

**Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія**

**В.А.Овчаренко,
С.В.Капорович,
О.Ю.Деньщиков**

ОПІР МАТЕРІАЛІВ
Практикум
Частина 1

**Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів технічних вузів**

Краматорськ 2010

УДК 539.3/6
ББК 30.121
О-35

Рецензенти:

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № від)

Овчаренко, В. А.

О-35 Опір матеріалів : практикум (для студентів механічних спеціальностей) / В. А. Овчаренко, С. В. Капорович, О. Ю. Деньщиков. – Краматорськ : ДДМА, 2010. – Ч. 1. – 180 с.
ISBN

Містяться стислі теоретичні відомості за кожним розділом опору матеріалів, наводяться різноманітні приклади розв'язання основних типів задач і подається аналіз одержаних результатів. Перша частина присвячена вивченню випадків простого навантаження (розтягання-стискання, кручення, просте згинання), наведено приклади визначення геометричних характеристик перерізу та розрахунків плоского напруженого стану.

УДК 539.3/6
ББК 30.121

ISBN

© В. А. Овчаренко, С. В. Капорович,
О. Ю. Деньщиков, 2010
© ДДМА, 2010

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Визначення реакцій опор.....	5
2 Розтягання-стискання	9
2.1 Основні положення теорії.....	9
2.2 Розрахунки на розтягання-стискання статично визначуваних систем.....	11
2.3 Розрахунки на розтягання-стискання статично не визначуваних систем	20
3 Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок та плоских рам.....	37
3.1 Основні положення теорії.....	37
3.2 Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок.....	38
3.3 Побудова епюр внутрішніх зусиль для рам	47
4 Геометричні характеристики плоских перерізів	60
4.1 Основні положення теорії.....	60
4.2 Визначення геометричних характеристик плоских перерізів.....	65
5 Згинання	83
5.1 Основні положення теорії.....	83
5.2 Визначення нормальних та дотичних напружень при згинанні ...	85
5.3 Повна перевірка міцності при згинанні	125
6 Кручення	150
6.1 Основні положення теорії.....	150
6.2 Розрахунки на кручення статично визначуваних систем.....	153
6.3 Розрахунки на кручення статично не визначуваних систем.....	160
Література	171
ДОДАКИ	
Додаток А. Двотавр. ДСТУ 8239-72	173
Додаток Б. Швелер. ДСТУ 8240-72	174
Додаток В. Кутик рівнобокий. ДСТУ 8509-72	175
Додаток Г. Кутик нерівнобокий. ДСТУ 8510-72	177
Додаток Д. Значення коефіцієнта ϕ	179

ВСТУП

Опір матеріалів є однією з основних загальноосвітніх інженерних дисциплін і грає суттєву роль у формуванні інженера будь-якої спеціальності. Особливо велике значення опір матеріалів має для механічних, машинобудівних і будівельних інженерних спеціальностей.

У курсі „Опір матеріалів“ вивчаються поняття про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд.

Під міцністю розуміють здатність конструкції і її деталей витримувати певне навантаження, не руйнуючись.

Під жорсткістю розуміють здатність конструкції і її елементів протистояти зовнішнім навантаженням відносно деформації (зміна форми і розмірів), тобто при заданих навантаженнях деформації не повинні перевищувати певної величини.

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

Щоб конструкція в цілому відповідала вимогам міцності, жорсткості і стійкості і була надійною в експлуатації, необхідно надати її елементам найбільш раціональної форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вони виготовлятимуться, визначати відповідні розміри залежно від величини і характеру діючих навантажень.

При вивченні опору матеріалів слід зважати на те, що введення до навчальних програм вищих технічних навчальних закладів нових дисциплін, що відображають сучасний стан науки і техніки, при обмежених термінах навчання призвело до суттєвого скорочення кількості аудиторних занять з курсу „Опір матеріалів“. Заповнення пропусків, що з'явилися внаслідок цього, у знанні студентами опору матеріалів може бути досягнуте певною мірою за рахунок самостійного вивчення ними необхідних розділів цього важливого для майбутнього інженера курсу за відповідними підручниками.

Основним недоліком наведених вище підручників є те, що вони містять малу кількість прикладів вирішення задач за кожним розділом і не можуть передати особливості практичних рішень. Тому мета цього навчального посібника полягає в наданні допомоги студентові при розв'язанні задач з оцінки міцності, жорсткості і стійкості конструкцій при різноманітних видах їх навантаження. Для цього в кожному розділі наведено основні теоретичні передумови у вигляді остаточних формул, таблиць і графіків та приклади розв'язання задач.

Перша частина присвячена вивченню випадків простого навантаження (розтягання-стискання, кручення, просте згинання), наведено приклади визначення геометричних характеристик перерізу та розрахунків плоского напруженого стану.

1 ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР

Як правило, балки мають ті або інші опорні закріплення – опори. Конструктивні форми опор досить різноманітні. Для розрахунку їх схематизують у вигляді трьох основних типів опор:

1 Шарнірно-рухлива опора, у якій може виникати тільки одна складова реакції – R_A , спрямована уздовж опорного стрижня (рис. 1.1).

2 Шарнірно-нерухома опора, у якій можуть виникати дві складові – вертикальна реакція R_A та горизонтальна реакція H_A (рис. 1.2).

3 Защемлення (жорстке защемлення), де можуть бути три складові – вертикальна R_A та горизонтальна H_A реакції та опорний момент M_A (рис. 1.3).

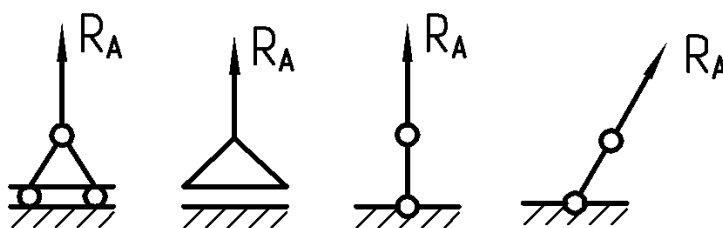


Рисунок 1.1

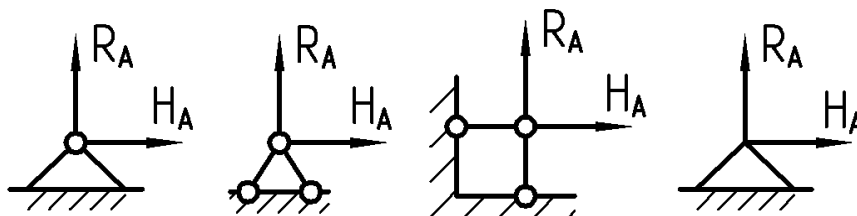


Рисунок 1.2

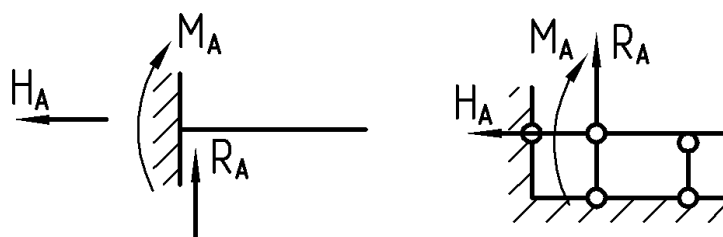


Рисунок 1.3

1 Опори звичайно позначають буквами А і В (рис. 1.4). Три невідомі реакції можна знайти з наступних рівнянь рівноваги:

а) сума проекцій усіх сил на вісь балки дорівнює нулю:

$$\sum P_z = 0, \text{ звідки знаходять } H_A \text{ (або } X_A \text{)};$$

б) сума моментів усіх сил щодо шарніра A дорівнює нулю:

$$\sum M_A = 0, \text{ звідки знаходять } R_B;$$

в) сума моментів усіх сил щодо шарніра B дорівнює нулю:

$$\sum M_B = 0, \text{ звідки знаходять } R_A.$$

2 Якщо на балку діє розподілене навантаження, то для визначення реакцій його замінюють рівнодіючою, котра дорівнює площі епюри навантаження та прикладена в центрі ваги цього навантаження.

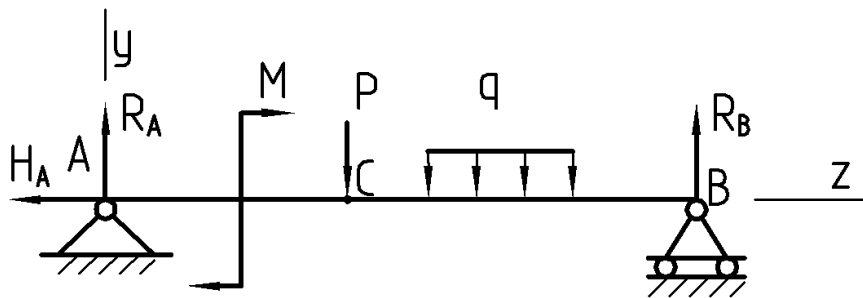


Рисунок 1.4

3 Знайдені реакції обов'язково варто перевірити, для чого зручно використати або дорівненість нулю суми проекцій усіх сил на вертикальну вісь $\sum P_y = 0$, або умову дорівненості нулю суми моментів усіх сил щодо якої-небудь точки C , відмінної від A і B , тобто $\sum M_C = 0$.

Задача 1.1

Визначити опорні реакції для балки (рис. 1.5).

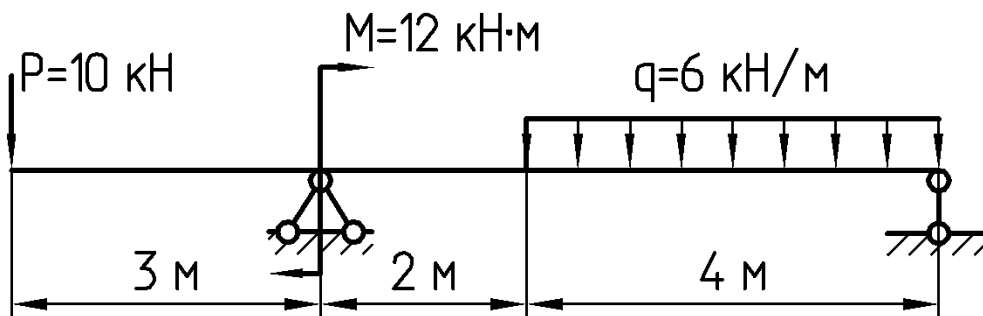


Рисунок 1.5

Розв'язання

1 Опори позначаємо буквами А і В, вибираємо (довільно) напрямок реакцій і зображуємо їх на рисунку (рис. 1.6). Якщо навантаження перпендикулярне до осі балки, то $H_A = 0$.

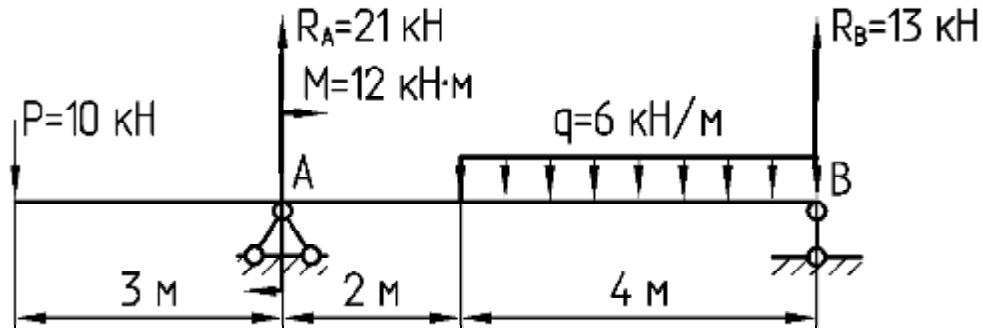


Рисунок 1.6

2 Невідомі реакції опор знаходимо з рівнянь рівноваги:

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M + P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 4 + R_B \cdot 6 = 0,$$

$$R_B = \frac{M - P \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 4}{6} = \frac{12 - 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 4}{6} = 13 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 9 + q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 6 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 9 + q \cdot 4 \cdot 2}{6} = \frac{-12 + 10 \cdot 9 + 6 \cdot 4 \cdot 2}{6} = 21 \text{ кН.}$$

3 Для контролю використаємо умови дорівненості нулю суми проєкцій на вертикаль:

$$\sum P_y = 0,$$

$$-P - q \cdot 4 + R_A + R_B = 0,$$

$$-10 - 6 \cdot 4 + 21 + 13 = 0,$$

$$-34 + 34 = 0.$$

Задача 1.2

Визначити опорні реакції для рами (рис. 1.7).

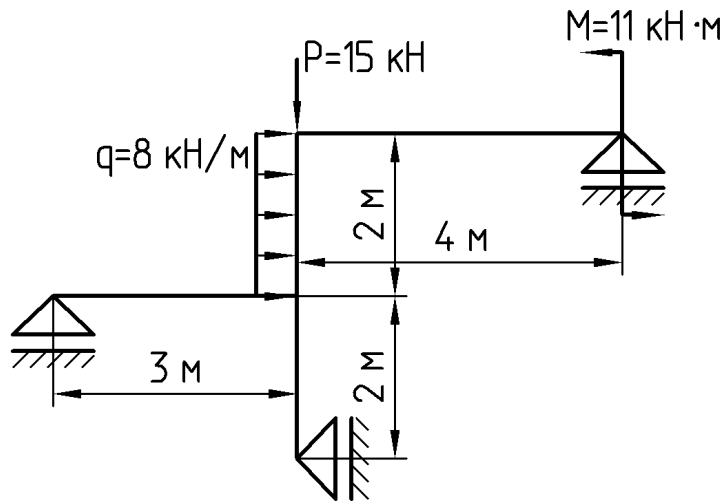


Рисунок 1.7

Розв'язання

1 Опори позначасмо буквами А, В і С, вибираємо напрямки реакцій і зображуємо їх на рисунку (рис. 1.8).

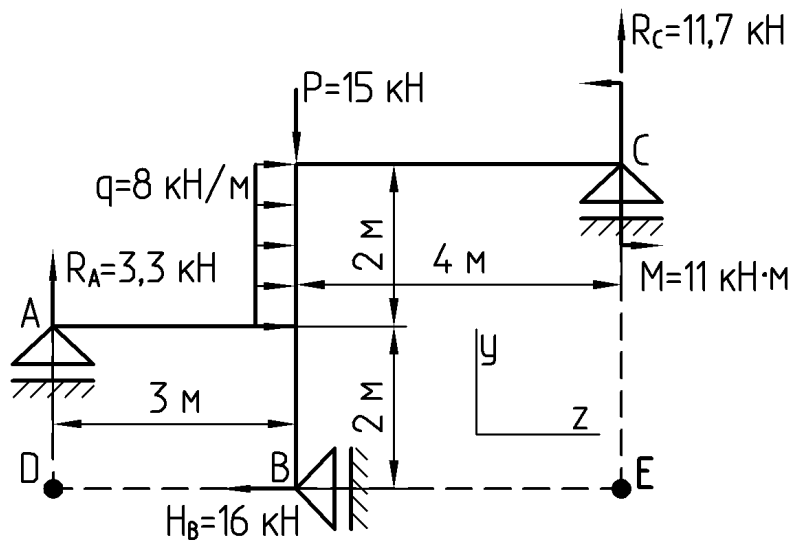


Рисунок 1.8

2 Невідомі реакції опор знаходимо з рівнянь рівноваги:

$$\sum P_z = 0,$$

$$q \cdot 2 - H_B = 0,$$

$$H_B = q \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ кН.}$$

$$\sum M_D = 0,$$

$$M - P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 3 + R_C \cdot 7 = 0,$$

$$R_C = \frac{-M + P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 3}{7} = \frac{-11 + 15 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot 3}{7} = 11,7 \text{ кН.}$$

$$\sum M_E = 0,$$

$$M + P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 - R_A \cdot 7 = 0,$$

$$R_A = \frac{M + P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3}{7} = \frac{11 + 15 \cdot 4 - 8 \cdot 2 \cdot 3}{7} = 3,3 \text{ кН.}$$

3 Для контролю використаємо умови рівності нулю суми проекцій на вертикаль:

$$\sum P_y = 0,$$

$$-P + R_A + R_C = 0,$$

$$-15 + 3,3 + 11,7 = 0,$$

$$-15 + 15 = 0.$$

2 РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ

2.1 Основні положення теорії

При роботі стрижня на розтягання-стискання у його поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор – поздовжня сила N .

Поздовжня сила в довільному поперечному перерізі стрижня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на його поздовжню вісь усіх зовнішніх сил, прикладених з одного боку від розглянутого перерізу.

При розтяганні поздовжню силу прийнято вважати додатною.

Закон зміни поздовжньої сили за довжиною стрижня подають у вигляді графіка – епюри поздовжніх сил.

У поперечних перерізах стрижня виникають тільки нормальні напруження, які визначають за формулою

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (2.1)$$

де N – поздовжня сила;

F – площа поперечного перерізу.

Подовження або вкорочення стрижня визначається за формулою

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \quad (2.2)$$

де l – довжина стрижня;

E – модуль пружності першого роду (модуль Юнга), для сталі $E = (2,0 \div 2,1) \times 10^5$ МПа.

У випадку, якщо стрижень має східчасто-змінний переріз, то для визначення зміни його довжини формулу (2.2) треба застосовувати окремо до кожної з ділянок, у межах якої площа та поздовжня сила постійні, і результати підсумувати:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E F_i}. \quad (2.3)$$

При вирішенні багатьох практичних завдань виникає необхідність поряд з подовженнями, обумовленими напруженнями, ураховувати також подовження, пов'язані з температурними впливами. У цьому випадку повну абсолютну деформацію розглядають як суму силової деформації та чисто температурної:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha l \Delta t, \quad (2.4)$$

де α – температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, для сталі $\alpha = 1,25 \times 10^{-5}$;

Δt – різниця температур до та після нагрівання.

Умова міцності для розтягнутого або стиснутого стрижня записується таким чином:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (2.5)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження.

2.2 Розрахунки на розтягання-стискання статично визначуваних систем

Задача 2.1

Побудувати епюри поздовжніх сил, нормальних напружень за довжиною східчастого стрижня, навантаженого, як показано на рисунку 2.1, а. Визначити подовження стрижня. Матеріал стрижня – Ст3, $E = (2,0 \cdot 10^5) \text{ МПа}$.

Розв'язання

1 Розіб'ємо стрижень на окремі ділянки, починаючи від вільного кінця. Межами ділянок є перерізи, до яких прикладені зовнішні сили, та місця зміни розмірів поперечного перерізу. Таким чином, заданий стрижень має чотири ділянки (AB, BC, CD, DE).

2 Визначимо реакцію защемлення R_A .

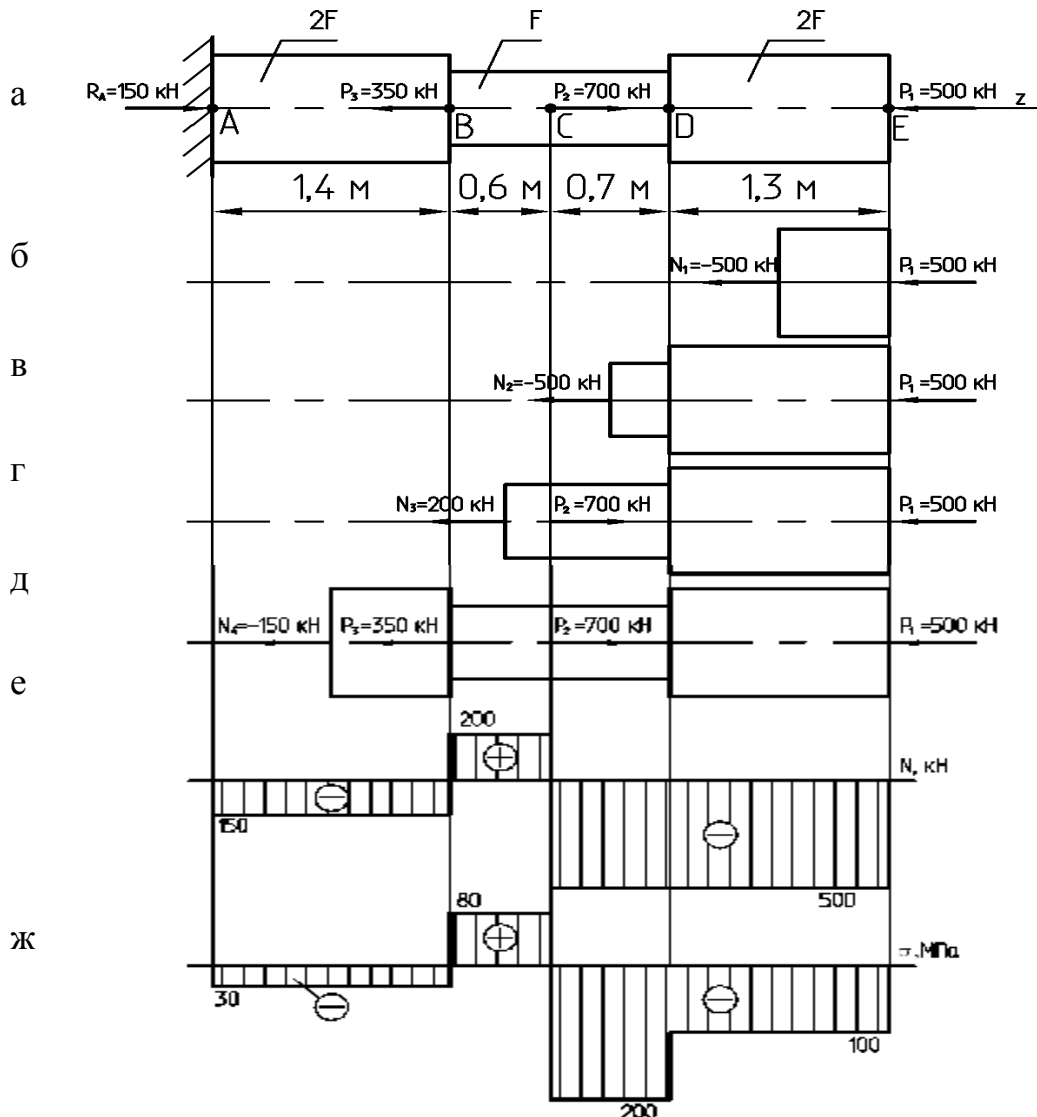


Рисунок 2.1

$$\sum P_z = 0,$$

$$R_A - P_1 + P_2 - P_3 = 0,$$

$$R_A = P_1 - P_2 + P_3 = 500 - 700 + 350 = 150 \text{ кН.}$$

3 Застосовуємо метод перерізів, при цьому залишаємо праву та відкидаємо ліву відсічені частини стрижня. Проведемо довільний переріз на ділянці DE і розглянемо рівновагу відрізаної частини (рис. 2.1, б):

$$-N_1 - P_1 = 0,$$

$$N_1 = -P_1 = -500 \text{ кН.}$$

Знак «-» говорить про те, що ділянка DE стиснута.

Легко помітити, що те саме значення поздовжньої сили зберігається для будь-якого перерізу на ділянці CD (рис. 2.1, в), тобто:

$$N_2 = N_1 = -500 \text{ кН.}$$

Ділянка CD стиснута.

Проведемо довільний переріз на ділянці BC і розглянемо рівновагу відрізаної частини (рис. 2.1, г).

$$-N_3 - P_1 + P_2 = 0,$$

$$N_3 = -P_1 + P_2 = -500 + 700 = 200 \text{ кН.}$$

Ділянка BC розтягнута.

Проведемо довільний переріз на ділянці AB і розглянемо рівновагу відрізаної частини (рис. 2.1, д):

$$-N_4 - P_1 + P_2 - P_3 = 0,$$

$$N_4 = -P_1 + P_2 - P_3 = -500 + 700 - 350 = -150 \text{ кН.}$$

Ділянка AB стиснута.

Будуємо епюру поздовжніх сил (рис. 2.1, е).

4 Епюру нормальних напружень одержимо, визначивши нормальні напруження на кожній з ділянок:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-500 \times 10^{-3}}{2 \cdot 25 \times 10^{-4}} = -100 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-500 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-4}} = -200 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{200 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-4}} = 80 \text{ МПа},$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{-150 \times 10^{-3}}{2 \cdot 25 \times 10^{-4}} = -30 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюру нормальних напружень (рис. 2.1, ж).

5 Визначаємо абсолютне подовження стрижня:

$$\begin{aligned} \Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EF_i} &= \frac{N_1 l_1}{EF_1} + \frac{N_2 l_2}{EF_2} + \frac{N_3 l_3}{EF_3} + \frac{N_4 l_4}{EF_4} = \frac{-500 \times 10^{-3} \cdot 1.3}{2 \times 10^5 \cdot 2 \cdot 25 \times 10^{-4}} + \\ &+ \frac{-500 \times 10^{-3} \cdot 0.7}{2 \times 10^5 \cdot 25 \times 10^{-4}} + \frac{200 \times 10^{-3} \cdot 0.6}{2 \times 10^5 \cdot 25 \times 10^{-4}} + \\ &+ \frac{-150 \times 10^{-3} \cdot 1.4}{2 \times 10^5 \cdot 2 \cdot 25 \times 10^{-4}} = -13,2 \times 10^{-4} \text{ м} = -1,32 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Задача 2.2

З розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів: стрижень 1 – круглого поперечного перерізу, стрижень 2 складається із двох рівнобоких кутиків, стрижень 3 – двотаврового поперечного перерізу (рис. 2.2). Визначити абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

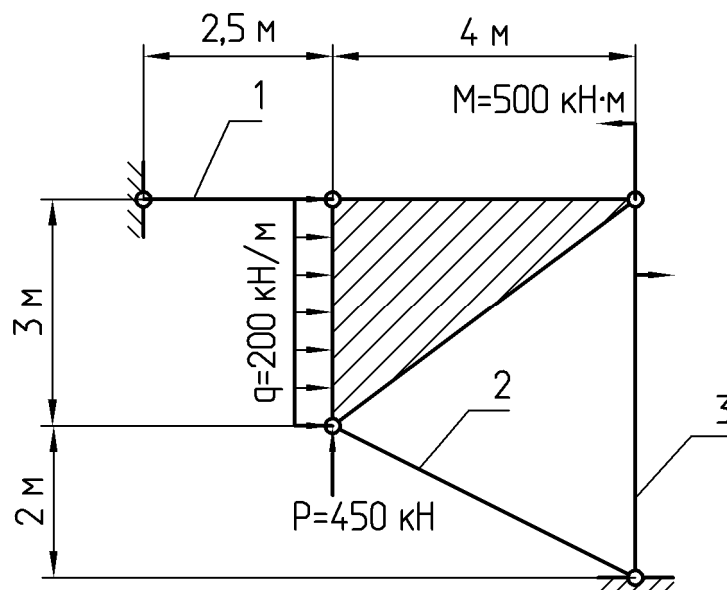


Рисунок 2.2

Розв'язання

1 У розглянутому прикладі в рівновазі перебуває одне тіло – недеформована пластина. Навантаженнями, прикладеними до неї, є: зосереджена сила P , рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q , пари сил з моментом M і зусилля в стрижнях N_1 , N_2 і N_3 . При розв'язанні задачі передбачається, що стрижні 1, 2 та 3 розтягнуті, тобто зусилля спрямовані до точок підвісу стрижнів (рис. 2.3).

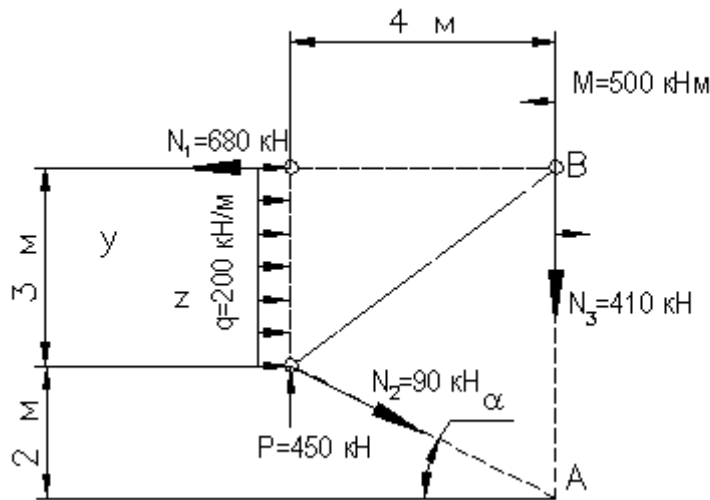


Рисунок 2.3

2 Довжина другого стрижня дорівнює:

$$l_2 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,5 \text{ м.}$$

Визначимо синус та косинус кута α :

$$\sin \alpha = \frac{2}{4,5} = 0,444, \quad \cos \alpha = \frac{4}{4,5} = 0,889.$$

3 Балка перебуває в рівновазі під дією плоскої довільної системи сил. Така система сил має три умови рівноваги.

З рівняння $\sum M_A = 0$ визначимо N_1 :

$$M - P \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 3,5 + N_1 \cdot 5 = 0,$$

$$N_1 = \frac{-M + P \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = \frac{-500 + 450 \cdot 4 + 200 \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = 680 \text{ кН.}$$

З рівняння $\sum M_B = 0$ визначимо N_2 :

$$M - P \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + N_2 \cos \alpha \cdot 5 = 0,$$

$$N_2 = \frac{-M + P \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 1,5}{\cos \alpha \cdot 5} = \frac{-500 + 450 \cdot 4 - 200 \cdot 3 \cdot 1,5}{0,889 \cdot 5} = 90 \text{ кН}.$$

Зусилля N_3 визначимо з рівняння рівноваги $\sum P_y = 0$:

$$P - N_2 \sin \alpha - N_3 = 0,$$

$$N_3 = P - N_2 \sin \alpha = 450 - 90 \cdot 0,444 = 410 \text{ кН}.$$

Перевірка: $\sum P_z = 0$,

$$q \cdot 3 + N_2 \cos \alpha - N_1 = 0,$$

$$200 \cdot 3 + 90 \cdot 0,889 - 680 = 0,$$

$$600 + 80 - 680 = 0,$$

$$680 - 680 = 0.$$

4 Площі поперечних перерізів стрижнів визначаються з умови міцності на розтягання (стискання):

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i} \leq [\sigma] \Rightarrow F_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]}:$$

$$\text{Стрижень № 1} - F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{680 \times 10^{-3}}{160} \times 10^4 = 42,5 \text{ см}^2.$$

$$\text{Так як площа круга дорівнює } F_1 = \frac{\pi D^2}{4}, \text{ то } D = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 42,5}{3,14}} = 7,4 \text{ см}.$$

$$\text{Приймаємо } D = 7,5 \text{ см} \Rightarrow F_1 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 7,5^2}{4} = 44,2 \text{ см}^2.$$

$$\text{Стрижень № 2} - F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{90 \times 10^{-3}}{160} \times 10^4 = 5,6 \text{ см}^2.$$

$$\text{Якщо площа одного кутика дорівнює } F_L = \frac{F_2}{2}, \text{ то } F_L = \frac{F_2}{2} = \frac{5,6}{2} = 2,8 \text{ см}^2.$$

$$\text{Приймаємо кутик } 50 \times 50 \times 3 \text{ (} F_L = 2,96 \text{ см}^2 \text{)} \Rightarrow F_2 = 2F_L = 2 \cdot 2,96 = 5,92 \text{ см}^2.$$

$$\text{Стрижень № 3} - F_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{410 \times 10^{-3}}{160} \times 10^4 = 25,6 \text{ см}^2.$$

$$\text{Приймаємо двотавр № 20а (} F_3 = 28,9 \text{ см}^2 \text{)}.$$

5 Визначимо абсолютні подовження (укорочення) стрижнів:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{680 \times 10^{-3} \cdot 2,5}{2 \times 10^5 \cdot 44,2 \times 10^{-4}} = 19,2 \times 10^{-4} \text{ м} = 1,92 \text{ мм},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{90 \times 10^{-3} \cdot 4,5}{2 \times 10^5 \cdot 5,92 \times 10^{-4}} = 34,0 \times 10^{-4} \text{ м} = 3,4 \text{ мм},$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF} = \frac{410 \times 10^{-3} \cdot 5}{2 \times 10^5 \cdot 28,8 \times 10^{-4}} = 35,6 \times 10^{-4} \text{ м} = 3,56 \text{ мм}.$$

Задача 2.3

У стрижневій системі (рис. 2.4) визначити з умови міцності необхідні діаметри d_1 і d_2 стрижнів, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

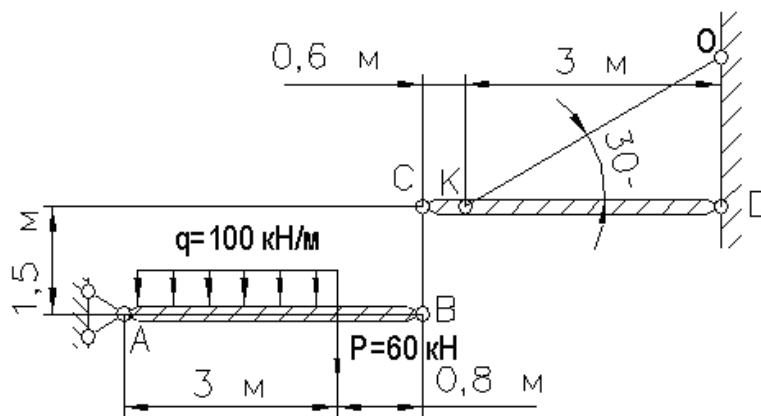


Рисунок 2.4

Розв'язання

1 У розглянутому прикладі в рівновазі перебуває система тіл – два недеформованих бруса, зв'язаних між собою стрижнем СВ. Якщо розглянута конструкція складається із системи тіл, варто розглянути окремо рівновагу її частин у послідовності, що дозволяє визначити невідомі зусилля.

Розсікаючи стрижні ВС та КО і замінюючи дію відкинутих частин системи на залишені частини поздовжніми силами N_1 та N_2 , одержуємо розрахункову схему, показану на рисунку 2.5.

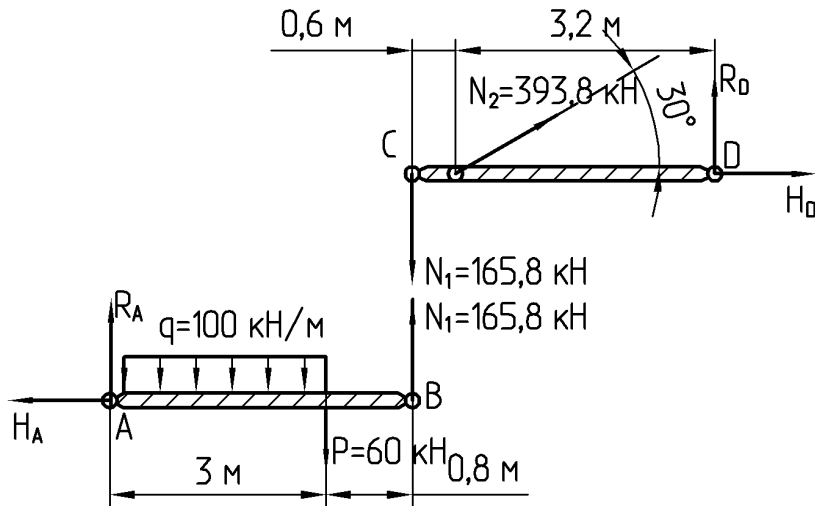


Рисунок 2.5

2 Складемо рівняння рівноваги для балки АВ:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \\ -P \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + N_1 \cdot 3,8 &= 0, \\ N_1 &= \frac{P \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5}{3,8} = \frac{60 \cdot 3 + 100 \cdot 3 \cdot 1,5}{3,8} = 165,8 \text{ кН.} \\ F_1 &\geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{165,8 \times 10^{-3}}{160} \times 10^4 = 10,4 \text{ см}^2, \\ d_1 &= \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10,4}{3,14}} = 3,6 \text{ см.}\end{aligned}$$

Приймаємо $d_1 = 4 \text{ см.}$

3 Складемо рівняння рівноваги для балки CD:

$$\begin{aligned}\sum M_D &= 0 \\ N_1 \cdot 3,8 - N_2 \sin 30^\circ \cdot 3,2 &= 0, \\ N_2 &= \frac{N_1 \cdot 3,8}{\sin 30^\circ \cdot 3,2} = \frac{165,8 \cdot 3,8}{0,5 \cdot 3,2} = 393,8 \text{ кН.} \\ F_2 &\geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{393,8 \times 10^{-3}}{160} \times 10^4 = 24,6 \text{ см}^2, \\ d_2 &= \sqrt{\frac{4F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 24,6}{3,14}} = 5,6 \text{ см.}\end{aligned}$$

Приймаємо $d_2 = 6 \text{ см.}$

Задача 2.4

Визначити внутрішні зусилля, що виникають у системі, поданій на рисунку 2.6. Визначити діаметр найбільш навантаженого стрижня, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

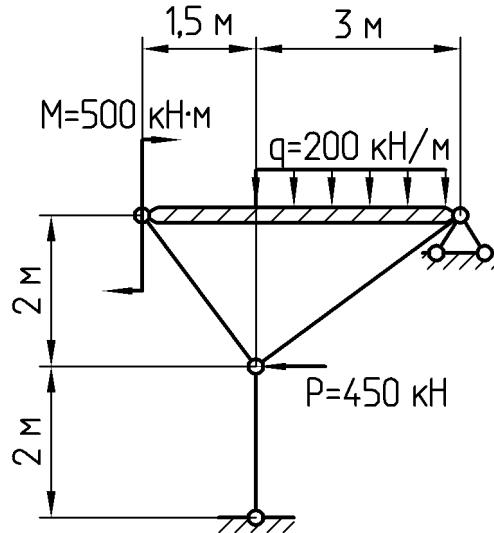


Рисунок 2.6

Розв'язання

1 Якщо розглянута конструкція складається із системи тіл, варто розглянути окремо рівновагу її частин у послідовності, що дозволяє визначити невідомі зусилля.

Розсікаючи стрижні AC, BC і CD та заміняючи дію відкинутих частин системи на залишені частини поздовжніми силами N_1 , N_2 і N_3 , одержуємо розрахункову схему, яка показана на рисунку 2.7.

2 Довжина першого стрижня дорівнює:

$$l_1 = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ м.}$$

Визначимо синус і косинус кута α :

$$\sin \alpha = \frac{2}{2,5} = 0,8, \quad \cos \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6.$$

Довжина другого стрижня дорівнює:

$$l_2 = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,61 \text{ м.}$$

Визначимо синус і косинус кута β :

$$\sin \beta = \frac{2}{3,61} = 0,555, \quad \cos \beta = \frac{3}{3,61} = 0,832.$$

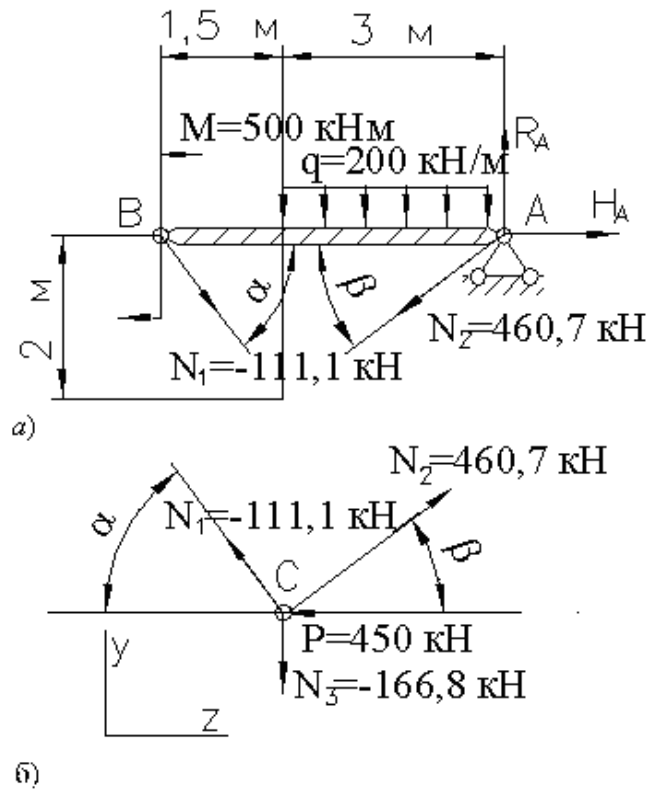


Рисунок 2.7

3 Складемо рівняння рівноваги для балки АВ:

$$\sum M_A = 0,$$

$$M - q \cdot 3 \cdot 1,5 - N_1 \sin \alpha \cdot 4,5 = 0,$$

$$N_1 = \frac{M - q \cdot 3 \cdot 1,5}{\sin \alpha \cdot 4,5} = \frac{500 - 200 \cdot 3 \cdot 1,5}{0,8 \cdot 4,5} = -111,1 \text{ кН.}$$

4 З рівняння $\sum P_z = 0$ визначимо N_2 :

$$-P - N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \beta = 0,$$

$$N_2 = \frac{P + N_1 \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{450 - 111,1 \cdot 0,6}{0,832} = 460,7 \text{ кН.}$$

5 З рівняння $\sum P_y = 0$ визначимо N_3 :

$$N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \beta + N_3 = 0,$$

$$N_3 = -N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \beta = 111,1 \cdot 0,8 - 460,7 \cdot 0,555 = -166,8 \text{ кН}.$$

6 Найбільш навантаженим є другий стрижень, тобто $N_{\max} = 460,7 \text{ кН}$.

$$F \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{460,7 \times 10^{-3}}{160} \times 10^4 = 28,8 \text{ см}^2,$$

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 28,8}{3,14}} = 6,1 \text{ см}.$$

Приймаємо $d = 6,5 \text{ см}$.

2.3 Розрахунки на розтягання-стискання статично не визначуваних систем

Системи (конструкції) називаються статично не визначуваними, якщо кількість невідомих реакцій в'язів у них перевищує кількість рівнянь рівноваги, які можна записати для даної системи сил.

Різниця між кількістю невідомих зусиль і кількістю рівнянь статички, яку можна скласти для даної конструкції, визначає кількість «зайвих» невідомих або ступінь статичної невизначуваності конструкції.

Статично не визначувані системи розраховують шляхом спільного рішення рівнянь, отриманих у результаті розгляду статичної, геометричної та фізичної сторін задачі.

Статична сторона задачі. Становимо рівняння рівноваги відсічених елементів конструкції, що містять невідомі зусилля.

Геометрична сторона задачі. Зображуємо конструкцію у двох положеннях (до та після деформації) і встановлюємо зв'язок між переміщеннями або деформаціями окремих елементів конструкції. Отримані рівняння називаються рівняннями спільності деформацій.

Фізична сторона задачі. На підставі закону Гука, записаного в абсолютній формі (формула (2.2)), виражаємо деформації елементів конструкції через діючі в них невідомі зусилля. У випадку зміни температури до деформацій, які викликані зовнішніми зусиллями, необхідно додати деформації, викликані температурним подовженням. Підставляємо отримані вирази

деформації в рівняння спільності, після чого останні будуть містити невідомі зусилля.

Синтез. Розв'язуємо рівняння статички разом з рівняннями спільності деформацій, записаними в зусиллях, і знаходимо невідомі зусилля.

Задача 2.5

Сталевий брус жорстко закріплений обома кінцями в нерухомих опорах і навантажений уздовж осі силами P_1 і P_2 , прикладеними в його проміжних перерізах, (рис. 2.8, а). Брус нагрівається на 50°C у порівнянні з температурою, при якій брус був закріплений. Побудувати епюру позовжніх сил за довжиною східчастого стрижня.

Розв'язання

1 Статична сторона задачі. Під дією зовнішніх сил і при нагріванні бруса в його закріпленнях виникають реакції R_A і R_K (рис. 2.8, б), для визначення яких статика дає лише одне рівняння рівноваги:

$$\sum P_z = 0,$$

$$P_1 + P_2 + R_A + R_K = 0,$$

$$R_A + R_K = -P_1 - P_2 = -600 - 400 = -1000 \text{ кН} = -1 \text{ МН}.$$

Отже, задача статично не визначувана.

2 Геометрична сторона задачі. З умови деформації бруса очевидно, що переміщення перерізів А і К дорівнюють нулю (тому що вони закріплені), тобто $\Delta l = 0$.

3 Відкинемо праве закріплення і замінімо дію правого закріплення невідомою поки реакцією R_K (див. рис. 2.8, б). Таким чином, одержимо статично визначуваний брус, навантажений силами P_1 , P_2 і R_K .

Будуємо епюру позовжніх сил (рис. 2.8, в).

4 Фізична сторона задачі. Визначаємо переміщення перерізу К від дії всіх сил і від нагрівання:

$$\begin{aligned} \Delta l = & -\frac{R_A \cdot 0,6}{2 \times 10^5 \cdot 50 \times 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 0,8}{2 \times 10^5 \cdot 50 \times 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 1,1}{2 \times 10^5 \cdot 25 \times 10^{-4}} - \\ & - \frac{(R_A + 1) \cdot 0,9}{2 \times 10^5 \cdot 25 \times 10^{-4}} + +1,25 \times 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50. \end{aligned}$$

5 Синтез. Так як $\Delta \mathbf{l} = 0$, то

$$-\frac{R_A \cdot 0,6}{2 \times 10^5 \cdot 50 \times 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 0,8}{2 \times 10^5 \cdot 50 \times 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 1,1}{2 \times 10^5 \cdot 25 \times 10^{-4}} - \frac{(R_A + 1) \cdot 0,9}{2 \times 10^5 \cdot 25 \times 10^{-4}} + 1,25 \times 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50 = 0.$$

Звідси $R_A = -0,27$ МН.

Отже, $R_K = -1 - R_A = -1 + 0,27 = -0,73$ МН.

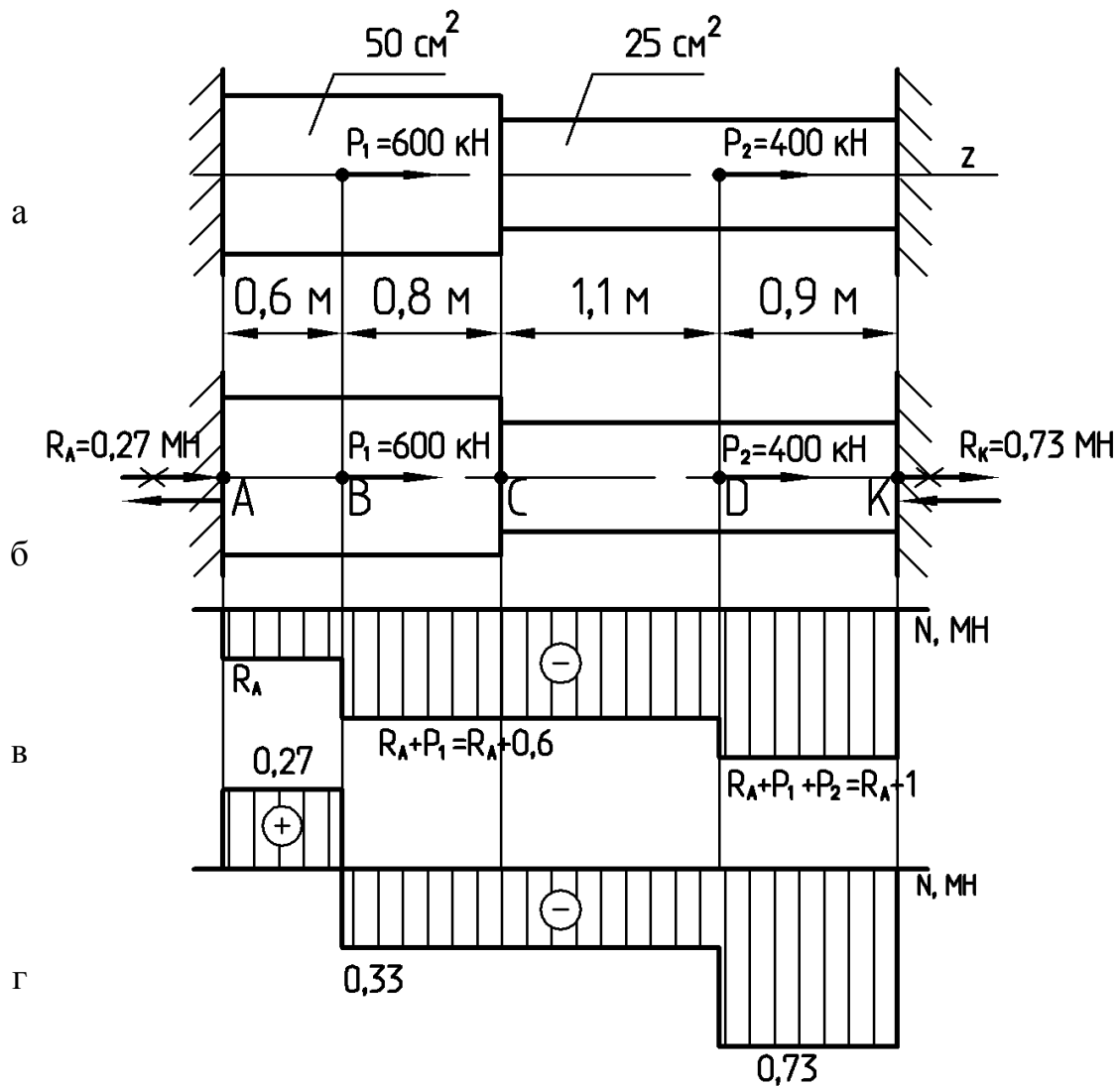


Рисунок 2.8

6 Остаточно будуюмо епюри поздовжніх сил (рис. 2.8, г).

Задача 2.6

Сталевий брус навантажений уздовж осі силами P_1 і P_2 , прикладеними до його проміжних перерізів (рис. 2.9, а). Брус нагрівається на 50°C . Між його правим торцем і закладенням є зазор $\delta = 0,8\text{ мм}$. Побудувати епюри поздовжніх сил та нормальних напружень за довжиною східчастого стрижня.

Розв'язання

1 Припускаємо, що брус може деформуватися вільно, тобто праве закладення взагалі відсутнє (рис. 2.9, б). Визначаємо абсолютне подовження від дії сил P_1 і P_2 та від нагрівання. Для цього будуємо епюру поздовжніх сил (рис. 2.9, в).

$$\Delta l = \frac{400 \cdot 1,1 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 25 \times 10^{-4}} + \frac{400 \cdot 0,8 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 50 \times 10^{-4}} + \frac{1000 \cdot 0,6 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5 \cdot 50 \times 10^{-4}} + 1,25 \times 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50 = 39,2 \times 10^{-4} \text{ м} = 3,92 \text{ мм}.$$

2 Якщо величина абсолютного подовження бруса Δl більше зазору δ , то між правим торцем бруса і защемленням після його навантаження виникне сила взаємодії R_K , визначити яку за допомогою одних лише рівнянь статки неможливо – система буде статично не визначувана (рис. 2.9, г).

3 Статична сторона задачі:

$$\sum P_z = 0,$$

$$P_1 + P_2 + R_A + R_K = 0,$$

$$R_A + R_K = -P_1 - P_2 = -600 - 400 = -1000 \text{ кН} = -1 \text{ МН}.$$

4 Геометрична сторона задачі. Сумарне переміщення правого торця дорівнює величині зазору, тобто:

$$\Delta l = \delta = 0,8 \text{ мм} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

5 Відкинемо праве закріплення і замінімо дію правого закріплення невідомою поки реакцією R_K (див. рис. 2.9, г). Таким чином, одержимо статично визначений брус, навантажений силами P_1 , P_2 і R_K .

Будуємо епюру поздовжніх сил (рис. 2.9, д).

