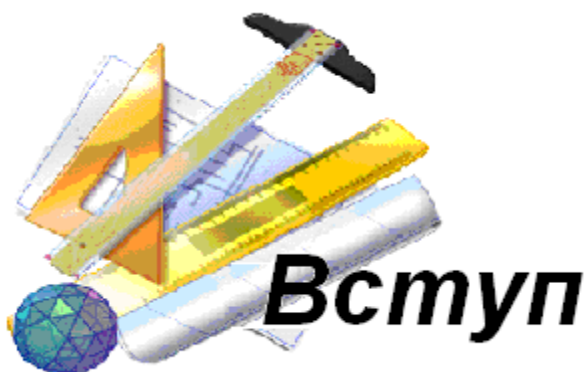


ЗМІСТ

Вступ.....	4
Модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри.....	7
Тема 1. Визначники.....	9
Тема 2. Матриці	25
Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	49
Тема 4. Вектори	78
Тема 5. Скалярний добуток двох векторів	101
Тема 6. Векторний та мішаний добуток	109
Модуль 2. Елементи аналітичної геометрії.....	125
Тема 1. Лінії на площині.....	127
Тема 2. Площина і пряма у просторі	148
Тема 3. Криві другого порядку.....	173
Тема 4. Поверхні другого порядку.....	189
Модуль 3. Вступ до математичного аналізу.	
Диференціальне числення функції	
однієї змінної.....	207
Тема 1. Множини. Функції. Послідовності.....	209
Тема 2. Границя функції.....	238
Тема 3. Неперервність функції.....	264
Тема 4. Похідна функції.....	276
Тема 5. Диференціал функції.....	301
Тема 6. Застосування похідної до дослідження	
функцій.....	322
Модуль 4. Диференціальне числення функції	
декількох змінних. Комплексні числа.....	354
Тема 1. Функція декількох змінних. Границя та	
неперервність функції.....	356
Тема 2. Похідні і диференціали функції декількох	
змінних.....	369
Тема 3. Деякі застосування частинних похідних.....	390
Тема 4. Комплексні числа.....	414
Рекомендована література.....	429



Матеріал, що міститься у навчальному посібнику **«Вища математика для майбутніх інженерів»** створює суттєвий фундамент у підготовці студентів інженерних спеціальностей до їх майбутньої професійної діяльності.

Під час першого семестру навчання курс **Вищої математики** поділяється на модулі:

1. Елементи лінійної та векторної алгебри.
2. Елементи аналітичної геометрії.
3. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної.
4. Диференціальне числення функції декількох змінних. Комплексні числа.

Розгляд основних положень кожного модуля починається з формулювання тем розділу, схеми інтеграції та вимог до практичних умінь: на яких базується вивчення модуля; які формуються під час вивчення модуля; що набуває студент для вивчення інженерних дисциплін. Це вказує на специфіку дисципліни, яка полягає в тому, що з одного боку на поданому матеріалі базується зміст інших модулів, фундаментальних та загальноінженерних дисциплін, а з іншого – враховується зміст спеціальних дисциплін.

Перед роботою з посібником студенту необхідно скопіювати вміст компакт-диску (на форзаці посібнику) на жорсткий диск свого комп'ютеру та встановити всі педагогічні програмні засоби (**ППЗ**) та системи комп'ютерної алгебри з метою

отримання вмінь роботи із різними програмами, порівняння їх можливостей та обрання необхідних для використання в майбутній професійній діяльності.

З метою мотивації професійного мислення перед викладанням теоретичної частини кожної теми модуля пропонується професійне завдання, що надає інформацію про те, де і як зустрічається або використовується поняття, що вивчається надалі в курсі вищої математики.

Теми модулів містять.

➤ **Теоретичний матеріал**, викладання якого починається з формулювання **Необхідні знання...**

Під час подання теоретичного матеріалу зустрічається скорочення позначання основних визначень (*Def.*) й зауважень (*М.В.*). Інші скорочення термінів розшифровуються під час викладання тексту. Теоретичним матеріалом посібника мають можливість скористатись як студенти під час самостійної підготовки так і викладачі під час підготування різного типу презентацій лекційного матеріалу.

➤ **Практичний матеріал**, подання якого починається з формулювання **Вчимося...**

Математичні задачі практичної частини можуть бути застосовані викладачами під час проведення практичних занять та пропонуються із докладним розв'язанням, що надає можливість самостійного опрацювання їх студентами.

➤ Деякі **теоретичні положення** 10-12 класів необхідні для повторення матеріалу, що узагальнюється в курсі **Вищої математики**, подання яких починається з формулювання **Згадаємо...** . Під час занять викладач має можливість звернути увагу студентів на матеріал, який вимагає повторення.

➤ **Професійно-орієнтовані завдання**, подання яких починається з формулювання **Обчислюємо...** або **Будуємо...** тощо.

Професійно-орієнтовані завдання надаються з покроковим розв'язанням та можуть бути застосовані викладачами для

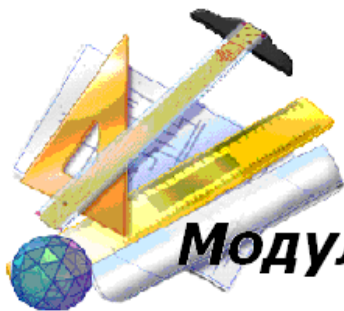
пояснення застосування основних понять, формул, теорем, ознак курсу з метою формування вмінь, що набуває студент для вивчення інженерних дисциплін. Надане розв'язання може бути запропоноване студентам для самостійного опрацювання. У розв'язанні вказується також, на якому з кроків можливе застосування засобів інформаційно-комунікаційних технологій, що скорочує час на розв'язування технічних (рутинних) задач.

➤ **Практичну частину** застосування систем автоматизації математичних обчислень – педагогічних програмованих засобів: **GRAN1, GRAN2, GRAN3D, DG, MATHCAD, DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA** та програм класу евристико-дидактичних конструкцій, подання яких починається з формулювання **«Навчаємо» свій комп'ютер....** Процедури обчислення, побудови або дослідження замінюються процедурами застосування ППЗ із наданням інструкцій, які допоможуть навчитись студенту самостійно або за допомогою викладача ними користуватись. Навчальні програми у вигляді евристичних тренажерів допоможуть студентам самостійно оволодіти вміннями, що формуються під час вивчення модуля.

➤ **Практичні завдання для самостійної роботи** на матеріалі професійно-орієнтованих задач, подання яких починається з формулювання **Моделюємо...**

Під час розв'язування професійно-орієнтованих завдань на практичних заняттях або вдома студенти мають можливість скористатись евристичними підказками й інформаційними підтримками та відповідями до задач, які надаються з позначкою **Help**.

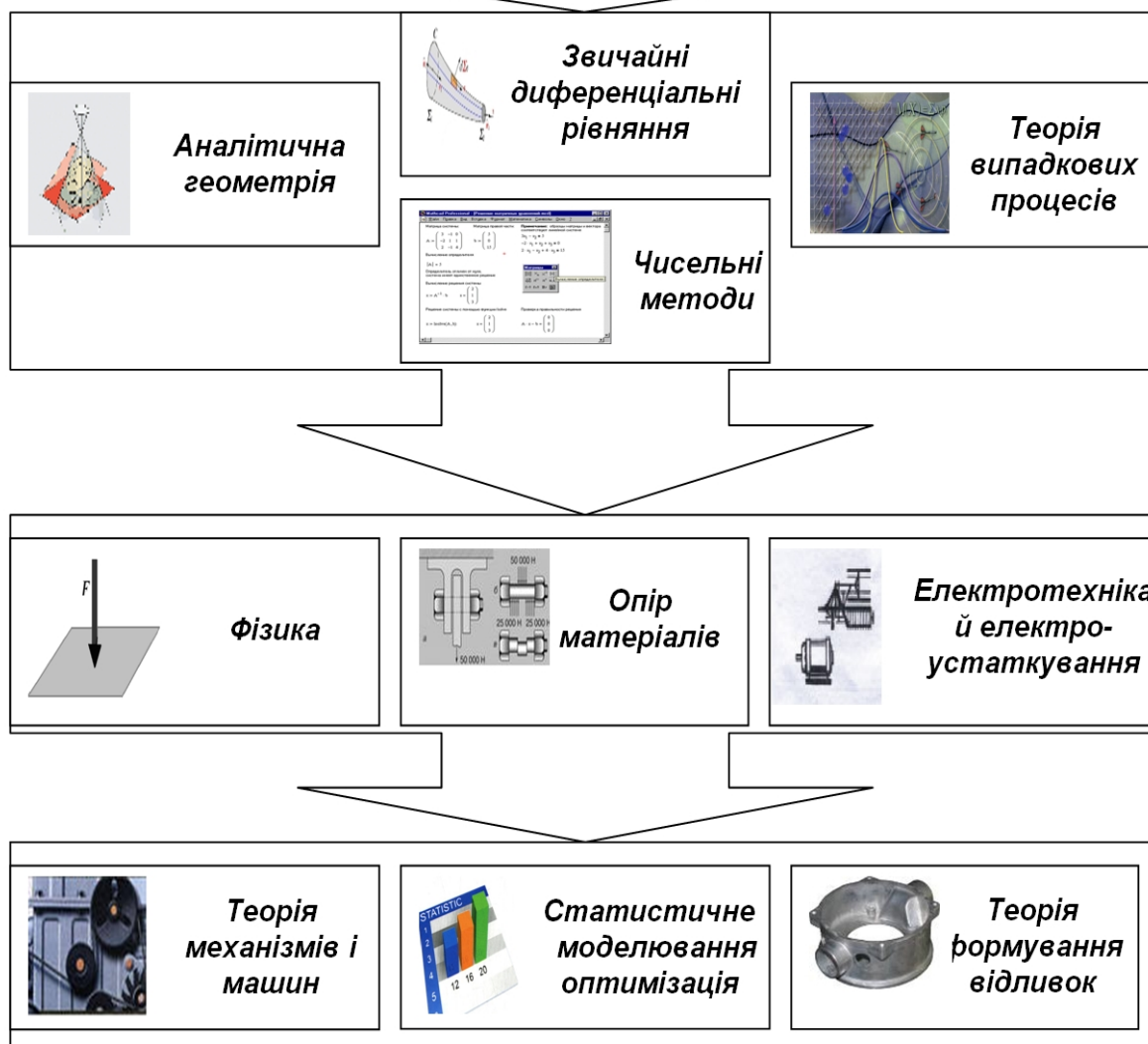
Враховуючи різну кількість годин, відведених за планом для вивчення вищої математики студентам різних інженерних спеціальностей, провідний викладач (лектор) може корегувати вміст модулів, пропонуючи якийсь матеріал на самостійне опрацювання.



Елементи лінійної та векторної алгебри

Модуль 1

Тема 1. Визначники.
Тема 2. Матриці.
Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
Тема 4. Вектори.
Тема 5. Скалярний добуток двох векторів.
Тема 6. Векторний та мішаний добутки.



ВМІННЯ, НА ЯКИХ БАЗУЄТЬСЯ ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ

Виконувати усні і письмові обчислення; розв'язувати лінійні арифметичні рівняння; розв'язувати задачі за допомогою лінійних рівнянь; розв'язувати лінійні рівняння з двома змінними; розв'язувати системи лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки й способом додавання; розв'язувати задачі за допомогою систем лінійних рівнянь; обчислювати відстань між двома точками, координати середини відрізка; знаходити координати вектора, довжину вектора, кут між векторами; знаходити суму, різницю векторів, їх скалярний добуток, множити вектор на число; визначати колінеарні й компланарні вектори; розв'язувати задачі за допомогою координат й векторів; застосовувати співвідношення між сторонами й кутами в прямокутному трикутнику, формули площ фігур та об'ємів геометричних тіл.



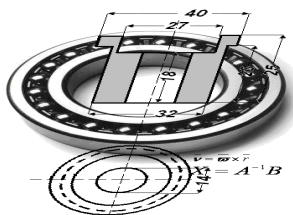
ВМІННЯ, ЯКІ ФОРМУЮТЬСЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ

Обчислювати визначники 2-го, 3-го і старших порядків; уміти розкласти визначник за елементами довільного рядка чи стовпчика; знаходити суму, різницю, добуток матриць, множення матриць на число; знаходити ранг матриці; знаходити обернену матрицю; розв'язувати СЛАР методом Крамера, через обернену матрицю; розв'язувати довільні СЛАР методом Гаусса; аналізувати сумісність СЛАР за теоремою Кронекера – Капеллі; знаходити координати вектора, довжину вектора, орт вектора, кут між векторами; знаходити суму, різницю векторів, їх скалярний та векторний добуток; обчислювати площу трикутника, об'єм піраміди; уміти розкласти вектор за базисними векторами; застосовувати умову перпендикулярності двох векторів; знаходити власні числа та власні вектори матриці; застосовувати ППЗ Mathcad, Derive, Gran 3D, DG для роботи з визначниками, матрицями, СЛАР, векторами.



ВМІННЯ, ЩО НАБУВАЄ СТУДЕНТ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ІНЖЕНЕРНИХ ДИСЦИПЛІН

Визначати та обчислювати момент та роботу сили відносно точки, лінійну швидкість точки твердого тіла, що обертається, за допомогою векторного добутку; розраховувати складні електричні ланцюги за правилами Кірхгофа за допомогою СЛАР; визначати положення та переміщення ланок механізму аналітичним методом за допомогою СЛАР; встановлювати залежність між деформаціями і напруженнями при плоскому та об'ємному напружених станах за узагальненим законом Гука за допомогою СЛАР; застосовувати метод кінцевих елементів для розрахунків за допомогою матриць; розв'язувати статично невизначені задачі за допомогою СЛАР; створювати математичні та статистичні моделі для інженерних розрахунків за допомогою СЛАР; визначати швидкість й прискорення ланок механізмів методом планів, реакцій у кінематичних парах методом Д'аламбера за допомогою векторних рівнянь.



Тема 1. ВИЗНАЧНИКИ

Номограмою називається креслення, що є особливим зображенням функціональної залежності. Номограми широко застосовуються в інженерних розрахунках для однотипних обчислень. Основою для побудови номограми служать функціональні шкали, що виражають залежність між функцією й аргументом. До їхнього числа відносяться номограми з вирівняними точками. Вони прості й легко читаються (рис. 1.1). Номограми з вирівняними точками зображують рівняння типу:

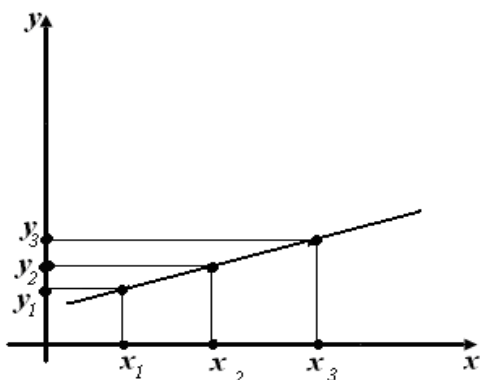


Рис. 1.1. Номограма з вирівняними точками

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

де (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) — три точки, що лежать на одній прямій.

У лівій частині рівняння ми бачимо вираз, що оформлено у вигляді визначника 3-го порядку.



Необхідні знання про визначники 2-го, 3-го порядків

Def. Значення виразу $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ (1.1) називають *визначником (детермінантом) другого порядку*.

Такі визначники виникають, наприклад, при розв'язанні лінійних систем вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Щоб знайти невідоме x_1 , виконаємо такі дії. Помножимо обидві частини першого рівняння на a_{22} , а другого рівняння – на $-a_{12}$, після чого, склавши ліві і праві частини одержаних рівнянь, дістанемо рівність:

$$a_{22}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - a_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

яка після спрощень набуває вигляду

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

У разі виконання умови $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \neq 0$, дістаємо

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Аналогічно, виключивши змінну x_1 , дістанемо

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Отже, розв'язки даної системи виражаються через визначники другого порядку.

Def. Значення виразу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (1.2)$$

називають *визначником третього порядку*.

Порядок визначника дорівнює числу його рядків (число стовпців співпадає з числом рядків).

Символи a_{ij} називають елементами визначника, причому перший індекс i вказує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Якщо всі елементи a_{ij} є числами, то зрозуміло, що результатом обчислення визначника також є число.

Елементи a_{11} , a_{22} у визначнику другого порядку і a_{11} , a_{22} , a_{33} у визначнику третього порядку складають *головну діагональ* визначника, а елементи a_{12} , a_{21} та a_{13} , a_{22} , a_{31} – *побічну діагональ*.

Для обчислення визначника другого порядку необхідно від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів побічної діагоналі.

Визначник третього порядку можна обчислити за *правилом трикутника*. Перші три доданки, які беруть зі знаком *плюс*, є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі.

Наступні три доданки, які беруть зі знаком *мінус*, є добутками елементів, що стоять на побічній діагоналі та у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна побічній діагоналі.

Для запам'ятовування цієї формули зручно користуватися схемою, зображеною на рис. 1.2.

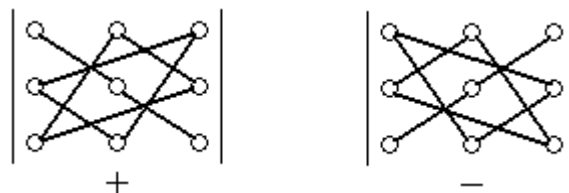


Рис 1.2. Схема обчислення за правилом трикутника

М.В. При обчисленні визначників використовують формулу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}.$$



Вчимося обчислювати визначники 2-го, 3-го порядків

1.1. Обчисліть визначники:

а) $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \log_2 3 & \lg 100 \\ \log_2 8 & \log_3 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. За формулою (1.1) маємо:

а) $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 0 \cdot 7 - 8 \cdot (-2) = 16$;

б) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha - \beta)$;

в) $\begin{vmatrix} \log_2 3 & \lg 100 \\ \log_2 8 & \log_3 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log_2 3 & 2 \\ 3 & \log_3 2 \end{vmatrix} = \log_2 3 \cdot \log_3 2 - 2 \cdot 3 = 1 - 6 = -5$.

1.2. Обчисліть визначник за правилом трикутника

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. За правилом трикутників маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 3 \cdot 1 - (1 \cdot (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = -9 + 2 - 12 - (4 + 18 + 3) = -19 - 25 = -44$$

Відповідь: -44.



Необхідні знання про властивості визначників 2-го, 3-го порядків

Сформулюємо найважливіші властивості визначників на прикладі визначників третього порядку. Правильність цих властивостей можна встановити, наприклад, безпосередньою перевіркою. Всі властивості виконуються також для визначників довільного порядку.

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ця властивість указує на рівноправність рядків і стовпців визначника.

2. Визначник змінить знак на протилежний, якщо переставити місцями два рядки (два стовпці). Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

3. Якщо всі елементи рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

4. Визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює нулю.

5. Спільний множник усіх елементів рядка (стовпця) можна винести за знак визначника. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & k a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & k a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. Визначник, який містить два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число, то значення визначника не зміниться. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + k a_{21} & a_{12} + k a_{22} & a_{13} + k a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$



Необхідні знання про розкладання визначника за елементами довільного рядка чи стовпця

Задамо визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Def. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називають визначник, утворений із даного визначника викресленням i -го рядка та j -го стовпця.

Отже, порядок мінору M_{ij} на одиницю менший від порядку даного визначника.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Наприклад, мінором елемента a_{23} є визначник

Def. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називають його мінор M_{ij} , помножений на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема 1.1 (Лапласа). Визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Наприклад, для визначника третього порядку виконуються такі рівності:

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} \quad (\text{розклад за елементами першого рядка});$$

$$\Delta = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32} \quad (\text{розклад за елементами другого стовпця}).$$

Доведемо першу формулу. Розкриваючи визначник за формулою (1.2), дістанемо

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} = \\ &= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) = \\ &= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}.\end{aligned}$$

Теорема 1.2. Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Наприклад, для визначника третього порядку виконуються такі рівності:

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0, \quad a_{12} A_{13} + a_{22} A_{23} + a_{32} A_{33} = 0.$$

М.В. Теореми 1.1 і 1.2 мають місце для визначників будь-якого порядку.



Вчимося розкласти визначник за елементами довільного рядка чи стовпця

1.3. Обчисліть визначник, використовуючи його властивості

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Використовуючи властивості визначника, дістаємо

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \text{ рядок} - 2 \text{ рядок} & & \\ 2 \text{ рядок} + (-3) \cdot 3 \text{ рядок} & & \\ & & \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ & \begin{vmatrix} \text{розкладемо визначник} & & \\ \text{за елементами 1 стовпця} & & \end{vmatrix} = a_{31} A_{31} = 1 \cdot (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = -24 - 20 = -44\end{aligned}$$

Інший спосіб обчислення визначника. Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 8 - 4 \cdot 4 = -44$$

Відповідь: -44.



Необхідні знання про визначники n-го порядку

Розглянемо визначник n -го порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За теоремою 1.1 цей визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення. Наприклад, розклад визначника за елементами першого рядка такий:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}$$

У результаті застосування цієї формули замість обчислення одного визначника n -го порядку потрібно обчислити n визначників порядку $n-1$. Але такий спосіб обчислення занадто громіздкий. На практиці зручно, коли частина елементів рядка (стовпця) дорівнює нулю (і чим більше нульових елементів, тим менше обчислень). Тому доцільно спочатку визначник перетворити так, щоб усі елементи деякого рядка (стовпця), крім одного, дорівнювали нулю, зазвичай використовуючи для цього властивості визначників (*основну роль тут відіграє властивість 8*). Тоді розклад визначника за елементами цього рядка (стовпця) містить лише один доданок.

Дамо тепер *формальне означення визначника n -го порядку*.

Def. Визначником n -го порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називають алгебраїчну суму всіх можливих добутків, які містять по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпця. Знак кожного доданка дорівнює $(-1)^t$, де t – число інверсій у других індексах за умови, що елементи (множники a_{ij}) доданка розміщені в порядку зростання перших індексів. Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{inv(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

Усього таких доданків $n!$. Половину з них беруть зі знаком плюс, а іншу половину – зі знаком мінус.

М.В. Визначник n -го порядку, у якого під головною діагоналлю всі елементи нульові, дорівнює добутку елементів головної діагоналі, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$



Вчимося обчислювати визначники n -го порядку

1.4. Обчисліть визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. У визначнику є кілька нульових елементів, проте зручно, коли нульові елементи містяться в одному рядку чи стовпці. Зробимо, наприклад, нульовими всі елементи першого рядка, крім першого елемента. Для цього додамо до третього стовпця перший, після чого помножимо елементи першого стовпця на -2 і додамо їх до відповідних елементів четвертого стовпця. Дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 & 2-2 \\ 1 & 2 & -2+1 & 0-2 \\ -1 & 3 & 0-1 & 2+2 \\ 2 & 1 & -1+2 & 3-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Тепер розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = a_{11} A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

За допомогою перетворень отримаємо нулі у другому стовпці. Для цього до першого і другого рядків по черзі додамо третій рядок. Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо утворений визначник за елементами другого стовпця:

$$\Delta = a_{32} A_{32} = 1 \cdot (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -9(15+12) = -21.$$

Відповідь: -21 .



Обчислюємо визначники за допомогою ППЗ Derive, Mathcad

**Процедура обчислення визначника за допомогою
відповідних правил.**

1.5. Обчисліть визначник за допомогою правила трикутника.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Розв'язання.

Скористаємось правилом трикутника

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= i \cdot 0 \cdot 3 + j \cdot (-1) \cdot (-4) + k \cdot 2 \cdot 1 - k \cdot 0 \cdot (-4) - i \cdot (-1) \cdot 1 - j \cdot 2 \cdot 3 = \\ &= 0 + 4 \cdot j + 2 \cdot k - 0 + i - 6 \cdot k = i + 4 \cdot j - 4 \cdot k \end{aligned}$$

Відповідь: $i + 4 \cdot j - 4 \cdot k$.

**Процедура обчислення визначника за допомогою
відповідних правил може бути замінена процедурою
застосування ППЗ Derive.**



**«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню
визначників за допомогою ППЗ Derive.**

Обчисліть визначник із завдання 1.5 за допомогою ППЗ Derive.

1. Відкрити вікно ППЗ Derive.
2. За допомогою опції *Autor-Matrix* ввести визначник:
– розмір визначника (рис. 1.3);

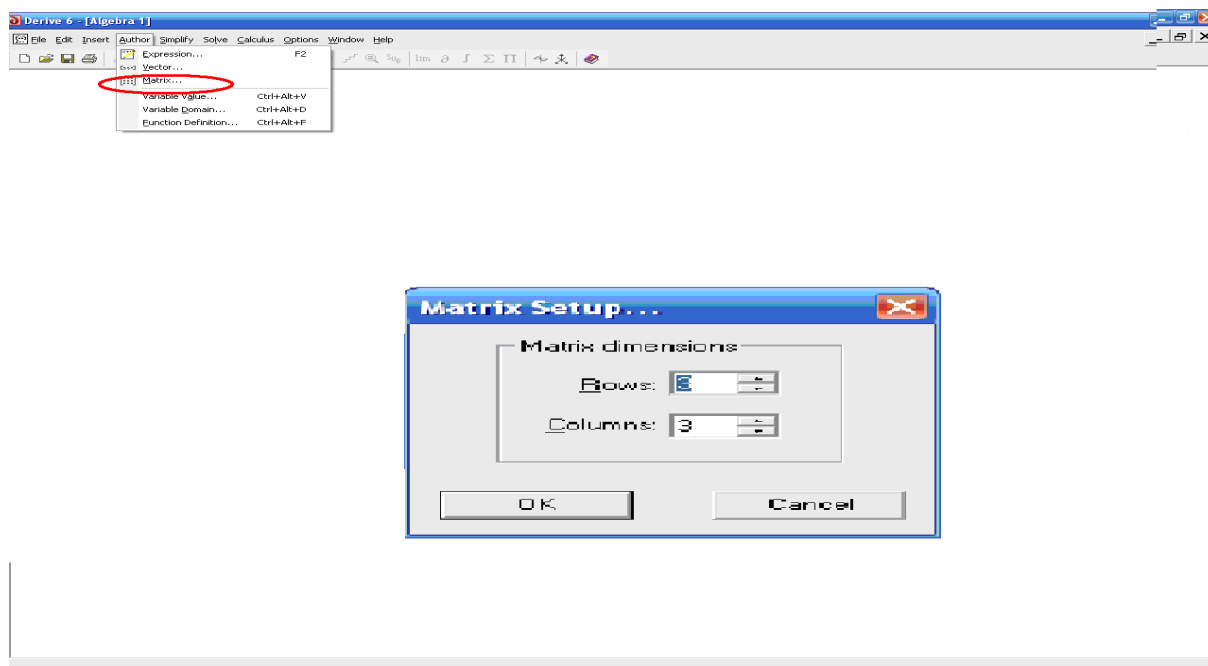


Рис. 1.3. Вікно ППЗ Derive: введення розміру визначника

– числові значення елементів рядків і стовпців (рис.1.4);

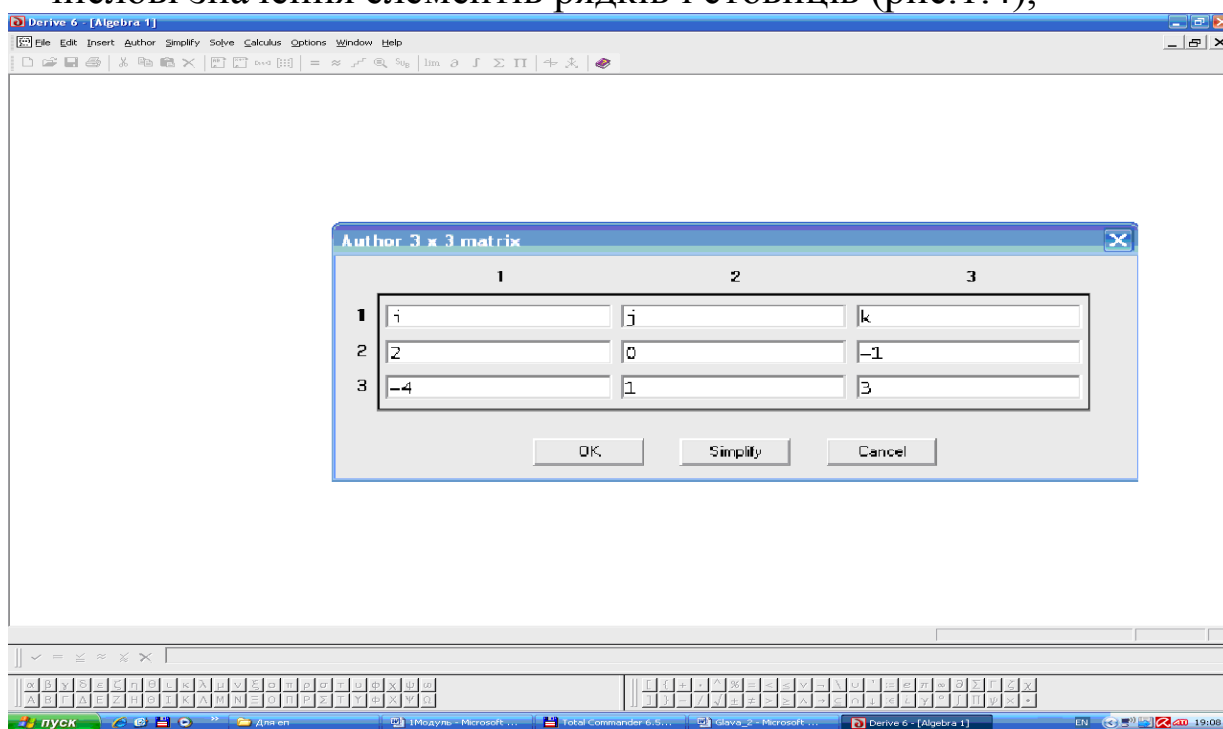


Рис. 1.4. Вікно ППЗ Derive: введення числових значень елементів рядків і стовпців

– номер виразу, під яким записано визначник (рис. 1.5).

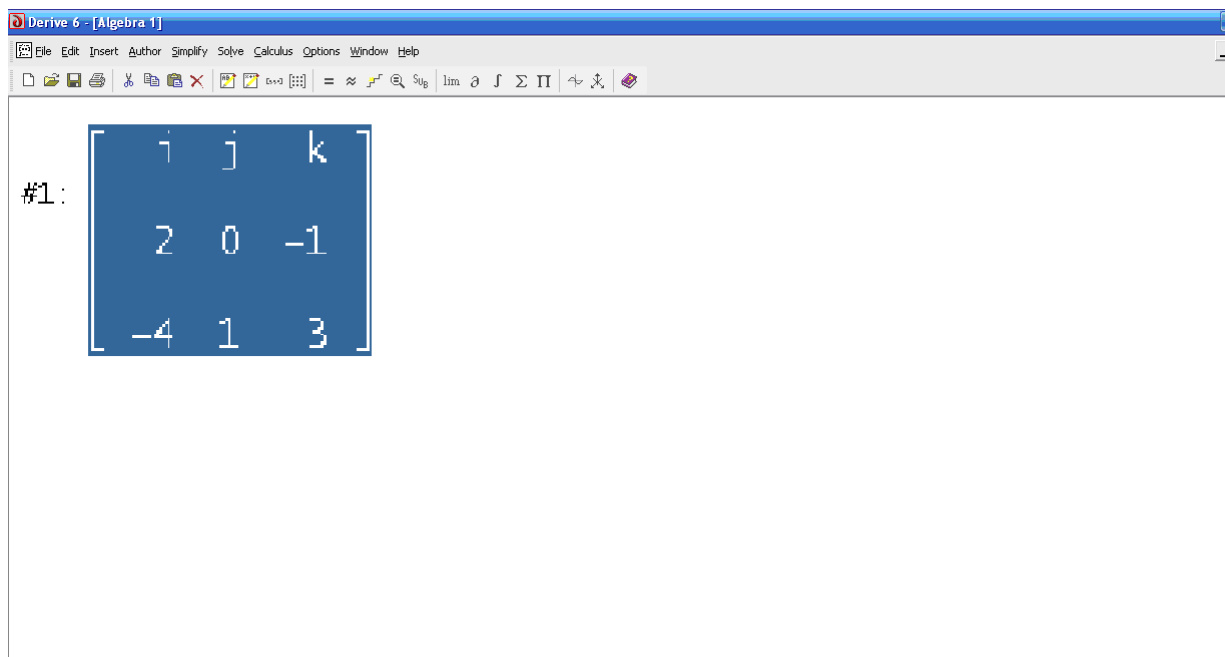



Рис. 1.5. Вікно ППЗ Derive: введення номеру виразу, під яким записано визначник

3. За допомогою опції *Author-Expression* обчислити визначник натиснувши кнопку  (рис. 1.6).

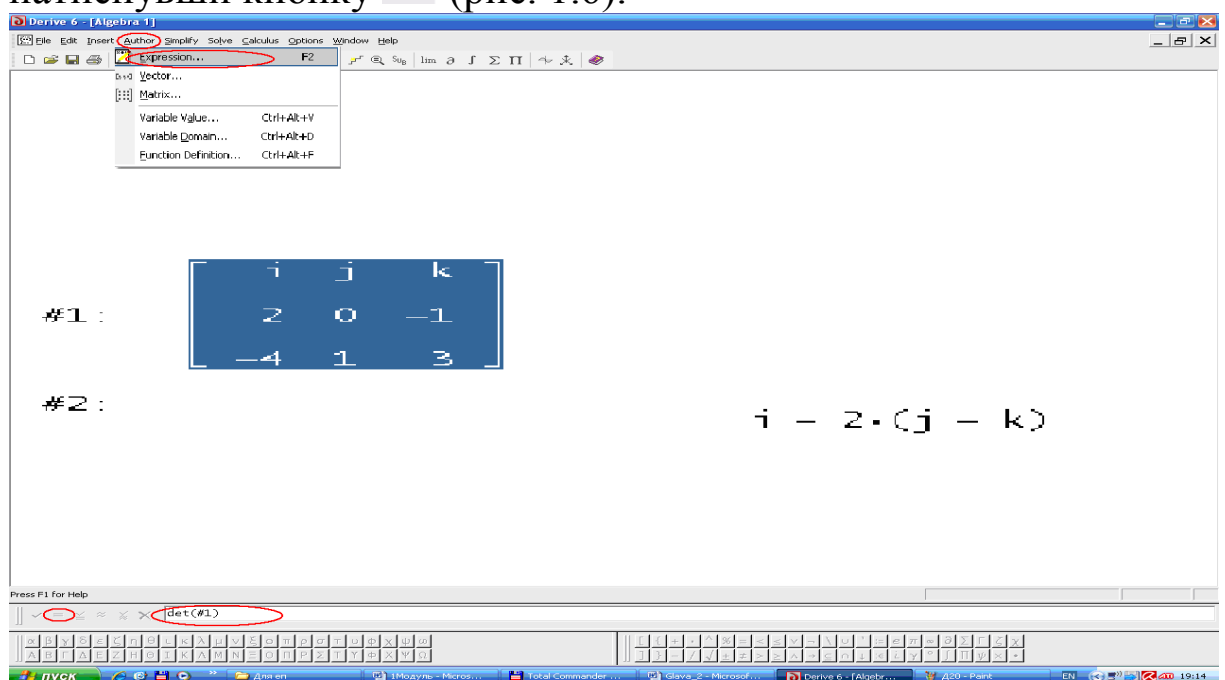


Рис. 1.6. Вікно ППЗ Derive: обчислення визначнику

1.6. Знайдіть значення коефіцієнта k рівняння номограми.

$$\begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

Розв'язання. Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = (-2-k) \begin{vmatrix} 4-k & 6 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -(2+k)((4-k)(3-k)-12) - 2(6-2k-6) = -(2+k)(k^2-7k)+4k =$$

$$= -(k^3+2k^2-7k^2-14k)+4k = -k^3+5k^2+18k.$$

Отже, вихідне рівняння рівносильне рівнянню

$$-k^3 + 5k^2 + 18k = 0.$$

Далі маємо

$$-k(k^2 - 5k - 18) = 0; \quad k_1 = 0 \quad \text{або} \quad k^2 - 5k - 18 = 0, \quad \text{звідси}$$

$$k_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } k = 0; \quad \frac{5 \pm \sqrt{97}}{2}.$$

Процедура обчислення визначника за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathcad.



**«Навчаємо» свій комп'ютер
обчисленню визначників
за допомогою ППЗ Mathcad.**

1. Відкрити вікно ППЗ Mathcad.
2. За допомогою опції *Добавить-Матрицу* ввести визначник (рис.1.7):
 - розмір визначника;
 - числові значення елементів рядків і стовпців.

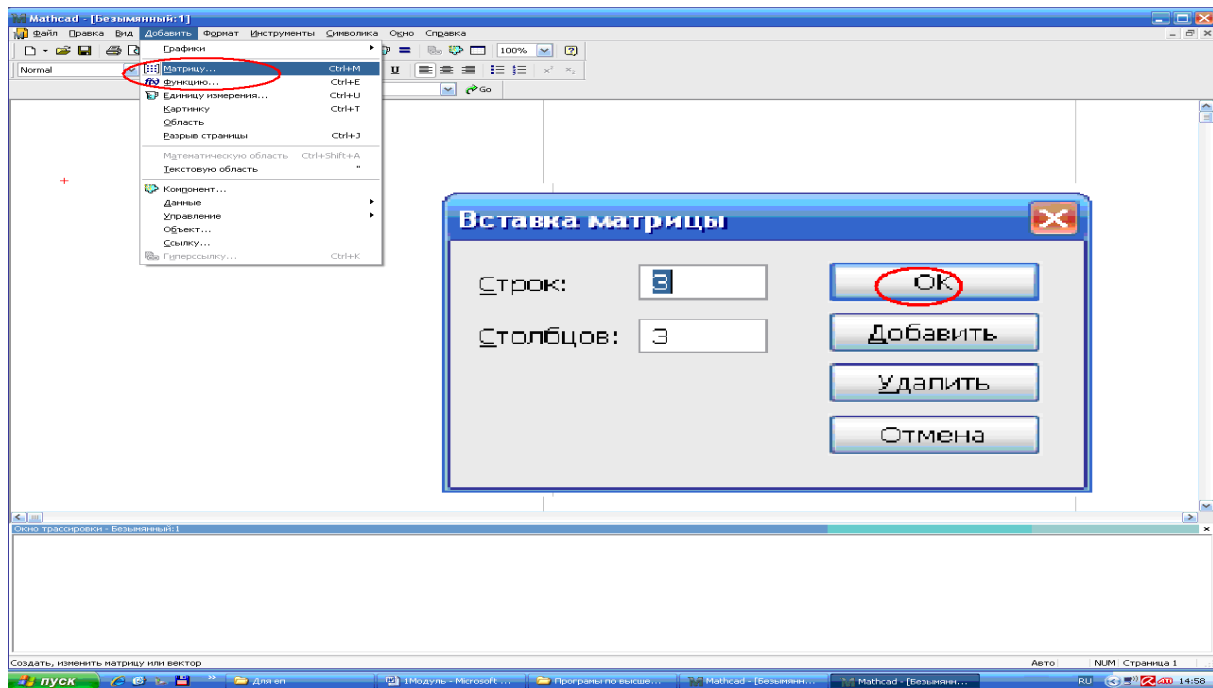


Рис. 1.7. Вікно ППЗ Mathcad: уведення визначника

3. За допомогою опції *Символика–Матрицы–Определитель* обчислити визначник (рис.1.8).
4. Отримати результат (рис. 1.9).

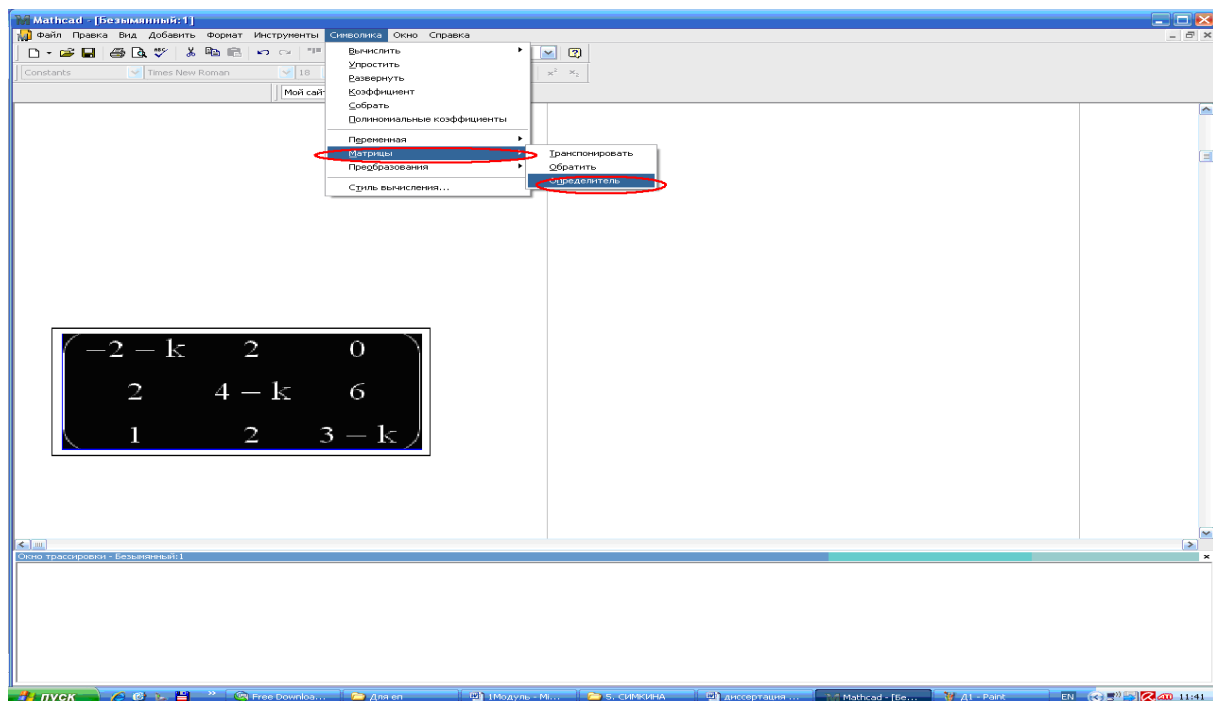


Рис. 1.8. Вікно ППЗ Mathcad: обчислення визначника

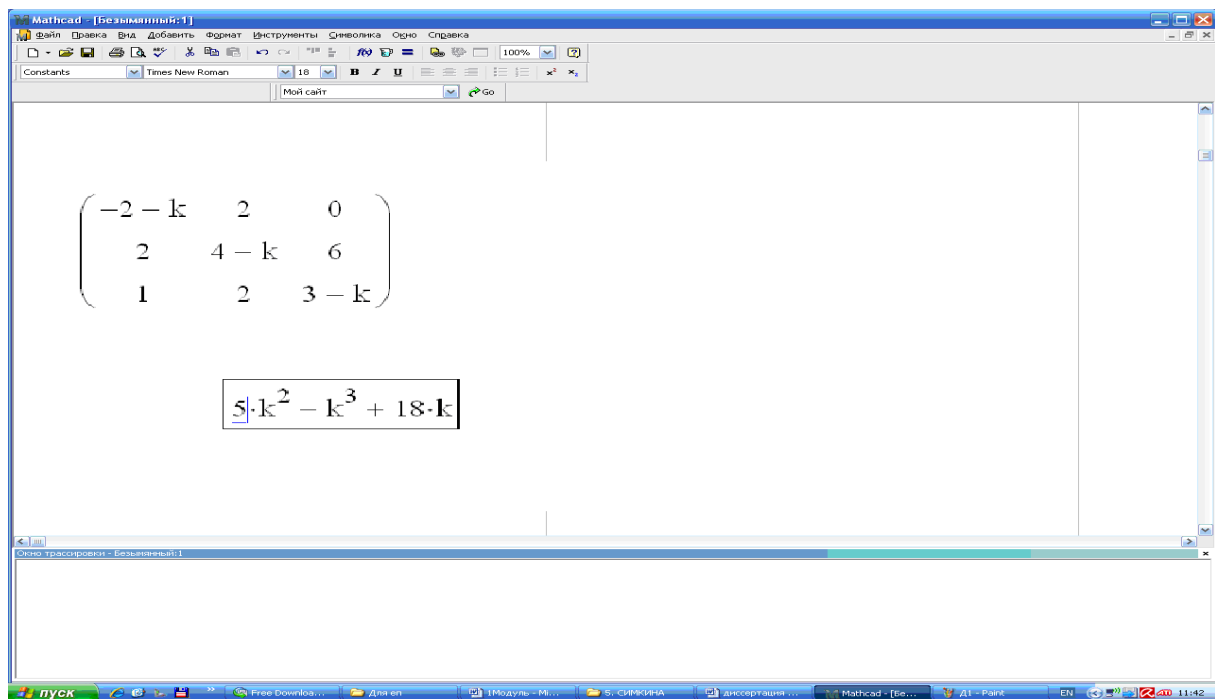


Рис. 1.9. Вікно ППЗ Mathcad: отриманий результат



Моделюємо професійну діяльність інженера

1.7. Знайдіть значення ординати однієї з точок номограми з вирівняними точками:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & y & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Переформулюйте умову на математичну. Для обчислення визначника та знаходження у скористайтесь можливостями програмованих засобів.

