содержит строку заголовка (названия) документа (1), ниже – полосу главного меню (2). (Условимся, что нумерация строк производится сверху вниз, а позиций в строке – слева направо.) Основные пункты меню дублируются пиктограммами (кнопками) управления (3,4,5-я строки).

Опции главного меню (см. рис.1): File/файл – работа с файлами (2–1); Edit/правка – редактирование (2–2); Text/текст – работа с текстовым редактором (2–3); Math/математика – управление процессом вычислений (2–4); Graphics/графика – работа с графическим редактором (2–5); Symbolics/символика – выбор операций символьного процессора (2–6); Window/окно – управление окнами (2–7); Books/книги – работа с электронными книгами (2–8); Help/помощь – справка (2–9).

Третья строка в окне приложения – кнопки перемещаемых шаблонов математических знаков – палитр. Это арифметические операторы (3–1), операторы отношения (3–2), операторы графики (3–3), матричные операторы (3–4), объекты высшей математики (3–5) и греческие буквы (3–6). Чтобы перенести символ палитры в место, отмеченное курсором, нужно щелкнуть по выбранной палитре, раскрыть ее и щелкнуть по выбранному знаку.

Четвертая строка – панель инструментов, включающая несколько групп пиктограмм. Первая группа – операции с файлами: создать(4–1), открыть–загрузить(4–2), сохранить (4–3) и распечатать (4–4). Вторая – редактирование: отмена предшествующей операции (4–5), вырезать – перенести в буфер (4–6), копировать в буфер (4–7), вставить – перенести содержимое буфера на место вставки (4–8). Третья – размещение блоков: выравнивание по горизонтали (4–9) и вертикали (4–10). Четвертая группа – некоторые операции: создание текстовой области (4–11), создание текстового параграфа (4–12), проверка орфографии (4–13). Далее следуют: тематический режим работы (4–14), включение символьного процессора (4–15), вычисление выделенного выражения (4–16), вставка функций (из списка в диалоговом окне) – (4–17), масштаб экрана (4–18), вставка размерных единиц (4–19), шпаргалки (4–20) и справка (4–21).

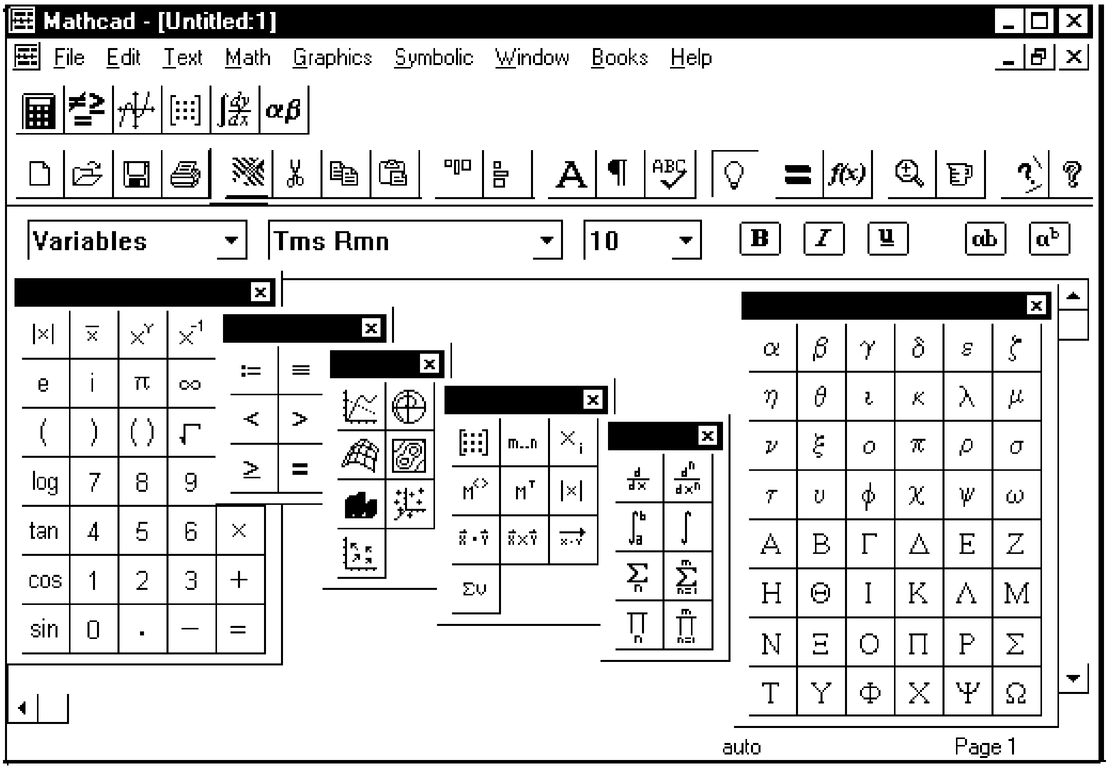


Рисунок 1.1 - Окно приложения *Mathcad*

Пятая строка – пиктограммы управления шрифтами: **переключатели типа** символов (5–1), шрифтов (5–2), размеров шрифта (5–3); **типы шрифтов**: полужирный (5–4); наклонный (5–5); с подчеркиванием (5–6); **пиктограммы расположения символов**: рядом (5–7); подстрочное (5–8); надстрочное (5–9).

Внизу экрана расположена строка состояния системы в ходе работы с ней.

Справочная система *Mathcad* включает: пояснение действий кнопок при остановке указателя на них; раздел Books (2–8) – справочник по математическим расчетам с примерами применений системы и самоучитель; разделы помощи Help (2–9)– оказание помощи по всем разделам программы. Раздел Quick Sheets (шпаргалки) содержит образцы вычислений. Начинать изучение программы лучше с русифицированного раздела Using Help. Комбинация клавиш **Shift+F1** при указателе, установленном на изучаемом элементе, открывает контекстную справку о нем.

Простые арифметические вычисления

Щелчок в любом месте документа вызывает появление крестика, от места расположения которого начинается ввод выражения. После набора знака «=» появляется результат вычисления. Чтобы убрать набранное выражение, таблицу или значение, нужно щелкать по нему до появления окружающей рамки и нажать **F3** (или 4 – 6). Чтобы скопировать в буфер, следует нажать кнопку (4 – 7); вставить в место, указанное курсором, – нажать (4 – 8).

Для определения переменной после ее имени ставится символ «**:**=» и печатается присваиваемое значение. Слева от знака определения может стоять имя простой переменной ( ), индексированной переменной (или $X_{i,j}$), матрицы ( ), переменной с верхним индексом ( ) или функции F(x,y,z).

Аргументом функций могут быть скаляры, векторы, матрицы. Имена функций пользователя следует набирать везде одним шрифтом. Имена встроенных функций нечувствительны к шрифтам. Их можно впечатывать или выбирать щелчком из списка – кнопка (4—16) «f(x)».

Операторы, цифры, знаки выбираются из соответствующих палитр строки 3 или набираются с клавиатуры. Выход из-под знака оператора осуществляется нажатием на клавишу пробела. Имена переменных должны быть определены прежде оператора функции. Выражение, содержащее знак «**:=**», воздействует на документ ниже и правее от себя. Команда *Правка–Области–Показать* или протягивание курсора при нажатой клавише через документ дает возможность просмотра выделенных областей, которые не должны пересекаться. Знак глобального определения (клавиша ~) определяет функцию прежде её локального определения.

Команда (2–4–10) или щелчок по кнопке (4–14) включает / выключает автоматический режим (automatic mode) вычисления результата после набора знака равенства. В ручном режиме для пересчета нужно нажать **F9**. Прерывание вычислений осуществляется кнопкой **ESC**; щелчок по уравнению или **F9** продолжит вычисление.

При обнаружении ошибки следует перейти к ручному режиму и просмотреть предшествующие выражения, которые могут быть причиной ошибки.

Предопределенные переменные (имеющие принятые значения по умолчанию) можно переопределить как явно, так и в рабочем окне (команда *Математика–Встроенные переменные* / Build–in variables).