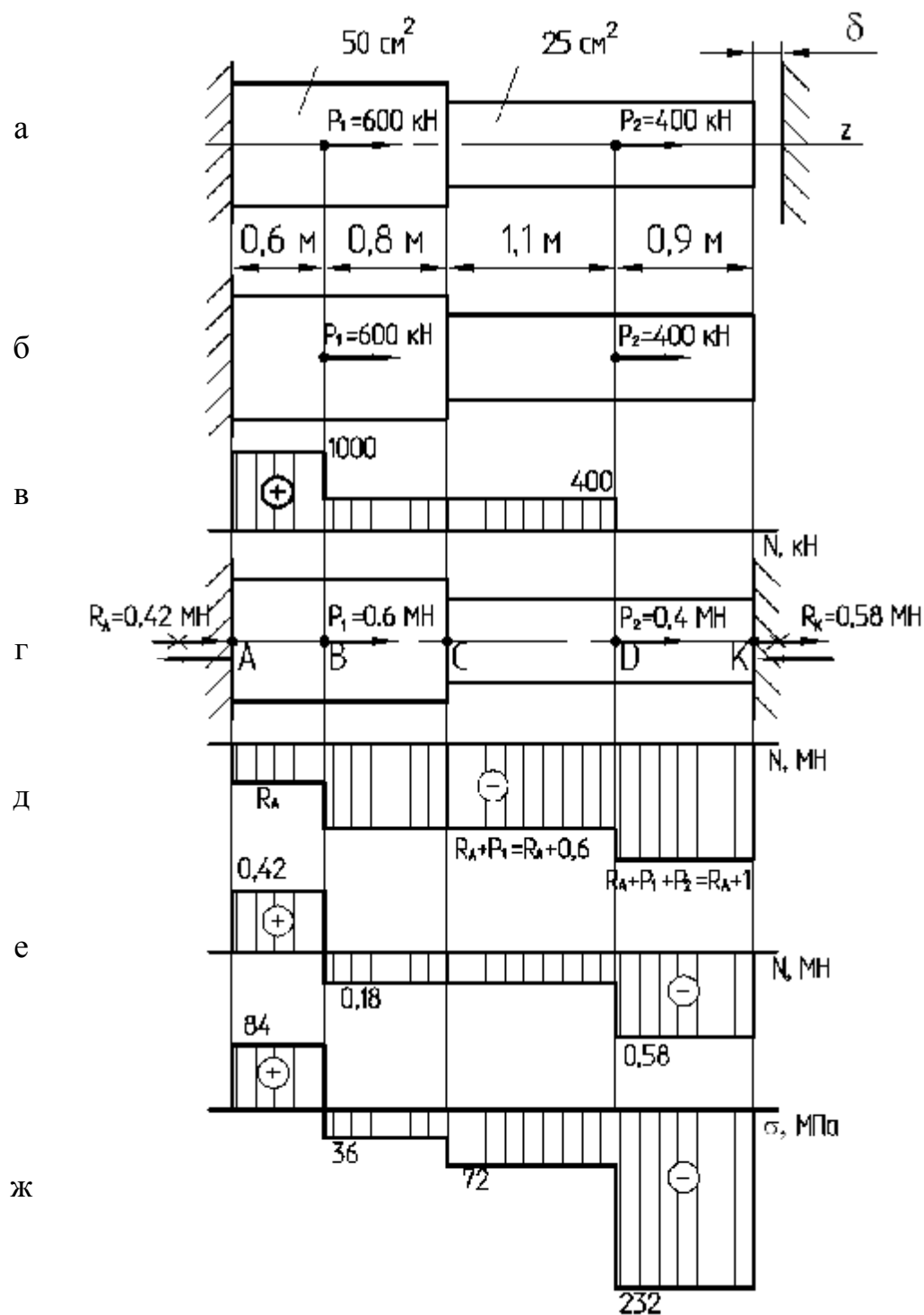


Рисунок 2.9

б Фізична сторона задачі. Визначаємо переміщення перерізу К від дії всіх сил та від нагрівання:

$$\Delta l = -\frac{R_A \cdot 0,6}{2 \times 10^5 \cdot 50 \times 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 0,8}{2 \times 10^5 \cdot 50 \times 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 1,1}{2 \times 10^5 \cdot 25 \times 10^{-4}} -$$

$$-\frac{(R_A + 1) \cdot 0,9}{2 \times 10^5 \cdot 25 \times 10^{-4}} + 1,25 \times 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50.$$

7 Синтез. Якщо $\Delta l = \delta$, то

$$-\frac{R_A \cdot 0,6}{2 \times 10^5 \cdot 50 \times 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 0,8}{2 \times 10^5 \cdot 50 \times 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 1,1}{2 \times 10^5 \cdot 25 \times 10^{-4}} - \\ - \frac{(R_A + 1) \cdot 0,9}{2 \times 10^5 \cdot 25 \times 10^{-4}} + 1,25 \times 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50 = 8 \times 10^{-4}.$$

Звідси $R_A = -0,42$ МН.

Отже, $R_K = -1 - R_A = -1 + 0,42 = -0,58$ МН.

8 Остаточно будуюмо епюри поздовжніх сил (рис. 2.8, е).

9 Епюру нормальних напружень одержимо, визначивши нормальні напруження на кожній з ділянок:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0,42}{2 \cdot 25 \times 10^{-4}} = 84 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-0,18}{2 \cdot 25 \times 10^{-4}} = -36 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{-0,18}{25 \times 10^{-4}} = -72 \text{ МПа},$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{-0,58}{2 \cdot 25 \times 10^{-4}} = -232 \text{ МПа}.$$

Будуюмо епюру нормальних напружень (рис. 2.9, ж).

Задача 2.7

Абсолютно тверде тіло (заштриховане) має шарнірно-нерухому опору і підвішене на двох стрижнях (рис. 2.10). Визначити діаметри поперечних перерізів стрижнів. Матеріал стрижнів – сталь 3, $E = 2 \times 10^5$ МПа, $[\sigma] = 120$ МПа.

Розв'язання

1 Визначаємо ступінь статичної невизначуваності задачі, для чого звільняємо балку від зв'язків та заміняємо їх реакціями (рис. 2.11).

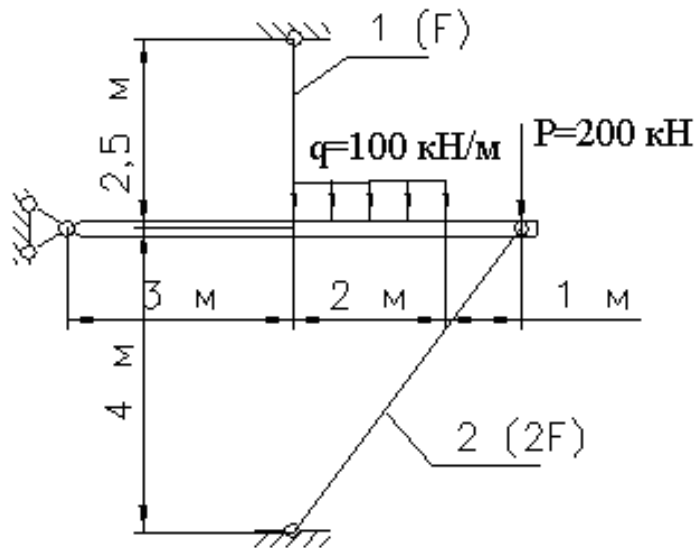


Рисунок 2.10

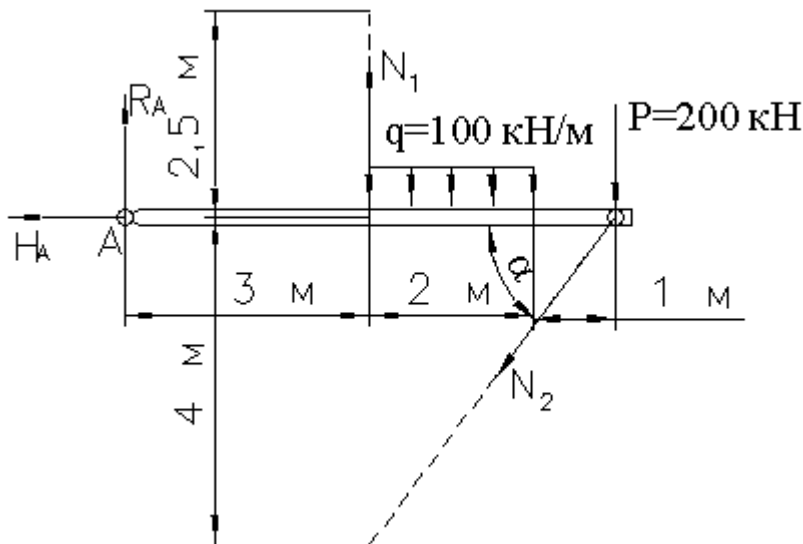


Рисунок 2.11

Реакції в нерухомому шарнірі А – R_A , H_A , зусилля в стрижнях – N_1 , N_2 . При рішенні задачі припускаємо, що стрижні розтягнуті, тобто зусилля в стрижнях спрямовані до точок їх підвісу.

Ступінь статичної невизначуваності визначається як різниця між кількістю невідомих і кількістю рівнянь рівноваги системи сил, що діють на конструкцію.

Невідомими в завданні є R_A , H_A , N_1 , N_2 , а система прикладених до балки сил – плоска довільна, котра має три умови рівноваги. Таким чином, задача є один раз статично не визначуваною.

2 Довжина другого стрижня дорівнює:

$$l_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ м.}$$

Визначимо синус і косинус кута α :

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0,8, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} = 0,6.$$

3 Розглянемо статичну сторону задачі, для чого складемо таке рівняння рівноваги, що містило б невідомі N_1 і N_2 , які підлягають визначенню. Таким рівнянням рівноваги є $\sum M_A = 0$:

$$-P \cdot 6 - q \cdot 2 \cdot 4 + N_1 \cdot 3 - N_2 \sin \alpha \cdot 6 = 0,$$

$$-200 \cdot 6 - 100 \cdot 2 \cdot 4 + N_1 \cdot 3 - N_2 \cdot 0,8 \cdot 6 = 0,$$

$$-1200 - 800 + N_1 \cdot 3 - N_2 \cdot 4,8 = 0,$$

$$3N_1 - 4,8N_2 = 2000. \quad (2.6)$$

4 Щоб одержати друге рівняння, що зв'язує невідомі N_1 і N_2 , розглянемо геометричну сторону задачі. Для цього подамо систему в деформованому стані (рис. 2.12). Під дією прикладених сил балка повернеться навколо шарніра А, при цьому перший стрижень розтягнеться, другий стиснеться. Точки С та В при повороті балки опишуть дуги кіл, але через малість кута повороту балки можна прийняти за прямі відрізки BB' і CC' , перпендикулярні AB і AC .

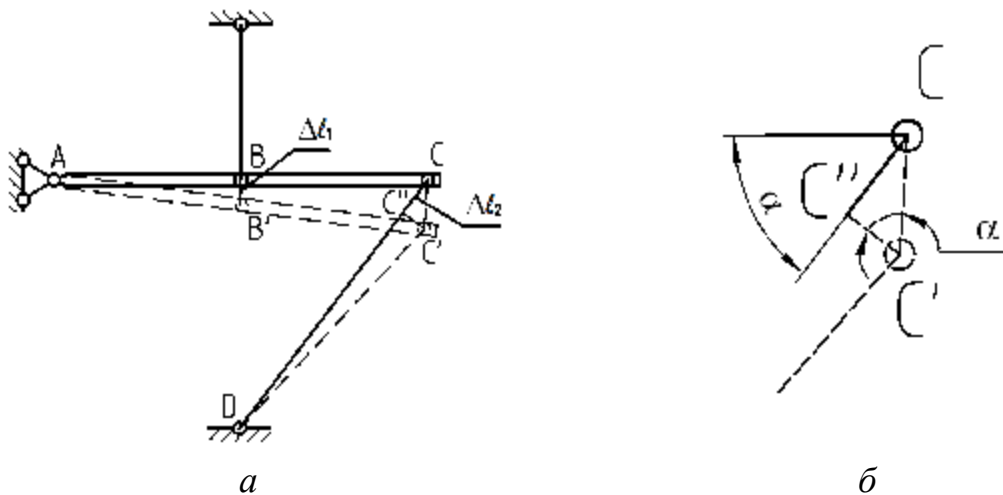


Рисунок 2.12

Переміщення точки В за вертикаллю буде дорівнювати подовженню першого стрижня $BB' = \Delta l_1$, переміщення точки С за вертикаллю CC' пов'язане з укороченням другого стрижня $CC' = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$ (рис. 2.12, б). Це співвідношення одержано із трикутника $CC'C''$, у якому кут $CC'C'' = \alpha$.

Геометричне співвідношення між Δl_1 і Δl_2 можна встановити, розглянувши подібні трикутники ABB' і ACC' (рис. 2.12, а). За їх подібністю маємо:

$$\begin{aligned}\frac{BB'}{CC'} &= \frac{AB}{AC}, \\ \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2 / \sin \alpha} &= \frac{AB}{AC}, \\ \Delta l_1 &= \frac{AB}{AC \sin \alpha} \Delta l_2 = \frac{3}{6 \cdot 0,8} \Delta l_2, \\ \Delta l_1 &= 0,625 \Delta l_2.\end{aligned}\tag{2.7}$$

5 За допомогою закону Гука виразимо абсолютні подовження стрижнів Δl_1 і Δl_2 через діючі в них зусилля N_1 і N_2 (фізична сторона задачі). Якщо характер передбачуваного зусилля при розгляді статичної сторони задачі не відповідає деформованому стану стрижня, то ця невідповідність повинна бути врахована знаком "мінус" у законі Гука.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{2,5 N_1}{EF}.$$

Для другого стрижня передбачуване зусилля (яке розтягує) не відповідає передбачуваній деформації стрижня (стрижень стиснутий), тому

$$\Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{EF_2} = -\frac{5 N_2}{2 EF} = -\frac{2,5 N_2}{EF}.$$

6 Вирішуючи спільно рівняння, отримані при розгляді трьох сторін задачі (статичної, геометричної та фізичної), визначаємо шукані зусилля в стрижнях.

Підставляємо знайдені Δl_1 і Δl_2 у рівняння (2.7):

$$\begin{aligned}\frac{2,5 N_1}{EF} &= -0,625 \cdot \frac{2,5 N_2}{EF}, \\ N_1 &= -0,625 N_2.\end{aligned}$$

Таким чином, отримане друге рівняння, яке визначає залежність між N_1 і N_2 . Записавши обидва рівняння, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3N_1 - 4,8N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \cdot (-0,625)N_2 - 4,8N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1,857N_2 - 4,8N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} -6,675N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2 = -300 \text{ кН}, \\ N_1 = 187,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

7 Розміри поперечних перерізів стрижнів визначаємо з умови міцності на розтягання (стискання):

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i} \leq [\sigma],$$

Розраховуємо за N_1 :

$$F_{1N_1} \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{187,5 \times 10^{-3}}{120} \times 10^4 = 15,6 \text{ см}^2,$$

$$F_{2N_1} = 2F_{1N_1} = 2 \cdot 15,6 = 31,2 \text{ см}^2.$$

Розраховуємо за N_2 :

$$F_{2N_2} \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{300 \times 10^{-3}}{120} \times 10^4 = 25 \text{ см}^2,$$

$$F_{1N_2} = \frac{F_{2N_2}}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ см}^2.$$

Якщо необхідна площа $F_{1N_1} > F_{1N_2}$ та $F_{2N_1} > F_{2N_2}$, то подальші розрахунки ведемо за поздовжньою силою N_1 .

Отже, приймаємо: $F_1 = 15,6 \text{ см}^2$, $F_2 = 31,2 \text{ см}^2$.

Якщо площа кругового перерізу дорівнює $F_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$, тоді

$$D_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 15,6}{3,14}} = 4,45 \text{ см}.$$

$$\text{Приймаємо: } D_1 = 4,5 \text{ см} \Rightarrow F_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4,5^2}{4} = 15,9 \text{ см}^2.$$

Якщо площа кругового перерізу дорівнює $F_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}$, тоді

$$D_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 31,2}{3,14}} = 6,30 \text{ см.}$$

Приймаємо: $D_2 = 6,5 \text{ см} \Rightarrow F_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 6,5^2}{4} = 33,2 \text{ см}^2$.

Задача 2.8

Визначити зусилля в стрижнях, що підтримують абсолютно тверду балку (рис. 2.13). Матеріал стрижнів однаковий.

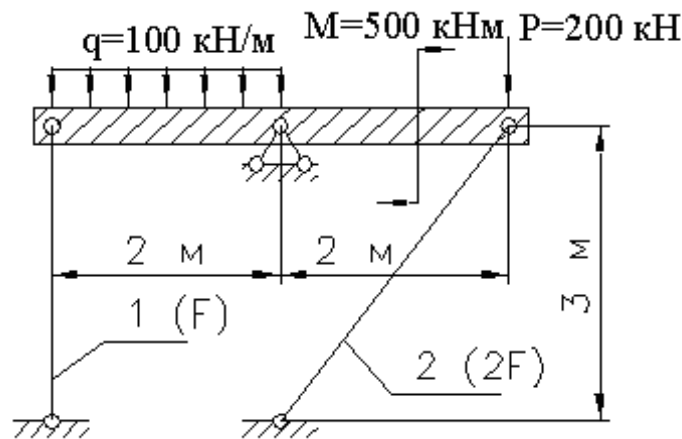


Рисунок 2.13

Розв'язання

1 Визначаємо ступінь статичної невизначуваності задачі, для чого звільняємо балку від зв'язків і замінюємо їхніми реакціями (рис. 2.14).

Задача є один раз статично не визначуваною.

2 Довжина другого стрижня дорівнює:

$$l_2 = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,6 \text{ м.}$$

Визначимо синус і косинус кута α :

$$\sin \alpha = \frac{3}{3,6} = 0,833, \quad \cos \alpha = \frac{2}{3,6} = 0,556.$$

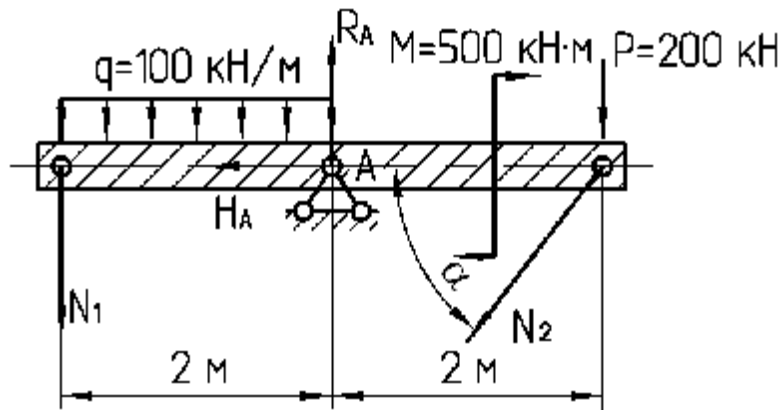


Рисунок 2.14

3 Розглянемо статичну сторону задачі, для чого складемо таке рівняння рівноваги, що містило б невідомі N_1 і N_2 , які підлягають визначенню. Таким рівнянням рівноваги є $\sum M_A = 0$:

$$\begin{aligned}
 & -M - P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 + N_1 \cdot 2 - N_2 \sin \alpha \cdot 2 = 0, \\
 & -500 - 200 \cdot 2 - 100 \cdot 2 \cdot 1 + N_1 \cdot 2 - N_2 \cdot 0,833 \cdot 2 = 0, \\
 & -500 - 400 - 200 + N_1 \cdot 2 - N_2 \cdot 1,66 = 0, \\
 & 2N_1 - 1,66N_2 = 1100.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

4 Щоб одержати друге рівняння, що зв'язує невідомі N_1 і N_2 , розглянемо геометричну сторону задачі. Для цього представимо систему в деформованому стані (рис. 2.15).

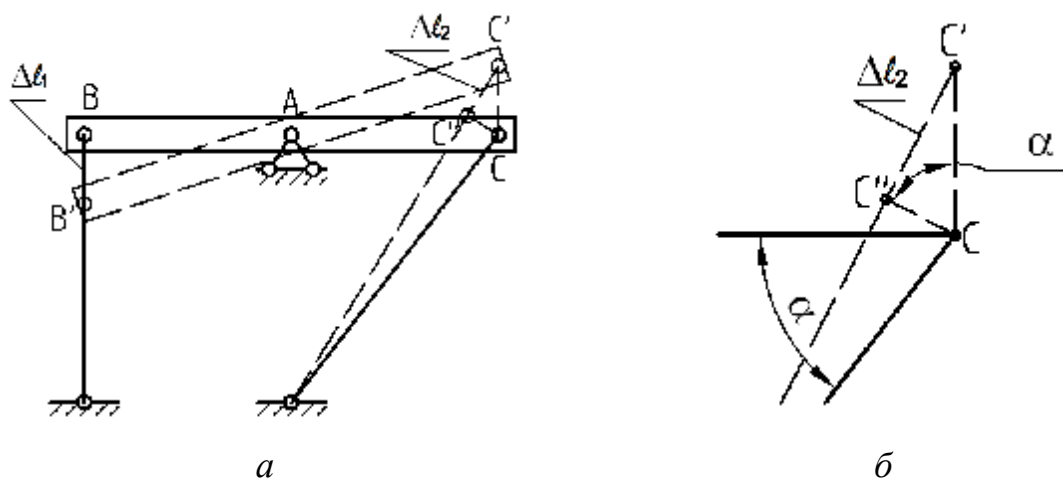


Рисунок 2.15

Переміщення точки В за вертикаллю дорівнює стисканню першого стрижня $BB' = \Delta l_1$, переміщення точки С по вертикалі CC' пов'язане з подовженням другого стрижня $CC' = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$ (рис. 2.15, б). Це співвідношення отримане із трикутника $CC'C''$, у якому кут $C'CC'' = \alpha$.

5 За допомогою закону Гука виразимо абсолютні подовження стрижнів Δl_1 і Δl_2 через діючі в них зусилля N_1 і N_2 (фізична сторона задачі):

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l_1}{EF_1} = -\frac{3N_1}{EF},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{3,6N_2}{2EF} = \frac{1,8N_2}{EF}.$$

6 Розв'язуючи спільно рівняння, отримані при розгляді трьох сторін задачі (статичної, геометричної та фізичної), визначаємо шукані зусилля в стрижнях:

$$-\frac{3N_1}{EF} = 1,2 \cdot \frac{1,8N_2}{EF},$$

$$N_1 = -0,72N_2.$$

Таким чином, отримане друге рівняння, яке визначає залежність між N_1 і N_2 . Записавши обидва рівняння, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2N_1 - 1,66N_2 = 1100, \\ N_1 = -0,72N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cdot (-0,72)N_2 - 1,66N_2 = 1100, \\ N_1 = -0,72N_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1,44N_2 - 1,66N_2 = 1100, \\ N_1 = -0,72N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} -3,1N_2 = 1100, \\ N_1 = -0,72N_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2 = -354,8 \text{ кН}, \\ N_1 = 255,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

Задача 2.9

Визначити зусилля в стрижнях, що підтримують абсолютно жорстку балку (рис. 2.16). Матеріал стрижнів однаковий.

Розв'язання

1 Визначаємо ступінь статичної невизначуваності задачі (рис. 2.17).

Задача є один раз статично не визначуваною.

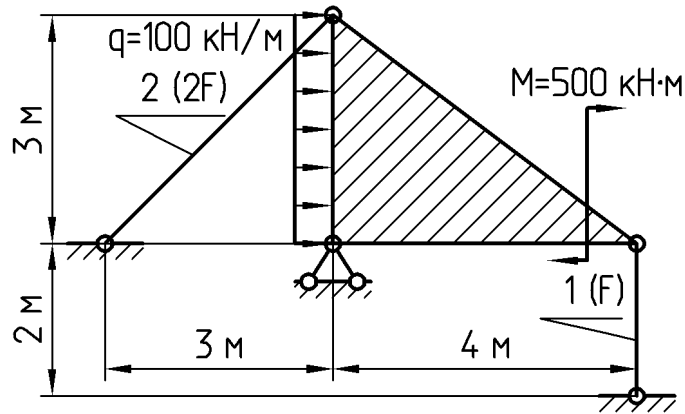


Рисунок 2.16

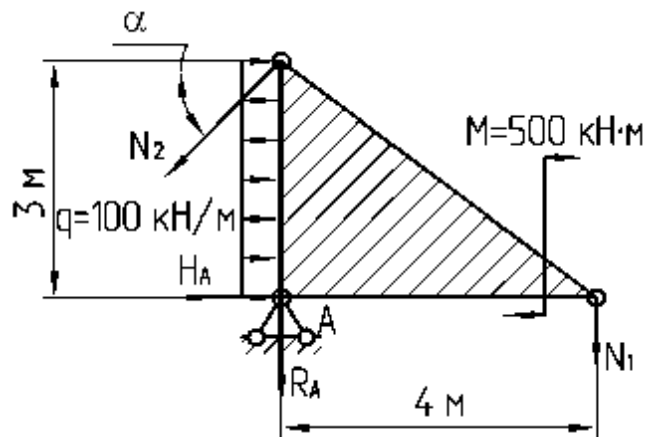


Рисунок 2.17

2 Довжина другого стрижня дорівнює:

$$l_2 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4,2 \text{ м.}$$

Визначимо синус і косинус кута α :

$$\sin \alpha = \frac{3}{4,2} = 0,707, \quad \cos \alpha = \frac{3}{4,2} = 0,707. \quad (2.9)$$

3 Розглянемо статичну сторону задачі. Складемо рівняння рівноваги $\sum M_A = 0$:

$$\begin{aligned} -M - q \cdot 3 \cdot 1,5 - N_1 \cdot 4 + N_2 \cos \alpha \cdot 3 &= 0, \\ -500 - 100 \cdot 3 \cdot 1,5 - N_1 \cdot 4 + N_2 \cdot 0,707 \cdot 3 &= 0, \\ -500 - 450 - N_1 \cdot 4 + N_2 \cdot 2,12 &= 0, \\ 4N_1 - 2,12N_2 &= -950. \end{aligned} \quad (2.10)$$

4 Розглянемо геометричну сторону задачі. Для цього представимо систему в деформованому стані (рис. 2.18).

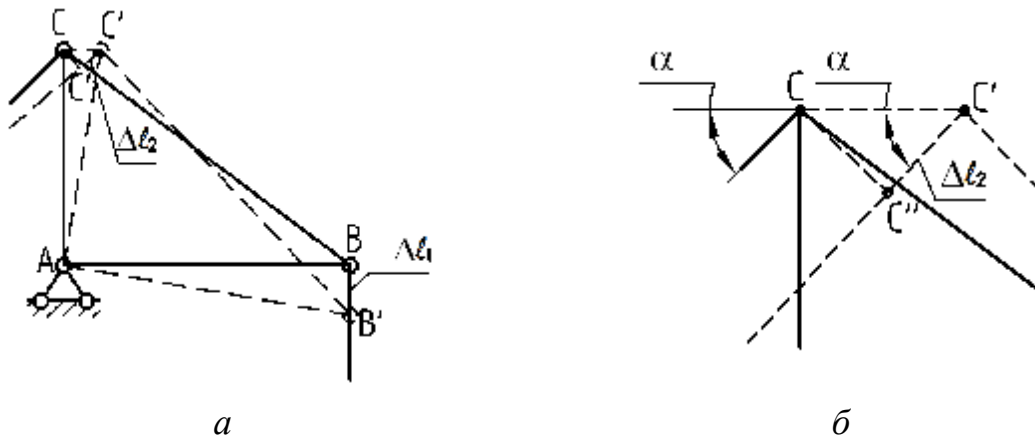


Рисунок 2.18

Переміщення точки В за вертикаллю дорівнює стисканню першого стрижня $BB' = \Delta l_1$, переміщення точки С за горизонталлю CC' пов'язане з подовженням другого стрижня $CC' = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha}$ (рис. 2.18, б). Це співвідношення отримане із трикутника $CC'C''$, у якому кут $CC'C'' = \alpha$.

Геометричне співвідношення між Δl_1 і Δl_2 можна встановити, розглянувши подібні трикутники ABB' і ACC' (рис. 2.18, а). За їх подібністю маємо:

$$\begin{aligned} \frac{BB'}{CC'} &= \frac{AB}{AC}, \\ \frac{\Delta l_1}{\frac{\Delta l_2}{\cos \alpha}} &= \frac{AB}{AC}, \\ \Delta l_1 &= \frac{AB}{AC \cos \alpha} \Delta l_2 = \frac{4}{3 \cdot 0,707} \Delta l_2, \\ \Delta l_1 &= 1,89 \Delta l_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

5 Фізична сторона задачі:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= -\frac{N_1 l_1}{EF_1} = -\frac{2N_1}{EF}, \\ \Delta l_2 &= \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{4,2N_2}{2EF} = \frac{2,1N_2}{EF}. \end{aligned}$$

6 Синтез

$$\begin{aligned} -\frac{2N_1}{EF} &= 1,89 \cdot \frac{2,1N_2}{EF}, \\ N_1 &= -1,98N_2. \end{aligned}$$

Таким чином, отримане друге рівняння, що визначає залежність між N_1 і N_2 . Записавши обидва рівняння, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4N_1 - 2,12N_2 = -950, \\ N_1 = -1,98N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 \cdot (-1,98)N_2 - 2,12N_2 = -950, \\ N_1 = -1,98N_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7,92N_2 - 2,12N_2 = -950, \\ N_1 = -1,98N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} -10,04N_2 = -950, \\ N_1 = -1,98N_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2 = 94,6 \text{ кН}, \\ N_1 = -187,4 \text{ кН}. \end{cases}$$

Задача 2.10

Визначити зусилля в стрижнях (рис. 2.19). Матеріал стрижнів однаковий.

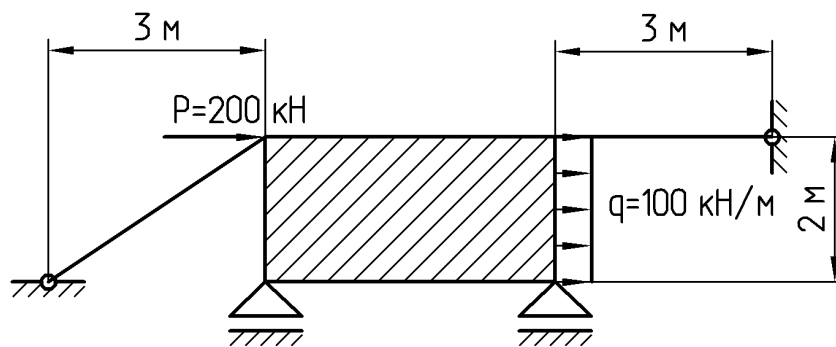


Рисунок 2.19

Розв'язання

1 Визначаємо ступінь статичної невизначуваності задачі (рис. 2.20). Задача є один раз статично не визначуваною.

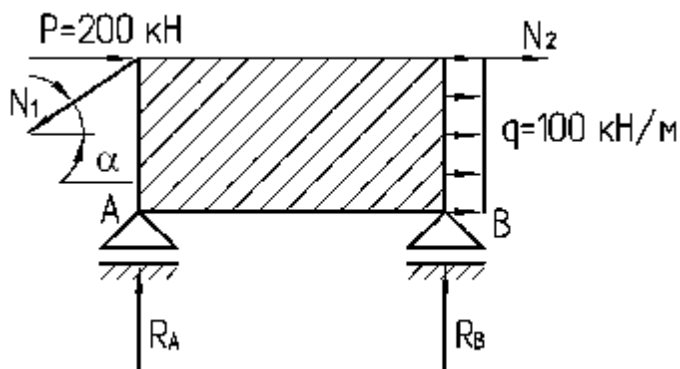


Рисунок 2.20

2 Довжина першого стрижня дорівнює:

$$l_1 = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,61 \text{ м.}$$

Визначимо синус і косинус кута α :

$$\sin \alpha = \frac{2}{3,61} = 0,555, \quad \cos \alpha = \frac{3}{3,61} = 0,832.$$

3 Розглянемо статичну сторону задачі.

Складемо рівняння рівноваги $\sum P_x = 0$:

$$P + q \cdot 2 - N_1 \cos \alpha + N_2 = 0,$$

$$200 + 100 \cdot 2 - N_1 \cdot 0,832 + N_2 = 0,$$

$$-0,832N_1 + N_2 = -400. \quad (2.12)$$

4 Розглянемо геометричну сторону задачі. Для цього подамо систему в деформованому стані (рис. 2.21).

Переміщення точки D за горизонталлю дорівнює стисканню другого стрижня $DD' = \Delta l_2$, переміщення точки C за горизонталлю CC' пов'язане з подовженням першого стрижня $CC' = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha}$ (рис. 2.21, б). Це співвідношення отримане із трикутника $CC'C''$, у якому кут $CC'C'' = \alpha$.

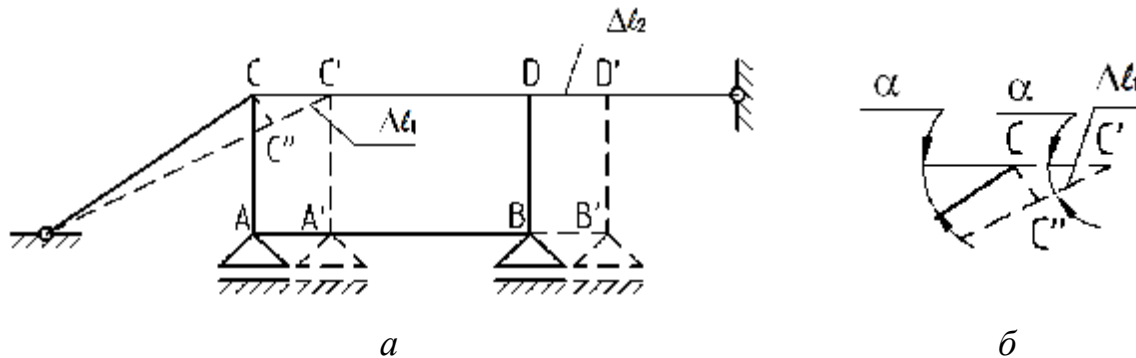


Рисунок 2.21

Якщо $CC' = DD'$ (рис. 2.21, а), то:

$$CC' = DD',$$

$$\frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} = \Delta l_2, \quad \frac{\Delta l_1}{0,832} = \Delta l_2,$$

$$\Delta l_1 = 0,832 \Delta l_2. \quad (2.13)$$

5 Фізична сторона задачі:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{3,61 N_1}{EF},$$
$$\Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{EF_2} = -\frac{3 N_2}{2EF} = -\frac{1,5 N_2}{EF}.$$

6 Синтез

$$\frac{3,61 N_1}{EF} = -0,832 \cdot \frac{1,5 N_2}{EF},$$
$$N_1 = -0,346 N_2.$$

Таким чином, отримане друге рівняння, яке визначає залежність між N_1 і N_2 . Записавши обидва рівняння, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -0,832 N_1 + N_2 = -400, \\ N_1 = -0,346 N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} -0,832 \cdot (-0,346) N_2 + N_2 = -400, \\ N_1 = -0,346 N_2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} N_2 = -310,6 \text{ кН}, \\ N_1 = 107,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

3 ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ ДЛЯ БАЛОК ТА ПЛОСКИХ РАМ

3.1 Основні положення теорії

Для розрахунку на міцність та жорсткість балок та рам необхідно знати внутрішні зусилля в будь-якому їх перерізі, тобто побудувати їх епюри.

У загальному випадку в перерізах плоских балок та рам виникає три внутрішні зусилля: N – поздовжня сила, Q – поперечна сила і M – згинальний момент.

Поздовжня сила N в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на поздовжню вісь стрижня всіх зовнішніх сил, прикладених до розглянутої відсіченої частини рами. Поздовжня сила, що виникає при розтяганні стрижня, вважається додатною, при стисканні – від’ємною.

Поперечна сила Q дорівнює сумі проекцій на вісь, перпендикулярну осі балки, усіх зовнішніх сил, прикладених з одного боку від розглянутого перерізу.

Згинальний момент M дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від розглянутого перерізу щодо центра ваги цього перерізу.

Установимо наступні правила знаків для поперечних сил Q і згинальних моментів M у балках при згинанні.

Поперечна сила Q в перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила прагне повернути відсічену частину балки за ходом годинникової стрілки (рис. 3.1).

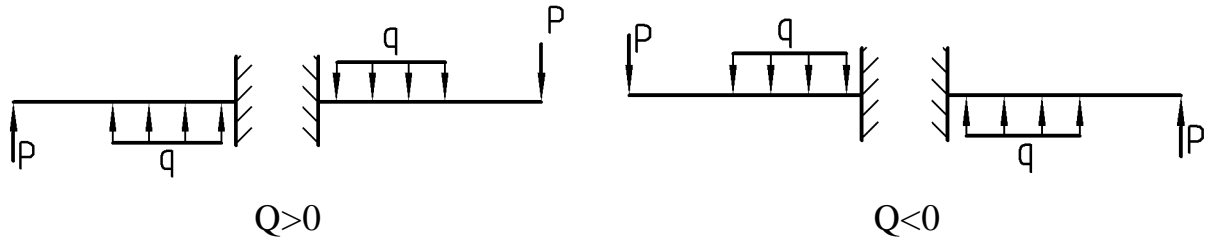


Рисунок 3.1

Згинальний момент M у перерізі вважається додатним, якщо він викликає стискання верхніх волокон балки (рис. 3.2). Волокном називається стрижень поздовж осі балки або рами з нескінченно маленьким поперечним перерізом.

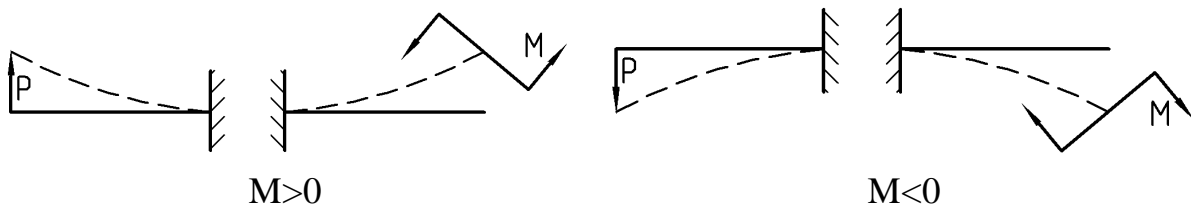


Рисунок 3.2

З огляду на правила знаків для згинальних моментів M , варто підкреслити, що епюру згинальних моментів будують на стиснутих волокнах.

3.2 Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок

Задача 3.1

Побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів для балки, зображеної на рисунку 3.3.

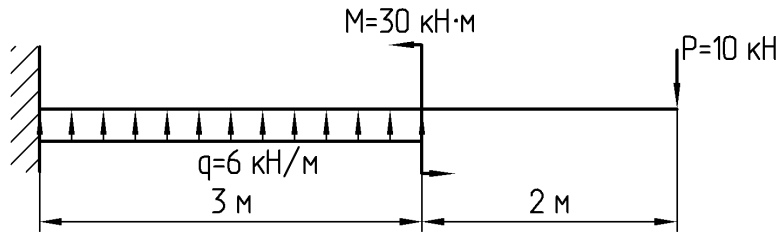


Рисунок 3.3

Розв'язання

1 Розставляємо характерні перерізи (рис. 3.4). Побудову починаємо із правого (вільного) кінця, при цьому немає необхідності у визначенні опорних реакцій.

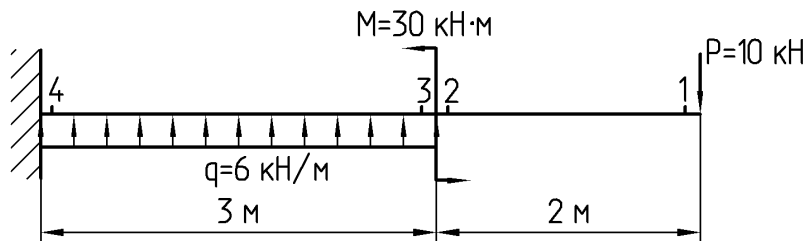


Рисунок 3.4

2 Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах (рис. 3.5):

$$Q_1 = P = 10 \text{ кН},$$

$$Q_2 = P = 10 \text{ кН},$$

$$Q_3 = P = 10 \text{ кН},$$

$$Q_4 = P - q \cdot 3 = 10 - 6 \cdot 3 = -8 \text{ кН}$$

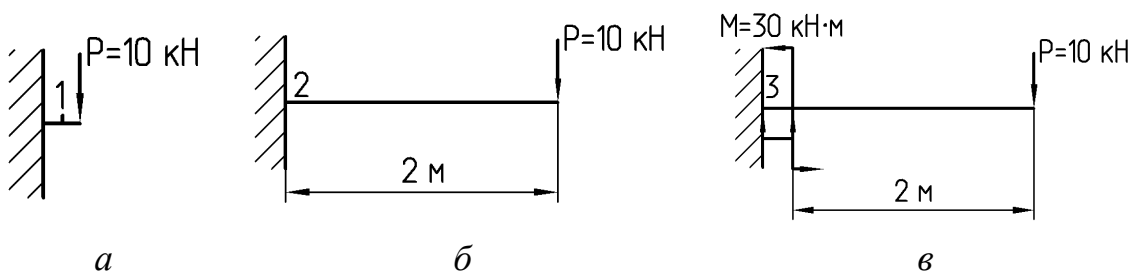


Рисунок 3.5

3 Визначаємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -P \cdot 2 = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = -P \cdot 2 + M = -10 \cdot 2 + 30 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = -P \cdot 5 + M + q \cdot 3 \cdot 1,5 = -10 \cdot 5 + 30 + 6 \cdot 3 \cdot 1,5 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4 Будуємо епюру за характерними перерізами (рис. 3.6).

5 Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію і міняє знак з «-» на «+», то в цій точці маємо мінімальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу (рис. 3.7):

$$z_{\text{прав}} = z_0 = \frac{10}{6} = 1,67 \text{ м},$$

$$\begin{aligned} M_{z_0} &= -P \cdot (2 + z_0) + M + q \cdot z_0 \cdot \frac{z_0}{2} = \\ &= -10 \cdot (2 + 1,67) + 30 + 6 \cdot 1,67 \cdot \frac{1,67}{2} = 1,7 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

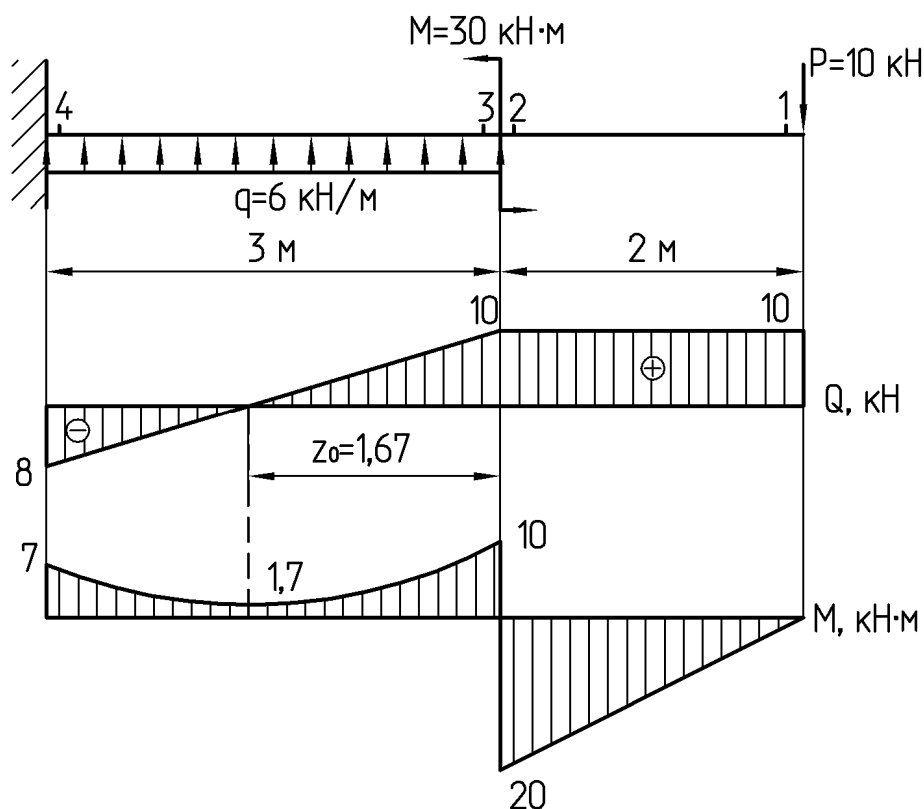
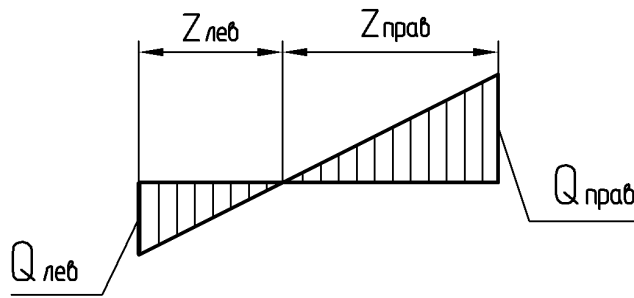


Рисунок 3.6



$$Z_{\text{лев}} = \frac{Q_{\text{лев}}}{q};$$

$$Z_{\text{прав}} = \frac{Q_{\text{прав}}}{q};$$

Рисунок 3.7

Задача 3.2

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, зображеної на рисунку 3.8.

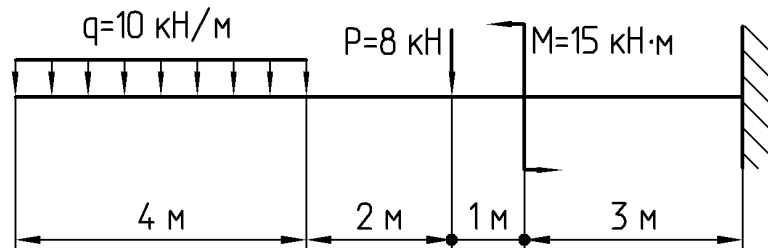


Рисунок 3.8

Розв'язання

1 Розставляємо характерні перерізи (рис. 3.9). Побудову починаємо з лівого (вільного) кінця.

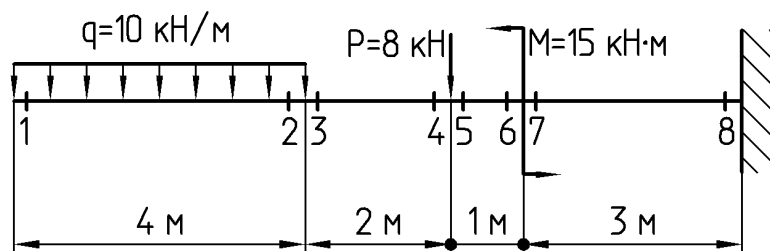


Рисунок 3.9

2 Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_2 = -q \cdot 4 = -10 \cdot 4 = -40 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_2 = -q \cdot 4 = -10 \cdot 4 = -40 \text{ кН},$$

$$Q_5 = -q \cdot 4 - P = -10 \cdot 4 - 8 = -48 \text{ кН},$$

$$Q_6 = Q_7 = Q_8 = Q_5 = -48 \text{ кН}$$

3 Визначаємо значення згинальних моментів у характерних перерізах.

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -80 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = M_2 = -80 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = -q \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{4}{2}\right) = -10 \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{4}{2}\right) = -160 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = M_4 = -160 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = -q \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - P \cdot 1 = -10 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - 8 \cdot 1 = -208 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = -q \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - P \cdot 1 - M = -10 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - 8 \cdot 1 - 15 = -223 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = -q \cdot 4 \cdot \left(6 + \frac{4}{2}\right) - P \cdot 4 - M = -10 \cdot 4 \cdot \left(6 + \frac{4}{2}\right) - 8 \cdot 4 - 15 = -367 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4 Будуємо епюру за характерними перерізами (рис. 3.10).

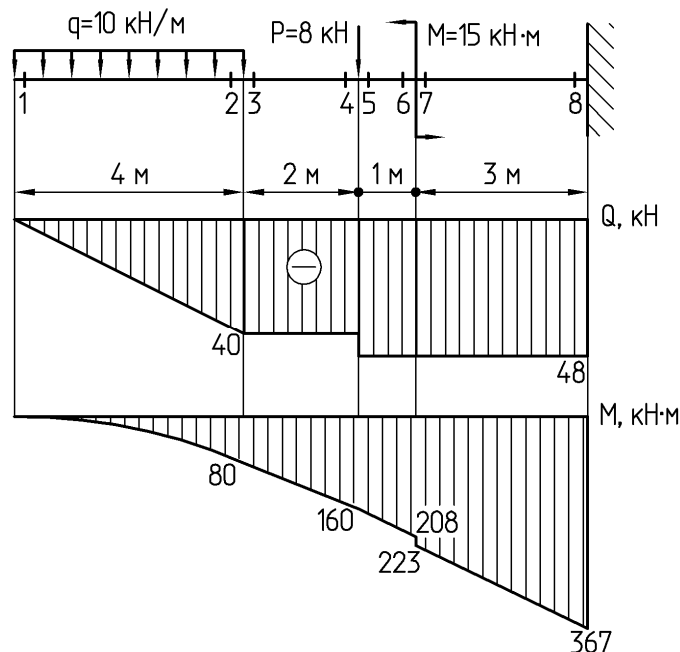


Рисунок 3.10

Задача 3.3

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двоопорної балки, зображеної на рисунку 3.11.

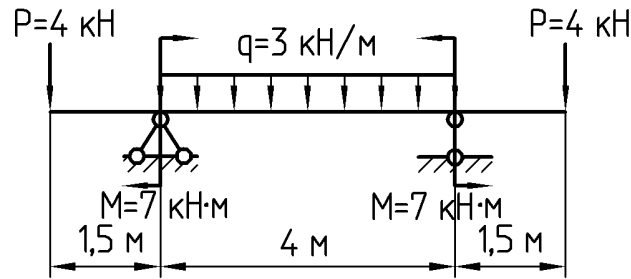


Рисунок 3.11

Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил щодо точок А та В (рис. 3.12).

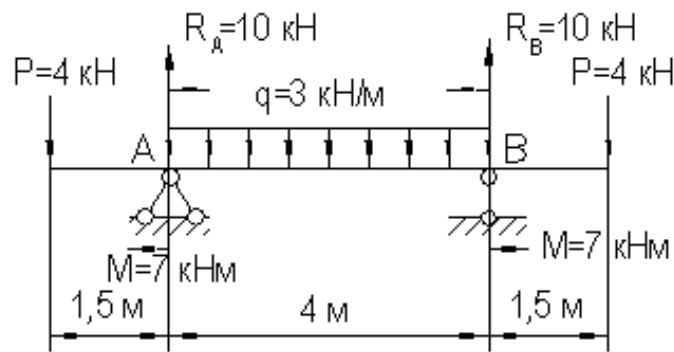


Рисунок 3.12

$$\sum M_A = 0,$$

$$-q \cdot 4 \cdot 2 - P \cdot 5,5 + P \cdot 1,5 - M + M + 4R_B = 0,$$

$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 4 + M - M}{4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 7 - 7}{4} = 10 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 5,5 - P \cdot 1,5 - M + M - 4R_A = 0,$$

$$R_A = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 4 - M + M}{4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 7 + 7}{4} = 10 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$R_A - q \cdot 4 - 2P + R_B = 0,$$

$$10 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 10 = 0,$$

$$20 - 20 = 0,$$

$$0 = 0.$$

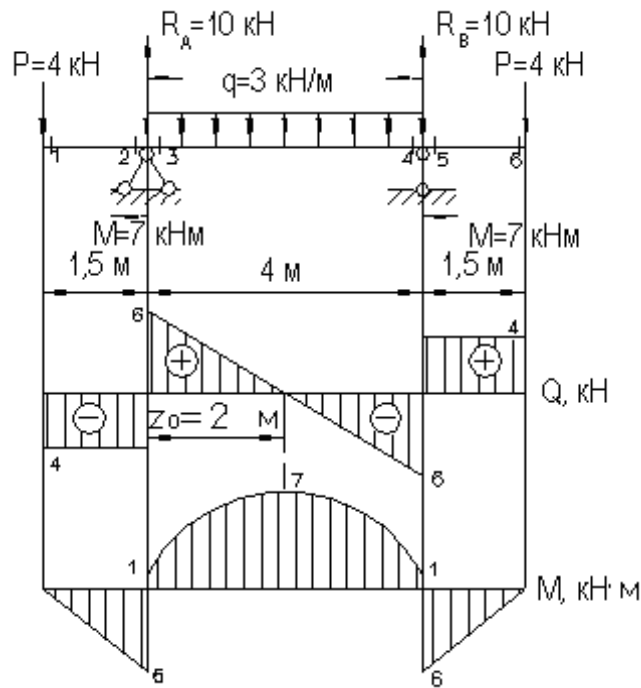


Рисунок 3.13

2 Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах (рис. 3.13):

$$Q_1 = -P = -4 \text{ кН},$$

$$Q_2 = -P = -4 \text{ кН},$$

$$Q_3 = -P + R_A = -4 + 10 = 6 \text{ кН},$$

$$Q_6 = P = 4 \text{ кН},$$

$$Q_5 = P = 4 \text{ кН},$$

$$Q_4 = P - R_B = 4 - 10 = -6 \text{ кН}.$$

3 Визначаємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -P \cdot 1,5 = -4 \cdot 1,5 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = -P \cdot 1,5 + M = -4 \cdot 1,5 + 7 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = -P \cdot 1,5 = -4 \cdot 1,5 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = -P \cdot 1,5 + M = -4 \cdot 1,5 + 7 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4 Будуємо епюру за характерними перерізами.