Відповідь: $y = -7$.

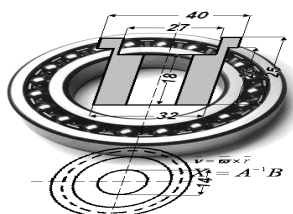
1.8. Знайдіть рівняння нотограми з вирівняними точками:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Переформулюйте умову на математичну. Для обчислення визначника скористайтесь можливостями програмованих засобів.

Відповідь: $y = x + 2$.



Тема 2. МАТРИЦІ

Два залізобетонних заводи випускають вироби M , N , P вищої, першої й другої категорії якості. Кількість випущених кожним заводом виробів по кожній категорії якості характеризується наступною таблицею 1.1:

Таблиця 1.1.

Кількість випущених кожним заводом виробів по кожній категорії якості

Категорія якості	Готові вироби					
	перший завод			другий завод		
	M	N	P	M	N	P
Вища	150	240	320	280	300	450
Перша	100	130	175	120	150	170
Друга	25	15	20	30	20	18

Який загальний випуск виробів по зазначених категоріях якості ?

Кількість виробів, що випущені першим заводом, можна розглядати як елементи таблиці A , а другим заводом – як елементи таблиці B :

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 240 & 320 \\ 100 & 130 & 175 \\ 25 & 15 & 20 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 280 & 300 & 450 \\ 120 & 150 & 170 \\ 30 & 20 & 18 \end{pmatrix}.$$

Таблиці, які задано в такому вигляді, називають матрицями. Над матрицями можна виконувати різні дії.

Складаючи відповідні елементи заданих матриць, одержимо матрицю C , яка визначає загальне число виробів по зазначених категоріях якості:

$$C = \begin{pmatrix} 150+280 & 240+300 & 320+450 \\ 100+120 & 130+150 & 175+170 \\ 25+30 & 15+20 & 20+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 & 540 & 770 \\ 220 & 280 & 345 \\ 55 & 35 & 38 \end{pmatrix}.$$



Необхідні знання про матриці

Def. Таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з $m \times n$ чисел $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$, називають *матрицею*, а числа a_{ij} - *елементами* цієї матриці, де i вказує номер рядка, а j – номер стовпця. Добуток кількості рядків на кількість стовпчиків $m \times n$ називають *розміром* матриці.

Коротко матрицю позначають так:

$$A = (a_{ij}), \text{ де } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Матрицю A розміру $m \times n$ позначають $A_{m \times n}$.

Def. Матрицю, у якій число рядків дорівнює числу стовпців, називають *квадратною*. В іншому випадку матрицю називають *прямокутною*.

Def. Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матрицю називають *нульовою*.

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють *головну діагональ* квадратної матриці, а елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ — *побічну діагональ*.

Def. Квадратну матрицю називають *трикутною*, якщо всі елементи, що розташовані під (над) головною діагоналлю, дорівнюють нулю, а серед тих, що залишилися, є ненульові.

Def. Квадратну матрицю, всі елементи якої, крім діагональних, дорівнюють нулю, називають *діагональною*.

Def. Квадратну матрицю, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, а всі інші — нулю, називають *одиничною* і позначають

$$E_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Def. Матрицю A^T називають *транспонованою* до матриці A , якщо рядки матриці A^T є стовпцями матриці A , а стовпці — рядками матриці A .

Def. Матрицю, яка містить один стовпець, чи один рядок, називають *вектор-стовпцем* чи *вектор-рядком* відповідно. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad A = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Будь-якій квадратній матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність визначник $\det(A)$ (або $\Delta(A)$):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Def. Квадратну матрицю A , визначник якої не дорівнює нулю, називають *невиродженою*.

Якщо $\det(A) = 0$, то матрицю A називають *відродженою*.

Н.В. Прямокутна матриця, яка не є квадратною, визначника не має.



Необхідні знання про лінійні операції над матрицями та про множення матриць

Нехай A і B - матриці однакового розміру.

1. Сумою матриць A і B є матриця $A+B$ того ж самого розміру, кожен елемент якої є сумою відповідних елементів матриць A і B , тобто якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Добутком дійсного числа λ на матрицю є матриця, кожен елемент якої є добутком цього числа на відповідні елементи матриці, тобто

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Різницю матриць $A-B$ визначають як суму матриці A і матриці B , помноженої на -1 :

$$A-B = A + (-1) \cdot B.$$

Операція множення матриць існує лише для узгоджених матриць.

Def. Матриці A і B (тут A - перша матриця, B - друга матриця) називають *узгодженими*, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B .

Нехай A і B - узгоджені матриці, розмірів $m \times n$ і $n \times k$ відповідно. *Добутком* матриці A на матрицю B називають матрицю $C = AB$ розміру $m \times k$, у якій елемент c_{ij} є сумою добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \text{ де } i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, k$$

М.В. У загальному випадку $AB \neq BA$.

Властивості дій над матрицями

1. $A + B = B + A$, де A і B – матриці однакового розміру.
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
4. $(A + B)C = CA + BC$, де C – матриця узгоджена з A і B .
5. $(A^T)^T = A$.
6. $A + (B + C) = (A + B) + C$, де C – матриця того ж розміру, що A і B .
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, де A і B – матриці однакового розміру.
8. $(\alpha A)B = A(\alpha B)$, де A і B – узгоджені матриці.
9. $(AB)C = A(BC)$, де A , B і C – узгоджені матриці.
10. $(A + B)^T = A^T + B^T$, де A і B – матриці однакового розміру.
11. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, де A і B – узгоджені матриці.
12. $A_{m \times n} \cdot E_{n \times n} = A_{m \times n}$.

Тут A, B, C - матриці, α, β – довільні сталі



Вчимося знаходити суму, різницю, добуток матриць

1.9. Знайдіть добуток матриць AB , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки кількість стовпців матриці A співпадає з кількістю рядків матриці B , то матриці узгоджені та добуток AB обчислюємо так:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 & 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 9 & 2 \\ 9 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.10. Знайдіть $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = (x^2 - 3x)(3x + 2)$.

Розв'язання. Необхідно знайти значення виразу

$$f(A) = (A^2 - 3A) \cdot (3A + 2E).$$

Маємо

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 12 & -6 - 15 \\ 8 + 20 & -12 + 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -21 \\ 28 & 13 \end{pmatrix};$$

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -8 & -21 \\ 28 & 13 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -21 \\ 28 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -12 \\ 16 & -2 \end{pmatrix};$$

$$3A + 2E = 3 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 12 & 17 \end{pmatrix};$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -14 & -12 \\ 16 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 12 & 17 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 \cdot 8 - 12 \cdot 12 & -14 \cdot (-9) - 12 \cdot 17 \\ 16 \cdot 8 - 2 \cdot 12 & 16 \cdot (-9) - 2 \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -256 & 78 \\ 104 & -178 \end{pmatrix}.$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -256 & 78 \\ 104 & -178 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

Н.В. Якщо $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_{n-1} x + a_n$ і A - деяка квадратна матриця, то $f(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + a_{n-1} A + a_n E$, де E - одинична матриця того ж розміру, що й матриця A .



Необхідні знання про обернену матрицю

Для кожної невинродженої матриці A ($\det(A) \neq 0$) існує обернена матриця A^{-1} .

Def. Матрицю A^{-1} називають *оберненою* до матриці A , якщо виконуються рівності $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E - одинична матриця, того ж розміру, що й A .

Обернену матрицю знаходять за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

де $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ – транспонована матриця, що складається з алгебраїчних доповнень A_{ij} до відповідних елементів a_{ij} матриці A .

Проведемо доведення для випадку матриці третього порядку. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det(A) \neq 0.$$

Знайдемо добуток $A \cdot A^{-1}$ (матриці A і A^{-1} мають однакові розміри), використовуючи при цьому твердження теорем 1.1 та 1.2. Маємо

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{21} + a_{13} A_{31} = \det(A), \\ c_{22} &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{32} = \det(A), \\ c_{33} &= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33} = \det(A), \\ c_{12} &= a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0, & c_{13} &= a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = 0, \\ c_{21} &= a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13} = 0, & c_{23} &= a_{21} A_{31} + a_{22} A_{32} + a_{23} A_{33} = 0, \\ c_{31} &= a_{31} A_{11} + a_{32} A_{12} + a_{33} A_{13} = 0, & c_{32} &= a_{31} A_{21} + a_{32} A_{22} + a_{33} A_{23} = 0. \end{aligned}$$

Отже,

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогічно можна показати, що $A^{-1} \cdot A = E$.

Отже, формула (1.3) правильна.

Властивості оберненої матриці.

$$1. \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

$$2. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

3. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, де A і B – квадратні матриці однакового розміру.

$$4. (A^{-1})^{-1} = A.$$



Вчимося знаходити обернену матрицю

1.11. Знайдіть обернену матрицю A^{-1} якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Насамперед обчислюємо визначник матриці A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Оскільки A - не вироджена матриця, то обернена матриця існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Отже, обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Перевірка. Знайдемо добуток $A \cdot A^{-1}$. Маємо

$$\begin{aligned}
 A \cdot A^{-1} &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1+4+5 & 1+4-5 & 5+0-5 \\ -1+6-5 & -1+6+5 & -5+0+5 \\ 2-2+0 & 2-2+0 & 10+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 A^{-1} &= \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Відповідь:



Необхідні знання про матричні рівняння

Потрібно знайти матрицю X , що задовольняє матричне рівняння $X \cdot A = B$, де A - не вироджена матриця.

Помноживши справа обидві частини рівняння на обернену матрицю A^{-1} , дістанемо:

$$\begin{aligned}
 (XA) \cdot A^{-1} &= BA^{-1}, & X(AA^{-1}) &= BA^{-1}, & XE &= BA^{-1}, \text{ або} \\
 X &= BA^{-1}.
 \end{aligned}$$

Розв'язок матричного рівняння $AX = B$ знаходять за формулою

$$X = A^{-1}B$$

М.В. У матричному рівнянні $X \cdot A = B$ матриці X і B можуть бути квадратними і прямокутними.



Вчимося розв'язувати матричні рівняння

1.12. Розв'яжіть матричне рівняння $X \cdot A \cdot B = C$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо $|B| = -1 \neq 0$. Це означає, що B - не вироджена матриця для неї існує обернена B^{-1} . Домножимо справа на B^{-1} обидві частини рівняння $X \cdot A \cdot B = C$, маємо

$$X \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}, \quad X \cdot A \cdot E = C \cdot B^{-1}, \quad X \cdot A = C \cdot B^{-1}.$$

Обчислимо $|A| = -5 \neq 0$. Це означає, що A - не вироджена матриця для неї існує обернена A^{-1} . Домножимо справа на A^{-1} обидві частини рівняння $X \cdot A = C \cdot B^{-1}$, маємо

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}, \quad X \cdot E = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}, \quad X = C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Знаходимо обернені матриці A^{-1} та B^{-1} :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \quad A_{11} = 1, \quad A_{21} = -2, \quad A_{12} = -3, \quad A_{22} = 2.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -1, \quad B_{11} = -7, \quad B_{21} = -4, \quad B_{12} = -2, \quad B_{22} = -1.$$

$$B^{-1} = -\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} X &= CB^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \\ & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot (1 \cdot 7 - 2 \cdot 2 \quad 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot (3 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot (3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \quad 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2) = -\frac{1}{4} \cdot (-3 \quad -2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Зробимо перевірку, підставимо $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ у рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Маємо } \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Відповідь: } X = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



Необхідні знання про ранг матриці

Задамо матрицю A розміру $m \times n$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де число k не більше чисел m та n .

Def. Визначник порядку k , складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називають *мінором k -го рядку матриці A* .

Def. Рангом матриці A називають найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $r(A)$.

Ранг матриці міститься у межах $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$.

Н.В. Ранг нульової матриці дорівнює нулю.

Def. Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називають *базисним*. У матриці може бути кілька базисних мінорів.

Ранг матриці можна знаходити так. Якщо в матриці вказано відмінний від нуля мінор k -го порядку, то ранг матриці не менший k . При цьому, якщо всі мінори $(k+1)$ -го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k . Якщо зустрівся ненульовий мінор $(k+1)$ -го порядку, то переходять до дослідження мінорів порядку $k+2$, тобто процедура продовжується.

На практиці для відшукування рангу матриць великих розмірів зручніше використовувати інший метод, який ґрунтується на такому твердженні:

Ранг матриці не зміниться, якщо над нею виконати *елементарні перетворення*, а саме:

- 1) переставити місцями два рядки (стовпці);
- 2) помножити кожний елемент рядка (стовпця) на ненульовий множник;
- 3) додати до елементів рядка (стовпця) елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.
- 4) викреслити нульовий рядок.

Скориставшись елементарними перетвореннями, матрицю можна звести до вигляду, коли всі її елементи, крім елементів

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$, де $r \leq \min(m, n)$, дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці дорівнює r .



Вчимося знаходити ранг матриці

1.13. Знайдіть ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Виділимо у матриці

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 6 \end{array} \right)$$

мінор другого порядку $M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Мінорами $(k+1)$ -го порядку для нього є мінори третього порядку :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \text{ й тощо.}$$

Усі мінори третього порядку рівні нулю, а мінор другого порядку відмінний від нуля, отже, $r(A) = 2$.

Відповідь: $r(A) = 2$.

1.14. Знайдіть ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Виконавши елементарні перетворення дістанемо

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник третього порядку, складений з елементів, що стоять на перетині перших трьох рядків і стовпців останньої матриці

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 16 = 10 \neq 0$$

Отже, $r(A) = 3$.

Відповідь: $r(A) = 3$.



Виконуємо операції над матрицями за допомогою ППЗ Derive, Mathcad

Процедура виконання дій над матрицями за допомогою відповідних правил.

1.15. Підприємство виробляє продукцію трьох видів P_1, P_2, P_3 , та використовує сировину трьох типів S_1, S_2, S_3 . Норми витрат сировини на одиницю продукції кожного типу (відповідно по рядкам і стовпцям) задані матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вартість одиниці сировини кожного типу S_1, S_2, S_3 задана матрицею

$$B = (25 \quad 20 \quad 10).$$

Які загальні витрати підприємства на виробництво 200, 300 та 350 одиниць продукції виду P_1, P_2, P_3 , відповідно?

Розв'язання.

Крок 1. Визначимо вартість сировини для виробництва одиниці продукції кожного типу. Для цього помножимо матрицю-строку B вартості одиниці сировини на матрицю A норм витрат сировини:

$$\begin{aligned} B \cdot A &= (25 \quad 20 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= [25 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 1 \quad 25 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 5 \quad 25 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 6] = \\ &= (125 \quad 180 \quad 265) = C. \end{aligned}$$

Крок 2. Складемо матрицю об'ємів виробництва продукції
 $Q = (200 \quad 300 \quad 350)$.

Крок 3. Визначимо загальні витрати підприємства. Для цього помножимо матрицю C на матрицю Q :

$$\begin{aligned} D &= (125 \quad 180 \quad 265) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 350 \end{pmatrix} = \\ &= 125 \cdot 200 + 180 \cdot 300 + 265 \cdot 350 = 25\,000 + 54\,000 + 92\,750 = 171\,750. \end{aligned}$$

Відповідь: 171750.

1.16. Задана таблиця 1.2. «Витрати-випуск НКМЗ».

Потрібно визначити, які повинні бути трудові ресурси та рівні випусків продукції в кожному виробничому секторі (I-III), якщо припускається в наступному терміні спожити 50 тис. т продукції металевого цеху, 70 тис. машин та вийняти 60 робітників.

Таблиця 1.2.

Дані про виконання балансу за звітний період

Виробничий сектор	Споживаючий сектор x_{ij}				Валовий випуск x_i
	I	II	III	Державний сектор (кінцевий продукт) y_j	
I	8	6	4	12	30
II	10	2	4	24	40
III	6	4	4	46	60

Розв'язання.

Крок 1. Уведемо позначання x_i - валовий об'єм продукції, y_j - кінцевий продукт. Визначаємо елементи матриці A коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, які характеризують кількість продукту i , яке використовується під час виробництва одиниці продукції j . Для цього використаємо пропозицією про пропорційну залежність між витратами та об'ємами виробництва $x_{ij} = a_{ij}x_j$, де x_{ij} - об'єм продукції i -тої галузі, що споживається j -тою у процесі виробництва.

Тоді

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}: \quad a_{11} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}; \quad a_{21} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; \quad a_{31} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}; \quad a_{12} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}; \quad a_{22} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20};$$
$$a_{32} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}; \quad a_{13} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}; \quad a_{23} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}; \quad a_{33} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}.$$

Складаємо матрицю A :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{3}{20} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{20} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Перевіряємо продуктивність матриці A :

1. $a_{11} = \frac{4}{15} < 1; \quad a_{22} = \frac{1}{20} < 1; \quad a_{33} = \frac{1}{15} < 1.$

2.

$$a_{12} \cdot a_{21} = \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{20} < 1; \quad a_{13} \cdot a_{31} = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{75} < 1; \quad a_{23} \cdot a_{32} = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{150} < 1.$$

3.

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = \frac{4}{15} + \frac{3}{20} + \frac{1}{15} = \frac{29}{60} < 1; \quad a_{21} + a_{22} + a_{23} = \frac{1}{3} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} = \frac{9}{20} < 1;$$

$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{11}{30} < 1.$$

4. Норма матриці $A: \|A\| = \max \left\{ \frac{29}{60}; \frac{9}{20}; \frac{11}{30} \right\} = \frac{29}{60} < 1.$

Значить, матриця A продуктивна і для будь-якої матриці кінцевого продукту Y існує матриця валових випусків X , яка

задовольняє матричному рівнянню $X = AX + Y$. Це рівняння запишемо у вигляді $(E - A)X = Y$.

Крок 3. Для того, щоб розв'язати останнє рівняння, знайдемо матрицю $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{3}{20} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{20} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{19}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{14}{15} \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Обчислюємо визначник матриці $E - A$:

$$\begin{aligned} |E - A| &= \begin{vmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{19}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{14}{15} \end{vmatrix} = \frac{11}{15} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{14}{15} - \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} \\ &\quad - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} - \frac{1}{15} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{5} - \frac{11}{15} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} - \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{15} = \frac{2618}{4500} \approx 0,582. \end{aligned}$$

Крок 5. Оскільки $|E - A| \neq 0$, розв'язок рівняння $(E - A)X = Y$ можна знайти за формулою $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$. Для побудови матриці $(E - A)^{-1}$ обчислюємо алгебраїчні доповнення матриці $(E - A)$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \frac{19}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{10} & \frac{14}{15} \end{vmatrix} = \frac{19}{20} \cdot \frac{14}{15} - \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) = \frac{266}{300} - \frac{1}{150} = \frac{264}{300} \approx 0,88;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{14}{15} \end{vmatrix} = -\left(\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{14}{15} - \left(-\frac{1}{15}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = -\left(\frac{14}{45} - \frac{1}{75}\right) = \frac{73}{225} \approx 0,324;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{19}{20} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{19}{20} = \frac{1}{30} + \frac{19}{100} = \frac{67}{300} \approx 0,223;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \frac{3}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{10} & \frac{14}{15} \end{vmatrix} = -\left(\left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \frac{14}{15} - \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)\right) = \frac{42}{300} + \frac{1}{150} = \frac{44}{300} \approx 0,147;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{3}{20} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{vmatrix} = -\left(\frac{11}{15} \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) - \left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{11}{150} - \frac{3}{100} = \frac{31}{300} \approx 0,103;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -\frac{3}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{15} \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) - \left(-\frac{1}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) = \frac{3}{300} - \frac{1}{300} = \frac{2}{300} \approx 0,007;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \end{vmatrix} = -\left(\frac{11}{15} \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)\right) = \frac{11}{225} + \frac{1}{45} = \frac{16}{225} \approx 0,071;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{3}{20} \\ \frac{1}{3} & \frac{19}{20} \end{vmatrix} = \frac{11}{15} \cdot \frac{19}{20} - \left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{209}{300} - \frac{3}{60} = \frac{194}{300} \approx 0,647.$$

Крок 6. Складаємо матрицю C з алгебраїчних доповнень A_{ij} , при чому алгебраїчні доповнення рядків записуємо в стовпчики (транспонування матриці):

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,147 & 0,073 \\ 0,324 & 0,671 & 0,071 \\ 0,233 & 0,103 & 0,647 \end{pmatrix}.$$

Крок 7. Знаходимо матрицю $(E - A)^{-1}$:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{|E - A|} C = \begin{pmatrix} 1,153 & 0,252 & 0,126 \\ 0,558 & 0,154 & 0,122 \\ 0,384 & 0,178 & 1,112 \end{pmatrix}.$$

Крок 8. Обчислюємо об'єми валової продукції X , помножуючи матрицю $(E - A)^{-1}$ на матрицю нового кінцевого продукту Y :

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,153 & 0,252 & 0,126 \\ 0,558 & 0,154 & 0,122 \\ 0,384 & 0,178 & 1,112 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100,84 \\ 115,966 \\ 98,319 \end{pmatrix}$$

Відповідь: для задоволення нових показників попиту необхідно буде виробити десь *101 тис. т.* продукції металевого цеху, *116 тис.* машин та найняти *98* робітників.

Процедура обчислення добутку матриць за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Derive.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню добутку матриць за допомогою ППЗ Derive.

1.17. Відповідно до програми запуску доменних цехів установлено, що буде споруджено:

а) на котельно-механічному заводі (X_1) буде запущено 10 одиниць об'єктів типу *I* і 15 одиниць типу *II*;

б) на старокраматорському заводі (X_2) буде запущено 20 одиниць об'єктів типу *III*;

в) на новокраматорському заводі (X_3) буде запущено 100 одиниць об'єктів типу *IV*.

Визначити витрати матеріалів видів p і q на кожному заводі, якщо норми витрати матеріалів (у відповідних одиницях виміру) наведені в наступній таблиці 1.3:

Таблиця 1.3.

Норми витрат матеріалів

Тип об'єкта	Норми витрати матеріалів	
	p	q
<i>I</i>	2	15
<i>II</i>	10	20
<i>III</i>	10	100
<i>IV</i>	5	50

Уведемо матриці: M – матриця об'єктів по заводах, A – матриця норм витрати матеріалів по об'єктах:

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 10 & 20 \\ 10 & 100 \\ 5 & 50 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток цих матриць.

1. Відкрити вікно ППЗ Derive.

2. За допомогою опції *Author-Matrix* ввести матриці (рис.1.10) :
- розмір матриці;
 - числові значення елементів рядків і стовпців;
 - номер виразу, під яким записано матрицю.

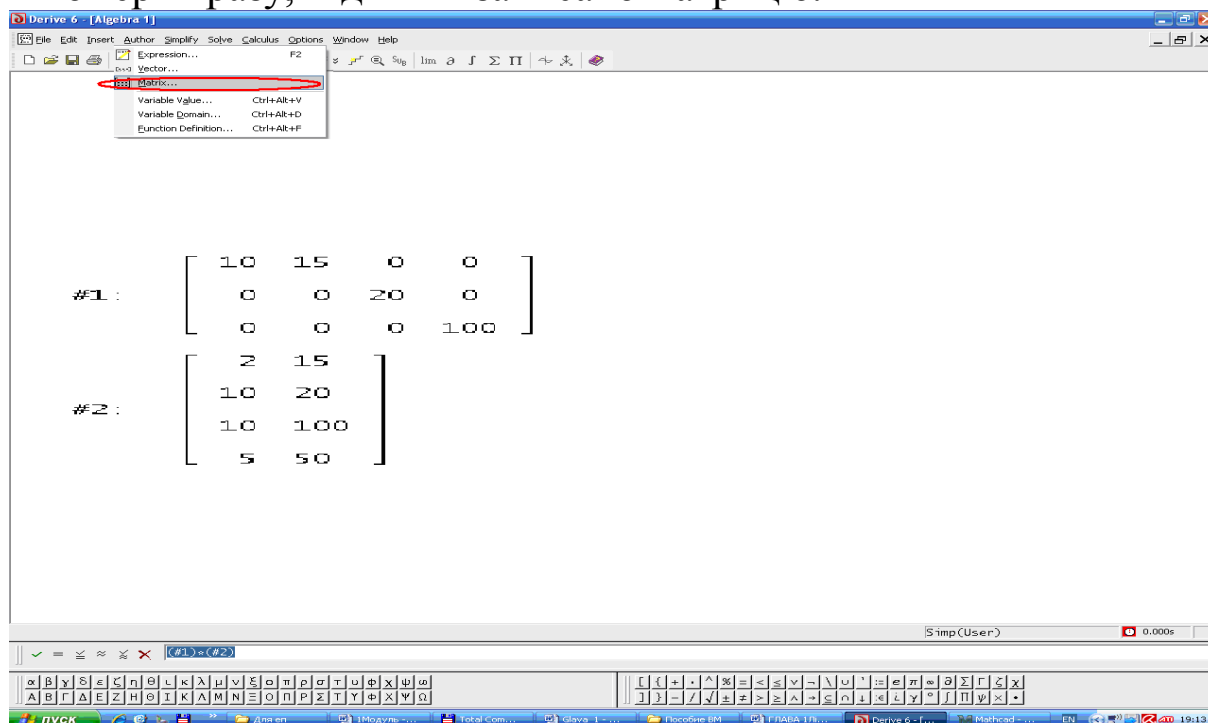


Рис. 1.10. Вікно ППЗ Derive: введення матриці

3. За допомогою опції *Author-Expression* ввести добуток першої та другої матриць на панелі символів (рис.1.11).

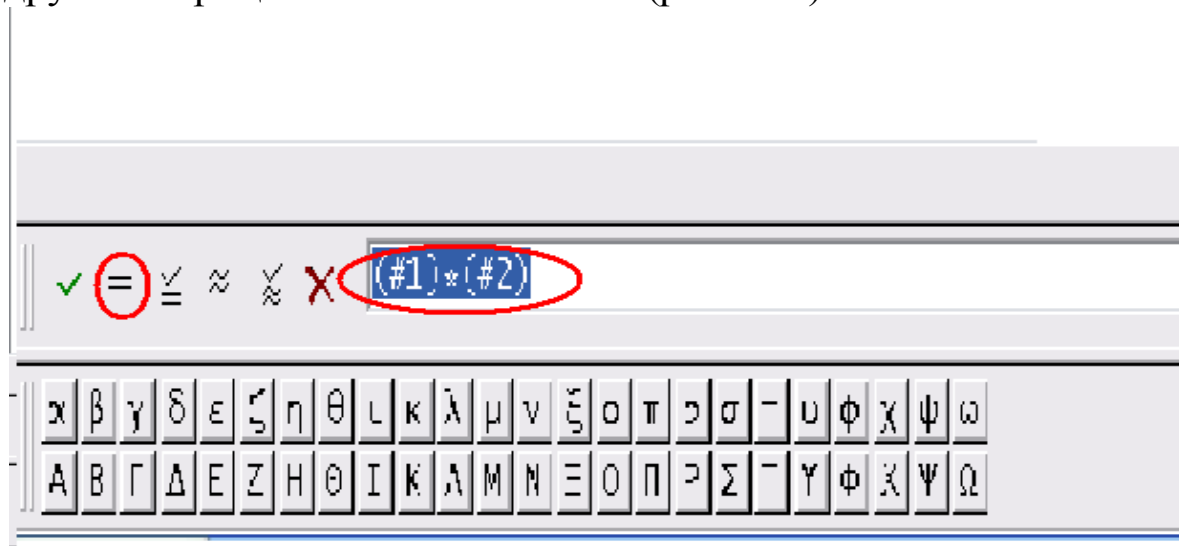


Рис. 1.11. Вікно ППЗ Derive: введення добутку першої та другої матриць

4. Обчислити добуток натиснувши кнопку  (рис. 1.12).

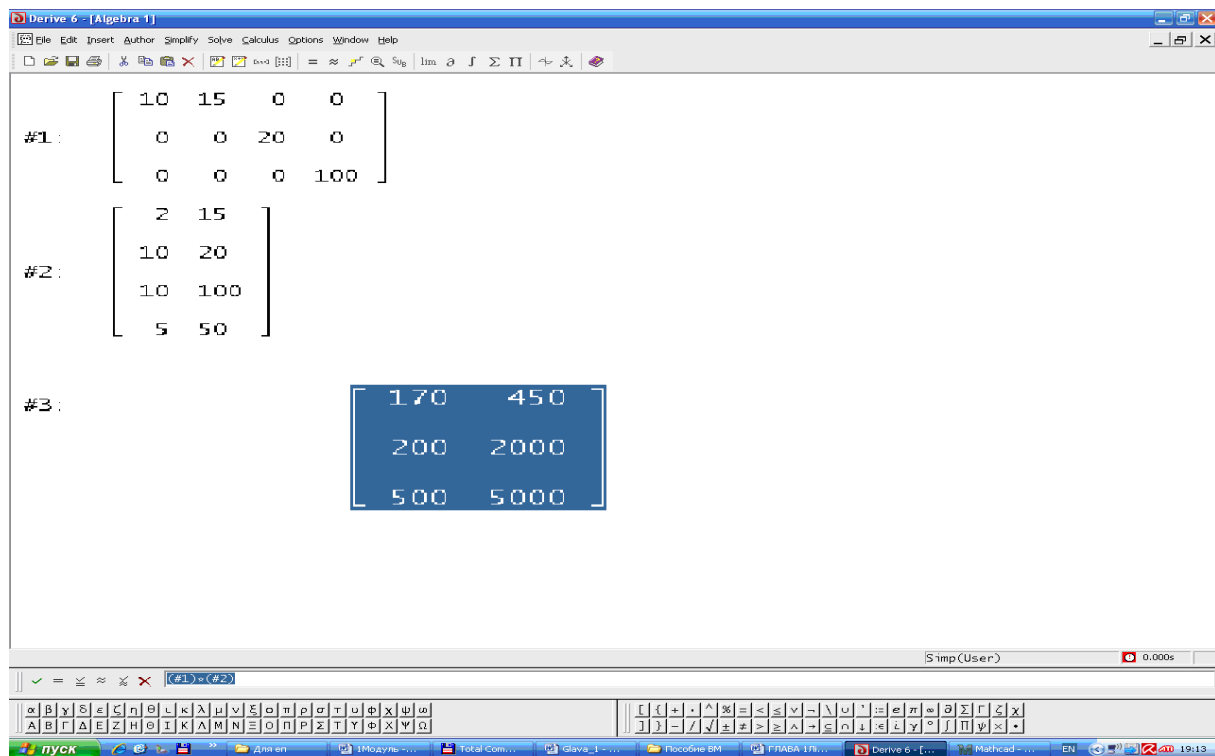


Рис. 1.12. Вікно ППЗ Derive: обчислення добутку матриць

Відповідь: витрати матеріалу p на заводах X_1, X_2, X_3 відповідно складають 170, 200, 500 одиниць, а матеріалу q відповідно 450, 2000, 5000 одиниць.

Процедура знаходження оберненої матриці за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathcad.



«Навчаємо» свій комп'ютер знаходженню оберненої матриці за допомогою ППЗ Mathcad.

До задачі 1.16 на кроці 5 розглянемо процедуру знаходження $(E - A)^{-1}$.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathcad.
2. За допомогою опції *Добавить - Матрицу* ввести матрицю (рис.1.13):
 - розмір матриці;
 - числові значення елементів рядків і стовпців.

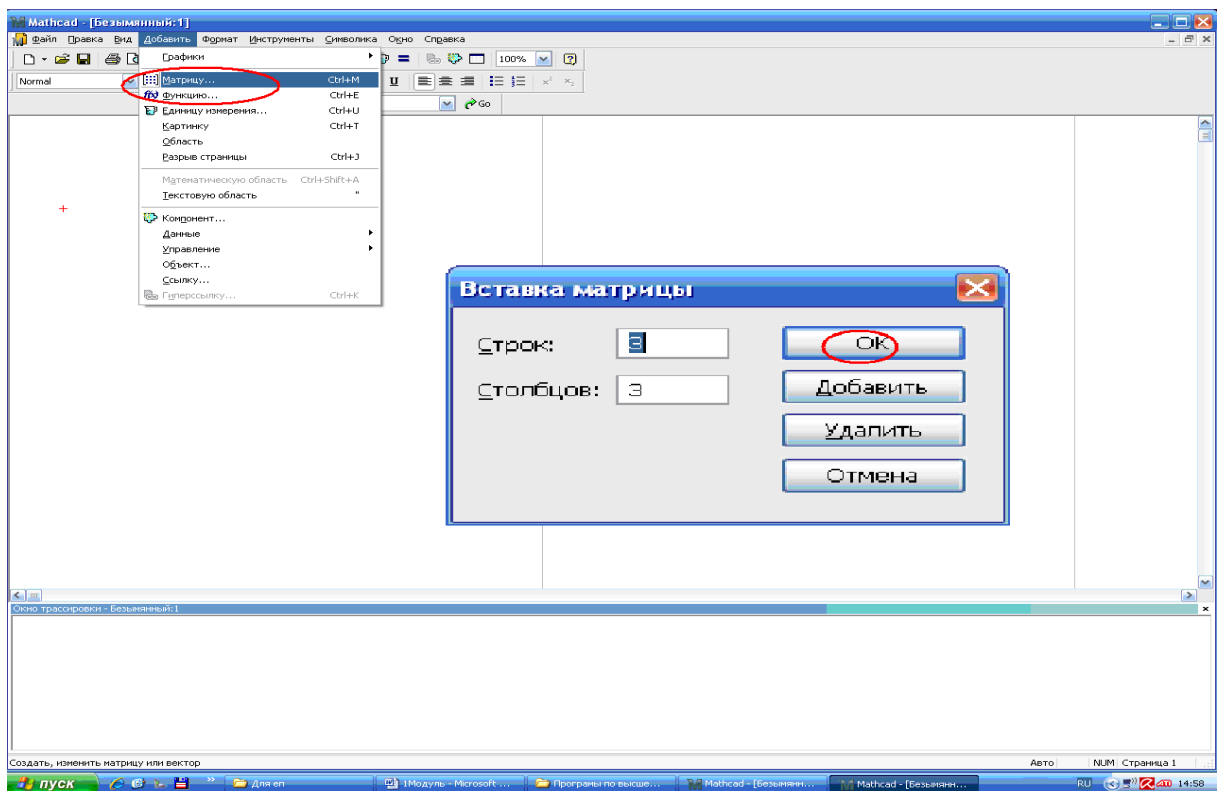


Рис. 1.13. Вікно ППЗ Mathcad: введення матриці

3. За допомогою опції *Символика-Матрицы-Обратить* знайти обернену матрицю (рис. 1.14).

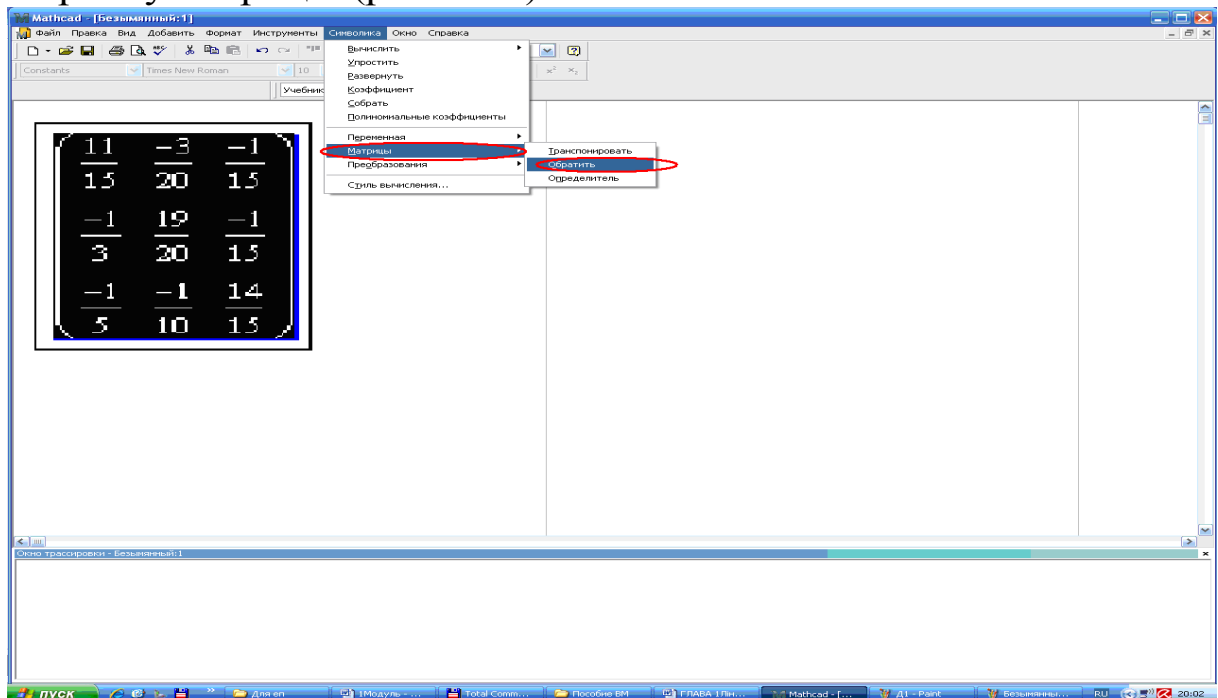


Рис. 1.14. Вікно ППЗ Mathcad: знаходження оберненої матриці

5. Виокремити отриману матрицю та за допомогою опції *Вычислить – С плавающей запятой* знайти приблизні значення елементів матриці (рис.1.15).

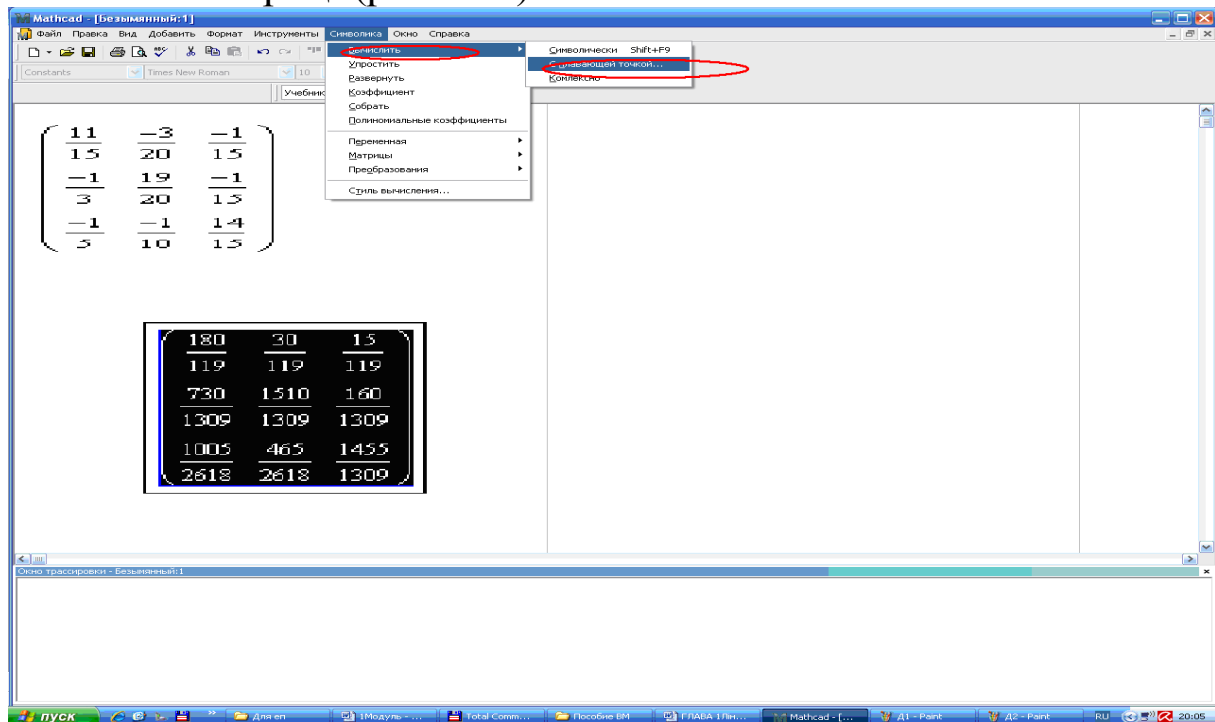


Рис. 1.15. Вікно ППЗ Mathcad: знаходження приблизних значень елементів матриці

6. Матриця $(E - A)^{-1}$ має вигляд (рис. 1.16).