По умолчанию:

TOL=0.001 – допускаемая погрешность вычислений,

ORIGIN=0 – определение индекса 1–го элемента множеств.

Пример 1.1

$$x := 3$$

$$\sqrt{\frac{4!}{e^x}} - \coth(x)^3 \cdot \cos\left(\left|x \sinh\left(x^2\right) - \ln(x)\right|\right) = \blacksquare$$

ТАБУЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ФОРМАТИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Табулирование функций

Для вычисления выражения в некотором диапазоне значений сначала необходимо определить дискретный аргумент. Например, если необходимо протабулировать функцию при изменении аргумента t от 10 до 11.5 с шагом 0.5, необходимо выполнить следующие операции:

1 Набрать

t:= 10,10.5..11.5

2 Записать формулу

y(t):= sin(t) - cos(t)

3 Щелкнуть мышью вне равенства для t, аналогично для y(t).

В итоге имеем следующую картину на экране:

t:= 10, 10.5 .. 11.5

y(t):= sin(t) - cos(t)

t	y(t)
10	0.295
10.5	- 0.404
11	- 1.004
11.5	- 1.359

Форматирование результатов

Чтобы установить формат вывода чисел, необходимо:

$1.1109*10^3$
$100.71*10^1$
894.4

1 Выделить таблицу, щелкнув по ней мышью.

2 Выбрать пункт ФОРМАТ ЧИСЛА из меню *МАТЕМАТИКА* и открыть диалоговое окно ФОРМАТ ЧИСЛА. Опции этого окна позволяют установить число десятичных знаков в выводимых числах, границы использования экспоненциального представления чисел и т.д.

1110.9
1007.1
894.4

3 По умолчанию для “Диапазона показателя” принимается значение 3. Это означает, что только числа, большие или равные , отображаются в экспоненциальном представлении. Заменив 3 на 6, получаем следующие значения:

При изменении формата вывода результатов меняется только их внешний вид. Внутреннее представление чисел *Mathcad* всегда имеет полную точность.

Пример 1.2

Построение графиков функций

Построение графиков функций в декартовой системе координат. *Mathcad* может строить двумерные графики в декартовых и полярных координатах, строить линии уровня, изображать поверхности и ряд других трехмерных графиков.

Множество точек, из которых состоит график, определяется дискретными аргументами: *Mathcad* строит одну точку графика для каждого значения дискретного аргумента, задающего график.

Чтобы создать график функции y(t), нужно:

1 Щелкнуть мышью ниже формулы для y(t) и выбрать ДЕКАРТОВ ГРАФИК из меню *ГРАФИКА*.

2 В поле ввода под осью абсцисс нужно ввести имя переменной t, поставив таким образом, в соответствие этой оси переменную t.

3 Щелкнуть в поле напротив середины оси ординат и ввести y(t). Остающиеся поля предназначены для ввода границ на осях, максимального и минимального значений, откладываемых на оси. Если оставить их пустыми, *Mathcad* автоматически вычислит и запишет их при построении графика.

4 После щелчка вне графика *Mathcad* вычисляет и строит точки графика. Под y(t) появляется образец линии. Двойной щелчок по окну графика, или ФОРМАТ из меню *ГРАФИКА* определяют его вид.

Опции окна форматирования графика:

Log scale – установка логарифмического масштаба
Grid lines – установка линий масштабной сетки
Numbered – установка цифровых данных по осям
Auto scale – автоматическое деление осей
Show markers – нанесение рисок
Auto grid – автоматическая установка масштабных линий
No of grids – установка числа масштабных линий
Boxed – рамка вокруг графика
Crossed – оси в виде креста
None – отсутствие осей

На одном рисунке возможно построение нескольких графиков. В пустой средний квадрат по вертикали вписываются через запятые функции или их определения. Аналогично в средний квадрат по горизонтальной оси заносятся аргументы (или аргумент, если он один). Для построения графика необходимо щелкнуть мышью за его пределами (или нажать клавишу **F9**).

Выделив график пунктирной линией (сделав щелчок возле него и протянув мышь, отпустить клавишу), можно затем ввести в него курсор и, щелкнув, перемещать по окну. Для того чтобы растягивать (сужать) границы графика, нужно захватить курсором подходящую сторону и переместить ее.

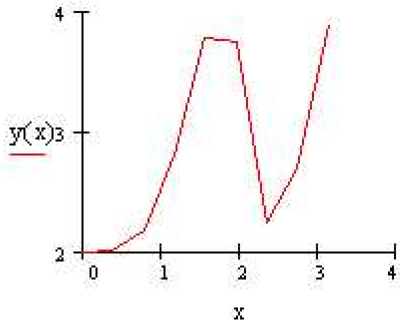
Щелчок по полю графика и нажатие на **F3** или использование кнопки (команды) вырезки удаляет его изображение в буфер. Щелкнув мышью в намеченном месте и нажав **F4** (можно также использовать кнопку или команду вставки), восстанавливают вырезанное изображение. Функции построения необходимо определять выше места выведения макета.

Пример 1.3

$x := 0, \frac{\pi}{8} .. \pi$

$y(x) := 3 - \cos(x^2)$

x	y(x)
0	2
0.393	2.012
0.785	2.184
1.178	2.818
1.571	3.781
1.963	3.756
2.356	2.256
2.749	2.707
3.142	3.903



Построение графиков в полярной системе координат. В полярной системе координат каждая точка задается углом W и длиной радиус–вектора R(W). Перед построением графика нужно задать его формат (команда *Polar Plot Format* или двойной щелчок по макету графика) и изменение ранжированной переменной W в заданных пределах (обычно от 0 до 360 градусов). Опции диалогового окна формата, задающие отображение радиус–вектора (Radial) и его угла (Angular), аналогичны вышеописанным; возможно обрамление графика окружностью (Perimeter). Команда *Graphics–Create Polar Plot,* комбинация клавиш **Ctrl+F7** или соответствующая кнопка палитры выводит шаблон, имеющий форму окружности. Следует ввести W в шаблон снизу и функцию R(W) слева, указать нижний предел изменения длины R(W) – Rmin справа внизу и верхний предел Rmax справа вверху.

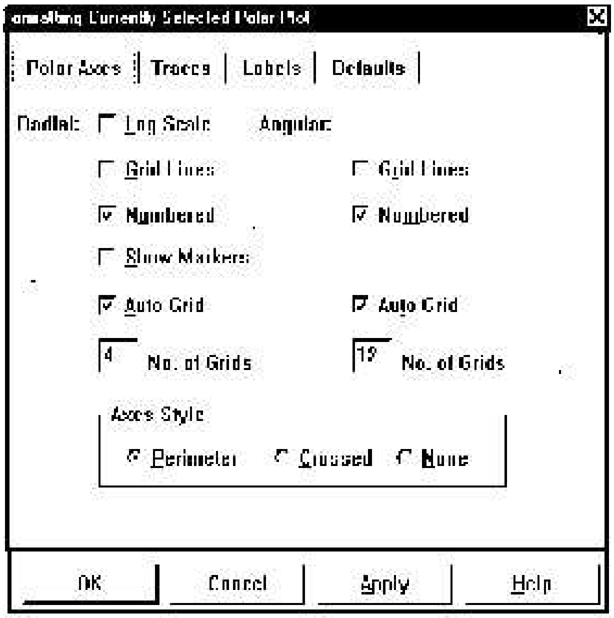


Рисунок 2 – Опции диалогового окна ФОРМАТ

Построение графика в полярной системе координат:

1 Щелкнуть мышью там, где нужно создать график.

2 Выбрать ПОЛЯРНЫЙ ГРАФИК из меню *ГРАФИКА*. *Mathcad* показывает круг с четырьмя полями ввода.

3 Выше области графика определите угол w и функцию угла R(w).

4 Поле ввода внизу предназначено для переменной графика.

5 Поле ввода слева должно содержать выражение для радиуса.