5 Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію і міняє знак з «+» на «-», то в цій точці маємо максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу:

$$z_0 = \frac{6}{3} = 2 \text{ м},$$

$$\begin{aligned} M_{z_0} &= M - P(1,5 + z_0) + R_a z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = \\ &= 7 - 4 \cdot (1,5 + 2) + 10 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Задача 3.4

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двоопорної балки, зображеної на рисунку 3.14.

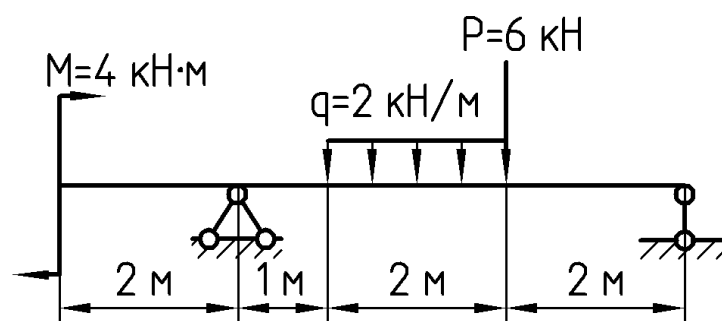


Рисунок 3.14

Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил щодо точок А та В (рис. 3.15).

$$\sum M_A = 0,$$

$$-P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 - M + 5R_B = 0,$$

$$R_B = \frac{P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 2 + M}{5} = \frac{6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4}{5} = 6 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - M - 5R_A = 0,$$

$$R_A = \frac{P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - M}{5} = \frac{6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 4}{5} = 4 \text{ кН}.$$

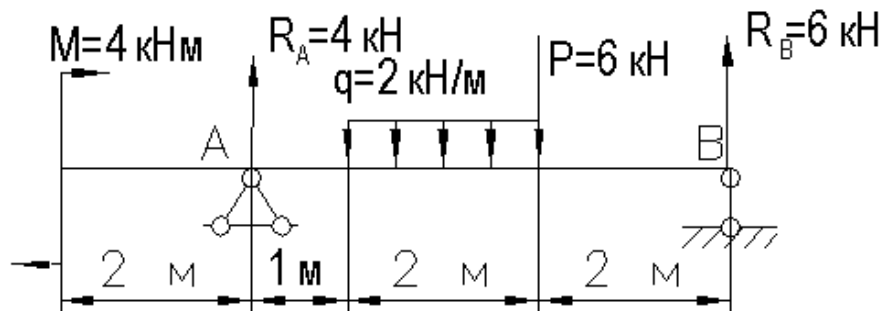


Рисунок 3.15

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$R_A - q \cdot 2 - P + R_B = 0,$$

$$4 - 2 \cdot 2 - 6 + 6 = 0,$$

$$10 - 10 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах (рис. 3.16):

$$Q_1 = Q_2 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_5 = R_A = 4 \text{ кН},$$

$$Q_8 = Q_7 = -R_B = -6 \text{ кН},$$

$$Q_6 = -R_B + P = -6 + 6 = 0 \text{ кН}.$$

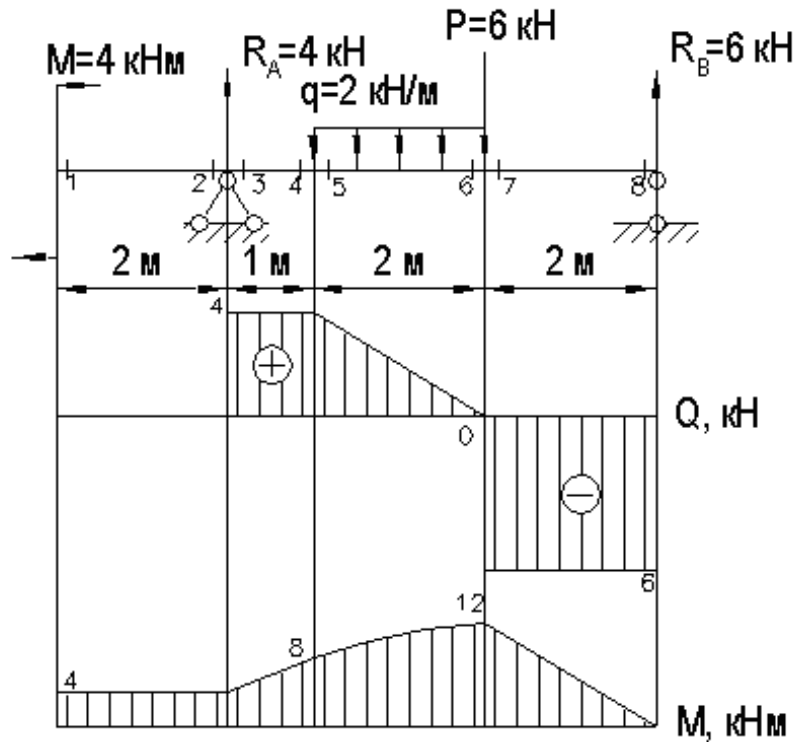


Рисунок 3.16

3 Визначаємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = M_2 = M_3 = M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = M + R_A \cdot 1 = 4 + 4 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = M_6 = R_B \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4 Будуємо епюру за розрахованими значеннями Q та M у характерних перерізах.

3.3 Побудова епюр внутрішніх зусиль для рам

Задача 3.5

Побудувати епюри поздовжніх та поперечних сил, а також згинальних моментів для рами, зображеної на рисунку 3.17.

Розв'язання

1 Розставляємо характерні перерізи (рис. 3.18). Побудову починаємо з вільного кінця.

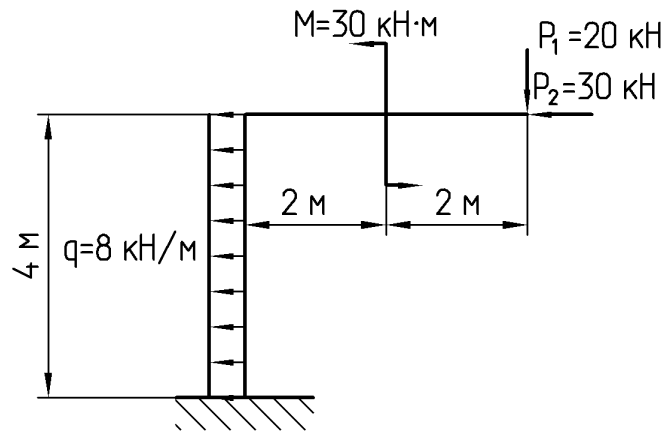


Рисунок 3.17

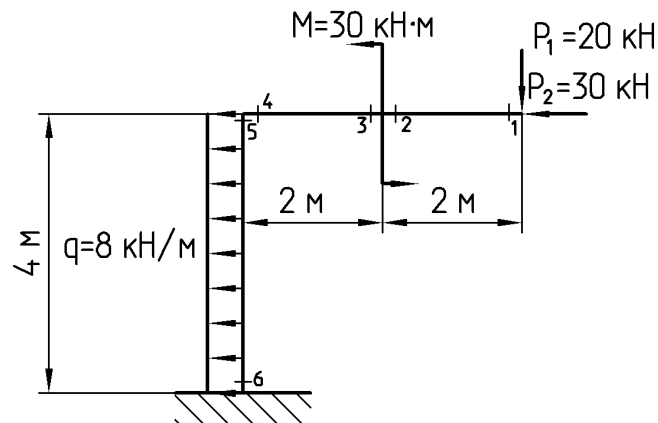


Рисунок 3.18

2 Визначаємо значення поздовжніх сил у характерних перерізах:

$$N_1 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_2 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_3 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_4 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_5 = -P_1 = -20 \text{ кН},$$

$$N_6 = -P_1 = -20 \text{ кН}.$$

3 Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_2 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_3 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_4 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_5 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$Q_6 = -P_2 - q \cdot 4 = -30 - 8 \cdot 4 = -62 \text{ кН}.$$

4 Визначаємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -P_1 \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = -P_1 \cdot 2 + M = -20 \cdot 2 + 30 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = -P_1 \cdot 4 + M = -20 \cdot 4 + 30 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = -P_1 \cdot 4 + M + P_2 \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = -20 \cdot 4 + 30 + 30 \cdot 4 + 8 \cdot 4 \cdot 2 = 134 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Будуємо епюри поздовжніх сил N (рис. 3.19, а), поперечних сил Q (рис. 3.19, б), а також згинальних моментів M (рис. 3.19, в) за характерними перерізами.

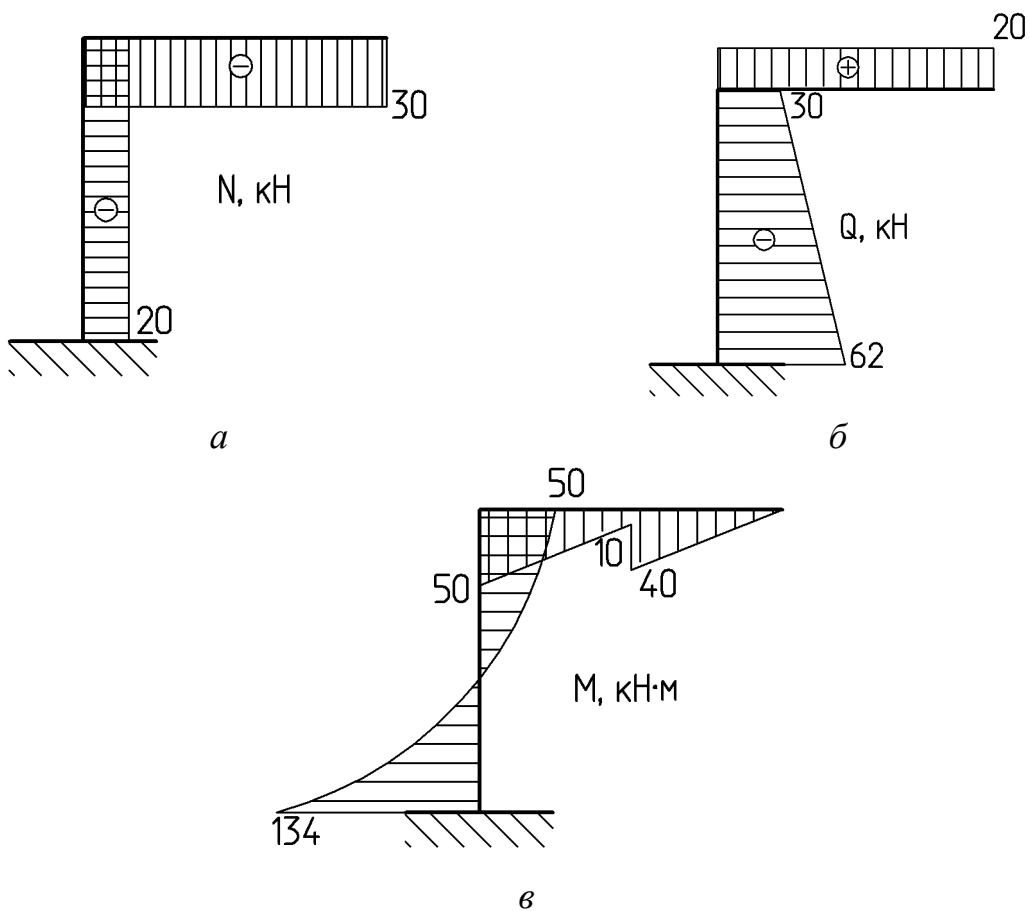


Рисунок 3.19

Задача 3.6

Побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил, а також згинальних моментів для рами, зображеної на рисунку 3.20.

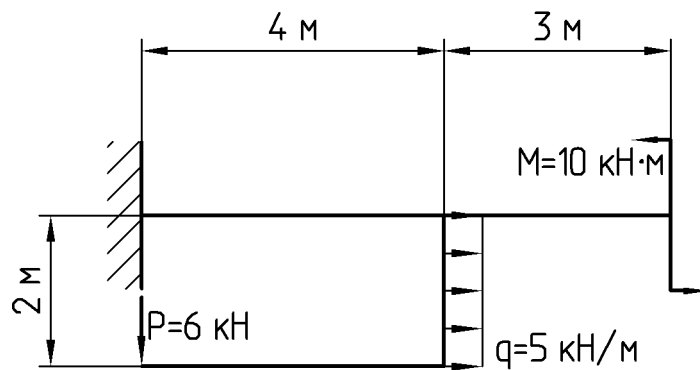


Рисунок 3.20

Розв'язання

1 Розставляємо характерні перерізи (рис. 3.21). Побудову починаємо з вільного кінця.

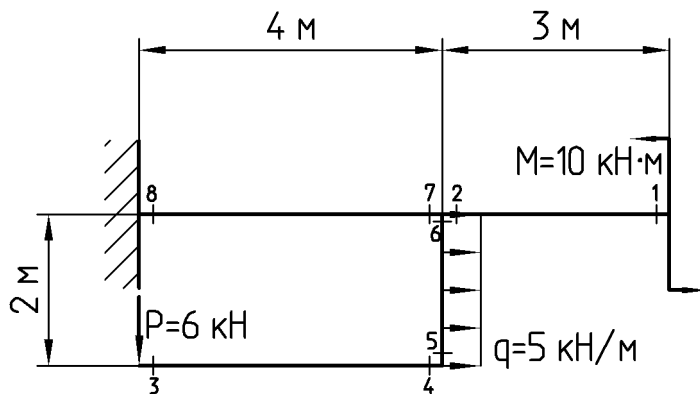


Рисунок 3.21

2 Визначаємо значення поздовжніх сил у характерних перерізах:

$$N_1 = N_2 = 0 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = 0 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = P = 6 \text{ кН},$$

$$N_7 = N_8 = q \cdot 2 = 10 \text{ кН}.$$

3 Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = Q_2 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = -P = -6 \text{ кН},$$

$$Q_5 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_6 = -q \cdot 2 = -10 \text{ кН},$$

$$Q_7 = Q_8 = P = 6 \text{ кН}.$$

4 Визначаємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = M_2 = M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = P \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 1 = 34 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 + M = 6 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + 10 = 44 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = q \cdot 2 \cdot 1 + M = 5 \cdot 2 \cdot 1 + 10 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

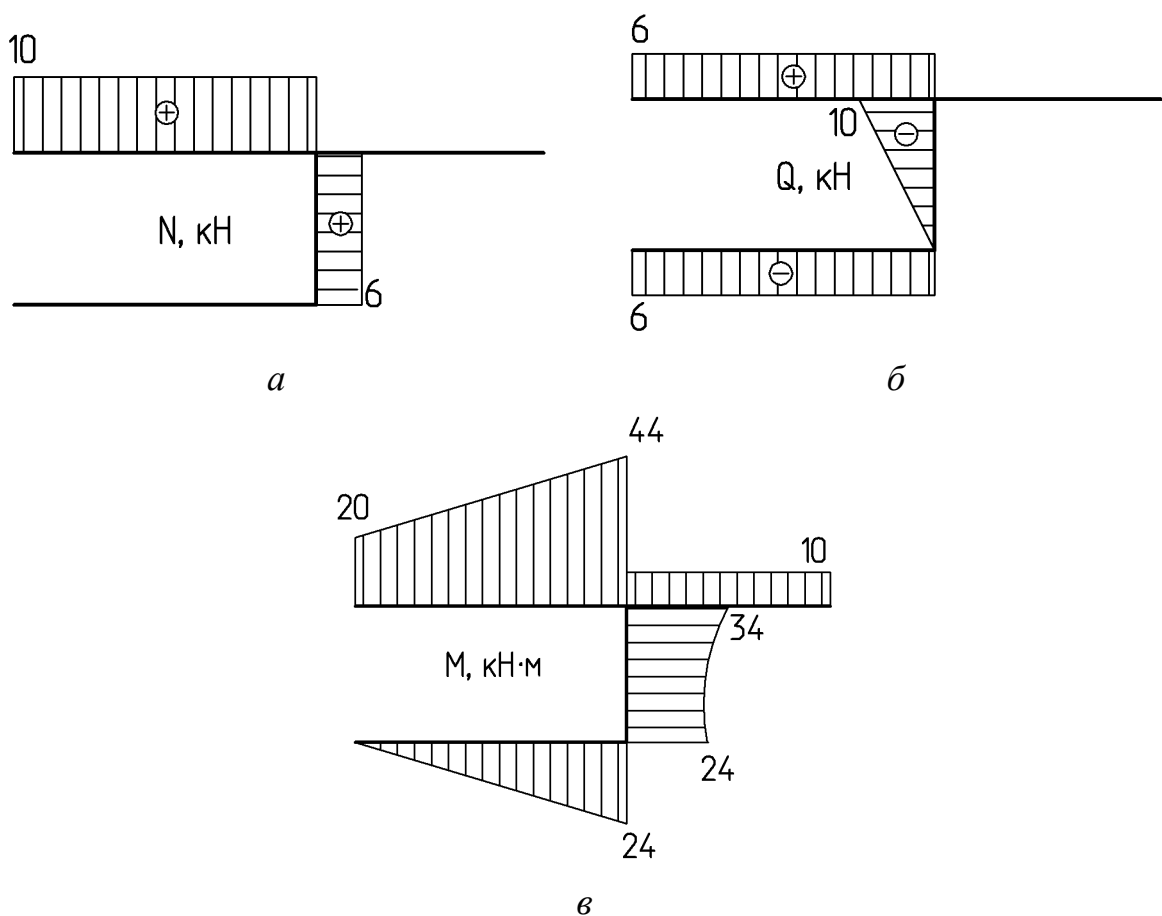


Рисунок 3.22

5 Будуємо епюри поздовжніх сил N (рис. 3.22, а), поперечних сил Q (рис. 3.22, б), а також згинальних моментів M (рис. 3.22, в) за характерними перерізами.

Задача 3.7

Побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил, а також згинальних моментів для рами, зображеної на рисунку 3.23.

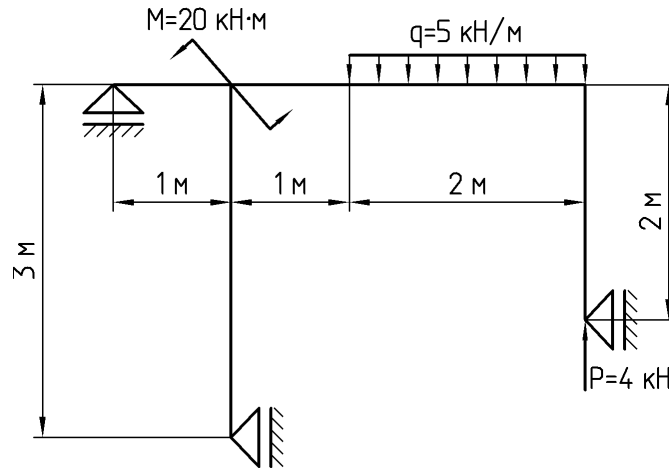


Рисунок 3.23

Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції (рис. 3.24). Розставляємо характерні перерізи.

$$\sum P_y = 0,$$

$$-q \cdot 2 + P + R_C = 0,$$

$$R_C = q \cdot 2 - P = 5 \cdot 2 - 4 = 6 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$M + P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 - R_C \cdot 1 - H_A \cdot 1 = 0,$$

$$H_A = \frac{M + P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 - R_C \cdot 1}{1} = \frac{20 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 6 \cdot 1}{1} = 6 \text{ кН}.$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$H_A + H_B = 0,$$

$$H_B = -H_A = -6 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_c = 0$:

$$M + P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 + H_A \cdot 2 - H_B \cdot 3 = 0,$$

$$20 + 4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = 0,$$

$$48 - 48 = 0,$$

$$0 = 0.$$

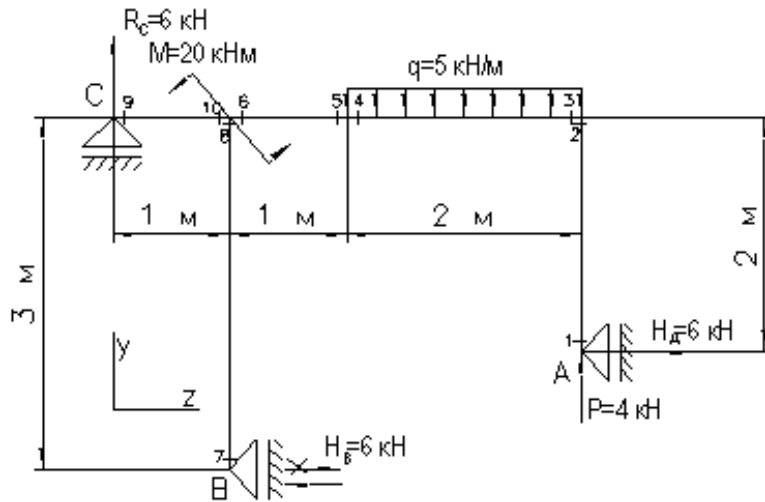


Рисунок 3.24

2 Визначаємо значення поздовжніх сил у характерних перерізах:

$$N_1 = N_2 = -P = -4 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = H_A = 6 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = H_A = 6 \text{ кН},$$

$$N_7 = N_8 = 0 \text{ кН},$$

$$N_9 = N_{10} = 0 \text{ кН}.$$

3 Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = Q_2 = -H_A = -6 \text{ кН},$$

$$Q_3 = -P = -4 \text{ кН},$$

$$Q_4 = Q_5 = Q_6 = -P + q \cdot 2 = -4 + 5 \cdot 2 = 6 \text{ кН},$$

$$Q_7 = Q_8 = H_B = 6 \text{ кН},$$

$$Q_9 = Q_{10} = R_C = 6 \text{ кН}.$$

4 Визначаємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = H_A \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = H_A \cdot 2 + P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = H_A \cdot 2 + P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = H_B \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_9 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{10} = R_C \cdot 1 = 6 \cdot 1 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Будуємо епюри поздовжніх сил N (рис. 3.25, а), поперечних сил Q (рис. 3.25, б), а також згинальних моментів M (рис. 3.25, в) за характерними перерізами.

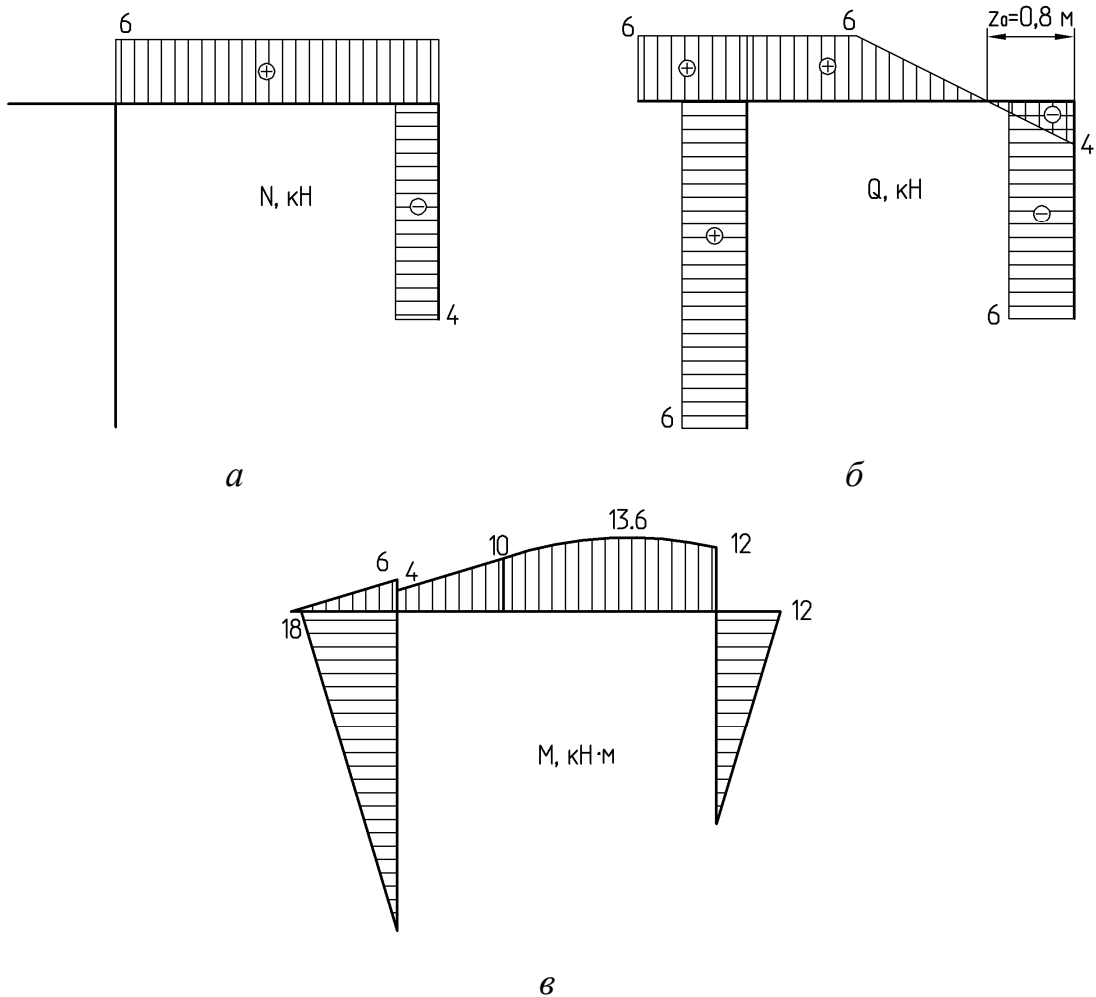


Рисунок 3.25

6 Якщо еюра поперечних сил пересікає базову лінію і змінює знак з «+» на «-», то в цій точці маємо максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу.

$$z_0 = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ м},$$

$$M_5 = H_a \cdot 2 + Pz_0 - qz_0 \frac{z_0}{2} = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 0,8 - 5 \cdot 0,8 \cdot \frac{0,8}{2} = 13,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Задача 3.8

Побудувати еюри поздовжніх і поперечних сил, а також згинальних моментів для рами, зображеної на рисунку 3.26.

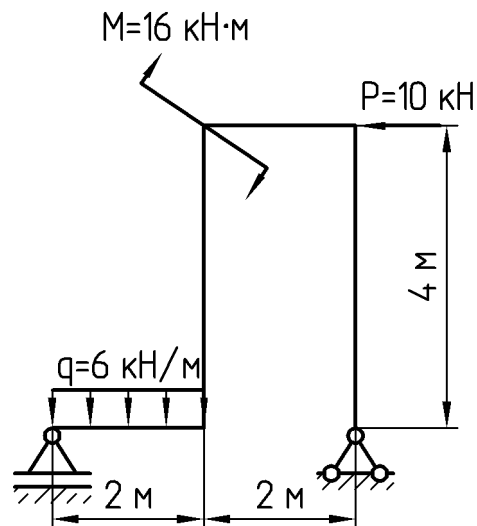


Рисунок 3.26

Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції (рис. 3.27). Розставляємо характерні перерізи.

$$\sum P_z = 0,$$

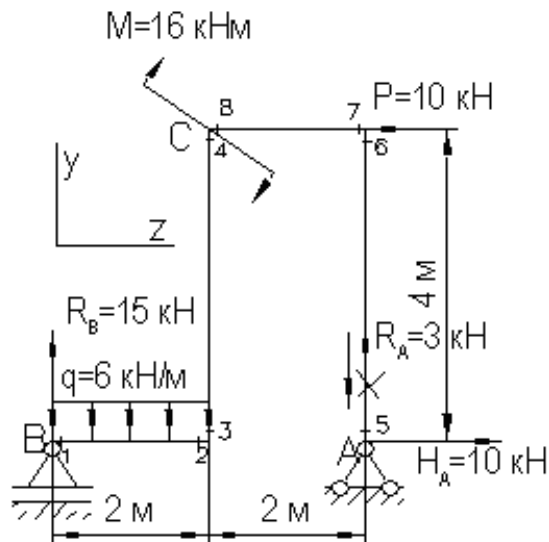
$$-P + H_A = 0,$$

$$H_A = P = 10 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0,$$

$$R_B = \frac{-M + P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 3}{4} = \frac{-16 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 15 \text{ kH.}$$

$$R_A = q \cdot 2 - R_B = 6 \cdot 2 - 15 = -3 \text{ KH.}$$



Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_c = 0$:

$$0 = 0.$$

$$N_7 = N_8 = H_A - P = 10 - 10 = 0 \text{ KH.}$$

3 Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = R_B = 15 \text{ кН},$$

$$Q_2 = R_B - q \cdot 2 = 15 - 6 \cdot 2 = 3 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_5 = Q_6 = -H_A = -10 \text{ кН},$$

$$Q_7 = Q_8 = R_A = 3 \text{ кН}.$$

4 Визначаємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = M_4 = R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 15 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 1 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = M_7 = H_A \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = H_A \cdot 4 - R_A \cdot 2 = 10 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 34 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Будуємо епюру поздовжніх сил N (рис. 3.28, а), поперечних сил Q (рис. 3.28, б), а також згинальних моментів M (рис. 3.28, в) за характерними перерізами.

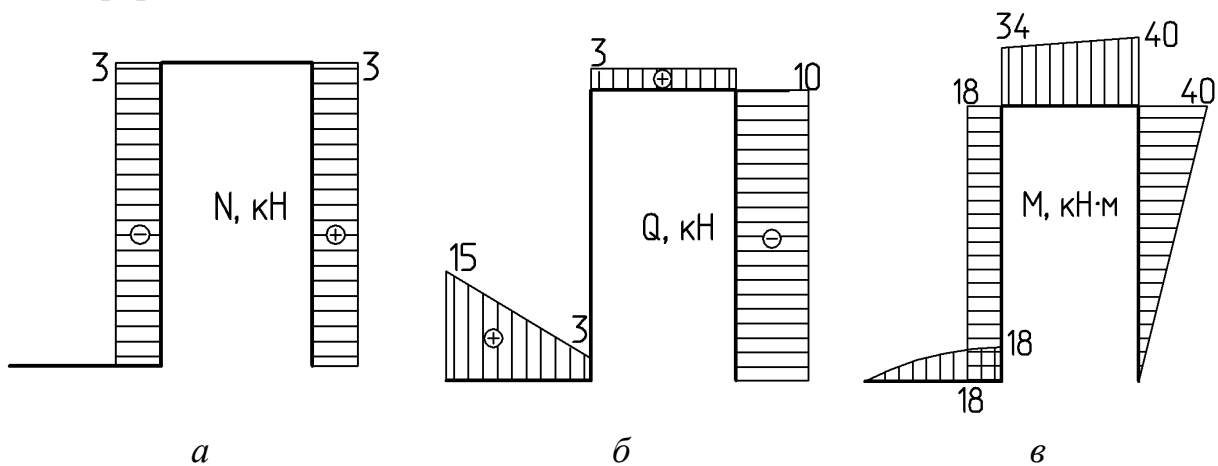


Рисунок 3.28

Задача 3.9

Побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил, а також згинальних моментів для рами, зображеної на рисунку 3.29.

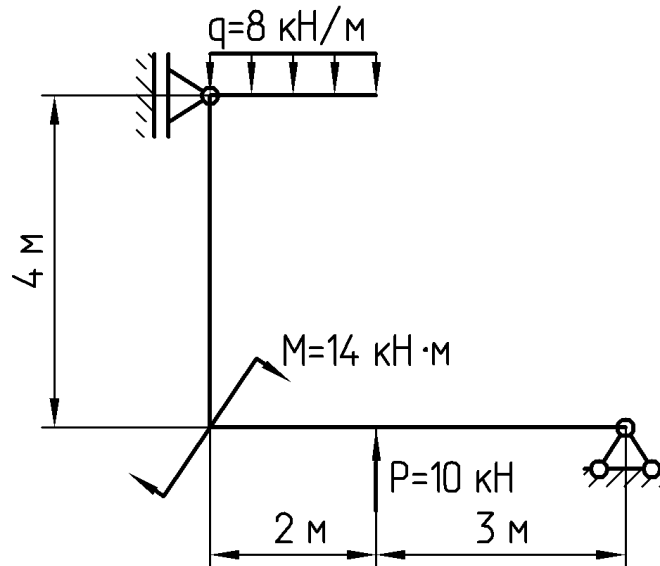


Рисунок 3.29

Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції (рис. 3.30). Розставляємо характерні перерізи:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M - P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 4 - H_B \cdot 4 &= 0, \\ H_B &= \frac{-M - P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 4}{4} = \frac{-14 - 10 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot 4}{4} = 5 \text{ кН.} \\ \sum P_y &= 0, \\ -q \cdot 2 + P + R_A &= 0, \\ R_A &= q \cdot 2 - P = 8 \cdot 2 - 10 = 6 \text{ кН.} \\ \sum P_z &= 0, \\ -H_A + H_B &= 0, \\ H_A &= H_B = 5 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum M_B = 0$.

$$\begin{aligned}-M + P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 + R_A \cdot 5 - H_A \cdot 4 &= 0, \\ -14 + 10 \cdot 2 - 8 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 5 - 5 \cdot 4 &= 0, \\ 50 - 50 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

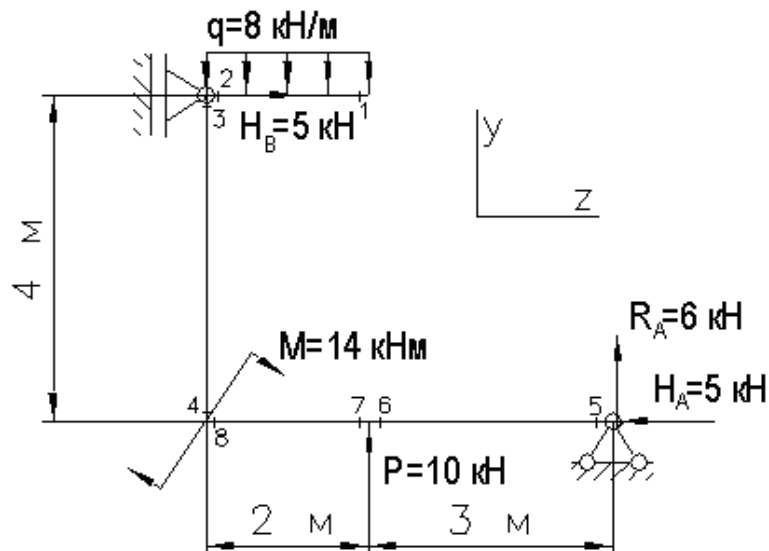


Рисунок 3.30

2 Визначаємо значення поздовжніх сил у характерних перерізах:

$$N_1 = N_2 = 0 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = -q \cdot 2 = -8 \cdot 2 = -16 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = -H_A = -5 \text{ кН}.$$

3 Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_1 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_2 = q \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = H_B = 5 \text{ кН},$$

$$Q_5 = Q_6 = -R_A = -6 \text{ кН},$$

$$Q_7 = Q_8 = -R_A - P = -6 - 10 = -16 \text{ кН}.$$

4 Визначаємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -8 \cdot 2 \cdot 1 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = -q \cdot 2 \cdot 1 - H_B \cdot 4 = -8 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = M_7 = R_A \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = R_A \cdot 5 + P \cdot 2 = 6 \cdot 5 + 10 \cdot 2 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Будуємо епюру поздовжніх сил N (рис. 3.31, а), поперечних сил Q (рис. 3.31, б), а також згинальних моментів M (рис. 3.31, в) за характерними перерізами.

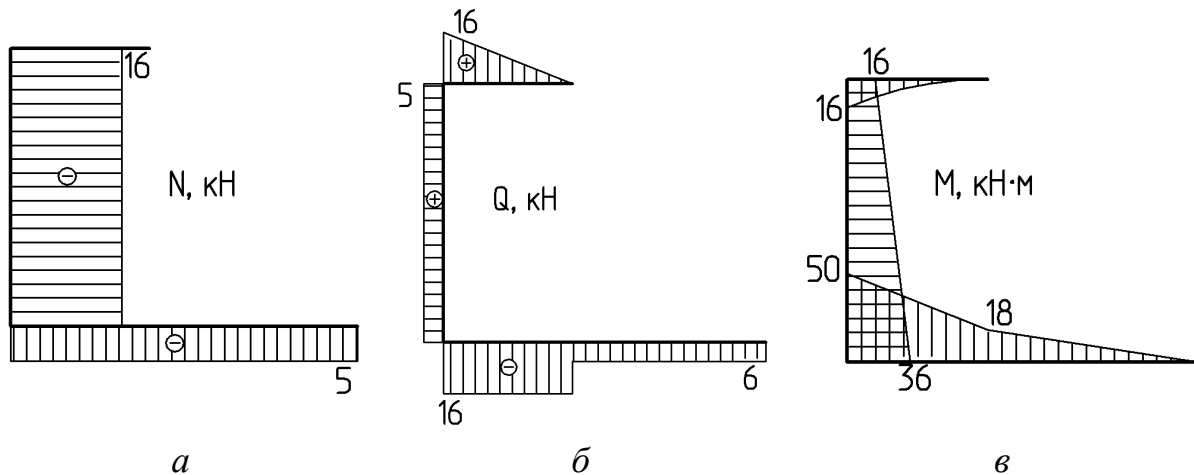


Рисунок 3.31

4 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

4.1 Основні положення теорії

Міцність і жорсткість конструкції залежить від геометричних характеристик перерізів.

До цих геометричних характеристик відносяться площі поперечних перерізів, моменти інерції, моменти опору, радіуси інерції.

Статичний момент перерізу – сума добутків площ елементарних площадок на їх відстані до даної осі, узята за всією площею перерізу:

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF. \quad (4.1)$$

При паралельному переносі осей статичний момент міняється на величину, яка рівна добутку площі на відстань між осями (рис. 4.1).

$$S_{x_2} = S_{x_1} + aF; \quad S_{y_2} = S_{y_1} + bF. \quad (4.2)$$

Вісь, щодо якої статичний момент дорівнює нулю, називається центральною. Точка перетину центральних осей називається центром ваги перерізу.

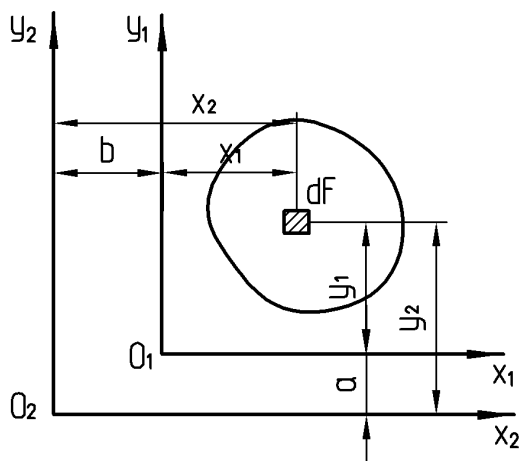


Рисунок 4.1

Координати центра ваги складного перерізу визначаються за такими формулами:

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (4.3)$$

де x_c, y_c – координати центра ваги складного перерізу відносно початкової системи осей;

x_i, y_i – координати центра ваги i -й фігури відносно початкової системи осей;

F_i – площа i -й фігури.

Осьовим (або екваторіальним) моментом інерції площі перерізу називається інтеграл за площею добутків елементарних площадок на квадрати їхніх відстаней до даної осі.

Так, осьові моменти інерції довільного перерізу (рис. 4.2) відповідно рівні:

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF. \quad (4.4)$$

Полярним моментом інерції площі перерізу щодо даної точки (полюса) називається інтеграл за площею добутків елементарних площадок на квадрати їхніх відстаней до полюса (див. рис. 4.2):

$$J_p = \int_F \rho^2 dF, \quad J_p = J_y + J_x. \quad (4.5)$$

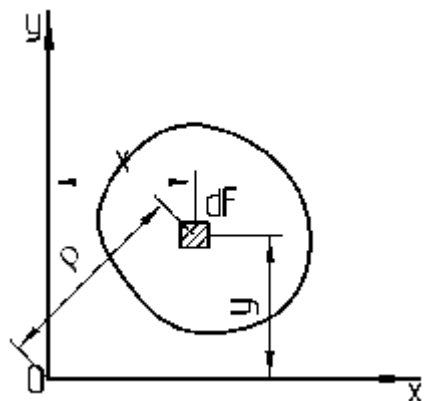


Рисунок 4.2

Величини осьових і полярних моментів інерції завжди додатні.

Відцентровим моментом інерції називається інтеграл за площею добутків елементарних площадок на їхні відстані від координатних осей x , y :

$$J_{xy} = \int_F xy \, dF. \quad (4.6)$$

Залежно від положення осей відцентровий момент інерції може бути додатним або від'ємним, а також дорівнювати нулю.

Одиниця виміру моментів інерції – метр, дециметр або сантиметр у четвертому степені.

Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називаються головними. Головні осі, що проходять через центр ваги перерізу, називаються головними центральними осями.

При обчисленні моментів інерції перерізів, складених з найпростіших геометричних фігур або стандартних прокатних профілів, широко застосовуються формули перетворення моментів інерції при паралельному переносі осей (рис. 4.3).

Момент інерції перерізу відносно будь-якої осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі, паралельної даної, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між цими осями:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 F, \quad J_{y_1} = J_y + b^2 F. \quad (4.7)$$

Відцентровий момент інерції відносно будь-якої системи прямокутних осей дорівнює відцентровому моменту відносно системи центральних осей, паралельних даним, плюс добуток площі фігури на координати її центра ваги в нових осях:

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF, \quad J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i y_i} + a_i b_i F_i). \quad (4.8)$$

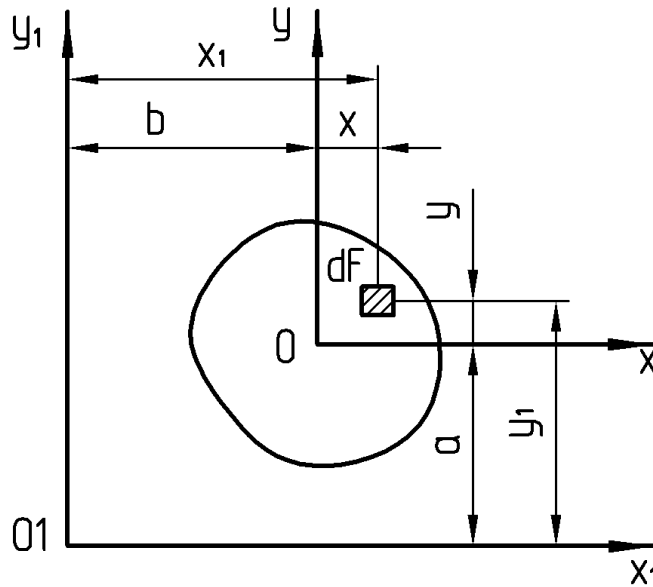


Рисунок 4.3

Осьові моменти інерції всього перерізу щодо головних центральних осей фігури визначають за формулами:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i), \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i), \quad (4.9)$$

де J_{x_i} , J_{y_i} – осьові моменти інерції складових фігур відносно власних центральних осей;

a_i – відстань між центральною віссю X_c складного перерізу і власною центральною віссю складової фігури X_i ;

b_i – відстань між центральною віссю Y_c складного перерізу і власною центральною віссю складової фігури Y_i .

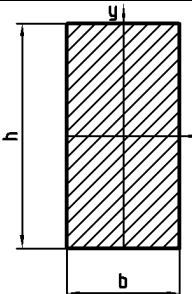
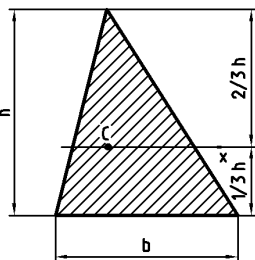
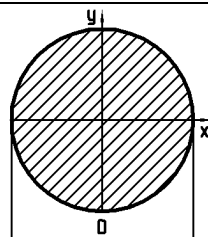
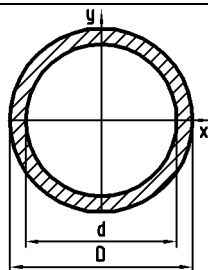
Відцентровий момент інерції всього перерізу відносно головних центральних осей фігури визначають за формулою

$$J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i y_i} + a_i b_i F_i), \quad (4.10)$$

де $J_{x_i y_i}$ – відцентровий момент інерції складових фігур відносно власних центральних осей.

Значення моментів інерції найбільш уживаних перерізів відносно центральних осей наведені в таблиці 4.1

Таблиця 4.1 – Значення моментів інерції найбільш уживаних перерізів щодо центральних осей

Вид перерізу		Моменти інерції	
		J_x	J_y
Прямокутник		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$
Трикутник		$\frac{bh^3}{36}$	—
Круг		$\frac{\pi D^4}{64}$	
Кільце		$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4),$ $\alpha = \frac{d}{D}$	

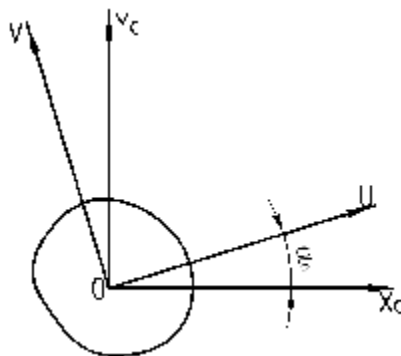


Рисунок 4.4

Положення головних осей інерції знаходять із наступної залежності (рис. 4.4):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}}, \quad (4.11)$$

де α_0 – кут повороту головних центральних осей фігури відносно початкової системи центральних осей;

$J_{x_c y_c}$ – відцентровий момент інерції відносно центральних осей X_c і Y_c ;

J_{x_c} , J_{y_c} – осьові моменти інерції відносно центральних осей X_c і Y_c .

Додатний кут α_0 варто відкладати від осі X_c проти ходу годинникової стрілки.

При обчисленні моментів інерції щодо головних центральних осей використовують наступні формули:

$$\begin{aligned} J_U &= J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0, \\ J_V &= J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Відцентровий момент інерції відносно головних центральних осей дорівнює нулю:

$$J_{UV} = J_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 = 0. \quad (4.13)$$

4.2 Визначення геометричних характеристик плоских перерізів

Задача 4.1

Визначити положення центра ваги даного перерізу (рис. 4.5) і обчислити осьові моменти інерції всього перерізу щодо головних центральних осей перерізу.

Розв'язання

1 Зображуємо переріз у масштабі із вказівкою розмірів фігур. Визначаємо положення центра ваги кожної з фігур. Наносимо на рисунок центральні осі кожної фігури (рис. 4.6).

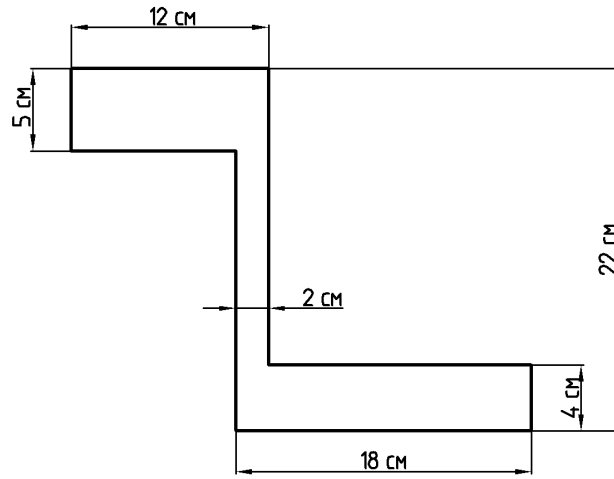


Рисунок 4.5

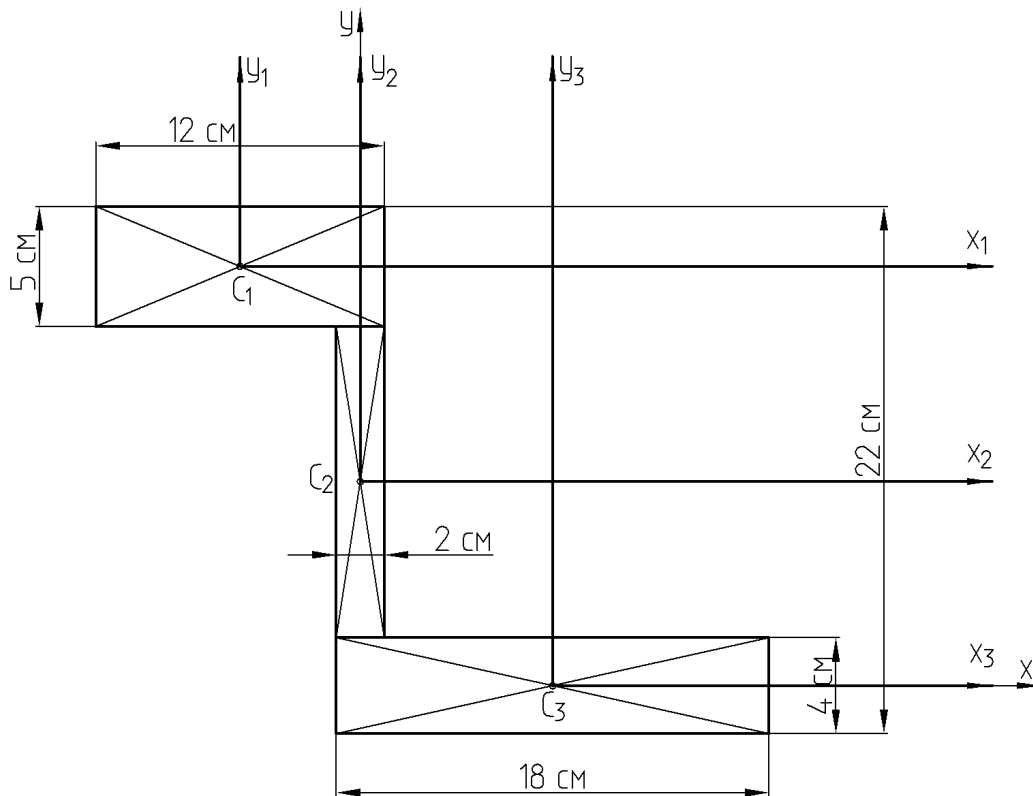


Рисунок 4.6

Визначаємо площі кожної з фігур:

$$F_1 = 12 \cdot 5 = 60 \text{ см}^2, \quad F_2 = 2 \cdot 13 = 26 \text{ см}^2, \quad F_3 = 18 \cdot 4 = 72 \text{ см}^2.$$

2 Вибираємо для перерізу довільну систему прямокутних координат (осі x , y), відносно обраних початкових осей x та y знаходимо координати центра ваги складного перерізу.

Знаходимо координати центра ваги i -ї фігури відносно початкової системи осей:

$$x_1 = -\frac{12}{2} + \frac{2}{2} = -5 \text{ см},$$

$$y_1 = \frac{4}{2} + 13 + \frac{5}{2} = 17,5 \text{ см},$$

$$x_2 = 0 \text{ см},$$

$$y_2 = \frac{4}{2} + \frac{13}{2} = 8,5 \text{ см},$$

$$x_3 = \frac{18}{2} - \frac{2}{2} = 8 \text{ см},$$

$$y_3 = 0 \text{ см}.$$

Підставляючи отримані значення x_i , y_i у формули (4.3), маємо:

$$x_c = \frac{-5 \cdot 60 + 0 \cdot 26 + 8 \cdot 72}{60 + 26 + 72} = 1,75 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{17,5 \cdot 60 + 8,5 \cdot 26 + 0 \cdot 72}{60 + 26 + 72} = 8,04 \text{ см}.$$

За знайденими координатами x_c , y_c наносимо положення центра ваги складного перерізу. Через центр ваги складного перерізу проводимо центральні осі всього перерізу, направляючи їх паралельно центральним осям складових фігур (рис. 4.7).