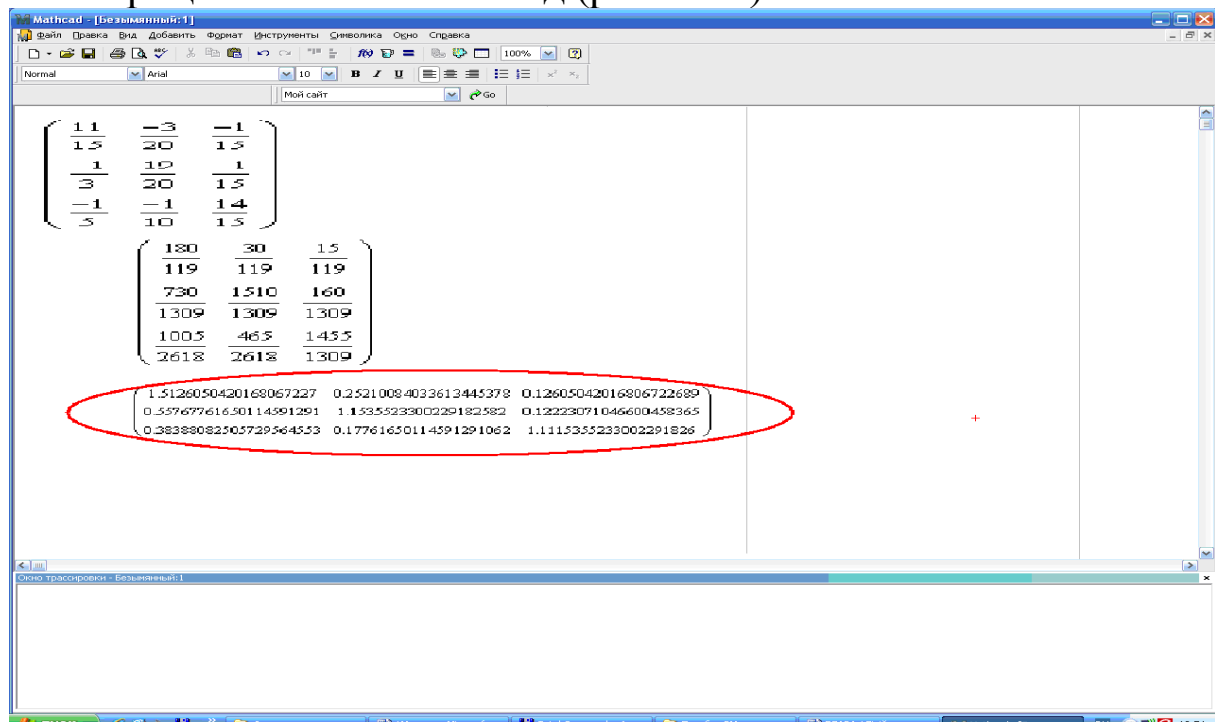


Рис. 1.16. Вікно ППЗ Mathcad: отриманий результат



Моделюємо професійну діяльність інженера

1.18. Для запуску цехів A_1, A_2 необхідні вузли B_1, B_2 й станки C_1, C_2, C_3 у кількості, що наведено у таблицях:

Цехи	Кількість вузлів		Вузол	Кількість станків		
	B_1	B_2		C_1	C_2	C_3
A_1	2	3	B_1	2	1	0
A_2	1	4	B_2	1	0	3

Знайдіть кількість станків, необхідних для запуску кожного з цехів.



Розробіть первинну модель задачі. Складіть план покрокового впровадження розв'язання задачі в життя. Запишіть дані таблиць у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \text{ де } \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$
 Для знаходження значень матриці $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ й обчислення добутку матриць скористайтесь можливостями програмованих засобів.

Відповідь: для запуску цеху A_1 необхідно 7 станків C_1 , 2 станки C_2 і 9 станків C_3 ; для запуску цеху A_2 необхідно 6 станків C_1 , 1 станок C_2 і 12 станків C_3 .

1.19. Технологічні залежності між деталями x_1, x_2, x_3, x_4 вузлами y_1, y_2, y_3 , що складаються з цих деталей, й готовими виробами A, B, C представлені таблицею:

		Кількість деталей				Кількість вузлів		
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
Вироби	A	2	2	0	0	3	0	0
	B	0	0	1	0	0	1	2
	C	0	0	0	0	0	0	3
Вузли	y_1	1	2	0	0	0	0	0
	y_2	3	1	2	5	0	0	0
	y_3	0	4	0	1	0	0	0

Визначте кількість деталей кожного виду, необхідну для виробництва виробів A, B, C .



Розробіть первинну модель задачі. Складіть план покрокового впровадження розв'язання задачі в життя. Пригадайте розв'язання схожої задачі 1.18 (схожі за змістом).

Запишіть дані таблиць у матричній формі. Для

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

знаходження значень матриці й обчислення добутку відповідних матриць скористайтесь можливостями програмованих засобів. Встановіть недоліки та достоїнства об'єктів.

Відповідь:		Кількість деталей			
		x_1	x_2	x_3	x_4
Вироби	A	5	8	0	0
	B	3	9	3	7
	C	0	12	0	3



Користуючись законами Кірхгофа й з огляду на умовно обрані напрямки струмів (I_1 – струм у першому елементі, спрямований ліворуч; I_2 – струм у другому елементі, спрямований ліворуч; I_3 – струм на ділянці з опором R , спрямований праворуч), одержуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3, \\ I_1 r_1 - I_2 r_2 = E_1 - E_2 \\ I_1 r_1 + I_3 R = E_1 \end{cases}$$



Необхідні знання про системи лінійних алгебраїчних рівнянь

[illegible]

49

Розв'язати систему (1.4) – значить знайти такі значення невідомих $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$, при підстановці яких у систему (1.4) усі її рівняння обертаються у тотожність.

Def. СЛАР (1.4) називають *однорідною*, якщо всі вільні члени рівні нулю, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них не дорівнює нулю. Однорідна система завжди має нульовий (*тривіальний*) розв'язок $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Def. Систему рівнянь називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Def. Сумісну систему називають *визначеною*, якщо вона має один-єдиний розв'язок $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку.

Def. Матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

називають *головною* та *розширеною* матрицями системи (1.4) відповідно.



Необхідні знання про методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Метод Крамера

Задамо систему вигляду

[illegible]

Головна матриця системи (1.5) квадратна. Визначник цієї матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

називають визначником системи. Якщо $\Delta \neq 0$, то систему (1.5) називають *невирожденою*.

Нехай $\Delta \neq 0$. Тоді систему (1.5) можна звести до вигляду

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1, \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2, \\ \dots \dots \dots \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_n, \end{cases} \quad (1.6)$$

де

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Наприклад, щоб дістати перше рівняння системи (1.6), виконаємо такі дії: помножимо перше рівняння системи (1.5) на алгебраїчне доповнення A_{11} головної матриці, друге – на A_{21} , ..., останнє – на A_{n1} , після цього утворені рівняння складемо і згрупуємо доданки відповідним чином, тобто

$$A_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + A_{21}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \dots + A_{n1}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n,$$

або

$$(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots + A_{n1}a_{n1})x_1 + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \dots + A_{n1}a_{n2})x_2 + \dots + (A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \dots + A_{n1}a_{nn})x_n = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n.$$

За теоремою 1.1 вираз $A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots + A_{n1}a_{n1}$ є розкладом визначника основної матриці за елементами першого стовпця, тому виконується рівність $A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots + A_{n1}a_{n1} = \Delta$. Усі інші суми за теоремою 1.2 дорівнюють нулю: $A_{11}a_{1j} + A_{21}a_{2j} + \dots + A_{n1}a_{nj} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Праву частину $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$ можна розглядати як визначник матриці A , у якої перший стовпець замінений на

стовпець вільних членів. Отже, $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$. Інші рівності доводяться аналогічно.

Проаналізуємо систему (1.6).

Якщо $\Delta = 0$, а принаймні один із визначників $\Delta_i \neq 0$, то система (1.5) несумісна.

Якщо $\Delta = 0$ і всі визначники $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ дорівнюють нулю, то система (1.5) має безліч розв'язків.

Якщо $\Delta \neq 0$, то СЛАР (1.5) має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$



Вчимося застосовувати метод Крамера

1.20. Розв'яжіть систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Використовуючи властивості визначників, обчислюємо визначник основної матриці:

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 0 - 9 + 0 - (2 + 0 + 0) = -11 \neq 0. \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0.$$

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$.

М.В. Визначник Δ_3 можна не обчислювати, оскільки, знаючи x_1 та x_2 , невідоме x_3 можна визначити з будь-якого рівняння системи після підстановки в нього значень x_1 та x_2 .

Матричний метод

Використовуючи поняття добутку матриці на матрицю, систему (1.4) можна записати у вигляді

$$AX = B,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо в СЛАР $n = m$ і визначник системи $\Delta(A) \neq 0$, то єдиний розв'язок системи можна знайти за формулою

$$X = A^{-1}B. \quad (1.7)$$



Вчимося застосовувати матричний метод

1.21. Розв'яжіть систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Використовуючи властивості визначників, обчислюємо визначник основної матриці: $\Delta = -11$.

Оскільки $\Delta(A) \neq 0$, то обернена матриця існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, & A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{-1}{11} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді за формулою (1.6) дістаємо

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \\ -3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 7 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Відповідь: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Метод Гаусса

Цей метод застосовують для розв'язання СЛАР довільного вигляду. Процес розв'язання за методом Гауса складається з двох етапів. Перший етап (*прямий хід*) ґрунтується на елементарних перетвореннях *рядків* системи, а саме, система залишається рівносильною початковій системі, якщо

- 1) переставити місцями два рівняння;
- 2) помножити обидві частини рівняння на ненульовий множник;
- 3) додати почленно до рівняння елементи іншого рівняння, помножені на одне й те саме число.

За допомогою таких перетворень систему (1.4) зводять до трапецієподібного (або трикутного) вигляду

[illegible]

На другому етапі (зворотній хід) послідовно визначають невідомі системи, рухаючись від останнього рівняння до першого.

Проаналізуємо систему (1.8), в якій r – ранг основної матриці A .

Якщо $r = n$, $m \geq n$, тоді система (1.8) набирає трикутного вигляду

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{c}_{12}x_2 + \dots & + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ & \bar{a}_{22}x_2 + \dots & + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ & \dots\dots\dots & \\ & & \bar{a}_{mn}x_n = \bar{b}_n. \end{cases}$$

Одержана система, отже, і початкова система (1.4), має єдиний розв'язок, який визначимо так. Спочатку з останнього рівняння знайдемо x_n , після цього з попереднього рівняння знайдемо x_{n-1} ; піднімаючись по системі від останнього рівняння до першого, знайдемо інші невідомі.

Якщо $r < n$, то може бути два випадки:

1) хоча б одне з чисел $\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_n$ не дорівнює нулю. Тоді система (1.4) не має розв'язків, тобто несумісна.

2) усі числа $\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_n$ рівні нулю. Тоді система (1.4) має безліч розв'язків, тобто невизначена.

М.В. Оскільки СЛАР взаємно однозначно відповідає розширена матриця, то елементарні перетворення рівнянь системи рівносильні перетворенню рядків розширеної матриці. Тому надалі при розв'язуванні СЛАР за методом Гауса будемо працювати тільки з розширеною матрицею.



Вчимося застосовувати метод Гауса

1.22. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -4, \end{cases}$$

використовуючи метод Гауса.

Розв'язання. Записуємо розширену матрицю системи

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \\ -3 & 1 & 4 & -4 \end{array} \right).$$

Прямий хід.

Виконуємо елементарні перетворення над рядками матриці та зведемо її до трикутного вигляду. Друга матриця отримана елементарними перетвореннями у першій матриці: перший рядок залишився без змін; до другого рядка додали перший, помножений на (-2) , й записали у другий рядок; до третього рядка додали перший, помножений на (3) , й записали у третій рядок. Третя матриця отримана елементарними перетвореннями у другій матриці: перший і другий рядки залишилися без змін; до третього рядка додали другий, помножений на (3) , й записали у третій рядок. Четверта матриця отримана елементарними перетвореннями у третій матриці: перший рядок залишився без змін; третій рядок записали на місці другого; до отримано третього рядка додали другий, помножений на (3) , й записали у третій рядок.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \\ -3 & 1 & 4 & 10 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 7 & 13 & 46 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 11 & 33 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Зворотній хід.

Останній рядок відповідає рівнянню $11 \cdot x_3 = 33$, звідки $x_3 = 3$.

Далі записуємо рівняння, що відповідає другому рядку:

$$\begin{aligned} x_2 + 5x_3 &= 16, \text{ звідси } x_2 = 16 - 5x_3 = 16 - 15 = 1, \quad x_2 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 12, \text{ звідси } x_1 = 12 - 2x_2 - 3x_3 = 12 - 2 - 9 = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Евристичний тренажер «Gauss» допоможе оволодіти вмінням по застосуванню методу Гауса.

1. Запустіть програму для роботи (рис. 1.18).

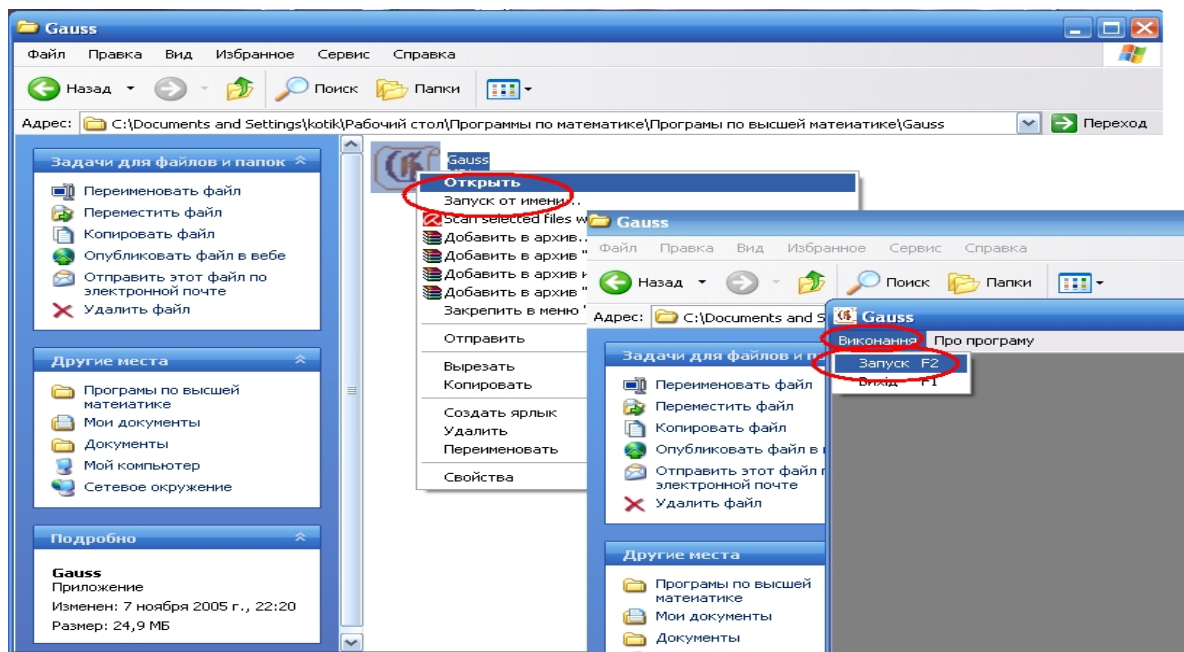


Рис. 1.18. Запуск евристичного тренажеру «Gauss»

2. Отримайте вікно із завданням по розв'язуванню системи. Обирайте в залежності від особистої орієнтації у наступних діях пропозиції «далі» або «допомога» (рис. 1.19).

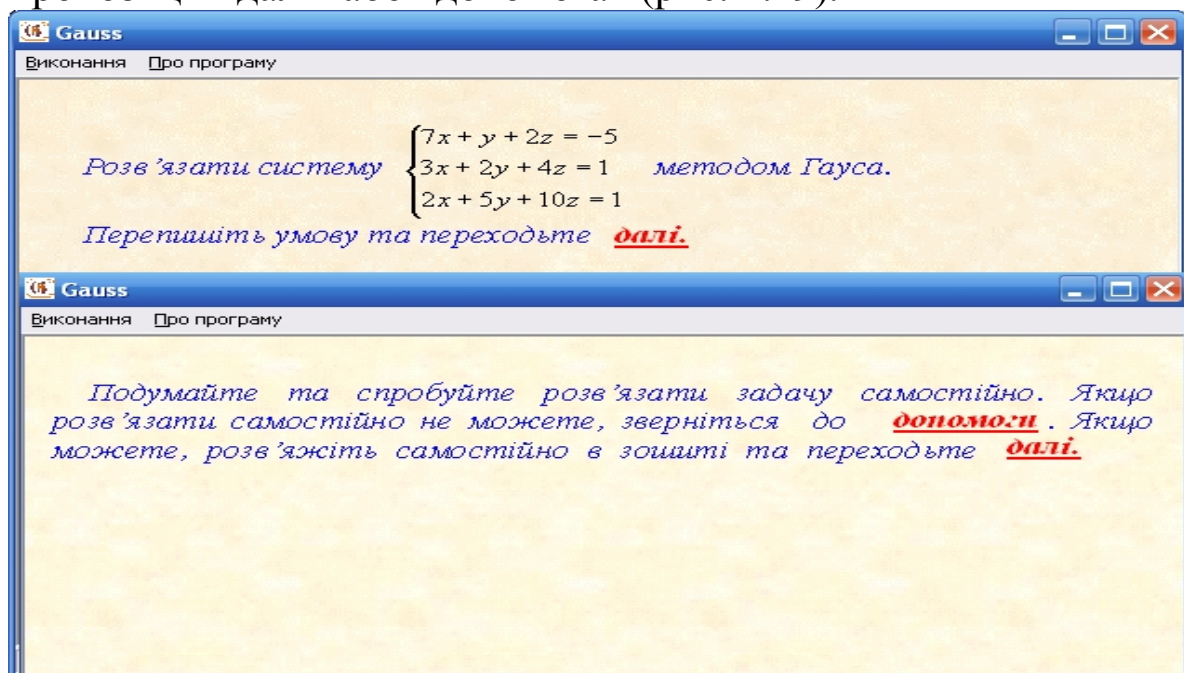


Рис. 1.19. Вікно із завданням по розв'язуванню системи

3. Виконуйте перетворення, що допоможуть закінчити розв'язування системи (рис. 1.20).

Теорема 1.3 (Кронекера - Капеллі). Для того, щоб СЛАР була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці $r(A)$ основної матриці A дорівнював рангу $r(B)$ розширеної матриці B .

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від кількості невідомих, то система має безліч розв'язків.

Якщо $r(B) > r(A)$, то система несумісна.



Вчимося застосовувати критерій сумісності СЛАР

1.23. Дослідіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

на сумісність і в разі сумісності знайдіть її розв'язок..

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю системи

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Знаходимо ранг цієї матриці виконуючи елементарні перетворення з рядками:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Висновок. Задана система має безліч розв'язків. Ці розв'язки знаходимо так. За виглядом останньої матриці записуємо систему

яка еквівалентна вихідній системі.

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{1+5x_4}{6}; & x_2 &= -5x_3 + 3x_4 + 1 = -5 \cdot \frac{1+5x_4}{6} + 3x_4 + 1 = \frac{1-7x_4}{6}; \\x_1 &= 1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 - 2 \cdot \frac{1-7x_4}{6} - 3 \cdot \frac{1+5x_4}{6} + x_4 = \frac{1+5x_4}{6}.\end{aligned}$$



Розглянемо однорідну систему вигляду

Оскільки розширена матриця B однорідної системи не має додаткових відмінних від нуля мінорів (порівняно з матрицею A), то $r(A) = r(B)$, отже, за теоремою Кронекера – Капеллі однорідна система завжди сумісна, вона має нульовий розв’язок $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Теорема 1.4. Для того, щоб система однорідних рівнянь (1.9) мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її головної матриці був менший за кількість невідомих, тобто $r(A) < n$

[illegible]

Якщо $r(A)=n$ або, що те ж саме, $\Delta(A) \neq 0$, то система (1.10) має єдиний тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, у чому неважко переконатись, застосувавши до системи, наприклад, правило Крамера. Якщо ранг головної матриці дорівнює k та менший за кількість невідомих, $r(A)=k < n$, тобто $\Delta(A)=0$, то однорідна система (1.10) має безліч розв'язків, які знаходять, наприклад, за методом Гауса.

1.24. Знайдіть усі розв'язки однорідної системи

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю даної системи

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right).$$

Знаходимо ранг цієї матриці, виконуючи елементарні перетворення з рядками. Друга матриця отримана елементарними перетвореннями у першій матриці: третій і перший рядки міняємо місцями. Для отримання третьої матриці виконали елементарні перетворення з елементами рядків другої матриці: до другого рядка додали отриманий перший, помножений на (-2) , й записали у другий рядок; до третього рядка додали перший, помножений на (-3) , й записали у третій рядок. Отримали рівні елементи у другому та третьому рядках третьої матриці, після чого відкинули третій рядок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 11 & 0 \\ 0 & -7 & 11 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 11 & 0 \end{array} \right).$$

Оскільки головний міnor другого порядку останньої матриці, що отримано після елементарних перетворень,

$$M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

, то ранг матриці (і одночасно – головної матриці) дорівнює 2 ($2 < 3$). Отже, система має безліч розв'язків.

За останньою матрицею записуємо рівносильну систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ -7x_2 + 11x_3 = 0. \end{cases}$$

Значення $x_3 = 7t$, $x_2 = 11t$, де $t \in R$, задовольняють друге рівняння.

Тепер із першого рівняння дістаємо $x_1 = 4x_3 - 3x_2 = 28t - 33t = -5t$.

Відповідь: $x_1 = -5t$, $x_2 = 11t$, $x_3 = 7t$, де $t \in R$.



Необхідні знання про власні числа та власні вектори матриці

Def. Усякий не нульовий вектор-стовпець X , що задовольняє умову

$$AX = \lambda X \Rightarrow AX - \lambda X = 0 \Rightarrow X(A - \lambda E) = 0,$$

де λ - дійсне число називають *власним вектором* матриці A , а число λ - *власним числом* матриці A , що відповідає вектору X . Вектор X визначається неоднозначно (з точністю до ненульового скалярного множника).

Власні числа матриці A є коренями її характеристичного рівняння $\Delta(A - \lambda E) = 0$, яке в розгорнутому вигляді (на прикладі

матриць $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$) має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно λ .

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Власний вектор X , що відповідає власному числу λ , визначають із системи рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Коли λ - кратний корінь характеристичного рівняння, система може визначати кілька власних векторів.



Вчимося знаходити власні числа та власні вектори матриці

1.25. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо й розв'яжемо характеристичне рівняння матриці A :

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 1 + 1 - 5 + \lambda - 3 + \lambda - 3 + \lambda = 0,$$

$$(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-6) = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6.$$

Отже, матриця A має три власні числа. Знайдемо тепер власні вектори, підставляючи по черзі значення відповідних елементів матриці та власних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ у систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + (5-\lambda)x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Розглянемо більш детальне розв'язання для власного числа $\lambda_1 = 2$, якому відповідає власний вектор X_1 , координати якого задовольняють систему

$$\begin{cases} (3-2)x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + (5-2)x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (3-2)x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = -x_3, \end{cases}$$

Звідси тоді власний вектор X_1 записують так:

$$X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно отримані власні вектори для $\lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6$.

Відповідь: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, де C_1, C_2, C_3 – відмінні від нуля дійсні числа.



Розв'язуємо СЛАР за допомогою ППЗ Derive, Mathcad

Процедура розв'язування СЛАР за допомогою відповідних правил.

1.26. У курсовому проекті доменного цеху проектується водогінна мережа, що складається із трьох кілець. Потрібно виконати внутрішнє зв'язування цієї мережі, тобто здійснити такий перерозподіл витрат води по ділянках мережі (рис. 1.21), після якого алгебраїчна сума витрат води у вузлах

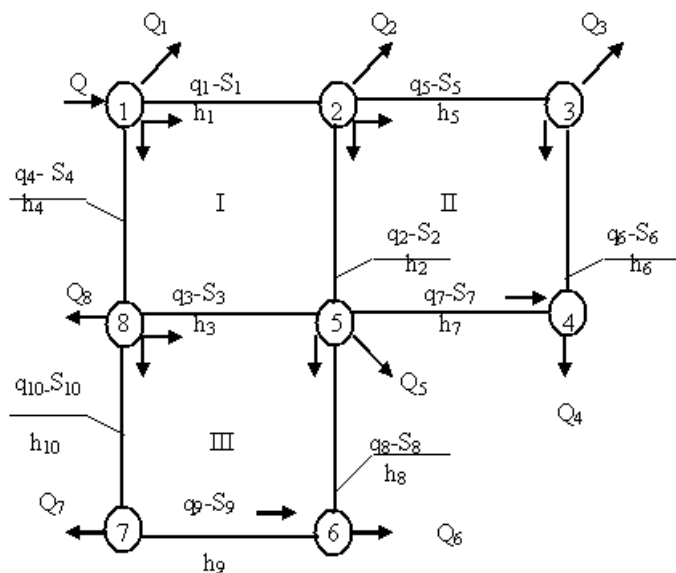


Рис. 1.21. Проект водогінної мережі

мережі повинна бути рівної нулю (перший закон Кірхгофа), а алгебраїчна сума втрат напору в будь-якому кільці мережі за абсолютною величиною не перевищувала б 0,5 м. Вихідні дані для розрахунку подані в таблиці 1.4.

Розв'язання.

Крок 1. Введемо позначення.

Вузли мережі позначені цифрами в кружечках (точки відбору води з мережі або місця відгалуження потоків, їх на рисунку 1.21 вісім).

q_i – витрата води на i -тій ділянці, $i = \overline{1,10}$;

Q_k – вузлові відбори води, $k = \overline{1,8}$;

$Q = \sum_{k=1}^8 Q_k$ – подача води від водопитателя;

S_i – гідравлічний опір i -тої ділянки;

h_i – втрата напору на i -тій ділянці;

Δh_j – нев'язка у втратах напору по j -му кільцю, $j = I, II, III$;

Δq_i – поправочна витрата води на i -тій ділянці;

Δq_j – поправочна витрата води для j -го кільця.

Таблиця 1.4.

Вихідні дані

Порядок вузлів i, k	Гідравлічний опір i -тої ділянки S_i	Витрата води на i -тій ділянці q_i	Вузлові відбори води Q_k
1	0.000059	238.9	21.4
2	0.000564	93.5	40.2
3	0.000397	96.4	69.9
4	0.000041	240.1	139.9
5	0.000348	105.2	49.1
6	0.001580	35.3	127.6
7	0.000351	104.6	23.8
8	0.000516	36.2	28.5
9	0.000421	91.4	-
10	0.000151	115.2	-
			Q=500

Крок 2. Втратою напору на даній ділянці мережі називається втрата енергії руху води на цій ділянці за рахунок сили тертя. Втрати напору на ділянках за напрямком руху води за годинниковою стрілкою умовно приймають зі знаком «плюс», а

на ділянках за напрямком руху води проти годинникової стрілки – зі знаком «мінус».

При виборі початкового поточкорозподілу практично неможливо забезпечити виконання другого закону Кірхгофа, відповідно до якого алгебраїчна сума втрат напору в будь-якому кільці мережі буде дорівнювати нулю ($\sum h_i = 0$). Тому $(\sum h_i)_j = \Delta h_j \neq 0$, де Δh_j – нев'язка у втратах напору по j -му кільцю. Помітимо, що нев'язкою у кільці водогінної мережі називається алгебраїчна сума втрат напору на його ділянках.

За знаком нев'язки можна судити про те, які ділянки кільця перевантажені або недовантажені.

Нехай у мережу надходить Q л/с води, нами обрані вузлові відбори води Q_k , попередньо розподілені витрати води q_i по ділянках мережі, підібрані діаметри труб і обчислені опори S_i на ділянках мережі.

Завдання внутрішнього зв'язування кільцевої мережі складається в такому перерозподілі витрат води по ділянках мережі, після якого виконувалися б перший і другий закони Кірхгофа.

Це завдання зводиться до розв'язування системи трьох лінійних рівнянь щодо поправочних витрат води $\Delta q_I, \Delta q_{II}, \Delta q_{III}$ відповідно для кілець I, II, III :

$$\begin{cases} 2 \cdot \Delta q_I \cdot \sum (Sq)_I - 2 \cdot S_2 \cdot q_2 \cdot \Delta q_{II} - 2 \cdot S_3 \cdot q_3 \cdot \Delta q_{III} = \Delta h_I, \\ - 2 \cdot S_2 \cdot q_2 \cdot \Delta q_I + 2 \cdot \Delta q_{II} \cdot \sum (Sq)_{II} = \Delta h_{II}, \\ - 2 \cdot S_3 \cdot q_3 \cdot \Delta q_I + 2 \cdot \Delta q_{III} \cdot \sum (Sq)_{III} = \Delta h_{III} \end{cases} \quad (1.11)$$

(число рівнянь дорівнює числу кілець мережі).

Крок 3. Нев'язки $\Delta h_I, \Delta h_{II}, \Delta h_{III}$ у втратах напору по кільцях I, II, III дорівнюють алгебраїчній сумі добуток опорів по ділянках кільця на квадрати відповідних витрат, тобто

$$\begin{aligned} \Delta h_I &= S_1 \cdot q_1^2 + S_2 \cdot q_2^2 - S_3 \cdot q_3^2 - S_4 \cdot q_4^2, \\ \Delta h_{II} &= S_5 \cdot q_5^2 + S_6 \cdot q_6^2 - S_7 \cdot q_7^2 - S_2 \cdot q_2^2, \\ \Delta h_{III} &= S_3 \cdot q_3^2 + S_8 \cdot q_8^2 - S_9 \cdot q_9^2 - S_{10} \cdot q_{10}^2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Визначивши шляхом розв'язання системи (1.11) поправочні витрати в кільцях, можна знайти поправочні витрати Δq_i ділянок мережі, а потім одержати й нові витрати q_i^* на ділянках мережі по

формулі $q_i^* = q_i + \Delta q_i$ (1.13). Поправочні витрати Δq_i на ділянках, що зазначені на рисунку мережі виражаються через поправочні витрати в кільцях по формулах

$$\begin{aligned}\Delta q_1 &= -\Delta q_I, & \Delta q_2 &= -\Delta q_I + \Delta q_{II}, & \Delta q_3 &= \Delta q_I - \Delta q_{III}, \\ \Delta q_4 &= \Delta q_I, & \Delta q_5 &= -\Delta q_{II}, & \Delta q_6 &= -\Delta q_{II}, \\ \Delta q_7 &= \Delta q_{II}, & \Delta q_8 &= -\Delta q_{III}, & \Delta q_9 &= \Delta q_{III}, & \Delta q_{10} &= \Delta q_{III}.\end{aligned}\quad (1.14)$$

За відомими поправочними витратами Δq_j обчислюємо нові відмінні від нуля значення кільцевих нев'язок $\Delta q_j^* = \left(\sum h_i^*\right)_j$. Якщо хоча б одна з них по абсолютній величині більше припустимого значення, то процедуру визначення поправочних витрат у кільцях із системи (1.12) треба повторити для знов отриманих витрат на ділянках мережі й нев'язок у кільцях. На практиці для кілець допускається нев'язка, по абсолютній величині не перевищуюча 0,5 м.

Крок 4. Користуючись вихідними даними, представленими в таблиці 1.4, обчислюємо коефіцієнти при невідомих й вільні члени системи (1.11), що необхідно розв'язати і записуємо все це в таблицю 1.5.

Крок 5. Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів і вільних членів у систему (1.11), одержимо

$$\begin{cases} 2 \cdot 0.1149 \Delta q_I - 2 \cdot 0.0527 \Delta q_{II} - 2 \cdot 0.0383 \Delta q_{III} = 2.25, \\ -2 \cdot 0.0527 \Delta q_I + 2 \cdot 0.1818 \Delta q_{II} = -2.95, \\ -2 \cdot 0.0383 \Delta q_I + 0.2258 \Delta q_{III} = -1.15. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} 0.2298 \Delta q_I - 0.1054 \Delta q_{II} - 0.0766 \Delta q_{III} = 2.25, \\ -0.1054 \Delta q_I + 0.3636 \Delta q_{II} = -2.95, \\ -0.0766 \Delta q_I + 0.2258 \Delta q_{III} = -1.15. \end{cases}$$

Знаходимо визначник цієї системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0.2298 & -0.1054 & -0.0766 \\ -0.1054 & 0.3636 & 0 \\ -0.0766 & 0 & 0.2258 \end{vmatrix} = 0.01423.$$

Визначник системи відмінний від нуля, система має єдиний розв'язок. Обчислюємо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2.25 & -0.1054 & -0.0766 \\ -2.95 & 0.3636 & 0 \\ -1.15 & 0 & 0.2258 \end{vmatrix} = 0.08249,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0.2298 & 2.25 & -0.0766 \\ -0.1054 & -2.95 & 0 \\ -0.0766 & -1.15 & 0.2258 \end{vmatrix} = -0.09150,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0.2298 & -0.1054 & 2.25 \\ -0.1054 & 0.3636 & -2.95 \\ -0.0766 & 0 & -1.15 \end{vmatrix} = -0.04446$$

Крок 6. Використовуючи формули Крамера, визначаємо кільцеві поправочні витрати:

$$\Delta q_I = \frac{\Delta_1}{\Delta} \approx 5.80, \quad \Delta q_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \approx -6.43, \quad \Delta q_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \approx -3.12.$$

Таблиця 1.5.

Дані з перерозподілу води по ділянках мережі

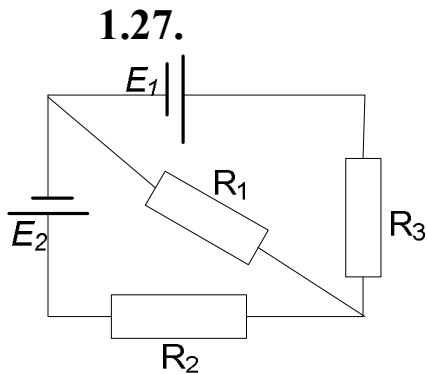
Кільц	i	S_i	q_i	$S_i q_i$	$h_i = S_i q_i^2$	Δq_i	q_i^*	$h_i^* = S_i q_i^{*2}$
I	1	0.000059	238.9	0.0141	3.37	-5.80	233.10	3.21
	2	0.000564	93.5	0.0527	4.93	-12.23	81.27	3.72
	3	0.000397	96.4	0.0383	-3.69	8.92	105.32	-4.40
	4	0.000041	240.1	0.0098	-2.36	5.80	245.90	-2.48
			Σ	0.1149	$\Delta h_I = 2.25$	$\Delta q_I = -3.31$		$\Delta h_I^* = 0.05$
II	5	0.000348	105.2	0.0366	3.85	6.43	111.63	4.37
	6	0.001580	35.3	0.0558	1.97	6.43	41.73	2.75
	7	0.000351	104.6	0.0367	-3.84	-6.43	98.17	-3.38
	2	0.000564	93.5	0.0527	-4.93	-12.23	81.27	-3.72
			Σ	0.1818	$\Delta h_{II} = -2.9$	$\Delta q_{II} = -5.80$		$\Delta h_{II}^* = -0.01$
III	3	0.000397	96.4	0.0383	3.69	8.92	105.32	4.40
	8	0.000516	36.2	0.0187	0.68	3.12	39.32	0.80
	9	0.000421	91.4	0.0385	-3.52	-3.12	88.28	-3.28
	10	0.000151	115.2	0.0174	-2.00	-3.12	112.08	-1.90
			Σ	0.1129	$\Delta h_{III} = -1.15$	$\Delta q_{III} = 5.80$		$\Delta h_{III}^* = 0.02$

Крок 7. По формулах (1.14) знаходимо на ділянках Δq_i поправочні витрати й записуємо їхні значення в таблицю 1.5. За формулою (1.13) обчислюємо нові витрати q_i^* й також заносимо в таблицю 1.5. Для нових витрат знаходимо втрати напору h_i^* й нові нев'язки Δh_j^* у кільцях.

Відповідь: оскільки всі $\Delta h_j^* < 0.5$, то необхідна точність досягнута й подальший перерозподіл витрат води по ділянках мережі проводити не треба.



«Навчаємо» свій комп'ютер розв'язуванню СЛАР за допомогою ППЗ Derive.



Джерела струму з електрорушійними силами E_1 і E_2 включені у ланцюг, як показано на рисунку 1.22. Знайти силу струму на всіх ділянках ланцюга, якщо $E_1 = 2,1$ В, $E_2 = 1,9$ В, $R_1 = 45$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 10$ Ом. Внутрішнім опором елементів зневажити.

Рис. 1.22. Схема до задачі 1.27

Складемо систему лінійних рівнянь за допомогою законів Кірхгофа (позначимо силу струму на відповідних ділянках ланцюга за X, Y, Z):

$$\begin{cases} X + Y - Z = 0, \\ 45 \cdot X + 10 \cdot Y = 2,1, \\ 45 \cdot X - 10 \cdot Z = 1,9. \end{cases}$$

Процедура розв'язування СЛАР може бути замінена процедурою застосування ППЗ Derive.

1. Відкрити вікно ППЗ Derive.
2. За допомогою опції *Solve-System* ввести систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
 - порядок системи $n=3$ (рис.1.23);
 - рівняння системи;

– тип змінної, натиснувши правою клавiшею мишки на вікні *Solution Variables* (рис.1.24).

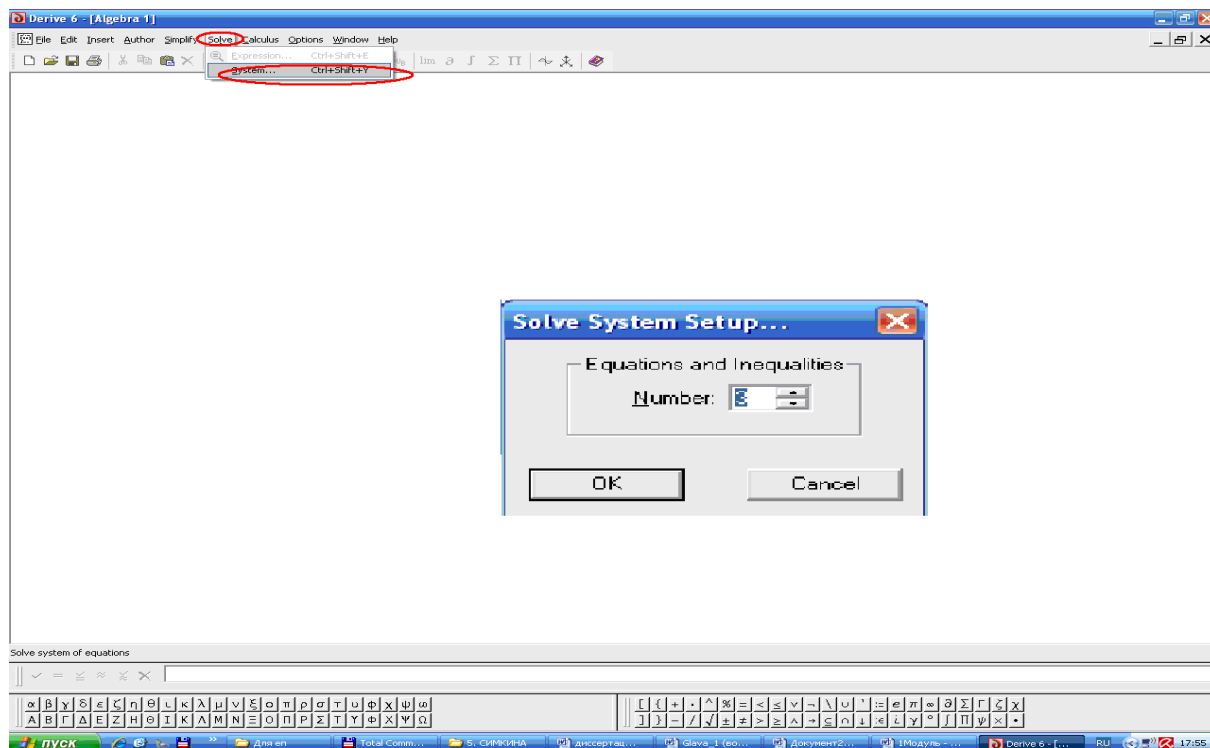


Рис. 1.23. Вікно ППЗ Derive: введення системи лінійних алгебраїчних рівнянь

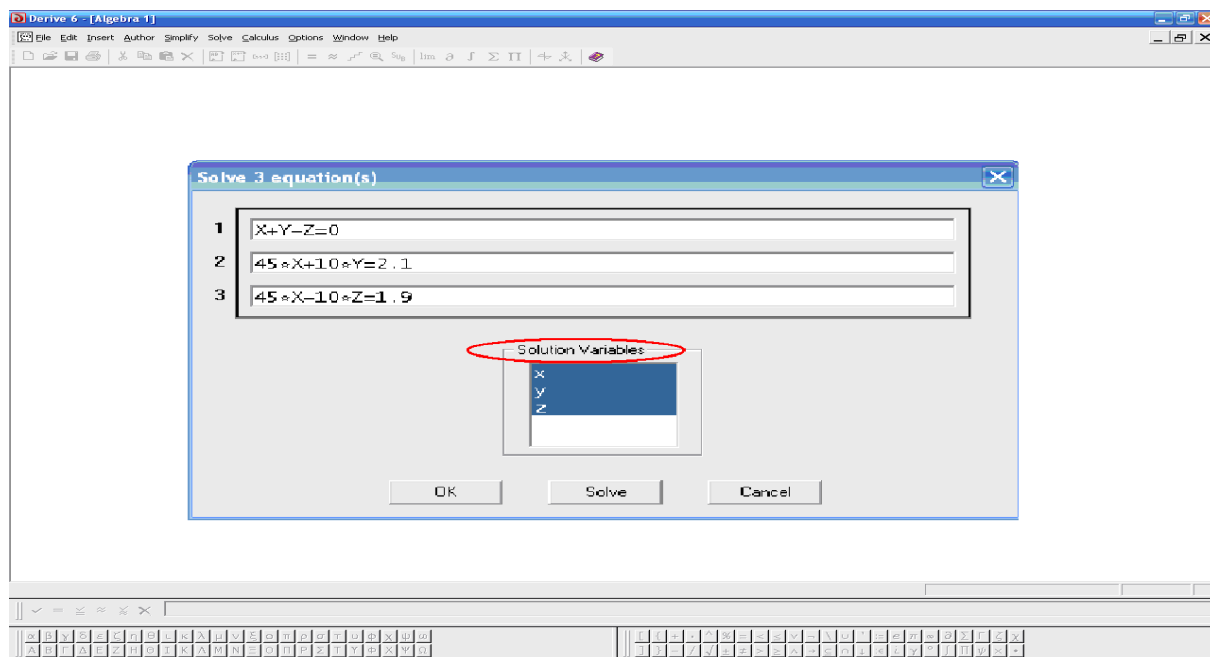


Рис. 1.24. Вікно ППЗ Derive: введення системи лінійних алгебраїчних рівнянь

3. За допомогою опції *Simplify-Basic* розв'язати задану систему (рис. 1.25).