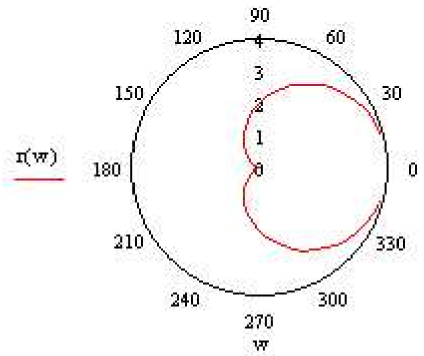
6 Два поля ввода справа предназначены для верхнего и нижнего граничных значений радиуса. *Mathcad* заполняет эти поля по умолчанию. Если требуется, можно изменять эти пределы.

Чтобы построить несколько графиков для различных выражений R, соответствующих одному выражению для w, вводите первое выражение для R, сопровождаемое запятой. Появится поле ввода непосредственно ниже этого первого выражения. Введите туда второе выражение, сопровождаемое другой запятой, чтобы получить следующее пустое поле ввода.

Пример 1.4

$w := 0, 0.1 .. 2\pi$

$r(w) := 2 \cdot (1 + \cos(w))$



Типовой пример 1.5

Для функции $3+\sin(4+x^2)$ с помощью пакета *Mathcad* построить график. Интервал изменения переменной X подобрать так, чтобы на этом интервале функция имела один максимум и один минимум. Вычислить координаты четырех точек, лежащих на графике функции: координаты начала и конца интервала построения графика, а также приблизительные координаты максимума и минимума.

Описание выполнения задания:

1 В пакете *Mathcad* создаем новый документ и определяем исследуемую функцию, нажимая на клавиатуре следующие клавиши: **f(x):=3+sin(4+x^2).**

2 Для построения графика функции:

2.1 Сначала вводим *диапазон изменения переменной X* – **x=-1,-0.9**, затем, чтобы указать диапазон изменения переменной x, на панели инструментов ***Matrix*** выбираем кнопку **m..n** и вводим координаты последней точки диапазона.

2.2 На панели инструментов ***Graph*** щелкаем по кнопке **X-Y Plot.**

2.3 Мышкой изменяем размер появившейся области для построения графика.

2.4 В полученном шаблоне над осью абсцисс задаем имя переменной – **x**, рядом с осью ординат записываем имя исследуемой функции – **y(x).**

2.5 Для того чтобы подобрать подходящий диапазон построения графика исследуемой функции, вносим необходимые изменения в *диапазон изменения переменной X.*

2.6 Подбираем подходящее количество делений по оси абсцисс, щелкнув по ней дважды мышкой, и в появившемся диалоговом окне AXIS FORMAT снимаем флажок **Auto Grig** и в поле **Number of Grids** вводим число в диапазоне от 2 до 99 (в нашем случае подошло число 15).

3 По заданному *диапазону изменения переменной X* видно, что координата начала интервала построения графика – **0.5,** а конца – **2.2;** по графику функции видно, что

приближенные координаты абсцисс точки минимума – (0.84), а максимума – (2.0). Ординаты точек максимума и минимума функции на выбранном отрезке находим следующим образом:

3.1 На свободном месте листа вводим: **f(0.84)=,** нажимаем **Enter** и **f(2)=.**

3.2 *Mathcad* автоматически вычисляет значения функции в заданных точках.

Следовательно, координаты точек минимума и максимума функции на выбранном интервале (0.5 ... 2.2), соответственно, (0,84; 2) и (2,0; 3,989).

Распечатка задания в *Mathcad* представлена на рисунке 1.2.

Рисунок 1.2

В начало

Лекция 3

ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ

Прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, составленная из выражений a_{ik}, где i=1..m; k=1..n, называется матрицей размера m x n. Выражения a_{ik} – элементы матрицы. Положение элемента в таблице характеризуется двойным индексом: первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца. Элементами матрицы являются, как правило, числа, но иногда и другие математические объекты, например векторы, и даже матрицы. Основные операции с матрицами приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

ОБЪЕКТ ОПЕРАТОРА	КЛАВИШИ	НАЗНАЧЕНИЕ
+ – / *	+ – / *	Сложение, вычитание, деление, скалярное умножение
|M|	| M |	Вычисление определителя
	M Ctrl !	Транспонирование матрицы
	M ^ –1	Обращение матрицы

Описание действий с матрицами:

1 Задание матрицы или вектора осуществляется командой меню *MATH – MATRICES (MATP)* соответствующей кнопкой или набором **Ctrl + M**. В появившееся окно заносится количество строк и столбцов, после чего выводится шаблон матрицы. Активизируя левой кнопкой мыши места ввода, заполняют их. Вектор может быть задан строкой или столбцом.

$$M1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

2 Для вычисления определителя матрицы необходимо открыть палитру, соответствующую «векторным и матричным операциям», выбрать значок «|x|», в появившемся шаблоне задать имя матричной переменной, например |M1|, выражение |M1| охватить синей рамкой, нажать знак равенства. Для матрицы M1, введенной выше, появится результат |M1|=1.

3 Для получения транспонированной матрицы необходимо выбрать из палитры значок $M1^T$. Все остальные действия аналогичны п.2.

$$M1^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

4 Для нахождения обратной матрицы набрать имя матричной переменной, значок возведения в степень «^» (**Shift - 6**), в качестве показателя степени набрать «-1», взять в синюю рамку «$M1^{-1}$», набрать знак равенства. Появится транспонированная матрица.

$$M1^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -18 & 7 \\ 3 & -3 & 1 \\ -7 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

5 Для вычисления произведения матрицы на X (под X подразумевается число, столбец или матрица) необходимо после матрицы набрать знак умножения, сам элемент X, заключить множители в синюю рамку, набрать знак равенства.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot 5 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 30 \\ 15 & 25 & 35 \\ 20 & 5 & 45 \end{pmatrix}$$

6 Для вычисления суммы (разности) матриц (одинакового размера) необходимо задать и определить матрицу, затем набрать знак «+» или «–», определить следующее слагаемое, заключить слагаемые в синюю рамку, набрать знак равенства.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 9 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ -6 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 7 \\ -3 & 10 & 12 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вместо явного вида матрицы может фигурировать имя матричной переменной.

В начало

Лекция 4

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Интерполяция используется в том случае, когда заданы значения некоторой функции в ряде точек, а нам необходимо предсказать значения функции между ними. В *Mathcad*– применяются два вида интерполяции:

ЛИНЕЙНАЯ - соседние точки соединяются отрезками прямых (линейным сплайном);

КУБИЧЕСКАЯ – соседние точки соединяются отрезками кубического полинома (кубическим сплайном).

Рассмотрим их.

Линейная интерполяция

Зададим вектором VX координаты абсцисс заданных точек (абсциссы должны идти по возрастанию), а вектором VY – координаты ординат точек.
Например:

VX:= VY:=

Чтобы предсказать значение функции, например в точках 2.5 и 1.2, достаточно набрать

Linterp(VX,VY,2.5)= ,

получим ответ: 3.5.

Аналогично

Linterp(VX,VY,1.2)=2.8.

Можно также построить график интерполяционной кривой (в случае линейной интерполяции это ломаная).

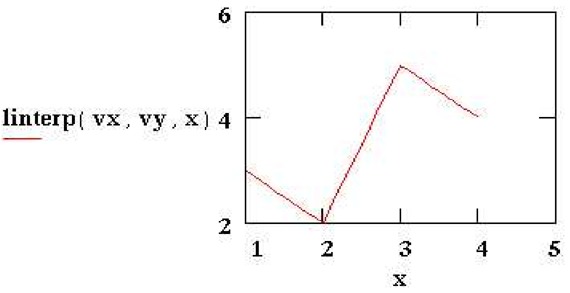


Рисунок 4.1 – Линейная интерполяция данных

Кубическая сплайн - интерполяция

Кубическая интерполяция проводит кривую через заданные точки таким образом, что первые и вторые производные кривой непрерывны в каждой точке. (Это обеспечивает гладкость интерполяционной кривой).

Применим кубическую интерполяцию к рассмотренному выше примеру.