3 Визначаємо осьові моменти інерції всього перерізу відносно центральних осей перерізу.

Визначаємо осьові моменти інерції складових фігур відносно власних центральних осей:

$$J_{x_1} = \frac{12 \cdot 5^3}{12} = 125 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1} = \frac{5 \cdot 12^3}{12} = 720 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_2} = \frac{2 \cdot 13^3}{12} = 366,2 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_2} = \frac{13 \cdot 2^3}{12} = 8,7 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_3} = \frac{18 \cdot 4^3}{12} = 96 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_3} = \frac{4 \cdot 18^3}{12} = 1944 \text{ см}^4.$$

Знаходимо відстань між центральною віссю X_c складного перерізу і власною центральною віссю x_i i -ї складової фігури:

$$a_1 = y_1 - y_c = 17,5 - 8,04 = 9,46 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 8,5 - 8,04 = 0,46 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 0 - 8,04 = -8,04 \text{ см}.$$

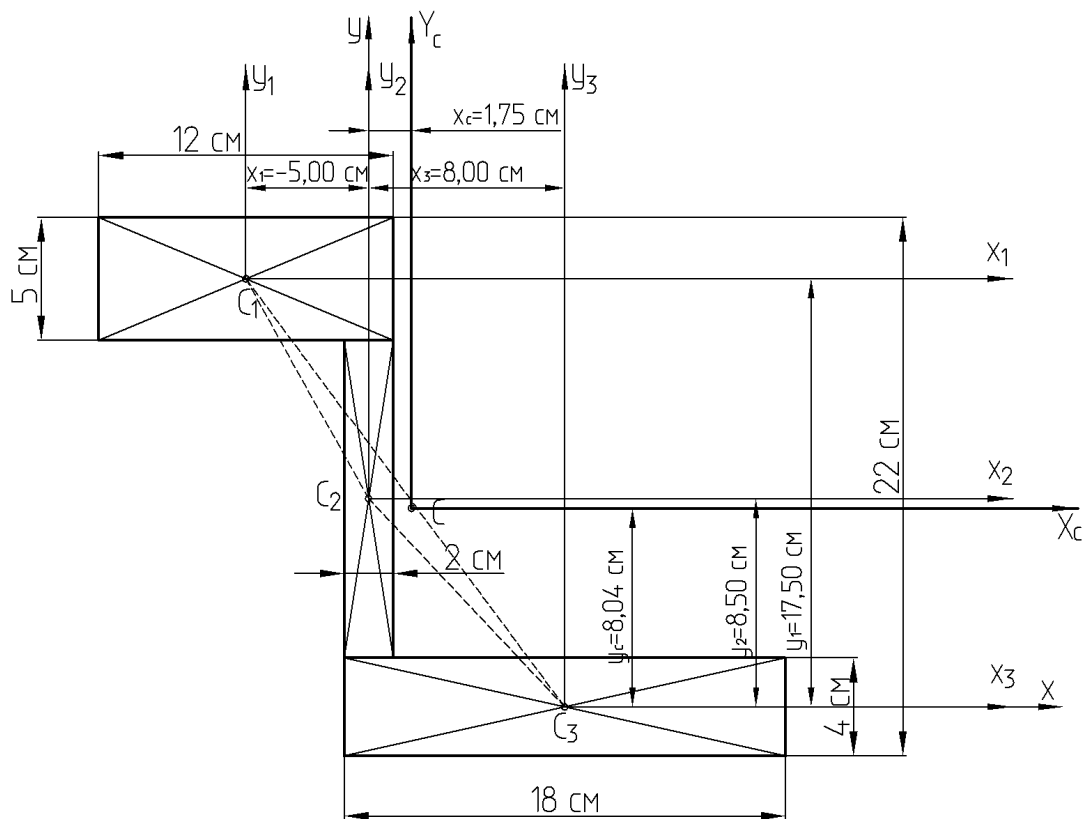


Рисунок 4.7

Знаходимо відстань між центральною віссю Y_c складного перерізу і власною центральною віссю y_i і-ї складової фігури:

$$b_1 = x_1 - x_c = -5 - 1,75 = -6,75 \text{ см},$$

$$b_2 = x_2 - x_c = 0 - 1,75 = -1,75 \text{ см},$$

$$b_3 = x_3 - x_c = 8 - 1,75 = 6,25 \text{ см}.$$

Підставляючи отримані значення J_{x_i} , J_{y_i} , a_i , b_i у формули (4.9), маємо:

$$J_{x_c} = 125 + 9,46^2 \cdot 60 + 366,2 + 0,46^2 \cdot 26 + 96 + 8,04^2 \cdot 72 = 10616,4 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 720 + 6,75^2 \cdot 60 + 8,7 + 1,75^2 \cdot 26 + 1944 + 6,25^2 \cdot 72 = 8298,6 \text{ см}^4.$$

Задача 4.2

Визначити положення центра ваги даного перерізу (рис. 4.8) і обчислити головні осьові моменти інерції.

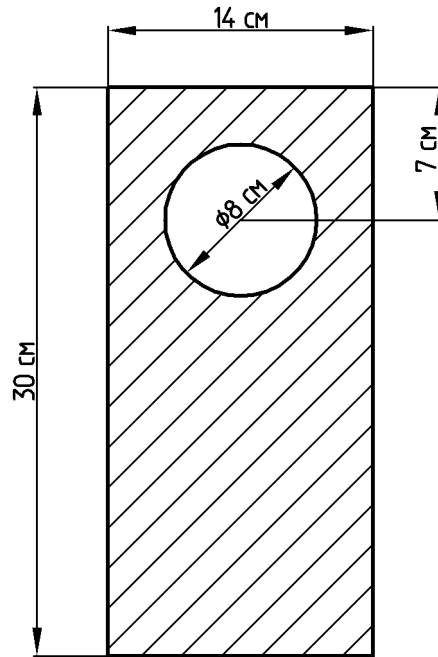


Рисунок 4.8

Розв'язання

1 Зображуємо переріз у масштабі із вказівкою розмірів фігур. Якщо в перерізі є отвір, його зручно вважати частиною фігури з від'ємною площею. Розглянутий переріз розбиваємо на дві прості частини – прямокутник і круг від'ємної площі.

Визначаємо положення центра ваги кожної з фігур. Наносимо на рисунок центральні осі кожної фігури (рис. 4.9).

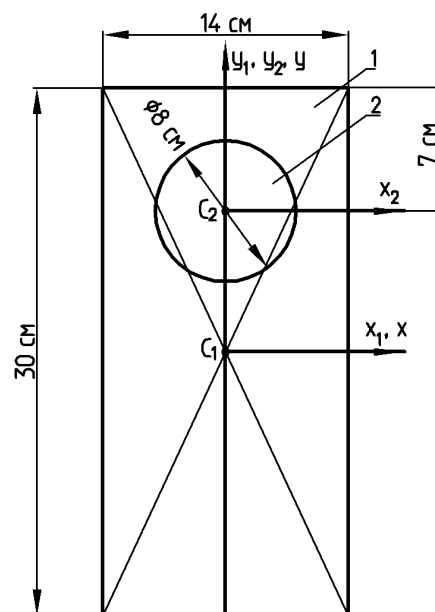


Рисунок 4.9

Визначаємо площі кожної з фігур:

$$F_1 = 30 \cdot 14 = 420 \text{ см}^2,$$

$$F_2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 8^2}{4} = 50,24 \text{ см}^2.$$

2 Відносно обраних початкових осей в точці C_1 знаходимо координати центра ваги складного перерізу.

Якщо переріз симетричний відносно осі Y , то центр ваги лежить на ній.

Знаходимо координати центра ваги i -ї фігури відносно початкової системи осей:

$$y_1 = 0 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{30}{2} - 7 = 8 \text{ см}.$$

Підставляючи отримані значення y_i у формулу (4.3), маємо:

$$y_c = \frac{0 \cdot 420 - 8 \cdot 50,24}{420 - 50,24} = -1,1 \text{ см}.$$

За знайденою координатою y_c наносимо положення центра ваги складного перерізу (рис. 4.10).

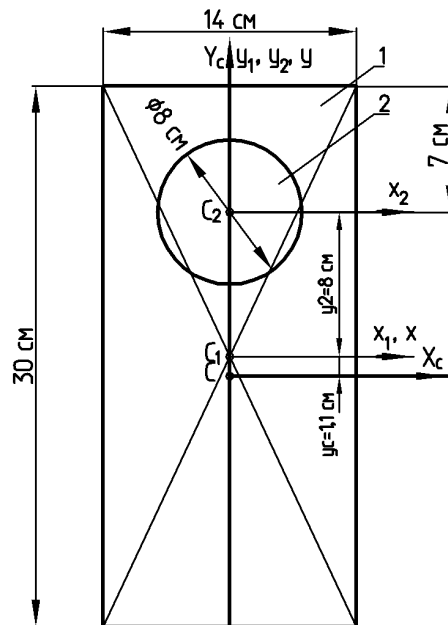


Рисунок 4.10

3 Визначаємо осьові моменти інерції всього перерізу відносно головних центральних осей перерізу:

$$J_{x_1} = \frac{14 \cdot 30^3}{12} = 31500 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = \frac{30 \cdot 14^3}{12} = 6860 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_2} = J_{y_2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 8^4}{64} = 201 \text{ см}^4.$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 + 1,1 = 1,1 \text{ см}, \quad a_2 = y_2 - y_c = 8 - 1,1 = 6,9 \text{ см}.$$

$$b_1 = 0 \text{ см}, \quad b_2 = 0 \text{ см}.$$

$$J_{x_c} = 31500 + 1,1^2 \cdot 420 - 201 - 6,9^2 \cdot 50 = 29426,7 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 6860 - 201 = 6659 \text{ см}^4.$$

Задача 4.3

Визначити положення центра ваги даного перерізу (рис. 4.11) і обчислити осьові моменти інерції фігури відносно головних центральних осей перерізу.

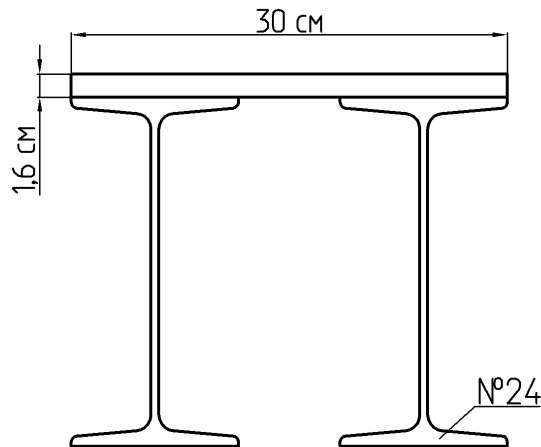


Рисунок 4.11

Розв'язання

1 Зображуємо переріз у масштабі із вказівкою розмірів фігур. Визначаємо положення центра ваги кожної з фігур. Наносимо на рисунок центральні осі кожної фігури (рис. 4.12).

Визначаємо площу прямокутника:

$$F_1 = 30 \cdot 1,6 = 48 \text{ см}^2.$$

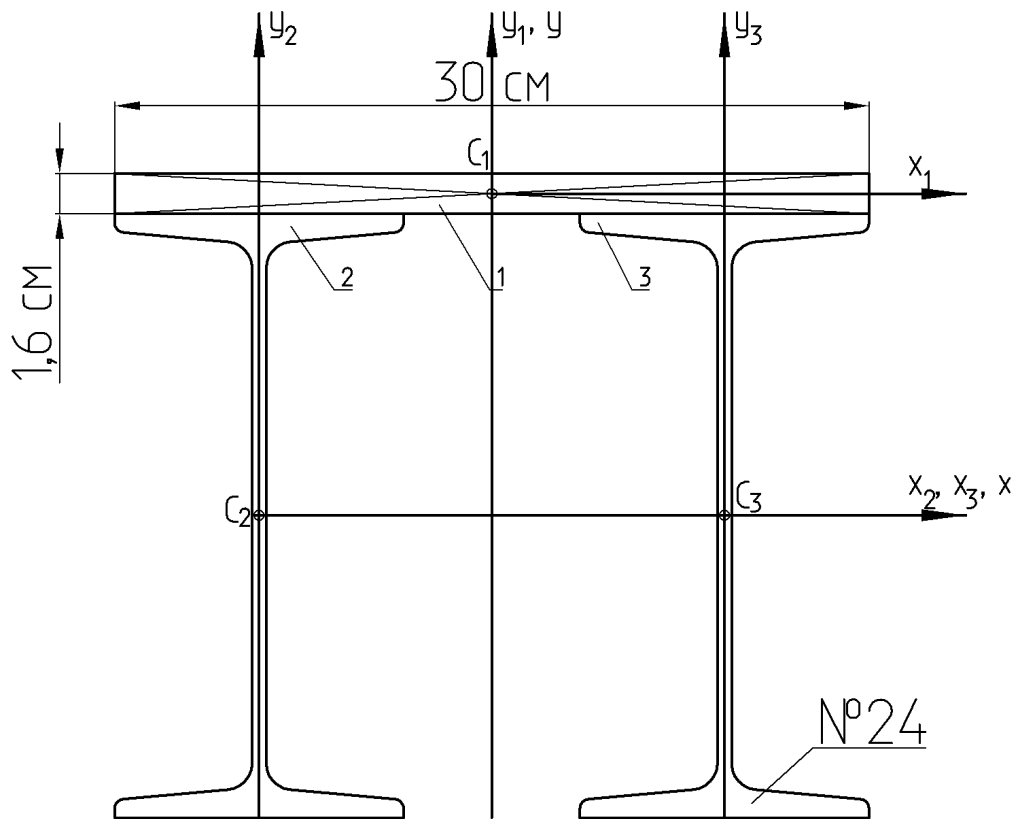


Рисунок 4.12

Із сортаменту (додаток А) виписуємо геометричні характеристики двотавра:

$$H_2 = H_3 = 24 \text{ см},$$

$$B_2 = B_3 = 11,5 \text{ см},$$

$$F_2 = F_3 = 34,8 \text{ см}^2,$$

$$J_{x2} = J_{x3} = 3460 \text{ см}^4,$$

$$J_{y2} = J_{y3} = 198 \text{ см}^4.$$

2 Відносно обраних початкових осей знаходимо координати центра ваги складного перерізу. Якщо фігура симетрична відносно осі Y , то центр ваги лежить на ній.

$$y_1 = \frac{24}{2} + \frac{1,6}{2} = 12,8 \text{ см}, \quad y_2 = 0 \text{ см}, \quad y_3 = 0 \text{ см}.$$

$$y_c = \frac{12,8 \cdot 48 + 0 \cdot 34,8 + 0 \cdot 34,8}{48 + 34,8 + 34,8} = 5,2 \text{ см}.$$

За знайденою координатою y_c наносимо положення центра ваги складного перерізу (рис. 4.13).

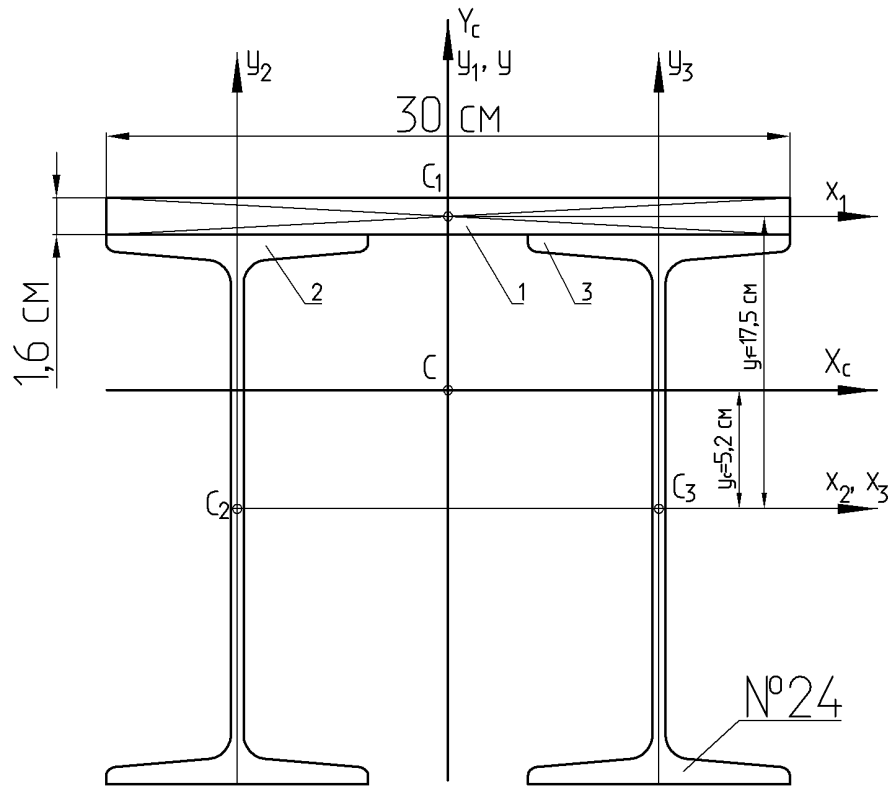


Рисунок 4.13

3 Визначаємо осьові моменти інерції всього перерізу відносно головних центральних осей перерізу:

$$J_{x_1} = \frac{30 \cdot 1,6^3}{12} = 10,2 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = \frac{1,6 \cdot 30^3}{12} = 3600 \text{ см}^4,$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 12,8 - 5,2 = 7,6 \text{ см}, \quad b_1 = 0 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 0 - 5,2 = -5,2 \text{ см}, \quad b_2 = b_3 = \frac{30}{2} - \frac{11,5}{2} = 9,25 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 0 - 5,2 = -5,2 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 10,2 + 7,6^2 \cdot 48 + 2 \cdot (3460 + 5,2^2 \cdot 34,8) = 11584,7 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 3600 + 0^2 \cdot 48 + 2 \cdot (198 + 9,25^2 \cdot 34,8) = 9951,2 \text{ см}^4.$$

Задача 4.4

Для складного перерізу (рис. 4.14), використовуючи таблиці сортаменту (додатки Б та Г), аналітичним способом визначити положення головних центральних осей і величини головних центральних моментів інерції.

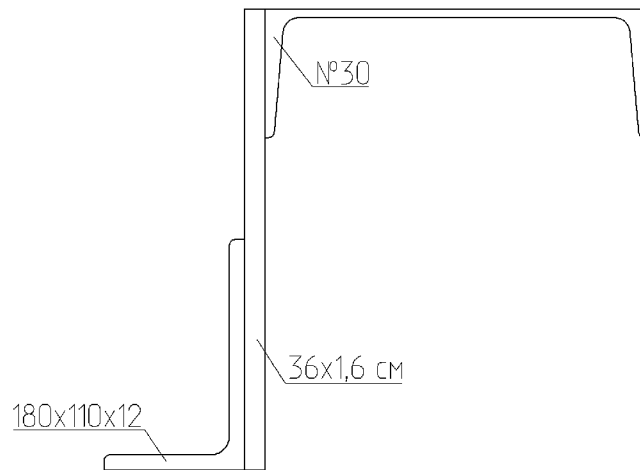


Рисунок 4.14

Розв'язання

1 Визначаємо геометричні характеристики складових фігур. Із сор-
таменту виписуємо геометричні характеристики швелера (додаток Б) та
кутника (додаток Г), а для смуги – визначаємо.

Таблиця 4.2 – Геометричні характеристики перерізу

ШВЕЛЕР №30 (ДСТУ 8240-89)	СМУГА 36x1,6 см	КУТНИК 180x110x12 (ДСТУ 8510-86)
$H_1 = 30 \text{ см},$ $B_1 = 10 \text{ см},$ $z_0 = 2,52 \text{ см},$ $F_1 = 40,5 \text{ см}^2,$ $J_{x_1} = 327 \text{ см}^4,$ $J_{y_1} = 5810 \text{ см}^4,$	$H_2 = 36 \text{ см},$ $B_2 = 1,6 \text{ см},$ $F_2 = 36 \cdot 1,6 = 57,6 \text{ см}^2,$ $J_{x_2} = \frac{B_2 H_2^3}{12} = \frac{1,6 \cdot 36^3}{12} = 6221 \text{ см}^4,$ $J_{y_2} = \frac{H_2 \cdot B_2^3}{12} = \frac{36 \cdot 1,6^3}{12} = 12,3 \text{ см}^4,$	$H_3 = 18 \text{ см},$ $B_3 = 11 \text{ см},$ $x_0 = 2,52 \text{ см},$ $y_0 = 5,97 \text{ см},$ $F_3 = 33,7 \text{ см}^2,$ $J_{x_3} = 1123 \text{ см}^4,$ $J_{y_3} = 324 \text{ см}^4,$ $J_{\min} = 194 \text{ см}^4,$ $\text{tg} \alpha = 0,374.$

2 Зображуємо переріз у масштабі (рис. 4.15). Визначаємо положення центра ваги кожної з фігур. Наносимо на рисунок центральні осі кожної фігури і вибираємо початкову систему осей.

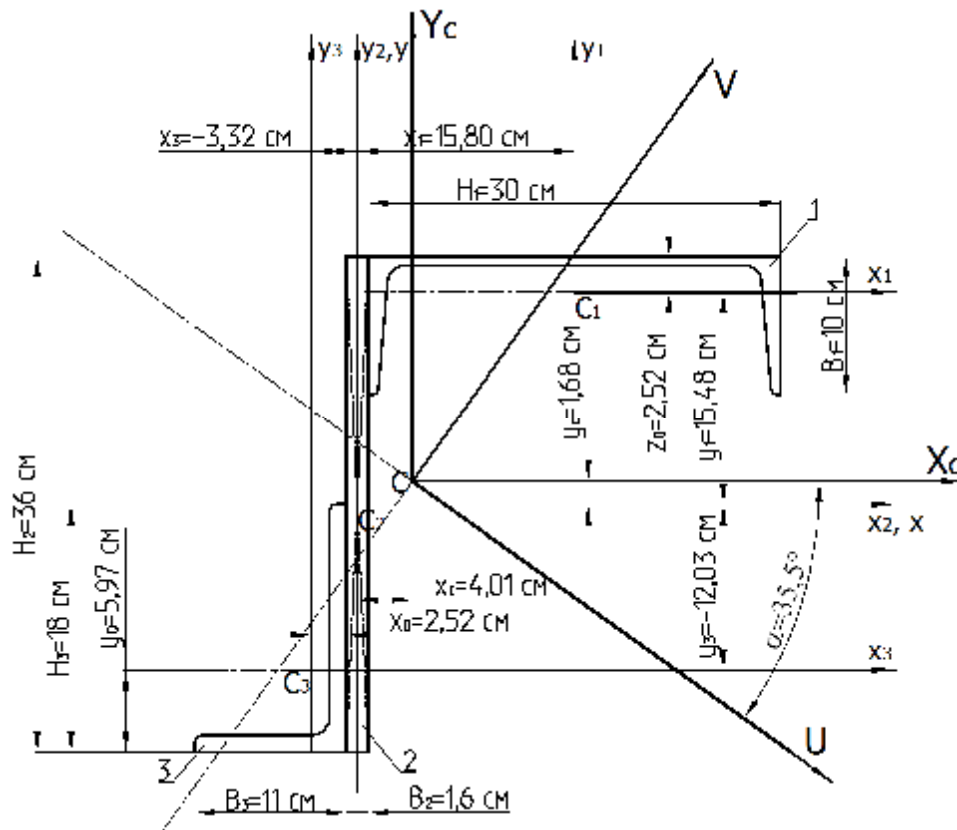


Рисунок 4.15

3 Знаходимо координати центра ваги складного перерізу:

$$x_c = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3}, \quad y_c = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3},$$

$$x_1 = \frac{H_1}{2} + \frac{B_2}{2} = \frac{30}{2} + \frac{1,6}{2} = 15,8 \text{ см}, \quad y_1 = \frac{H_2}{2} - z_0 = \frac{36}{2} - 2,52 = 15,48 \text{ см},$$

$$x_2 = 0 \text{ см}, \quad y_2 = 0 \text{ см},$$

$$x_3 = -\left(\frac{B_2}{2} + x_0\right) = -\left(\frac{1,6}{2} + 2,52\right) = -3,32 \text{ см}, \quad y_3 = -\left(\frac{H_2}{2} - y_0\right) = -\left(\frac{36}{2} - 5,97\right) = -12,03 \text{ см},$$

$$x_c = \frac{15,8 \cdot 40,5 + 0 \cdot 57,6 + (-3,32) \cdot 33,7}{40,5 + 57,6 + 33,7} = 4,01 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{15,48 \cdot 40,5 + 0 \cdot 57,6 + (-12,03) \cdot 33,7}{40,5 + 57,6 + 33,7} = 1,68 \text{ см}.$$

4 За знайденими координатами x_c , y_c наносимо положення центра ваги складного перерізу (див. рис. 4.15). Через центр ваги складного перерізу проводимо центральні осі всього перерізу, направляючи їх паралельно центральним осям складових фігур.

5 Визначаємо осьові моменти інерції всього перерізу відносно головних центральних осей перерізу за формулами:

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2 + J_{x_3} + a_3^2 F_3,$$

$$J_{y_c} = J_{y_1} + b_1^2 F_1 + J_{y_2} + b_2^2 F_2 + J_{y_3} + b_3^2 F_3,$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 15,48 - 1,68 = 13,8 \text{ см}, \quad b_1 = x_1 - x_c = 15,8 - 4,01 = 11,79 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 0 - 1,68 = -1,68 \text{ см}, \quad b_2 = x_2 - x_c = 0 - 4,01 = -4,01 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = -12,03 - 1,68 = -13,71 \text{ см}, \quad b_3 = x_3 - x_c = -3,32 - 4,01 = -7,33 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 327 + 13,8^2 \cdot 40,5 + 6221 + 1,68^2 \cdot 57,6 + 1123 + 13,71^2 \cdot 33,7 = 21881 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 5810 + 11,79^2 \cdot 40,5 + 12,3 + 4,01^2 \cdot 57,6 + 324 + 7,33^2 \cdot 33,7 = 14513 \text{ см}^4.$$

6 Визначаємо відцентровий момент інерції за формулою

$$J_{x_c y_c} = J_{x_1 y_1} + a_1 b_1 F_1 + J_{x_2 y_2} + a_2 b_2 F_2 + J_{x_3 y_3} + a_3 b_3 F_3.$$

Для фігур, у яких є хоча б одна вісь симетрії, $J_{xy} = 0$, тобто $J_{x_1 y_1} = 0$, $J_{x_2 y_2} = 0$.

Визначимо відцентровий момент інерції кутка, що не дорівнює нулю, за формулою

$$J_{xy} = (J_x - J_{\min}) \operatorname{tg} \alpha.$$

Відповідно до формули (4.6) відцентровий момент інерції кутка в першому і третьому квадрантах позитивний (рис. 4.16), тому що добуток координат x і y має позитивний знак.

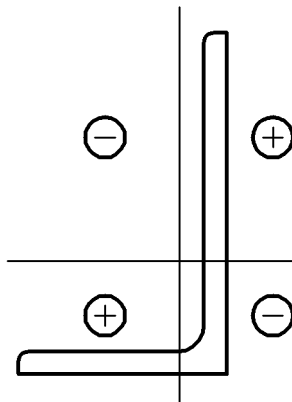


Рисунок 4.16

$$J_{x_3y_3} = (1123 - 194) \cdot 0,374 = 349 \text{ см}^4.$$

$$J_{x_c y_c} = 0 + 13,8 \cdot 11,79 \cdot 40,5 + 0 + 1,68 \cdot 4,01 \cdot 57,6 + 349 + \\ + 13,71 \cdot 7,33 \cdot 33,7 = 10713 \text{ см}^4.$$

7 Визначаємо положення головних центральних осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}} = \frac{2 \cdot 10713}{14513 - 21881} = -2,904,$$

$$2\alpha_0 = -70,998^\circ \Rightarrow \alpha_0 = -35,499^\circ.$$

Додатні кути α_0 відкладаються проти ходу годинникової стрілки.

8 Визначаємо моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$J_U = J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0,$$

$$J_V = J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0,$$

$$\cos \alpha_0 = 0,814, \quad \sin \alpha_0 = -0,581, \quad \sin 2\alpha_0 = -0,946,$$

$$J_U = 21881 \cdot 0,814^2 + 14513 \cdot 0,581^2 - 10713 \cdot (-0,946) = 29532 \text{ см}^4,$$

$$J_V = 21881 \cdot 0,581^2 + 14513 \cdot 0,814^2 + 10713 \cdot (-0,946) = 6868 \text{ см}^4.$$

9 Виконуємо перевірки, що контролюють правильність арифметичних обчислень:

$$\text{а) } J_{x_c} + J_{y_c} = J_U + J_V,$$

$$21881 + 14513 = 29532 + 6868,$$

$$36394 = 36400.$$

$$\text{Похибка: } \frac{36400 - 36394}{36394} \cdot 100\% = 0,02\%.$$

$$\text{б) } J_{UV} = J_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 = 0,$$

$$J_{UV} = 10713 \cdot 0,326 + \frac{21881 - 14513}{2} \cdot (-0,946) = 3492,4 - 3485,1.$$

$$\text{Похибка: } \frac{3492,4 - 3485,1}{3485,1} \cdot 100\% = 0,2\%.$$

10 Результати роботи зводимо до таблиці 4.2.

Таблиця 4.3 – Геометричні характеристики перерізу

Переріз профілю	Номер і вид профілю	Координати центра ваги складових фігур		Площа складових фігур	Моменти інерції складових фігур			a_i	b_i
		x_i	y_i		J_{x_i}	J_{y_i}	$J_{x_i y_i}$		
1	Швелер № 30	15,80	15,48	40,5	327	5810	0	13,8	11,79
2	Смуга 36x1,6	0	0	57,6	6221	12,3	0	-1,68	-4,01
3	Куток 180x110x12	-3,32	-12,03	33,7	1123	324	349	-13,71	-7,33
Знайдені величини	$J_{x_c}, \text{см}^4$		$J_{y_c}, \text{см}^4$		$J_{x_c y_c}, \text{см}^4$		$\alpha_0, ^\circ$	$J_U, \text{см}^4$	$J_V, \text{см}^4$
	21881		14513		10713		-35,499	29532	6868

11 Графічно зображуємо моменти інерції.

Відомі моменти інерції J_{x_c} , J_{y_c} , $J_{x_c y_c}$ площі перерізу бруса відносно деякої системи перпендикулярних осей x , y ($J_{x_c} = 21881 \text{см}^4$, $J_{y_c} = 14513 \text{см}^4$, $J_{x_c y_c} = 10713 \text{см}^4$). Потрібно визначити головні моменти інерції та положення головних осей.

У геометричній площині J_{x_c} , $J_{x_c y_c}$ (рис. 4.17) будуємо точки D_x і D_y , що відповідають моментам інерції відносно осей x , y . Абсцисами цих точок є осьові моменти інерції $OK_x = J_{x_c}$, $OK_y = J_{y_c}$; ординатами – відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c}$, причому $K_x D_x = J_{x_c y_c}$, $K_y D_y = -J_{x_c y_c}$. Якщо точки належать одному діаметру, то, з'єднавши їх, одержимо центр круга інерції C . Із центра C описуємо коло радіусом $CD_x = CD_y$. Воно пересікає вісь абсцис у точках A та B . Очевидно, що абсциси цих точок – відрізки OA та OB – і є шукані головні моменти інерції J_U , J_V .

Для визначення напрямку головних осей побудуємо фокус круга інерції. Із цією метою із точки D_x проведемо лінію, паралельну осі x , до перетину з кругом у фокусі M . З'єднуючи фокус із точками A , B круга, одержимо напрямки головних осей U та V (див. рис. 4.17).

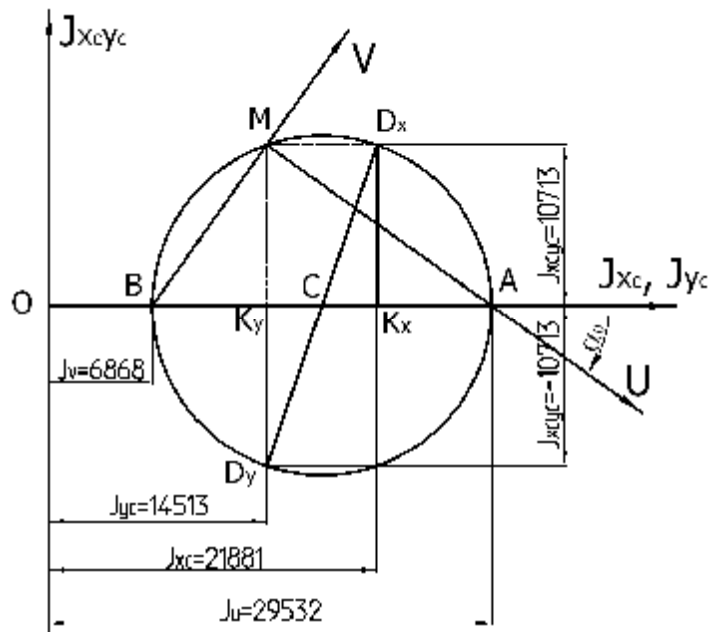


Рисунок 4.17

Задача 4.5

Для складного перерізу (рис. 4.18), використовуючи таблиці сортаменту (додатки А, Б), аналітичним способом визначити положення головних центральних осей і величини головних центральних моментів інерції.

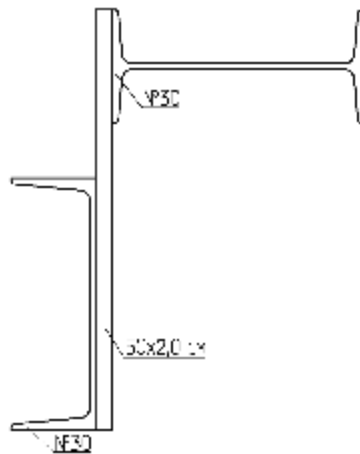


Рисунок 4.18

Розв'язання

1 Визначаємо геометричні характеристики складових фігур. Із сортаменту виписуємо геометричні характеристики швелера та двотавра, а для смуги визначаємо.

Таблиця 4.4 – Геометричні характеристики перерізу

ШВЕЛЕР №30 (ДСТУ 8240-89)	СМУГА 50x2,0 см	ДВОТАВР № 30 (ДСТУ 8239-89)
$H_1 = 30 \text{ см},$ $B_1 = 10 \text{ см},$ $z_0 = 2,52 \text{ см},$ $F_1 = 40,5 \text{ см}^2,$ $J_{x_1} = 5810 \text{ см}^4,$ $J_{y_1} = 327 \text{ см}^4,$	$H_2 = 2,0 \text{ см},$ $B_2 = 50 \text{ см},$ $F_2 = 50 \cdot 2,0 = 100 \text{ см}^2,$ $J_{x_2} = \frac{B_2 H_2^3}{12} = \frac{2,0 \cdot 50^3}{12} = 20833 \text{ см}^4,$ $J_{y_2} = \frac{H_2 B_2^3}{12} = \frac{50 \cdot 2,0^3}{12} = 33,3 \text{ см}^4,$	$H_3 = 30 \text{ см},$ $B_3 = 13,5 \text{ см},$ $F_3 = 46,5 \text{ см}^2,$ $J_{x_3} = 337 \text{ см}^4,$ $J_{y_3} = 7080 \text{ см}^4.$

2 Зображуємо переріз у масштабі (рис. 4.19). Визначаємо положення центра ваги кожної з фігур. Наносимо на рисунок центральні осі кожної фігури і вибираємо початкову систему осей в точці C_2 .

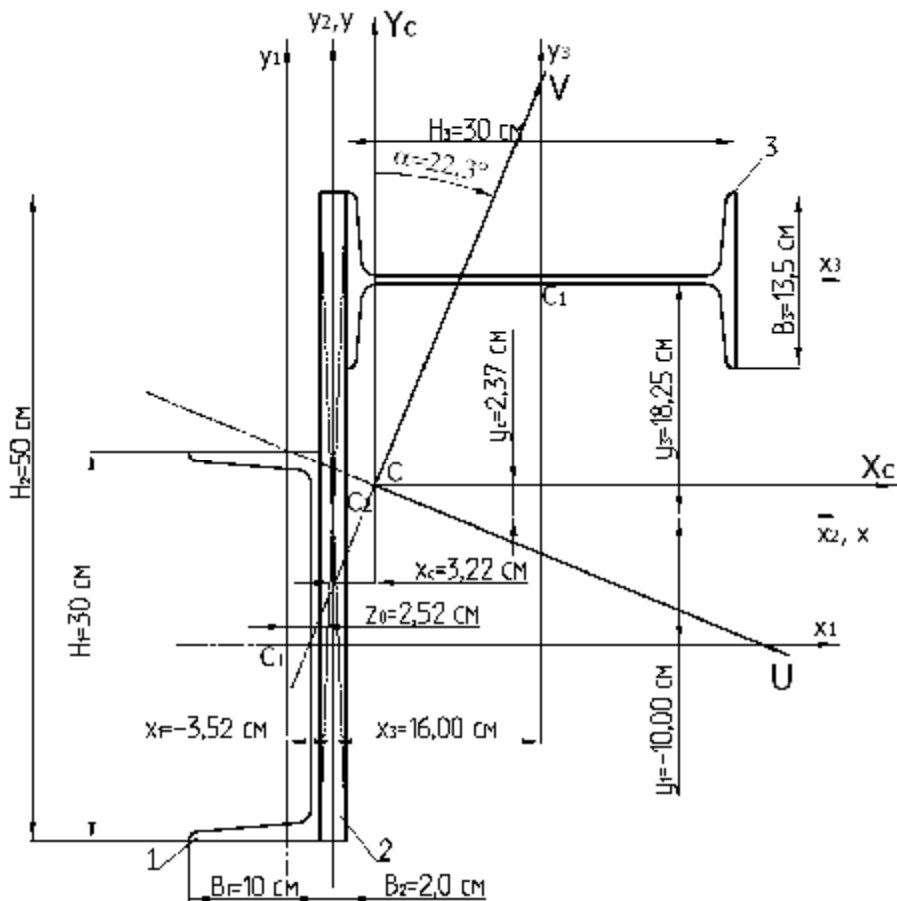


Рисунок 4.19

3 Знаходимо координати центра ваги складного перерізу за формулами (4.3):

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\left(\frac{H_2}{2} + z_0\right) = -\left(\frac{2,0}{2} + 2,52\right) = -3,52 \text{ см}, & y_1 &= -\left(\frac{B_2}{2} - \frac{H_1}{2}\right) = -\left(\frac{50}{2} - \frac{30}{2}\right) = -10 \text{ см}, \\
x_2 &= 0 \text{ см}, & y_2 &= 0 \text{ см}, \\
x_3 &= \frac{H_2}{2} + \frac{H_3}{2} = \frac{2,0}{2} + \frac{30}{2} = 16 \text{ см}, & y_3 &= \frac{B_2}{2} - \frac{B_3}{2} = \frac{50}{2} - \frac{13,5}{2} = 18,25 \text{ см}, \\
x_c &= \frac{-3,52 \cdot 40,5 + 0 \cdot 100 + 16 \cdot 46,5}{40,5 + 100 + 46,5} = 3,22 \text{ см}, \\
y_c &= \frac{-10 \cdot 40,5 + 0 \cdot 100 + 18,25 \cdot 46,5}{40,5 + 100 + 46,5} = 2,37 \text{ см}.
\end{aligned}$$

4 За знайденими координатами x_c , y_c наносимо положення центра ваги складного перерізу (див. рис. 4.19). Через центр ваги складного перерізу проводимо центральні осі всього перерізу, направляючи їх паралельно центральним осям складових фігур.

5 Визначаємо осьові моменти інерції всього перерізу відносно головних центральних осей перерізу за формулами (4.9):

$$a_1 = y_1 - y_c = -10 - 2,37 = -12,37 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 0 - 2,37 = -2,37 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 18,25 - 2,37 = 15,88 \text{ см},$$

$$b_1 = x_1 - x_c = -3,52 - 3,22 = -6,74 \text{ см},$$

$$b_2 = x_2 - x_c = 0 - 3,22 = -3,22 \text{ см},$$

$$b_3 = x_3 - x_c = 16,00 - 3,22 = 12,78 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 5810 + 12,37^2 \cdot 40,5 + 20833 + 2,37^2 \cdot 100 + 337 + 15,88^2 \cdot 46,5 = 45465 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 387 + 6,74^2 \cdot 40,5 + 33,3 + 3,22^2 \cdot 100 + 7080 + 12,78^2 \cdot 46,5 = 17972 \text{ см}^4.$$

6 Визначаємо відцентровий момент інерції за формулою (4.10).

Для симетричних фігур $J_{xy} = 0$, тобто $J_{x_1y_1} = 0$, $J_{x_2y_2} = 0$, $J_{x_3y_3} = 0$.

$$\begin{aligned}
J_{x_c y_c} &= 0 + (-12,37) \cdot (-6,74) \cdot 40,5 + 0 + (-2,37) \cdot (-3,22) \cdot 100 + 0 + \\
&\quad + 15,88 \cdot 12,78 \cdot 46,5 = 13577 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

7 Визначаємо положення головних центральних осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}} = \frac{2 \cdot 13577}{17972 - 45465} = -0,953,$$

$$2\alpha_0 = -44,644^\circ, \Rightarrow \alpha_0 = -22,322^\circ.$$

Додатні кути α_0 відкладаються проти ходу годинникової стрілки.

8 Визначаємо моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$\cos \alpha_0 = 0,925, \quad \sin \alpha_0 = -0,380, \quad \sin 2\alpha_0 = -0,703,$$

$$J_U = 45465 \cdot 0,925^2 + 17972 \cdot 0,380^2 - 13577 \cdot (-0,703) = 51040 \text{ см}^4,$$

$$J_V = 45465 \cdot 0,380^2 + 17972 \cdot 0,925^2 + 13577 \cdot (-0,703) = 12398 \text{ см}^4.$$

9 Виконуємо перевірки, що контролюють правильність арифметичних обчислень:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad J_{x_c} + J_{y_c} &= J_U + J_V, \\ 45465 + 17972 &= 51040 + 12398, \\ 63437 &\approx 63438. \end{aligned}$$

$$\text{Похибка: } \frac{63438 - 63437}{63437} \cdot 100\% = 0,002\%.$$

$$\text{б)} \quad J_{UV} = J_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 = 0,$$

$$J_{UV} = 13577 \cdot 0,711 + \frac{45465 - 17972}{2} \cdot (-0,703) = 9653 - 9663.$$

$$\text{Похибка: } \frac{9663 - 9653}{9653} \cdot 100\% = 0,10\%.$$

10 Результати роботи зводимо до таблиці 4.3.

Таблиця 4.5 – Геометричні характеристики перерізу

Переріз профілю	Номер і вид профілю	Координати центра ваги складових фігур		Площа складових фігур	Моменти інерції складових фігур			a_i	b_i
		x_i	y_i		J_{x_i}	J_{y_i}	$J_{x_i y_i}$		
1	Швелер № 30	-3,52	-10,00	40,5	5810	387	0	-12,37	-6,74
2	Смуга 50х2.0	0	0	100	20833	33,3	0	-2,37	-3,22
3	Двотавр № 30	16,00	18,25	46,5	7080	337	0	15,88	12,78
Знайдені величини	$J_{x_c}, \text{ см}^4$		$J_{y_c}, \text{ см}^4$		$J_{x_c y_c}, \text{ см}^4$		$\alpha_0, ^\circ$	$J_U, \text{ см}^4$	$J_V, \text{ см}^4$
	45465		17972		13577		-22,322	51040	12398

11 Графічно зображуємо моменти інерції (рис. 4.20).

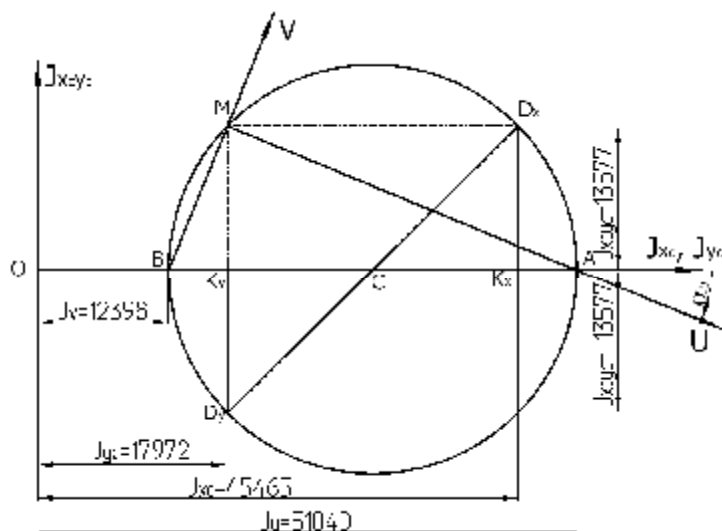


Рисунок 4.20

5 ЗГІНАННЯ

5.1 Основні положення теорії

Розрізняють чисте і поперечне згинання. Під чистим згинанням розуміється такий вид навантаження, при якому в поперечних перерізах бруса виникають тільки згинальні моменти, а поперечні сили дорівнюють нулю. У випадку поперечного згинання в перерізах бруса виникає не тільки згинальний момент M , але й поперечна сила Q .

При поперечному згинанні виникають нормальні і дотичні напруження (рис. 5.1).

Величина нормальних напружень у довільній точці перерізу, розташованої на висоті y , визначається за формулою

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y, \quad (5.1)$$

де M_x – згинальний момент навколо головної осі x поперечного перерізу;

J_x – осьовий момент інерції поперечного перерізу відносно головної осі x ;

у – відстань від нейтральної лінії до точки, у якій визначається напруження.

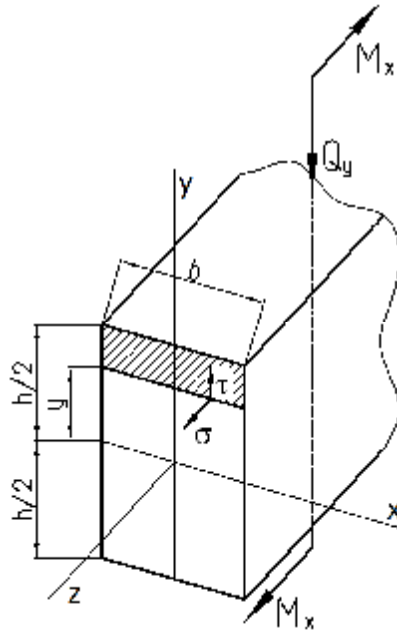


Рисунок 5.1

Нормальні напруження при згинанні змінюються за висотою перерізу за лінійним законом і набувають найбільших значень у точках, найбільш віддалених від нейтральної осі. Найбільші нормальні напруження виникають у поперечному перерізі, де згинальний момент максимальний, і визначаються за формулою

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{J_x} y_{\max}. \quad (5.2)$$

Для перерізів, симетричних відносно нейтральної осі,

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x}, \quad (5.3)$$

де $W_x = \frac{J_x}{h/2}$ – момент опору перерізу при згинанні або осьовий момент опору, см^3 .

Моменти опору найпростіших перерізів обчислюють за наступними формулами:

прямокутник –

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, \quad (5.4)$$

де b – сторона перерізу, паралельна нейтральній осі;

круг –

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3; \quad (5.5)$$

кільце –

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1d^3 (1 - \alpha^4), \quad (5.6)$$

де $\alpha = \frac{d}{D}$ (див. табл. 4.1).

Умова міцності при згинанні балки із симетричним перерізом відносно осі x має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (5.7)$$

При несиметричному перерізі відносно осі x умова міцності записується так:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_x} y_{\max} \leq [\sigma]. \quad (5.8)$$

Дотичні напруження в довільній точці поперечного перерізу визначаються за формулою Журавського

$$\tau = \frac{QS_x^*}{bJ_x}, \quad (5.9)$$

де Q – поперечна сила в розглянутому перерізі;

S_x^* – статичний момент відносно нейтральної осі тієї частини перерізу, що розташована по одну сторону від прямої, проведеної через дану точку, тобто статичний момент площі відрізаної частини (пряма проводиться паралельно нейтральній осі);

b – ширина перерізу на рівні розглянутої точки;

J_x – момент інерції всього перерізу відносно нейтральної осі.

Умова міцності за дотичними напруженнями має вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{QS_x^*}{bJ_x} \leq [\tau]. \quad (5.10)$$

Звичайно для сталевих балок приймають: $[\tau] \approx 0,6[\sigma]$.

5.2 Визначення нормальних і дотичних напружень при згинанні

Задача 5.1

Визначити найбільші нормальні напруження, що виникають у поперечному перерізі балки (рис. 5.2, а). Визначити нормальні напруження в точці D (рис. 5.2, б). Побудувати епюру нормальних напружень.

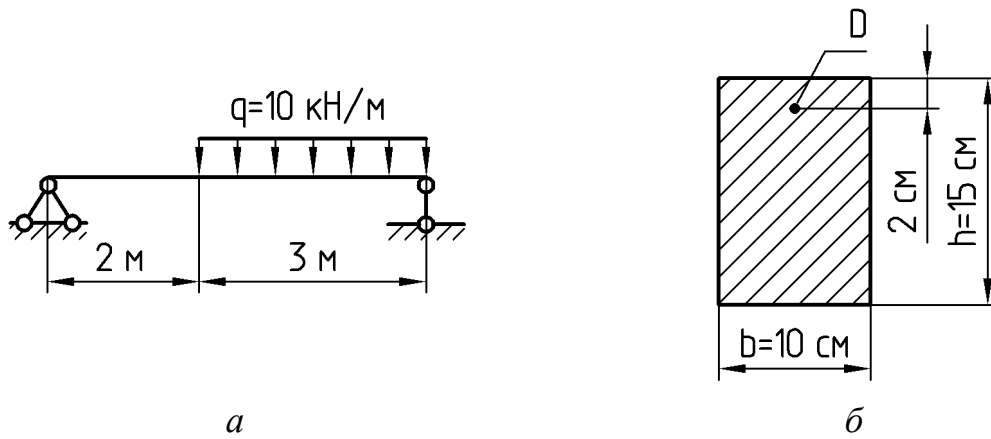


Рисунок 5.2

Розв'язання

1 Для визначення максимальних нормальних напружень скористаємося формулою (5.7), а для визначення нормальних напружень у точці D – формулою (5.8).

2 Визначаємо опорні реакції, прирівнюючи до нуля суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок A та B (рис. 5.3):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -q \cdot 3 \cdot 3,5 + 5R_B &= 0, \\ R_B &= \frac{q \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = 21 \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ q \cdot 3 \cdot 1,5 - 5R_A &= 0, \\ R_A &= \frac{q \cdot 3 \cdot 1,5}{5} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 1,5}{5} = 9 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned}R_A - q \cdot 3 + R_B &= 0, \\ 9 - 10 \cdot 3 + 21 &= 0, \\ 30 - 30 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

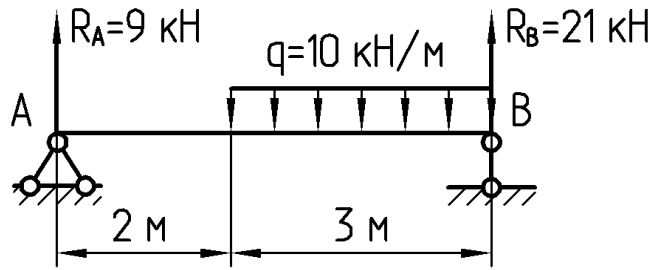


Рисунок 5.3

3 Визначаємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.4):

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = R_A = 9 \text{ кН},$$

$$Q_4 = -R_B = -21 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M_4 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

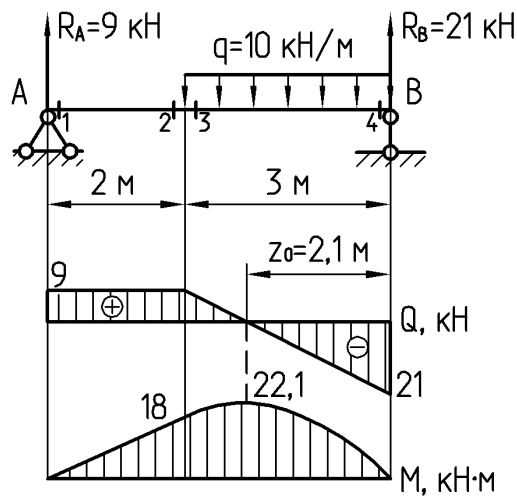


Рисунок 5.4

Будуємо епюру за характерними перерізами (див. рис. 5.4).