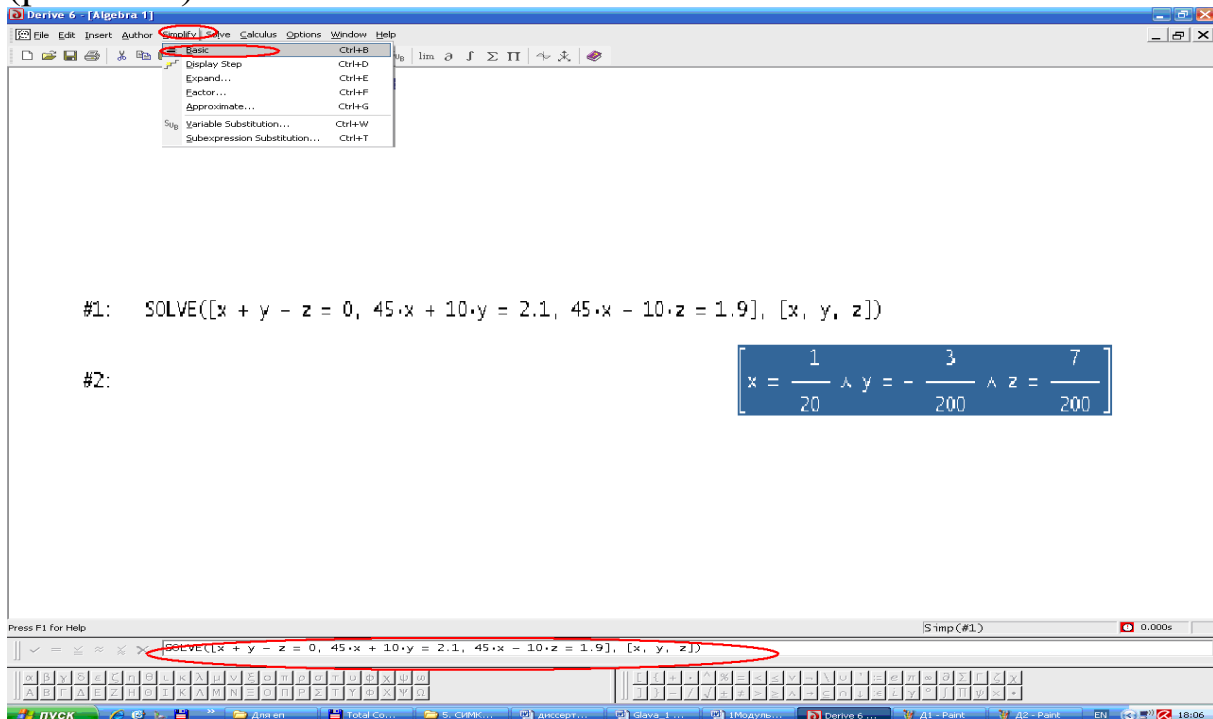


Рис. 1.25. Вікно ППЗ Derive: розв'язок заданої системи

Процедура розв'язуванню СЛАР може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathcad.



«Навчаємо» свій комп'ютер розв'язуванню СЛАР за допомогою ППЗ Mathcad.

До задачі 1.26 розв'яжемо систему з кроку 5 за допомогою ППЗ.

$$\begin{cases} 2 \cdot 0.1149 \Delta q_I - 2 \cdot 0.0527 \Delta q_{II} - 2 \cdot 0.0383 \Delta q_{III} = 2.25, \\ -2 \cdot 0.0527 \Delta q_I + 2 \cdot 0.1818 \Delta q_{II} = -2.95, \\ -2 \cdot 0.0383 \Delta q_I + 0.2258 \Delta q_{III} = -1.15. \end{cases}$$

1. Відкрити вікно ППЗ Mathcad.
2. За допомогою слова *Given*, що вживається як математичний термін, ввести систему лінійних алгебраїчних рівнянь (рис. 1.26).

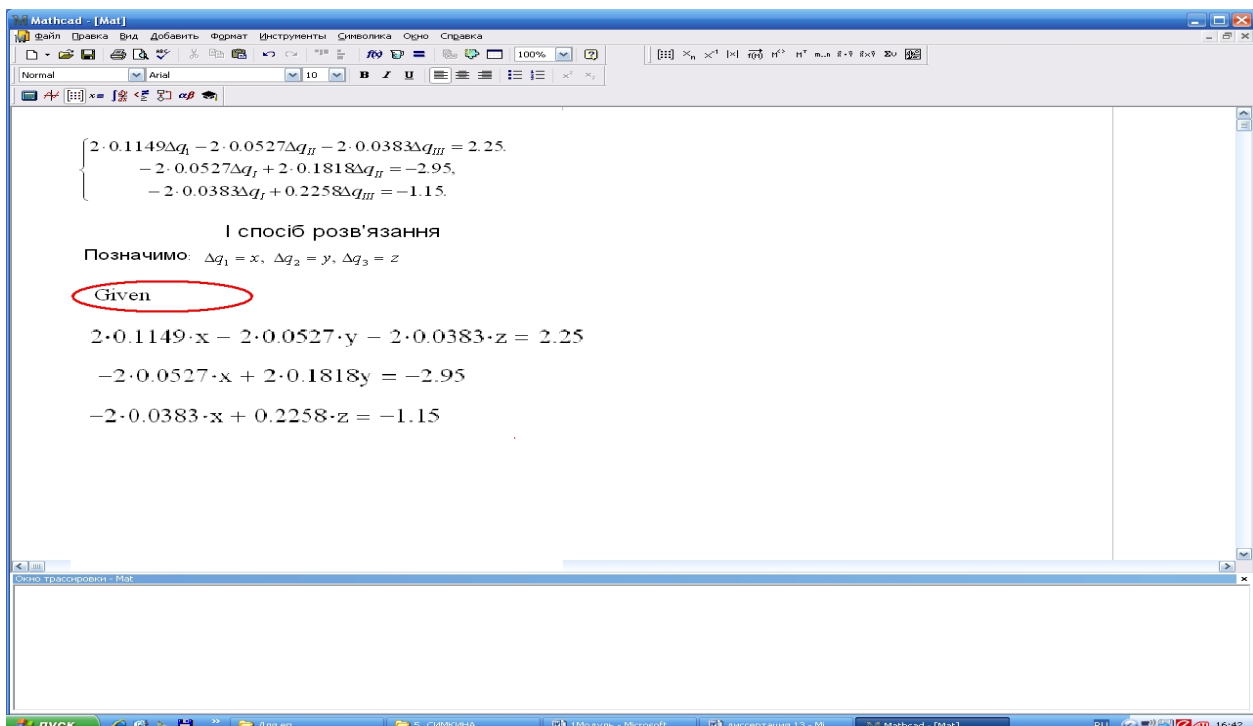


Рис. 1.26. Вікно ППЗ Mathcad: уведення системи лінійних алгебраїчних рівнянь

3. За допомогою опції *Добавить – Функции – Все – Find* виконати розв'язування СЛАР (рис. 1.27).

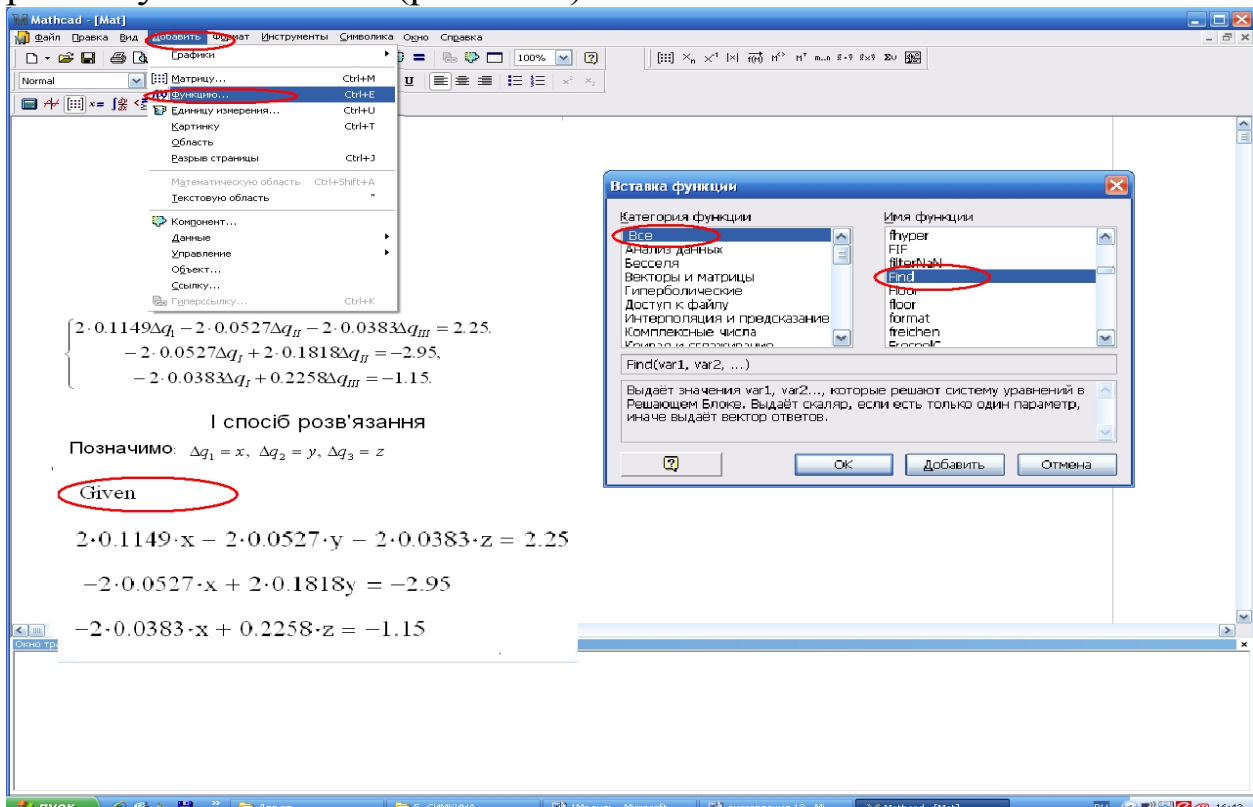


Рис. 1.27. Вікно ППЗ Mathcad: розв'язування СЛАР

4. Отримати результат після введення символу « \Rightarrow » (рис. 1.28).

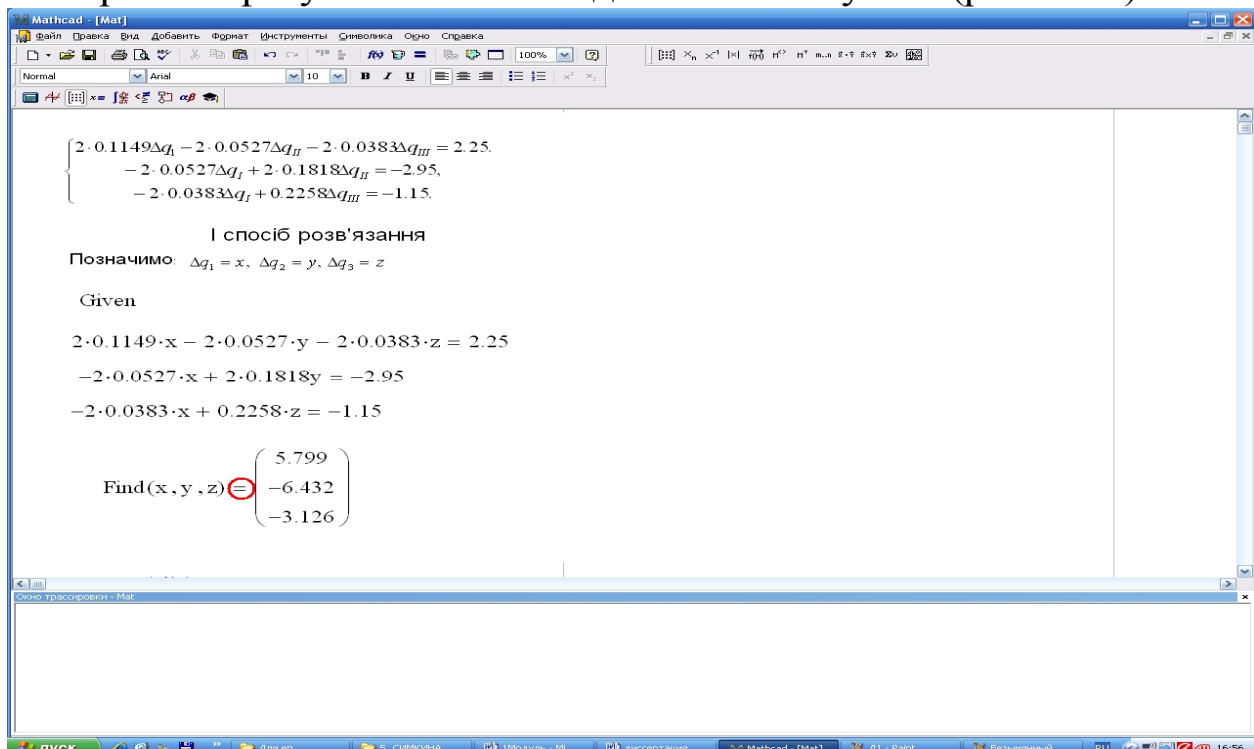


Рис. 1.28. Вікно ППЗ Mathcad: отримання результату

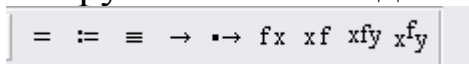
Або...

1. За допомогою опції Вид – Панели инструментов – Матрицы та Вид – Панели инструментов – Вычисление винести на панель

інструментів вкладки



та



2. Зазначити матрицю A та B (порядок введення вже відомий).

3. За матричним методом ввести матрицю невідомих із символом



й добуток матриці, оберненої до A , за допомогою символу



та матриці B .

4. Після наступного введення матриці невідомих та зазначення символу « \Rightarrow » отримати результат (рис. 1.29).

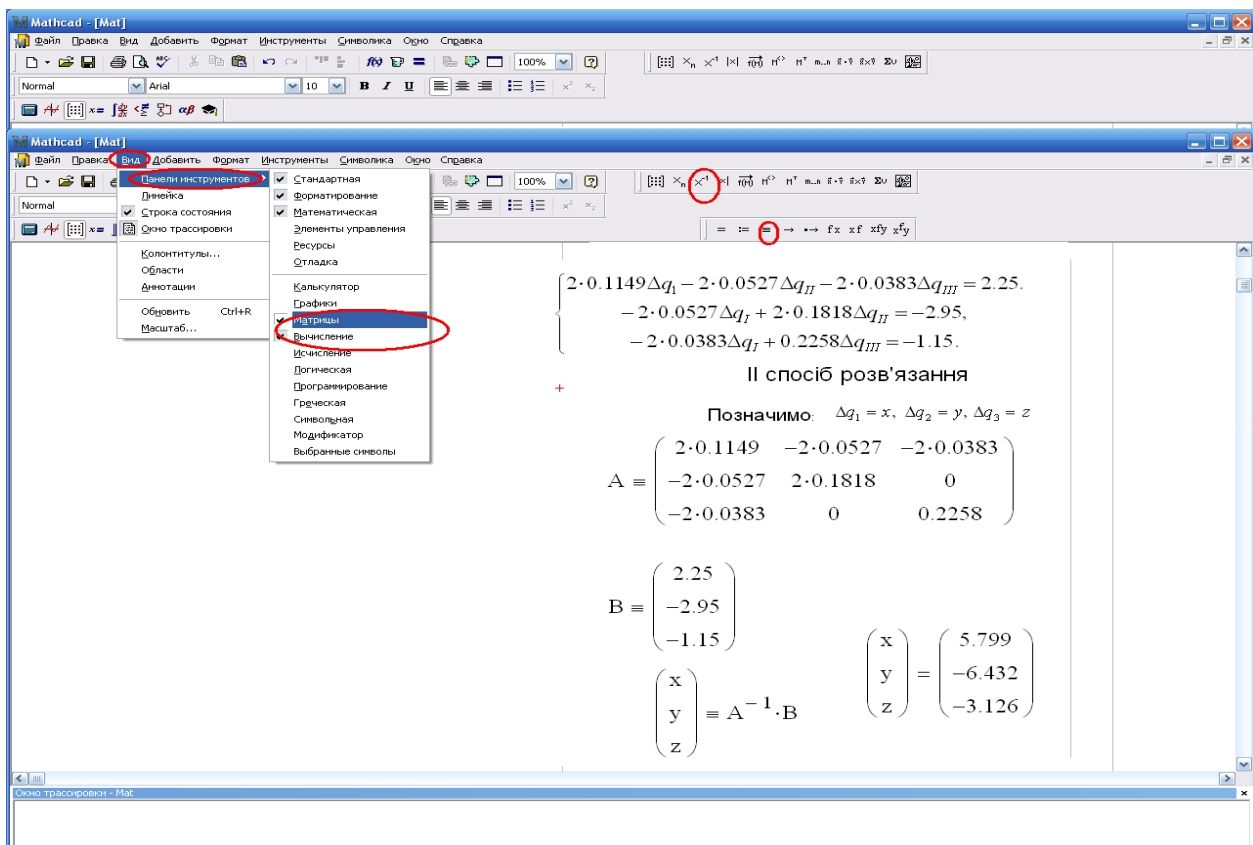


Рис. 1.29. Вікно ППЗ Mathcad: отримання результату

Або...

1. Зазначити матрицю A та B (порядок введення вже відомий). Для присвоювання ім'я застосувати символ $:=$.
2. За допомогою опції *Добавить – Функции – Все – Lsolve* виконати розв'язування СЛАР, присвоюючи змінній XL функцію $Lsolve(A,B)$.
3. Після наступного введення змінної XL та зазначення символу « \Rightarrow » отримати результат (рис. 1.30).

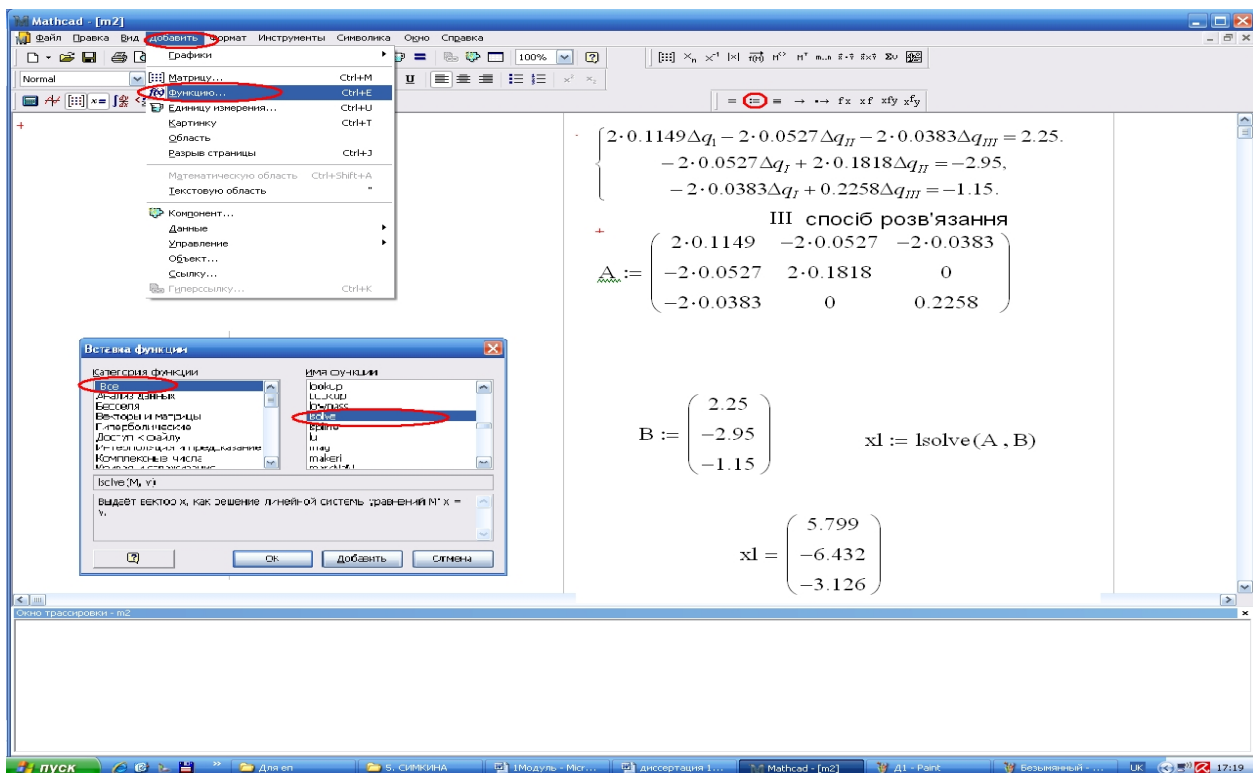


Рис. 1.30. Вікно ППЗ Mathcad: отримання результату

Порівняйте різні способи по розв'язування СЛАР, що розглядаються за допомогою ППЗ Mathcad.



Моделюємо професійну діяльність інженера

1.28.

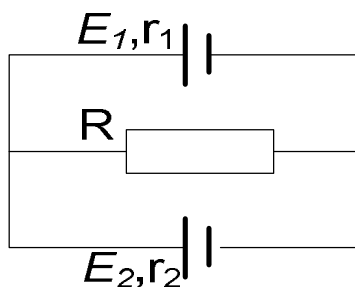


Рис. 1.31. Схема до задачі 1.28

Два елементи з ЕДС 1,6 В й 1,3 В та внутрішнім опором відповідно 1,0 й 0,5 Ом з'єднані, як показано на рисунку 1.31. Опір $R = 0,6 \text{ Ом}$. Знайдіть ток в усіх вітвях. Опір з'єднуючих проводів не враховувати.



Оберіть ефективний зручний запис подання даних. Представте дані задачі на схемі, користуючись законами Кірхгофа й враховуючи напрями струмів, що обрані умовно:

I_1 – стум у першому елементі, напрямлено ліворуч; I_2 – стум у другому елементі, напрямлено праворуч; I_3 – стум на ділянці з опором R , напрямлено праворуч. Отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3, \\ I_1 r_1 - I_2 r_2 = E_1 - E_2, \\ I_1 r_1 + I_3 R = E_1. \end{cases}$$

Для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь скористайтесь можливостями програмованих засобів.

Відповідь: $I_1 = 0,7\text{A}$; $I_2 = 0,8\text{A}$; $I_3 = 1,5\text{A}$.

1.29.

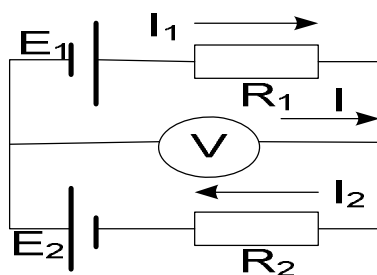


Рис. 1.32. Схема до задачі 1.29

Елементи ланок, схема яких зображена на рисунку 1.32, має наступні значення: $E_1 = 1,5\text{ В}$, $E_2 = 1,6\text{ В}$, $R_1 = 10\text{ Ом}$, $R_2 = 20\text{ Ом}$. Опір вольтметра $R_v = 20\text{ Ом}$. Знайдіть струм в усіх вітках. Опір з'єднуючих проводів та джерел напруги не враховувати.

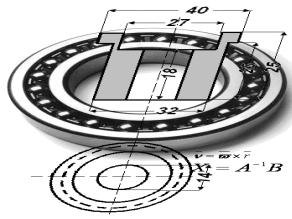


Оберіть ефективний зручний запис подання даних. Представте дані задачі на схемі, користуючись законами Кірхгофа й враховуючи напрями струмів, що обрані умовно отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I = 0, \\ I_1 r_1 - I R_v = E_1, \\ I_2 r_2 + I R_v = E_2. \end{cases}$$

Для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь скористайтесь можливостями програмованих засобів.

Відповідь: $I_1 = 0,115\text{ A}$; $I_2 = 0,098\text{ A}$; $I_3 = -0,018\text{ A}$.



Тема 4. ВЕКТОРИ

Під час проектування механізму його ланки, зазвичай, позначають векторами. Їхня сума визначає умову замкненості механізму. Монтажна щогла є найпростішим механізмом для підйому вантажів та виготовляється з металу. Щоглу встановлюють на опорній подушці. Її стійкість досягається натягом сталевого тросу.

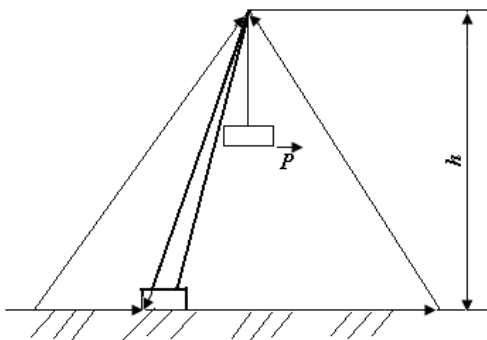


Рис. 1.33. Зображення схеми монтажно́ї щогли

Вектори допомагають записати умову замкненості до схеми вказаного на рисунку 1.33 підйомного механізму в ненавантаженому стані. Для зображення монтажно́ї щогли ми позначаємо ланки векторами.



Необхідні знання про вектор

Скалярною називають величину, яка задається чисельним значенням. Векторна величина на відміну від скалярної задається не лише своїм чисельним значенням, а й напрямом (швидкість, прискорення, сила й тощо).

Def. Геометрично вектор це *напрявлений відрізок* (рис. 1.34, а) і позначається \vec{a} , або \overrightarrow{AB} , де точка A - початок вектора, а B - його кінець (для позначання можуть бути застосовані інші букви).

Def. Відстань між початком вектора і його кінцем називають довжиною (або модулем) вектора і позначають $|\vec{a}|$, або $|\overrightarrow{AB}|$.

Def. Вектори, які лежать на одній прямій або паралельних прямих, називають *колінеарними* (рис 1.34, б, в)

Def. Вектори \vec{a} і \vec{b} рівні, якщо вони колінеарні, мають однакові модулі і однакові напрями (рис. 1.34, г).

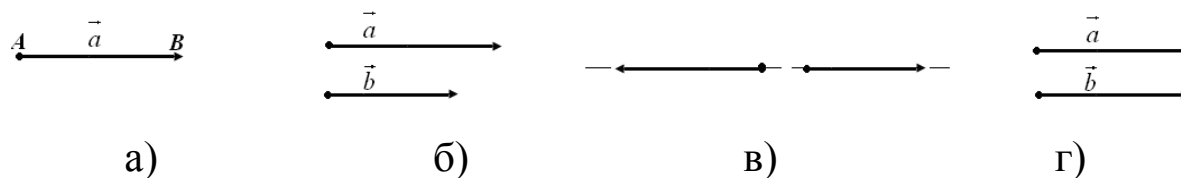


Рис. 1.34. Зображення векторів

Def. Два вектори називають *протилежними*, якщо вони колінеарні, мають однакові модулі і протилежні напрями (рис. 1.35).

Def. Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають *нуль-вектором*. Напряв його не визначений.

Def. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одиничним* вектором.

Def. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора \vec{a} , називають *ортом* вектора \vec{a} і позначають \vec{a}_0 .

Вектори можна вільно переміщувати по площині (у просторі). Тому в аналітичній геометрії їх називають *вільними*.

Def. *Кутом між двома векторами \vec{a} і \vec{b}* , зведеними до спільного початку, називають найменший кут, на який треба повернути вектор \vec{a} навколо спільного початку, щоб його напрям збігався з напрямом вектора \vec{b} (рис. 1.36, а, б).

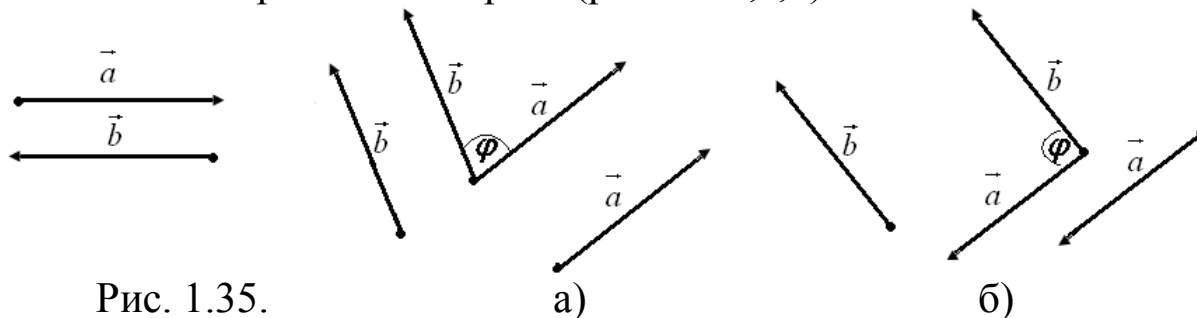


Рис. 1.35.
Протилежні
вектори

Рис. 1.36. Кут між векторами

Три вектори називають *компланарними*, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Зокрема, три вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні, або хоча б один з них – нуль-вектор.



Необхідні знання про лінійні операції над векторами

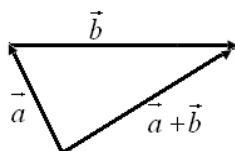
До лінійних операцій над векторами належить:

- 1) додавання (віднімання) векторів;
- 2) множення вектора на число (скаляр).

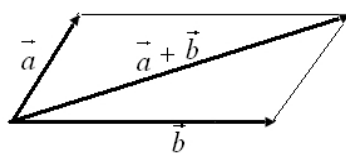
Def. Сумою векторів \vec{a} і \vec{b} називають вектор $\vec{a} + \vec{b}$, який з'єднує початок вектора \vec{a} з кінцем вектора \vec{b} за умови, що вектор \vec{b} прикладений до кінця вектора \vec{a} (рис. 1.37, а) (*правило трикутника*).

Суму двох векторів можна будувати також за *правилом паралелограма* (рис.1.37, б).

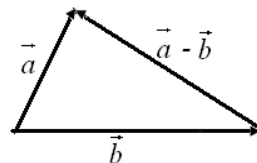
Def. Різницею векторів \vec{a} і \vec{b} називають вектор $\vec{a} - \vec{b}$, який у сумі з вектором \vec{b} складає вектор \vec{a} , або, іншими словами, це вектор, що з'єднує кінець вектора \vec{b} з кінцем вектора \vec{a} за умови, що \vec{a} і \vec{b} прикладені до спільного початку (рис 1.37, в).



а)



б)



в)

Рис. 1.37. Правила додавання й віднімання векторів

Def. Добутком вектора \vec{a} на скаляр λ називають вектор $\lambda\vec{a}$ такий, що $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ і напрям якого збігається з напрямом вектора \vec{a} , якщо $\lambda > 0$, або він має напрям протилежний до напрямку вектора \vec{a} , якщо $\lambda < 0$. Так, на рис. 1.38 зображено вектори \vec{a} , $4\vec{a}$, $-2\vec{a}$.



Рис. 1.38. Добуток вектора на число

З означення добутку вектора на число випливає, що коли вектори колінеарні, то існує єдине число λ таке, що $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Сформулюємо властивості лінійних операцій над векторами:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
5. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
6. $\vec{a}(\lambda + \mu) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.
7. $\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$.



Необхідні знання про проекцію вектора на вісь

Def. Віссю називають напрямлену пряму, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і одиницю довжини.

Проекцією точки A на вісь l називають основу перпендикуляра AA_1 (точка A_1), опущеного з точки A на вісь l .

Нехай задано вісь l і вектор \overline{AB} (рис. 1.39, а). Позначимо через A_1 та B_1 проекції на вісь l відповідно початку A і кінця B вектора \overline{AB} і розглянемо вектор $\vec{a} = \overline{A_1B_1}$.

Def. Проекцією вектора \vec{a} на вісь l називають додатне число, яке дорівнює $|\overline{A_1B_1}|$, якщо вісь l і вектор $\overline{A_1B_1}$ однаково

напрявлені (рис. 1.39, а) і від'ємне число $-\overline{A_1 B_1}$, якщо вісь l і вектор $\overline{A_1 B_1}$ протилежно напрямлені (рис. 1.39, б).

Проекцією вектора \vec{a} на вісь l позначають так: $np_l \vec{a}$ (або \vec{a}_l).

Def. Кутом між вектором \vec{a} і віссю l називають менший з кутів, на який треба повернути вектор \vec{a} або вісь l , щоб він збігався за напрямом з другим вектором або віссю. Цей кут має значення у межах від 0 до π .

Проекцію вектора \vec{a} на вісь l обчислюють за формулою $np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \phi$, де ϕ - кут між напрямом осі l і напрямом вектора \vec{a} .

Справді, якщо ϕ - гострий кут, то $np_l \vec{a} = \overline{A_1 B_1} = |\vec{a}| \cos \phi$ (рис. 1.39,а);

Якщо ϕ - тупий кут, то $np_l \vec{a} = -\overline{A_1 B_1} = -|\vec{a}| \cos(\pi - \phi) = |\vec{a}| \cos \phi$ (рис. 1.39,б).

При цьому $np_l \vec{a} > 0$, якщо кут ϕ - гострий, $np_l \vec{a} < 0$, якщо ϕ - тупий, $np_l \vec{a} = 0$, якщо $\phi = 90^\circ$.

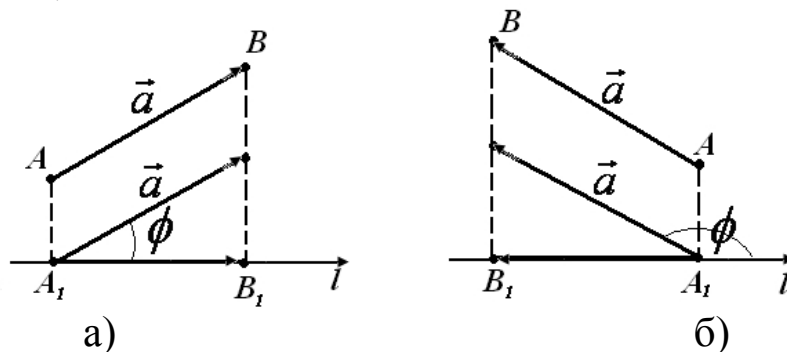


Рис. 1.39. Проекція вектора на вісь

Властивості проєкцій

1. Проекція суми кількох векторів на ту саму вісь дорівнює сумі їх проєкцій на цю вісь, тобто

$$np_l (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) = np_l \vec{a}_1 + np_l \vec{a}_2 + \dots + np_l \vec{a}_n.$$

2. При множенні вектора \vec{a} на число λ його проєкція також помножиться на це число: $np_l (\lambda \vec{a}) = \lambda np_l \vec{a}$.



Необхідні знання про лінійну залежність і незалежність векторів та базис

Застосовуючи лінійні операції над векторами, можна знаходити вирази вигляду

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n,$$

які називають *лінійними комбінаціями векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, де числа x_1, x_2, \dots, x_n - числові коефіцієнти.

Def. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називають *лінійно залежними*, якщо існують такі числа c_1, c_2, \dots, c_n не всі рівні нулю, що лінійна комбінація

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n = 0,$$

і *лінійно незалежними*, якщо ця рівність виконується лише за умови, коли всі числа c_1, c_2, \dots, c_n рівні нулю.

Def. Сукупність лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називають *базисом*, якщо для кожного вектора існують такі дійсні числа x_1, x_2, \dots, x_n , що виконується рівність

$$\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n.$$

Цю рівність називають *розкладом вектора* \vec{b} *за базисом* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Def. *Базисом на прямій* називають довільний ненульовий вектор на цій прямій.

Якщо вектор \vec{a} - базис, то існує єдиний розклад вектора \vec{b} : $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, де λ - *координата* вектора \vec{b} за базисом \vec{a} .

Def. *Базисом на площині* називають довільну упорядковану пару не колінеарних векторів.

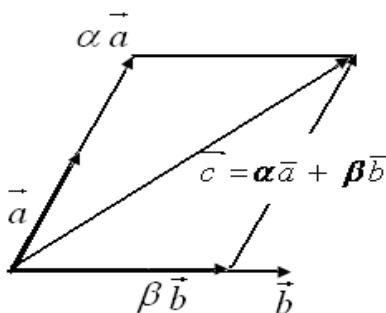


Рис. 1.40. Базис на площині

Якщо вектори \vec{a} та \vec{b} - базис на площині і \vec{c} - довільний ненульовий вектор площини, то існують сталі α та β такі, що $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ (рис. 1.40). Коефіцієнти α , β називають *координатами* вектора \vec{c} в даному базисі

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Def. Базисом у просторі називають довільну упорядковану трійку не компланарних векторів. Якщо вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} – базис у просторі і вектор \vec{d} розкладений за базисом, тобто, $\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$, то числа α , β , γ називають *координатами* вектора \vec{d} в даному базисі.

Л.В. Таким чином, базис у просторі дає змогу кожному вектору однозначно поставити у відповідність упорядковану трійку чисел (координати цього вектора) і, навпаки, кожній упорядкованій трійці чисел α , β , γ за допомогою базису можна поставити у відповідність єдиний вектор

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} - \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$



«Навчасмо» свій комп'ютер зображенню векторів за допомогою ППЗ DG.

1. Відкрити вікно ППЗ DG та знайти опції *Фігури-Аналітично-Вектор* (рис. 1.41).

2. За допомогою опції *Фігури-Аналітично-Вектор* побудувати (рис. 1.42):

– вектор \vec{AC} , для цього відзначити точку A – начало вектора, точку C – кінець вектора;

– колінеарні вектори \vec{DF} та \vec{GH} , що лежать на паралельних прямих. Для цього відзначити точку D – начало вектора, точку F – кінець вектора \vec{DF} , потім за допомогою опції *Фігури-Прямі-Паралельна пряма* побудувати пряму паралельну DF , на якій відзначити начало й кінець вектора \vec{GH} ;

– колінеарні вектори \vec{IJ} та \vec{KL} , що лежать на одній прямій, для цього за допомогою опції *Фігури-Прямі-Пряма* побудувати пряму відзначити точку I – начало вектора, точку J – кінець вектора \vec{IJ} , потім на цій же прямій відзначити начало й кінець вектора \vec{KL} ;

– рівні вектори \vec{MO} та \vec{PR} , що лежать на паралельних прямих, для цього відзначити точку M – начало вектора, точку O – кінець

вектора \overrightarrow{MO} , потім за допомогою опції *Фігури-Прямі-Паралельна пряма* побудувати пряму паралельну MO , на якій відзначити начало й кінець вектора \overrightarrow{PR} за допомогою опції *Фігури-Виміряти-Виміряти відстань*.

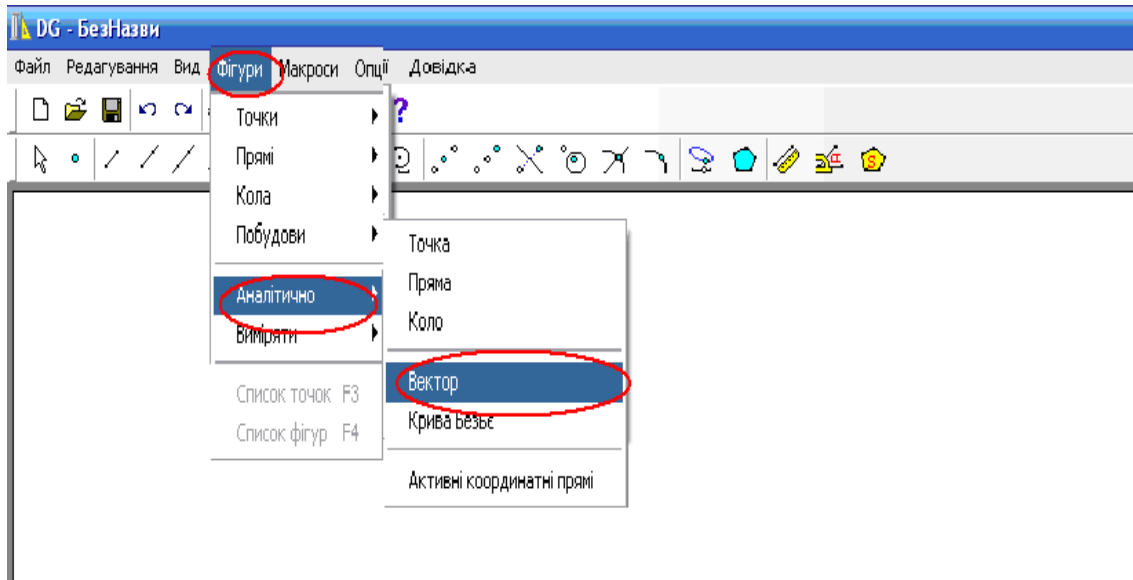


Рис. 1.41. Вікно ППЗ DG

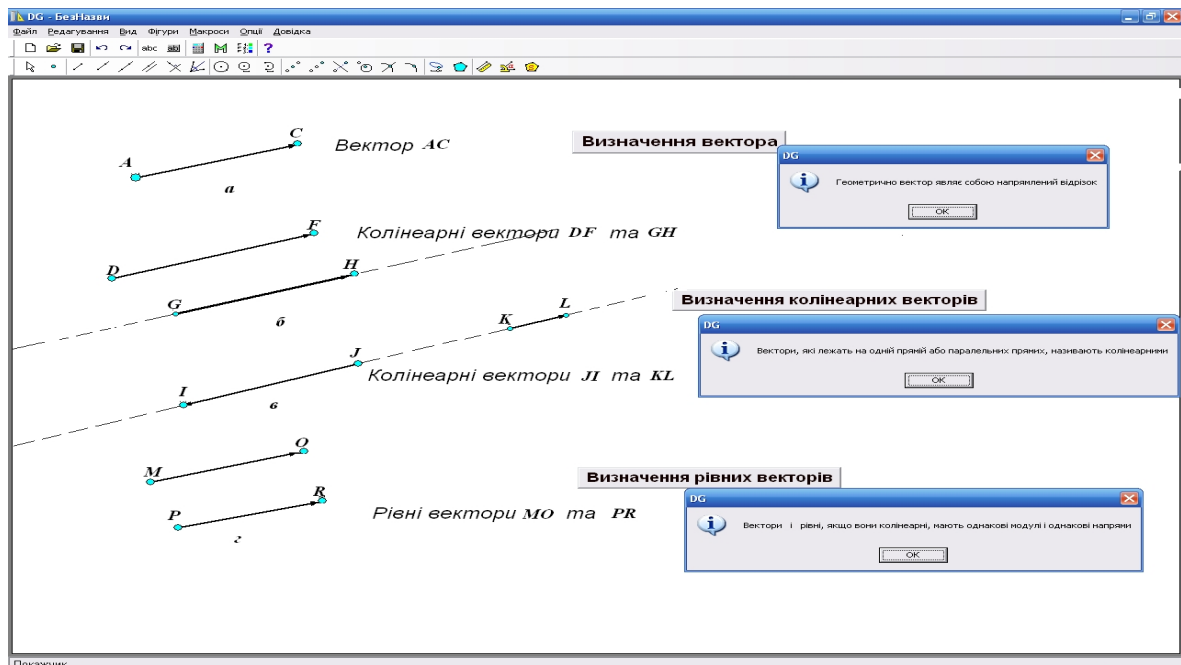


Рис. 1.42. Вікно ППЗ DG: моделювання зображення векторів

3. За допомогою опції *Фігури-Аналітично-Вектор* побудувати вектори \overrightarrow{GI} й \overrightarrow{JL} та \overrightarrow{SU} й \overrightarrow{PR} , а потім побудувати та виміряти кути між цими векторами (рис. 1.43):

– кути між векторами \overrightarrow{GI} й \overrightarrow{JL} та \overrightarrow{SU} й \overrightarrow{PR} розглянути як кути між векторами \overrightarrow{MO} й \overrightarrow{MN} та \overrightarrow{VX} й \overrightarrow{VW} , що є відповідно колінеарними заданим векторам;

– кути між відповідно колінеарними векторами \overrightarrow{MO} й \overrightarrow{MN} та \overrightarrow{VX} й \overrightarrow{VW} виміряти за допомогою опції *Фігури-Виміряти-Кут*, відзначаючи кожен раз першу точку, вершину кута, другу точку.