В кубической интерполяции используются встроенные функции cspline и interp. Первая необходима для вычисления коэффициентов сплайна, которые запоминаются в векторе, например VS:=cspline(VX,VY). Вектор VS содержит вторые производные интерполяционной кривой в рассматриваемых точках. С помощью второй непосредственно определяется интерполирующая функция: f(x):=interp(VS,VX,VY,x). То есть кубический сплайн интерполирует значения, представленные в векторах данных VX и VY.

Пример 4.1

1 Вводим пары значений для интерполяции в виде двух векторов VX и VY:

2 Вычисляем вектор коэффициентов сплайна: VS**:**=cspline(VX,VY).

3 Определяем интерполирующую функцию: f(x)**:**=interp(VS,VX,VY,x).

4 Для получения интерполированных значений при x=2 необходимо набрать : ”f(2)=”, после чего будет выдан результат 2.188.

Для графического вывода интерполирующей функции необходимо указать множество значений аргумента x – от минимального Xmin до максимального Xmax, с шагом, определяемым количеством точек разбиения отрезка |Xmax–Xmin|.

В нижеследующем примере переменная skale – кол-во точек разбиения, length(**v**) – (возвращает) число элементов в векторе **v**, max(A) – (возвращает) наибольший элемент в A; min(A) – (возвращает) наименьший элемент в A (аргументом A может быть вектор либо матрица). Индекс i нумерует начальные значения, индекс j – интерполируемые.

Рисунок 4.2 – Кубическая интерполяция данных

Типовой пример 4.2

Для функций из задания 1 выполнить:

1 Для точек (x_1;y_1), (x_2;y_2), (x_3;y_3), (x_4;y_4), найденных в задании 1, построить линейную интерполяцию. Построить на одном рисунке график функции и интерполяции. В точках максимального расхождения графиков найти относительную погрешность по формуле:

Отн. погр. = .

2 Для точек ($x_1;y_1$), ($x_2;y_2$), ($x_3;y_3$), ($x_4;y_4$), найденных в задании 1, построить кубическую интерполяцию. Построить на одном рисунке график функции и интерполяции. В точках максимального расхождения графиков найти относительную погрешность.

3 Отметить достоинства и недостатки каждого метода аппроксимации.

Описание выполнения задания:

Найденные в задании 1 точки: (0.5;2.105),(0.84;2),(2;3.989) и (2.2;3.552).

1 Открываем файл с заданием 1 и сохраняем его под новым именем.

1.1 Для построения линейной интерполяции для заданных точек:

1.1.1 Задаем диапазон изменения счетчика, введя **i=0;3.**

1.1.2 Задаем вектор исходных данных X: **X:** и нажимаем на клавиатуре **Ctrl+M** и вводим значения.

1.1.3 Аналогично задаем вектор данных У.

1.1.4 Задаем функцию решения, введя **F(x):linterp(X,Y,x).**

1.1.5 График, полученный в задании 1, перемещаем вниз листа. Возле оси ординат перечисляем имена функций, графики которых нужно построить.

1.2 Для нахождения относительной погрешности линейной интерполяции:

1.2.1 Приближенно по графику находим, что точка максимального расхождения графиков функции и линейной интерполяции имеет координату по оси абсцисс 1.2.

1.2.2 Для написания формулы относительной погрешности вводим ее формулу, напечатав **Ot_Pogresh:|f(1.2)-F(1.2)|*100/ f(1.2).**

1.2.3 Для вывода значения относительной погрешности вводим **Ot_Pogresh=.** Она составляет 16.156%.

1.3 Сохраняем файл с заданием.

Распечатка задания в *Mathcad* представлена на рисунке 4.3.

Рисунок 4.3.

2 Для построения кубической интерполяции:

2.1 Сохраняем файл под новым именем.

2.2 Рядом с векторами исходных данных добавляем переменную vs для вычисления коэффициента кубической интерполяции, введя **vs:cspline(X,Y).**

2.3 Исправляем функцию решения F(x), исправив команду с linterp на interp и введя первым аргументом команды interp коэффициент кубической интерполяции vs.

График перестроится автоматически.

2.4 Приближенно по графику находим, что точка максимального расхождения графиков функции и кубической интерполяции имеет координату по оси абсцисс 1.5.

2.5 Исправляем формулу подсчета относительной погрешности Ot_Pogresh с аргументом 1.5. Относительная погрешность составила 18.139%

Распечатка задания в *Mathcad* представлена на рисунке 4.4.

Рисунок 4.4.

3 Вывод.

Суть любого метода интерполяции заключается в разбиении отрезка, на котором исследуется функция, на N отрезков. На каждом из отрезков вычисляются значения функции и строится кривая, соединяющая две точки на отрезке.

В случае линейной интерполяции такой кривой является прямая, а в случае кубической – парабола.

Линейная интерполяция позволяет построить “грубую” интерполяцию, а кубическая – более точную, т.к. кубическая интерполяция не только содержит в себе формулу линейной интерполяции **$P(x)=y+q\Delta y_0$,** но к ней добавляется и уточнение -

$P(x)=y+q\Delta y_0+ \quad \Delta^2 y_0+ \quad \Delta^3 y_0$.

В ходе выполнения задания были построены «грубые» интерполяции, т.к. взяты всего четыре узла, что не обеспечивает высокую степень точности. Число интерполяций не ограничено, и его нужно выбирать так, чтобы конечная разность $\Delta^N y_0$ была постоянна с заданной точностью. Поэтому полученная погрешность, для линейной интерполяции составляющая 16.156 % и для кубической – 18.139 %, достаточно высока.

Кроме того, от кубической интерполяции ожидается меньшая относительная погрешность при соблюдении требований к интерполяционной функции.

В начало

Лекция 5

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ

Операторы вычисления сумм и произведений

Оператор суммирования вычисляет сумму выражений по всем значениям индекса. Оператор произведения работает аналогичным образом - вычисляет произведение выражений по всем значениям индекса.

Чтобы создать оператор суммирования в рабочем документе, щёлкните в свободном месте, затем нажмите клавиши **Ctrl + Shift + 4.**

Появляется знак суммирования с четырьмя пустыми полями . В нижнем поле слева от знака «=» введите имя переменной. Эта переменная – индекс суммирования. Она определена только внутри оператора суммирования. Вне оператора может существовать другая переменная с тем же именем. В поле справа от знака «=» введите любое число или любое выражение, принимающее целое значение. В поле над знаком суммы введите целое число или любое выражение, принимающее целое значение. В оставшемся поле введите выражение, которое необходимо просуммировать. Обычно это выражение будет включать индекс суммирования. Если это выражение имеет несколько членов, используйте апостроф «′», чтобы создать пару круглых скобок вокруг поля.

Аналогично создаётся оператор произведения. Для этого нажмите клавиши **Ctrl + Shift + 3** и заполните поля, как описано ранее. Ниже приведены некоторые примеры использования операторов суммы и произведения. Их можно использовать, как любое другое выражение. Чтобы вычислить кратную сумму, нужно поместить второй оператор суммы в поле выражения первого оператора суммы (см. нижнюю часть примера 5.1).

Пример 5.1

Суммы и произведения

$i := 1 .. 20$ $\qquad\qquad$ $x_i := \sin(0.1 \cdot i \cdot \pi)$

Когда используются такие операторы суммирования, индекс суммирования должен быть целым и изменяться с шагом 1. *Mathcad* использует обобщение этих операторов, которые могут использовать любой дискретный аргумент как индекс суммирования. Для использования этих операторов сначала необходимо определить дискретный аргумент.

В следующем примере напечатайте i: 1 , 2; 10. Затем щёлкните на свободном месте, введите знак $.

Появится знак суммирования с полями –

Щёлкните на поле снизу и введите имя дискретного аргумента **i**. Дискретный аргумент, который используется в этом операторе, должен быть определён заранее. Щёлкните на поле справа от знака суммирования и внесите выражение, содержащее дискретный аргумент $\mathbf{i^2}$. Если это выражение имеет несколько членов, используйте апостроф **« ′ »**, чтобы создать пару круглых скобок вокруг поля.

Нажмите знак «**=**», чтобы увидеть результат:

Вычисление производных

Оператор производной предназначен для нахождения численного значения производной функции в заданной точке. Например, чтобы найти производную $\mathbf{x^3}$ по **x** в точке **x=2** , выполните следующее**:**

1 Определите точку, в которой необходимо найти производную.