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці буде максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу.

$$z_0 = \frac{21}{10} = 2,1 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = R_b z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 21 \cdot 2,1 - 10 \cdot 2,1 \cdot \frac{2,1}{2} = 22,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Очевидно, що при зазначеному навантаженні балки

$$M_{\max} = 22,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

- 4 Визначаємо геометричні характеристики даного перерізу:
– осьовий момент інерції перерізу відносно головної осі x

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 15^3}{12} = 2813 \text{ см}^4,$$

- осьовий момент опору перерізу відносно головної осі x

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 15^2}{6} = 375 \text{ см}^3.$$

- 5 Визначаємо максимальне нормальне напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x},$$
$$\sigma_{\max} = \frac{22,1 \cdot 10^{-3}}{375 \cdot 10^{-6}} = 59 \text{ МПа}.$$

- 6 Визначаємо нормальне напруження в точці D:

$$\sigma_D = \frac{M_{\max}}{J_x} y_D,$$

де y_D – відстань від нейтральної лінії до точки D,

$$y_D = \frac{15}{2} - 2 = 5,5 \text{ см};$$
$$\sigma_D = \frac{22,1 \times 10^{-3}}{2813 \times 10^{-8}} \cdot 5,5 \times 10^{-2} = 43,2 \text{ МПа}.$$

- 7 Будуємо епюру нормальних напружень (рис. 5.5).

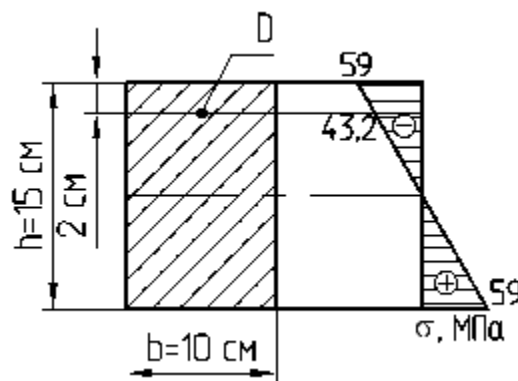


Рисунок 5.5

Задача 5.2

Визначити найбільші нормальні напруження, що виникають у поперечному перерізі балки (рис. 5.6, а), переріз якої показано на рисунку 5.6, б.

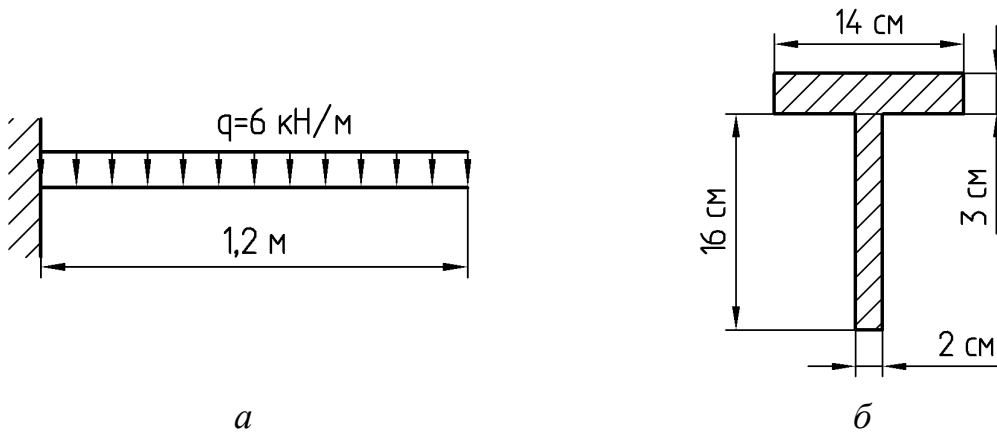


Рисунок 5.6

Розв'язання

1 Для визначення максимальних нормальних напружень скористаємося формулою (5.7).

2 Будуємо епюри поперечних сил і згинальних моментів.

Визначаємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.7):

$$Q_1 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_2 = q \cdot 1,2 = 6 \cdot 1,2 = 7,2 \text{ кН}.$$

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -q \cdot 1,2 \cdot \frac{1,2}{2} = -6 \cdot 1,2 \cdot \frac{1,2}{2} = 4,32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру за характерними перерізами (див. рис. 5.7).

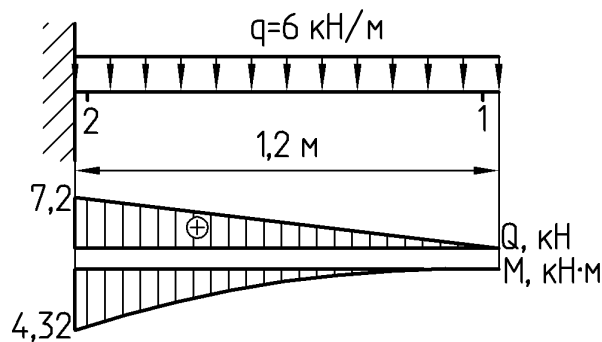


Рисунок 5.7

Очевидно, що при зазначеному навантаженні балки максимальний момент буде в перерізі закладення $M_{\max} = 4,32 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

3 Визначаємо геометричні характеристики даного перерізу.

Зображуємо переріз у масштабі із вказівкою розмірів фігур. Розглянутий переріз поділяємо на дві прості частини – два прямокутники. Визначаємо положення центра ваги кожної з фігур. Наносимо на рисунок центральні осі кожної фігури (рис. 5.8).

Визначаємо геометричні характеристики прямокутників:

Прямокутник 1

Прямокутник 2

$$F_1 = 16 \cdot 2 = 32 \text{ см}^2,$$

$$F_2 = 14 \cdot 3 = 42 \text{ см}^2,$$

$$J_{x_1} = \frac{2 \cdot 16^3}{12} = 682,7 \text{ см}^4.$$

$$J_{x_2} = \frac{14 \cdot 3^3}{12} = 31,5 \text{ см}^4.$$

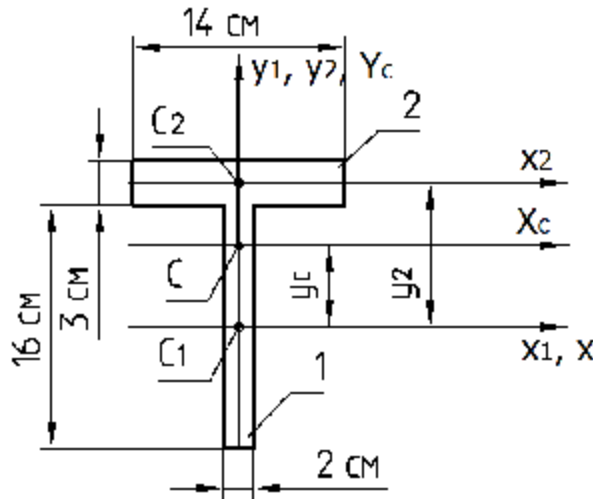


Рисунок 5.8

Відносно обраних початкових осей знаходимо координати центра ваги складного перерізу.

Якщо фігура симетрична відносно осі Y, то центр ваги лежить на ній:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

$$y_1 = 0 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{16}{2} + \frac{3}{2} = 9,5 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{0 \cdot 32 + 9,5 \cdot 42}{32 + 42} = 5,39 \text{ см}.$$

За знайденою координатою y_c наносимо положення центра ваги складного перерізу (див. рис. 5.8).

Визначаємо осьовий момент інерції всього перерізу відносно головної осі X_c :

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i).$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 5,39 = -5,39 \text{ см}, \quad a_2 = y_2 - y_c = 9,5 - 5,39 = 4,11 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 682,7 + (-5,39)^2 \cdot 32 + 31,5 + 4,11^2 \cdot 42 = 2353 \text{ см}^4.$$

Визначаємо осьовий момент опору перерізу відносно головної осі X_c за формулою

$$W_{x_c} = \frac{J_{x_c}}{y_{\max}},$$

де y_{\max} – відстань від центра ваги до точки, максимально віддаленої від центра ваги,

$$y_{\max} = \frac{16}{2} + y_c = \frac{16}{2} + 5,39 = 13,39 \text{ см},$$

$$W_{x_c} = \frac{2353}{13,39} = 175,7 \text{ см}^3.$$

4 Визначаємо максимальне нормальне напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{4,32 \times 10^{-3}}{175,7 \times 10^{-6}} = 24,6 \text{ МПа}.$$

Задача 5.3

Для сталевих балки (рис. 5. 9) з розрахунку на міцність підібрати розміри круглого, прямокутного (співвідношення сторін $h = 2b$) і двотаврового перерізів, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Вибрати оптимальний варіант.

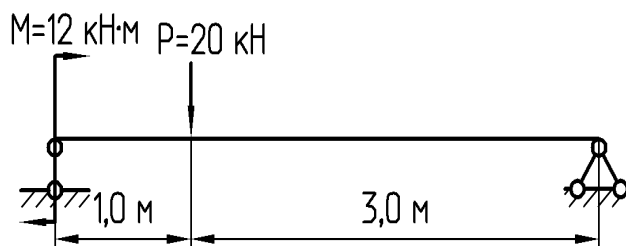


Рисунок 5.9

Розв'язання

1 Для підбору розміру перерізу скористаємося формулою (5.7).

2 Визначаємо опорні реакції, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 5.10):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 1,0 + R_B \cdot 4,0 = 0,$$

$$R_B = \frac{M + P \cdot 1,0}{4,0} = \frac{12 + 20 \cdot 1,0}{4,0} = 8 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 3,0 - R_A \cdot 4,0 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 3,0}{4,0} = \frac{-12 + 20 \cdot 3,0}{4,0} = 12 \text{ кН}.$$

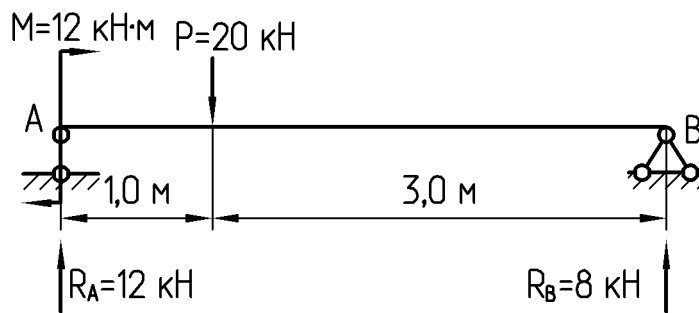


Рисунок 5.10

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$.

$$-P + R_A + R_B = 0,$$

$$-20 + 12 + 8 = 0,$$

$$-20 + 20 = 0,$$

$$0 = 0.$$

3 Визначаємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.11):

$$Q_1 = Q_2 = R_A = 12 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = -R_B = -8 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = M + R_A \cdot 1,0 = 12 + 12 \cdot 1,0 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру за характерними перерізами (див. рис. 5.11).

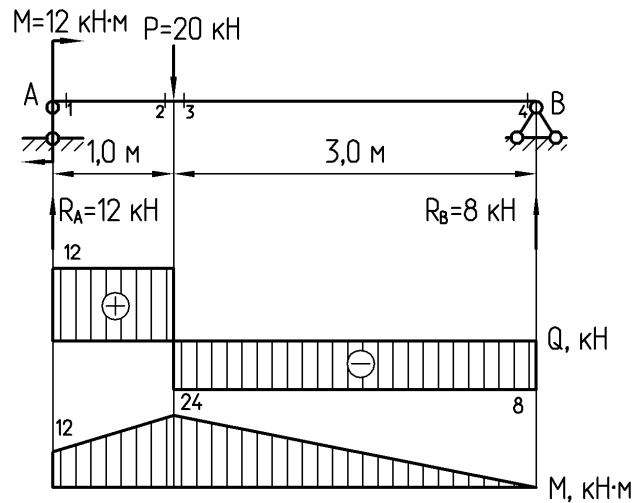


Рисунок 5.11

Очевидно, що при зазначеному навантаженні балки $M_{\max} = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$.
4 З умови міцності (5.7) визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{24 \times 10^{-3}}{160} \times 10^6 = 150 \text{ см}^3.$$

5 Для круглого поперечного перерізу момент опору дорівнює:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3,$$

де d – діаметр перерізу.

Звідси одержуємо:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{150}{0,1}} = 11,3 \text{ см}.$$

Приймаємо діаметр, кратний 5 мм, тобто $d = 115 \text{ мм} = 11,5 \text{ см}$.

Площа круга

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 11,5^2}{4} = 103,8 \text{ см}^2.$$

6 Для прямокутного поперечного перерізу момент опору дорівнює:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

Якщо $h = 2b$, то

$$W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}.$$

Звідси одержуємо:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 150}{2}} = 6,1 \text{ см}.$$

Приймаємо: $b = 6,1 \text{ см}$, $h = 12,2 \text{ см}$.

Площа прямокутника

$$F = bh = 6,1 \cdot 12,2 = 74,4 \text{ см}^2.$$

7 Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 150 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 18а, для якого $W_x = 159 \text{ см}^3$. Його площа $F = 25,4 \text{ см}^2$.

8 При згинання верхні шари балки стискаються, тоді як нижні розтягуються. Середні ж шари деформуються мало. Внутрішні напруження в балці розподіляються таким чином: уздовж осі симетрії зусилля дорівнюють нулю та пропорційно зростають у міру просування до крайнього (верхнього або нижнього) шару, досягаючи максимуму саме на самих зовнішніх шарах. Очевидно, що середні шари балки прямокутного і круглого поперечного перерізу працюють із великим недовантаженням. Тому можна замість прямокутного та круглого перерізів вибирати такий переріз, в якому площа поперечного перерізу середніх шарів буде менше. Таким перерізом є двотавр.

Крім того переріз вважається раціональним, якщо він забезпечує міцність балки при мінімальній її вазі, тобто при мінімальній площі поперечного перерізу. Площа поперечного перерізу менше у двотаврового перерізу. Отже, приймаємо двотавровий переріз.

Задача 5.4

Визначити найбільші нормальні напруження, які виникають у поперечному перерізі балки (рис. 5.12), перерізи якої показані на рисунку 5.13. Визначити нормальні напруження в точці D (див. рис. 5.13, а, б). Побудувати епюри нормальних напружень для запропонованих перерізів.

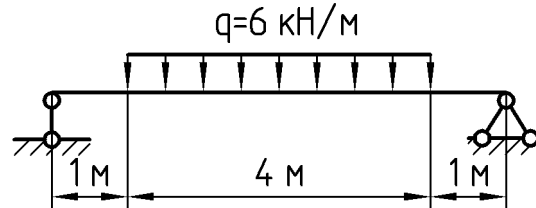


Рисунок 5.12

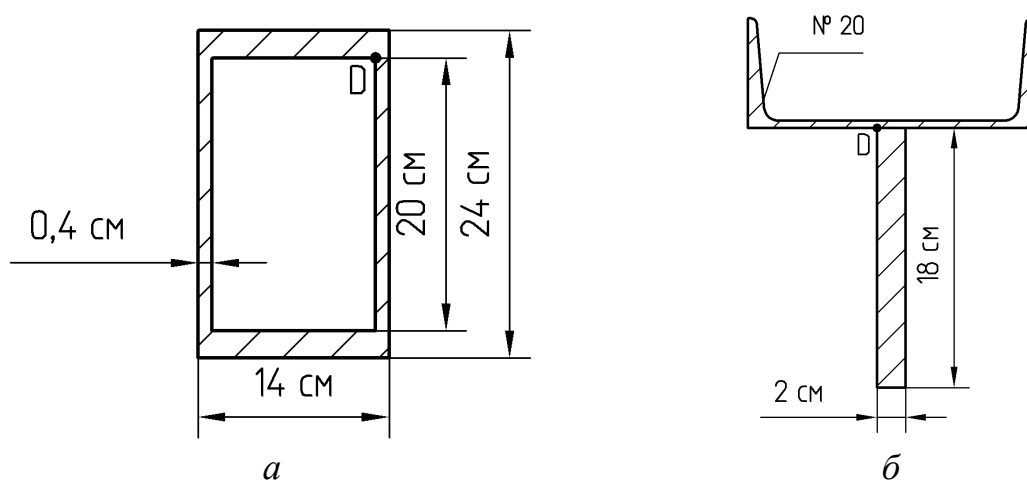


Рисунок 5.13

Розв'язання

1 Для визначення максимальних нормальних напружень скористаємося формулою (5.7), а для визначення нормальних напружень у точці D – формулою (5.8).

2 Визначаємо опорні реакції, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 5.14).

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -q \cdot 4 \cdot 3 + R_B \cdot 6 &= 0, \\ R_B &= \frac{q \cdot 4 \cdot 3}{6} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 12 \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$q \cdot 4 \cdot 3 - R_A \cdot 6 = 0,$$

$$R_A = \frac{q \cdot 4 \cdot 3}{6} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 12 \text{ кН}.$$

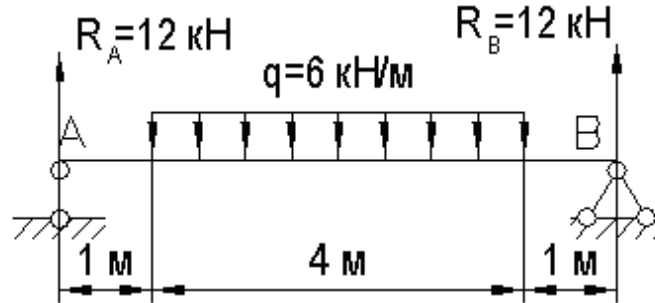


Рисунок 5.14

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$.

$$-q \cdot 4 + R_A + R_B = 0,$$

$$-6 \cdot 4 + 12 + 12 = 0,$$

$$-24 + 24 = 0,$$

$$0 = 0.$$

3 Визначаємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.15).

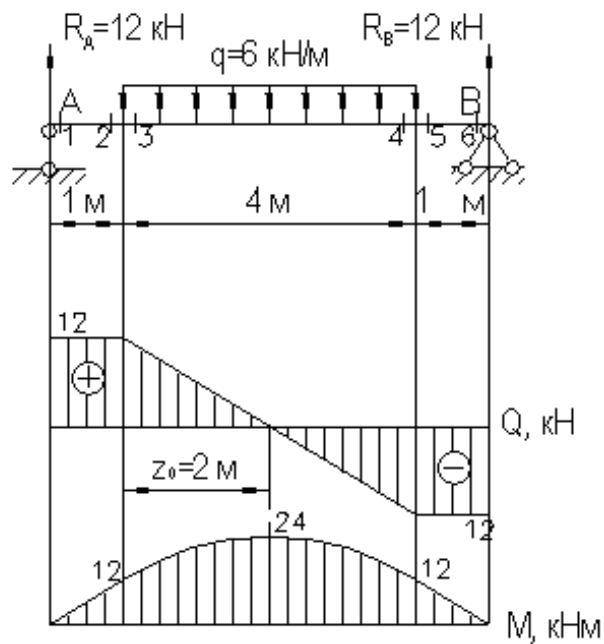


Рисунок 5.15

$$M_4 = M_5 = R_B \cdot 1 = 12 \cdot 1 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4.2 Визначаємо осьовий момент інерції перерізу відносно головної осі X_c :

$$J_{x_1} = \frac{14 \cdot 24^3}{12} = 16128 \text{ см}^4, \quad J_{x_2} = \frac{13,2 \cdot 20^3}{12} = 8800 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_c} = J_{x_1} - J_{x_2} = 16128 - 8800 = 7328 \text{ см}^4.$$

4.3 Визначаємо осьовий момент опору перерізу відносно головної осі X_c :

$$W_x = \frac{J_{x_c}}{y_{\max}},$$

де y_{\max} – відстань від нейтральної лінії до найбільш віддаленої від нейтральної лінії точки.

Для розглянутого перерізу $y_{\max} = 12$ см. Звідси одержуємо:

$$W_x = \frac{7328}{12} = 611 \text{ см}^3.$$

4.4 Визначаємо максимальне нормальне напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{24 \times 10^{-3}}{611 \times 10^{-6}} = 39,3 \text{ МПа}.$$

4.5 Визначаємо нормальне напруження в точці D:

$$\sigma_D = \frac{M_{\max}}{J_x} y_D,$$

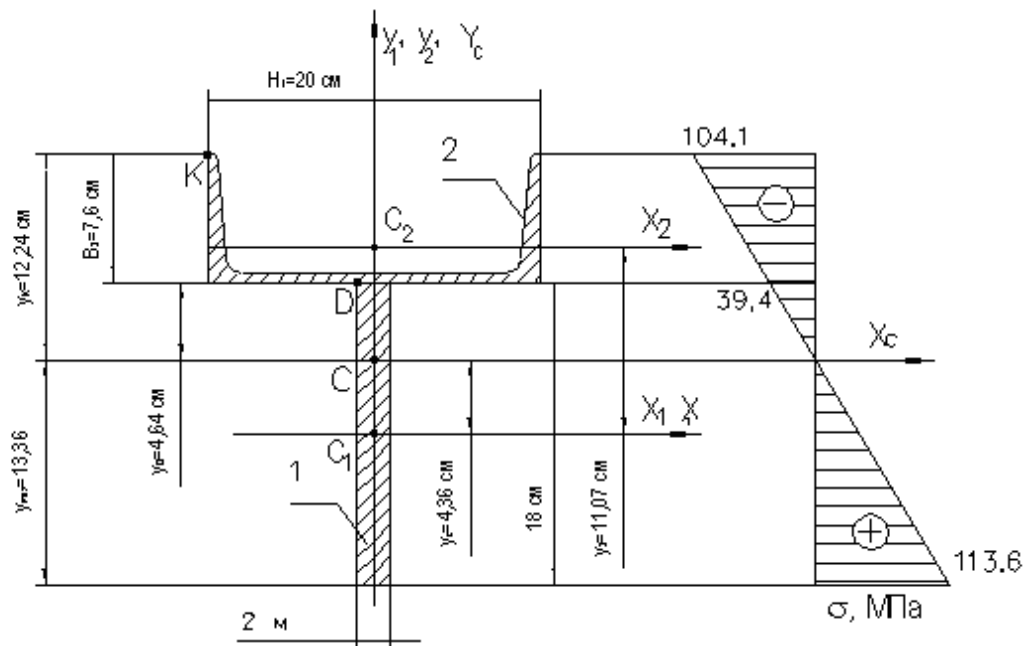
де y_D – відстань від нейтральної лінії до точки D.

Для розглянутого перерізу $y_D = \frac{24}{2} - 2 = 10$ см. Звідси одержуємо:

$$\sigma_D = \frac{24 \times 10^{-3}}{7328 \times 10^{-8}} \cdot 10 \times 10^{-2} = 32,8 \text{ МПа}.$$

4.6 Будуємо епюру нормальних напружень (рис. 5.16).

5 Розглянемо переріз, поданий на рисунку 5.13, б. Розглянутий переріз поділяємо на дві прості частини – смуга 1 та швелер 2 (рис. 5.17).



Визначаємо геометричні характеристики смуги 1:

$$J_{x_1} = \frac{B_1 H_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 18^3}{12} = 972 \text{ cm}^4.$$

Із сортаменту (додаток Б) виписуємо геометричні характеристики швелера 2:

$$F_2 = 23,4 \text{ cm}^2, J_{x_2} = 113 \text{ cm}^4.$$

5.1 Відносно обраних початкових осей знаходимо координати центра ваги складного перерізу. Якщо фігура симетрична відносно осі Y, то центр ваги лежить на ній, $x_c = 0$.

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2}.$$

Для розглянутого перерізу:

Звідси одержуємо:

$$y_c = \frac{11,07 \cdot 23,4}{36 + 23,4} = 4,36 \text{ см.}$$

За знайденою координатою y_c наносимо положення центра ваги складного перерізу (див. рис. 5.17).

5.2 Визначаємо осьовий момент інерції всього перерізу відносно головної центральної осі X_c за формулою

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2.$$

Для розглянутого перерізу

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 4,36 = -4,36 \text{ см}, \quad a_2 = y_2 - y_c = 11,07 - 4,36 = 6,71 \text{ см.}$$

Звідси одержуємо:

$$J_{x_c} = 972 + 4,36^2 \cdot 36 + 113 + 6,71^2 \cdot 23,4 = 2823 \text{ см}^4.$$

5.3 Визначаємо максимальне нормальне напруження:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{J_{x_c}} y_{\max}.$$

Для розглянутого перерізу:

$$y_{\max} = \frac{H_1}{2} + y_c = \frac{18}{2} + 4,36 = 13,36 \text{ см.}$$

Звідси одержуємо:

$$\sigma_{\max} = \frac{24 \times 10^{-3}}{2823 \times 10^{-8}} \cdot 13,36 \times 10^{-2} = 113,6 \text{ МПа}.$$

5.4 Визначаємо нормальне напруження в точці D:

$$\sigma_D = \frac{M_{\max}}{J_x} y_D.$$

Для розглянутого перерізу:

$$y_D = \frac{H_1}{2} - y_c = \frac{18}{2} - 4,36 = 4,64 \text{ см.}$$

Звідси одержуємо:

$$\sigma_D = \frac{24 \times 10^{-3}}{2823 \times 10^{-8}} \cdot 4,64 \times 10^{-2} = 39,4 \text{ МПа}.$$

5.5 Для побудови епюри визначимо напруження в точці К за формулою

$$\sigma_K = \frac{M_{\max}}{J_x} y_K.$$

Для розглянутого перерізу:

$$y_K = B_2 + \left(\frac{H_1}{2} - y_c \right) = 7,6 + \left(\frac{18}{2} - 4,36 \right) = 12,24 \text{ см}.$$

Звідси одержуємо:

$$\sigma_K = \frac{24 \times 10^{-3}}{2823 \times 10^{-8}} \cdot 12,24 \times 10^{-2} = 104,1 \text{ МПа}.$$

5.6 Будуємо епюру нормальних напружень (див. рис. 5.17).

Задача 5.5

Побудувати епюру дотичних напружень, що виникають у поперечному перерізі балки (рис. 5.18, а), переріз якої показано на рисунку 5.18, б.

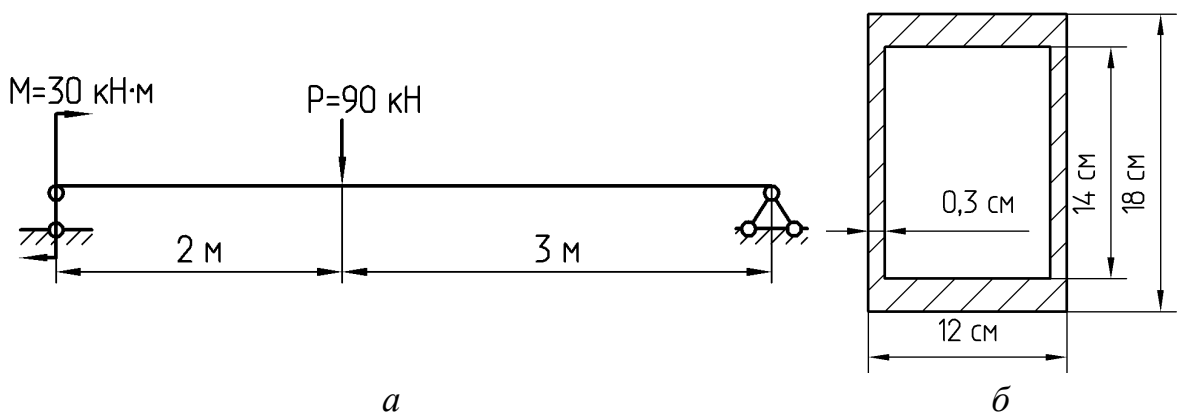


Рисунок 5.18

Розв'язання

1 Для визначення дотичних напружень скористаємося формулою (5.9).

2 Визначаємо опорні реакції, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 5.19):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 2 + R_B \cdot 5 = 0,$$

$$R_B = \frac{M + P \cdot 2}{5} = \frac{30 + 90 \cdot 2}{5} = 42 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 3 - R_A \cdot 5 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 3}{5} = \frac{-30 + 90 \cdot 3}{5} = 48 \text{ кН}.$$

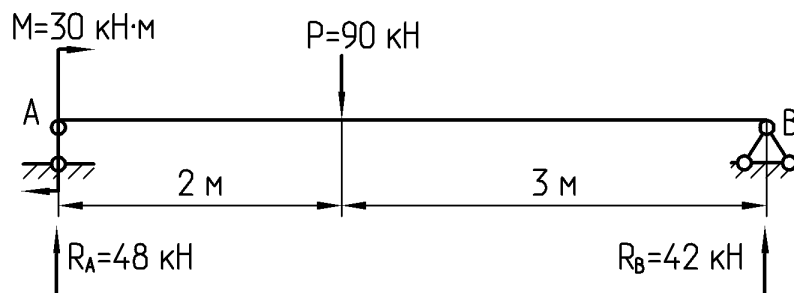


Рисунок 5.19

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-P + R_A + R_B = 0,$$

$$-90 + 48 + 42 = 0,$$

$$-90 + 90 = 0,$$

$$0 = 0.$$

3 Визначаємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.20):

$$Q_1 = Q_2 = R_A = 48 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = -R_B = -42 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = M + R_A \cdot 2 = 30 + 48 \cdot 2 = 126 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

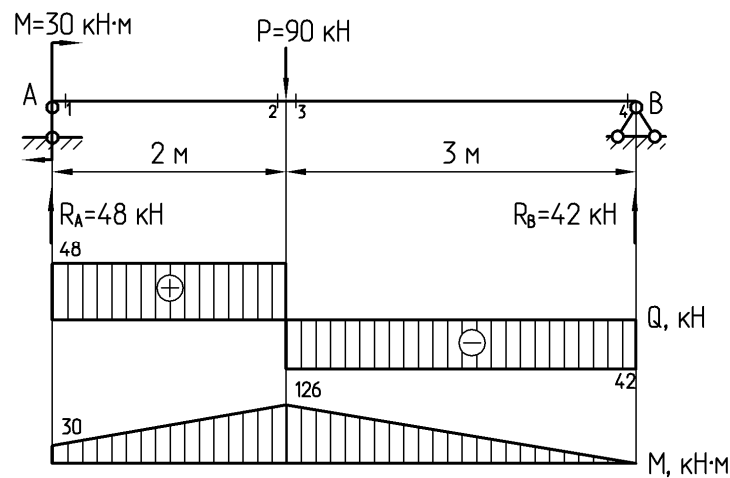


Рисунок 5.20

Будуємо епюру за характерними перерізами (див. рис. 5.20).

Очевидно, що при зазначеному навантаженні балки $Q_{\max} = 48 \text{ кН}$.

4 Розглянемо переріз, поданий на рисунку 5.18, б.

Розглянутий переріз розбиваємо на дві прості частини – прямокутник 1 та отвір у вигляді прямокутника 2 від'ємної площі (рис. 5.21). Якщо в перерізі є отвір, його зручно вважати частиною фігури з від'ємною площею.

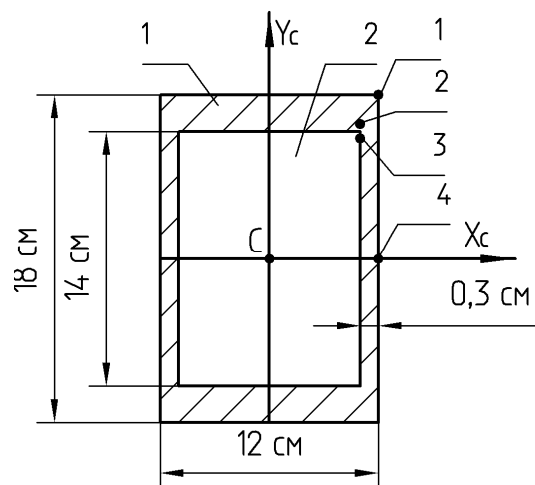


Рисунок 5.21

4.1 Визначаємо положення центра ваги даного перерізу. Якщо переріз симетричний відносно осей X і Y , то центр ваги C лежить на перетині осей симетрії.

4.2 Визначаємо осьовий момент інерції перерізу відносно головної осі X_c :

$$J_{x_1} = \frac{12 \cdot 18^3}{12} = 5832 \text{ см}^4, \quad J_{x_2} = \frac{11,4 \cdot 14^3}{12} = 2607 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_c} = J_{x_1} - J_{x_2} = 5832 - 2607 = 3225 \text{ см}^4.$$

5 Для побудови епюри дотичних напружень обчислимо значення τ в декількох характерних точках (див. рис. 5.21):

- а) у крайніх волокнах (у точці 1);
- б) у місці зміни ширини перерізу (у точках 2 і 3), причому вважаємо, що точки 2 та 3 розташовані нескінченно близько до межі зміни ширини перерізу, але лежать по різні сторони від цієї межі;
- в) у точці нейтральної лінії (точка 4).

5.1 Для точки 1 статичний момент площі відсіченої частини $S_{x1}^* = 0$, тому що лінія, яка проходить через точку 1 паралельно нейтральній лінії, не відсікає ніякої площі. Таким чином, дотичне напруження в точці 1 $\tau_1 = 0$ МПа.

5.2 Для точки 2 ширина перерізу $b = 12$ см, статичний момент площі відсіченої частини дорівнює статичному моменту прямокутника 12×2 см (рис. 5.22).

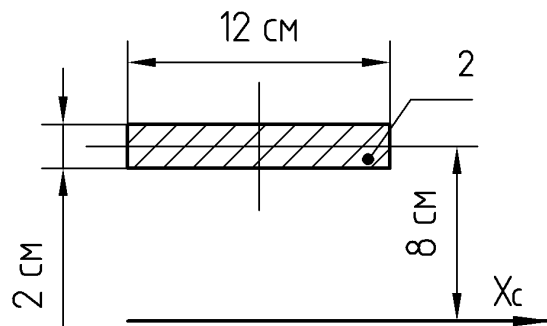


Рисунок 5.22

Тоді

$$S_{x2}^* = 12 \cdot 2 \cdot 8 = 192 \text{ см}^3.$$

Отже, дотичне напруження в точці 2

$$\tau_2 = \frac{48 \times 10^{-3} \cdot 192 \times 10^{-6}}{12 \times 10^{-2} \cdot 3225 \times 10^{-8}} = 2,4 \text{ МПа}.$$

5.3 Для точки 3 статичний момент площі відсіченої частини залишається практично тим самим, тобто $S_{x3}^* = S_{x2}^* = 192 \text{ см}^3$, але ширина перерізу $b = 0,6 \text{ см}$. Тому дотичне напруження в точці 3:

$$\tau_3 = \frac{48 \times 10^{-3} \cdot 192 \times 10^{-6}}{2 \cdot 0,3 \times 10^{-2} \cdot 3225 \times 10^{-8}} = 47,6 \text{ МПа}.$$

Отже, при переході від точки 2 до точки 3 дотичне напруження різко зростає.

5.4 Для точки нейтральної лінії (точка 4) ширина перерізу $b = 0,6 \text{ см}$, а статичний момент площі відсіченої частини варто взяти для половини перерізу (рис. 5.23).

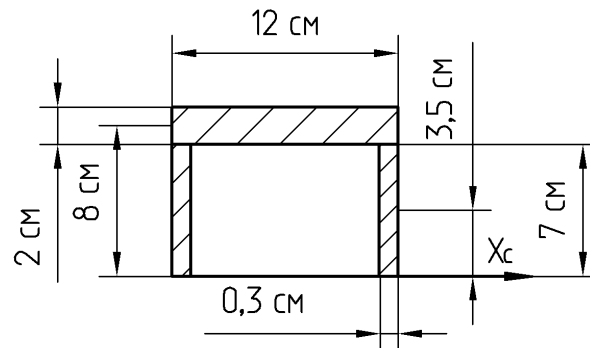


Рисунок 5.23

Тоді

$$S_{x4}^* = 12 \cdot 2 \cdot 8 + 2 \cdot 0,3 \cdot 7 \cdot 3,5 = 206,7 \text{ см}^3.$$

Очевидно, що це найбільша величина статичного моменту площі відсіченої частини для даного перерізу, тобто $S_{x \max}^* = S_{x4}^* = 206,7 \text{ см}^3$.

Отже, дотичне напруження в точці 4:

$$\tau_4 = \tau_{\max} = \frac{48 \times 10^{-3} \cdot 206,7 \times 10^{-6}}{2 \cdot 0,3 \times 10^{-2} \cdot 3225 \times 10^{-8}} = 51,2 \text{ МПа}.$$

6 На підставі цих даних будуємо епюру дотичних напружень для верхньої половини перерізу. Для нижньої половини через симетрію перерізу відносно осі X_c епюра буде симетричною. Отримана епюра наведена на рисунку 5.24.

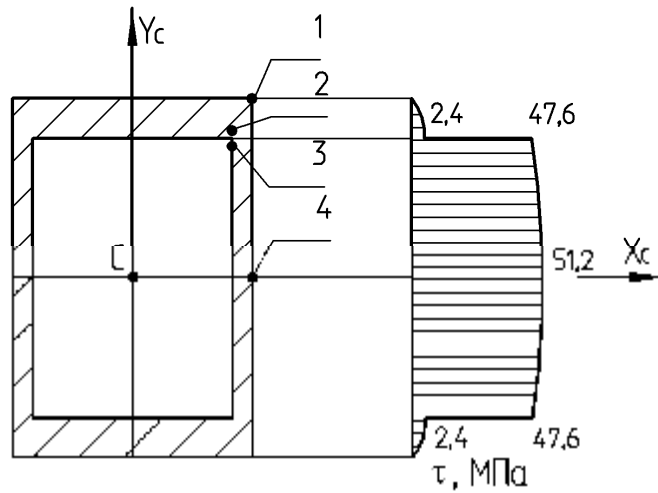


Рисунок 5.24

Задача 5.6

Для сталевої балки (рис. 5.25) визначити номер двотаврового перерізу, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Побудувати епюри зміни нормальних та дотичних напружень за висотою поперечного перерізу двотаврової балки.

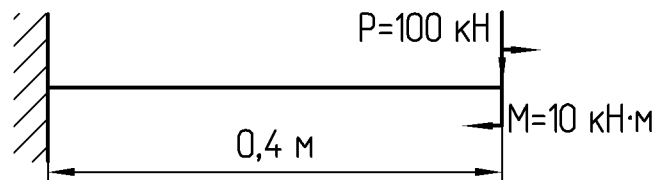


Рисунок 5.25

Розв'язання

1 Будуємо епюри поперечних сил та згинальних моментів. Побудову починаємо із правого (вільного) кінця, при цьому немає необхідності у визначенні опорних реакцій.

Визначаємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.26):

$$Q_1 = Q_2 = P = 100 \text{ кН.}$$

$$M_1 = -M = -10 \text{ кН} \cdot \text{м,}$$

$$M_2 = -M - P \cdot 0,4 = -10 - 100 \cdot 0,4 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Будуємо епюри за характерними перерізами (див. рис. 5.26).

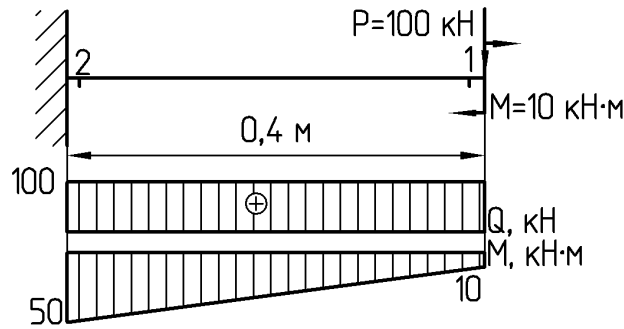


Рисунок 5.26

Очевидно, що при зазначеному навантаженні балки $Q_{\max} = 100 \text{ кН}$, $M_{\max} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2 З умови міцності (5.7) визначаємо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{50 \times 10^{-3}}{160} \times 10^6 = 312,5 \text{ см}^3.$$

3 Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 312,5 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 24а, для якого $W_x = 317 \text{ см}^3$.

Із сортаменту виписуємо геометричні характеристики двотавра:

$$\begin{aligned} H &= 24 \text{ см}, \quad B = 12,5 \text{ см}, & F &= 37,5 \text{ см}^2, \quad J_x = 3800 \text{ см}^4, \\ d &= 0,56 \text{ см}, \quad t = 0,98 \text{ см}, & W_x &= 317 \text{ см}^3, \quad S_x = 178 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

4 Визначаємо максимальні нормальні напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{50 \times 10^{-3}}{317 \times 10^{-6}} = 157,7 \text{ МПа}.$$

Епюра нормальних напружень наведена на рисунку 5.28.

5 Для побудови епюри дотичних напружень визначаємо значення τ в декількох характерних точках (рис. 5.27):

- а) у крайніх волокнах (у точці 1);
- б) у місці сполучення полиці зі стінкою (у точках 2 та 3), причому вважаємо, що точки 2 та 3 розташовані нескінченно близько до межі полиці, але лежать по різні сторони від цієї межі;
- в) у точці нейтральної лінії (точка 4).

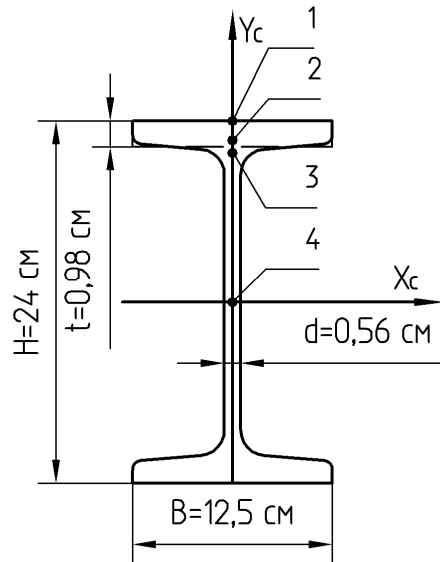


Рисунок 5.27

5.1 Для точки 1 статичний момент площі відсіченої частини $S_{x1}^* = 0$, тому що лінія, яка проходить через точку 1 паралельно нейтральній лінії, не відсікає ніякої площі. Таким чином, дотичне напруження в точці 1 $\tau_1 = 0$ МПа.

5.2 Для точки 2 ширина перерізу $b = 12,5$ см, статичний момент площі відсіченої частини дорівнює статичному моменту полиці. З достатньою точністю полицю можна вважати прямокутником з розмірами $B \times t$.

Тоді

$$S_{x2}^* = Bt \left(\frac{H}{2} - \frac{t}{2} \right) = 12,5 \cdot 0,98 \cdot \left(\frac{24}{2} - \frac{0,98}{2} \right) = 141 \text{ см}^3.$$

Отже, дотичне напруження в точці 2

$$\tau_2 = \frac{100 \times 10^{-3} \cdot 141 \times 10^{-6}}{12,5 \times 10^{-2} \cdot 3800 \times 10^{-8}} = 3,0 \text{ МПа}.$$

5.3 Для точки 3 статичний момент площі відсіченої частини залишається практично тим же, тобто $S_{x3}^* = S_{x2}^* = 141 \text{ см}^3$, але ширина перерізу $b = d = 0,56$ см. Тому дотичне напруження в точці 3

$$\tau_3 = \frac{100 \times 10^{-3} \cdot 141 \times 10^{-6}}{0,56 \times 10^{-2} \cdot 3800 \times 10^{-8}} = 66,3 \text{ МПа}.$$

Отже, при переході від точки 2 до точки 3 дотичне напруження різко зростає.

5.4 Для точки нейтральної лінії (точка 4) ширина перерізу $b = d = 0,56$ см, а статичний момент площі відсіченої частини варто взяти для половини перерізу $S_{x \max}^* = S_{x4}^* = S_x = 178 \text{ см}^3$.

Отже, дотичне напруження в точці:4

$$\tau_4 = \tau_{\max} = \frac{100 \times 10^{-3} \cdot 178 \times 10^{-6}}{0,56 \times 10^{-2} \cdot 3800 \times 10^{-8}} = 83,6 \text{ МПа}.$$

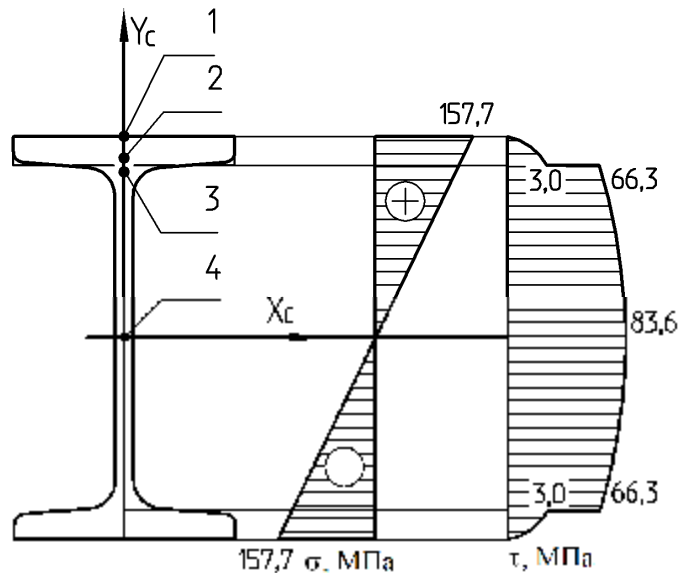


Рисунок 5.28

6 На підставі цих даних будуюмо епюру дотичних напружень для верхньої половини перерізу. Для нижньої половини, так як переріз симетричний відносно осі X_c , то епюра дотичних напружень буде симетричною. Отримана епюра наведена на рисунку 5.28.

Задача 5.7

Визначити найбільші нормальні та дотичні напруження, що виникають у поперечному перерізі балки. Переріз балки представлений на рисунку 5.29. При розрахунках прийняти: $Q_{\max} = 100 \text{ кН}$, $M_{\max} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

1 Розглянутий переріз розбиваємо на дві прості частини – двотавр 1 та смуга 2 (рис. 5.30).

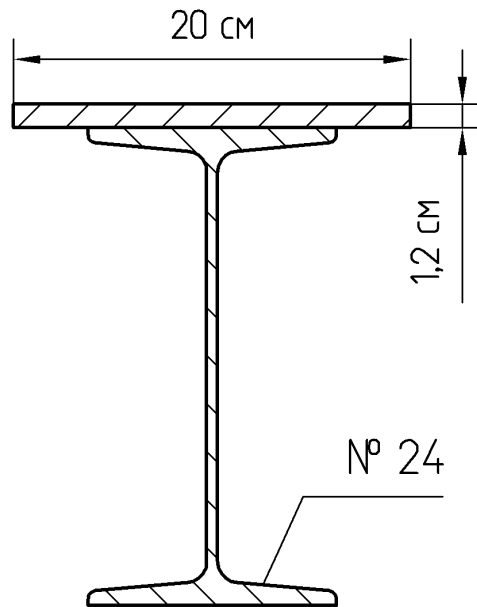


Рисунок 5.29

Розв'язання

Із сортаменту (додаток А) виписуємо геометричні характеристики двотавра 1:

$$H_1 = 24 \text{ см}, B_1 = 11,5 \text{ см}, F_1 = 34,8 \text{ см}^2, J_{x1} = 3460 \text{ см}^4.$$

$$d_1 = 0,56 \text{ см}, t_1 = 0,95 \text{ см},$$

Визначаємо геометричні характеристики смуги 2:

$$H_2 = 1,2 \text{ см}, B_2 = 20 \text{ см}, J_{x_2} = \frac{B_2 H_2^3}{12} = \frac{20 \cdot 1,2^3}{12} = 2,88 \text{ см}^4.$$

$$F_2 = H_2 B_2 = 1,2 \cdot 20 = 24 \text{ см}^2,$$

2 Відносно обраних початкових осей знаходимо координати центра ваги складного перерізу. Якщо фігура симетрична відносно осі Y, то центр ваги лежить на ній, таким чином, $x_c = 0$.

Знаходимо значення координати y_c за формулою

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2}.$$

Для розглянутого перерізу:

$$y_1 = 0 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{H_1}{2} + \frac{H_2}{2} = \frac{24}{2} + \frac{1,2}{2} = 12,6 \text{ см}.$$

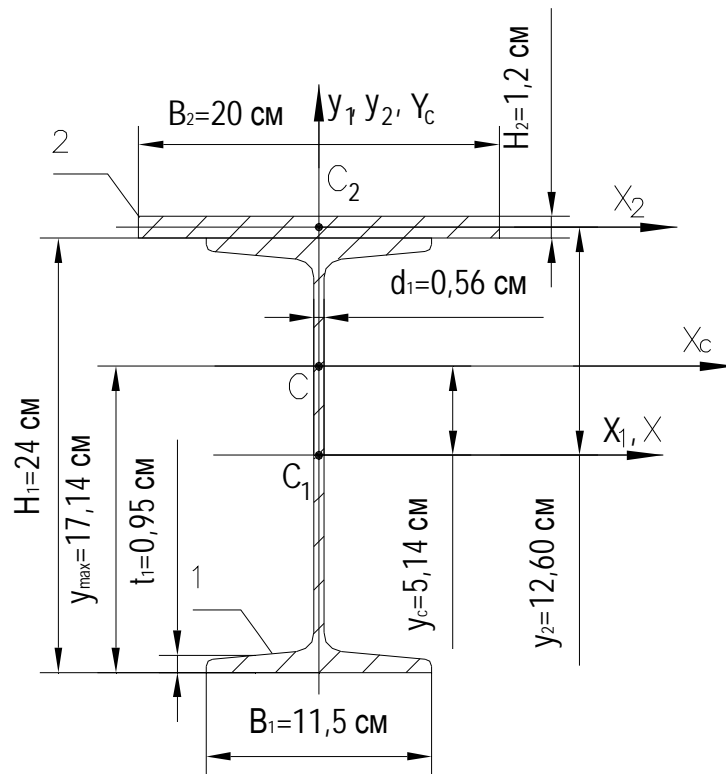


Рисунок 5.30

Звідси одержуємо:

$$y_c = \frac{12,6 \cdot 24}{34,8 + 24} = 5,14 \text{ см.}$$

За знайденою координатою y_c наносимо положення центра ваги складного перерізу (див. рис. 5.30).

3 Визначаємо осьовий момент інерції всього перерізу відносно головної центральної осі X_c за формулою

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2.$$

Для розглянутого перерізу:

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 5,14 = -5,14 \text{ см,}$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 12,6 - 5,14 = 7,46 \text{ см.}$$

Звідси одержуємо:

$$J_{x_c} = 3460 + 5,14^2 \cdot 34,8 + 2,88 + 7,46^2 \cdot 24 = 5718 \text{ см}^4.$$

4 Визначаємо максимальне нормальне напруження:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{J_{x_c}} y_{\max}.$$

Для розглянутого перерізу:

$$y_{\max} = \frac{H_1}{2} + y_c = \frac{24}{2} + 5,14 = 17,14 \text{ см.}$$

Звідси одержуємо:

$$\sigma_{\max} = \frac{50 \times 10^{-3}}{5718 \times 10^{-8}} \cdot 17,14 \times 10^{-2} = 149,9 \text{ МПа.}$$

5 Для даного перерізу найбільшої величини дотичні напруження досягають на нейтральній лінії, причому

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{\max}}{bJ_x},$$

де S_{\max} – статичний момент площі відсіченої частини половини перерізу.