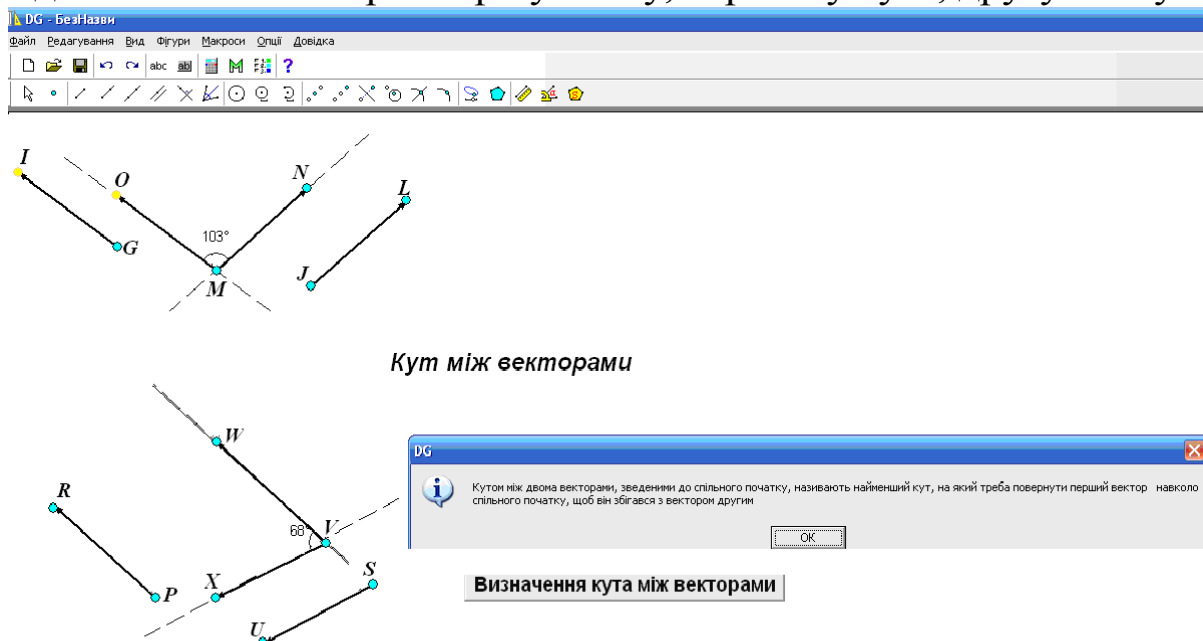


Рис. 1.43. Вікно ППЗ DG: обчислення кута між векторами

Процедура розв'язування задач із застосуванням ППЗ DG спрощується завдяки можливості проектування моделі інженерної конструкції.



«Навчаємо» свій комп'ютер моделюванню інженерної конструкції за допомогою ППЗ DG.

1.30. Для схеми монтажною щогли записати умову замкненості у ненавантаженому стані.

Розв'язання.

Крок 1. Зобразимо монтажну щоглу схематично й позначимо її ланки векторами на рисунку, що виконано у ППЗ DG (рис. 1.44).

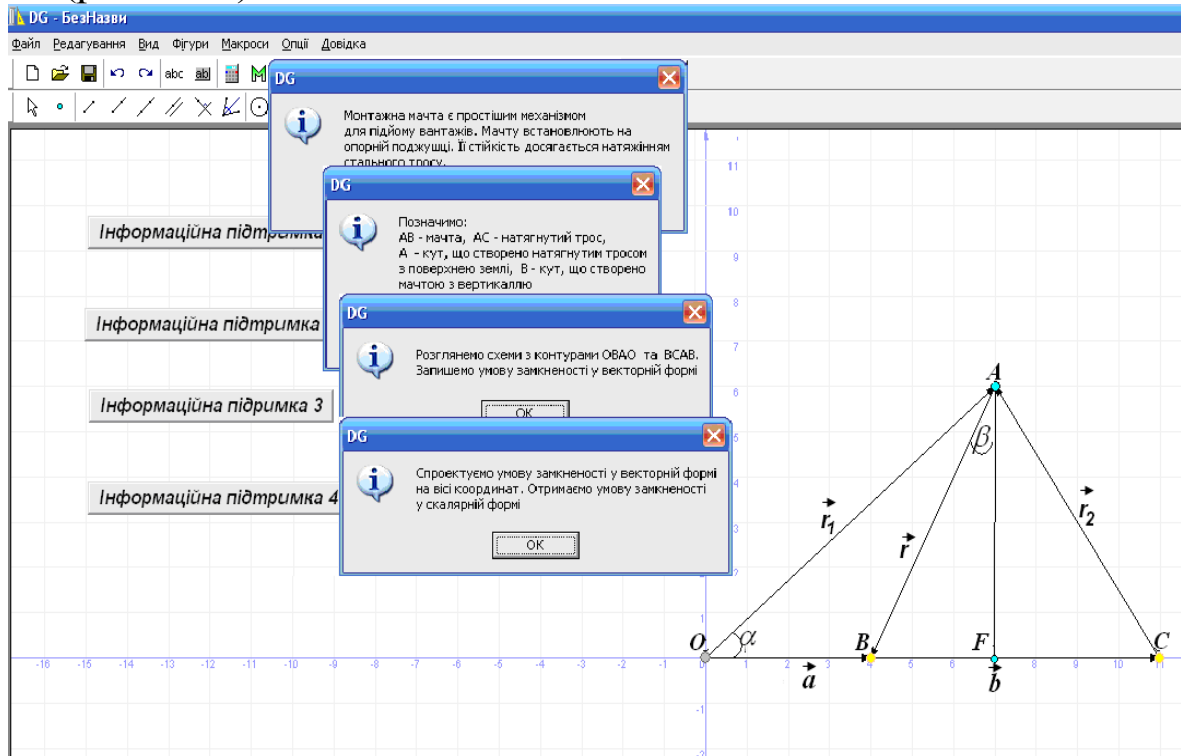


Рис. 1.44. Вікно ППЗ DG: зображення моделі монтажної щогли

AB — щогла; $\overline{AB} = \vec{r}$; OA та AC утворюють натягнутий трос; $\overline{OA} = \vec{r}_1$; $\overline{CA} = \vec{r}_2$; $\overline{OB} = \vec{a}$; $\overline{BC} = \vec{b}$; α — кут, що створено натягнутим тросом із поверхнею землі; β — кут, що створено щоглою із вертикаллю.

Крок 2. Оскільки векторна схема монтажної щогли є об'єднанням двох схем із контурами $OBAO$ та $BCAB$, то умова замкненості для повної схеми щогли запишеться у вигляді суми умов замкненості для кожної із частин окремо. У векторній формі цей запис має вигляд: $(\vec{a} - \vec{r} - \vec{r}_1) + (\vec{b} + \vec{r}_2 + \vec{r}) = \vec{0}$.

Крок 2. Оскільки за правилом суми векторів $\overline{BC} + \overline{CA} = \overline{BA} = -\vec{r}$, то $\vec{b} + \vec{r}_2 + \vec{r} = \vec{0}$, а це означає, що умова замкненості виразиться векторним рівнянням

$$\vec{a} - \vec{r} - \vec{r}_1 = \vec{0}.$$

Крок 3. Проектуємо це рівняння на осі координат, одержимо умову замкненості в скалярній формі:

$$|\vec{a}| + |\vec{r}| \sin \beta - |\vec{r}_1| \cos \alpha = 0, \quad |\vec{r}| \cos \beta - |\vec{r}_1| \sin \alpha = 0.$$



Необхідні знання про прямокутну декартову систему координат

Def. Точку O і упорядковану трійку не компланарних базисних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ називають декартовою системою координат у просторі.

Точка O – початок координат, а осі, які проходять через початок координат у напрямі базисних векторів, називають осями координат.

Def. Упорядковану трійку одиничних попарно перпендикулярних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ($|\vec{i}|=1, |\vec{j}|=1, |\vec{k}|=1$), що напрямлені по осях, називають *ортнормованим базисом*.

Def. Прямокутною декартовою системою координат (ПДСК) у просторі називають Декартову систему координат, базис якої ортонормований, і позначають її через $Oxyz$ (Ox - вісь абсцис, Oy - вісь ординат, Oz - вісь аплікат).



Необхідні знання про координати точки

Довільній точці простору M можна поставити у відповідність у ПДСК вектор $\vec{r} = \overline{OM}$, де O – початок координат та який називають *радіус-вектором* точки M . Тоді існує єдина трійка чисел (x, y, z) така, що

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Def. Координати x, y, z радіус вектора \overline{OM} називають координатами точки M і пишуть $M(x, y, z)$.

Якщо відомі координати початку $A(x_1, y_1, z_1)$ та кінця $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора \overline{AB} , то його координати знаходять за формулою

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Довжину вектора \overline{AB} (або відстань між точками A і B) записують так:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$


«Навчасмо» свій комп'ютер зображенню точки у прямокутній декартовій системі координат за допомогою ППЗ Gran3D.

1. Відкрити вікно ППЗ Gran3D та знайдіть опції *Об'єкт-Створити-Точка* (рис. 1.45).
2. За допомогою опції *Об'єкт-Створити-Точка* побудувати точку $A(4; -3; 3)$ (рис. 1.46).

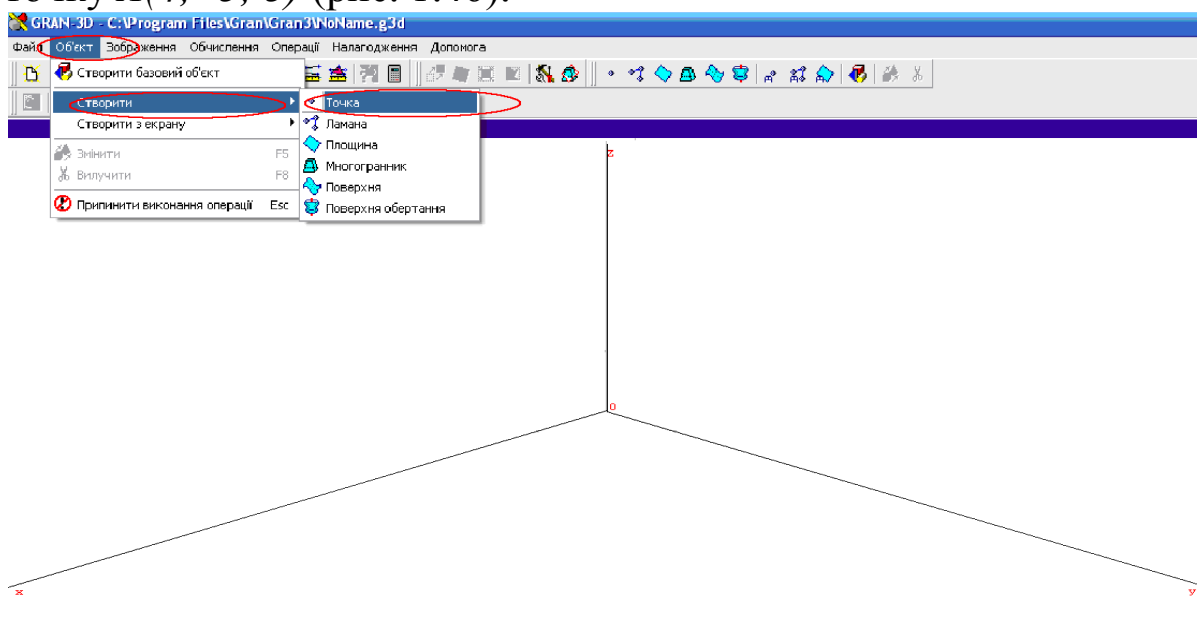


Рис. 1.45. Вікно ППЗ Gran3D

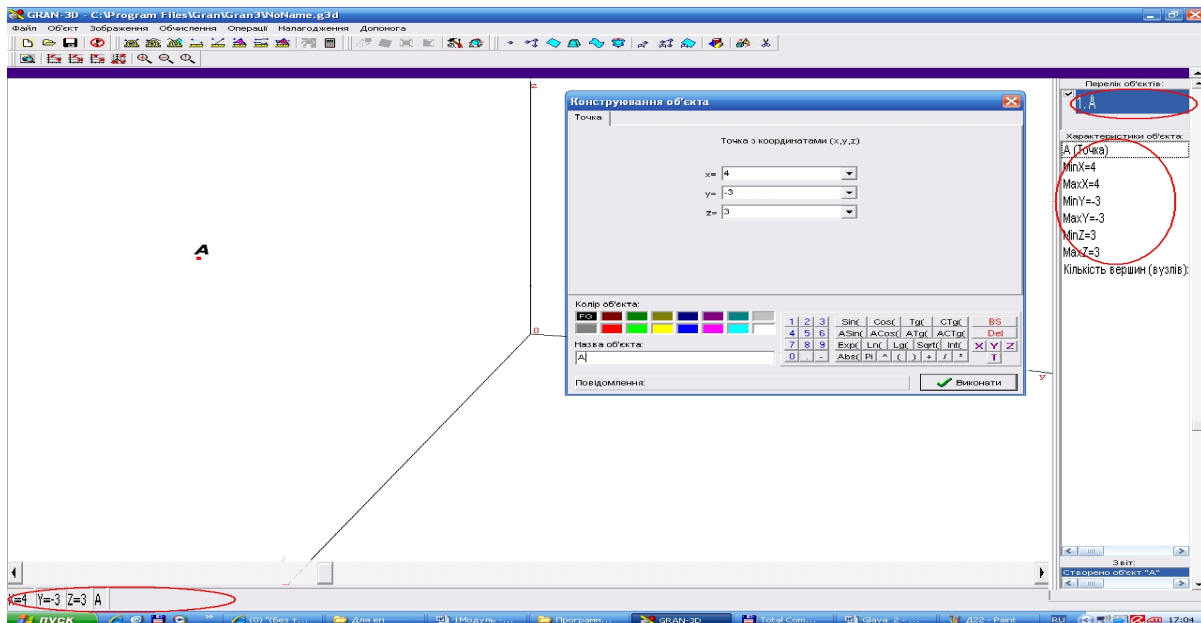


Рис. 1.46. Вікно ППЗ Gran3D: побудова точки



Необхідні знання про розкладання вектора за ортонормованим базисом

Нехай \vec{a} – довільний ненульовий вектор простору, сумістимо його початок з початком координат, а кінець позначимо т. M : $\vec{a} = \overline{OM}$ (рис 1.47).

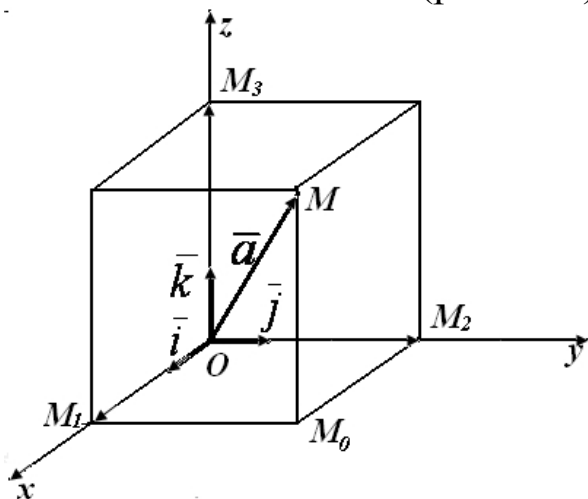


Рис. 1.47. Зображення ненульового вектора простору

Проведемо через точку M площину, паралельну координатним площинам. Точки перетину цих площин з осями координат позначимо через M_1 , M_2 та M_3 . Дістанемо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор \overline{OM} .

Тоді

$$pr_{Ox} \vec{a} = pr_{Ox} \overline{OM} = |\overline{OM_1}|, \quad pr_{Oy} \vec{a} = |\overline{OM_2}|, \\ pr_{Oz} \vec{a} = |\overline{OM_3}|.$$

Позначимо $|\overline{OM_1}| = a_x$, $|\overline{OM_2}| = a_y$, $|\overline{OM_3}| = a_z$. Враховуючи векторні рівності

$$\overline{OM_1} = |\overline{OM_1}| \cdot \vec{i} = a_x \cdot \vec{i}, \quad \overline{OM_2} = |\overline{OM_2}| \cdot \vec{j} = a_y \cdot \vec{j},$$

$$\overline{OM_3} = |\overline{OM_3}| \cdot \vec{k} = a_z \cdot \vec{k}.$$

$$\vec{a} = \overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1M_0} + \overline{M_0M} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}.$$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}.$$

Дістанемо

(1.15)

Ця формула є основною у векторній алгебрі і називається розкладом вектора \vec{a} за ортонормованим базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Векторну рівність (1.15) у символічній формі ще записують так

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \text{ або } \vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$



Вчимося розкладати вектор за базисом

1.31. Розкладіть вектор $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$ за базисом $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{q} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

Розв'язання. Передусім переконуємось, що вектори \vec{p} і \vec{q} утворюють базис: $\frac{2}{-1} \neq \frac{3}{2}$. Записуємо розклад $\vec{a} = \alpha \vec{p} + \beta \vec{q}$, де необхідно знайти коефіцієнти α та β . Далі маємо

$$5\vec{i} + 4\vec{j} = \alpha(2\vec{i} + 3\vec{j}) + \beta(-\vec{i} + 2\vec{j}),$$

або

$$5\vec{i} + 4\vec{j} = (2\alpha - \beta)\vec{i} + (3\alpha + 2\beta)\vec{j}.$$

Звідси дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 5, \\ 3\alpha + 2\beta = 4, \end{cases}$$

розв'язок якої $\alpha = 2, \beta = -1$.

Отже, $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$.

Відповідь: $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$.



Необхідні знання про довжину вектора та напрямні косинуси

Довжину (модуль) вектора \vec{a} обчислюють за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Ця формула безпосередньо випливає з того факту, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його ребер.

Оскільки координата вектора \vec{a} – це проекції вектора \vec{a} на координатні осі, то

$$a_x = \text{пр}_x \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha,$$

$$a_y = \text{пр}_y \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta,$$

$$a_z = \text{пр}_z \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma,$$

де α, β, γ – кути, які вектор \vec{a} утворює з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно (рис. 1.48).

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Тоді

(1.16)

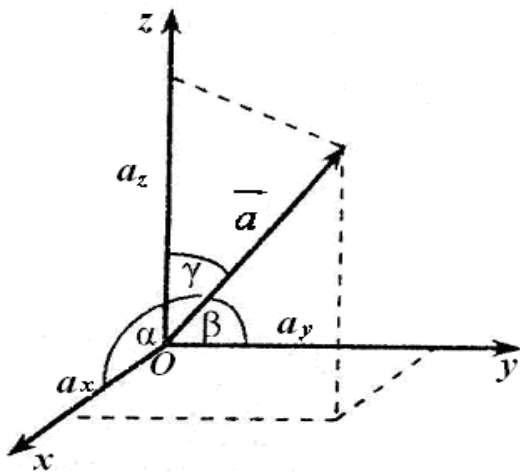


Рис. 1.48. Кути вектора \vec{a} з осями координат

Def. Косинуси $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ кутів α, β, γ називаються *напрямними косинусами* вектора \vec{a} ; вони визначають напрям вектора \vec{a} в системі $Oxyz$ і задовольняють рівність $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Звідси випливає, що орт вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ має вигляд $\vec{e}_a = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, де напрямні косинуси визначають за формулою (1.16).



Вчимося знаходити напрямні косинуси

1.32. Завдано точки $M_1(3; 3; -2)$, $M_2(0; 1; 4)$. Знайдіть напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$.

Розв'язання:

$$\overline{M_1M_2} = (0 - 3; 1 - 3; 4 - (-2)) = (-3; -2; 6);$$

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7; \quad \cos \alpha = \frac{-3}{7}, \quad \cos \beta = \frac{-2}{7}, \quad \cos \gamma = \frac{6}{7}.$$

Відповідь: орт вектора $\overline{M_1M_2}$:

$$\bar{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \{-3/7; -2/7; 6/7\}.$$



Вчимося знаходити вектор по напрямних косинусах

1.33. Знайдіть вектор $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, якщо він утворює з осями координат однакові кути і $|\bar{a}| = 2\sqrt{3}$.

Розв'язання. Враховуючи рівності

$$a_x = |\bar{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\bar{a}| \cos \beta, \quad a_z = |\bar{a}| \cos \gamma$$

і умову $\alpha = \beta = \gamma$, записуємо співвідношення $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

звідки дістаємо $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a_x = a_y = a_z = 2\sqrt{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = 2$ або $a_x = a_y = a_z = -2$.

Відповідь: $\bar{a} = \{2; 2; 2\}$ або $\bar{a} = \{-2; -2; -2\}$.



Необхідні знання з виконання дій над векторами, заданими координатами

Нехай вектори задані своїми координатами, тобто

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \bar{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

тоді

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z), \\ \lambda \bar{a} &= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).\end{aligned}$$

Іншими словами, при додаванні векторів їхні відповідні координати додають; при множенні вектора на скаляр координати вектора множать на цей скаляр.

Вектори \bar{a} і \bar{b} рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати:

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$



Необхідні знання про умову колінеарності векторів, заданих координатами

З'ясуємо умови колінеарності векторів \bar{a} і \bar{b} , заданих своїми координатами. Нехай $\bar{a} \parallel \bar{b}$, тоді $\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$, де $\lambda \neq 0$ – деяке число. Тоді
$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = \lambda (b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}).$$

Звідси

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z,$$

тобто

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (1.17)$$

М.В. Отже, координати колінеарних векторів пропорційні. І навпаки, якщо координати двох векторів пропорційні, то ці вектори колінеарні.



Вчимося виконувати дії над векторами та досліджувати їх на колінеарність

1.34. Чи колінеарні вектори $c_1 = 2\bar{a} - 5\bar{b}$ і $c_2 = \bar{a} - 2\bar{b}$, якщо $\bar{a} = \{1; -2; 3\}$ і $\bar{b} = \{4; 2; -1\}$?

Розв'язання. Послідовно дістаємо

$$\bar{c}_1 = 2\bar{a} - 5\bar{b} = \{2; -4; 6\} - \{20; 10; -5\} = \{-18; -14; 11\},$$

$$\bar{c}_2 = \bar{a} - 2\bar{b} = \{1; -2; 3\} - \{8; 4; -2\} = \{-7; -6; 5\}.$$

Перевіримо виконання умови колінеарності $\frac{-18}{-7} \neq \frac{-14}{-6} \neq \frac{11}{5}$.

Оскільки координати векторів \bar{c}_1 і \bar{c}_2 не пропорційні, то ці вектори не колінеарні.

1.35. Відомо, що вектори $\bar{a} = \alpha\bar{i} + 6\bar{j} - 8\bar{k}$ та $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ колінеарні. Знайдіть α і β .

Розв'язання. Записуємо умову колінеарності заданих векторів:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{3} = \frac{-8}{\beta}, \text{ звідси } \alpha = 4, \beta = -4.$$

Відповідь: $\alpha = 4, \beta = -4$.



Вчимося знаходити координати вектора та обчислювати його довжини

1.36. Дано точки $M_1(3; 3; -2)$, $M_2(0; 1; 4)$. Знайдіть координати, модуль $\overline{M_1M_2}$.

Розв'язання:

$$\overline{M_1M_2} = (0 - 3; 1 - 3; 4 - (-2)) = (-3; -2; 6); \quad |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7.$$

Відповідь: $\overline{M_1M_2} = (-3; -2; 6); \quad |\overline{M_1M_2}| = 7$.

1.37. Початком вектора $\bar{a} = (1; -2; 3)$ є точка $M(3; 4; -2)$. Знайдіть координати точки P , яка є кінцем вектора \bar{a} .

Розв'язання. Вектори \bar{a} і \overline{MP} рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати. За цією умовою дістанемо

$$\bar{a} = \overline{MP} = (x_P - x_M, y_P - y_M, z_P - z_M), \text{ або} \\ (1; -2; 3) = (x_P - 3, y_P - 4, z_P + 2)$$

звідси $x_P = 4, y_P = 2, z_P = 1$, тобто $P(4; 2; 1)$ – кінець вектора \bar{a} .

Відповідь: $P(4; 2; 1)$.



Необхідні знання про ділення відрізка у заданому відношенні

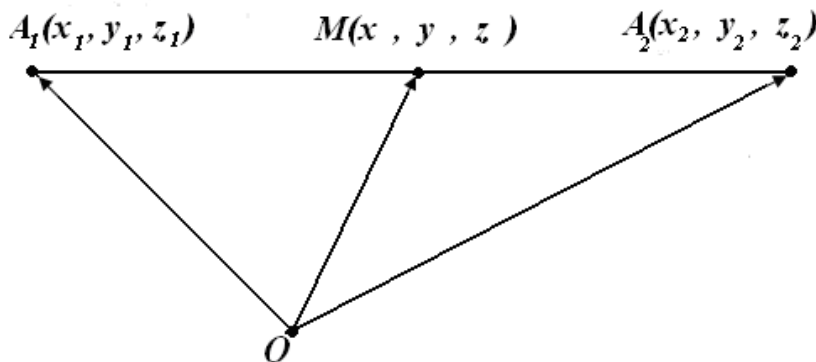
Задано відрізок $A_1 A_2$ точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді координати точки $M(x, y, z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ , тобто $|\overline{A_1 M}| : |\overline{M A_2}| = \lambda$, знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (1.18)$$

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок навпіл ($\lambda=1$), такі:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Доведення. За умовою $\overline{A_1 M} = \lambda \cdot \overline{M A_2}$.



З рисунку 1.49 видно,
 $\overline{A_1 M} = \overline{OM} - \overline{OA_1}$,
 що $\overline{MA_2} = \overline{OA_2} - \overline{OM}$.
 отже, виконуються
 векторні рівності

Рис. 1.49. Ділення відрізка у заданому відношенні

$$\overline{OM} - \overline{OA_1} = \lambda \cdot (\overline{OA_2} - \overline{OM}), \quad (1 + \lambda) \cdot \overline{OM} = \overline{OA_1} + \lambda \cdot \overline{OA_2},$$

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA_1} + \lambda \cdot \overline{OA_2}}{1 + \lambda}.$$

Звідси

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \frac{x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k} + \lambda \cdot (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k})}{1 + \lambda}$$

Скориставшись умовою рівності векторів, дістанемо формули (1.17).



Вчимося знаходити розподіл відрізка у заданому відношенні

1.38. Дано точки $M_1(3; 3; -2)$, $M_2(0; 1; 4)$. Знайдіть: координати точки M , яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $|\overline{M_1M}| : |\overline{MM_2}| = 2 : 3$.
Розв'язання:

$$\lambda = \frac{2}{3}, \text{ тоді}$$

$$x_M = \frac{3 + \frac{2}{3} \cdot 0}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{9}{5}, \quad y_M = \frac{3 + \frac{2}{3} \cdot 1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{11}{5}, \quad z_M = \frac{-2 + \frac{2}{3} \cdot 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{2}{5}.$$

Відповідь: $M\left(\frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \frac{2}{5}\right)$.



Необхідні знання про полярну систему координат

Найпоширенішою після прямокутної системи координат є *полярна система координат*. Вона задається точкою O , яку називають *полюсом*, і променем Op , який називають *полярною віссю*. Позначимо відстань від точки M до полюса O через ρ , кут між полярною віссю і вектором \overline{OM} – через ϕ (ϕ – це кут, на який треба повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб сумістити її з вектором \overline{OM}). Числа ρ і ϕ називають полярними координатами точки M , вони однозначно визначають положення точки на площині (рис. 1.50).

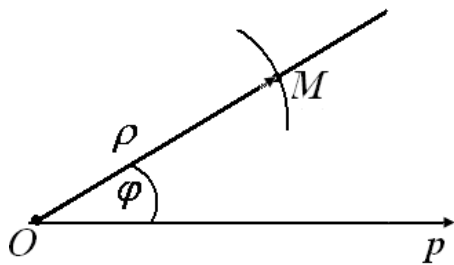


Рис. 1.50. Зображення полярної системи координат

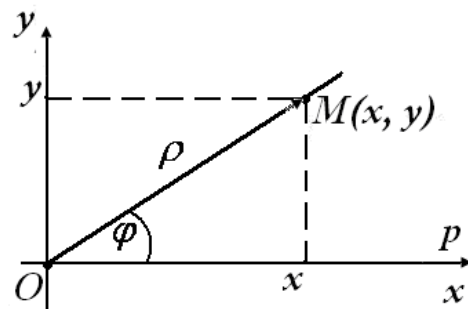


Рис. 1.51. Суміщення полярної й декартової систем координат

Виразимо декартові координати точки $M(x, y)$ через полярні координати ρ і ϕ . Вважатимемо, що початок декартової системи координат збігається з полюсом O , а вісь абсцис – з полярною віссю (рис. 1.51)

Тоді

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi,$$

де

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq \rho \leq \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$



Моделюємо професійну діяльність інженера

1.39. Монтажна щогла є найпростішим механізмом для підйому вантажів виготовляється з металу.

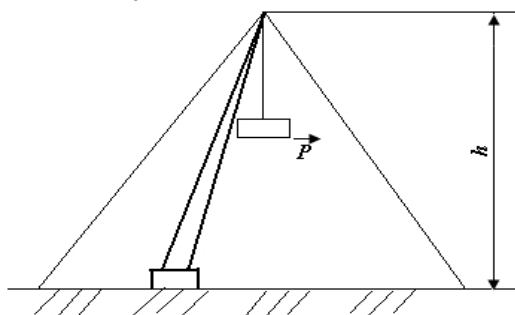


Рис. 1.52.Зображення монтажної щогли

Щоглу встановлюють на опорній подушці. Її стійкість досягається натягом сталевого тросу (рис. 1.52). Запишіть умову рівноваги сил, що діють у навантаженій монтажній щоглі.



Розгляньте застосування нової конструкції. Розробіть схему або креслення об'єкта, для якого необхідно врівноважити сили, за допомогою векторів.

Сила \vec{P} , що представляє собою вагу вантажу, що піднімається щоглою, за правилом паралелограма розкладається на дві сили \vec{P}_1 та \vec{P}_2 , де \vec{P}_1 — сила, що стискає щоглу (зусилля в щоглі); \vec{P}_2 — натяг тросу (зусилля в тросі). Запишіть умову

рівноваги зазначених сил у вигляді векторного рівняння. Спроектуйте векторне рівняння на осі координат та за допомогою можливостей програмованих засобів отримайте умову рівноваги в скалярній формі.

Відповідь: $-\left|\vec{P}_1\right| \sin \beta + \left|\vec{P}_2\right| \cos \alpha = 0, \quad -\left|\vec{P}_1\right| \cos \beta + \left|\vec{P}_2\right| \sin \alpha - \left|\vec{P}\right| = 0.$

1.40. Відомі величина вантажу, що підіймається щоглою \vec{P} (задача 1.39), кути α и β .

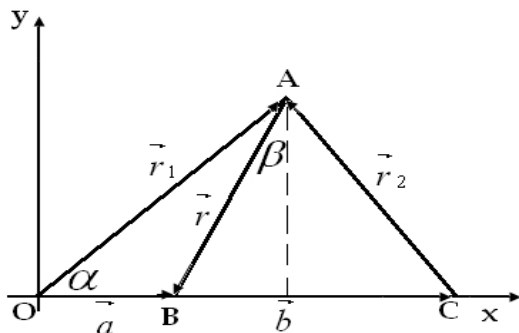


Рис. 1.53. Модель щогли, що підіймає вантаж

Знайдіть величини \vec{P}_1 — зусилля щогли й \vec{P}_2 — зусилля тросу (рис.1.53). Обчислити $|\vec{P}_1|$ и $|\vec{P}_2|$, якщо $|\vec{P}| = 10 \text{ кН}$, $\alpha = 30^\circ$ $\beta = 10^\circ$.



Розгляньте застосування нової конструкції. Розробіть схему або креслення об'єкта, для якого необхідно знайти складові рівноваги сили, за допомогою векторів.

AB — щогла; $\overline{AB} = \vec{r}$; OA та AC утворюють натягнутий трос; $\overline{OA} = \vec{r}_1$; $\overline{CA} = \vec{r}_2$; $\overline{OB} = \vec{a}$; $\overline{BC} = \vec{b}$; α — кут, що створено натягнутим тросом із поверхнею землі; β — кут, що створено щоглою із вертикаллю. Скористайтесь співвідношеннями між сторонами й кутами в прямокутному трикутнику. Виконайте різного виду обчислення за допомогою можливостей програмованих засобів.

Відповідь: $|\vec{P}_1| = \frac{|\vec{P}| \cdot \cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)} \approx 11,30 \text{ кН}$; $|\vec{P}_2| = \frac{|\vec{P}| \cdot \sin \beta}{\cos(\alpha + \beta)} \approx 2,26 \text{ кН}$

1.41. Гратчаста ферма – металева конструкція, що складається з окремих стрижнів, з'єднаних зварюванням, болтами або цвяхами, що служить для перекриття заводських будинків. При цьому вона називається кроквяною фермою. Стрижні AE й BE називаються скатами, вертикальні стрижні – стійками, похилі – розкосами. Стійки й розкоси становлять грати ферми. Щоб уникнути шкідливих напруг, що можуть виникнути у фермі при коливаннях температури, одна з її опор робиться вільною (на ковзанках).

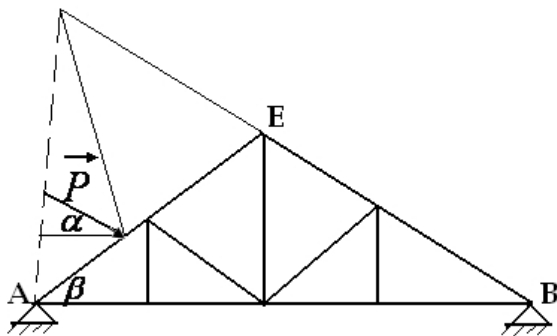


Рис. 1.54. Модель гратчастої ферми

Права опора гратчастої ферми закріплена жорстко, а ліва зроблена на ковзанках (рис. 1.54). Визначити реакції опор, що випробовуються фермою під тиском вітру силою \vec{P} на її лівий скат, якщо вектор \vec{P} становить із лінією обрїю кут α .



Сформулюйте еквівалентну задачу на основі вже виявленої властивості. Виконайте розчленування об'єктів. Розкладіть силу \vec{P} на дві складові: силу \vec{N} , спрямовану по нормалі до покрівлі, і силу \vec{S} , паралельну покрівлі.

На ферму буде діяти тільки складова \vec{N} , тому що під дією сили \vec{S} вітер буде сковзати по покрівлі. Інтегруйте всі факти й зв'язки, установлені на попередніх етапах на схематичних зображеннях, що виконані за допомогою можливостей програмованих засобів.

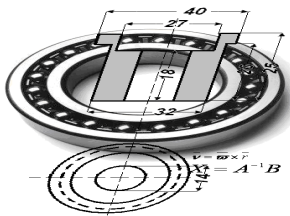
Відповідь: реакції ферми в опорах A й B будуть рівні за величиною й протилежні за напрямком цим складовим.

1.42. За даними умови завдання 1.57 визначити величину сили тиску вітру на лівий скат ферми, якщо кут нахилу ската дорівнює β . Обчислити величину сили тиску при $|\vec{P}| = 100 \text{ кН}$, $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 30^\circ$.



Сформулюйте еквівалентну задачу на основі вже виявленої властивості. Інтегруйте всі факти й зв'язки, установлені на попередніх етапах на схематичних зображеннях, що виконані за допомогою можливостей програмованих засобів.

Відповідь: $|\vec{N}| = |\vec{P}| \cdot \sin(\alpha + \beta) \approx 64,3 \text{ кН}$.



Тема 5. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

Для характеристики сили F , що діє на тіло, застосовується величина, яка називається механічною роботою. Припустимо під дією постійної сили тіло рухається прямолінійно з положення 1 у положення 2 та проходить відстань S .

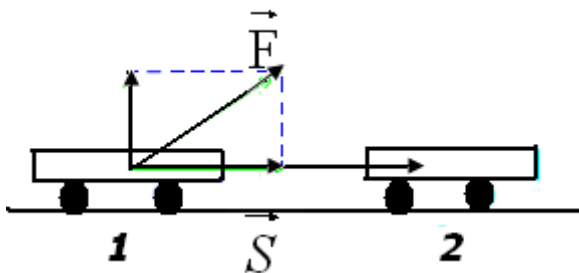


Рис. 1.55. Модель-схема характеристики дії сили на тіло, що рухається прямолінійно з положення 1 у положення 2

Знайдіть роботу сили на заданому шляху (рис. 1.55).

Поняття скалярного добутку векторів виникає під час обчислення такої роботи сили, що дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення.



Необхідні знання про скалярний добуток двох векторів

Def. Скалярним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} називають число $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (або (\vec{a}, \vec{b})), що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

Якщо хоча б один із векторів \vec{a} чи \vec{b} нульовий, то за означенням

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

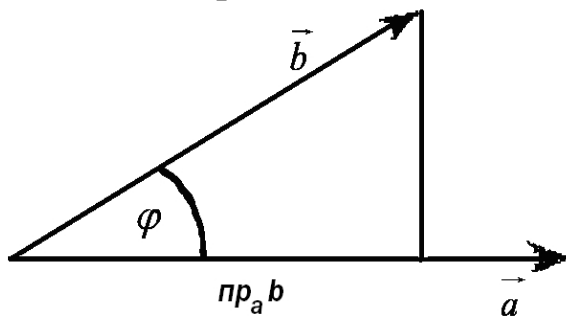
Оскільки виконуються рівності

$$|\vec{a}| \cos \varphi = n p_{\vec{b}} \vec{a}, \quad |\vec{b}| \cos \varphi = n p_{\vec{a}} \vec{b},$$

то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot n p_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot n p_{\vec{a}} \vec{b}.$$

Геометричний зміст скалярного добутку.



Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора (рис. 1.56). Тоді

$$n p_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}. \quad (1.19)$$

Рис. 1.56. Геометричний зміст скалярного добутку

Формула (1.19) – робоча формула для обчислення проекції вектора на вектор (або вісь).



Необхідні знання про властивості скалярного добутку

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}; & 2) \quad (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} &= \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}); \\ 3) \quad \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

Геометричні властивості скалярного добутку:

1) якщо $\vec{a} \neq 0$ та $\vec{b} \neq 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, якщо кут φ гострий, і $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, якщо кут φ тупий;

2) скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні;

3) скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2,$$

$$\text{звідки} \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \quad (1.20)$$

Умова перпендикулярності двох векторів.

Ненульові вектори \vec{a} і \vec{b} перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \quad (1.21)$$

Зокрема:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$



Вчимося застосовувати визначення скалярного добутку та його властивостей

1.43. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\varphi = 120^\circ$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ обчисліть:

$$\text{а) } (3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}). \quad \text{б) } |\vec{a} - \vec{b}|.$$

Розв'язання.

$$\text{а) } A = (3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 - 2\vec{b}\vec{a} + 6\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 3\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2.$$

Обчислимо окремо кожний доданок

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 9, \quad \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 16,$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 3 \cdot 4 \cdot (-0,5) = -6.$$

$$\text{Тоді } A = 3 \cdot 9 + 4 \cdot (-6) - 4 \cdot 16 = -61.$$

б) скориставшись формулою (1.20), дістанемо

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{9 - 2 \cdot (-6) + 16} = \sqrt{37}.$$

Відповідь: а) -61 ; б) $\sqrt{37}$.



Необхідні знання про вираз скалярного добутку через координати векторів та про обчислення кута між векторами

Нехай вектори \vec{a} і \vec{b} задані своїми координатами
 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$

Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.22)$$

Справді,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \cdot \vec{i}^2 + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j}^2 + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + \\ &\quad + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \cdot \vec{k}^2 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

оскільки $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ та $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$.

Висновки з формули (1.22) такі:

1) умова перпендикулярності векторів \vec{a} і \vec{b} :

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0;$$

2) довжина вектора \vec{a} : $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$

3) косинус кута між векторами \vec{a} і \vec{b} :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$



Вчимося обчислювати скалярний добуток через координати та обчислювати кут між векторами

1.44. Дано два вектори $\vec{a} = \{1; 2; -2\}$ і $\vec{b} = \{3; 3; -4\}$. Знайдіть:

а) скалярний добуток $(4\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) кут між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання.