Наберите **x : 2** . **x :=2**

2 Щёлкните ниже определения **x** . Затем наберите **?** .

Появляется оператор производной с двумя полями:

3 Щёлкните на поле в знаменателе и наберите **x**. Это имя переменной, по которой производится дифференцирование.

4 Щёлкните на поле справа от **d/dx** и наберите **x^3**. Это – выражение, которое нужно дифференцировать .

5 Нажмите знак « **=** », чтобы увидеть результат:

Пример 5.2

Примеры дифференцирования при помощи *Mathcad*.

x = 2 y = 10 t = 0

$g(t) = 5 \cdot t^4$

Численное значение производной **Точный результат**

$g(t) = 80$

$g(x) \cdot y = 800$

$x^5 = 32$

Необходимо помнить, что результат дифференцирования есть не функция, а число – значение производной в указанной точке переменной дифференцирования. В предыдущем примере производная от $\mathbf{x^3}$ не есть выражение $\mathbf{3x^2}$, а значение $\mathbf{3x^2}$, вычисленное в точке **x = 2.**

Производные более высокого порядка

В *Mathcad* существует оператор для вычисления производной **n**-го порядка. Например, чтобы найти третью производную функции $\mathbf{x^9}$ по **x** в точке **x=2**, выполните следующее**:**

1 Определите точку, в которой необходимо вычислить производную.
Наберите **x:2.** **x:=2**

2 Щелкните ниже определения **x**.
Затем нажмите клавиши **Ctrl + ?**, появляется оператор производной с двумя

полями в знаменателе, одним в числителе и еще одним справа:

3 Щелкните на поле внизу и наберите **x**. Это имя переменной, по которой

производится дифференцирование.

4 Щелкните на поле выше и правее предыдущего поля и наберите **3** (или любое

целое число между **0** и **5)**.

Обратите внимание, что поле в числителе автоматически отображает любой порядок, печатаемый в знаменателе.

Щелкните на поле справа от **d/dx** и наберите $\mathbf{x^9}$. Это выражение, которое нужно

дифференцировать. Нажмите знак **«=»**, чтобы увидеть результат:
– значение третьей производной заданного выражения в заданной точке.

При **n=1** этот оператор дает тот же самый результат, что и оператор производной, обсуждаемый выше. При **n=0** он возвращает значение функции.

Вычисление интегралов

Оператор интегрирования в *Mathcad* предназначен для численного вычисления определенного интеграла.

Например, определенный интеграл **sin(x)**^{2} от 0 до $\pi/4$ может быть вычислен следующим образом:

1 Щелкните в свободном месте и наберите знак «**&**». Появится знак интеграла с пустыми полями для подынтегрального выражения, пределов интегрирования и

переменной интегрирования:

2 Щелкните на поле внизу и наберите **0.** Щелкните на верхнем поле и нажмите клавиши **Ctrl + p + / + 4**. Так задаются верхний и нижний пределы интегрирования.

3 Щелкните на поле между знаком интеграла и **d.** Затем напечатайте **sin(x)^2.** Это – подынтегральное выражение.

4 Щелкните на поле после **d** и наберите **x.** Это – переменная интегрирования.

Затем нажмите знак «=», чтобы увидеть результат.

Типовой пример 5.3

1 Для функции f(x) из задания 1 и линейной интерполяции из задания 2 найти производную функции df и производную интерполяции dii. На одном рисунке построить графики df и dii. В точке максимального расхождения графиков найти относительную погрешность.

2 Для функции f(x) из задания 1 и кубической интерполяции из задания 2 найти производную функции df и производную интерполяции dci. На одном рисунке построить графики df и dci. В точке максимального расхождения графиков найти относительную погрешность.

3 Найти определенные интегралы по промежутку [x_1, x_4] от f(x), линейной интерполяции и кубической интерполяции. Найти относительную погрешность, обусловленную заменой f(x), на каждый вид приближенной функции.

4 Свести в одну таблицу все найденные погрешности для функции (задание 2), производной и интеграла.

5 На основании таблицы сделать вывод о допустимости применения аппроксимации при интегрировании и дифференцировании.

Описание выполнения задания:

1 Для выполнения пункта 1 задания выполняем следующее:

1.1 Создаем новый документ и задаем функцию.

1.2 Задаем оператор производной:

1.2.1 Задаем оператор производной, нажав на клавиатуре символ «**?**».

1.2.2 Заполняем появившийся шаблон (.

1.3 Получаем формулу производной. Для этого:

1.3.1 Выбираем оператор производной и в меню *SYMBOLICS* выбираем пункт **Simplify.** Ниже оператора производной появится формула производной.

1.3.2 Полученная формула производной является обычным текстом, поэтому, чтобы сделать ее функцией, ниже переприсваиваем функции **df(x)** значение полученного символьного представления формулы производной.

1.4 Чтобы задать производную функции линейной интерполяции dF(x):

x:= y:=

1.4.1 Задаем векторы исходных данных и, предварительно подсчитав значения производной функции в точках интерполяции

,

1.4.2 Задаем функцию производной интерполяции, напечатав **dF(x):linterp(X,Y,x).**

1.5 Строим график производной функции и производной линейной интерполяции.

1.6 По графику видно, что точка максимального расхождения имеет приблизительную координату по оси абсцисс **1.63.**

1.7 Задаем формулу нахождения относительной погрешности

Ot_Pogresh:= | df(0.63)-dF(1.63)| · и получаем, что она составляет 113.175%.

1.8 Сохраняем файл задания.

Распечатка задания в *Mathcad* представлена на рисунке 5.1.

Рисунок 5.1

2 Для выполнения пункта 2 задания выполняем следующее:

2.1 Сохраняем файл, полученный в пункте 1 задания под новым именем.

2.2 Получаем коэффициент кубического сплайна **vs:=csplinc(X,Y);**

2.3 Исправляем формулу интерполяции **dF(x):=interp(vs,X,Y,x);**

2.4 По графику видно, что точка максимального расхождения имеет приблизительную координату по оси абсцисс **1.6.**

Относительная погрешность в случае применения кубической интерполяции составила **39.023 %.**

Распечатка задания в *Mathcad* представлена на рисунке 5.2.

Рисунок 5.2

3 Для выполнения пункта 3 задания:

3.1 Создаем новый документ.

3.2 Записываем функцию $f(x):=3+\sin(4+x^2)$.

3.3 Задаем векторы исходных данных X:= и Y:=

3.4 Записываем функцию линейной интерполяции Fl(x)**:**=linterp(X,Y,x), коэффициента кубического сплайна vs**:**=cspline(X,Y) и кубической интерполяции Fk(x)**:**=interp(vs,X,Y,x).

3.5 Вычисляем определенный интеграл f(x), для этого:

3.5.1 На панели инструментов **Calculus** выбираем кнопку **Definite Integral;**

3.5.2 Заполняем появившейся шаблон определенного интеграла и нажимаем клавишу «**=**».   Определенный интеграл равен **–4.792.**

3.6 Аналогично вычисляем определенные интегралы для функций Fl(x) и Fk(x). Определенные интегралы равны **–4.926** и **–5.146** соответственно.

3.7 Записываем формулы нахождения относительных погрешностей:

Ot_PogreshFl**:**= | - 4.792− (- 4.926)| Ot_PogreshFl = 2.796,

Ot_PogreshFk**:**= | - 4.792− (- 5.146)| Ot_PogreshFk = 7.387.

Распечатка задания в *Mathcad* представлена на рисунке 5.3.

Рисунок 5.3

4 Таблица погрешностей функции, производной и интеграла:

	Погрешность, %		
	Функция	Производная	Интеграл
Линейная интерполяция	16.156	113.175	-2.796
Кубическая интерполяция	18.139	39.023	-7.387

5 Вывод.