Для точки С ширина перерізу $b = d_1 = 0,56 \text{ см}$. Статичний момент площі відсіченої частини площі (рис. 5.31) визначається таким чином:

$$S_{\max} = 11,5 \cdot 0,95 \cdot \left(17,14 - \frac{0,95}{2} \right) + 0,56 \cdot (17,14 - 0,95) \cdot \frac{17,14 - 0,95}{2} = 255,5 \text{ см}^3.$$

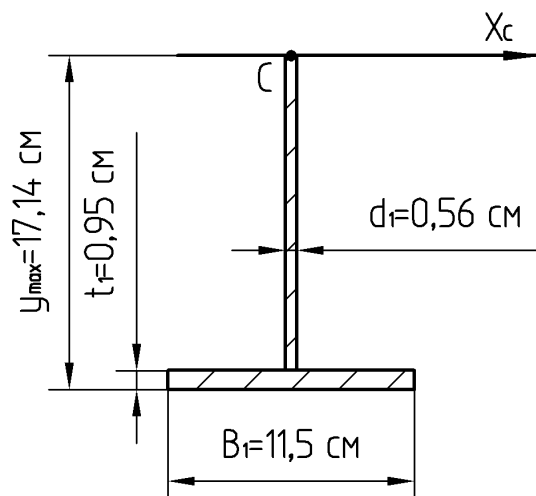


Рисунок 5.31

Отже, максимальне дотичне напруження для даного перерізу:

$$\tau_{\max} = \frac{100 \times 10^{-3} \cdot 255,5 \times 10^{-6}}{0,56 \times 10^{-2} \cdot 5718 \times 10^{-8}} = 79,8 \text{ МПа}.$$

Задача 5.8

Побудувати епюри нормальних та дотичних напружень, що виникають у поперечному перерізі балки (рис. 5.32, а), переріз якої показано на рисунку 5.32, б.

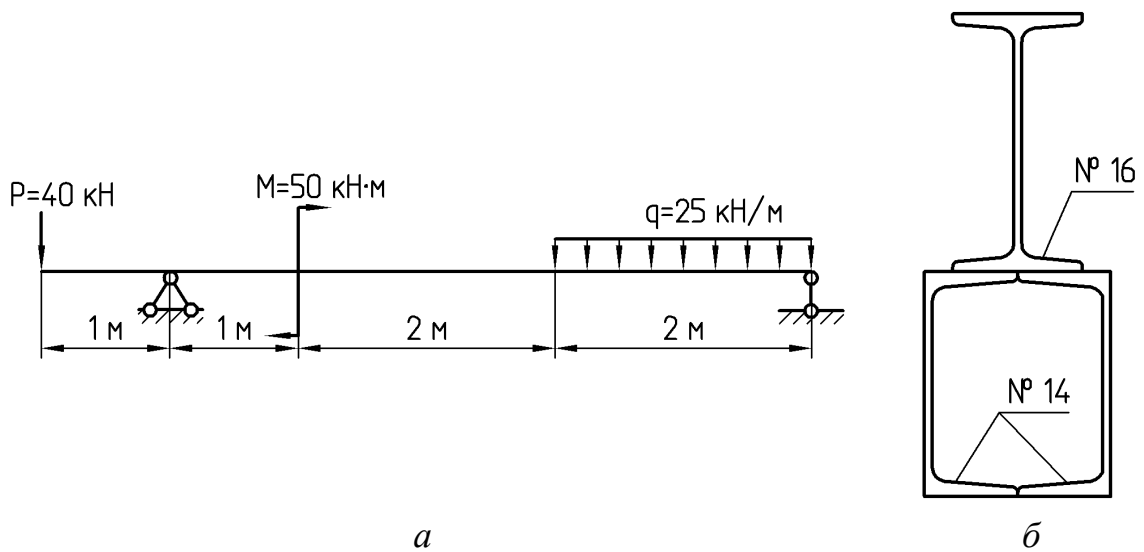


Рисунок 5.32

Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 5.33).

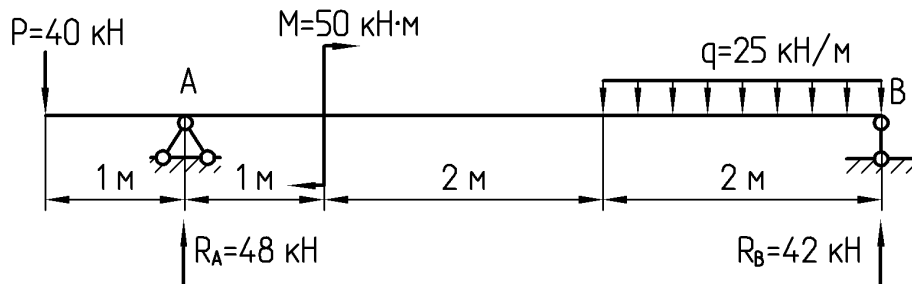


Рисунок 5.33

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M + P \cdot 1 - q \cdot 2 \cdot 4 + R_B \cdot 5 &= 0, \\ R_B &= \frac{M - P \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 4}{5} = \frac{50 - 40 \cdot 1 + 25 \cdot 2 \cdot 4}{5} = 42 \text{ кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ -M + P \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 5 &= 0, \\ R_A &= \frac{-M + P \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 1}{5} = \frac{-50 + 40 \cdot 6 + 25 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 48 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned}-P - q \cdot 2 + R_A + R_B &= 0, \\ -40 - 25 \cdot 2 + 48 + 42 &= 0, \\ -90 + 90 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

2 Визначаємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.34):

$$\begin{aligned}Q_1 &= Q_2 = -P = -40 \text{ кН}, \\ Q_3 &= Q_4 = Q_5 = Q_6 = -P + R_A = -40 + 48 = 8 \text{ кН}, \\ Q_8 &= -R_B = -42 \text{ кН}, \\ Q_7 &= -R_B + q \cdot 2 = -42 + 25 \cdot 2 = 8 \text{ кН}, \\ M_1 &= M_8 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_2 &= M_3 = -P \cdot 1 = -40 \cdot 1 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_4 &= -P \cdot 2 + R_A \cdot 1 = -40 \cdot 2 + 48 \cdot 1 = -32 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_5 &= -P \cdot 2 + R_A \cdot 1 + M = -40 \cdot 2 + 48 \cdot 1 + 50 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_6 &= M_7 = R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 42 \cdot 2 - 25 \cdot 2 \cdot 1 = 34 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_5 &= R_B \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 = 42 \cdot 4 - 25 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Будуємо епюри по характерних перерізах (див. рис. 5.34).

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та міняє знак з «+» на «-», то в цій точці маємо максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу.

$$z_0 = \frac{42}{25} = 1,68 \text{ м},$$

$$M_{z0} = R_B z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 42 \cdot 1,68 - 25 \cdot 1,68 \cdot \frac{1,68}{2} = 35,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

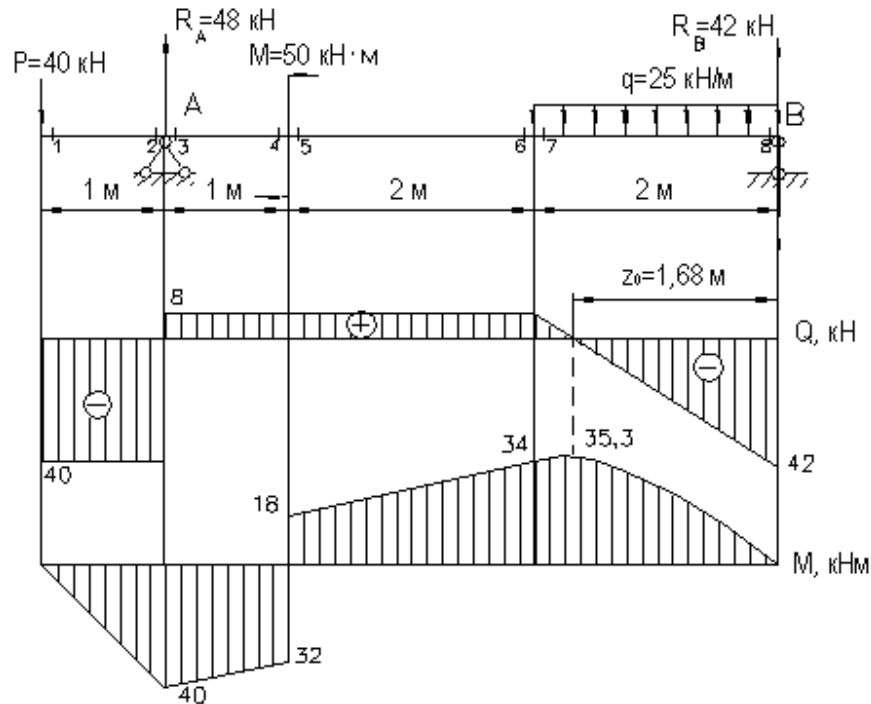


Рисунок 5.34

Очевидно, що при зазначеному навантаженні небезпечними перерізами балки є три перерізи:

- переріз, у якому діє найбільший згинальний момент (переріз 2, $M_{\max} = M_2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$);
- переріз, у якому діє найбільша поперечна сила (переріз 8, $Q_{\max} = Q_8 = 42 \text{ кН}$);
- переріз, у якому великі і поперечна сила, і згинальний момент, тобто в перерізі 2 ($Q_2 = 40 \text{ кН}$, $M_2 = M_{\max} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

3 Розглянемо переріз, поданий на рисунку 5.32, б.

Розглянутий переріз поділяємо на три прості частини – швелери 1, 2 та двотавр 3 (рис. 5.35).

Із сортаменту (додаток Б) виписуємо геометричні характеристики швелерів № 14:

$$\begin{aligned} H_1 = H_2 &= 14 \text{ см}, \quad B_1 = B_2 = 5,8 \text{ см}, \\ d_1 = d_2 &= 0,49 \text{ см}, \quad t_1 = t_2 = 0,81 \text{ см}, \\ z_{01} = z_{02} &= 1,67 \text{ см}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 = F_2 &= 15,6 \text{ см}^2, \\ J_{x1} = J_{x2} &= 491 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Із сортаменту (додаток А) виписуємо геометричні характеристики двотавра № 16:

$$H_3 = 16 \text{ см}, B_3 = 8,1 \text{ см}, \\ d_3 = 0,50 \text{ см}, t_3 = 0,78 \text{ см},$$

$$F_3 = 20,2 \text{ см}^2, J_{x_3} = 873 \text{ см}^4.$$

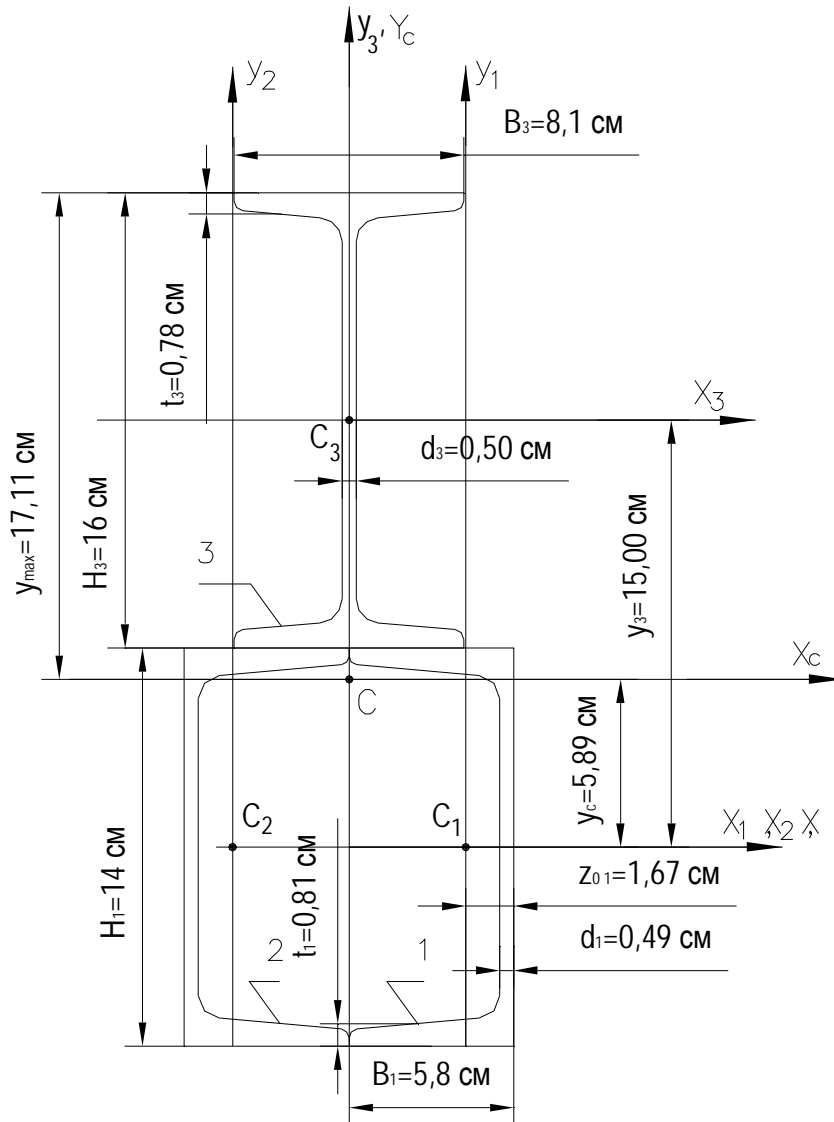


Рисунок 5.35

4 Відносно обраних початкових осей знаходимо координати центра ваги складного перерізу. Якщо фігура симетрична відносно осі Y , то центр ваги лежить на ній, $x_c = 0$.

Знаходимо значення координати y_c за формулою

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

Для розглянутого перерізу:

$$y_1 = y_2 = 0 \text{ см}, \quad y_3 = \frac{H_1}{2} + \frac{H_3}{2} = \frac{14}{2} + \frac{16}{2} = 15,00 \text{ см}.$$

Звідси одержуємо:

$$y_c = \frac{15,00 \cdot 20,2}{2 \cdot 15,6 + 20,2} = 5,89 \text{ см}.$$

По знайденій координаті y_c наносимо положення центра ваги складного перерізу (див. рис. 5.35).

5 Визначаємо осьовий момент інерції всього перерізу відносно головної центральної осі X_c за формулою

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2 + J_{x_3} + a_3^2 F_3.$$

Для розглянутого перерізу:

$$a_1 = a_2 = y_1 - y_c = 0 - 5,89 = -5,89 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 15,00 - 5,89 = 9,11 \text{ см}.$$

Звідси одержуємо:

$$J_{x_c} = 2 \cdot (491 + 5,89^2 \cdot 15,6) + 873 + 9,11^2 \cdot 20,2 = 4614 \text{ см}^4.$$

6 Розглянемо переріз, у якому одночасно великі і поперечна сила, і згинальний момент, тобто переріз 2 ($Q_2 = 40 \text{ кН}$, $M_2 = M_{\max} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

Визначаємо максимальне нормальне напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J_{x_c}} y_{\max}.$$

Для розглянутого перерізу:

$$y_{\max} = \frac{H_1}{2} + H_3 - y_c = \frac{14}{2} + 16 - 5,89 = 17,11 \text{ см}.$$

Звідси одержуємо:

$$\sigma_{\max} = \frac{40 \times 10^{-3}}{4614 \times 10^{-8}} \cdot 17,11 \times 10^{-2} = 148,3 \text{ МПа}.$$

7 Для побудови епюри нормальних напружень визначимо напруження в точці 13 (рис. 5.36) за формулою

$$\sigma_{13} = \frac{M}{J_x} y_{13}.$$

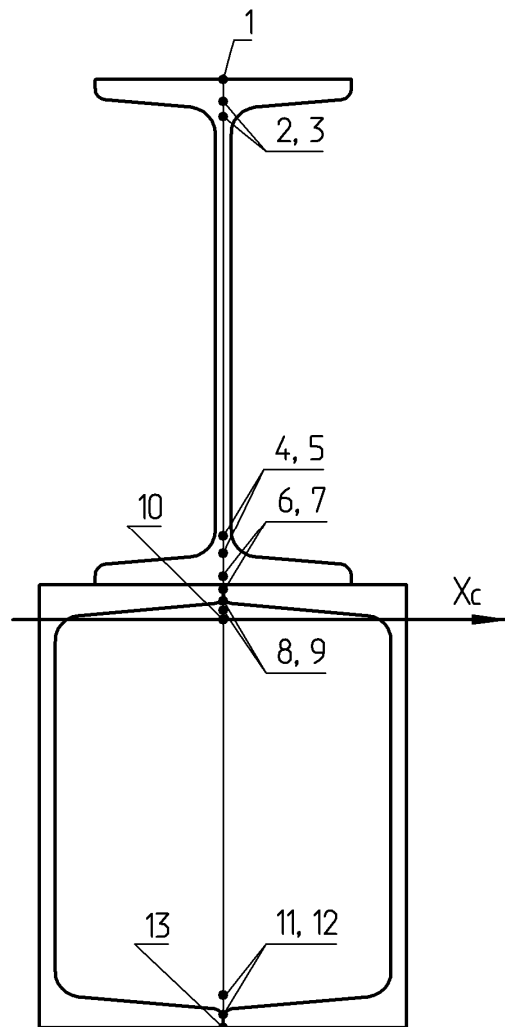


Рисунок 5.36

Для розглянутого перерізу:

$$y_{13} = \frac{H_1}{2} + y_c = \frac{14}{2} + 5,89 = 12,89 \text{ см}.$$

Звідси одержуємо:

$$\sigma_{13} = \frac{40 \times 10^{-3}}{4614 \times 10^{-8}} \cdot 12,89 \times 10^{-2} = 111,7 \text{ МПа}.$$

8 Для побудови епюри дотичних напружень обчислимо значення τ в декількох характерних точках (див. рис. 5.36):

а) у крайніх волокнах (у точках 1 і 13);

б) у місці зміни ширини перерізу (у точках 2 і 3, 4 і 5, 6 і 7, 8 і 9, 11 і 12), причому вважаємо, що граничні перерізи розташовані нескінченно

близько до межі зміни ширини перерізу, але лежать по різні сторони від цієї межі;

в) у точці нейтральної лінії (точка 10).

8.1 Для точок 1 і 13 статичний момент площі відсіченої частини $S_{x1}^* = 0$, тому що лінії, що проходять через точки 1 та 13 паралельно нейтральної лінії, не відсікають ніякої площі. Таким чином, дотичні напруження в точках 1 та 13 $\tau_1 = \tau_{13} = 0$ МПа.

8.2 Для точки 2 ширина перерізу $b = B_3 = 8,1$ см, статичний момент площі відсіченої частини дорівнює статичному моменту прямокутника $8,1 \times 0,78$ см (рис. 5.37).

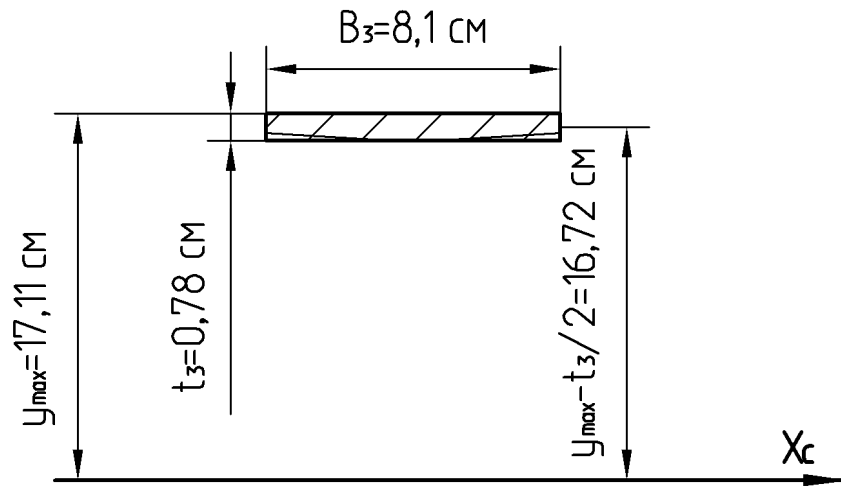


Рисунок 5.37

Отже, дотичне напруження в точці 2

$$\tau_2 = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 106 \times 10^{-6}}{8,1 \times 10^{-2} \cdot 4614 \times 10^{-8}} = 1,2 \text{ МПа}.$$

8.3 Для точки 3 статичний момент площі відсіченої частини залишається практично тим самим, тобто $S_{x3}^* = S_{x2}^* = 106 \text{ см}^3$, але ширина перерізу $b = d_3 = 0,50$ см. Тому дотичне напруження в точці 3:

$$\tau_3 = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 106 \times 10^{-6}}{0,5 \times 10^{-2} \cdot 4614 \times 10^{-8}} = 18,4 \text{ МПа}.$$

Отже, при переході від точки 2 до точки 3 дотичне напруження різко зростає.

8.4 Для точки 4 ширина перерізу $b = d_3 = 0,50$ см, статичний момент площі відсіченої частини дорівнює сумі статичних моментів прямокутників $8,1 \times 0,78$ см і $0,50 \times 14,44$ см (рис. 5.38).

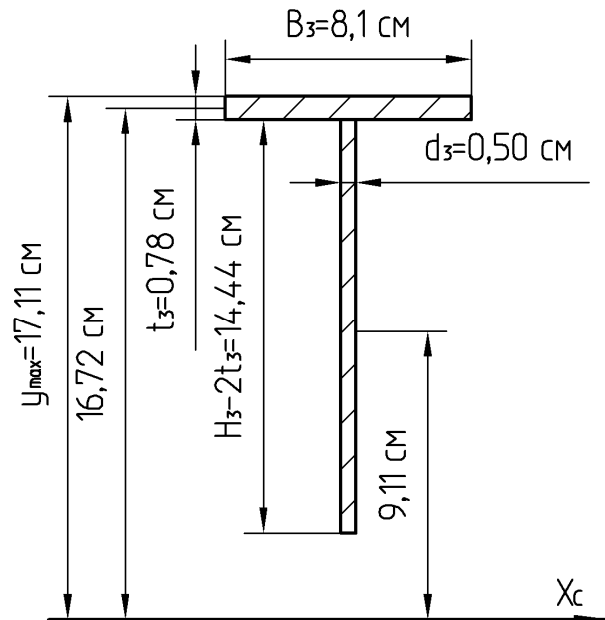


Рисунок 5.38

Тоді

$$S_{x4}^* = 8,1 \cdot 0,78 \cdot 16,72 + 0,50 \cdot 14,44 \cdot 9,11 = 171 \text{ см}^3.$$

Отже, дотичне напруження в точці 4:

$$\tau_4 = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 171 \times 10^{-6}}{0,50 \times 10^{-2} \cdot 4614 \times 10^{-8}} = 29,6 \text{ МПа}.$$

8.5 Для точки 5 статичний момент площі відсіченої частини залишається практично тим самим, тобто $S_{x4}^* = S_{x5}^* = 171 \text{ см}^3$, але ширина перерізу $b = B_3 = 8,1 \text{ см}$. Тому дотичне напруження в точці 5:

$$\tau_5 = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 171 \times 10^{-6}}{8,1 \times 10^{-2} \cdot 4614 \times 10^{-8}} = 1,8 \text{ МПа}.$$

Отже, при переході від точки 4 до точки 5 дотичне напруження різко убуває.

8.6 Для точки 6 ширина перерізу $b = B_3 = 8,1 \text{ см}$, статичний момент площі відсіченої частини дорівнює сумі статичних моментів трьох прямокутників: двох прямокутників $8,1 \times 0,78 \text{ см}$ і одного прямокутника $0,50 \times 14,44 \text{ см}$ (рис. 5.39).

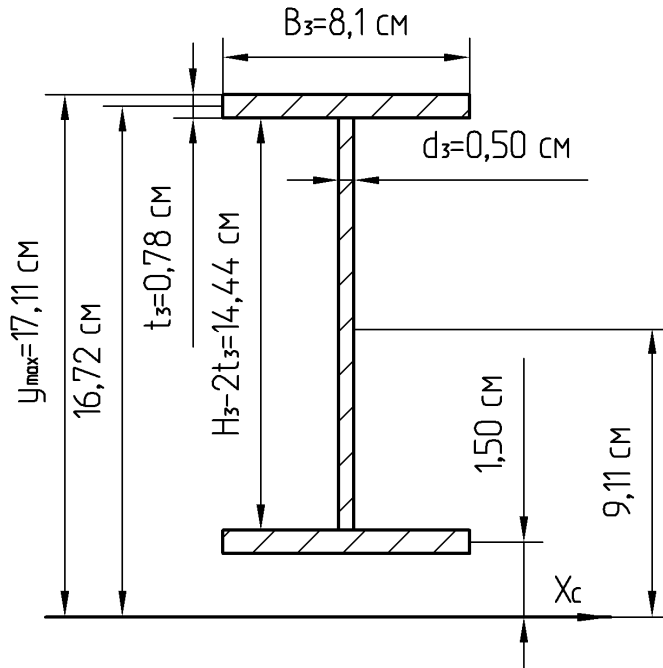


Рисунок 5.39

Тоді

$$S_{x6}^* = 8,1 \cdot 0,78 \cdot 16,72 + 0,50 \cdot 14,44 \cdot 9,11 + 8,1 \cdot 0,78 \cdot 1,50 = 180 \text{ см}^3.$$

Отже, дотичне напруження в точці 6:

$$\tau_6 = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 180 \times 10^{-6}}{8,1 \times 10^{-2} \cdot 4614 \times 10^{-8}} = 2,0 \text{ МПа}.$$

8.7 Для точки 7 статичний момент площі відсіченої частини залишається практично тим самим, тобто $S_{x6}^* = S_{x7}^* = 180 \text{ см}^3$, але ширина перерізу $b = 2B_1 = 2 \cdot 5,8 = 11,6 \text{ см}$.

Тому дотичне напруження в точці 7:

$$\tau_7 = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 180 \times 10^{-6}}{11,6 \times 10^{-2} \cdot 4614 \times 10^{-8}} = 1,4 \text{ МПа}.$$

Отже, при переході від точки 6 до точки 7 дотичне напруження убаває.

8.8 Для точки 8 ширина перерізу $b = 2B_1 = 2 \cdot 5,8 = 11,6 \text{ см}$, статичний момент площі відсіченої частини дорівнює сумі статичних моментів чотирьох прямокутників: двох прямокутників $8,1 \times 0,78 \text{ см}$, одного прямокутника $0,50 \times 14,44 \text{ см}$ і одного прямокутника $11,6 \times 0,81 \text{ см}$ (рис. 5.40).

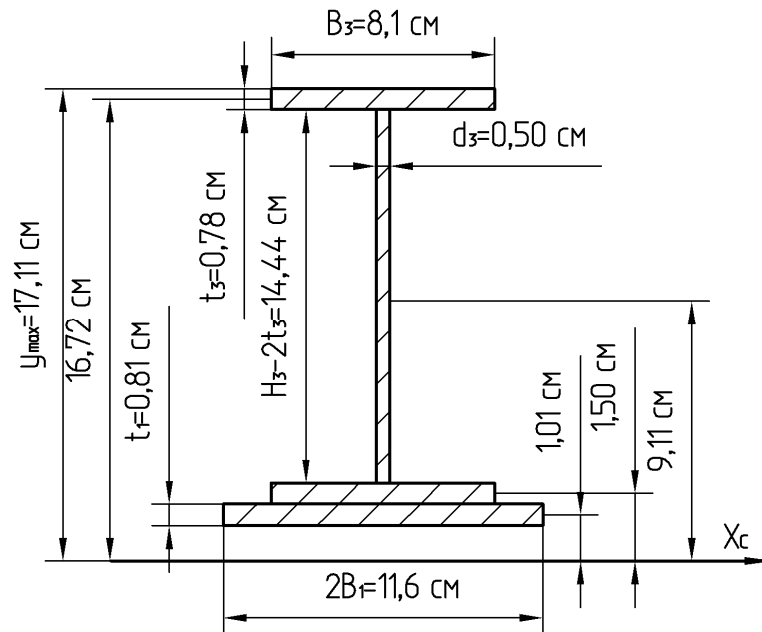


Рисунок 5.40

Тоді

$$S_{x8}^* = 8,1 \cdot 0,78 \cdot 16,72 + 0,50 \cdot 14,44 \cdot 9,11 + 8,1 \cdot 0,78 \cdot 1,50 + \\ + 11,6 \cdot 0,81 \cdot 1,01 = 189 \text{ см}^3.$$

Отже, дотичне напруження в точці 6:

$$\tau_8 = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 189 \times 10^{-6}}{11,6 \times 10^{-2} \cdot 4614 \times 10^{-8}} = 1,4 \text{ МПа}.$$

8.9 Для точки 9 статичний момент площі відсіченої частини залишається практично тим самим, тобто $S_{x8}^* = S_{x9}^* = 189 \text{ см}^3$, але ширина перерізу $b = 2d_1 = 2 \cdot 0,49 = 0,98 \text{ см}$.

Тому дотичне напруження в точці 7:

$$\tau_9 = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 189 \times 10^{-6}}{0,98 \times 10^{-2} \cdot 4614 \times 10^{-8}} = 16,8 \text{ МПа}.$$

Отже, при переході від точки 8 до точки 9 дотичне напруження різко зростає.

8.10 Для точки 12 ширина перерізу $b = 2B_1 = 2 \cdot 5,8 = 11,6 \text{ см}$, статичний момент площі відсіченої частини дорівнює статичному моменту прямокутника $11,6 \times 0,81 \text{ см}$ (рис. 5.41).

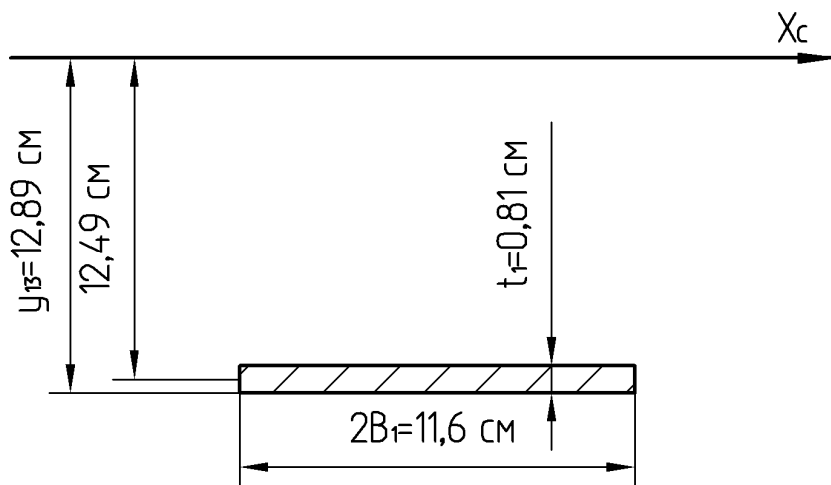


Рисунок 5.41

Тоді

$$S_{x12}^* = 11,6 \cdot 0,81 \cdot 12,49 = 117 \text{ см}^3.$$

Отже, дотичне напруження в точці 12:

$$\tau_{12} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 117 \times 10^{-6}}{11,6 \times 10^{-2} \cdot 4614 \times 10^{-8}} = 0,8 \text{ МПа}.$$

8.11 Для точки 11 статичний момент площі відсіченої частини залишається практично тим самим, тобто $S_{x10}^* = S_{x11}^* = 117 \text{ см}^3$, але ширина перерізу $b = 2d_1 = 2 \cdot 0,49 = 0,98 \text{ см}$.

Тому дотичне напруження в точці 11:

$$\tau_{11} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 117 \times 10^{-6}}{0,98 \times 10^{-2} \cdot 4614 \times 10^{-8}} = 10,4 \text{ МПа}.$$

Отже, при переході від точки 12 до точки 11 дотичне напруження різко зростає.

8.12 Для точки нейтральної лінії (точка 10) ширина перерізу $b = 2d_1 = 2 \cdot 0,49 = 0,98 \text{ см}$, а статичний момент площі відсіченої частини варто взяти для половини перерізу (рис. 5.42).

Тоді

$$S_{x10}^* = 11,6 \cdot 0,81 \cdot 12,49 + 2 \cdot 0,49 \cdot 12,08 \cdot 6,04 = 189 \text{ см}^3.$$

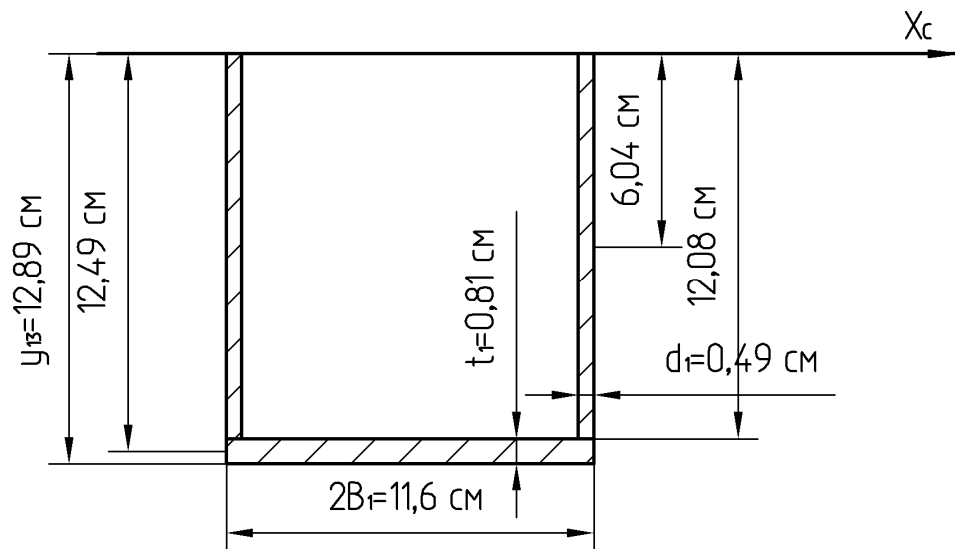


Рисунок 5.42

Отже, дотичне напруження в точці 10:

$$\tau_{10} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 189 \times 10^{-6}}{0,98 \times 10^{-2} \cdot 4614 \times 10^{-8}} = 16,8 \text{ МПа}.$$

9 На підставі отриманих даних будуюмо епюри нормальних і дотичних напружень для заданого перерізу. Отримані епюри наведені на рисунку 5.43.

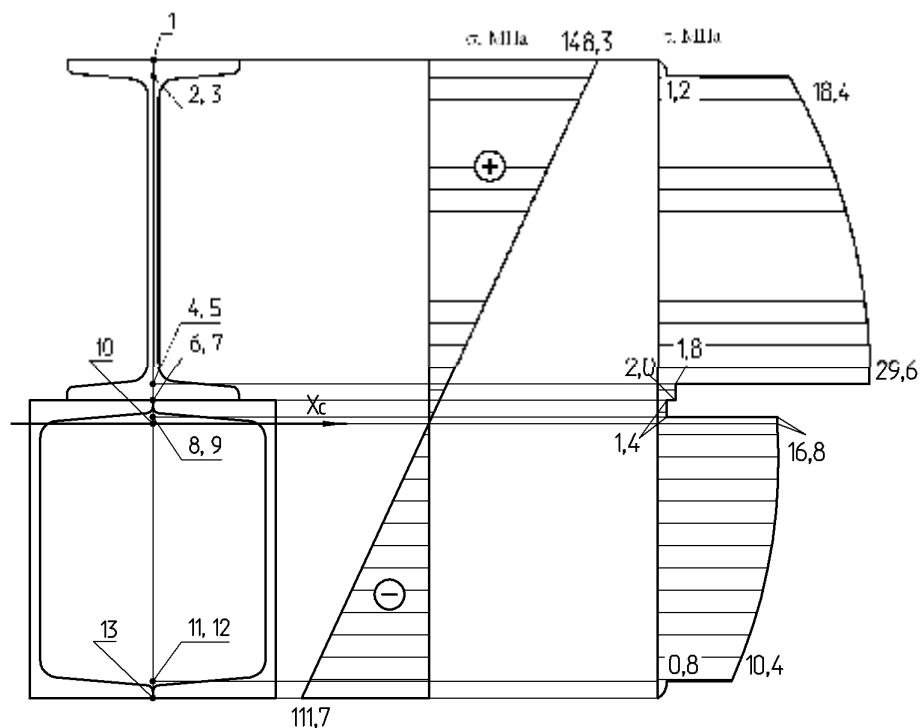


Рисунок 5.43

5.3 Повна перевірка міцності при згинанні

Отримані формули для нормальних і дотичних напружень при плоскому згинанні дають можливість записати умови міцності, необхідні для перевірки міцності та підбору перерізів деталей, що працюють на згинання.

Умова міцності повинна бути записана для небезпечної точки балки, тобто тієї точки, де матеріал перебуває в найбільш напруженому стані.

Небезпечною точкою буде одна з наступних трьох точок:

- а) точка, де нормальне σ напруження досягає найбільшої величини;
- б) точка, де дотичне τ напруження досягає найбільшої величини;
- в) точка, де σ та τ , хоча і не набувають найбільших значень, але у своїй комбінації створюють найбільш не вигідне сполучення, тобто створюють найбільше еквівалентне напруження за прийнятою для розрахунку теорією міцності. При цьому така точка може бути не одна.

Перша небезпечна точка буде розташована в крайніх волокнах того перерізу, де згинальний момент має найбільше значення. Умова міцності запишеться у вигляді

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (5.11)$$

Друга небезпечна точка перебуває на нейтральній лінії того перерізу, де поперечна сила має найбільше значення (будь-яка точка на ділянці нейтрального шару, де $Q = Q_{\max}$). У такій точці буде чистий зсув, і умова міцності запишеться у вигляді

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\max}}{b J_x} \leq [\tau]. \quad (5.12)$$

Положення третьої небезпечної точки не настільки визначене. Але де б вона не була обрана, у ній буде плоский напружений стан.

Еквівалентна напруження в такій точці може бути розрахована за різними теоріями міцності.

Для розрахунку балок із пластичних матеріалів рекомендується користуватися умовами міцності, отриманими за III і IV теоріями:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \\ \sigma_{\text{екв}}^{\text{VI}} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

У переважній більшості випадків небезпечною точкою є крайня точка того небезпечного перерізу, де $M = M_{\max}$.

Задача 5.9

Для сталевої балки (рис. 5.44) підібрати розміри двотаврового, круглого та прямокутного ($h = 2b$) перерізів, вибрати оптимальний варіант та зробити повну перевірку на міцність за четвертою теорією міцності. Нормальне допустиме напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

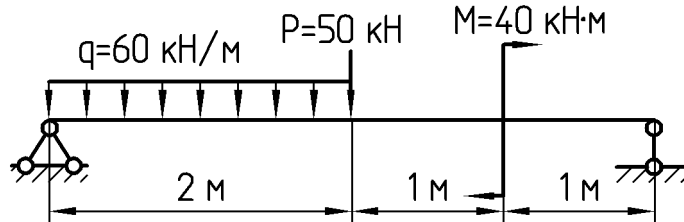


Рисунок 5.44

Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 5.45).

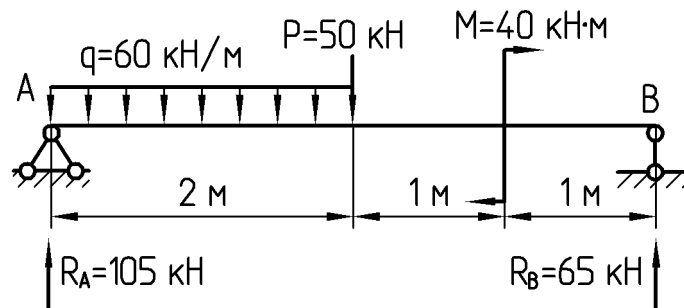


Рисунок 5.45

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 + R_B \cdot 4 = 0,$$

$$R_B = \frac{M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1}{4} = \frac{40 + 50 \cdot 2 + 60 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 65 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - R_A \cdot 4 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3}{4} = \frac{-40 + 50 \cdot 2 + 60 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 105 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$\begin{aligned}-P - q \cdot 2 + R_A + R_B &= 0, \\ -50 - 60 \cdot 2 + 105 + 65 &= 0, \\ -170 + 170 &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

2 Визначаємо значення поперечних сил та згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.46):

$$\begin{aligned}Q_1 &= R_A = 105 \text{ кН}, \\ Q_2 &= R_A - q \cdot 2 = 105 - 60 \cdot 2 = -15 \text{ кН}, \\ Q_3 &= R_A - q \cdot 2 - P = 105 - 60 \cdot 2 - 50 = -65 \text{ кН}, \\ Q_6 &= Q_5 = Q_4 = Q_3 = -R_B = -65 \text{ кН}, \\ M_1 &= M_6 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_2 &= M_3 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 105 \cdot 2 - 60 \cdot 2 \cdot 1 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_5 &= R_B \cdot 1 = 65 \cdot 1 = 65 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_4 &= R_B \cdot 1 - M = 65 \cdot 1 - 40 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M_3 &= M_2 = R_B \cdot 2 - M = 65 \cdot 2 - 40 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру по характерних перерізах (див. рис. 5.46).

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці маємо максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу:

$$\begin{aligned}z_0 &= \frac{105}{60} = 1,75 \text{ м}, \\ M_{z_0} &= R_A z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 105 \cdot 1,75 - 60 \cdot 1,75 \cdot \frac{1,75}{2} = 91,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Для зазначеного виду навантаження:

$$Q_{\max} = 105 \text{ кН}, \quad M_{\max} = 91,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

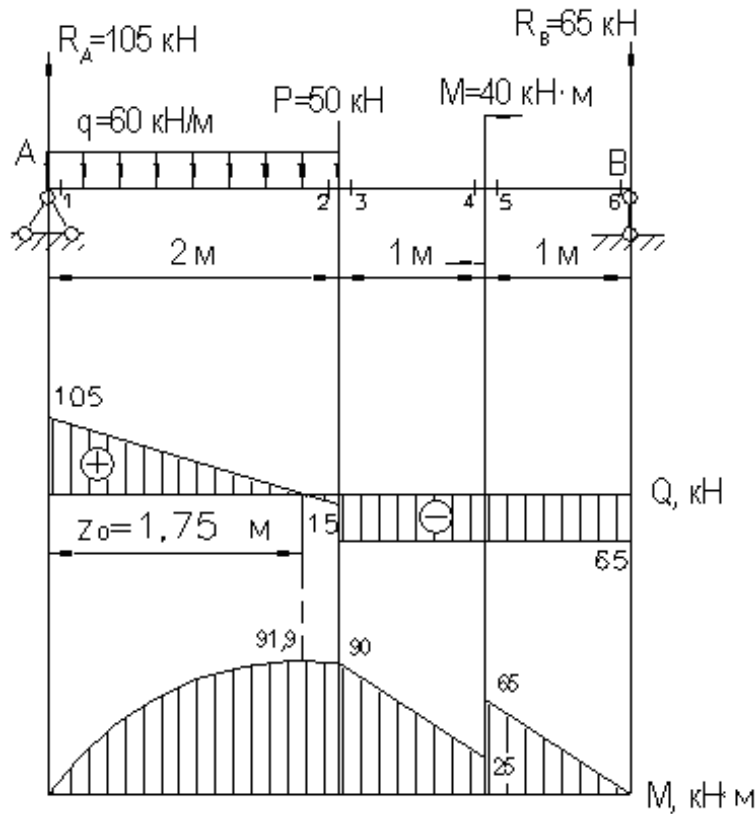


Рисунок 5.46

3 Підбираємо переріз. З умови міцності (5.7) визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{91,9 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 574,4 \text{ см}^3.$$

Для круглого поперечного перерізу момент опору дорівнює:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3,$$

де d – діаметр перерізу.

Звідси одержуємо:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{574,4}{0,1}} = 17,9 \text{ см}.$$

Приймаємо діаметр, кратний 5 мм, тобто $d = 180 \text{ мм} = 18,0 \text{ см}$

Площа кругового перерізу дорівнює:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 18,0^2}{4} = 254,3 \text{ см}^2.$$

Для прямокутного поперечного перерізу момент опору дорівнює:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

Якщо $h = 2b$, то

$$W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}.$$

Звідси одержуємо:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 574,4}{2}} = 9,5 \text{ см}.$$

Приймаємо: $b = 9,5 \text{ см}$, $h = 19,0 \text{ см}$.

Площа прямокутника:

$$F = bh = 9,5 \cdot 19,0 = 180,5 \text{ см}^2.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 574,4 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 33, для якого $W_x = 597 \text{ см}^3$. Його площа $F = 53,8 \text{ см}^2$.

Переріз вважається раціональним, якщо він забезпечує міцність балки при мінімальній її вазі, тобто при мінімальній площі поперечного перерізу. Якщо площа поперечного перерізу менше у двотаврового перерізу, то приймаємо двотавровий переріз.

Для двотавра № 33 виписуємо із сортаменту необхідні геометричні характеристики:

$$\begin{aligned} H &= 33 \text{ см}, \quad B = 14 \text{ см}, \\ d &= 0,7 \text{ см}, \quad t = 1,12 \text{ см}, \end{aligned}$$

$$J_x = 9840 \text{ см}^4, \quad S_x^* = 339 \text{ см}^3.$$

4 Перевіряємо міцність за нормальними напруженнями.

Небезпечним буде переріз, у якому діє найбільший згинальний момент (переріз z , $M_{\max} = M_{z0} = 91,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$). У самому перерізі найбільші напруження будуть у найбільш віддалених від нейтральної лінії точках, тобто в точках 1 та 7 (рис. 5.47).

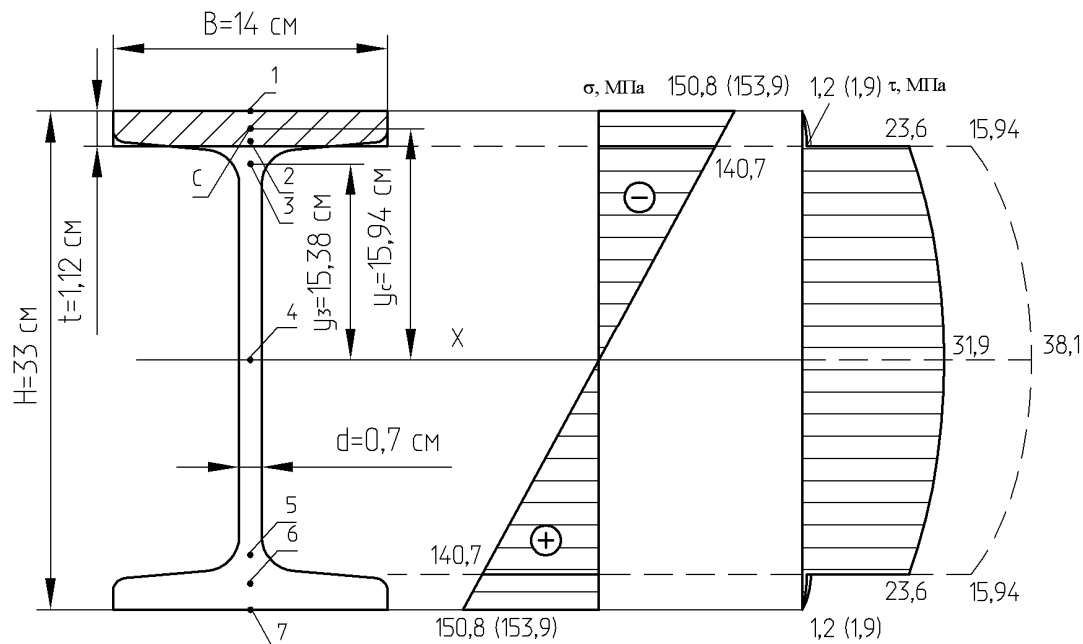


Рисунок 5.47

Умова міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\max} = \frac{91,9 \times 10^{-3}}{597 \times 10^{-6}} = 153,9 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності по нормальних напруженнях виконується.

5 Перевіряємо міцність за дотичними напруженнями.

Небезпечним буде переріз, у якому діє найбільша поперечна сила (переріз 1, $Q_{\max} = Q_1 = 105 \text{ кН}$). У самому перерізі найбільші напруження будуть у точці на головній осі X, тобто в точці 4 (див. рис. 5.47).

Умова міцності за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^*}{b J_x} \leq [\tau],$$

$$\tau_{\max} = \frac{105 \times 10^{-3} \cdot 339 \times 10^{-6}}{0,7 \times 10^{-2} \cdot 9840 \times 10^{-8}} = 51,7 \text{ МПа} \leq [\tau] = 96 \text{ МПа}.$$

Для сталевих балок приймають: $[\tau] \approx 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа}$.

$$\tau_{\max} = 51,7 \text{ МПа} \leq [\tau] = 96 \text{ МПа}.$$

Умова міцності за дотичними напруженнями виконується.

Для побудови епюри дотичних напружень при найбільшій поперечній силі ($Q_{\max} = 105 \text{ кН}$) визначимо дотичні напруження в точках 2 та 3, 5 та 6.

Для точок 2 та 6 ширина перерізу $b = B = 14 \text{ см}$, статичний момент площі відсіченої частини дорівнює статичному моменту полиці, тобто прямокутника $B \times t = 14 \times 1,12 \text{ см}$.

Тоді

$$S_{x_{2,6}}^* = B t y_C = 14 \cdot 1,12 \cdot 15,94 = 249,9 \text{ см}^3,$$

$$\text{де } y_C = \frac{H}{2} - \frac{t}{2} = \frac{33 - 1,12}{2} = 15,94 \text{ см}.$$

Отже, дотичне напруження в точках 2 та 6:

$$\tau_{(2)} = \tau_{(6)} = \frac{105 \times 10^{-3} \cdot 249,9 \times 10^{-6}}{14 \times 10^{-2} \cdot 9840 \times 10^{-8}} = 1,9 \text{ МПа}.$$

Для точок 3 та 5 статичний момент площі відсіченої частини залишається практично тим самим, тобто $S_{x_{3,5}}^* = S_{x_{2,6}}^* = 249,9 \text{ см}^3$, але ширина перерізу $b = d = 0,7 \text{ см}$. Тому дотичні напруження в точках 3 та 5:

$$\tau_{(3)} = \tau_{(5)} = \frac{105 \times 10^{-3} \cdot 249,9 \times 10^{-6}}{0,7 \times 10^{-2} \cdot 9840 \times 10^{-8}} = 38,1 \text{ МПа}.$$

Отже, при переході від точки 2 (6) до точки 3 (5) дотичне напруження різко зростає.

6 Перевіряємо переріз на спільну дію нормальних та дотичних напружень за четвертою теорією міцності:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Перевірка робиться в перерізі, де згинальний момент та поперечна сила близькі до найбільших значень, тобто в перерізі 3 ($Q_3 = 65 \text{ кН}$, $M_3 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}$), а в самому перерізі – у точці, де з'єднується полиця і стінка двотавра, а дотичне напруження максимальне, тобто в точці 3 (див. рис. 5.47).

Визначаємо нормальне напруження в точках 2 (3) та 5 (6):

$$\sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = \sigma_{(5)} = \sigma_{(6)} = \frac{M_3}{J_x} y_3.$$

Для розглянутого перерізу $y_3 = \frac{H}{2} - t = \frac{33}{2} - 1,12 = 15,38 \text{ см}$.

Звідси одержуємо:

$$S_{(2)} = S_{(3)} = S_{(5)} = S_{(6)} = \frac{90 \times 10^{-3}}{9840 \times 10^{-8}} \cdot 15,38 \times 10^{-2} = 140,7 \text{ МПа}.$$

Для побудови епюри нормальних напружень при згинальному моменті $M_3 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}$ визначимо найбільші нормальні напруження, які виникають у точках 1 та 7 (див. рис. 5.47):

$$\sigma_{(1)} = S_{(7)} = \frac{M_3}{W_x} = \frac{90 \times 10^{-3}}{597 \times 10^{-6}} = 150,8 \text{ МПа}$$

Визначаємо дотичні напруження в точці 3:

$$t_{(3)} = \frac{Q_3 S_{x3}^*}{b J_x}.$$

Для точки 3 ширина перерізу $b = d = 0,7 \text{ см}$, статичний момент площі відсіченої частини дорівнює статичному моменту полиці, тобто прямокутника $B \times t = 14 \times 1,12 \text{ см}$.