а) $4\vec{a} + 3\vec{b} = \{4; 8; -8\} + \{9; 9; -12\} = \{13; 17; -20\},$

$$\begin{aligned}\bar{a} - 2\bar{b} &= \{1; 2; -2\} - \{6; 6; -8\} = \{-5; -4; 6\}, \\ (4\bar{a} + 3\bar{b})(\bar{a} - 2\bar{b}) &= 13 \cdot (-5) + 17 \cdot (-4) - 20 \cdot 6 = -253, \\ \text{б) } \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} &= \{4; 5; -6\}, \quad \bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = \{-2; -1; 2\}, \\ \cos \varphi &= \frac{\bar{c} \cdot \bar{d}}{|\bar{c}| |\bar{d}|} = \frac{4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) - 6 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{-25}{3\sqrt{77}}. \\ \text{Відповідь: а) } -253; \text{ б) } \varphi &= \pi - \arccos \frac{25}{3\sqrt{77}}.\end{aligned}$$

1.45. Дано вектори $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 6\bar{i} + 5\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{c} = -2\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$. Знайти вектор \bar{x} , який задовольняє рівностям $\bar{x} \cdot \bar{a} = 8$, $\bar{x} \cdot \bar{b} = -3$ та $\bar{x} \cdot \bar{c} = 13$.

Розв'язання. Нехай $\bar{x} = \{x_1; x_2; x_3\}$, тоді умова $\bar{x} \cdot \bar{a} = 8$ рівносильна рівнянню $x_1 - x_2 + 4x_3 = 8$. Аналогічно дістаємо ще два рівняння $6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -3$ та $-2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13$. Розв'язавши систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 8, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -3, \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13, \end{cases}$$

дістанемо значення: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Відповідь: $\bar{x} = \{-1; -1; 2\}$.

1.46. Точки $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$ - вершини трикутника ABC . Знайдіть кут у трикутнику при вершині B і проекцію вектора \overline{AB} на векторі \overline{BC} .

Розв'язання. Знайдемо координати векторів \overline{BA} і \overline{BC} , що збігаються з відповідними сторонами трикутника:

$$\overline{BA} = \{3; 0; 4\}, \quad \overline{BC} = \{7; 0; 1\}.$$

Косинус кута φ між векторами \overline{BA} і \overline{BC} знаходимо за формулою

$$\cos \varphi = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| |\overline{BC}|} = \frac{3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{9 + 0 + 4} \sqrt{49 + 0 + 1}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

звідки $\varphi = 45^\circ$. Отже, $\angle B = 45^\circ$.

Проекцію вектора \overline{AB} на вектор \overline{BC} знайдемо за формулою:

$$n p_{\overline{BC}} \overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \frac{-3 \cdot 7 + 0 + (-4) \cdot 1}{\sqrt{50}} = \frac{-25}{5\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Відповідь: $\angle B = 45^\circ$; $n p_{\overline{BC}} \overline{AB} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

1.47. Нехай точки $A(1; 4)$, $B(-2; 5)$, $C(-3; a)$, $D(3; -3)$ – послідовні вершини чотирикутника $ABCD$. При якому значенні a діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні?

Розв'язання. Утворимо вектори:

$$\overline{AC} = (-4; a-4), \quad \overline{BD} = (5; -8).$$

Діагоналі чотирикутника будуть взаємно перпендикулярні тоді, коли скалярний добуток $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$ (формула (1.20)), тобто $-4 \cdot 5 + (a-4)(-8) = 0$,

звідки дістанемо $a = 1,5$.

Відповідь: $a = 1,5$.



Знаходимо кути між векторами за допомогою ППЗ Gran3D

Процедура обчислення кута між векторами за допомогою відповідних правил.

1.48. Знайдіть величину роботи результуючої сил $\vec{F}_1(3; 2; -1)$, $\vec{F}_2(2; -1; -3)$, $\vec{F}_3(-4; 1; 3)$, прикладеної до точки $A(2; 3; -1)$ відносно точки $O(-4; 1; 2)$ та на який кут прикладене результуючу силу до вектору шляху.

Розв'язання.

Крок 1. Знайдемо координати вектора результуючої сил. Робота результуючої сили дорівнює сумі робіт складових сил: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow \vec{F}(1; 2; -1)$.

Крок 2. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{OA}(x_a - x_o; y_a - y_o; z_a - z_o) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (6; 2; -3)$.

Крок 3. Знайдемо роботу результуючої сили $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{OA}$

$$A = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = 13$$

Крок 4. Знайдемо

$$\cos(\angle \vec{F}; \vec{OA}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{OA}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{OA}|} = \frac{13}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{49}} \approx 0,7582$$

$$\angle(\vec{F}; \vec{OA}) \approx \arccos 0,7582 \approx 45^{\circ} 2'$$

Процедура обчислення кута за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Gran3D.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню кута за допомогою ППЗ Gran3D.

1. Відкрити вікно ППЗ Gran3D.
2. За допомогою опції *Об'єкт-Створити-Точка* побудувати точки $A(6; 2; -3)$, $F(1; 2; -1)$ (рис.1.57).
3. За допомогою опції *Обчислення-Кут-За трьома точками* ввести послідовно точки $A(6; 2; -3)$, $O(0; 0; 0)$, $F(1; 2; -1)$ активізуючи їх координати курсором по команді «виберіть ...точку». У правому нижньому куті звіту з'явиться значення кута (рис. 1.58).

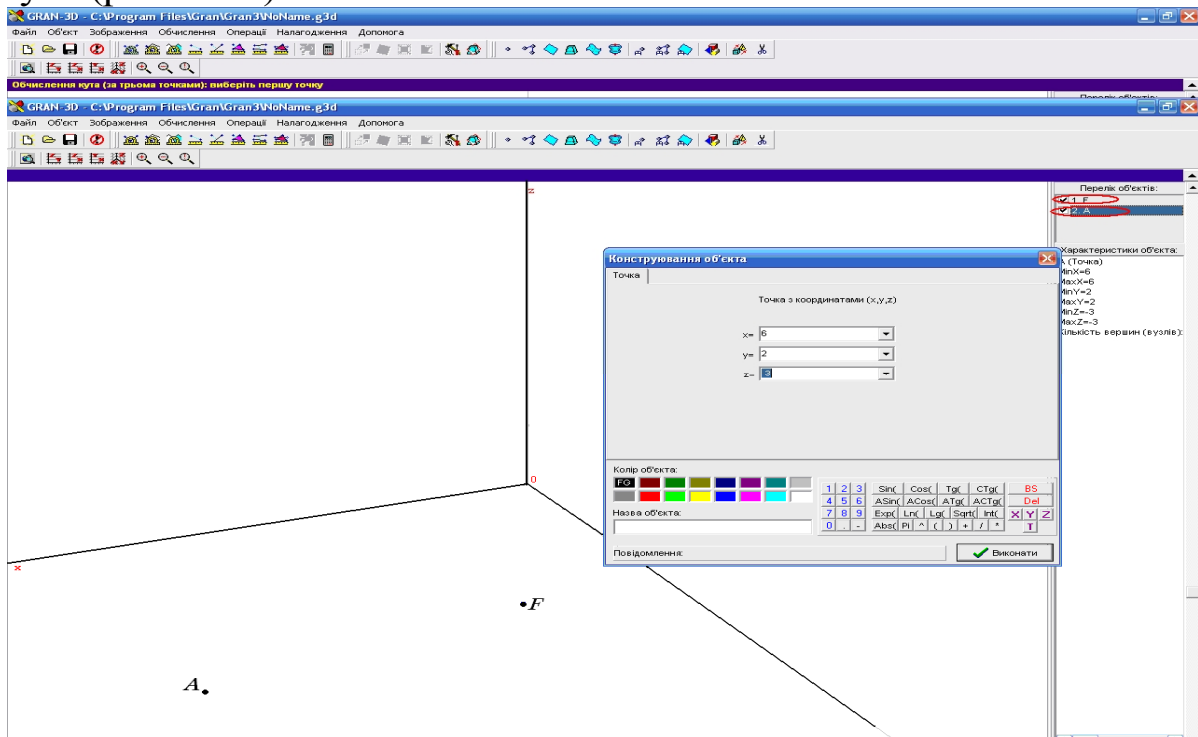


Рис. 1.57. Вікно ППЗ Gran3D: побудова точок

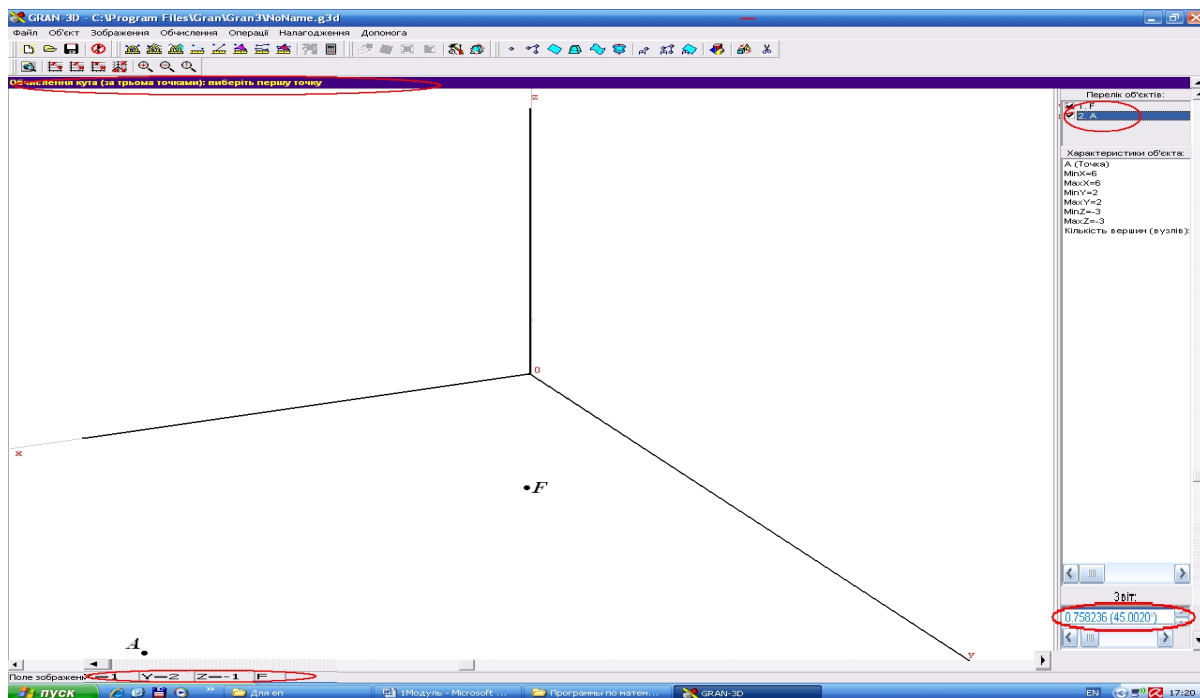
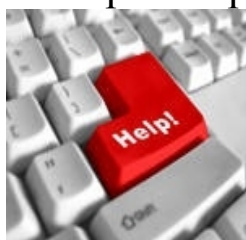


Рис. 1.58. Вікно ППЗ Gran3D: значення кута



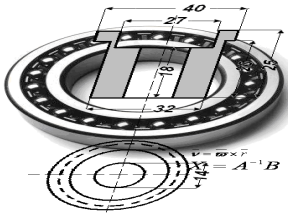
Моделюємо професійну діяльність інженера

1.49. Координати сили, що діє на точку: $F_x = 3 \text{ Н}$, $F_y = 4 \text{ Н}$. Координати переміщення точки $S_x = 7 \text{ м}$, $S_y = 1 \text{ м}$. Обчислити роботу сили \vec{F} , що діє на точку й кут φ між вектором сили \vec{F} й вектором переміщення \vec{S} .



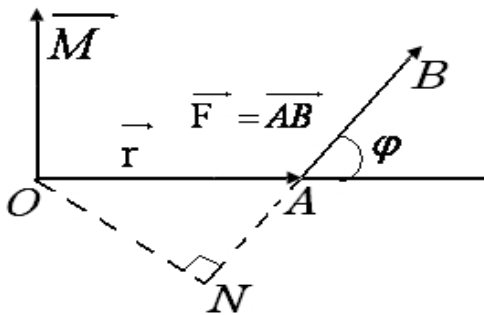
Видозмінюйте задачу з метою, що її розв'язання наведе на розв'язання вихідної задачі: знайдіть кут між векторами $\vec{F} = \{3; 4\}$ та $\vec{S} = \{7; 1\}$ та скалярний добуток цих векторів. Для виконання різного виду обчислень й перетворень скористайтесь можливостями програмованих засобів.

Відповідь: $A = 25 \text{ Дж}$; $\varphi = 45^\circ$.



Тема 6. ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ

Припустимо до тіла (точка A) прикладена силу $\vec{F} = \vec{AB}$ та задано точку O — як деяку точку простору (рис. 1.59).



Знайдіть момент сили \vec{F} відносно точки O .

Поняття векторного добутку векторів виникає під час обчислення такого моменту сили, що дорівнює векторному добутку вектора сили на

Рис. 1.59. Модель-схема моменту вектор переміщення.
сили \vec{F} відносно точки O



Необхідні знання про векторний добуток векторів

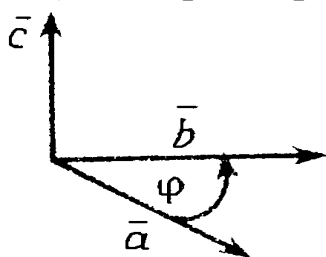
Def. Векторним добутком вектора \vec{a} на вектор \vec{b} називають вектор \vec{c} , який задовольняє таким трьом умовам:

1) модуль вектора \vec{c} обчислюють за формулою:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi,$$

де кут φ - кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;

2) вектор \vec{c} перпендикулярний до кожного з векторів \vec{a} і \vec{b} ;



3) вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} утворюють *праву трійку*, тобто якщо дивитися з кінця результуючого вектора \vec{c} , то найкоротший поворот від першого вектора \vec{a} до другого вектора \vec{b} здійснюється проти годинникової стрілки (рис. 1.60).

Рис. 1.60. Права трійка векторів \vec{a} , \vec{b} і \vec{c}

Позначення векторного добутку: $\vec{a} \times \vec{b}$, $[\vec{a}, \vec{b}]$.

З означення векторного добутку безпосередньо випливають значення векторних добутків між ортами \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} :

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$


Необхідні знання про властивості векторного добутку

Розглянемо алгебраїчні та геометричні властивості векторного добутку:

1) геометричний зміст векторного добутку:

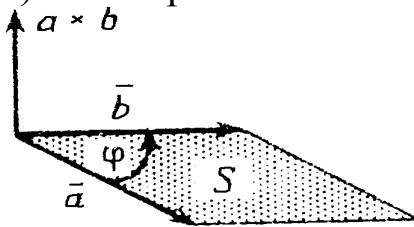


Рис. 1.61. Геометричний зміст векторного добутку

модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на прикладених до спільного початку векторах \vec{a} і \vec{b} (рис. 1.61);

2) антикомутативність множення:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Справді, з означення векторного добутку випливає, що вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ та $\vec{b} \times \vec{a}$ колінеарні, мають однакову довжину:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{b}| |\vec{a}| \sin \varphi = |\vec{b} \times \vec{a}|$$

та протилежно спрямовані, оскільки вектори \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} \times \vec{b}$ утворюють праву трійку, а вектори \vec{a} , \vec{b} , $\vec{b} \times \vec{a}$ - ліву трійку;

$$3) (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}); \quad \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b});$$

$$4) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

5) два ненульові вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні тоді і тільки тоді, коли векторний добуток цих векторів дорівнює нуль-вектору, тобто

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Зокрема, $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$, $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.

М.В. Якщо відомі координати вершин трикутника ABC , то його площу доцільно шукати за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|. \quad (1.23)$$



Вчимося застосовувати властивості векторного добутку

1.50. Обчисліть $|(3\bar{a} - 2\bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b})|$, якщо $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$,
 $\angle \bar{a}, \bar{b} = \varphi = 30^\circ$.

Розв'язання. Оскільки

$$\begin{aligned} (3\bar{a} - 2\bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b}) &= 3\bar{a} \times \bar{a} - 2\bar{b} \times \bar{a} + 6\bar{a} \times \bar{b} - 4\bar{b} \times \bar{b} = \\ &= \bar{0} + 2\bar{a} \times \bar{b} + 6\bar{a} \times \bar{b} - \bar{0} = 8\bar{a} \times \bar{b}, \end{aligned}$$

то

$$|(3\bar{a} - 2\bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b})| = 8 \cdot |\bar{a} \times \bar{b}| = 8 |\bar{a}| |\bar{b}| \sin 30^\circ = 8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0,5 = 48.$$

Відповідь: 48.



Необхідні знання про обчислення векторного добутку двох векторів, заданих координатами

Нехай вектори $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ задані своїми координатами в ПДСК. Тоді векторний добуток знаходять за формулою

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (1.20)$$

або

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k}.$$

Справді,

$$\begin{aligned}
 \bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\
 &= a_x b_x (\bar{i} \times \bar{i}) + a_x b_y (\bar{i} \times \bar{j}) + a_x b_z (\bar{i} \times \bar{k}) + a_y b_x (\bar{j} \times \bar{i}) + \\
 &+ a_y b_y (\bar{j} \times \bar{j}) + a_y b_z (\bar{j} \times \bar{k}) + a_z b_x (\bar{k} \times \bar{i}) + a_z b_y (\bar{k} \times \bar{j}) + a_z b_z (\bar{k} \times \bar{k}) = \\
 &= \bar{0} + a_x b_y \bar{k} + a_x b_z (-\bar{j}) + a_y b_x (-\bar{k}) + \bar{0} + a_y b_z \bar{i} + a_z b_x \bar{j} + a_z b_y (-\bar{i}) + \bar{0} = \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} = \\
 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$



Вчимося обчислювати векторний добуток двох векторів, заданих координатами

1.51. Знайдіть вектор $(2\bar{a} - \bar{b}) \times (3\bar{a} + 2\bar{b})$, якщо $\bar{a} = \{2; 3; 1\}$, $\bar{b} = \{-2; 4; 0\}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$$\begin{aligned}
 2\bar{a} - \bar{b} &= \{4; 6; 2\} - \{-2; 4; 0\} = \{6; 2; 2\}, \\
 3\bar{a} + 2\bar{b} &= \{6; 9; 3\} + \{-4; 8; 0\} = \{2; 17; 3\}.
 \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 (2\bar{a} - \bar{b}) \times (3\bar{a} + 2\bar{b}) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & 17 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 17 & 3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 17 \end{vmatrix} \bar{k} = \\
 &= -28\bar{i} - 14\bar{j} + 98\bar{k}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $\{-28; -14; 98\}$.



Вчимося визначати момент сили відносно точки

1.52. Нехай у точці A прикладена сила $\bar{F} = \overline{AB}$ і нехай O – деяка точка простору (рис. 1.59).

З фізики відомо, що моментом сили відносно точки O називають вектор \vec{M} , який проходить через точку O і задовольняє такі три умови:

1) перпендикулярний площині, що проходить через точки O , A і B ;

2) чисельно дорівнює добутку сили на плече:

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot ON = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \varphi = |\vec{F}| \cdot |\vec{OA}| \cdot \sin(\vec{F}, \vec{OA}),$$

4) утворює праву трійку з векторами \vec{OA} і \vec{AB} .

Отже, $\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$.



Вчимося визначати лінійну швидкість обертання

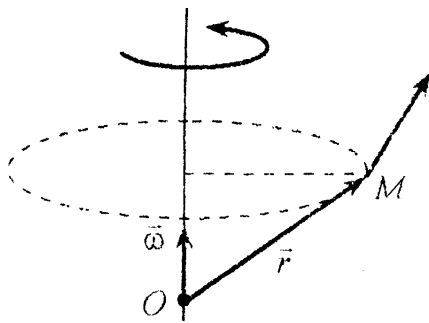


Рис. 1.62. Модель-схема швидкості \vec{v} точки M твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$

Швидкість \vec{v} точки M твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі, визначається за формулою Ейлера $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, де $\vec{r} = \vec{OM}$, де O – деяка нерухома точка осі (рис. 1.62).



Обчислюємо момент сили відносно точки за допомогою ППЗ Mathcad

Процедура обчислення величини моменту сили за допомогою відповідних правил.

1.53. Знайдіть величину моменту результуючої сил $\vec{F}_1(3; 2; -1)$, $\vec{F}_2(2; -1; -3)$, $\vec{F}_3(-4; 1; 3)$, прикладеної до точки $A(4; 5; -1)$ відносно точки $O(-3; 1; 1)$.

Розв'язання.

Крок 1. Знайдемо координати вектора результуючої сил. Робота результуючої сили дорівнює сумі робіт складових сил:
 $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow \vec{F}(1; 2; -1)$.

Крок 2. Знайдемо координати вектора
 $\vec{OA}(x_a - x_o; y_a - y_o; z_a - z_o) \Rightarrow \vec{OA}(7; 4; -2)$.

Крок 3. Знайдемо роботу результуючої сили $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{OA}$, де

$$\vec{F} \times \vec{OA} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{\vec{F}} & y_{\vec{F}} & z_{\vec{F}} \\ x_{\vec{OA}} & y_{\vec{OA}} & z_{\vec{OA}} \end{vmatrix}$$

Крок 4. Знайдемо

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 \cdot i + 4 \cdot k - 7 \cdot j - 14 \cdot k + 4 \cdot i + 2 \cdot j = -5 \cdot j - 10 \cdot k$$

Крок 5. Знайдемо $|\vec{M}| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$, де $\vec{M} = (0; -5; -10)$.

$$|\vec{M}| = \sqrt{0 + (-5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{125} \approx 11,1803$$


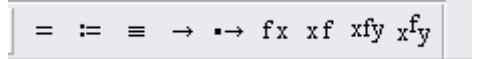
Відповідь: $|\vec{M}| \approx 11,1803$.

Процедура обчислення абсолютної величини векторного добутку за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathcad.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню абсолютної величини векторного добутку за допомогою ППЗ Mathcad.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathcad.
2. За допомогою опції *Вид – Панели инструментов – Матрицы* та *Вид – Панели инструментов – Вычисление* винести на панель

інструментів вкладки  та 

3. Ввести координати векторів \vec{F} та \vec{OM} (рис.1.63):
 – ввести ім'я векторів, знак присвоювання, клацнути на панелі по символу матриці;

– вказати у вікні вводу число рядків і стовпців та ввести у помічених позиціях координати векторів.

4. Обчислити абсолютну величину векторного добутку $|\vec{M}| = |\vec{F} \times \vec{OM}|$ (рис. 1.64):

– клацнути на панелі по символу абсолютна величина, ввести векторний добуток, ввести у позиціях імена множників;

– натиснувши клавішу *Space* виокремити вираз рамкою й ввести з клавіатури знак рівності.

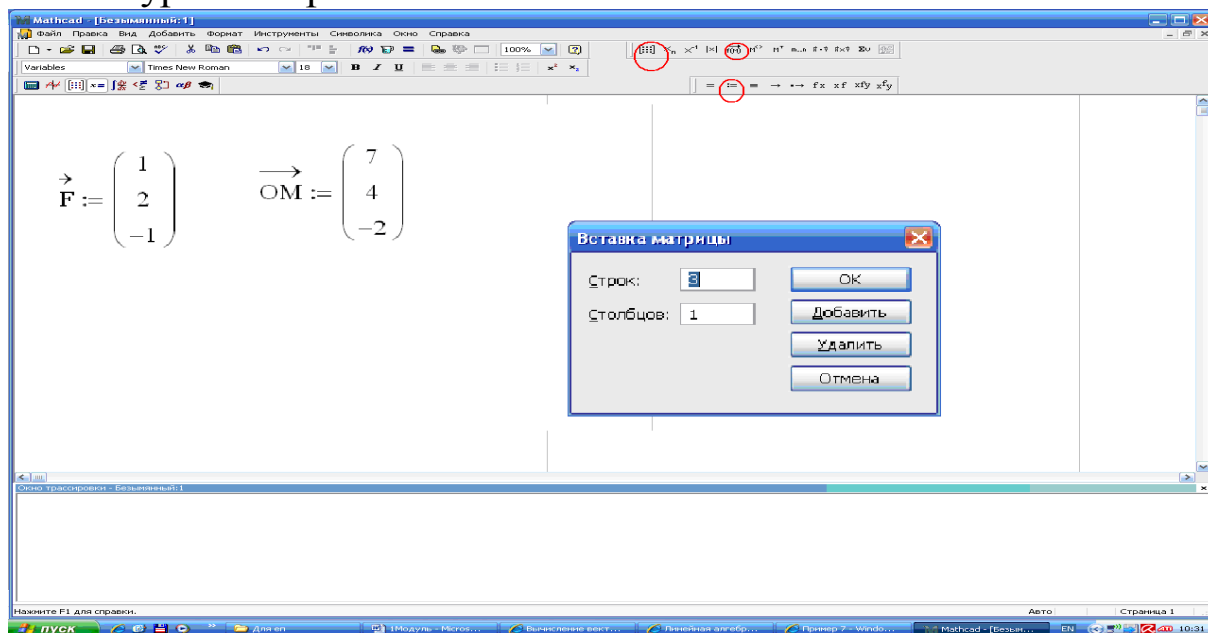


Рис. 1.63. Вікно ППЗ Mathcad: уведення координат векторів

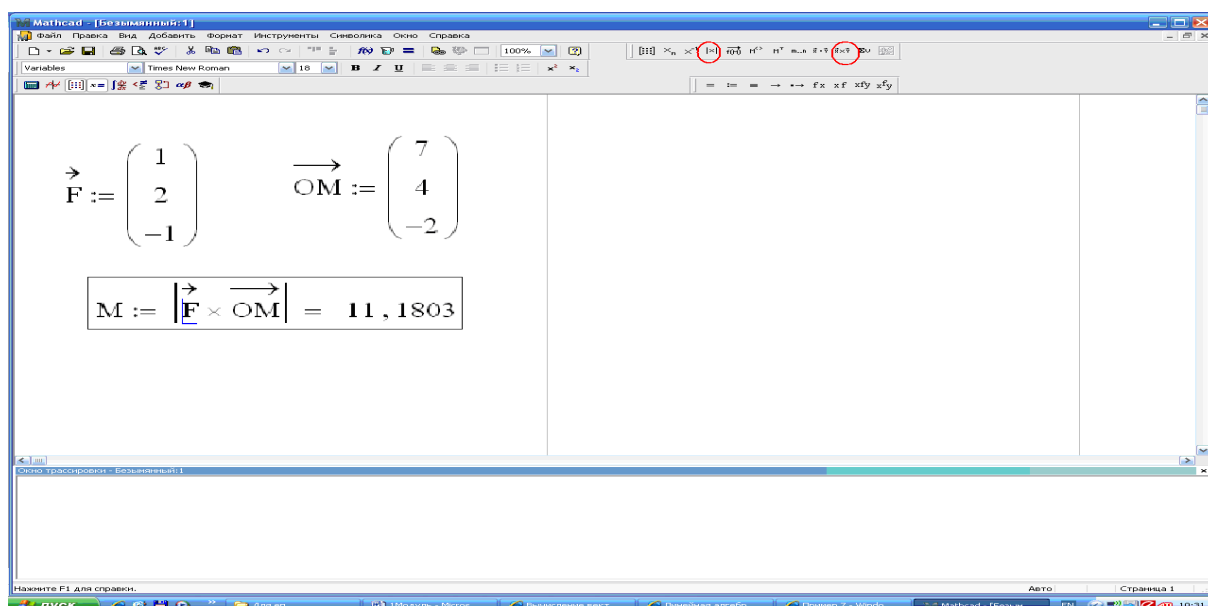


Рис. 1.64. Вікно ППЗ Mathcad: обчислення абсолютної величини векторного добутку



Необхідні знання про мішаний добуток векторів

Def. Мішаним (векторно-скалярним) добутком трьох векторів \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} називають число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, рівне скалярному добутку вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор \vec{c} :

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Розглянемо властивості мішаного добутку.

1. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак, наприклад:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

2. При циклічному переставлянні множників мішаний добуток не змінюється, тобто $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$.

3. У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

4. Геометричний зміст мішаного добутку: модуль мішаного добутку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на прикладених до спільного початку векторах \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} (рис. 1.65), тобто

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

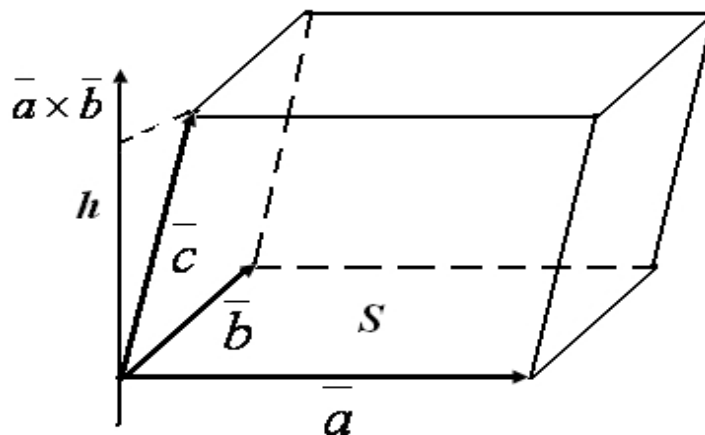


Рис. 1.65. Геометричний зміст мішаного добутку

Справді,

$$|(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| \cdot |n p_{\bar{a} \times \bar{b}} \bar{c}| = S_{\text{осн}} \cdot h = V,$$

М.В. Об'єм піраміди, побудованої на векторах \bar{a} , \bar{b} і \bar{c} , дорівнює $1/6$ частини об'єму паралелепіпеда, тобто

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |\bar{a} \bar{b} \bar{c}|.$$

5. Якщо $\bar{a} \bar{b} \bar{c} > 0$, то вектори \bar{a} , \bar{b} і \bar{c} утворюють *праву* трійку, а якщо $\bar{a} \bar{b} \bar{c} < 0$, то *ліву* трійку.

6. Умова компланарності трьох векторів.

Вектори \bar{a} , \bar{b} і \bar{c} компланарні тоді і тільки тоді, коли $\bar{a} \bar{b} \bar{c} = 0$.



Необхідні знання про обчислення мішаного добутку трьох векторів, що задані координатами

Нехай вектори $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\bar{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ задані своїми координатами в ПДСК. Знайдемо мішаний добуток цих векторів, використовуючи формули скалярного і векторного добутку векторів, заданих координатами. Маємо

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k} \right) \cdot (c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z.$$

Дістали розклад визначника третього порядку за елементами першого рядка. Отже,

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

М.В. Компланарність ненульових векторів $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ і $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ встановлюють так: якщо визначник

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

то вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} - компланарні, якщо визначник відмінний від нуля, то вектори не компланарні.



Вчимося обчислювати мішаний добуток трьох векторів, що задані координатами

1.54. Доведіть, що вектори $\vec{a} = \{2, 1, 3\}$, $\vec{b} = \{2, -3, 1\}$ і $\vec{c} = \{1, 2, 1\}$ утворюють базис, і розкладіть вектор $\vec{p} = \{0, 11, 3\}$ за цим базисом.

Розв'язання. Нагадаємо, що базисом у просторі називають довільну упорядковану трійку не компланарних векторів. Тому дані вектори утворюють базис, якщо мішаний добуток цих векторів не дорівнює нулю. Перевіримо цю умову:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Отже, вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} - базис.

Вектор \vec{p} розкладений за базисом \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} , якщо $\vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$, α , β , γ - невідомі числа (координати вектора \vec{p} у даному базисі).

Запишемо векторне рівняння у розгорнутому вигляді

$$0 \cdot \vec{i} + 11 \vec{j} + 3 \vec{k} = \alpha (2 \vec{i} + \vec{j} + 3 \vec{k}) + \beta (2 \vec{i} - 3 \vec{j} + \vec{k}) + \gamma (\vec{i} + 2 \vec{j} + \vec{k}),$$

або

$$0 \cdot \vec{i} + 11 \vec{j} + 3 \vec{k} = (2\alpha + 2\beta + \gamma) \vec{i} + (\alpha - 3\beta + 2\gamma) \vec{j} + (3\alpha + \beta + \gamma) \vec{k}.$$

Враховуючи умову рівності двох векторів, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + 2\beta + \gamma, \\ 11 = \alpha - 3\beta + 2\gamma, \\ 3 = 3\alpha + \beta + \gamma. \end{cases}$$

Звідси: $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 2$. Отже, $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$.

Відповідь: $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$.



Обчислюємо об'єм піраміди за допомогою ППЗ Mathcad

Процедура обчислення об'єму піраміди за допомогою відповідних правил.

1.55. Обчислити площу грані ABC і об'єм піраміди, вершини якої містяться в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$.

Розв'язання.

Крок 1. Знайдемо координати векторів \vec{AB} , \vec{AC} і \vec{AD} , на яких побудована піраміда: для $\vec{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \Rightarrow$

$$\vec{AB} = \{3; 6; 3\}, \quad \vec{AC} = \{1; 3; -2\}, \quad \vec{AD} = \{2; 2; 2\}.$$

Крок 2. Площу грані ABC визначимо за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-12 - 9)\vec{i} - (-6 - 3)\vec{j} + (9 - 6)\vec{k} = \\ &= -21\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k} = 3(-7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}), \\ S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{(-7)^2 + 3^2 + 1^2} = \frac{3}{2} \sqrt{59}. \end{aligned}$$

Крок 3. Об'єм піраміди V_{ABCD} дорівнює $1/6$ частини об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} , тобто

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |(-18)| = 3$$

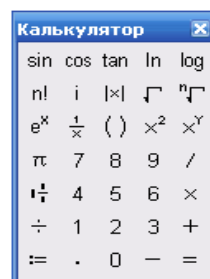
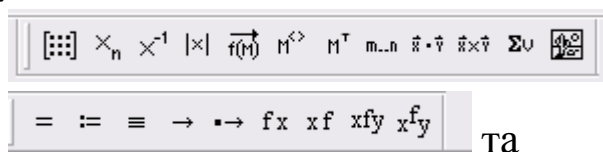
Отже, $S_{\Delta ABC} = \frac{3}{9} \sqrt{59}$ кв. од., $V_{ABCD} = 3$ куб. од.

Процедура обчислення об'єму піраміди за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathcad.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню об'єму піраміди за допомогою ППЗ Mathcad.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathcad.
2. За допомогою опції Вид – Панелі інструментов – Матриці та Вид – Панелі інструментов – Вычисление винести на панель інструментів вкладки:



3. Ввести координати векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} (рис. 1.66.):

- ввести ім'я векторів a , b , c , знак присвоювання, клацнути на панелі по символу матриці;
- вказати у вікні вводу число рядків и стовпців та ввести у помічених позиціях координати векторів.

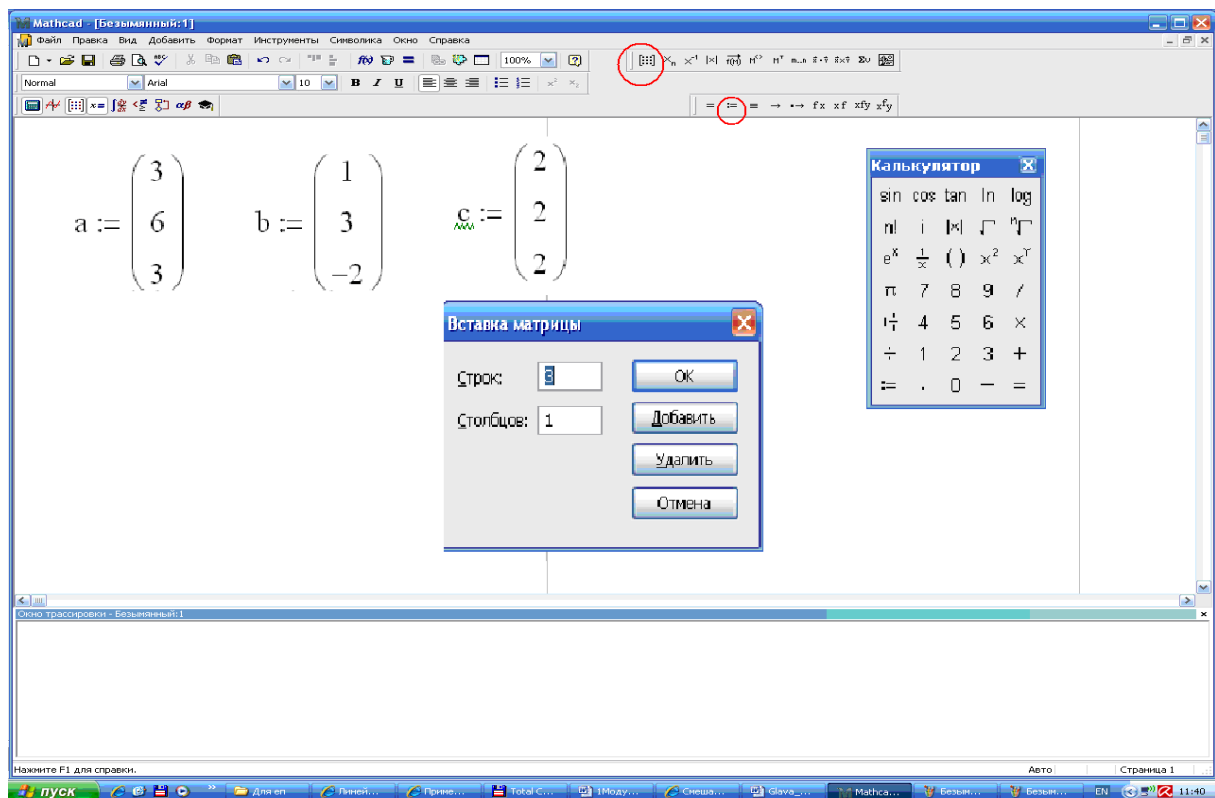


Рис. 1.66. Вікно ППЗ Mathcad: введення координат векторів

4. Обчислити об'єм піраміди $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |\overline{a} \overline{b} \overline{c}|$ (рис. 1.67):

- ввести з клавіатури V , знак присвоєння, клацнути на панелі по символу абсолютна величина, ввести відношення, ввести у чисельнику з клавіатури або з панелі *Вставка функції* функцію *augment* (a, b, c);
- ввести з клавіатури V та знак рівності.

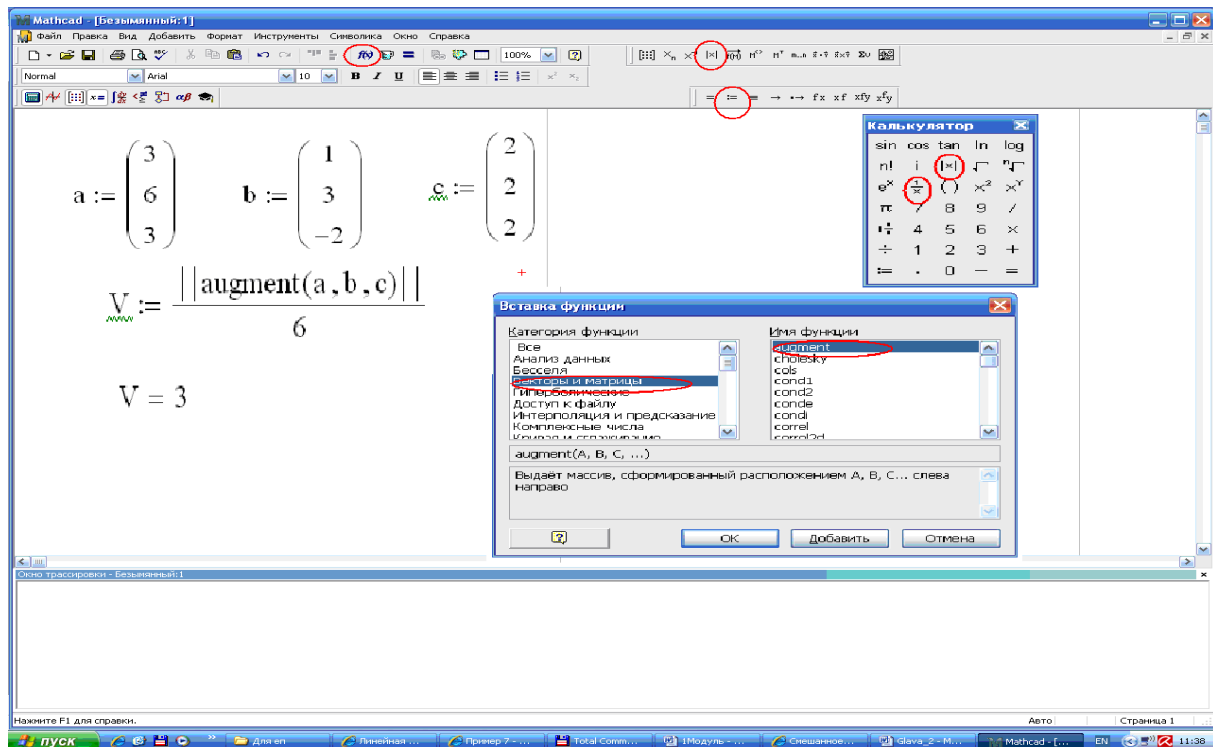
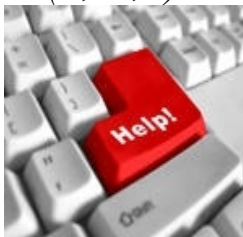


Рис. 1.67. Вікно ППЗ Mathcad: обчислення об'єму піраміди



Моделюємо професійну діяльність інженера

1.56. Силу $\vec{F} = \{5; 4; -1\}$ прикладено до точки $A (-1; 1; 5)$. Визначити величину та напрям моменту цієї сили відносно точки $O (0; -1; 2)$.



Видозмінюйте задачу з метою, що її розв'язання наведе на розв'язання вихідної задачі: знайдіть векторний добуток векторів $\vec{F} = \{5; 4; -1\}$ та $\vec{OA} = \{-1; 2; 3\}$.

Для виконання різного виду обчислень й моделювання скористайтесь можливостями програмованих засобів.

Відповідь: $|\vec{M}| = \sqrt{428} \approx 20,69 \text{ Нм}$

1.57. Сили $\vec{F}_1 = \{2; -1; 3\}$ та $\vec{F}_2 = \{-1; -1; 1\}$ прикладені до точки $A(1;2;3)$. Визначити величину та напрям моменту рівнодійної цих сил відносно точки $O(3;2;-1)$.



Видозмінюйте задачу з метою, що її розв'язання наведе на розв'язання вихідної задачі: знайдіть векторний добуток векторів $\vec{F} = \{1; -2; 4\}$ та $\vec{OA} = \{-2; 0; 4\}$.

Для виконання різного виду обчислень й моделювання скористайтесь можливостями програмованих засобів.

Відповідь: $|\vec{M}| = \sqrt{224} \approx 14,97 \text{ Нм}$

1.58. Силу $\vec{F} = (2; -1; 2)$ прикладено до точки $A(3;4;-2)$. Визначити величину та напрям моменту цієї сили відносно початку координат.