Как уже было сказано ранее, в ходе выполнения заданий использовались «грубые» интерполяции, т.к. взяты всего 4 узла, отстоящие друг от друга на «большом» расстоянии, что не обеспечивает высокую степень точности. Число интерполяций не ограничено, и его нужно выбирать так, чтобы конечная разность $\Delta^N y_0$ была постоянна с заданной точностью. Поэтому полученная погрешность для линейной интерполяции составляет 16.156 % и для кубической – 18.139 %, т.е. достаточно высока. Кроме того, от кубической интерполяции ожидается меньшая относительная погрешность при соблюдении требований к интерполяционной функции. То же можно сказать и о применении интерполяции при интегрировании.

При дифференцировании линейная интерполяция дает очень высокую степень погрешности, поэтому более применима интерполяция квадратичная, кубическая и т.д.

НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Найти экстремум функции в системе *Mathcad* можно только для функций, имеющих конечное число экстремумов и не содержащих бесконечных разрывов.

Для функций, имеющих бесконечное число экстремумов (обычно это функции, в состав которых входят тригонометрические функции), нужно задать интервал поиска экстремума. Для удобства желательно построить график функции и определить нужный диапазон изменения переменной, на котором функция имеет экстремум.

Сведения по пакету *Mathcad*

Для поиска максимумов и минимумов любых алгебраических выражений по одной или нескольким переменным используются функции вида:

P:=Minimize(<имя функции>,<список переменных>),
P:=Maximize(<имя функции>,<список переменных>),

где P – имя переменной для результата.

Эта функция может использоваться для поиска экстремальных значений выражений от одной или нескольких переменных. Ограничения могут отсутствовать, задаваться выражениями или уравнениями.

В качестве решений функция возвращает множество точек.

Пример 5.4

Найти минимальное значение функции $f(x,y)= (x+2)^2+y^2+3$.

Последовательность действий:

Действие	Вид в *Mathcad*	Кодировка
1 Записать функцию	$f(x,y):=x^2+y^2+3$	f(x,y):(x+2)^2+y^2+3
2 Задать начальные значения для переменных	x:=1 y:=1	x:1 y:1
3 Записать функцию поиска минимума	P:=Minimize(f,x, y)	P:Minimize(f,x,y)
4 Получить значения переменных, при которых функция достигает минимума		P =
5 Посчитать значение функции в этой точке	f(-2,0)=3	f(-2,0)=

Пример 5.5
Найти максимальное значение функции z(x) = │x-5│-│x│-│7x+3│.
Последовательность действий:

Действие	Вид в *Mathcad*	Кодировка
1 Записать функцию	z(x):=│x-5│-│x│-│7x+3│	z(x) :│x-5│-│x│-│7*x+3│
2 Задать начальные значения для переменных	x:=0	x:0
3 Записать функцию поиска минимума	P:=Maximize(z,x)	P:Maximize(z,x)
4 Получить значение переменной, при котором функция достигает минимума	P = -0.429	P =
5 Посчитать значение функции в этой точке	z (P) = 5	z(P) =

Пример 5.6
Найти минимальное значение функции $f(x,y) = x^2+y^2$ при x∈[-10,10] и y∈[10,20].
Последовательность действий:

Действие	Вид в *Mathcad*	Кодировка
1 Записать функцию	$f(x,y):=x^2+y^2$	f(x,y):x^2+y^2
2 Задать начальные значения для переменных	x:=1 y:=1	x:1 y:1
3 Записать ключевое слово для начала блока решения	Given	Given
4 Задать ограничения на переменные	x≥-10 x≤10 y≥10 y≤20	x «Ctrl +0»-10 x «Ctrl +9» 10 y «Ctrl +0» 10 y «Ctrl +9» 20

5 Записать функцию поиска минимума	P:=Minimize(f,x,y)	P:Minimize(f,x,y)
6 Получить значения переменных, при которых функция достигает минимума		P =
7 Посчитать значение функции в этой точке	f(0,10) = 100	f(0,10)=

Типовой пример 5.7

1 Для функции $f_1(x)$, имеющей конечное число экстремумов, найти экстремумы; построить график функции, включающей в себя все найденные экстремумы.

2 Для функции $f_2(x)$, имеющей бесконечное число экстремумов, найти два экстремума; построить график функции, включающие в себя найденные экстремумы.

3 Построить на одном рисунке графики функции и ее производной. Проанализировать взаимообусловленность графиков функции и производных.

$f_1(x)$	$f_2(x)$
$x / (1+x^4)$	E

Описание выполнения задания:

1 Для выполнения пункта 1 выполняем следующее:

1.1 Задаем функцию f(x):= .

1.2 Строим график функции.

1.3 По графику видно, что начальное значение переменной x для нахождения экстремумов выбираем равным **–2,** поэтому ниже графика вводим x:= –2.

1.4 Записываем функцию поиска минимума P:=Minimize(f,x).

1.5 Определяем значение абсциссы точки минимума P:= –0,76, и значение функции в этой точке f (0,76) = -0,57.

1.6 Записываем функцию поиска максимума P:=Maximize(f,x).

1.7 Определяем значение абсциссы точки максимума P:= 0,76, и значение функции в этой точке f (0,76) = 0,57.

1.8 Сохраняем файл.

Распечатка задания в *Mathcad* представлена на рисунке 5.3.

Рисунок 5.3

2 Для функции, имеющей бесконечное число экстремумов, нужно задать интервал поиска экстремума. Для удобства лучше всего построить график функции и определить нужный диапазон изменения переменной, на котором функция имеет экстремумы. Для выполнения пункта 2 задания выполняем следующее.

2.1 Создаем новый файл.

2.2 Задаем функцию f(x):= e

2.3 Строим график функции.

2.4 По графику видно, что для нахождения локальных экстремумов функции нужно задать интервал изменения переменной x, равный, например, **[-5;2],** поэтому ниже графика вводим начальное значение переменной x: x**:**=–5. Затем записываем ключевое слово **given** для определения блока решения; и затем ограничения на переменную x, используя панель инструментов **Evaluation:** $x \geq -5$ $\mathbf{x} \leq 2$.

2.5 Аналогично пунктам 1.4…1.7 определяем координаты локальных минимума и максимума функции

P**:**=minimize(f,x) P= –3.142 f(P) =1

P**:**=maximize(f,x) P=0 f(P) = 4.113

Распечатка задания в *Mathcad* представлена на рисунке 5.4.

Рисунок 5.4

3 Для выполнения пункта 3 задания выполняем следующее:

3.1 Создаем новый файл.

3.2 Задаем функции $f1(x) := \frac{x}{1+x^4}$ $\quad f2(x) := e^{\sqrt{1+\cos(x)}}$

3.3 Строим графики функций и их производных.

Распечатка задания в *Mathcad* представлена на рисунке 5.5.

На основании полученных графиков делаем вывод, что функция и ее производная взаимообусловлены, т.к. производная показывает направление изменения функции и, в точках, где она равна нулю, ее экстремумы.

Рисунок 5.5

В начало

Лекция 6

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Решение одного уравнения

Для решения одного уравнения с одним неизвестным используется функция **root**. Общая форма записи: **root(f(x),x).**

Здесь первый элемент – функция **f(x)** – определяется где-либо в рабочем документе или задается непосредственно в операторе **root**. Второй аргумент **x** – имя переменной, которое используется в выражении. Это та переменная, варьируя которую *Mathcad* будет пытаться обратить выражение в ноль. Этой переменной перед использованием функции **root** необходимо присвоить числовое значение. *Mathcad* использует его как начальное значение при поиске корня.

Рассмотрим пример решения уравнения $\mathbf{e^x = x^3}$.

Выполним следующие шаги**:**

1 Определим начальное значение переменной **x**: **x:=3**

2 Введем **x:3** . Выбор начального приближения влияет на корень, возвращаемый *Mathcad* (если выражение имеет несколько корней).