Тоді

$$S_{x3}^* = B t y_c = 14 \cdot 1,12 \cdot 15,94 = 249,9 \text{ см}^3,$$

$$\text{де } y_c = \frac{H}{2} - \frac{t}{2} = \frac{33 - 1,12}{2} = 15,94 \text{ см}.$$

Отже, дотичне напруження в точці 3:

$$\tau_{(3)} = \frac{65 \times 10^{-3} \cdot 249,9 \times 10^{-6}}{0,7 \times 10^{-2} \cdot 9840 \times 10^{-8}} = 23,6 \text{ МПа}.$$

Для точки 2 статичний момент площі відсіченої частини залишається практично тим самим, тобто $S_{x2}^* = S_{x3}^* = 249,9 \text{ см}^3$, але ширина перерізу $b = B = 14 \text{ см}$. Тому дотичні напруження в точці 2:

$$\tau_{(2)} = \frac{65 \times 10^{-3} \cdot 249,9 \times 10^{-6}}{14 \times 10^{-2} \cdot 9840 \times 10^{-8}} = 1,2 \text{ МПа}.$$

Для точки нейтральної лінії (точка 4) ширина перерізу $b = d = 0,7 \text{ см}$,

а статичний момент площі відсіченої частини варто взяти для половини перерізу: $S_{x \max}^* = S_x^* = 339 \text{ см}^3$.

Отже, дотичне напруження в точці 4:

$$\tau_{(4)} = \frac{65 \times 10^{-3} \cdot 339 \times 10^{-6}}{0,7 \times 10^{-2} \cdot 9840 \times 10^{-8}} = 31,9 \text{ МПа}.$$

Для нижньої половини перерізу через симетрію відносно осі X
 $t_{(5)} = t_{(3)} = 23,6 \text{ МПа}$, $t_{(6)} = t_{(2)} = 1,2 \text{ МПа}$.

Розраховуємо еквівалентне напруження в точці 3 за четвертою теорією міцності:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{140,7^2 + 3 \cdot 23,6^2} = 146,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Задача 5.10

Для сталевий балки (рис. 5.48) підібрати розміри двотаврового перерізу та зробити повну перевірку на міцність за третьою теорією міцності. Допустиме нормальне напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

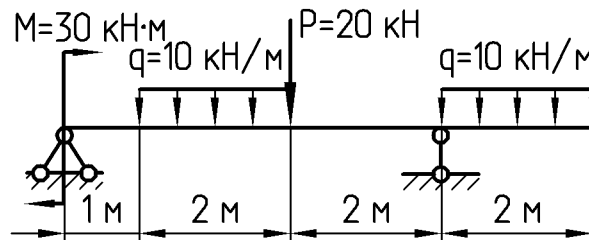


Рисунок 5.48

Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 5.49).

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 6 + R_B \cdot 5 = 0,$$

$$R_B = \frac{M + P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 6}{5} = \frac{30 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 6}{5} = 50 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 5 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1}{5} = \frac{-30 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 10 \text{ кН}.$$

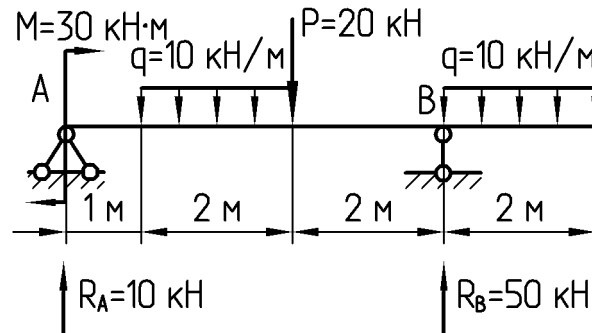


Рисунок 5.49

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-P - q \cdot 2 - q \cdot 2 + R_A + R_B = 0,$$

$$-20 - 10 \cdot 2 - 10 \cdot 2 + 10 + 50 = 0,$$

$$-60 + 60 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Визначаємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.50):

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = R_A = 10 \text{ кН},$$

$$Q_4 = R_A - q \cdot 2 = 10 - 10 \cdot 2 = -10 \text{ кН},$$

$$Q_5 = R_A - q \cdot 2 - P = 10 - 10 \cdot 2 - 20 = -30 \text{ кН},$$

$$Q_8 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_7 = q \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_6 = Q_5 + q \cdot 2 - R_B = -30 + 10 \cdot 2 - 50 = -30 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = M + R_A \cdot 1 = 30 + 10 \cdot 1 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = M + R_A \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 = 30 + 10 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = M_6 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -10 \cdot 2 \cdot 1 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = M_4 = -q \cdot 2 \cdot 3 + R_B \cdot 2 = -10 \cdot 2 \cdot 3 + 50 \cdot 2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

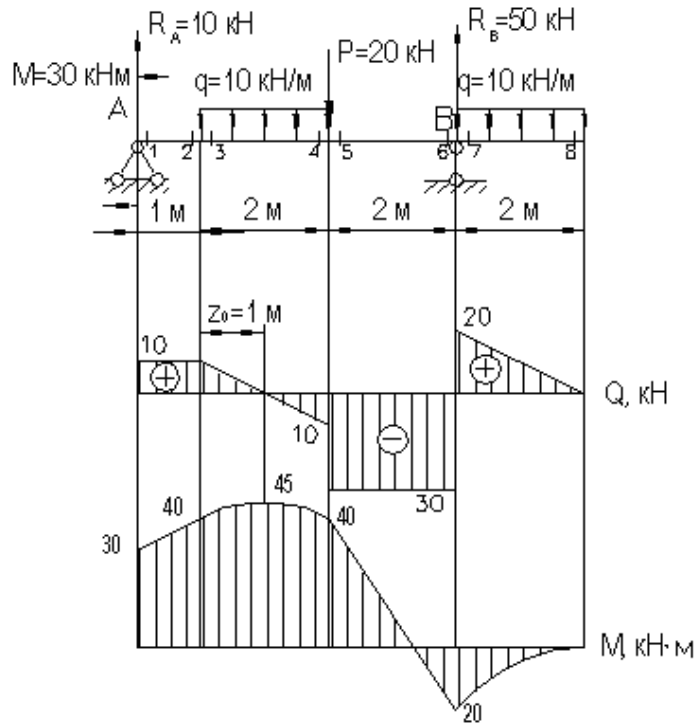


Рисунок 5.50

Будуємо епюру за характерними перерізами (див. рис. 5.50).

Якщо епюра поперечних сил пересікає базову лінію та змінює знак з «+» на «-», то в цій точці маємо максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу:

$$z_0 = \frac{10}{10} = 1 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = M + R_A (1 + z_0) - q z_0 \frac{z_0}{2} = 30 + 10 \cdot (1 + 1) - 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для зазначеного виду навантаження $Q_{\max} = 30 \text{ кН}$, $M_{\max} = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

З Підбираємо переріз. З умови міцності (5.7) визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{45 \times 10^{-3}}{160} \times 10^6 = 281,3 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 281,3 \text{ см}^3$. За таблицею сортаменту (ДСТУ 8239-72) вибираємо двотавр № 24, для якого $W_x = 289 \text{ см}^3$.

Для двотавра № 24 виписуємо із сортаменту необхідні геометричні характеристики:

$$H = 24 \text{ см}, B = 11,5 \text{ см}, \\ d = 0,56 \text{ см}, t = 0,95 \text{ см},$$

$$J_x = 3460 \text{ см}^4, S_x^* = 163 \text{ см}^3.$$

4 Перевіряємо міцність за нормальними напруженнями.

Небезпечним буде переріз, у якому діє найбільший згинальний момент (переріз z_0 , $M_{\max} = M_{z_0} = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}$). У самому перерізі великі напруження будуть у найбільш віддалених від нейтральної лінії точках, тобто в точках 1 та 7 (рис. 5.51).

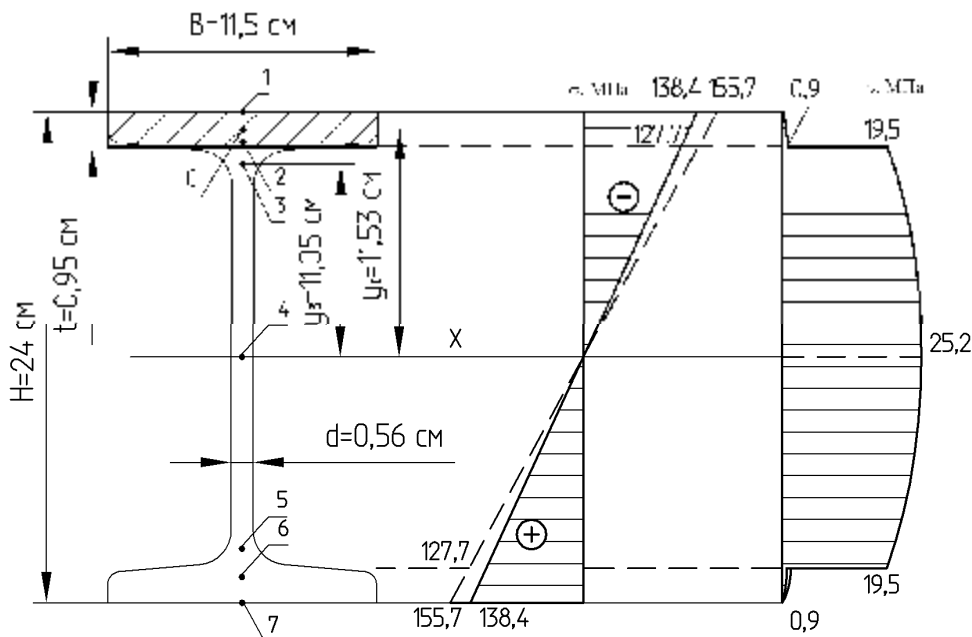


Рисунок 5.51

Умова міцності по нормальних напруженнях:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\max} = \frac{45 \times 10^{-3}}{289 \times 10^{-6}} = 155,7 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності за нормальними напруженнями виконується.

5 Перевіряємо міцність за дотичними напруженнями.

Небезпечним буде переріз, у якому діє найбільша поперечна сила (переріз 1, $Q_{\max} = Q_5 = 30 \text{ кН}$). У самому перерізі найбільші напруження будуть у точці на головній осі X , тобто в точці 4 (див. рис. 5.51).

Умова міцності за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^*}{b J_x} \leq [\tau],$$

$$\tau_{\max} = \frac{30 \times 10^{-3} \cdot 163 \times 10^{-6}}{0,56 \times 10^{-2} \cdot 3460 \times 10^{-8}} = 25,2 \text{ МПа} \leq [\tau] = 96 \text{ МПа}.$$

Для сталевих балок приймають: $[\tau] \approx 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа}$.

$$\tau_{\max} = 51,7 \text{ МПа} \leq [\tau] = 96 \text{ МПа}.$$

Умова міцності за дотичними напруженнями виконується.

Для побудови епюри дотичних напружень при найбільшій поперечній силі ($Q_{\max} = 30 \text{ кН}$) визначимо дотичні напруження в точках 2 та 3, 5 та 6. Для точок 2 та 6 ширина перерізу $b = B = 11,5 \text{ см}$, статичний момент площі відсіченої частини дорівнює статичному моменту полиці, тобто прямокутника $B \times t = 11,5 \times 0,95 \text{ см}$.

Тоді

$$S_{x2,6}^* = Bty_C = 11,5 \cdot 0,95 \cdot 11,53 = 125,9 \text{ см}^3,$$

$$\text{де } y_C = \frac{H}{2} - \frac{t}{2} = \frac{24 - 0,95}{2} = 11,53 \text{ см}.$$

Отже, дотичне напруження в точках 2 та 6:

$$\tau_{(2)} = \tau_{(6)} = \frac{30 \times 10^{-3} \cdot 125,9 \times 10^{-6}}{11,5 \times 10^{-2} \cdot 3460 \times 10^{-8}} = 0,9 \text{ МПа}.$$

Для точок 3 та 5 статичний момент площі відсіченої частини залишається практично тим самим, тобто $S_{x3,5}^* = S_{x2,6}^* = 125,9 \text{ см}^3$, але ширина перерізу $b = d = 0,56 \text{ см}$. Тому дотичні напруження в точках 3 та 5:

$$\tau_{(3)} = \tau_{(5)} = \frac{30 \times 10^{-3} \cdot 125,9 \times 10^{-6}}{0,56 \times 10^{-2} \cdot 3460 \times 10^{-8}} = 19,5 \text{ МПа}.$$

Отже, при переході від точки 2 (6) до точки 3 (5) дотичне напруження різко зростає.

6 Перевіряємо переріз на спільну дію нормальних і дотичних напружень за четвертою теорією міцності:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Перевірка робиться в перерізі, де згинальний момент і поперечна сила близькі до найбільших значень, тобто в перерізі 5 ($Q_5 = Q_{\text{max}} = 30 \text{ кН}$, $M_5 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$), а в самому перерізі – у точці, де з'єднується полицка і стінка двотавра, а дотичне напруження максимальне, тобто в точці 3 (див. рис. 5.47).

Дотичне напруження в точці 3 при максимальній поперечній силі $\tau_3 = 19,5 \text{ МПа}$.

Визначаємо нормальне напруження в точках 2 (3) та 5 (6):

$$s_{(2)} = s_{(3)} = s_{(5)} = s_{(6)} = \frac{M_5}{J_x} y_3.$$

Для розглянутого перерізу $y_3 = \frac{H}{2} - t = \frac{24}{2} - 0,95 = 11,05 \text{ см}$.

Звідси одержуємо:

$$s_{(2)} = s_{(3)} = s_{(5)} = s_{(6)} = \frac{40 \times 10^{-3}}{3460 \times 10^{-8}} \cdot 11,05 \times 10^{-2} = 127,7 \text{ МПа}.$$

Для побудови епюри нормальних напружень при згинальному моменті $M_5 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ визначимо найбільші нормальні напруження, які виникають у точках 1 та 7 (див. рис. 5.47):

$$\sigma_{(1)} = s_{(7)} = \frac{M_5}{W_x} = \frac{40 \times 10^{-3}}{289 \times 10^{-6}} = 138,4 \text{ МПа}.$$

Розраховуємо еквівалентне напруження в точці 3 за третьою теорією міцності:

$$s_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{127,7^2 + 4 \cdot 19,5^2} = 133,5 \text{ МПа} < [s] = 160 \text{ МПа}.$$

Задача 5.11

Виконати повну перевірку міцності балки (рис. 5.52, а), переріз якої представлений на рисунку 5.52, б.

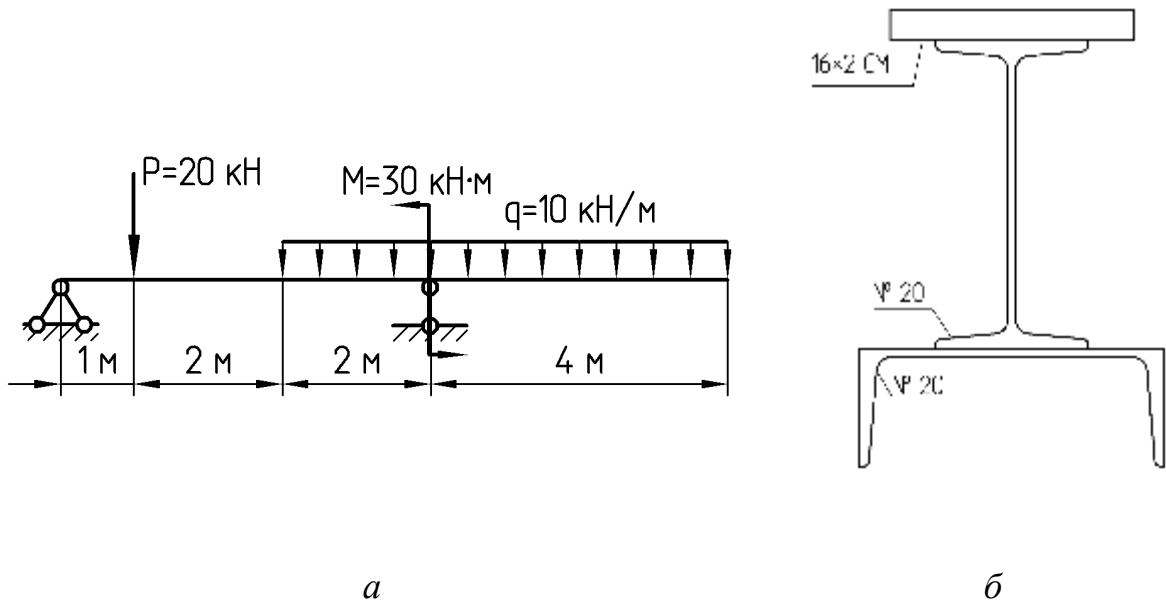


Рисунок 5.52

Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції, дорівнюючи нулю суми моментів усіх зовнішніх сил відносно точок А та В (рис. 5.53).

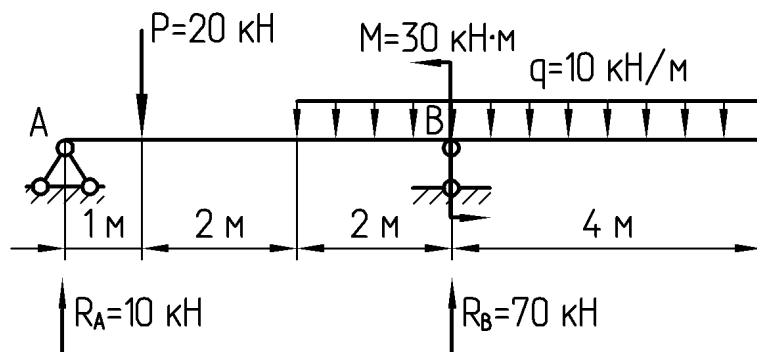


Рисунок 5.53

$$\sum M_A = 0,$$

$$M - P \cdot 1 - q \cdot 6 \cdot 6 + R_B \cdot 5 = 0,$$

$$R_B = \frac{-M + P \cdot 1 + q \cdot 6 \cdot 6}{5} = \frac{-30 + 20 \cdot 1 + 10 \cdot 6 \cdot 6}{5} = 70 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$M + P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 5 = 0,$$

$$R_A = \frac{M + P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 2}{5} = \frac{30 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 2 \cdot 1 - 10 \cdot 4 \cdot 2}{5} = 10 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння $\sum P_y = 0$:

$$-P - q \cdot 6 + R_A + R_B = 0,$$

$$-20 - 10 \cdot 6 + 10 + 70 = 0,$$

$$-70 + 70 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Визначаємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах (рис. 5.54).

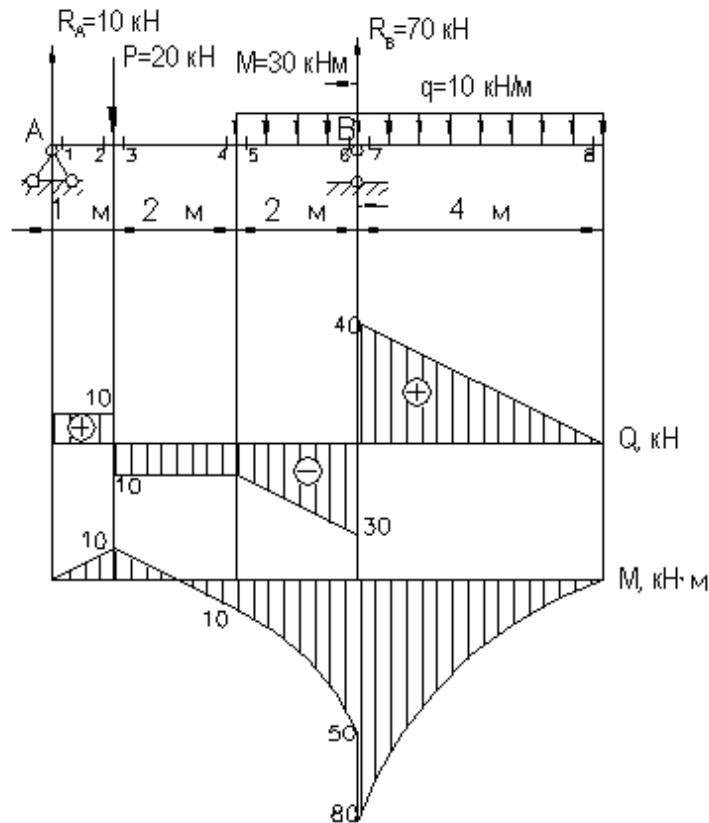


Рисунок 5.54

$$Q_1 = Q_2 = R_A = 10 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_5 = R_A - P = 10 - 20 = -10 \text{ кН},$$

$$Q_8 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_7 = q \cdot 2 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кН},$$

$$Q_6 = q \cdot 4 - R_B = 10 \cdot 4 - 70 = -30 \text{ кН},$$

$$Q_5 = q \cdot 6 - R_B = 10 \cdot 6 - 70 = -10 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M_8 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = R_A \cdot 3 - P \cdot 2 = 10 \cdot 3 - 20 \cdot 2 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = -q \cdot 4 \cdot 2 = -10 \cdot 4 \cdot 2 = -80 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = -q \cdot 4 \cdot 2 + M = -10 \cdot 4 \cdot 2 + 30 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = M_4 = -q \cdot 6 \cdot 3 + R_B \cdot 2 + M = -10 \cdot 6 \cdot 3 + 70 \cdot 2 + 30 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру за характерними перерізами (див. рис. 5.54).

3 Розглянемо переріз, поданий на рисунку 5.52, б.

Розглянутий переріз поділяємо на три прості частини – швелер 1, двотавр 2 і смуга 3 (рис. 5.55).

Із сортаменту (додаток Б) виписуємо геометричні характеристики швелера № 20:

$$\begin{aligned} H_1 = 20 \text{ см}, B_1 = 7,6 \text{ см}, d_1 = 0,52 \text{ см}, & F_1 = 23,4 \text{ см}^2, J_{x1} = 113 \text{ см}^4. \\ t_1 = 0,90 \text{ см}, z_{01} = 2,07 \text{ см}, & \end{aligned}$$

Із сортаменту (додаток А) виписуємо геометричні характеристики двотавра № 20:

$$\begin{aligned} H_2 = 20 \text{ см}, B_2 = 10 \text{ см}, & F_2 = 26,8 \text{ см}^2, J_{x2} = 1840 \text{ см}^4. \\ d_2 = 0,52 \text{ см}, t_2 = 0,84 \text{ см}, & \end{aligned}$$

Визначаємо геометричні характеристики смуги 3:

$$\begin{aligned} H_3 = 2 \text{ см}, B_3 = 16 \text{ см}, & J_{x3} = \frac{B_3 H_3^3}{12} = \frac{16 \cdot 2^3}{12} = 10,7 \text{ см}^4. \\ F_3 = H_3 B_3 = 2 \cdot 16 = 32 \text{ см}^2, & \end{aligned}$$

4 Відносно обраних початкових осей знаходимо координати центра ваги складного перерізу. Якщо фігура симетрична відносно осі Y, то центр ваги лежить на ній, $x_c = 0$.

Знаходимо значення координати y_c за формулою

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

Для розглянутого перерізу:

$$y_1 = 0 \text{ см},$$

$$y_2 = z_0 + \frac{H_2}{2} = 2,07 + \frac{20}{2} = 12,07 \text{ см},$$

$$y_3 = z_0 + H_2 + \frac{H_3}{2} = 2,07 + 20 + \frac{2}{2} = 23,07 \text{ см}.$$

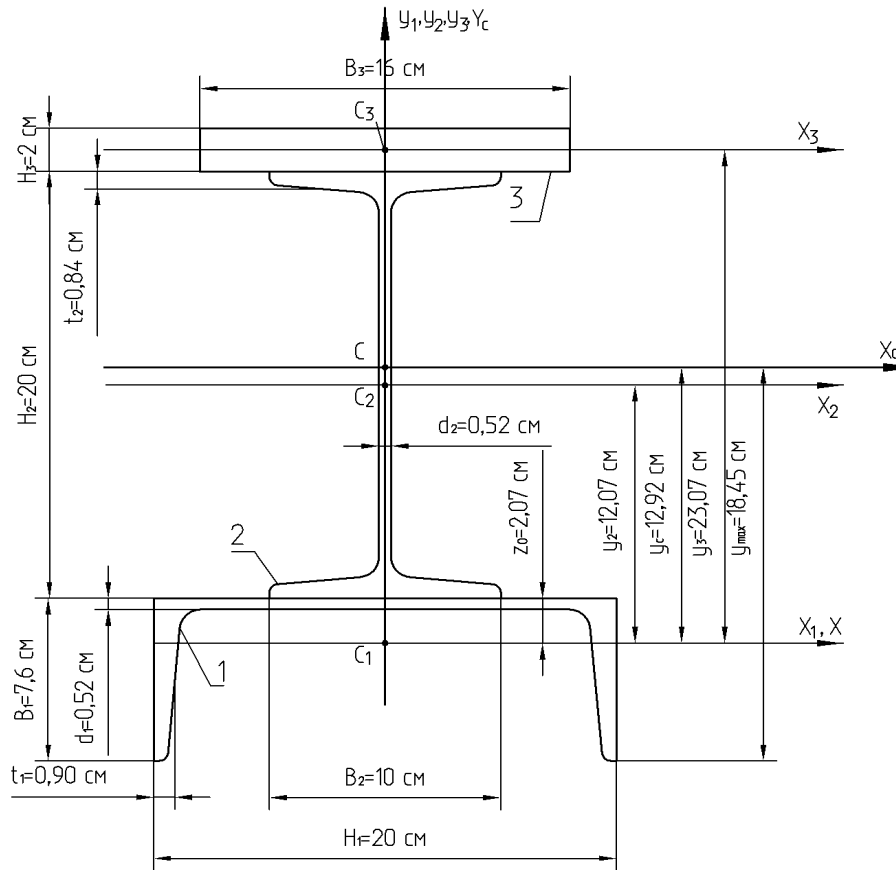


Рисунок 5.55

Звідси одержуємо:

$$y_c = \frac{12,07 \cdot 26,8 + 23,07 \cdot 32}{23,4 + 26,8 + 32} = 12,92 \text{ см}.$$

За знайденою координатою y_c наносимо положення центра ваги складного перерізу (див. рис. 5.55).

5 Визначаємо осевий момент інерції всього перерізу відносно головної центральної осі X_c за формулою

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2 + J_{x_3} + a_3^2 F_3.$$

Для розглянутого перерізу:

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 12,92 = -12,92 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 12,07 - 12,92 = -0,85 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 23,07 - 12,92 = 10,15 \text{ см}.$$

Звідси одержуємо:

$$J_{x_c} = 113 + 12,92^2 \cdot 23,4 + 1840 + 0,85^2 \cdot 26,8 + 10,7 + 10,15^2 \cdot 32 = 9186 \text{ см}^4.$$

6 Визначаємо максимальне нормальне напруження.

Умова міцності за нормальним напруженням має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_{x_c}} y_{\max} \leq [\sigma].$$

Небезпечним буде переріз, у якому діє найбільший згинальний момент (переріз 7, $M_{\max} = M_7 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}$). У самому перерізі найбільші напруження будуть у найбільш віддаленій від нейтральної лінії точці, тобто в точці 13 (рис. 5.56).

Для розглянутого перерізу:

$$y_{\max} = (B_1 - z_0) + y_c = (7,6 - 2,07) + 12,92 = 18,45 \text{ см}.$$

Звідси одержуємо:

$$\sigma_{\max} = \frac{80 \times 10^{-3}}{9186 \times 10^{-8}} \cdot 18,45 \times 10^{-2} = 160,7 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{\max} = 160,7 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 170 \text{ МПа}.$$

Отже, умова міцності за нормальними напруженнями виконується.

7 Перевіряємо міцність за дотичними напруженнями.

Умова міцності за дотичними напруженнями має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^*}{b J_x} \leq [\tau].$$

Небезпечним буде переріз, у якому діє найбільша поперечна сила (переріз 1, $Q_{\max} = Q_7 = 40 \text{ кН}$). У самому перерізі найбільші напруження будуть у точці на головній осі X, тобто в точці 6 (див. рис. 5.56).

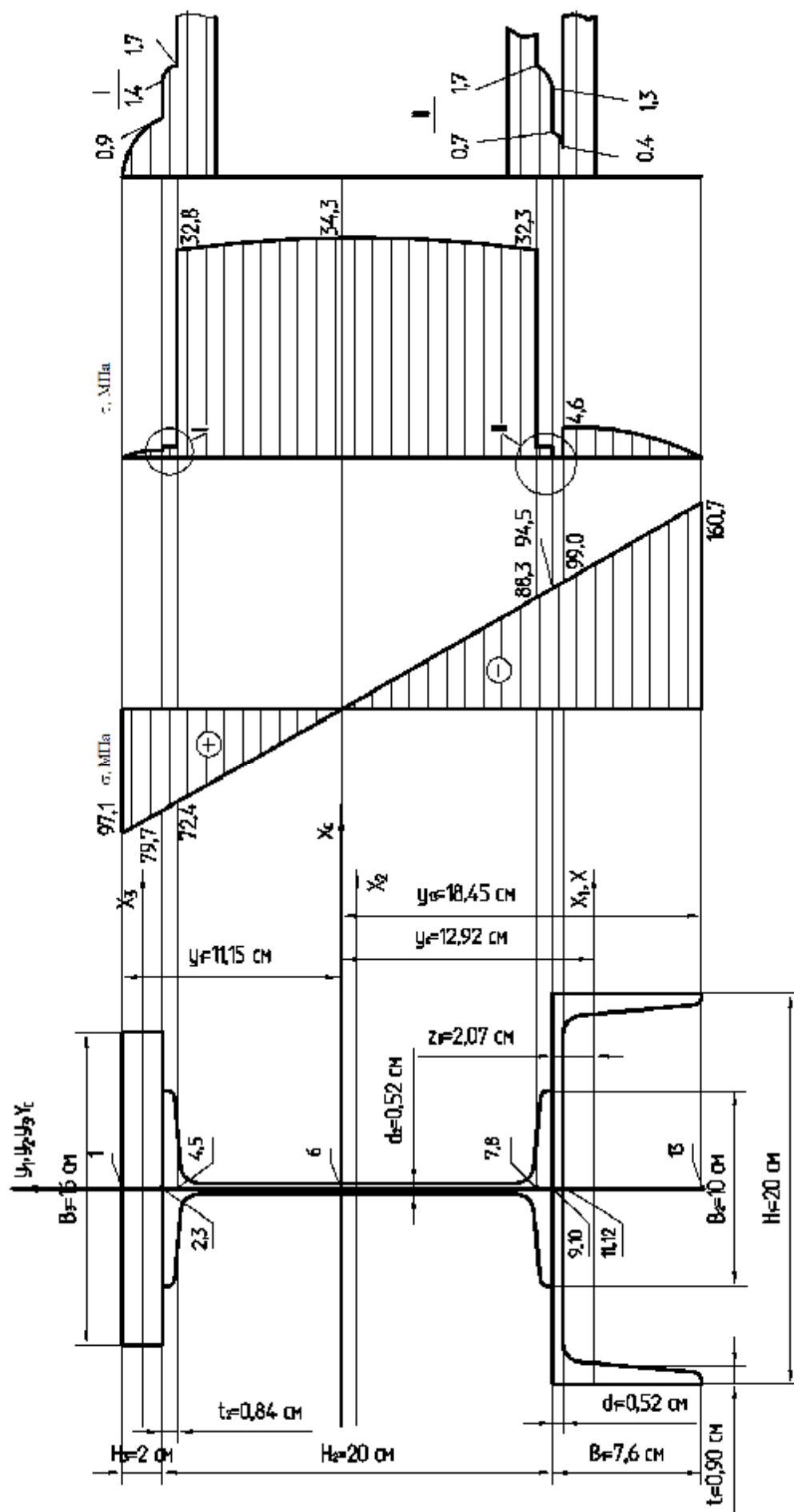


Рисунок 5.56

Для точки нейтральної лінії (точка б) ширина перерізу $b = d_2 = 0,52$ см, а статичний момент площі відсіченої частини варто взяти для половини перерізу, тобто:

$$\begin{aligned} S_x^* &= B_3 H_3 \left(y_1 - \frac{H_3}{2} \right) + B_2 t_2 \left(y_4 + \frac{t_2}{2} \right) + d_2 (y_1 - H_3 - t_2) \cdot \frac{y_1 - H_3 - t_2}{2} = \\ &= 16 \cdot 2 \cdot \left(11,15 - \frac{2}{2} \right) + 10 \cdot 0,84 \cdot \left(8,31 + \frac{0,84}{2} \right) + \\ &+ 0,52 \cdot (11,15 - 2 - 0,84) \cdot \frac{11,15 - 2 - 0,84}{2} = 409,1 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Отже, максимальне напруження

$$\tau_{\max} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 409,1 \times 10^{-6}}{0,52 \times 10^{-2} \cdot 9186 \times 10^{-8}} = 34,3 \text{ МПа}.$$

Для сталевих балок приймають: $[\tau] \approx 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 170 = 102 \text{ МПа}.$

$$\tau_{\max} = 34,3 \text{ МПа} \leq [\tau] = 102 \text{ МПа}.$$

Умова міцності за дотичними напруженнями виконується.

8 Перевіряємо переріз на спільну дію нормальних і дотичних напружень за четвертою теорією міцності:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Перевірка робиться в перерізі, де згинальний момент і поперечна сила близькі до найбільших значень, тобто в перерізі 7 ($Q_7 = Q_{\max} = 40 \text{ кН}$, $M_7 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}$).

Для визначення точки, у якій нормальні і дотичні напруження хоча і не набувають найбільших значень, але у своїй комбінації створюють найбільш не вигідне сполучення, тобто створюють найбільше еквівалентне напруження, необхідно побудувати епюри нормальних і дотичних напружень.

Для побудови епюр нормальних і дотичних напружень необхідно визначити наступні дані:

- 1) точки, у яких визначаються напруження (див. рис. 5.56);
- 2) відстань U від нейтральної лінії до точки, у якій визначається напруження;

- 3) нормальне напруження σ в довільній точці перерізу, розташованої на висоті y ($\sigma = \frac{M_7}{J_{x_c}} y$);
- 4) статичний момент площі відсіченої частини S_x^* відносно нейтральної осі тієї частини перерізу, що розташована по один бік від прямої, проведеної через дану точку;
- 5) ширину перерізу b на рівні розглянутої точки;
- 6) дотичне напруження τ в точці ($\tau = \frac{Q_7 S_x^*}{b J_x}$).

Розглянемо кожну точку окремо (див. рис. 5.56).

Точка 1:

$$y_1 = B_1 + H_2 + H_3 - y_{\max} = 7,6 + 20 + 2 - 18,45 = 11,15 \text{ см},$$

$$\sigma_{(1)} = \frac{80 \times 10^{-3}}{9186 \times 10^{-8}} \cdot 11,15 \times 10^{-2} = 97,1 \text{ МПа},$$

$$S_{x1}^* = 0 \text{ см}^3,$$

$$b_1 = B_3 = 16 \text{ см},$$

$$\tau_1 = 0 \text{ МПа}.$$

Точка 2:

$$y_2 = y_1 - H_3 = 11,15 - 2 = 9,15 \text{ см},$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{80 \times 10^{-3}}{9186 \times 10^{-8}} \cdot 9,15 \times 10^{-2} = 79,7 \text{ МПа},$$

$$S_{x2}^* = B_3 H_3 \left(y_1 - \frac{H_3}{2} \right) = 16 \cdot 2 \cdot \left(11,15 - \frac{2}{2} \right) = 324,8 \text{ см}^3,$$

$$b_2 = B_3 = 16 \text{ см},$$

$$\tau_{(2)} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 324,8 \times 10^{-6}}{16 \times 10^{-2} \cdot 9186 \times 10^{-8}} = 0,9 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{эKB } 2}^{\text{IV}} = \sqrt{79,7^2 + 3 \cdot 0,9^2} = 79,7 \text{ МПа}.$$

Точка 3:

$$y_3 = y_2 = 9,15 \text{ см}, \quad \sigma_3 = \sigma_2 = 79,7 \text{ МПа},$$

$$S_{x3}^* = S_{x2}^* = 324,8 \text{ см}^3,$$

$$b_3 = B_2 = 10 \text{ см},$$

$$\tau_{(3)} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 324,8 \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-2} \cdot 9186 \times 10^{-8}} = 1,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{эKB } 3}^{\text{IV}} = \sqrt{79,7^2 + 3 \cdot 1,4^2} = 79,7 \text{ МПа}.$$

Точка 4:

$$y_4 = y_1 - H_3 - t_2 = 11,15 - 2 - 0,84 = 8,31 \text{ см},$$

$$\sigma_{(4)} = \frac{80 \times 10^{-3}}{9186 \times 10^{-8}} \cdot 8,31 \times 10^{-2} = 72,4 \text{ МПа},$$

$$\begin{aligned} S_{x4}^* &= B_3 H_3 \left(y_1 - \frac{H_3}{2} \right) + B_2 t_2 \left(y_4 + \frac{t_2}{2} \right) = S_{x2}^* + B_2 t_2 \left(y_4 + \frac{t_2}{2} \right) = \\ &= 324,8 + 10 \cdot 0,84 \cdot \left(8,31 + \frac{0,84}{2} \right) = 391,1 \text{ см}^3, \end{aligned}$$

$$b_4 = B_2 = 10 \text{ см},$$

$$\tau_{(4)} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 391,1 \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-2} \cdot 9186 \times 10^{-8}} = 1,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{эKB } 4}^{\text{IV}} = \sqrt{72,4^2 + 3 \cdot 1,7^2} = 72,5 \text{ МПа}.$$

Точка 5:

$$y_5 = y_4 = 8,31 \text{ см}, \quad s_{(5)} = s_{(4)} = 72,4 \text{ МПа},$$

$$S_{x5}^* = S_{x4}^* = 391,1 \text{ см}^3,$$

$$b_5 = d_2 = 0,52 \text{ см},$$

$$\tau_{(5)} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 391,1 \times 10^{-6}}{0,52 \times 10^{-2} \cdot 9186 \div 10^{-8}} = 32,8 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{эKB } 5}^{\text{IV}} = \sqrt{72,4^2 + 3 \cdot 32,8^2} = 92,0 \text{ МПа}.$$

Точка 6:

$$y_6 = 0 \text{ см}, \quad \sigma_6 = 0 \text{ МПа}, \quad t_{(6)} = t_{\text{max}} = 34,3 \text{ МПа}.$$

Точка 13:

$$y_{13} = y_{\text{max}} = 18,45 \text{ см}, \quad \sigma_{(13)} = \sigma_{\text{max}} = 160,7 \text{ МПа},$$

$$S_{x13}^* = 0 \text{ см}^3,$$

$$b_{13} = 2t_1 = 2 \cdot 0,90 = 1,80 \text{ см},$$

$$t_{(13)} = 0 \text{ МПа}.$$

Точка 12:

$$y_{12} = y_{13} - (B_1 - d_1) = 18,45 - (7,6 - 0,52) = 11,37 \text{ см},$$

$$\sigma_{(12)} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{9186 \cdot 10^{-8}} \cdot 11,37 \cdot 10^{-2} = 99,0 \text{ МПа},$$

$$S_{x12}^* = 2t_1(B_1 - d_1) \left(y_{12} + \frac{B_1 - d_1}{2} \right) =$$

$$= 2 \cdot 0,90 \cdot (7,6 - 0,52) \cdot \left(11,37 + \frac{7,6 - 0,52}{2} \right) = 190,0 \text{ см}^3,$$

$$b_{12} = 2t_1 = 2 \cdot 0,90 = 1,8 \text{ см},$$

$$\tau_{(12)} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 190,0 \times 10^{-6}}{1,8 \times 10^{-2} \cdot 9186 \times 10^{-8}} = 4,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{эKB } 12}^{\text{IV}} = \sqrt{99,0^2 + 3 \cdot 4,6^2} = 99,3 \text{ МПа}.$$

Точка 11:

$$y_{11} = y_{12} = 11,37 \text{ см}, S_{(11)} = S_{(12)} = 99,0 \text{ МПа},$$

$$S_{x11}^* = S_{x12}^* = 190,0 \text{ см}^3,$$

$$b_{11} = H_1 = 20 \text{ см},$$

$$\tau_{(11)} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 190,0 \times 10^{-6}}{20 \times 10^{-2} \cdot 9186 \times 10^{-8}} = 0,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{эKB } 11}^{\text{IV}} = \sqrt{99,0^2 + 3 \cdot 0,4^2} = 99,0 \text{ МПа}.$$

Точка 10:

$$y_{10} = y_{13} - B_1 = 18,45 - 7,6 = 10,85 \text{ см},$$

$$\sigma_{(10)} = \frac{80 \times 10^{-3}}{9186 \times 10^{-8}} \cdot 10,85 \times 10^{-2} = 94,5 \text{ МПа},$$

$$S_{x10}^* = S_{x12}^* + H_1 d_1 \left(y_{10} + \frac{d_1}{2} \right) = 190,0 + 20 \cdot 0,52 \cdot \left(10,85 + \frac{0,52}{2} \right) = 305,5 \text{ см}^3,$$

$$b_{10} = H_1 = 20 \text{ см},$$

$$\tau_{(10)} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 305,5 \times 10^{-6}}{20 \times 10^{-2} \cdot 9186 \times 10^{-8}} = 0,7 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_{\text{эKB } 10}^{\text{IV}} = \sqrt{94,5^2 + 3 \cdot 0,7^2} = 94,5 \text{ МПа} .$$

Точка 9:

$$y_9 = y_{10} = 10,85 \text{ см} , \quad S_{(9)} = S_{(10)} = 94,5 \text{ МПа} ,$$

$$S_{x \ 9}^* = S_{x \ 10}^* = 305,5 \text{ см}^3 ,$$

$$b_9 = B_2 = 10 \text{ см} ,$$

$$\tau_{(9)} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 305,5 \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-2} \cdot 9186 \times 10^{-8}} = 1,3 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_{\text{эKB } 9}^{\text{IV}} = \sqrt{94,5^2 + 3 \cdot 1,3^2} = 94,5 \text{ МПа} .$$

Точка 8:

$$y_8 = y_{13} - B_1 - t_2 = 18,45 - 7,6 - 0,84 = 10,01 \text{ см} ,$$

$$\sigma_{(8)} = \frac{80 \times 10^{-3}}{9186 \times 10^{-8}} \cdot 10,01 \times 10^{-2} = 88,3 \text{ МПа} ,$$

$$S_{x \ 8}^* = S_{x \ 10}^* + B_2 t_2 \left(y_8 - \frac{t_2}{2} \right) = 305,5 + 10 \cdot 0,84 \cdot \left(10,01 - \frac{0,84}{2} \right) = 386,1 \text{ см}^3 ,$$

$$b_8 = B_2 = 10 \text{ см} ,$$

$$\tau_{(8)} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 386,1 \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-2} \cdot 9186 \times 10^{-8}} = 1,7 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_{\text{эKB } 8}^{\text{IV}} = \sqrt{88,3^2 + 3 \cdot 1,7^2} = 88,3 \text{ МПа} .$$

Точка 7:

$$y_7 = y_8 = 10,01 \text{ см} , \quad S_{(7)} = S_{(8)} = 88,3 \text{ МПа} ,$$

$$S_{x \ 7}^* = S_{x \ 8}^* = 386,1 \text{ см}^3 ,$$

$$b_7 = d_2 = 0,52 \text{ см} ,$$

$$\tau_{(7)} = \frac{40 \times 10^{-3} \cdot 386,1 \times 10^{-6}}{0,52 \times 10^{-2} \cdot 10593 \times 10^{-8}} = 32,3 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_{\text{эKB } 8}^{\text{IV}} = \sqrt{88,3^2 + 3 \cdot 32,3^2} = 104,5 \text{ МПа} .$$

Отримані дані заносяться до таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Дані для побудови епюр нормальних і дотичних напружень

Номер точки	у, мм	σ , МПа	S_x^* , м^3	б, мм	τ , МПа	$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}}$, МПа
1	11,15	97,1	0	16	0	–
2	9,15	79,7	324,8	16	0,9	79,7
3	9,15	79,7	324,8	10	1,4	79,7
4	8,31	72,4	391,1	10	1,7	72,5
5	8,31	72,4	391,1	0,52	32,8	92,0
6	0	0	409,1	0,52	34,3	–
7	10,01	88,3	386,1	0,52	32,3	104,5
8	10,01	88,3	386,1	10	1,7	88,3
9	10,85	94,5	305,5	10	1,3	94,5
10	10,85	94,5	305,5	20	0,7	94,5
11	11,37	99,0	190,0	20	0,4	99,0
12	11,37	99,0	190,0	1,8	4,6	99,3
13	18,45	160,7	0	1,8	0	–

За отриманими даними (див. табл. 5.1) будуємо епюри нормальних та дотичних напружень.

Якщо у всіх розглянутих точках $\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} < [\sigma] = 170 \text{ МПа}$ (див. табл. 5.1), то умова міцності за четвертою теорією міцності виконується для всіх розглянутих точок.

6 КРУЧЕННЯ

6.1 Основні положення теорії

Кручення – вид деформації, що характеризується взаємним поворотом поперечних перерізів бруса під впливом моментів (пари сил), що діють у цих перерізах (рис. 6.1).

При крученні в кожному перерізі бруса діє тільки один внутрішній силовий фактор – крутний момент $M_z (M_{\text{кр}})$.

Крутний момент дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, що скручують, прикладених по один бік від перерізу.

Крутний момент вважається додатним, якщо при погляді з боку зовнішньої нормалі до перерізу він буде спрямований проти годинникової стрілки.

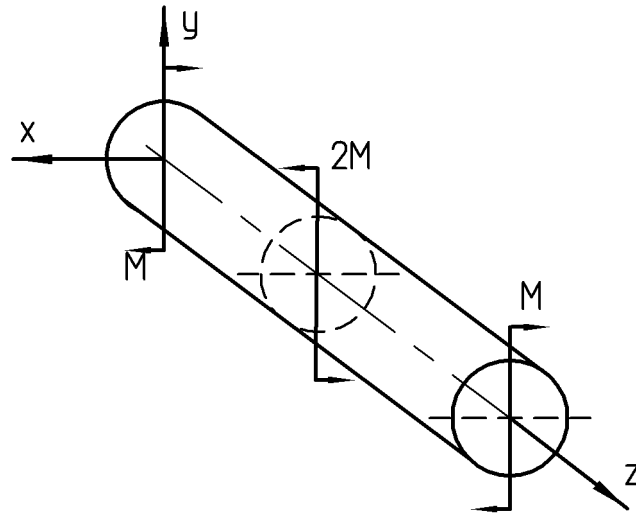


Рисунок 6.1

При розрахунку валів часто буває задана передана потужність K у кіловатах та частота обертання n в обертах за хвилину. При цьому крутний момент може бути визначений таким чином:

$$M_{кр} = 9,55 \frac{K}{n}. \quad (6.1)$$

При крученні в кожному перерізі виникають дотичні напруження, які в довільній точці перерізу визначаються за формулою

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}} \rho, \quad (6.2)$$

де $M_{кр}$ – крутний момент у перерізі бруса;

ρ – відстань від центра перерізу до точки, у якій визначається напруження;

J_{ρ} – полярний момент інерції перерізу.

Максимальні дотичні напруження виникають на контурі перерізу:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}, \quad (6.3)$$

де W_{ρ} – полярний момент опору перерізу.

Формули для визначення полярного моменту інерції і полярного моменту опору для круглого і кільцевого перерізів наведені в таблиці 6.1.

Якщо крутний момент та діаметр перерізу на ділянці бруса довжиною l є постійними величинами, то кут закручування

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_{\rho}}, \quad (6.4)$$

де GJ_{ρ} – жорсткість стрижня при крученні.

У випадку постійного крутного моменту лише в межах окремих ділянок бруса або східчастої зміни його поперечного перерізу формулу (6.4) можна застосовувати тільки по ділянках.

Міцність бруса, що працює на кручення, вважають забезпеченою, якщо найбільші дотичні напруження, що виникають у його небезпечному поперечному перерізі, не перевищують допустимих значень. Таким чином, умова міцності має такий вигляд:

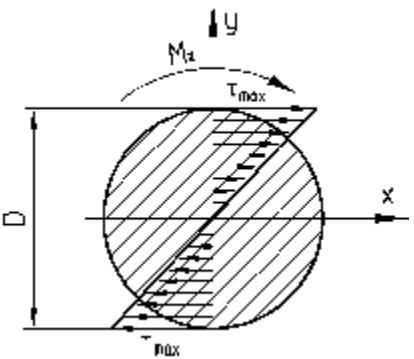
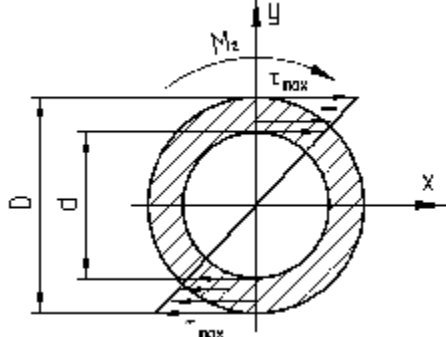
$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (6.5)$$

де $[\tau]$ – допустиме напруження при крученні.

Крім розрахунку на міцність вали розраховують і на жорсткість, обмежуючи відносні кути закручування деякою допустимою величиною $[\theta]$:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{GJ_{\rho}} \leq [\theta]. \quad (6.6)$$

Таблиця 6.1 – Характеристики перерізів при крученні

Форма перерізу	J_{ρ}	W_{ρ}
	$\frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4$	$\frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3$
	$\frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$ $\approx 0,1D^4 (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$ $\approx 0,2D^3 (1 - \alpha^4)$
		$\alpha = \frac{d}{D}$

6.2 Розрахунки на кручення статично визначуваних систем

Задача 6.1

Східчастий сталевий брус круглого поперечного перерізу жорстко закріплений одним кінцем та навантажений, як показано на рисунку 6.2. Побудувати епюри крутних моментів, максимальних дотичних напружень. Визначити кути повороту поперечних перерізів. Перевірити міцність бруса при $[\tau] = 60 \text{ МПа}$.

Розв'язання

1 Епюру крутних моментів будуємо, починаючи від вільного (лівого) кінця, що дозволяє не визначати реактивний момент у затисненні.

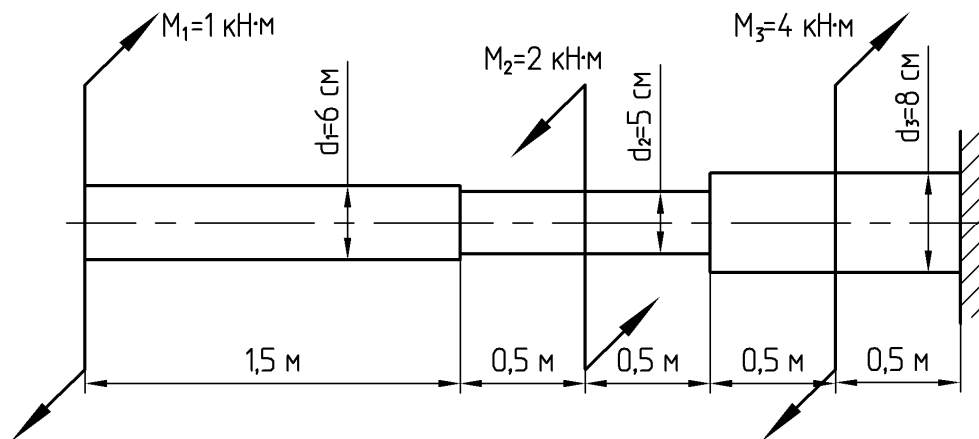


Рисунок 6.2

Перерізами, де прикладені зовнішні моменти, стрижень поділяється на три ділянки: I, II, III (рис. 6.3, а).

Провівши довільний переріз $a-a$ на ділянці I та складаючи для залишеної частини (рис. 6.3, б) рівняння рівноваги $\sum M_z = 0$, одержуємо:

$$M_{\text{кр I}} = -M_1 = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Крутний момент $M_{\text{кр I}}$ зберігає постійне значення у всіх перерізах ділянки I.

Для інших ділянок знаходимо крутні моменти як алгебраїчні суми зовнішніх моментів, прикладених по один бік (у нашому випадку – ліву) від перерізу. Відсічені частини окремо не зображуємо.