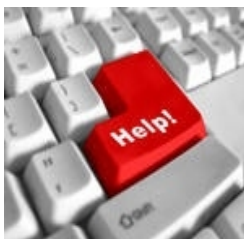


Видозмінюйте задачу з метою, що її розв'язання наведе на розв'язання вихідної задачі: знайдіть векторний добуток векторів $\vec{F} = \{2; -1; 2\}$ та $\vec{OA} = (3; 4; -2)$.

Для виконання різного виду обчислень й моделювання скористайтесь можливостями програмованих засобів.

Відповідь: $|\vec{M}| = \sqrt{257} \approx 16,03 \text{ Нм}$

1.59. Знайти лінійну швидкість обертання точок вовчка, що лежать на колі великого діаметра, рівного 20, якщо вектор $\vec{\omega} = \{-3; 2; 4\}$ прикладений у центрі великого кола.



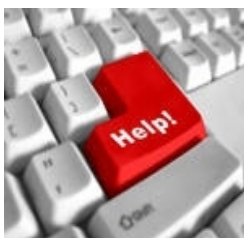
Видозмінюйте задачу з метою, що її розв'язання наведе на розв'язання вихідної задачі: знайдіть векторний добуток векторів $\vec{\omega} = \{-3; 2; 4\}$ та $\vec{r} = \{10 \cdot \cos \alpha; 10 \cdot \cos \beta; 10 \cdot \cos \gamma\}$.

Для виконання різного виду обчислень й моделювання скористайтесь можливостями програмованих засобів.

Відповідь:

$$v = 10 \times [(2 \cdot \cos \gamma - 4 \cdot \cos \beta) \cdot i + (3 \cdot \cos \gamma + 4 \cdot \cos \alpha) \cdot j - (3 \cdot \cos \beta - 2 \cdot \cos \alpha) \cdot k]$$

1.60. Дано піраміду з вершинами в точках $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ і $C(1; 2; 4)$. Знайти об'єм піраміди, площу грані ABC й висоту піраміди, що опущено на цю грань.



Видозмінюйте задачу з метою, що її розв'язання наведе на розв'язання вихідної задачі: знайдіть $\frac{1}{6}$ мішаного добутку векторів \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} ; знайдіть $\frac{1}{2}$ абсолютної величини;

векторного добутку векторів \vec{AB} , \vec{AC} проводіть міркування, що ґрунтуються на результатах, установлених на попередніх етапах та підставте отримані результати у формулу об'єму піраміди

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h$$

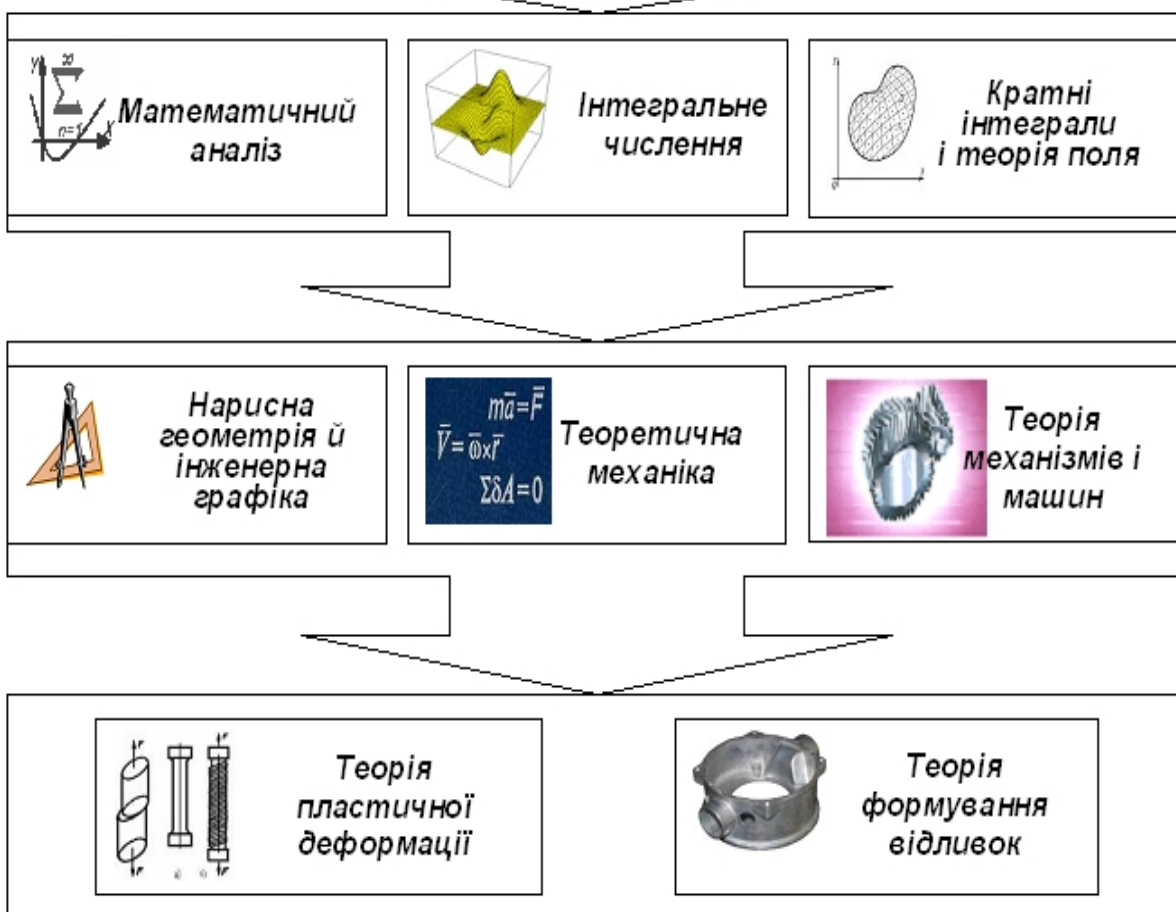
Відповідь: $V = 14 \text{ куб.од.}$, $S = 6\sqrt{3} \text{ кв.од.}$, $h = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ од.}$



Елементи аналітичної геометрії

Модуль 2

Тема 1. **Лінії на площині.**
 Тема 2. **Площина і пряма у просторі.**
 Тема3. **Криві другого порядку.**
 Тема 4. **Поверхні другого порядку.**



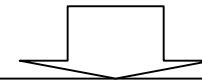
ВМІННЯ, НА ЯКИХ БАЗУЄТЬСЯ ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ

Виконувати усні і письмові обчислення; виконувати геометричні перетворення: паралельне перенесення, поворот, побудову фігур симетричних даним; знаходити за координатами точку у Декартовій системі координат на площині; складати рівняння прямої та кола на площині; визначати розміщення прямої відносно системи координат, кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої; будувати графіки функцій (лінійної, оберненої пропорційності, квадратичної), застосовувати їх властивості; знаходити за координатами точку у Декартовій системі координат у просторі; складати рівняння прямої у просторі; застосовувати ознаки паралельності й перпендикулярності прямих і площин, визначати поняття кута у просторі; застосовувати співвідношення між сторонами й кутами в прямокутному трикутнику, формули площ фігур та об'ємів геометричних тіл.



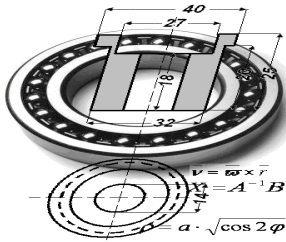
ВМІННЯ, ЯКІ ФОРМУЮТЬСЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ

Складати рівняння прямої, що проходить через дві точки, через одну точку в заданому напрямі; складати рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно до вектора, через три точки; знаходити кут між прямими та площинами; знаходити точку перетину прямої і площини; зводити рівняння другого порядку до канонічного вигляду і будувати зображення еліпса, гіперболи, параболи; застосовувати ППЗ Mathcad, Derive, Gran 1, Gran2D, Gran3D, Maple, Mathematica для побудови зображень прямих, кривих, поверхонь та для обчислень відстаней і кутів між прямими й площинами.



ВМІННЯ, ЩО НАБУВАЄ СТУДЕНТ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ІНЖЕНЕРНИХ ДИСЦИПЛІН

Візуалізувати геометричні об'єкти; отримувати проекції геометричних тіл; з'ясовувати взаємне розташування геометричних тіл; розв'язувати метричні задачі та задачі на спряження; будувати розгортки; задавати рівняння руху точок та тіл; визначати траєкторію руху; визначати невідомі реакції в опорах за допомогою рівнянь рівноваги; визначати пластичну деформацію під час розтягу-стиску, крутіння, згину, складному навантаженні, зсуві; визначати внутрішні напруження та сили, межові навантаження; перевіряти міцність; обирати форми й розміри перерізів.



Тема 1. ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ

Вода надходить із ріки в заводське водосховище зі швидкістю 3 одиниці в годину. Втрати води на фільтрацію (просочування) у ґрунті під греблею, випар і цілодобове обслуговування основних цехів становлять 2,4 одиниці в годину. При роботі заводу на повну потужність протягом 8 год у добу збільшення витрати води становить 1,6 одиниці в годину. Щоб уникнути засмоктування мулу водовідсосні труби a й b розташовані на висоті h від дна водосховища, глибина якого дорівнює $3h$ (рис. 2.1). Необхідно дослідити режим роботи водосховища.

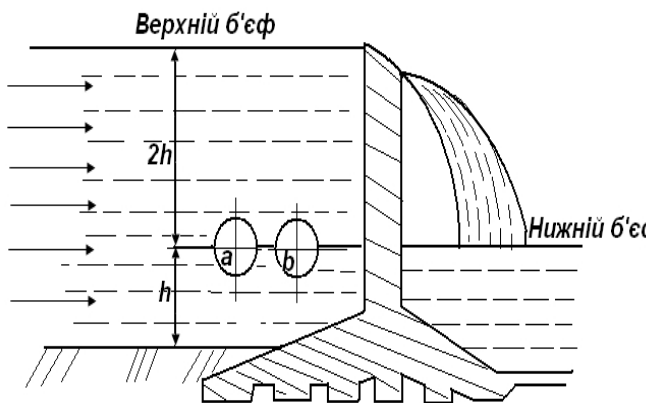


Рис. 2.1. Схема режиму роботи водосховища

Дослідити режим роботи водосховища означає виразити рівень води x як функцію часу t . По графіку, що складається з різних ліній можна в будь-який момент часу t визначити, який рівень x води у водоймищі. Із графіка, зокрема, видно як нестачі води так і марне скидання води через греблю.

Які можливості існують для графічного завдання будь-якої лінії?



Необхідні знання про різні види завдання лінії на площині

Def. Рівняння

$$F(x, y) = 0$$

називають рівнянням лінії L на площині Oxy , якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії L і не

задовольняють координати будь-якої точки, яка не лежить на цій лінії.

Якщо лінія задана рівнянням, то про кожну точку площини можна сказати, лежить вона на цій лінії, чи не лежить. Наприклад, точка $M(3; 4)$ є точкою кола $x^2 + y^2 = 25$, оскільки $3^2 + 4^2 = 25$, а точка $M_1(3; 0)$ не належить колу, бо $3^2 + 0^2 \neq 25$.

У полярній системі координат лінії задають рівнянням $F(\rho, \varphi) = 0$ або $\rho = \rho(\varphi)$. Наприклад, рівняння $\rho = 1$ задає коло радіусом 1 з центром у початку координат. Інші приклади ліній, заданих рівнянням у полярних координатах, зображені на рис. 2.2 – 2.3.

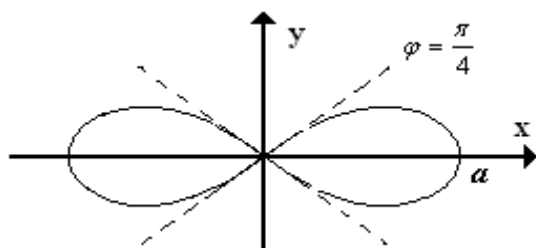


Рис. 2.2. Лемніската Бернуллі.

Рівняння в декартових координатах
 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, у

полярних координатах
 $\rho = a \cdot \sqrt{\cos 2\varphi}$

Нехай змінні x і y залежать від змінної t , тобто

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Змінна t називається *параметром* і визначає положення точки $(x; y)$ на площині. При зміні параметра t рухома точка $(x(t), y(t))$ опише деяку лінію. Такий спосіб завдання називають параметричним.

Наприклад, якщо $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, то значенню $t = \frac{\pi}{2}$ відповідає точка $(0; R)$. Якщо змінна t змінюватиметься від 0 до 2π , тоді точка $(x(t), y(t))$ опише коло $x^2 + y^2 = R^2$.

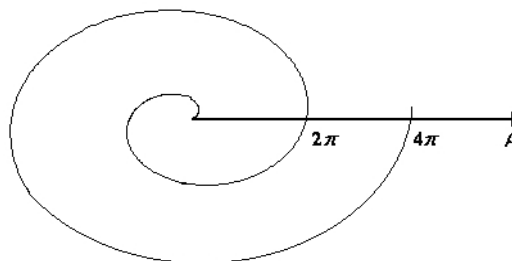


Рис. 2.3. Спіраль Архімеда.

Рівняння у полярних координатах $\rho = a\varphi$, $a > 0$

На рис. 2.4 та 2.5 зображені відомі лінії, які часто використовуються у вищій математиці:

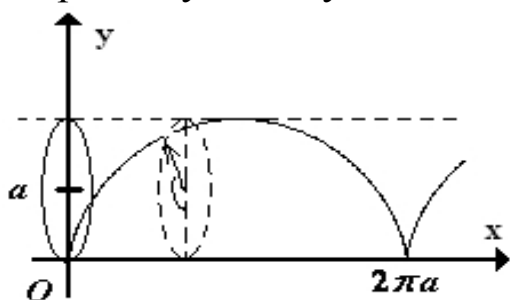


Рис. 2.4. Циклоїда.

Параметричне завдання
 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$,
 $a > 0$.

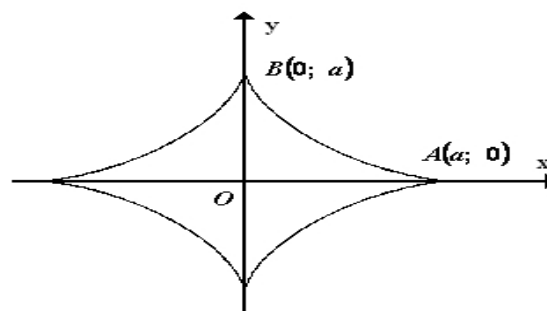


Рис. 2.5 . Астроїда.

Рівняння в декартових
 координатах $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, у
 параметричній формі $x = a \cos^3 t$,
 $y = a \sin^3 t$.



**Зображусмо лінії у полярній системі
 координат за допомогою ППЗ Gran1**

1. Відкрити вікно ППЗ Gran1 та вибрати у вікні *Список об'єктів* тип системи координат – *Полярна* (рис. 2.6)

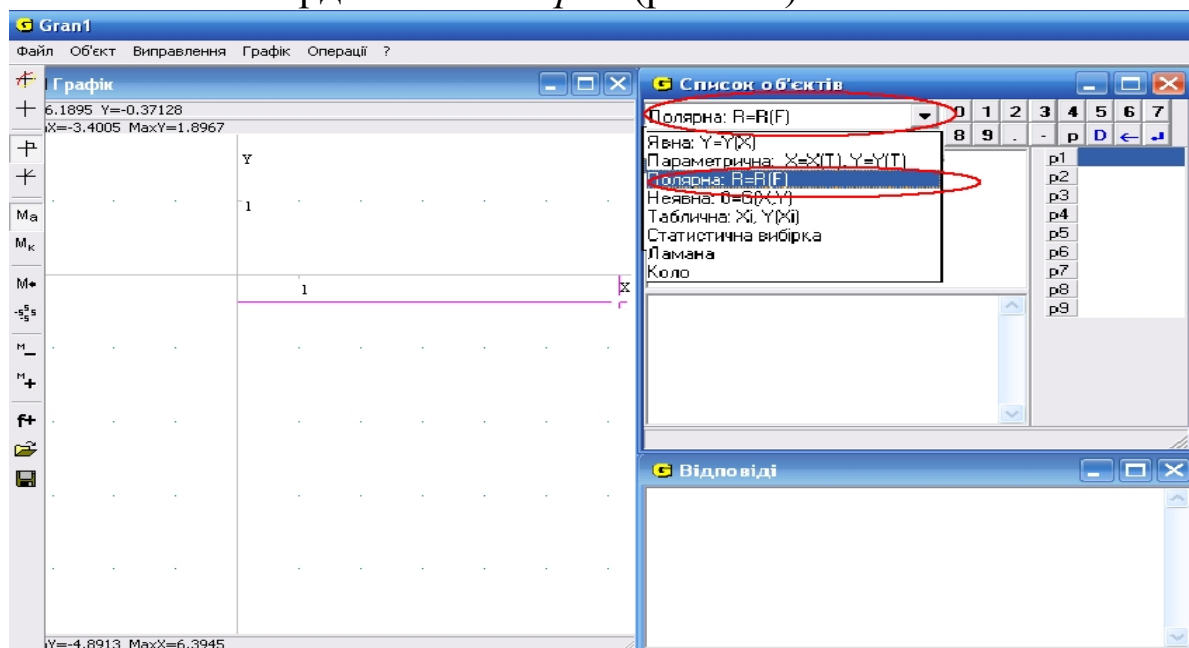


Рис.2.6. Вікно ППЗ Gran1: вибір у вікні *Список об'єктів*

2. За допомогою опції *Об'єкт-Створити* ввести функцію $\rho(\phi) = \phi$ на $[0; 2\pi]$. Це рівняння спіралі Архімеда (рис.2.7).

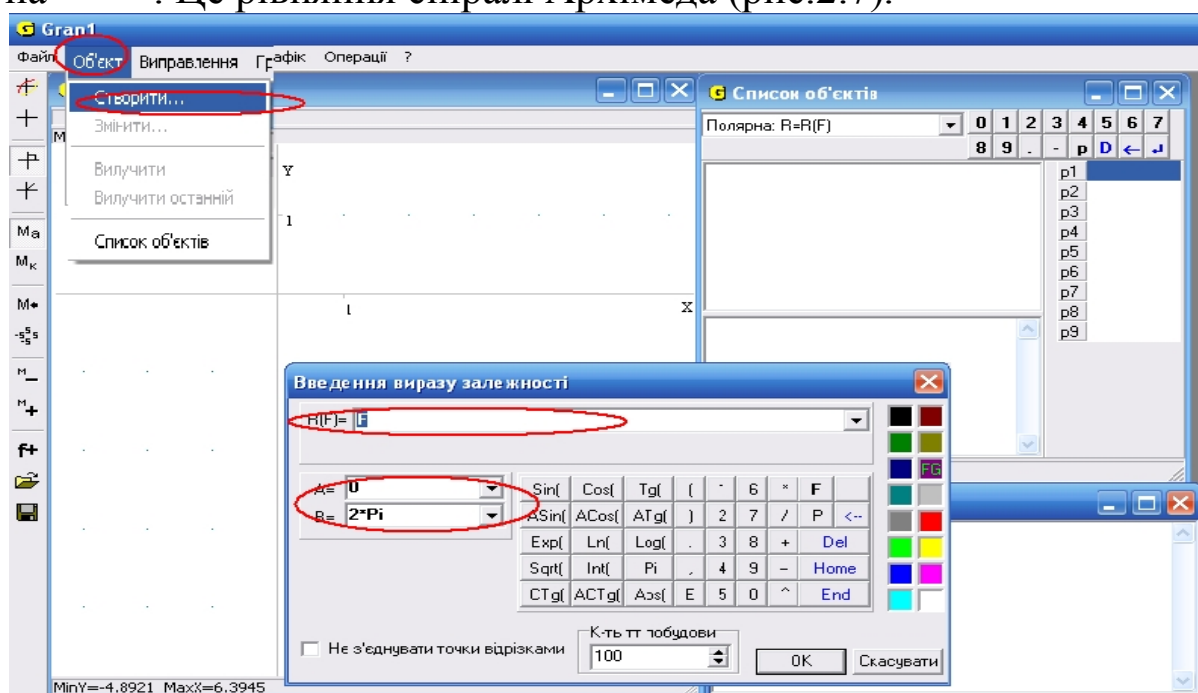


Рис. 2.7. Вікно ППЗ Gran1: введення функції $\rho(\phi) = \phi$ на $[0; 2\pi]$

3. За допомогою опції *Графік-Створити* побудувати графік функції $\rho(\phi) = \phi$ на $[0; 2\pi]$ (рис. 2.8).

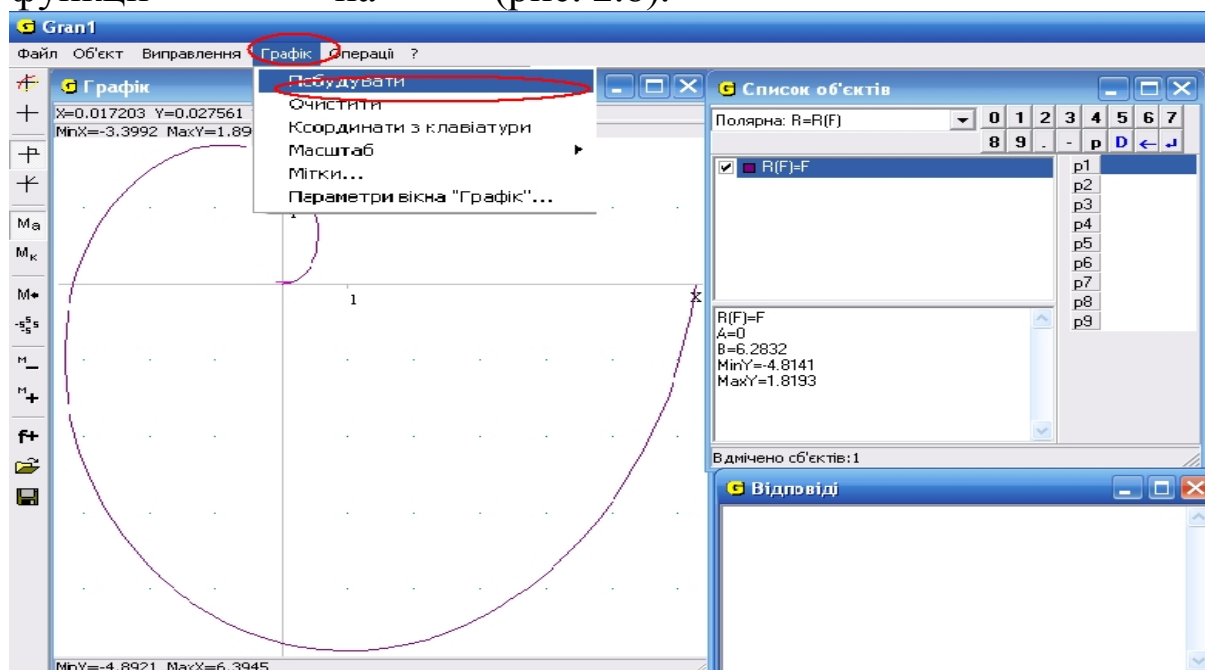


Рис. 2.8. Вікно ППЗ Gran1: графік функції $\rho(\phi) = \phi$ на $[0; 2\pi]$



Зображуємо лінії, що задано параметрично, за допомогою ППЗ Gran1

1. Відкрити вікно ППЗ Gran1.
2. Побудувати лінію астроїди, координати якої задовольняють $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.
 - вибрати у вікні *Список об'єктів* тип системи координат – *Параметрична*;
 - за допомогою опції *Об'єкт-Створити* ввести рівняння астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ з клавіатури вікна *Введення виразу залежності* (рис. 2.9).

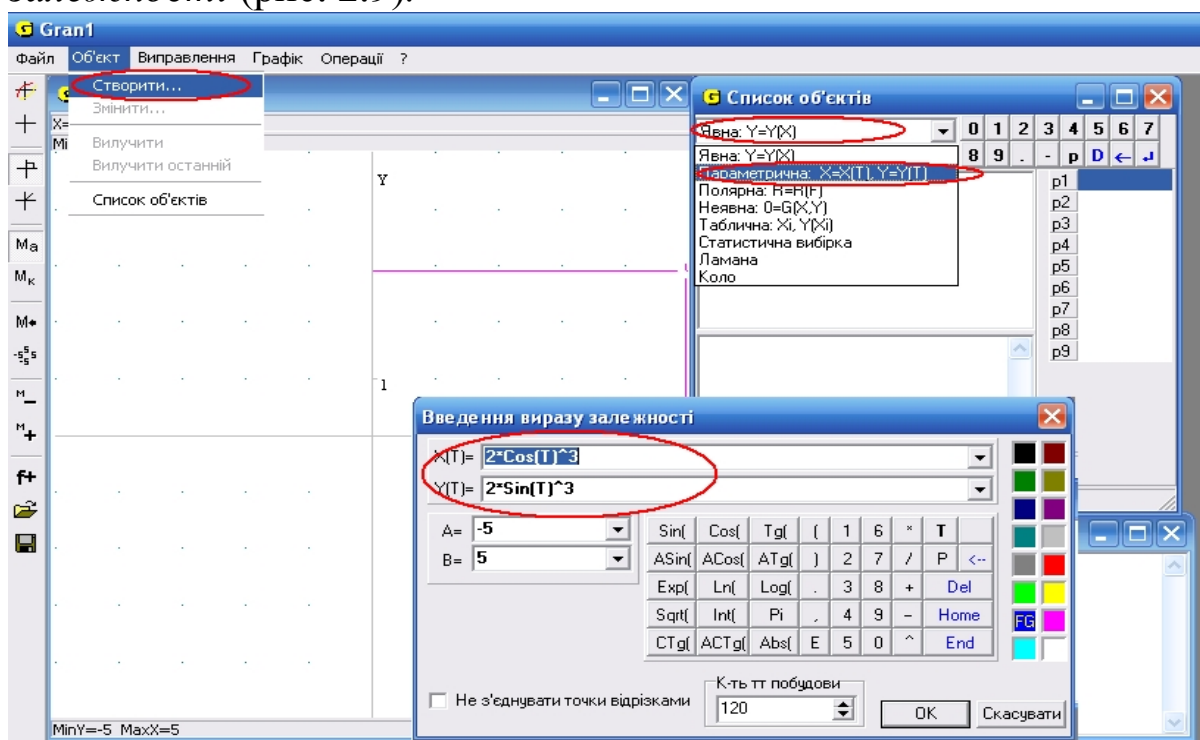


Рис. 2.9. Вікно ППЗ Gran1: введення рівняння астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$

3. За допомогою опції *Графік-Створити* побудувати лінію астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ (рис. 2.10)

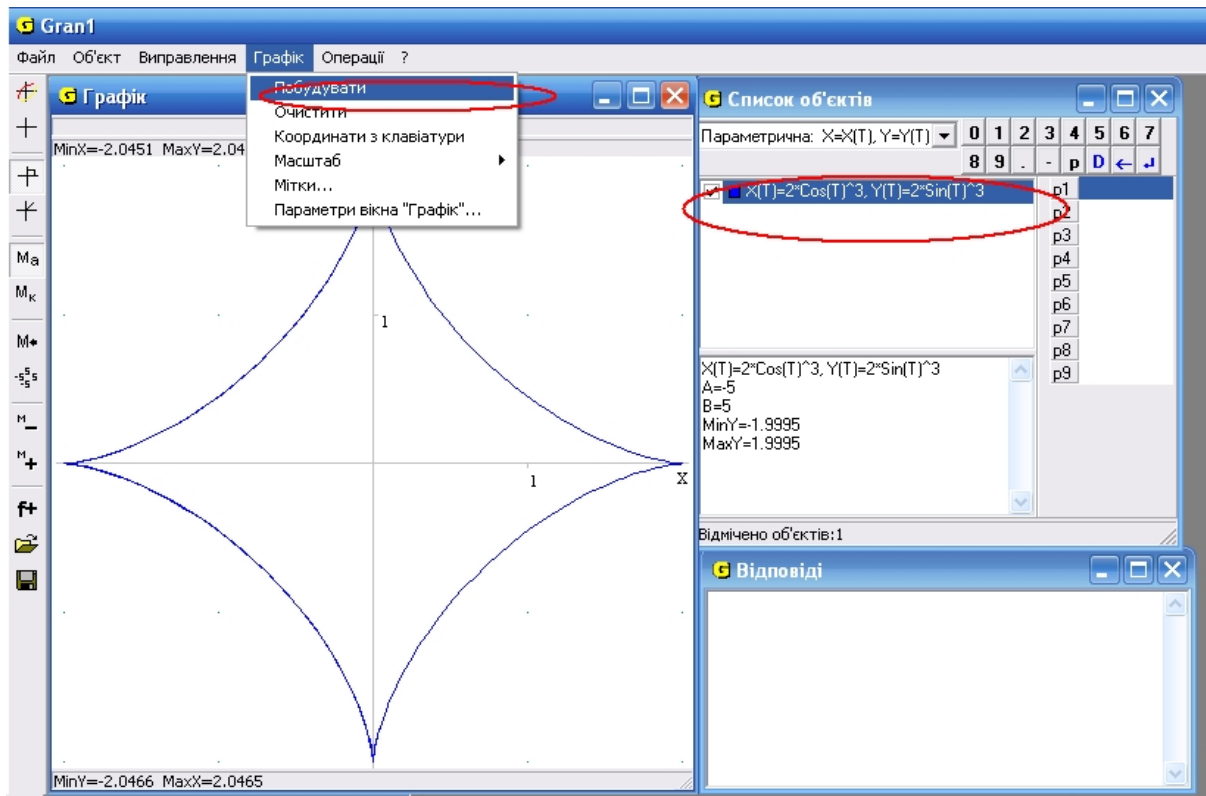


Рис. 2.10. Вікно ППЗ Gran1: лінія рівняння

астроїди $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$



Необхідні знання про різні види рівнянь прямої на площині

Загальне рівняння прямої

Виведемо рівняння прямої L , яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A, B\}$ (рис. 2.11). Вектор \vec{n} називають *нормальним* вектором прямої.

Візьмемо на прямій L довільну точку $M(x, y)$ й утворимо вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$.

Оскільки за умовою шукана пряма L і нормаль \vec{n} взаємно перпендикулярні, то довільний вектор прямої $\overrightarrow{M_0M}$ і вектор \vec{n} також перпендикулярні.

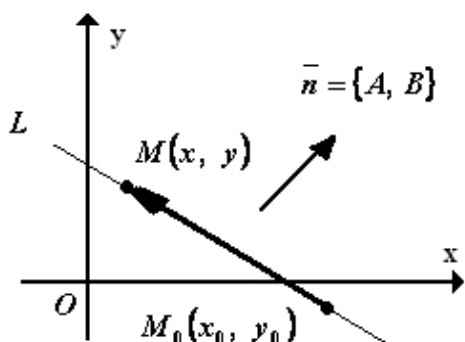


Рис. 2.11. Пряма L , що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\bar{n} = \{A, B\}$

За умовою перпендикулярності двох векторів скалярний добуток $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, або в координатній формі $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. (2.1)
Рівняння (2.1) називають рівнянням прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\bar{n} = \{A, B\}$.

Розкривши у рівнянні (2.1) дужки і позначивши $-Ax_1 - By_1 = C$, дістанемо рівняння прямої L

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.2)$$

яке називають *загальним рівнянням прямої* на площині.

Тут A і B – координати вектора \bar{n} , перпендикулярного до прямої.

Розглянемо окремі випадки розміщення прямої залежно від значень коефіцієнтів A, B, C (табл.2.1):

Таблиця 2.1.

Розміщення прямої залежно від значень коефіцієнтів A, B, C

Умова	Рівняння прямої	Положення прямої
$A = 0, B \neq 0$	$By + C = 0$	паралельна осі Ox
$B = 0, A \neq 0$	$Ax + C = 0$	паралельна осі Oy
$C = 0$	$Ax + By = 0$	проходить через початок координат
$A = 0, C = 0, B \neq 0$	$y = 0$	проходить через вісь Ox
$B = 0, C = 0, A \neq 0$	$x = 0$	проходить через вісь Oy

Канонічне рівняння прямої

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до вектора $\vec{a} = \{l; m\}$ (рис. 2.12), який називають *напрямним вектором* прямої L .

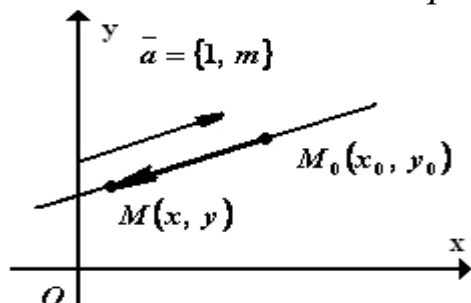


Рис. 2.12. Пряма, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до вектора $\vec{a} = \{l; m\}$

Візьмемо на прямій довільну точку $M(x, y)$. Тоді вектори $\vec{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$, а $\vec{a} = \{l; m\}$ колінеарні, отже, їхні координати пропорційні:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (2.3)$$

Рівняння (2.3) називають *канонічним рівнянням* прямої.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма L проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 2.13).

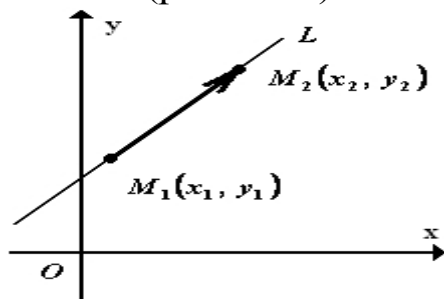


Рис. 2.13. Пряма L , що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$

Вибравши вектор $\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ за напрямний вектор прямої L і скориставшись рівнянням (2.3) дістанемо рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (2.4)$$

яке є рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки.

Векторно-параметричне рівняння прямої

Пряма L проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до напрямного вектора $\vec{a} = \{l; m\}$ (рис. 2.14).

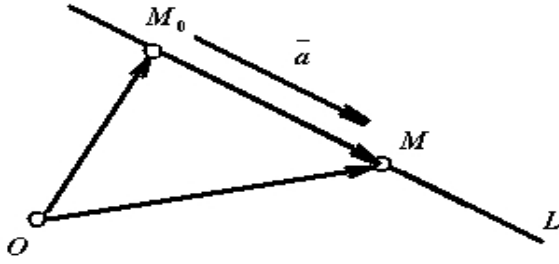


Рис. 2.14. Пряма L , що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до напрямного вектора $\vec{a} = \{l; m\}$

Візьмемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ і розглянемо радіус-вектори $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Вектори $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ і \vec{a} колінеарні, тому $\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{a}$, або

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t. \quad (2.5)$$

Рівняння (2.5) називають *векторним параметричним рівнянням прямої*. Змінну t , яка може набувати будь-яких значень, називають *параметром*.

Параметричні рівняння прямої

Позичимо у формулі (2.3) відношення через t , тобто

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t.$$

Звідси дістаємо

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ці рівняння прямої називають параметричними. Їх можна дістати також з рівняння (2.5), прирівнявши відповідні координати векторів \vec{r} та $\vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t$.

Рівняння прямої у відрізках на осях

Нехай пряма L проходить через дві точки $A(a, 0)$ і $B(0, b)$, тобто відсікає на осях координат відрізки довжиною $|a|$ і $|b|$ (рис. 2.15).

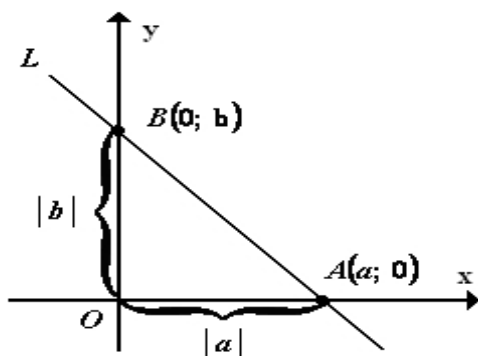


Рис. 2.15. Пряма L , що проходить через дві точки $A(a, 0)$ і $B(0, b)$

Підставивши координати точок $A(a, 0)$ і $B(0, b)$ в рівняння (2.4), дістанемо рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (2.6)$$

яке називають рівнянням прямої у відрізках на осях.

Загальне рівняння прямої (2.2) можна звести до вигляду (2.6) тільки у разі, коли всі його коефіцієнти відмінні від нуля. Тоді

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$

Тут $-C/A = a$, $-C/B = b$.

М.В. Пряма $Ax + By + C = 0$ за умови $A \neq 0$, $B \neq 0$ і $C \neq 0$, перетинає осі координат у точках $(-C/A; 0)$ та $(0; -C/B)$. Для знаходження цих точок достатньо по черзі покласти $x=0$ та $y=0$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Якщо пряма L проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис (рис. 2.16), то число $k = \operatorname{tg} \alpha$ називають кутовим коефіцієнтом прямої.

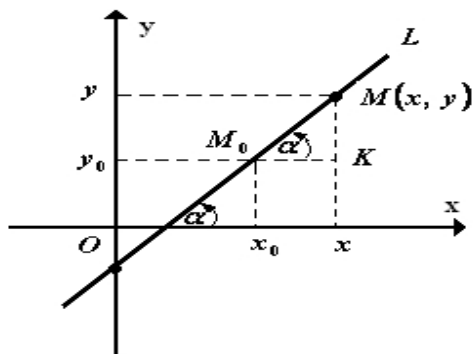


Рис. 2.16. Пряма L , що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис

Обравши довільну точку $M(x, y)$ на прямій, дістанемо з трикутника M_0MK

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{MK}{M_0K} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

Звідки $y - y_0 = k(x - x_0)$ — рівняння прямої L , яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k .

Якщо за точку M_0 візьмемо точку $B(0, b)$, то дістанемо рівняння

$$y = kx + b \quad (2.7)$$

яке називають *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*. Тут b - початкова ордината (ордината точки перетину прямої з віссю Oy).



Вчимося складати рівняння прямих

2.1. Нехай точки $A(3; 1)$, $B(2; -3)$, $C(-1; 2)$ – вершини трикутника ABC (рис. 2.17).

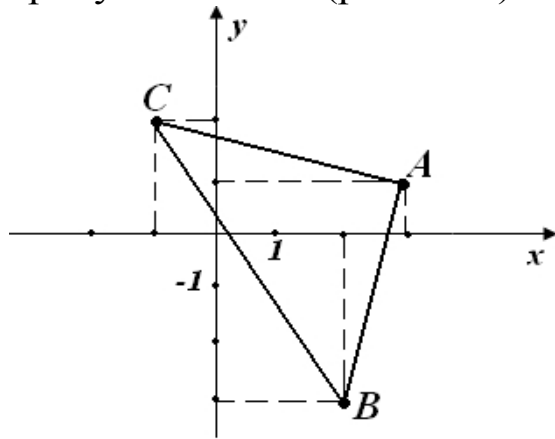


Рис. 2.17. Зображення трикутника ABC

Складіть:

- загальне рівняння сторони AB ;
- канонічне рівняння висоти AD ;
- параметричне рівняння медіани BM ;
- рівняння прямої, що проходить через точку $C(-1; 2)$ паралельно до сторони AB .

Розв'язання. Розглянемо випадки:

а) оскільки відомі координати точок A і B , то, використовуючи формулу (2.4), складемо рівняння прямої, яка проходить через точки A і B :

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y-1}{-3-1}, \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{-4}, \quad y-1 = 4(x-3),$$

звідки $4x - y - 1 = 0$ - загальне рівняння прямої, що містить сторону AB ;

б) щоб записати канонічне рівняння прямої, потрібно знати точку, через яку проходить пряма, і напрямний вектор. Вектор $\overrightarrow{BC} = \{-3; 5\}$ для висоти AD є нормальним вектором, тоді вектор $\vec{a} = \{5; 3\}$ буде перпендикулярним до вектора \overrightarrow{BC} (оскільки

скалярний добуток $\overline{BC} \cdot \vec{a} = 0$), отже, для прямої AD - напрямним вектором. Записуємо канонічне рівняння прямої AD :

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{3};$$

в) оскільки точка M – середина відрізка AC , то $x_M = \frac{3-1}{2} = 1$, $y_M = \frac{1+2}{2} = 1,5$. Вектор $\overline{BM} = \{1-2; 1,5+3\} = \{-1; 4,5\}$ - напрямний вектор прямої BM . За напрямний вектор можна взяти також вектор $\vec{a} = 2\overline{BM} = \{-2; 9\}$. Отже, $l = -2$, $m = 9$ і параметричні рівняння медіани записуємо так:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t, \\ y = -3 + 9t, \end{cases} \quad t \in R;$$

г) оскільки пряма, що проходить через точку $C(-1; 2)$, паралельна стороні AB , то за нормальний вектор шуканої прямої беремо вектор $\vec{n} = \{4; -1\}$ - нормальний вектор прямої AB . Тоді шукане рівняння має вигляд

$$4(x+1) - (y-2) = 0, \quad \text{або} \quad 4x - y - 6 = 0.$$

Відповідь: $4x - y - 6 = 0$.

2.2. Знайдіть точку, симетричну точці $P(-8; 12)$ відносно прямої L , заданої рівнянням $4x + 7y + 13 = 0$.

Розв'язання. Нехай $Q(x_Q, y_Q)$ - шукана точка (рис. 2.18). Задачу розв'язуємо у такій послідовності:

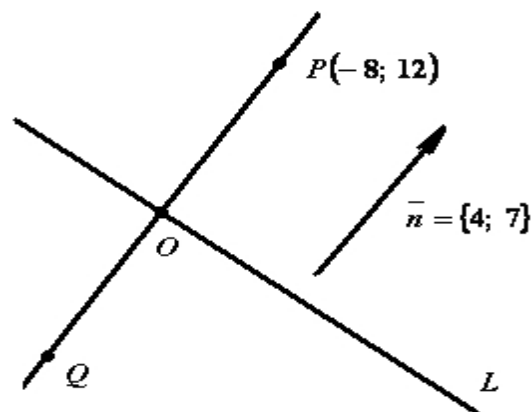


Рис. 2.18. Зображення точки $Q(x_Q, y_Q)$ симетричної точці $P(-8; 12)$ відносно прямої L

1) складемо рівняння прямої PO , що проходить через точку P , перпендикулярно до заданої прямої L ;

2) знаходимо точку O - точку перетину прямих L і PO - проекцію точки P на пряму L ;

3) визначимо координати точки Q , враховуючи при цьому, що точка O - середина відрізка PQ .

Вектор $\vec{n} = \{4; 7\}$ - нормальний вектор прямої L одночасно є напрямним вектором перпендикуляра PO , тому канонічне рівняння прямої PO має такий вигляд:

$$\frac{x+8}{4} = \frac{y-12}{7},$$

звідси дістаємо

$$7(x+8) = 4(y-12), \quad 7x - 4y + 104 = 0.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x - 4y + 104 = 0, \\ 4x + 7y + 13 = 0, \end{cases}$$

знайдемо координати точки перетину прямих: $x_o = -12$, $y_o = 5$.