3 Определим выражение, которое должно быть обращено в ноль. Для этого перепишем уравнение в виде

$$\mathbf{x^3 - e^x = 0}.$$

Левая часть этого выражения и является вторым аргументом функции **root.**

4 Определим переменную **y** как корень уравнения. Для этого введем

y: root(x^3 – e^x,x) $\mathbf{y:=root(x^3 - e^X,x)}$

5 Напечатаем **y=,** чтобы увидеть значение корня: **y=1.857**

*При использовании функции **root** следует иметь в виду*:

- Переменной присваивается начальное значение до начала использования функции **root.**
- Для выражения с несколькими корнями, например $\mathbf{x^2 - 1 = 0}$**,** начальное значение определяет корень, который будет найден *Mathcad*. На рисунке 3 приведен график функции $x^3 - 10x + 2$, необходимый для выбора начального приближения для использования функции ***root***.

X**:**= –10, -9.9..10

Рисунок 3

Для нахождения трех различных корней используются три начальных приближения:

X**:**=-2 $root(x^3 - 10x+2,x) = -3.258$

X**:**= 0 $root(x^3 - 10x+2,x) = 0.201$

X**:**= 3 $root(x^3 - 10x+2,x) = 3.057$

Mathcad позволяет находить как комплексные, так и вещественные корни. Для поиска комплексного корня следует взять в качестве начального приближения комплексное число.

Задача решения уравнения вида **f(x)=g(x)** эквивалентна задаче поиска корня выражения **f(x) – g(x) = 0** .Для этого функция **root** может быть использована следующим образом:

root(f(x)-g(x),x).

Нахождение корней полинома

Для нахождения корней полинома

$$A_nX^n + \cdots + A_2X^2 + A_1X + A_0 = 0$$

лучше использовать функцию **polyroots.** В отличие от функции **root** функция **polyroots** не требует начального приближения. Кроме того, функция **polyroots** возвращает сразу все корни, как вещественные, так и комплексные. Ниже приведен пример использования функции **polyroots**.

Polyroots(v) – Возвращает корни полинома степени **n**. Коэффициенты полинома находятся в векторе **v** длины **n+1**. Возвращает вектор длины **n**, состоящий из корней полинома.

Пример 6.1

$X^3-10\cdot X+2$ ←**Полином** (см. график на рис. 3)

V:= ←**Коэффициенты полинома**

polyroots(v)= ←**Возвращает сразу все ответы**

Пример 6.2

$x^3 + (3 + 2i)\cdot x^2 + (-4 + 6i)\cdot x - 8i$ ←**Требуется найти корни многочлена с комплексными коэффициентами**

v:= ←**Вектор коэффициентов**

Polyroots(v) = ←**Возвращаются все корни**

Решение системы уравнений

Для решения систем уравнений необходимо выполнить следующие действия:

1 Задать начальные приближения для всех неизвестных, входящих в систему уравнений. *Mathcad* решает уравнения при помощи итерационных методов. На основе начального приближения строится последовательность, сходящаяся к искомому решению.

2 Напечатать ключевое слово ***Given***. Оно указывает *Mathcad*, что далее следует система уравнений. При печати слова ***Given*** можно использовать любой шрифт, прописные и строчные буквы. Убедиться, что при этом вы не находитесь в текстовой области или параграфе.

3 Ввести уравнения и неравенства в любом порядке ниже ключевого слова ***Given***. Удостовериться, что между левыми и правыми частями уравнений стоит символ «=». Используйте клавиши «**[ctrl]** =» для печати символа «=». Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов: «<», «>», «≤» и «≥».

4 Ввести любое выражение, которое включает функцию ***Find***. При печати слова Find можно использовать шрифт любого размера, произвольный стиль, прописные и строчные буквы.

- ***Find (z1, z2, z3, . . .)*** – возвращает решение системы уравнений; число аргументов должно быть равно числу неизвестных .

Функция ***Find*** возвращает найденное решение следующим образом:

- Если функция ***Find*** имеет только один аргумент, то она возвращает решение уравнения, расположенного между ключевым словом ***Given*** и функцией ***Find***.
- Если функция ***Find*** имеет более одного аргумента, то она возвращает ответ в виде вектора. Например, ***Find*** (*z1* , *z2*) возвращает вектор, содержащий значения z1 и z2, являющиеся решением системы уравнений.

Ключевое слово ***Given***, уравнения и неравенства, которые следуют за ним, и какое-либо выражение, содержащее функцию ***Find***, называются блоком решения уравнений. Между ключевым словом ***Given*** и функцией ***Find*** в блоке решения уравнений могут появляться выражения строго определенного типа. Ниже приведен список всех выражений, которые могут быть использованы в блоке решения уравнений. Использование других выражений не допускается. Эти выражения часто называются ограничениями. В таблице 5, приведенной ниже, через *x* и *y* обозначены вещественные скалярные выражения, а через *z* и *w* обозначены любые скалярные выражения.

Таблица 6.1

Условие	Как ввести	Описание
w = z	**[ctrl] =**	Булево равенство возвращает 1 , если операнды равны; иначе 0
x > y	<	Больше чем
x < y	>	Меньше чем
x ≥ y	**[ctrl] 0**	Больше либо равно
x ≤ y	**[ctrl] 9**	Меньше либо равно
w ≠ z	**[ctrl] 3**	Не равно

Следующие выражения недопустимы внутри блока решения уравнений:

- ограничения со знаком ≠;
- дискретный аргумент или выражения, содержащие дискретный аргумент в любой форме;
- неравенства вида a < b < c .

Ниже показан блок решения уравнений, в котором использованы некоторые виды ограничений на искомое решение. Решаются два уравнения с двумя неизвестными. В результате функция Find содержит два аргумента: x и y, и возвращает ответ в виде вектора с двумя компонентами.

Пример 6.3

Найти точки пересечения окружности и прямой (блок решения уравнений для системы из двух уравнений с двумя неизвестными и ограничениями на переменные в виде неравенств).

Начальные значения: **x:=1**
y:=1

Given

$x^2+y^2=6$ ← **Окружность**
x+y=6 ← **Прямая**
x≤1 ← **Ограничения в пространстве**
y>2

:= Find(x,y)

Решение:

xval = - 0.414
yval = 2.414

Проверка найденного решения:

$xval^2 + yval^2 = 6$ **xval + = 2**

Что делать, когда Mathcad не может найти решения?

- Если в результате решения уравнений на каком-либо шаге итераций не может быть найдено более приемлемое приближение к искомому решению по сравнению с предыдущим шагом, то поиск решения прекращается, а функция *Find* помечается сообщением об ошибке «*решение не найдено*».
- Если при поиске решения встречаются трудности, то полезно *вывести те или иные графики*, связанные с системой. Анализ графика может облегчить поиск области, в которой может находиться искомое решение. Это поможет выбрать подходящее начальное приближение.
- Иногда полезно искомое уравнение в окрестности корня заменить полиномом Тейлора.

Типовой пример 6.4

Решить систему уравнений с точностью 0.00001.

Описание выполнения задания:

Системы алгебраических уравнений в *Mathcad* можно решать используя специальные решающие блоки

(Solve block)

$\overline{x:=0\ \ y:=1\ \ TOL:=1\cdot 10^{-5}\ \ .}$

1 Задаем начальные приближения для переменных и точности.
2 Записываем ключевое слово **Given**.
3 Записываем систему уравнений.
4 Записываем ключевое слово **Find(x,y)=**.

Find(xylem)=

5 Получили решение

Распечатка задания в *Mathcad* представлена на рисунке 6.1

Рисунок 6.1

В начало

Лекция 7

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

Обыкновенное дифференциальное уравнение – дифференциальное уравнение, в котором неизвестным является функция одной переменной.

Итогом решения дифференциального уравнения является функция, которая в зависимости от способа решения может иметь вид таблицы (как в случае использования метода Рунге-Кутта) или формулы.

Как известно из курса дифференциальных уравнений, лишь небольшое число типов уравнений первого порядка допускают сведение решения к обычной операции интегрирования. Еще реже удается получить решение в элементарных функциях. Поэтому большое значение имеют численные методы решения дифференциальных уравнений, позволяющие получить таблицу значений функции в требуемых точках.

В *Mathcad* существует 13 встроенных функций для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений различного порядка различными методами. Рассмотрим одну из них – rkfixed – метод Рунге-Кутта 4-го порядка с фиксированным шагом интегрирования. Этот метод имеет точность порядка h^5 (h – шаг интегрирования).