Ділянка II:

$$M_{кр II} = -M_1 + M_2 = -1 + 2 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

ділянка III:

$$M_{кр III} = -M_1 + M_2 - M_3 = -1 + 2 - 4 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

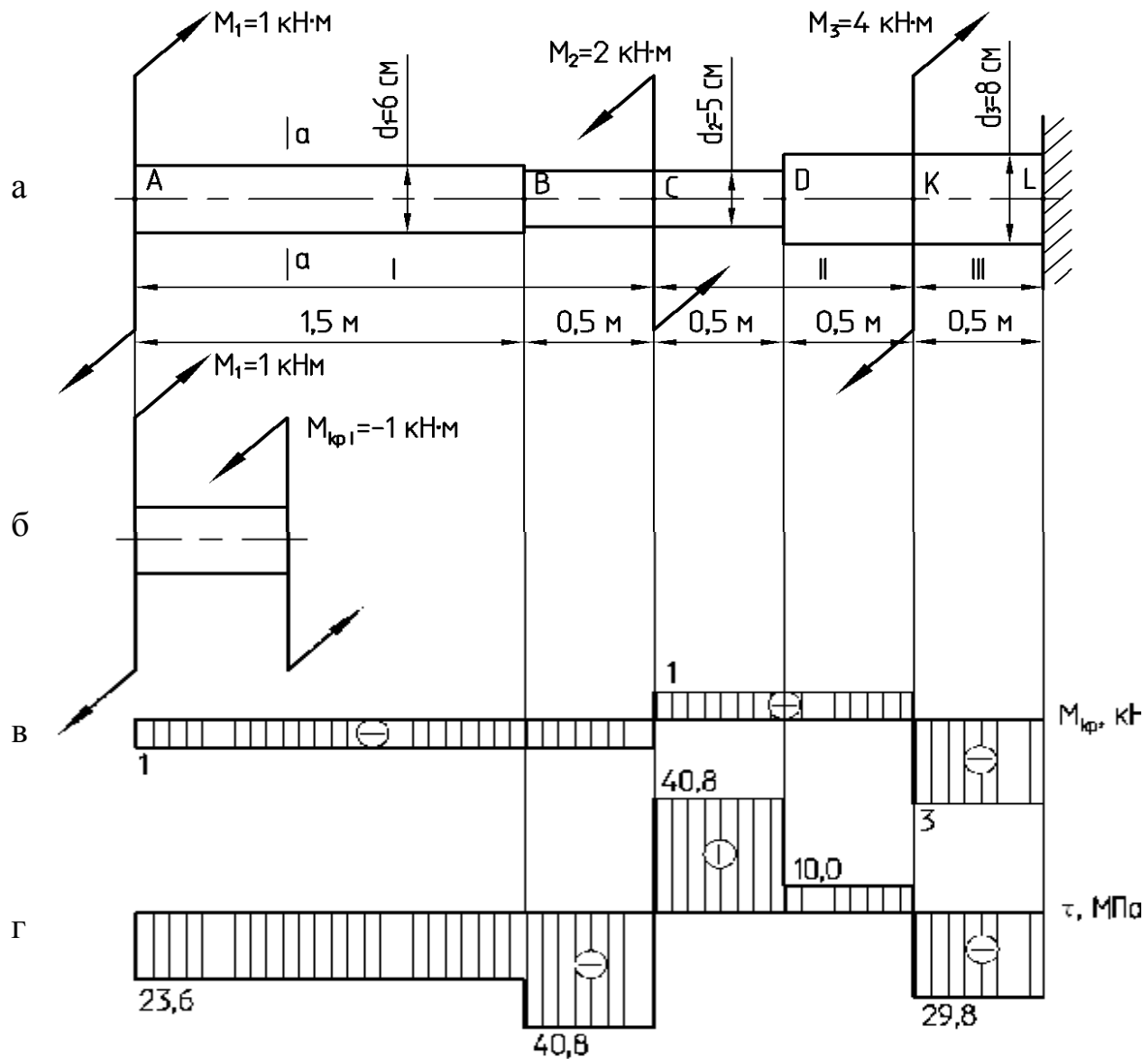


Рисунок 6.3

За отриманим даними будуюмо епюру крутних моментів. Епюра подана на рисунку 6.3, в.

2 Для знаходження небезпечного перерізу будуюмо епюру максимальних дотичних напружень, користуючись формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}.$$

Визначимо полярні моменти опору для кожного діаметра:

$$W_{\rho 1} = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 6^3}{16} = 42,4 \text{ см}^3,$$

$$W_{\rho 2} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{16} = 24,5 \text{ см}^3,$$

$$W_{\rho 3} = \frac{\pi d_3^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 8^3}{16} = 100,5 \text{ см}^3.$$

Визначимо дотичні напруження для кожної ділянки:

– ділянка АВ ($M_{\text{кр I}} = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 1} = 42,4 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max \text{ AB}} = \frac{M_{\text{кр I}}}{W_{\rho 1}} = \frac{-1 \times 10^{-3}}{42,4 \times 10^{-6}} = -23,6 \text{ МПа};$$

– ділянка ВС ($M_{\text{кр I}} = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 2} = 24,5 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max \text{ BC}} = \frac{M_{\text{кр I}}}{W_{\rho 2}} = \frac{-1 \times 10^{-3}}{24,5 \times 10^{-6}} = -40,8 \text{ МПа};$$

– ділянка CD ($M_{\text{кр II}} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 2} = 24,5 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max \text{ CD}} = \frac{M_{\text{кр II}}}{W_{\rho 2}} = \frac{1 \times 10^{-3}}{24,5 \times 10^{-6}} = 40,8 \text{ МПа};$$

– ділянка DK ($M_{\text{кр II}} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 3} = 100,5 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max \text{ DK}} = \frac{M_{\text{кр II}}}{W_{\rho 3}} = \frac{1 \times 10^{-3}}{100,5 \times 10^{-6}} = 10 \text{ МПа};$$

– ділянка KL ($M_{\text{кр III}} = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 3} = 100,5 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max \text{ KL}} = \frac{M_{\text{кр III}}}{W_{\rho 3}} = \frac{-3 \times 10^{-3}}{100,5 \times 10^{-6}} = -29,8 \text{ МПа}.$$

За знайденими значеннями дотичних напружень будуюмо епюру максимальних дотичних напружень (рис. 6.3, г).

Небезпечними виявилися поперечні перерізи ділянок ВС та СД. Таким чином, небезпечними виявилися не ті перерізи, у яких крутний момент максимальний. Умова міцності $\tau_{\max} \leq [\tau]$ виконується.

3 Визначимо кути повороту поперечних перерізів, використовуючи формулу

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GJ_{\rho}}$$

Визначимо полярні моменти інерції для кожного діаметра:

$$J_{\rho 1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} = 127 \text{ см}^4,$$

$$J_{\rho 2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,3 \text{ см}^4,$$

$$J_{\rho 3} = \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{32} = 402 \text{ см}^4.$$

Визначаємо кути повороту, починаючи із затисненого кінця.

Визначаємо кут повороту перерізу К, який дорівнює куту закручування ділянки КЛ:

$$j_{\text{KL}} = \frac{M_{\text{кр III}} \cdot 0,5}{GJ_{\rho 3}} = \frac{-3 \times 10^{-3} \cdot 0,5}{8 \times 10^4 \cdot 402 \times 10^{-8}} = -4,66 \times 10^{-3} \text{ рад}.$$

Визначаємо кут повороту перерізу D відносно перерізу К:

$$j_{\text{DK}} = \frac{M_{\text{кр II}} \cdot 0,5}{GJ_{\rho 3}} = \frac{1 \times 10^{-3} \cdot 0,5}{8 \times 10^4 \cdot 402 \times 10^{-8}} = 1,55 \times 10^{-3} \text{ рад}.$$

Абсолютний кут повороту перерізу D (відносно закладення) дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування ділянок КЛ та ДК:

$$j_{\text{D}} = j_{\text{KL}} + j_{\text{DK}} = (-4,66 + 1,55) \times 10^{-3} = -3,11 \times 10^{-3} \text{ рад}.$$

Визначаємо кут повороту перерізу С відносно перерізу D:

$$j_{\text{CD}} = \frac{M_{\text{кр II}} \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{1 \times 10^{-3} \cdot 0,5}{8 \times 10^4 \cdot 61,3 \times 10^{-8}} = 10,20 \times 10^{-3} \text{ рад}.$$

Абсолютний кут повороту перерізу С (відносно закладення) дорівнює алгебраїчний сумі кутів закручування ділянок KL, DK і CD:

$$j_C = j_{KL} + j_{DK} + j_{CD} = (-4,66 + 1,55 + 10,20) \times 10^{-3} = 7,09 \times 10^{-3} \text{ рад.}$$

Визначаємо кут повороту перерізу В відносно перерізу С:

$$j_{BC} = \frac{M_{кпI} \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{-1 \times 10^{-3} \cdot 0,5}{8 \times 10^4 \cdot 61,3 \times 10^{-8}} = -10,20 \times 10^{-3} \text{ рад.}$$

Абсолютний кут повороту перерізу В (відносно закладення) дорівнює алгебраїчний сумі кутів закручування ділянок KL, DK, CD і BC:

$$j_B = j_{KL} + j_{DK} + j_{CD} + j_{BC} = (-4,66 + 1,55 + 10,20 - 10,20) \times 10^{-3} = -3,11 \times 10^{-3} \text{ рад.}$$

Визначаємо кут повороту перерізу А відносно перерізу В:

$$j_{AB} = \frac{M_{кпI} \cdot 1,5}{GJ_{\rho 1}} = \frac{-1 \times 10^{-3} \cdot 1,5}{8 \times 10^4 \cdot 127 \times 10^{-8}} = -14,76 \times 10^{-3} \text{ рад.}$$

Абсолютний кут повороту перерізу А (відносно закладення) дорівнює алгебраїчний сумі кутів закручування ділянок KL, DK, CD, BC та АВ:

$$j_A = j_{KL} + j_{DK} + j_{CD} + j_{BC} + j_{AB} = (-4,66 + 1,55 + 10,20 - 10,20 - 14,76) \times 10^{-3} = -17,87 \times 10^{-3} \text{ рад.}$$

Задача 6.2

Визначити з розрахунків на міцність та жорсткість необхідні розміри поперечного перерізу вала (рис. 6.4) у двох варіантах: а) переріз – круг, б) переріз – кільце з відношенням внутрішнього діаметра до зовнішнього $\alpha = 0,7$. Переріз вала вважати за всією довжиною постійним. Прийняти: $[\tau] = 25 \text{ МПа}$ і $[\theta] = 5,3 \times 10^{-3} \text{ рад/м}$. Вал обертається із частотою обертання $n = 220 \text{ об/хв}$. Передана потужність має наступні значення: $K_1 = 48 \text{ кВт}$, $K_2 = 22 \text{ кВт}$, $K_3 = 14 \text{ кВт}$, $K_4 = 12 \text{ кВт}$.

Розв'язання

1 Моменти, передані кожним зі шківів (значення крутних моментів), визначаємо за формулою

$$M_{kp} = 9,55 \frac{K}{n}.$$

Отже:

$$M_1 = 9,55 \frac{K_1}{n} = 9,55 \cdot \frac{48}{220} = 2,09 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = 9,55 \frac{K_2}{n} = 9,55 \cdot \frac{22}{220} = 0,96 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = 9,55 \frac{K_3}{n} = 9,55 \cdot \frac{14}{220} = 0,61 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = 9,55 \frac{K_4}{n} = 9,55 \cdot \frac{12}{220} = 0,52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

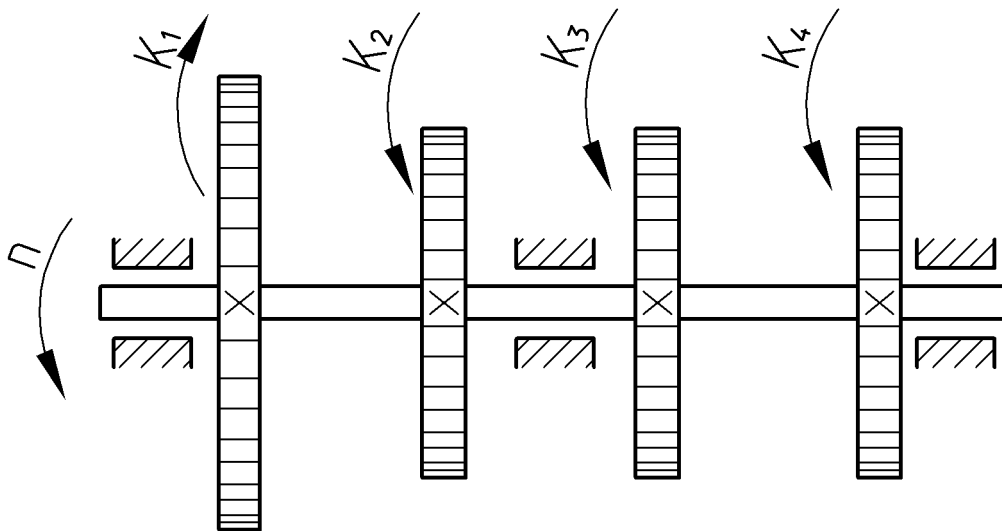


Рисунок 6.4

2 Будуємо епюру крутних моментів.

Епюру крутних моментів будуємо, починаючи від лівого кінця. Перерізами, де прикладені зовнішні моменти, стрижень поділяється на три ділянки: I, II, III (рис. 6.5). Визначимо крутні моменти на кожній ділянці:

ділянка I:

$$M_{kp I} = M_1 = 2,09 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

ділянка II:

$$M_{kp II} = M_1 - M_2 = 2,09 - 0,96 = 1,13 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

ділянка III:

$$M_{kp III} = M_1 - M_2 - M_3 = 2,09 - 0,96 - 0,61 = 0,52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За отриманими даними будуюмо епюру крутних моментів (див. рис. 6.5).

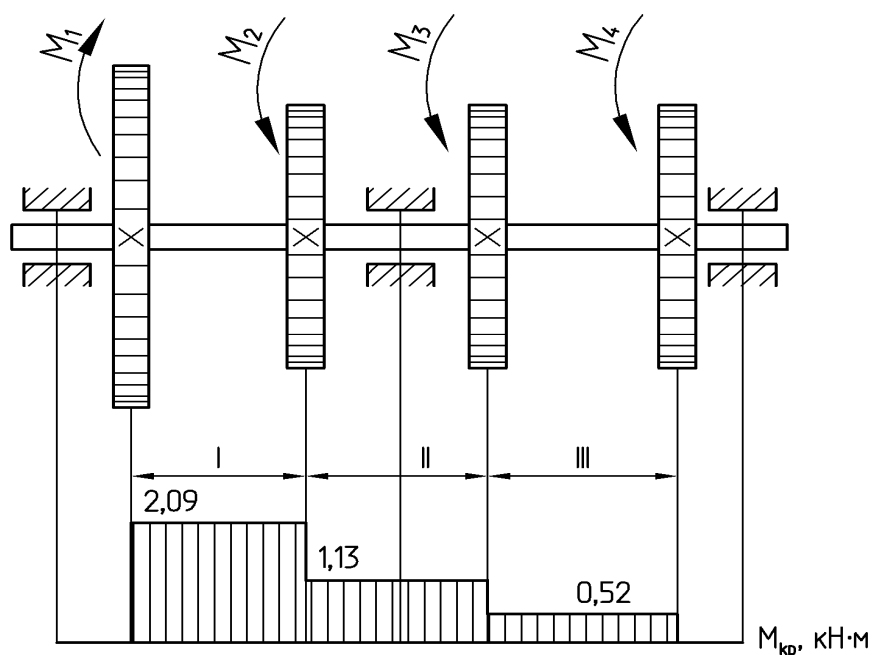


Рисунок 6.5

3 Визначаємо необхідні розміри поперечного перерізу вала.

Визначаємо необхідний полярний момент опору перерізу вала з розрахунку на міцність:

Звідси

$$W_p \geq \frac{2,09 \times 10^{-3}}{25} \times 10^6 = 83,6 \text{ см}^3.$$

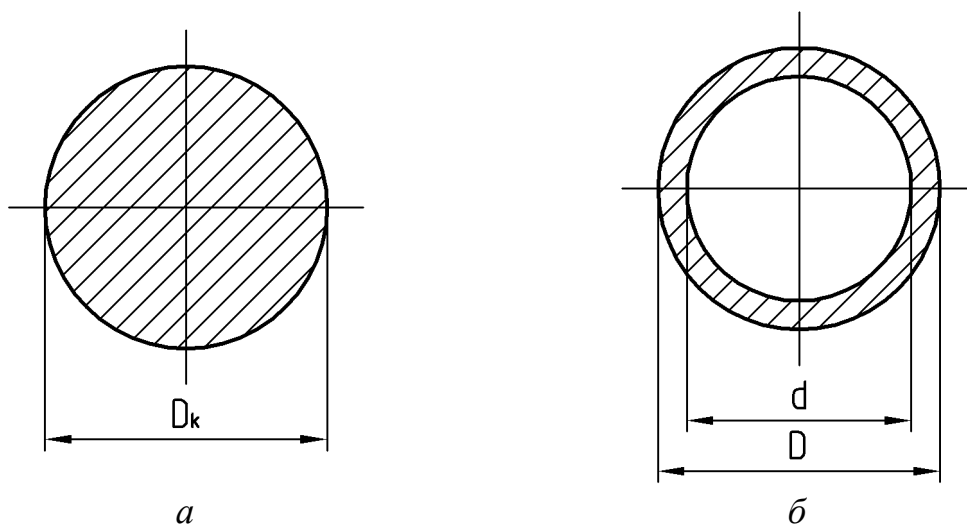


Рисунок 6.6

Діаметр вала круглого перерізу (рис. 6.6, а):

$$D_k = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 83,6}{3,14}} = 7,52 \text{ см.}$$

Зовнішній діаметр вала кільцевого перерізу (рис. 6.6, б):

$$D = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi(1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 83,6}{3,14(1-0,7^4)}} = 8,25 \text{ см.}$$

Визначаємо необхідний полярний момент інерції перерізу вала з розрахунку на жорсткість:

$$J_p \geq \frac{M_{kp \max}}{G[\theta]}.$$

Звідси

$$J_p \geq \frac{2,09 \times 10^{-3}}{8 \times 10^4 \cdot 5,3 \times 10^{-3}} \times 10^8 = 493 \text{ см}^4.$$

Діаметр вала круглого перерізу:

$$D_k = \sqrt[4]{\frac{32J_p}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 493}{3,14}} = 8,42 \text{ см.}$$

Зовнішній діаметр вала кільцевого перерізу:

$$D = \sqrt[4]{\frac{16W_p}{\pi(1-\alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{16 \cdot 493}{3,14(1-0,7^4)}} = 9,02 \text{ см.}$$

Необхідні розміри перерізу з розрахунку на жорсткість більше, ніж з розрахунку на міцність, тому їх і приймаємо в якості остаточних з округленням (округляємо в більшу сторону до діаметра, кратного 5 мм), тобто $D_k = 8,5 \text{ см}$, $D = 9,5 \text{ см}$.

6.3 Розрахунки на кручення статично не визначуваних систем

Задача 6.3

Сталевий стрижень круглого поперечного перерізу навантажений парами сил (рис. 6.7). Визначити діаметр поперечного перерізу стрижня, якщо $d/D = 0,5$, побудувати епюру максимальних дотичних напружень, прийнявши допустиме напруження $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.

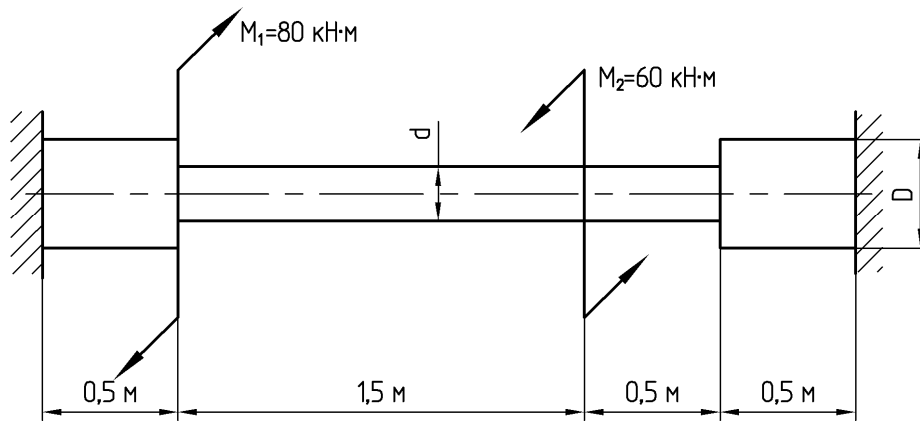


Рисунок 6.7

Розв'язання

1 Визначаємо ступінь статичної невизначуваності системи. Звільняємо стрижень від зв'язків, заміняємо їхніми реактивними моментами в закладеннях – M_A і M_B (рис. 6.8, б).

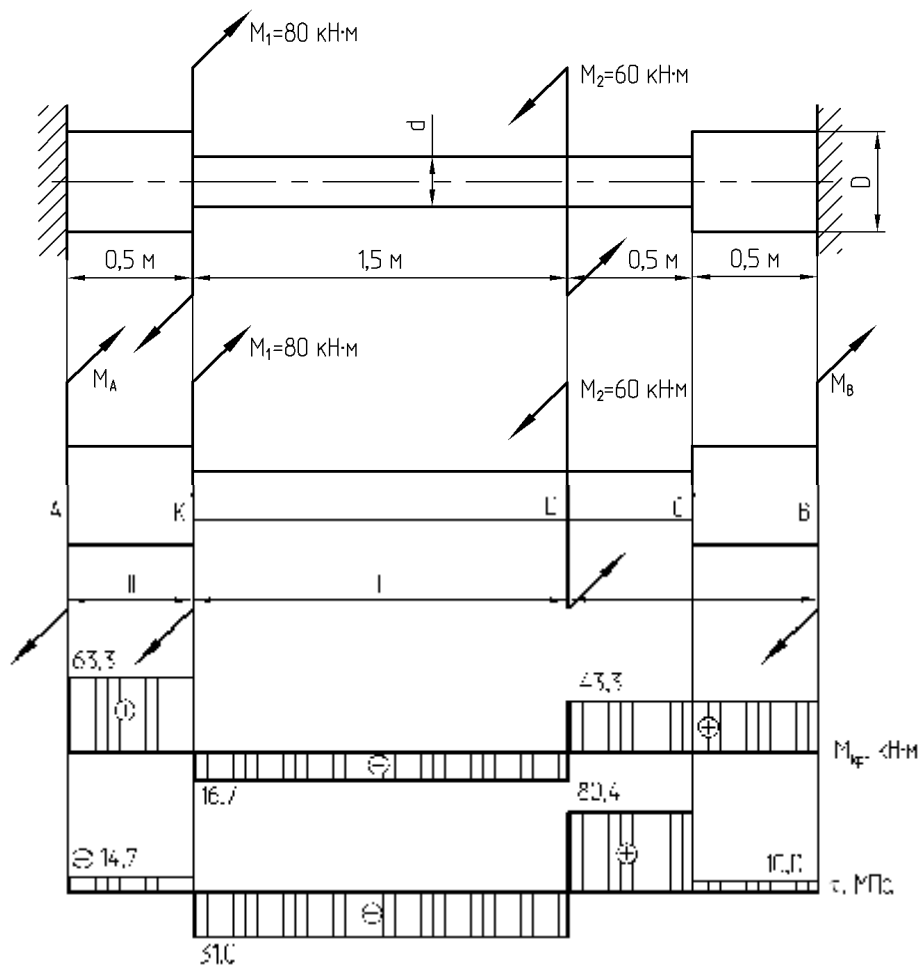


Рисунок 6.8

Умовою рівноваги стрижня є тільки одне рівняння крутних моментів $\sum M_z = 0$. Складаємо рівняння рівноваги стрижня, взявши суму моментів, прикладених до стрижня відносно його осі:

$$M_A + M_1 - M_2 + M_B = 0,$$

$$M_A + 80 - 60 + M_B = 0,$$

$$M_A + M_B = -20.$$

Як видно, рівняння містить два невідомих моменти. Задача є один раз статично не визначуваною.

2 Перерізами, де прикладені зовнішні моменти, стрижень поділяється на три ділянки: I, II, III. Визначимо значення крутних моментів у перерізах стрижня, розглядаючи відсічені праві частини:

ділянка I:

$$M_{кр I} = M_B;$$

ділянка II:

$$M_{кр II} = M_B - M_2 = M_B - 60;$$

ділянка III:

$$M_{кр III} = M_B - M_2 + M_1 = M_B - 60 + 80 = M_B + 20.$$

3 Розглянемо геометричну сторону задачі.

Умови деформації стрижня полягають у тому, що кут закручування кінцевих перерізів A і B дорівнює нулю, тобто $\varphi_A = \varphi_B = 0$.

4 Розглянемо фізичну сторону задачі.

Кут закручування перерізу A або перерізу B визначається як сума кутів закручування окремих ділянок стрижня. Виразимо в рівнянні спільності деформації абсолютні кути закручування ділянок стрижня за формулою закону Гука при крученні

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_\rho}.$$

Визначаємо кути закручування на кожній ділянці:

ділянка BC:

$$\varphi_{BC} = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho I}};$$

ділянка CD:

$$\varphi_{CD} = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}};$$

ділянка DK:

$$\varphi_{DK} = \frac{(M_B - M_2) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}};$$

ділянка AK:

$$\varphi_{AK} = \frac{(M_B - M_2 + M_1) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = \frac{(M_B - 60 + 80) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}},$$

де $J_{\rho 1}$, $J_{\rho 2}$ – полярні моменти інерції поперечних перерізів вала діаметром D і d відповідно.

Якщо за умовою $d/D = 0,5$, то

$$J_{\rho 1} = \frac{\pi D^4}{32},$$

$$J_{\rho 2} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (0,5D)^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} \cdot 0,5^4 = 0,5^4 \cdot J_{\rho 1}.$$

$$\varphi_a = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} + \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} + \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = 0.$$

З урахуванням співвідношення між $J_{\rho 1}$ і $J_{\rho 2}$ вираз для φ_a запишеться так:

$$\varphi_a = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} + \frac{M_B \cdot 0,5}{G \cdot 0,5^4 J_{\rho 1}} + \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{G \cdot 0,5^4 J_{\rho 1}} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = 0.$$

Якщо $1/GJ_{\rho 1} \neq 0$, цей співмножник можна скоротити, і рівняння запишеться таким чином:

$$M_B \cdot 0,5 + \frac{M_B \cdot 0,5}{0,5^4} + \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{0,5^4} + (M_B + 20) \cdot 0,5 = 0,$$

$$0,5M_B + 8M_B - 1440 + 24M_B + 0,5M_B + 10 = 0,$$

$$33M_B = 1430,$$

$$M_B = 43,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отже,

$$M_A = -20 - M_B = -20 - 43,3 = -63,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Визначаємо величини крутних моментів на ділянках стрижня:
ділянка I:

$$M_{\text{кр I}} = M_B = 43,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

ділянка II:

$$M_{\text{кр II}} = M_B - M_2 = M_B - 60 = 43,3 - 60 = -16,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

ділянка III:

$$M_{\text{кр III}} = M_B - M_2 + M_1 = M_B - 60 + 80 = M_B + 20 = 43,3 + 20 = 63,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За отриманими значеннями будемо епюру крутних моментів (рис. 6.8, в).

6 Діаметр стрижня визначимо з умови міцності стрижня при крутінні:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр max}}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

Найбільша величина крутного моменту $M_{\text{кр max}} = 58,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ на ділянці стрижня АК більшого діаметра, для якого полярний момент опору визначається за формулою

$$W_{\rho 1} = \frac{\pi D^3}{16}.$$

Звідси

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 M_{\text{кр max}}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 63,3 \times 10^{-3}}{3,14 \cdot 80}} \times 10^2 = 15,9 \text{ см}.$$

Отже,

$$d = D \cdot 0,5 = 15,9 \cdot 0,5 = 7,95 \text{ см}.$$

Найбільша величина крутного моменту $M_{\text{кр max}} = 43,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ на ділянці стрижня CD меншого діаметра, для якого полярний момент інерції визначається за формулою

$$W_{\rho 2} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Звідси

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{kp \max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 43,3 \times 10^{-3}}{3,14 \cdot 80}} \times 10^2 = 14,0 \text{ см}.$$

Отже,

$$D = \frac{d}{0,5} = \frac{14}{0,5} = 28,0 \text{ см}.$$

Приймаємо: $d = 14,0 \text{ см}$, $D = 28,0 \text{ см}$.

7 Будуємо епюру максимальних дотичних напружень, користуючись формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{W_{\rho}}.$$

Визначимо полярні моменти опору для кожного діаметра:

$$W_{\rho 1} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 28,0^3}{16} = 4308 \text{ см}^3,$$

$$W_{\rho 2} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 14,0^3}{16} = 538,5 \text{ см}^3.$$

Визначимо дотичні напруження для кожної ділянки:

ділянка BC ($M_{kp I} = 43,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 1} = 4308 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max BC} = \frac{M_{kp I}}{W_{\rho 1}} = \frac{43,3 \times 10^{-3}}{4308 \times 10^{-6}} = 10,0 \text{ МПа};$$

ділянка CD ($M_{kp I} = 43,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 2} = 538,5 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max CD} = \frac{M_{kp I}}{W_{\rho 2}} = \frac{43,3 \times 10^{-3}}{538,5 \times 10^{-6}} = 80,4 \text{ МПа};$$

ділянка DK ($M_{kp II} = -16,7 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 2} = 538,5 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max DK} = \frac{M_{kp II}}{W_{\rho 2}} = \frac{-16,7 \times 10^{-3}}{538,5 \times 10^{-6}} = -31,0 \text{ МПа};$$

ділянка AK ($M_{kp III} = 63,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 1} = 4308 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max \text{ AK}} = \frac{M_{\text{кр III}}}{W_{\rho 1}} = \frac{63,3,5 \times 10^{-3}}{4308 \times 10^{-6}} = 14,7 \text{ МПа}.$$

За знайденим значенням дотичних напружень будуюмо епюру максимальних дотичних напружень (рис. 6.8, г).

Задача 6.4

Сталевий стрижень круглого поперечного перерізу навантажений парами сил (рис. 6.9). Визначити діаметр поперечного перерізу стрижня, якщо $d/D = 0,7$, побудувати епюру максимальних дотичних напружень, прийнявши допустиме напруження $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.

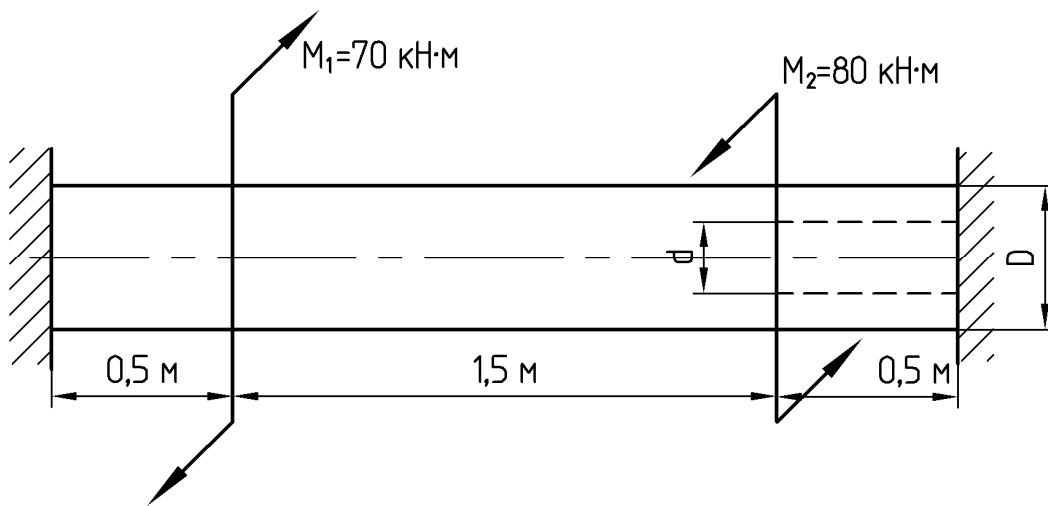


Рисунок 6.9

Розв'язання

1 Визначаємо ступінь статичної невизначуваності системи. Звільняємо стрижень від в'язів, заміняємо їхніми реактивними моментами в закладеннях – M_A і M_B (рис. 6.10, б).

Умовою рівноваги стрижня є тільки одне рівняння крутних моментів $\sum M_z = 0$. Складаємо рівняння рівноваги стрижня:

$$M_A + M_1 - M_2 + M_B = 0,$$

$$M_A + 70 - 80 + M_B = 0,$$

$$M_A + M_B = 10.$$

Як видно, рівняння містить дві невідомі. Задача є один раз статично не визначуваною.

2 Перерізами, де прикладені зовнішні моменти, стрижень поділяється на три ділянки: I, II, III. Визначимо значення крутних моментів у перерізах стрижня, розглядаючи відсічені праві частини:

ділянка I:

$$M_{кр I} = M_B;$$

ділянка II:

$$M_{кр II} = M_B - M_2 = M_B - 80;$$

ділянка III:

$$M_{кр III} = M_B - M_2 + M_1 = M_B - 80 + 70 = M_B - 10.$$

3 Розглянемо геометричну сторону задачі.

Умови деформації стрижня полягають у тому, що кут закручування кінцевих перерізів A і B дорівнює нулю, тобто $\varphi_A = \varphi_B = 0$.

4 Розглянемо фізичну сторону задачі.

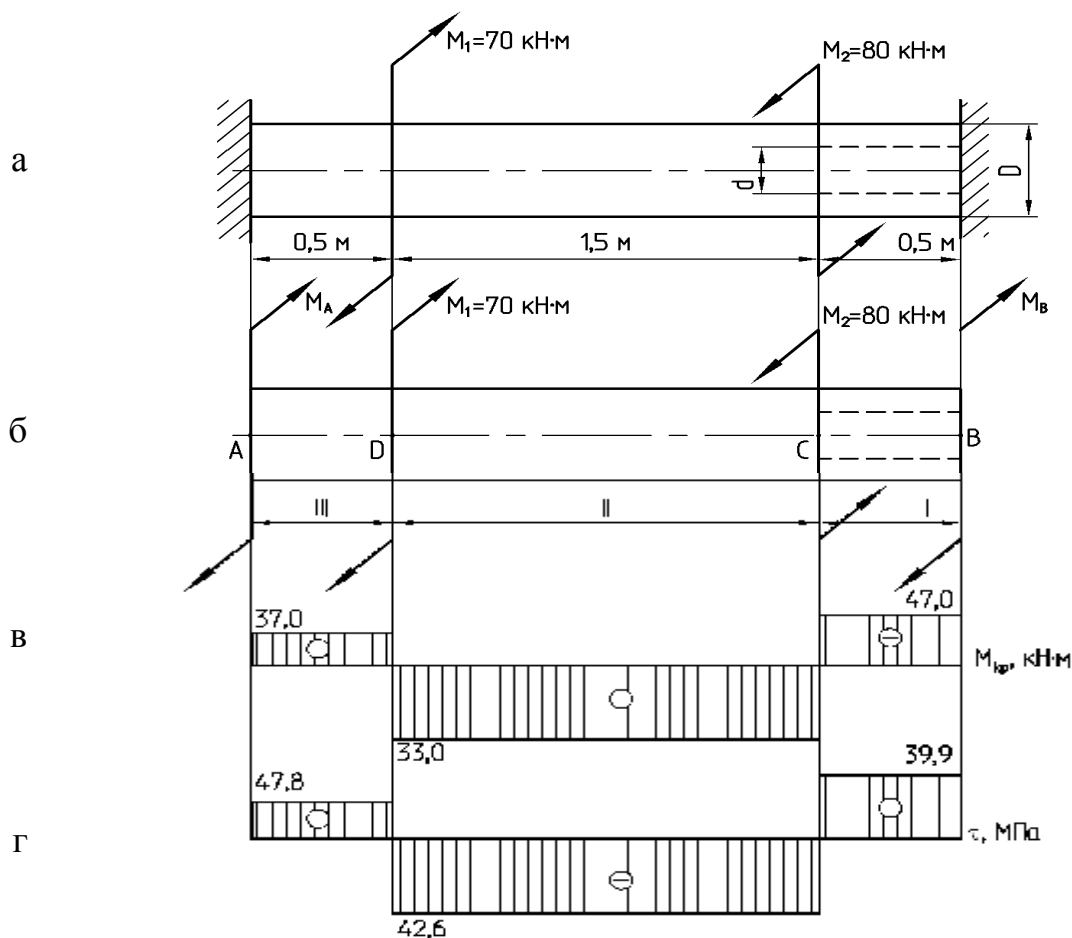


Рисунок 6.10

Кут закручування перерізу А або перерізу В визначається як сума кутів закручування окремих ділянок стрижня. Виразимо в рівнянні спільності деформації абсолютні кути закручування ділянок стрижня за формулою закону Гука при крученні

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GJ_{\rho}}.$$

Визначаємо кути закручування на кожній ділянці:
ділянка ВР:

$$\varphi_{\text{BC}} = \frac{M_{\text{В}} \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}};$$

ділянка CD:

$$\varphi_{\text{CD}} = \frac{(M_{\text{В}} - M_2) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{(M_{\text{В}} - 80) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}};$$

ділянка AD:

$$\varphi_{\text{AD}} = \frac{(M_{\text{В}} - M_2 + M_1) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{(M_{\text{В}} - 80 + 70) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{(M_{\text{В}} - 10) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}},$$

де $J_{\rho 1}$, $J_{\rho 2}$ – полярні моменти інерції поперечних перерізів вала діаметром D і d відповідно.

Якщо за умовою $d/D = 0,7$, то

$$J_{\rho 1} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - 0,7^4),$$

$$J_{\rho 2} = \frac{\pi D^4}{32}.$$

Отже,

$$J_{\rho 1} = J_{\rho 2} (1 - 0,7^4).$$

$$\varphi_{\text{а}} = \frac{M_{\text{В}} \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} + \frac{(M_{\text{В}} - 80) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}} + \frac{(M_{\text{В}} - 10) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} = 0.$$

З урахуванням співвідношення між $J_{\rho 1}$ і $J_{\rho 2}$ вираз для $\varphi_{\text{а}}$ запишеться так:

$$\varphi_a = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}(1-0,7^4)} + \frac{(M_B - 80) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}} + \frac{(M_B - 10) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} = 0.$$

Якщо $\frac{1}{GJ_{\rho 1}} \neq 0$, цей співмножник можна скоротити і рівняння записується таким чином:

$$\frac{M_b \cdot 0,5}{1-0,7^4} + (M_B - 80) \cdot 1,5 + (M_B - 10) \cdot 0,5 = 0,$$

$$0,66M_B + 1,5M_B - 120 + 0,5M_B - 5 = 0,$$

$$2,66M_B = 125,$$

$$M_B = 47,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отже,

$$M_A = 10 - M_B = 10,0 - 47,0 = -37,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Визначаємо величини крутних моментів на ділянках стрижня:
ділянка I:

$$M_{\text{кр I}} = M_b = 47,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

ділянка II:

$$M_{\text{кр II}} = M_b - M_2 = M_b - 80 = 47,0 - 80,0 = -33,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

ділянка III:

$$M_{\text{кр III}} = M_b - M_2 + M_1 = M_b - 80 + 70 = M_b - 10 = 47,0 - 10,0 = 37,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За отриманими значеннями будуємо епюру крутних моментів (рис. 6.10, в).

6 Діаметр стрижня визначимо з умови міцності стрижня при крутінні:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр max}}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

Найбільша величина крутного моменту $M_{\text{кр max}} = 47,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ на ділянці стрижня ВС круглого поперечного перерізу, для якого полярний момент інерції визначається за формулою

$$W_{\rho 1} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - 0,7^4).$$

Звідси

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_{kp \max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 48,0 \times 10^{-3}}{3,14 \cdot 80 \cdot (1 - 0,7^4)}} \times 10^2 = 15,8 \text{ см}.$$

Отже,

$$d = D \cdot 0,7 = 15,8 \cdot 0,7 = 11,06 \text{ см}.$$

7 Будуємо епюру максимальних дотичних напружень, користуючись формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{W_{\rho}}.$$

Визначимо полярні моменти опору для кожного діаметра:

$$W_{\rho 1} = \frac{\pi D^3}{16} \cdot (1 - \alpha^4) = \frac{3,14 \cdot 15,8^3}{16} \cdot (1 - 0,7^4) = 588 \text{ см}^3,$$

$$W_{\rho 2} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 15,8^3}{16} = 774 \text{ см}^3.$$

Визначимо дотичні напруження для кожної ділянки:

ділянка BC ($M_{kp I} = 47,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 1} = 588 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max DC} = \frac{M_{kp I}}{W_{\rho 1}} = \frac{47,0 \times 10^{-3}}{588 \times 10^{-6}} = 78,9 \text{ МПа};$$

ділянка CD ($M_{kp II} = -33,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 2} = 774 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max CD} = \frac{M_{kp I}}{W_{\rho 2}} = \frac{-33,0 \times 10^{-3}}{774 \times 10^{-6}} = 42,6,0 \text{ МПа};$$

ділянка AD ($M_{kp III} = 37,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $W_{\rho 2} = 774 \text{ см}^3$):

$$\tau_{\max AD} = \frac{M_{kp III}}{W_{\rho 2}} = \frac{37,0 \times 10^{-3}}{774 \times 10^{-6}} = 47,6 \text{ МПа}.$$

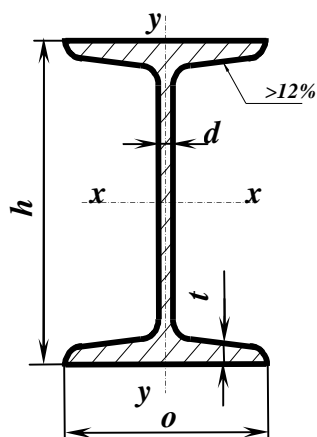
За знайденим значенням дотичних напружень будуємо епюру максимальних дотичних напружень (рис. 6.10, г).

ЛІТЕРАТУРА

- 1 **Писаренко, Г.С.** Опір матеріалів / Г.С.Писаренко, О.Л.Квітка, Є.С.Уманський. – К. : Вища школа, 2004. – 656 с.
- 2 Справочник по сопротивлению материалов / Г.С.Писаренко, А.П.Яковлев, В.В.Матвеев. – Киев : Наук. думка, 1988. – 736 с.
- 3 Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності : у 2 ч.. / В.Г.Піскунов, В.Д.Шевченко, М.М.Рубан, Ю.М.Федоренко, І.М.Бузун, В.С.Сіпетов, В.К.Присяжнюк. – К. : Вища школа, 1995. – 5 кн. – 490 с.
- 4 **Феодосьев, В.И.** Сопротивление материалов. – М. : Наука, 1986. – 540 с.
- 5 Самостійна робота студентів з дисципліни «Опір матеріалів» : навчальний посібник / В.А.Овчаренко, Л.В.Кутовий, М.О.Соломін, О.Ю.Деньщиков. – Краматорськ : ДДМА, 2004. – 212 с.
- 6 **Кутовий, Л.В.** Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів» : навчальний посібник / Л.В.Кутовий, В.А.Овчаренко, Ю.С.Холодняк. – Краматорськ : ДДМА, 2007 – 220 с.
- 7 **Холодняк, Ю.С.** Побудова епюр внутрішніх силових факторів для балок і плоских рам : навчальний посібник / Ю.С.Холодняк, В.А.Овчаренко, Л.В.Кутовий. – Краматорськ : ДДМА, 2009 – 128 с.

ДОДАТКИ

Додаток А



ДВОТАВРИ сталеві гарячекатані (за ГОСТ 8239-89)

Приклад позначення:

Двотавр 30 ГОСТ 8239-89

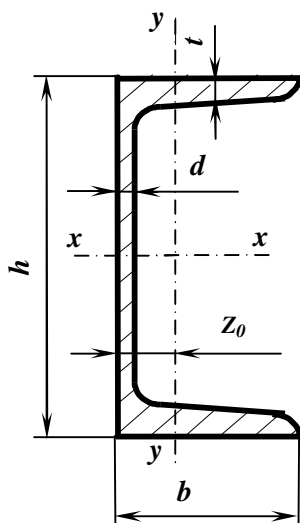
Таблиця А.1

Номер профілю	Розмір, мм				F , см ²	J_X , см ⁴	W_X , см ³	i_X , см	S_X , см ³	J_Y , см ⁴	W_Y , см ³	i_Y , см
	h	b	d	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Таблиця А.2 – Нормальні лінійні розміри, мм (за ГОСТ 6636-69)

1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6
4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0	10	11	12	14
16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56
63	71	80	90	100	110	125	140	160	180	200	220
250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900

Додаток Б



ШВЕЛЕРИ сталеві гарячекатані (за ГОСТ 8240-97 або ДСТУ 3436-96)

Приклад позначення:

Швелер 30 ГОСТ 8240-97

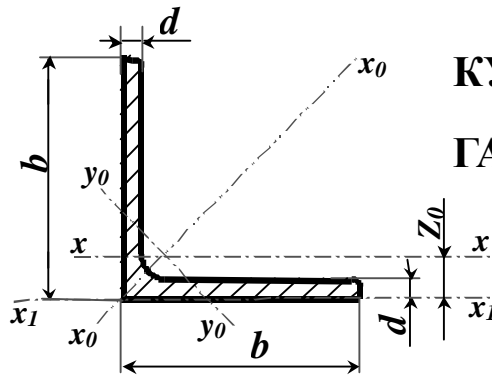
Таблиця Б.1

Номер профілю	Розмір, мм				F см ²	J_X см ⁴	W_X см ³	i_X см	S_X см ³	J_Y см ⁴	W_Y см ³	i_Y см	Z_0 см
	h	b	d	t									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Додаток В

КУТИКИ СТАЛЕВІ

ГАРЯЧЕКАТАНІ РІВНОБОКІ



Приклад позначення:

Кутик 50х50х3 ГОСТ 8509-93

Таблиця В.1

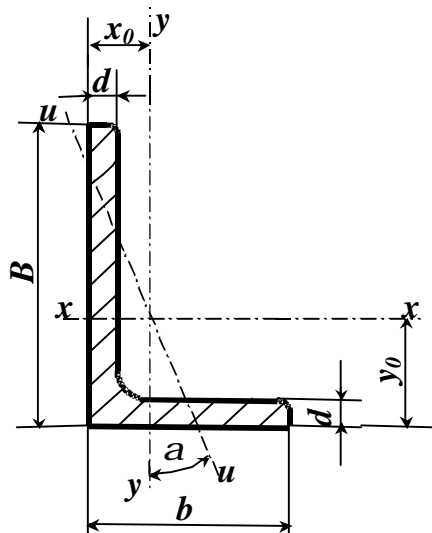
Номер кутника	Розмір, мм		F , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x_0} max, см ⁴	i_{x_0} max, см	I_{y_0} min, см ⁴	i_{y_0} min, см	z_0 , см
	b	d								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
		5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
		6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18

Продовження таблиці В.1

Номер кутника	Розмір, мм		F , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x0} max, см ⁴	i_{x0} max, см	I_{y0} min, см ⁴	i_{y0} min, см	z_0 , см
	b	d								
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
14	140	16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
16	160	10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
18	180	20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
		11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
20	200	12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
		12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
22	220	30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07
		14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
25	250	16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
		16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
25	250	30	142,0	8117	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31

Додаток Г

КУТИКИ СТАЛЕВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ НЕРІВНОБОКІ (за ГОСТ 8510-93)



Приклад позначення:

Кутик 50х32х3 ГОСТ 8510-93

Таблиця Г.1

Номер кутника	Розмір, мм			F , см ²	I_x , см ⁴	I_y , см ⁴	I_u , мин см ⁴	i_u , мин см	x_0 , см	y_0 , см	Кут нахилу осі u , $\text{tg } \alpha$
	B	b	d								
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392
3/2	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	0,54	1,04	0,421
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382
			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385
			4	2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
			5	3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	0,66	1,41	0,374
4/3	40	39	4	2,67	4,18	2,01	1,09	0,64	0,78	1,28	0,544
			5	3,28	5,04	2,41	1,33	0,64	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382
			4	2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403
			4	3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
			5	4,41	13,8	4,48	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
			5	4,98	19,9	6,26	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6	5,90	23,3	7,28	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8	7,68	29,6	9,15	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	23,41	12,08	6,41	1,07	1,26	2,00	0,576
			6	6,60	27,46	14,12	7,52	1,07	1,30	2,04	0,575
			7	7,62	31,32	16,05	8,60	1,06	1,34	2,08	0,571
			8	8,62	35,00	18,88	9,65	1,06	1,37	2,12	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
			6	7,25	40,92	14,60	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			7	8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	1,25	2,48	0,435
			8	9,47	52,38	18,52	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430

Продовження таблиці Г.1

Номер кутника	Розмір, мм			F , см ²	I_x , см ⁴	I_y , см ⁴	I_u , min см ⁴	i_u , min см	x_0 , см	y_0 , см	Кут нахилу осі u , tg α
	B	b	d								
8/5	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	1,09	1,13	2,60	0,387
			6	7,55	48,98	14,85	8,88	1,08	1,17	2,65	0,386
8/6	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	1,29	1,49	2,47	0,547
			7	9,42	59,61	28,74	15,58	1,29	1,53	2,52	0,546
			8	10,6	66,88	32,15	17,49	1,28	1,57	2,56	0,544
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	19,7	11,8	1,22	1,26	2,92	0,384
			6	8,54	70,6	21,2	12,7	1,22	1,28	2,95	0,384
			8	11,2	90,9	27,1	16,3	1,21	1,36	3,04	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	30,6	18,20	1,38	1,42	3,23	0,393
			7	11,1	113,0	35,0	20,83	1,37	1,46	3,28	0,392
			8	12,6	127,0	39,2	23,38	1,36	1,50	3,32	0,391
			10	15,5	154,0	47,1	28,34	1,35	1,58	3,40	0,387
10/6,5	100	65	7	11,2	114,0	38,3	22,77	1,41	1,52	3,24	0,415
			8	12,7	138,3	43,0	25,24	1,41	1,56	3,28	0,414
			10	15,7	155,5	51,7	30,60	1,40	1,64	3,37	0,410
11/7	110	70	6,5	11,4	142	45,6	26,9	1,53	1,58	3,55	0,402
			8	13,9	172	54,6	32,3	1,52	1,64	3,61	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	227	73,7	43,4	1,76	1,80	4,01	0,407
			8	16,0	256	83,0	48,8	1,75	1,84	4,05	0,406
			10	19,7	312	100,0	59,3	1,74	1,92	4,14	0,404
			12	23,4	365	117,0	69,5	1,72	2,00	4,22	0,400
14/9	140	90	8	18,0	364	120	70,3	1,98	2,03	4,49	0,411
			10	22,2	444	146	85,5	1,96	2,12	4,58	0,409
16/10	160	100	9	22,9	606	186	110	2,20	2,23	5,19	0,391
			10	25,3	667	204	121	2,19	2,28	5,23	0,390
			12	30,0	784	239	142	2,18	2,36	5,32	0,388
			14	34,7	897	272	162	2,16	2,43	5,40	0,385
18/11	180	110	10	28,3	952	276	165	2,42	2,44	5,88	0,375
			12	33,7	1123	324	194	2,40	2,52	5,97	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	446	264	2,75	2,79	6,50	0,392
			12	37,9	1568	482	285	2,74	2,83	6,54	0,392
			14	43,9	1801	551	327	2,73	2,91	6,62	0,390
			16	49,8	2026	617	367	2,72	2,99	6,71	0,388
25/16	250	160	12	48,3	3147	1032	604	3,54	3,53	7,97	0,410
			16	63,6	4091	1333	781	3,50	3,69	8,14	0,408
			18	71,1	4545	1475	896	3,49	3,77	8,23	0,407
			20	78,5	4987	1613	949	3,48	3,85	8,31	0,405

Додаток Д

КОЕФІЦІЄНТИ j ДЛЯ РІЗНИХ МАТЕРІАЛІВ

Таблиця Д.1

Гнучкість $l = \frac{m l}{i}$	Сталь Ст. 4, 3, 2	Сталь Ст5	Сталь СПК	Чавун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

Навчальний посібник

**ОВЧАРЕНКО Володимир Андрійович
КАПОРОВИЧ Світлана Володимирівна
ДЕНЬЩИКОВ Олександр Юрійович**

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ
Практикум
Частина 1**

Редактор І. І. Дьякова

Комп'ютерна верстка О. С. Орда

103/2009. Підп. до друку Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 10,46. Обл.-вид. арк. 9,18.
Тираж прим. Зам. №

Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003