Вид функции:

Z:=rkfixed(y,x1,x2,npoints,D),

где y – вектор начальных значений искомых решений;
x1 – значение точки начала отрезка интегрирования;
x2 – значение точки конца отрезка интегрирования;
npoints – число шагов интегрирования;
D – функция – вектор правых частей.

Рассмотрим несколько *примеров* записи обыкновенного дифференциального уравнения в пакете *Mathcad*.

1 Дано уравнение .

Запишем вектор D. Число строк этого вектора равно порядку уравнения,

фактически мы записываем уравнение как систему: . Обозначим .

Получим . Начальные условия записываются в виде , значит .

2 Дано уравнение .

В этом случае , начальные условия записываются так же, как в предыдущем примере.

3 Дано уравнение

.

В этом случае, ,

начальные условия: .

Функция rkfixed возвращает матрицу Z с (p+1) столбцами и n строками (p – количество уравнений в системе или порядок уравнения). Z – таблица решений системы: первый столбец – это значения аргумента, задаваемого пользователем, второй столбец – ординаты искомой функции, остальные столбцы – значения ординат производных искомой функции.

Пример 7.1

Найти решение д.у.

$$y''=-y'+2y,$$

при следующих начальных условиях: $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

Решение

Рассмотрим аргументы функции rkfixed. В данном примере это:

- начальные условия,

$x1=0$, $x2=2$ – на этом отрезке ищем решение,

npoints=400– число шагов интегрирования,

Примечание. Нижний индекс в *Mathcad* можно поставить с помощью клавиши «[» или панели инструментов ***Арифметическая***.

Вид решения в среде *Mathcad*:

Получили таблицу, в которой первый столбец – 400 точек интервала интегрирования [0; 2], второй – значения искомой функции в этих точках, третий – значения первой производной. Так как таблица очень длинная, на экране представляется ее фрагмент (рис.7.1). Полностью просмотреть таблицу можно с помощью линеек прокрутки.

Z =

	0	1	2
24	0.12	1.355	2.928
25	0.125	1.369	2.927
26	0.13	1.384	2.926
27	0.135	1.399	2.925
28	0.14	1.413	2.925
29	0.145	1.428	2.924
30	0.15	1.443	2.924
31	0.155	1.457	2.924
32	0.16	1.472	2.924
33	0.165	1.486	2.924
34	0.17	1.501	2.925
35	0.175	1.516	2.925
36	0.18	1.53	2.926
37	0.185	1.545	2.926
38	0.19	1.56	2.927
39	0.195	1.574	2.928

Рисунок 7.1

Строим график функции решения, где по оси абсцисс откладывают точки нулевого столбца матрицы $Z^{<0>}$ (верхний индекс набирается с помощью клавиш **Ctrl + 6**), по оси ординат – $Z^{<1>}$. Это приближенный график функции решения дифференциального уравнения.

Типовой пример 7.2

Для заданных в таблице дифференциальных уравнений (вначале с правой частью вида f1, затем с правой частью вида f2) найти решения на отрезке $[x_n, x_k]$ и построить графики решений.

Левая часть	**Правые части**		**Начальные условия**		**Интервал**	
	f1	**f2**	**Y(0)**	**y′(0)**	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{x_k}$
y^n+9y	0	$5(x+2)^2$	0	3	0	5

Описание выполнения задания:

Воспользуемся для нахождения приближенного решения дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта 4-го порядка с фиксированным шагом интегрирования (функция **rkfixed**). Вид функции для решения дифференциального уравнения будет иметь следующий вид:

Z:=rkfixed(y,x1,x2,npoints,D),

где **y –** вектор начальных значений искомых решений;
x1 – значение точки начала отрезка интегрирования;
x2 – значение точки конца отрезка интегрирования;
npoints – число шагов интегрирования;
D – функция-вектор правых частей. Число строк этого вектора равно порядку уравнения (в нашем случае это 2).

Функция **rkfixed** возвращает матрицу с **p+1** столбцами и **n** строками (p – порядок уравнения или количество уравнений в системе). Z – таблица решений системы: первый столбец – это значения аргумента, задаваемого пользователем, второй столбец – ординаты искомой функции, остальные столбцы – значения ординат производных искомых функций.

1 Создаем новый файл.

2 Для нахождения решения дифференциального уравнения с правой частью вида $\mathbf{f_1}$ выполняем следующее:

2.1 Вводим вектор начальных условий y**:=** .

2.2 Вводим значения точек начала и конца интегрирования: x_1**:**=0, x_2**:**=5.

2.3 Задаем число шагов интегрирования: npoints**:**= 400

2.4 Задаем функцию-вектор правых частей: D(x,y)**:**= .

2.5 Задаем функцию для решения дифференциального уравнения:

Z**:**= rkfixed(y,x1,x2,npoint,D).

2.6 Строим график функции решения, где по оси абсцисс откладываем точки нулевого столбца матрицы $Z1^{<0>}$ (верхний индекс набирается с помощью клавиш **Ctrt + 6**), по оси ординат – $Z1^{<1>}$.

3 Для нахождения решения дифференциального уравнения с правой частью вида f_2 выполняем следующее:

3.1 Задаем функцию-вектор правых частей: D(x,y)**:**= .

3.2 Задаем функцию для решения дифференциального уравнения: Z**:**= rkfixed(y,x1,x2,npoint,D).

3.3 Строим график функции решения, где по оси абсцисс откладываем точки нулевого столбца матрицы $Z1^{<0>}$ (верхний индекс набирается с помощью клавиш «Ctrt + 6»), по оси ординат - $Z1^{<1>}$.

Распечатка задания в *Mathcad* представлена на рисунке 7.1.

Рисунок 7.2

[В начало](#)

Лекция 8

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для построения графика функции двух переменных (рис.6) необходимо:

1 Определить саму функцию.

2 Ввести граничные точки для изменения обеих переменных.

3 Указать количество точек разбиения по обеим осям.

4 В общем виде перечислить множество точек, в которых будет вычисляться значение функции.

5 Определить матрицу значений функции.

6 Нажать **Ctrl + 2**.

7 В появившемся шаблоне указать имя матрицы значений функции.

Пример 8.1

Определение функции f **:** f(x,y)**:**=cos(x+sin(y)).

Ввод конечных точек отрезка по оси x:

xlow:=0 ; xhigh:=2π

Ввод количества точек разбиения по оси x, включая концы отрезка:

xn:=20

Ввод конечных точек отрезка по оси y:

ylow:=0

yhigh:=2π

Ввод количества точек разбиения по оси y, включая концы отрезка:

yn:=20

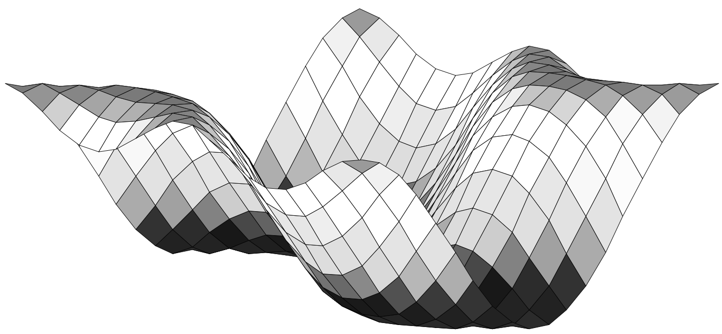
i:=0..xn-1

$xind_i$:=xlow+i(xhigy-xlow)/(xn-1)

j:=0..yn-1

$yind_j$:=ylow+j(yhigy-ylow)/(yn-1)

$M_{i,j}$:=f($xind_i$,$yind_j$)



M

Рисунок 8.1 – Поверхностный график

Двойной щелчок левой кнопкой мыши в свободном от рисунка поле шаблона открывает опции для изменения параметров рисунка.

В начало

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 MathCAD 6.0 plus. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. – Изд. 2-е, стереотипное. – М.: Информационно-издательский дом «Филинъ», 1997. – 712 с.

2 Плис Е.А., Сливина Н.А. MathCAD 2000: Математический практикум для экономистов и инженеров: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 656 с.

В начало