Записуємо зв'язок між координатами точок P , O і Q :

$$x_o = \frac{x_p + x_q}{2}, \quad y_o = \frac{y_p + y_q}{2}.$$

Тоді

$$-12 = \frac{-8 + x_q}{2}, \quad 5 = \frac{12 + y_q}{2},$$

звідки дістаємо координати симетричної точки:

$$x_q = -16, \quad y_q = -2.$$

Відповідь: $Q(-16, -2)$.



Необхідні знання про кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Прямі L_1 і L_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$ (рис. 2.19).

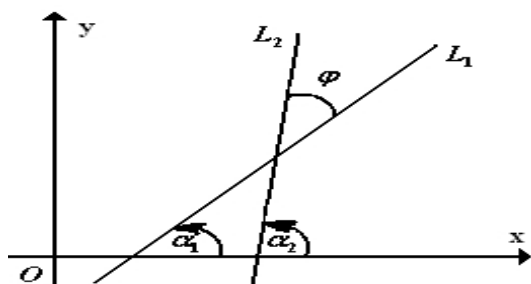


Рис. 2.19. Прямі L_1 і L_2 , що задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами

Позначимо кути нахилу цих прямих до осі Ox через α_1 та α_2 відповідно, причому $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$. Тоді гострий кут φ між прямими визначається за формулою $\varphi = |\alpha_2 - \alpha_1|$.

Звідси

$$\operatorname{tg} \varphi = |\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)| = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} \right| = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad (2.8)$$

Якщо прямі L_1 і L_2 паралельні, то $\varphi = 0$, $\operatorname{tg} \varphi = 0$, отже, $k_2 - k_1 = 0$. Тому умова паралельності прямих:

$$k_1 = k_2. \quad (2.9)$$

Якщо прямі L_1 і L_2 перпендикулярні, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. У цьому разі $\operatorname{tg} \varphi$ не існує, отже, у формулі (2.8) $1 + k_1 k_2 = 0$. Тому умова перпендикулярності прямих:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (2.10)$$

Нехай прямі L_1 і L_2 задані загальними рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Тоді:

1) кут φ ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$) між цими прямими визначають через кут ψ між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ та $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$:

$$\cos \psi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

причому $\varphi = \psi$, якщо $\cos \psi \geq 0$ (рис. 2.20, а), і $\varphi = 180^\circ - \psi$, якщо $\cos \psi < 0$ (рис. 2.20, б);

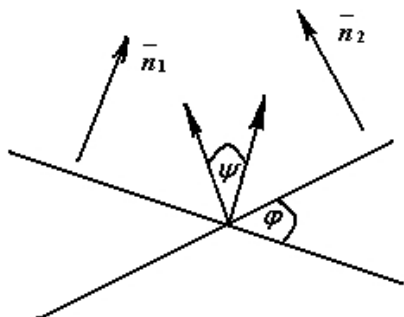


Рис. 2.20, а. Кути $\varphi = \psi$, якщо $\cos \psi \geq 0$

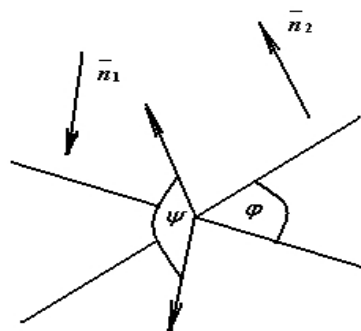


Рис.2.20, б. Кути $\varphi = 180^\circ - \psi$, якщо $\cos \psi < 0$

2) умова паралельності прямих

(рис. 2.21) - $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$,

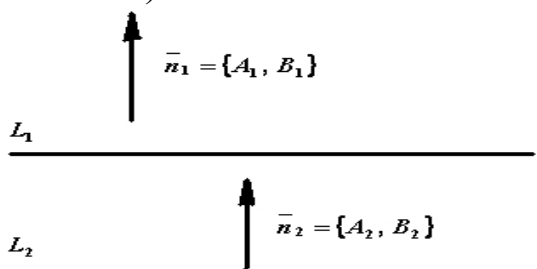


Рис. 2.21. Умова паралельності прямих

3) умова перпендикулярності (рис. 2.22) - $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

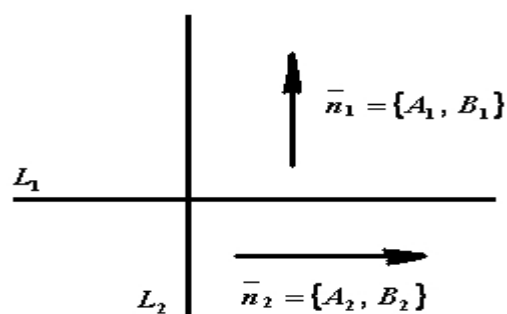


Рис. 2.22. Умова перпендикулярності прямих



Вчимося застосовувати умови паралельності та перпендикулярності прямих

2.3. Визначте, при яких значеннях m і n прямі $mx + 8y + n = 0$ та $2x + my - 1 = 0$:

а) паралельні; б) збігаються; в) перпендикулярні.

Розв'язання.

а) умова паралельності: $\frac{m}{2} = \frac{8}{m}$, звідси $m^2 = 16$, $m = \pm 4$;

б) прямі збігаються у разі виконання умови:

$$\frac{m}{2} = \frac{8}{m} = \frac{n}{-1},$$

звідси дістаємо дві пари значень $m = 4$, $n = -2$ або $m = -4$, $n = 2$;

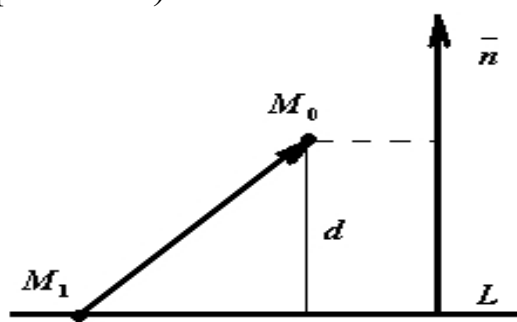
в) умова перпендикулярності прямих: $m \cdot 2 + 8 \cdot m = 0$, тобто $m = 0$.

Відповідь: а) $m = \pm 4$, $n \in R$; б) $m = 4$, $n = -2$; $m = -4$, $n = 2$; в) $m = 0$, $n \in R$.



Необхідні знання про відстань від точки до прямої

Задамо пряму L рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 2.23).



Відстань d точки M_0 до прямої L дорівнює модулю проекції вектора $\overline{M_1M_0}$, де $M_1(x_1, y_1)$ - довільна точка прямої L , на прямій нормального вектора $\vec{n} = \{A; B\}$.

Рис. 2.23. Зображення прямої L і точки $M_0(x_0, y_0)$

Отже,

$$d = |np_{\vec{n}} \overline{M_1M_0}| = \frac{|\overline{M_1M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1) \cdot A + (y_0 - y_1) \cdot B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Отже, відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюють за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.11)$$



Вчимося знаходити відстані від точки до прямої

2.4. Знайдіть відстань між прямими $4x - 3y + 2 = 0$ та $8x - 6y - 13 = 0$.

Розв'язання. Оскільки задані прямі паралельні, то відстань між ними дорівнює, наприклад, відстані від довільної точки другої прямої до першої. Знаходимо довільну точку на прямій

$8x - 6y - 13 = 0$: нехай $x = 0$, тоді $y = -\frac{13}{6}$. Відстань від точки $M(0; -13/6)$ до прямої $4x - 3y + 2 = 0$ обчислюємо за формулою (2.11):

$$d = \frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot (-13/6) + 2|}{\sqrt{16 + 9}} = 1,7$$

Відповідь: $d = 1,7$.



Складаємо рівняння траєкторій за допомогою ППЗ Gran2D

Процедура складання рівняння траєкторії за допомогою відповідних правил.

2.5. Матеріальна точка M рухалася під дією деякої сили по колу $x^2 + y^2 - 10 \cdot x + 6 \cdot y + 9 = 0$ проти годинникової стрілки. Дія сили припинилася в момент часу, коли положення точки визначилося координатами $(2; 1)$. Скласти рівняння подальшої траєкторії руху точки M .

Розв'язання.

Крок 1. Починаючи з моменту, коли дія сили на точку M припинилася, її рух буде відбуватися по прямій, що є дотичною до заданого кола в точці $(2; 1)$.

Крок 2. Приведемо рівняння кола до канонічного вигляду

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25,$$

відмітимо що її центр C знаходиться у точці $(5; -3)$.

Крок 3. Рівняння прямої CM , що проходить через точки C і

M , має вигляд $\frac{x - x_C}{x_M - x_C} = \frac{y - y_C}{y_M - y_C}$. Отже

$$\frac{x-5}{2-5} = \frac{y+3}{1+3} \Rightarrow 4x + 3y - 11 = 0$$

Крок 3. Пряма CM є нормаллю до шуканої прямої. Її кутовий коефіцієнт $k_1 = -\frac{4}{3}$. Кутовий коефіцієнт дотичної, відповідно до умови перпендикулярності двох прямих $k_1 \cdot k_2 = -1$, $k_2 = \frac{3}{4}$.

Крок 4. Рівняння дотичної прямої до заданого кола має вигляд $y - y_M = k_2 \cdot (x - x_M)$. Отже

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 2), \text{ або } 3 \cdot x - 4 \cdot y - 2 = 0.$$

Це і є рівняння траєкторії точки M з моменту припинення дії сили.

Відповідь: $3 \cdot x - 4 \cdot y - 2 = 0$ - рівняння траєкторії точки M .

Процедура знаходження рівняння траєкторії за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Gran2D.



«Навчаємо» свій комп'ютер знаходженню рівняння траєкторії за допомогою ППЗ Gran2D.

1. Відкрити вікно ППЗ Gran2D.
2. Побудувати графік рівняння кола $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$ із центром C , що знаходиться у точці $(5; -3)$:
– за допомогою опції *Об'єкт-Створення-Аналітична точка* побудувати точки $C(5; -3)$ та $M(2; 1)$ (рис.2.24);

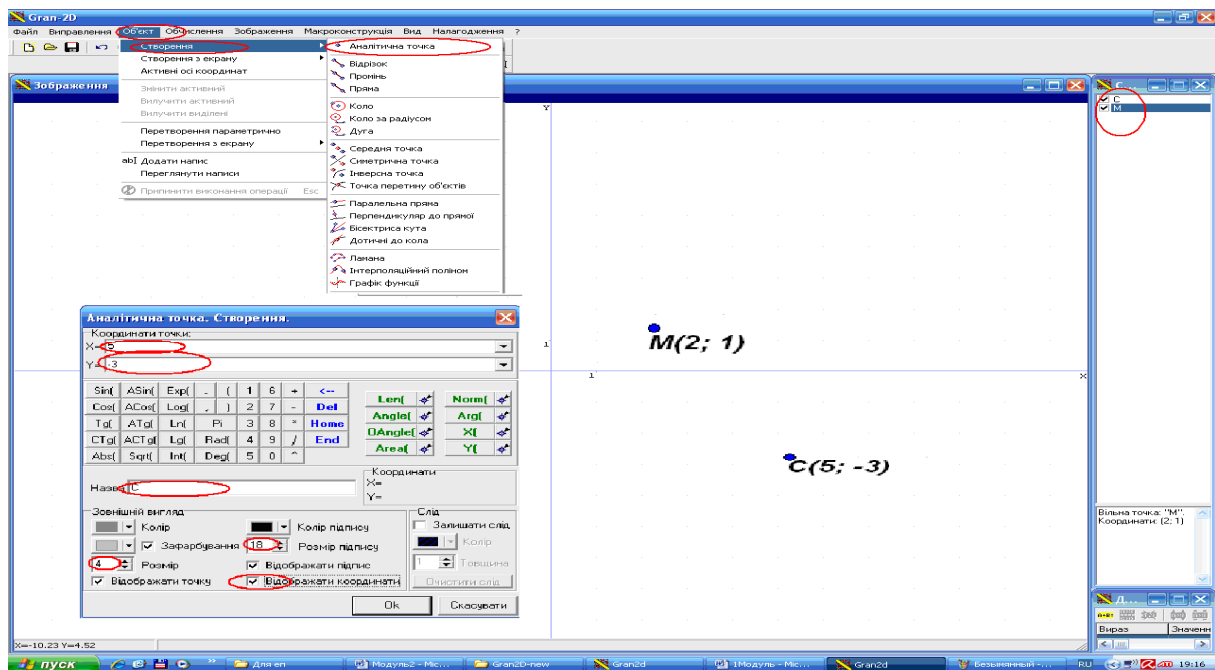


Рис. 2.24. Вікно ППЗ Gran2D: побудова точок $C(5; -3)$ та $M(2; 1)$

– за допомогою опції *Об'єкт-Створення-Коло* ввести: точку C , що є центром кола, точку M , що належить колу та побудувати коло (рис. 2.25).

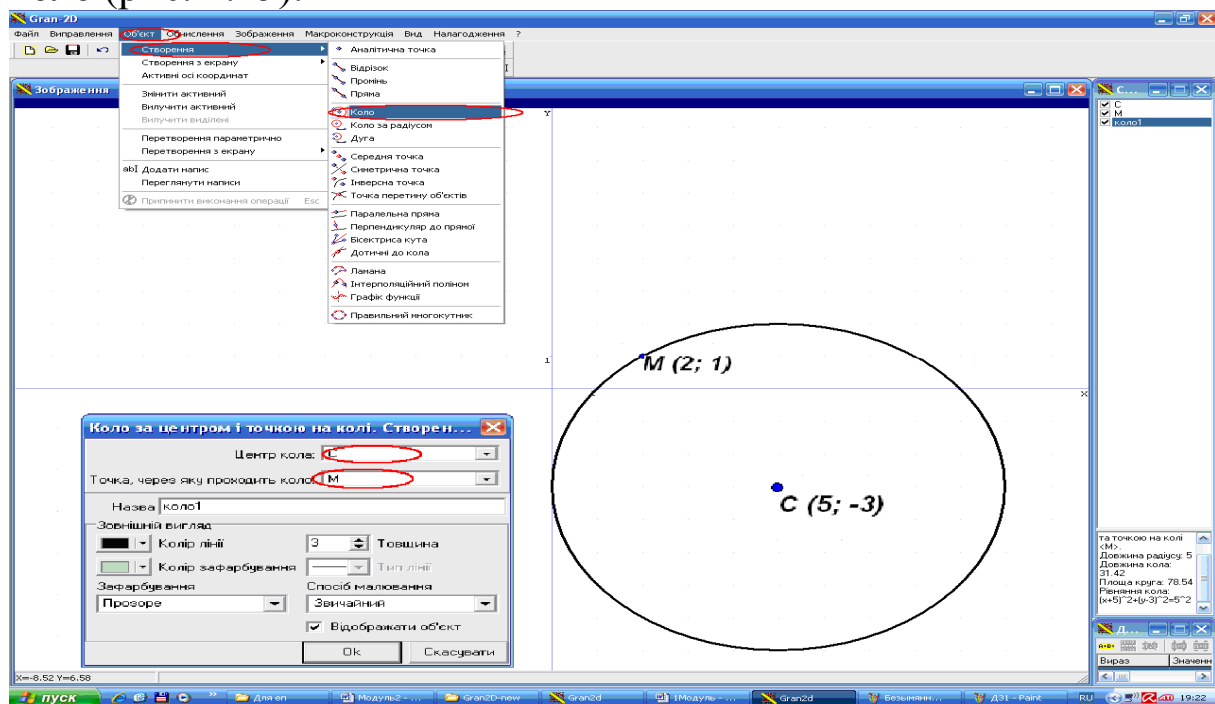


Рис. 2.25. Вікно ППЗ Gran2D: побудова кола

3. За допомогою опції *Об'єкт-Створення-Дотична до кола* побудувати дотичну до кола. У правому нижньому куті вікна буде зазначено рівняння дотичної, що і є рівнянням траєкторії точки M з моменту припинення дії сили (рис. 2.26).

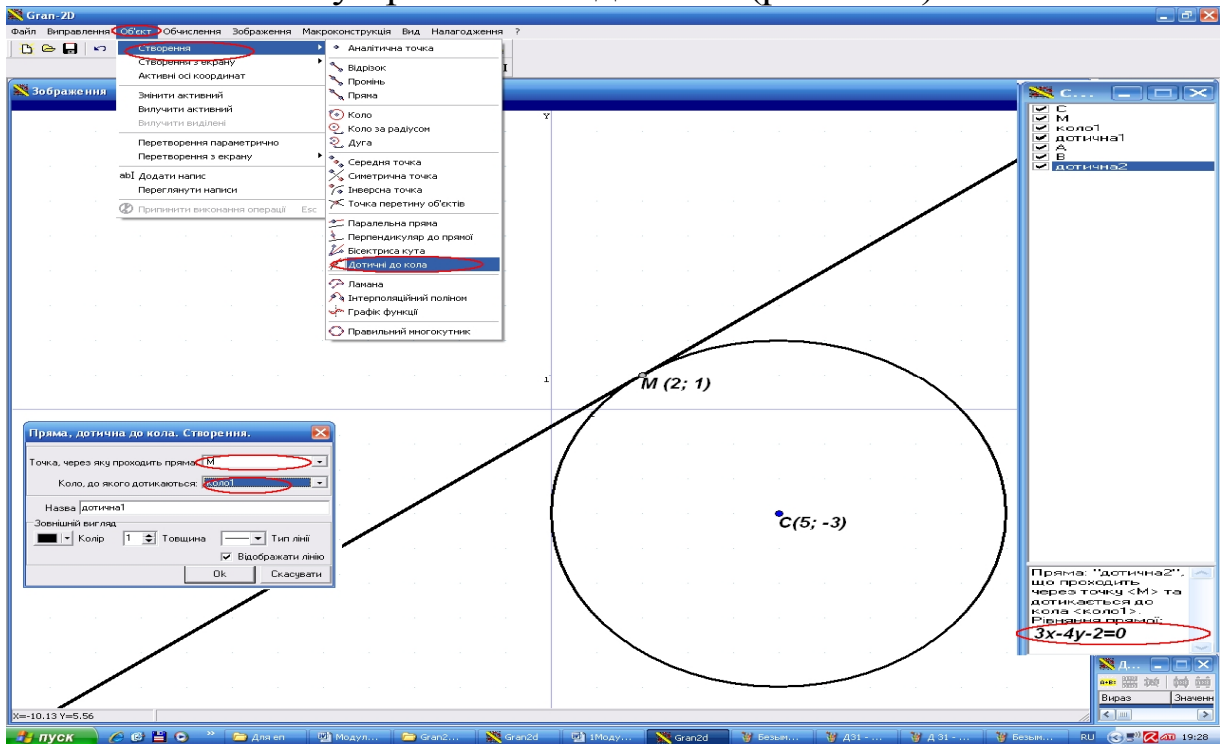


Рис. 2.26. Вікно ППЗ Gran2D: побудова дотичної до кола



Моделюємо професійну діяльність інженера

2.5. Вода надходить із ріки в заводське водосховище зі швидкістю 3 одиниці в годину. Втрати води на фільтрацію (просочування) у ґрунті під греблею, випар і цілодобове обслуговування основних цехів становлять 2,4 одиниці в годину.

При роботі заводу на повну потужність протягом 8 год у добу збільшення витрати води становить 1,6 одиниці в годину.

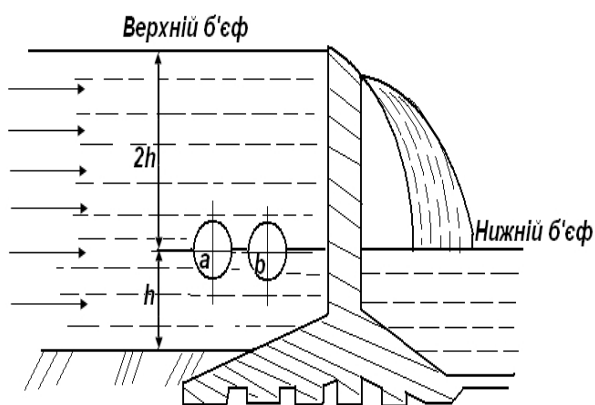


Рис. 2.27. Схема-зображення роботи заводського водосховища

Щоб уникнути засмоктування мулу водовідсосні труби *a* й *b* розташовані на висоті *h* від дна водосховища, глибина якого дорівнює $3h$ (рис.2.27). Необхідно дослідити режим роботи водосховища.



Переформулюйте задачу іншою мовою, в іншому ключі. Режим роботи водосховища можна охарактеризувати двома періодами: I - коли завод працює на повну потужність (8 год) і II - коли обслуговуються тільки основні цехи заводу (16 год).

Необхідно визначити максимально досяжний рівень води (при досить високій дамбі) за весь II період роботи водосховища. Допустіть, що початок роботи заводу на повну потужність відбувається в момент, коли водосховище заповнюється повністю ($x = 3h$, $t = 0$). Тоді в період I: $x = 3h + 3t - 2,4t - 1,6t = 3h - t$. Через 8 год закінчується додаткове використання води й починається II період роботи: $x = h + 3(t - 8) - 2,4(t - 8) = h + 0,6(t - 8)$. Скільки часу може працювати завод на повну потужність при цьому запасі води? Співвіднесіть текст та схему, що можна виконати із використанням ППЗ.

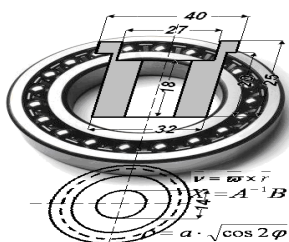
2.6. Знайдіть швидкість тіла під час рівномірного руху, знаючи, що його графік перетинає вісь абсцис у точці $(-0,5; 0)$ і вісь ординат у точці $(0; 10)$. Масштаб по вісі абсцис 1 год , по вісі ординат 1 км .



Представте дані задачі на графіку. Скористайтесь ППЗ для складання рівнянь аналітичних функцій та зображення шляху тіла під час рівномірного руху. Для обчислення значення швидкості застосовуйте формулу

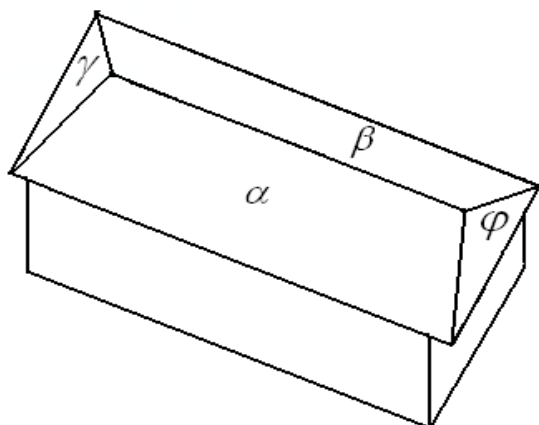
$$v = \frac{S}{t}.$$

Відповідь: 20 км/год.



Тема 2. ПЛОЩИНА І ПРЯМА У ПРОСТОРИ

Звиси чотирьохскатного даху цеху створюють прямокутник. Скати покрівлі мають рівний ухил (рис. 2.28).



Скласти рівняння скатів, рівняння ребер і гребня, записати рівняння ребер і гребня в канонічній формі, знайти кількість матеріалу необхідного для поверхні покрівлі.

Рис. 2.28. Схема чотирьохскатного даху цеху

Оскільки скати даху плоскі, то їхні рівняння будемо знаходити, як рівняння площин α , β , γ , φ , а рівняння ребер, як рівняння прямих, що лежать на перетині відповідних площин. Які можливості існують для завдання рівнянь площин і прямих у просторі?



Необхідні знання про завдання площини у просторі

Загальне рівняння площини

Через точку простору $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A; B; C\}$ проходить одна-єдина площина (рис. 2.29). Тут вектор \vec{n} називають *нормальним вектором* площини.

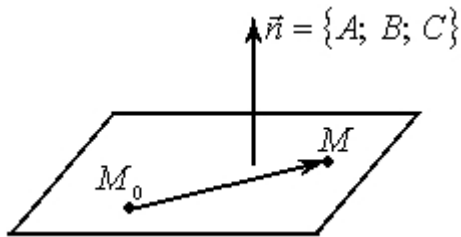


Рис.2.29. Зображення площини, що проходить через точку простору $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A; B; C\}$

Знайдемо рівняння цієї площини. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка площини, тоді вектори $\vec{n} = \{A; B; C\}$ і $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$

перпендикулярні, отже, скалярний добуток векторів \vec{n} і $\overrightarrow{M_0M}$ дорівнює нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

У координатній формі ця рівність набирає вигляду

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.12)$$

Рівняння (2.12) – рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A; B; C\}$. Розкривши дужки і позначивши $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, дістанемо рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.13)$$

яке називають *загальним рівнянням площини*.

М.В. При довільних значеннях A , B і C , одночасно не рівних нулю, рівняння (2.12) визначає *в'язку площин* – сукупність площин, які проходять через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – центр в'язки.

Неповні рівняння площини

Рівняння (2.13) називають *неповним*, якщо принаймні один із коефіцієнтів дорівнює нулю. При цьому $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Окремі випадки загального рівняння площини подано у табл. 2.2.

Таблиця 2.2.

Випадки загального рівняння площини

Умова	Рівняння площини	Положення площини
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	проходить через початок координат
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	паралельна осі Ox
$A = 0, B = 0$	$Cz + D = 0$	паралельна площині Oxy
$A = 0, B = 0, D = 0$	$z = 0$	площина Oxy
$A = 0, D = 0$	$By + Cz = 0$	проходить через вісь Ox

Інші можливі випадки неповного рівняння площини розгляньте самостійно.

Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежать на одній прямій (рис. 2.30). Знайдемо рівняння площини, яку однозначно визначають ці точки.

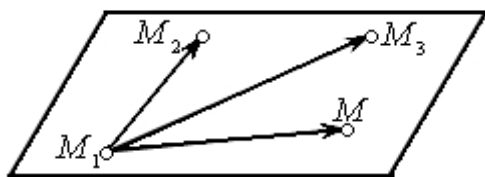


Рис.2.30. Зображення площини, що проходить через три точки, які не лежать на одній прямій

Для цього візьмемо у цій площині довільну точку $M(x, y, z)$ й утворимо вектори

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}.$$

Оскільки усі чотири точки лежать в одній площині, а отже, і утворені вектори, то ці вектори компланарні. За умовою компланарності мішаний добуток $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.14)$$

Отже, (2.14) – рівняння площини через три задані точки, що не лежать на одній прямій.

Розкриваючи визначник за елементами першого рядка, після спрощень дістанемо загальне рівняння площини.

Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина перетинає осі координат у точках $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ і $C(0; 0; c)$ (рис. 2.31), тоді рівняння (2.30) набуває вигляду

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

яке рівносильне рівнянню

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2.15)$$

Рівняння (2.15) називають рівнянням площини у відрізках на осях.

Загальне рівняння площини (2.13) можна звести до вигляду (2.15) тільки тоді, коли усі коефіцієнти A , B , C і D не рівні нулю. Тоді $a = -A/D$, $b = -B/D$, $c = -C/D$.

Нормальне рівняння площини

Нормальне рівняння площини одержуємо у разі завдання площини довжиною P перпендикуляра OP , опущеного з початку координат на площину і кутами α , β , γ , які перпендикуляр OP утворює з осями координат (рис.2.32).

Візьмемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$. За умовою проєкція радіус-вектора \vec{OM} на вектор-нормаль $\vec{n}_0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ дорівнює P : $\text{пр}_{\vec{n}_0} \vec{OM} = P$, звідси

$$P = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{n}_0}{|\vec{n}_0|} = \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}}.$$

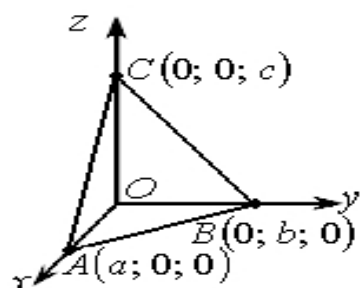


Рис. 2.31. Зображення площини, що перетинає осі координат у точках $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ і $C(0; 0; c)$

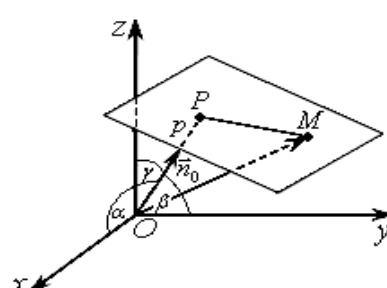


Рис.2.32. Зображення нормального рівняння площини

Оскільки $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, то в результаті приходимо до рівняння

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (2.16)$$

Рівняння (2.16) називають *нормальним рівнянням площини*.

Властивості цього рівняння:

а) сума квадратів коефіцієнтів при x , y , z дорівнює одиниці;

б) вільний член входить у рівняння зі знаком « $-$ ».

Для зведення загального рівняння (2.13) до нормального вигляду потрібно помножити його на *нормувальний множник*

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

знак якого вибирають протилежним до знака D .



Вчимося отримувати рівняння площини

2.7. У просторі задані точки $M_0(2; 3; 1)$, $M_1(1; 2; -1)$, $M_2(3; 1; -2)$, $M_3(-2; 3; -2)$. Знайдіть:

а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$.

Розв'язання:

а) на площині $M_1M_2M_3$ візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ і утворимо три вектори

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - 1, y - 2, z + 1\}, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \{2; -1; -1\}, \quad \overrightarrow{M_1M_3} = \{-3; 1; -1\}.$$

За формулою (2.14) складаємо рівняння

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки після розкриття визначника за першим рядком одержуємо загальне рівняння площини $M_1M_2M_3$:

$$2x + 5y - z - 13 = 0.$$

б) оскільки шукана площина α паралельна площині $M_1M_2M_3$, то нормальний вектор цієї площини $\vec{n} = \{2; 5; -1\}$ є також нормальним вектором для площини α .

За формулою (2.12) рівняння площини α має вигляд:

$$2(x-2) + 5(y-3) - (z-1) = 0,$$

або

$$2x + 5y - z - 18 = 0.$$

в) щоб записати рівняння площини, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$, скористаємось рівнянням (2.12), в якому координати вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$ є координатами вектора нормалі:

$$-3(x-2) + (y-3) - (z-1) = 0, \text{ або } 3x - y + z - 4 = 0.$$

2.8. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1; -2; 4)$ паралельно векторам $\vec{a} = \{2; -1; 0\}$ та $\vec{b} = \{3; -1; 3\}$.

Розв'язання. Оскільки площина паралельна векторам \vec{a} і \vec{b} , то нормаль \vec{n} шуканої площини перпендикулярна до цих векторів. Тому за нормаль можемо взяти векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} : $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ (пригадайте означення векторного добутку двох векторів), тобто

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}.$$

За формулою (2.12) записуємо рівняння шуканої площини $-3(x-1) - 6(y+2) + (z-4) = 0$, або $3x + 6y - z + 13 = 0$.


2.9. Обчисліть об'єм піраміди, обмеженої координатними площинами і площиною $3x - 5y + 2z - 30 = 0$.

Розв'язання. Оскільки піраміда прямокутна, то її об'єм зручно обчислити за формулою $V = \frac{1}{6}|OA| \cdot |OB| \cdot |OC|$, де A, B, C – точки перетину площини з осями координат.

На осі Ox дорівнюють нулю координати y і z , тому, підставивши у рівняння площини значення $y=0$ та $z=0$, дістанемо $3x-30=0$, або $x=10$. Отже, $A(10; 0; 0)$ – точка перетину площини з віссю Ox . Аналогічно визначаємо точки $B(0; -6; 0)$ і $C(0; 0; 15)$ – точки перетину площини з осями Oy і Oz . Звідси $|OA|=10$, $|OB|=6$, $|OC|=15$ і $V = \frac{1}{6}10 \cdot 6 \cdot 15 = 150$ (куб. од.).

Відповідь: $V = 150$ (куб. од.).

Евристичний тренажер «Plane» допоможе оволодіти вмінням отримувати рівняння площини.

1. Запустіть програму для роботи (рис. 2.33) та після натиснення кнопки «Далі» уважно прочитайте інструкцію.
2. Отримайте вікно із завданням по складанню рівняння площини. Обирайте в залежності від особистої орієнтації у наступних діях пропозиції «далі» або  в разі необхідності допомоги (рис. 2.34).
3. Результати правильних або не правильних перетворень допоможуть обрати правильний шлях розв'язування (рис. 2.35) та закінчити складання рівняння площини (рис. 2.36).

Евристичний тренажер

за темою
“Рівняння площини у просторі”

далі

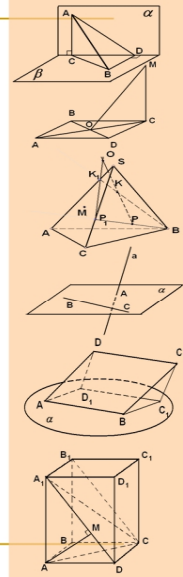


Рис. 2.33. Вікно евристичного тренажера «Plane»

Задача 1. Складіть рівняння площини β , що проходить через точку $A(2;-1;3)$ паралельно площині $\alpha: 3x-y+2z-5=0$

Оберіть метод розв'язання задачі:

- використання рівняння площини, що проходить через точку із заданим нормальним вектором ☐
- використання рівняння площини, що проходить через три точки ☐
- застосування загального методу складання рівняння площини ☐

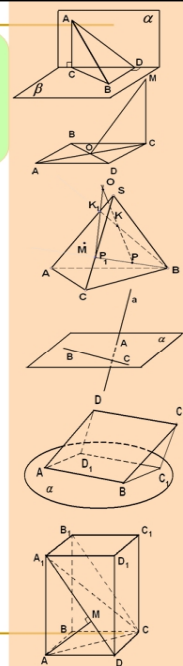


Рис. 2.34. Вікно із завданням по складанню рівняння площини

Задача 1. Складіть рівняння площини β , що проходить через точку $A(2;-1;3)$ паралельно площині $\alpha: 3x-y+2z-5=0$

Оберіть метод розв'язання задачі:

- використання рівняння площини, що проходить через точку із заданим нормальним вектором ☐ ?
- використання рівняння площини, що проходить через точку і має заданий нормальний вектор ☐ ?
- застосування загального методу складання рівняння площини ☐ ?

Цей метод неможливо реалізувати в цьому випадку, бо неможливо відшукати три некомпланарні вектори. З'ясуйте, як розташований нормальний вектор площини α по відношенню до площини β

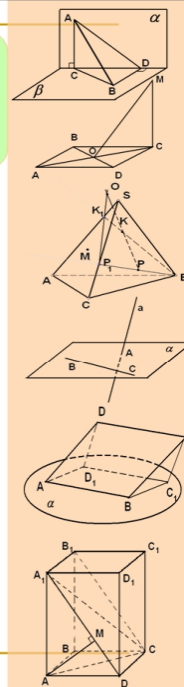


Рис. 2.35. Результати не правильних перетворень

Задача 1. Складіть рівняння площини β , що проходить через точку $A(2;-1;3)$ паралельно площині $\alpha: 3x-y+2z-5=0$

Отже,

$\vec{n} = \{3;-1;2\}$ – нормальний вектор площини β ,

$A(2;-1;3)$ – точка, яка належить площині β

Рівняння площини β має вигляд

$3(x-2) - (y+1) + 2(z-3) = 0$ ☐

$3(x+2) - (y-1) + 2(z+3) = 0$ ☐

$2(x-3) - (y+1) + 3(z-2) = 0$ ☐

$2(x+3) - (y-1) + 3(z+2) = 0$ ☐

?

Так! Ви правильно склали рівняння площини.

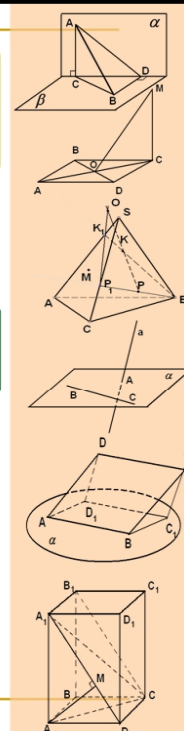


Рис. 2.36. Результати правильних перетворень



Необхідні знання про знаходження відстані від точки до площини

Нормальне рівняння (2.16) застосовують для знаходження відстані d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини. Цю відстань обчислюють за формулою

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|,$$

або

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.17)$$

Величину

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p$$

називають *відхиленням точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ від площини*.

Якщо точка M_0 і початок координат лежать по один бік від площини, то $\delta < 0$, якщо ж по різні сторони – то $\delta > 0$.



Вчимося знаходити відстань від точки до площини

2.10. У просторі задані точки $M_0(2; 3; 1)$, $M_1(1; 2; -1)$, $M_2(3; 1; -2)$, $M_3(-2; 3; -2)$. Знайдіть відстань від точки M_0 до площини $M_1M_2M_3$.

Розв'язання:

Знайдемо рівняння площини $M_1M_2M_3$, для цього візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ і утворимо три вектори

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x-1, y-2, z+1\}, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \{2; -1; -1\}, \quad \overrightarrow{M_1M_3} = \{-3; 1; -1\}.$$

За формулою (2.14) складаємо рівняння

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки після розкриття визначника за першим рядком одержуємо загальне рівняння площини $M_1M_2M_3$:

$$2x + 5y - z - 13 = 0.$$

Відстань від точки $M_0(2; 3; 1)$ до площини $M_1M_2M_3$, заданої рівнянням $2x + 5y - z - 13 = 0$, обчислюємо за формулою (2.17):

$$d = \frac{|2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 1 - 13|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{30}}.$$



Необхідні знання про знаходження кута між двома площинами та про умови їх паралельності і перпендикулярності

Задамо площини

$$\alpha_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad \alpha_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.$$

Кут $\varphi (0 \leq \varphi \leq 90^\circ)$ між цими площинами знаходять з умови

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Умова паралельності площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Умова перпендикулярності площин:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$



Необхідні знання про завдання прямої у просторі

Канонічні рівняння прямої у просторі

Задамо у просторі задано $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямний вектор $\vec{a} = \{l; m; n\}$. Через точку M_0 паралельно до вектора \vec{a} проходить єдина пряма (рис. 2.37), її рівняння отримуємо з умови колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0 M}$ і \vec{a} :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (2.18)$$

Рівняння (2.18) – *канонічні* рівняння прямої у просторі. Ці рівняння виводять так само, як і канонічне рівняння прямої на площині (формула (2.3)).

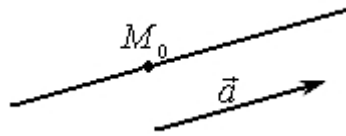


Рис. 2.37. Зображення прямої, що проходить через точку M_0 паралельно до вектора \vec{a}

Параметричні рівняння прямої

Позначивши у рівняннях (2.18) відношення через t :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t,$$

дістанемо рівняння:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

(2.19)

де $t \in (-\infty; \infty)$ – довільний *параметр*.

Рівняння (2.19) – параметричні рівняння прямої у просторі.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Пряма L проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, який лежить на прямій L , – напрямний вектор прямої M_1M_2 . Тоді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} =$$

рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.

Загальне рівняння прямої

Дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Задамо ці площини рівняннями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad \text{та} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

причому нормальні вектори $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ не колінеарні, тобто $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq 0$. Тоді система рівнянь

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

визначає у просторі пряму лінію, і цю систему називають *загальним рівнянням прямої* (рис. 2.38).

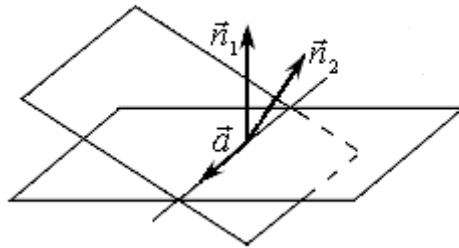


Рис. 2.38. Зображення прямої, що лежить на перетині двох площин

Звичайно, більш зручними для практичного застосування є *канонічні рівняння прямої*. Щоб звести загальне рівняння (2.20) до канонічного вигляду (2.18), потрібно знайти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій L і напрямний вектор $\vec{a} = \{l; m; n\}$ прямої.

Для знаходження точки M_0 одну з її координат, наприклад $z = z_0$, обирають довільною або рівною нулю. Далі з системи (2.20) знаходять відповідні значення двох інших координат. Якщо система несумісна, то довільне значення надають іншій змінній. За напрямний вектор \vec{a} прямої можна взяти векторний добуток нормальних векторів $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$.

М.В. Застосовують і інший спосіб зведення рівняння (2.20) до канонічного вигляду: знаходять дві точки на прямій L , тобто $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, тоді $\overrightarrow{M_1 M_2}$ – напрямний вектор прямої L .



Вчимося задавати рівняння прямої у просторі

2.11. Знайдіть канонічні рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z - 10 = 0, \\ x - 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Щоб записати канонічні рівняння прямої, достатньо знати координати точки, через яку проходить пряма, і напрямний вектор цієї прямої.

Нехай $y=0$, система набуває вигляду

$$\begin{cases} 2x + 2z - 10 = 0, \\ x - z + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x + z = 5, \\ x - z = -1, \end{cases}$$

розв'язок якої $x=2$, $z=3$. Отже, точка $M(2; 0; 3)$ належить шуканій прямій.

Напрямний вектор знайдемо за формулою

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}, \quad \text{або} \quad \vec{a} = \{9; 4; 1\}.$$

Отже, канонічні рівняння прямої: $\frac{x-2}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{1}$.



Необхідні знання про кут між двома прямими та про умови паралельності й перпендикулярності двох прямих

Задамо прямі L_1 і L_2 канонічними рівняннями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Кут φ між цими прямими за означенням є кутом між їхніми напрямними векторами $\vec{a}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$ і $\vec{a}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$, тобто

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Якщо прямі L_1 і L_2 паралельні, то їхні напрямні вектори колінеарні, отже, відповідні координати пропорційні. Тому умова паралельності прямих:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Якщо прямі L_1 і L_2 перпендикулярні, то й напрямні вектори перпендикулярні, отже, скалярний добуток $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$. Тому умова перпендикулярності прямих:

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0.$$



Вчимося застосовувати умови паралельності й перпендикулярності двох прямих

2.12. Перевірте, чи є перпендикулярними прямі

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{3} \quad ; \quad \begin{cases} 2x + 3y - 8z + 5 = 0, \\ 3x + y - 5z + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Прямі перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні напрямні вектори цих прямих. Вектор $\vec{a}_1 = \{1; -2; 3\}$ – напрямний вектор першої прямої. Направний вектор другої прямої знаходимо за формулою

$$\vec{a}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -8 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k} = -7(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$$

Обчислюємо скалярний добуток $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 0$.

Отже, прямі перпендикулярні.

М.В. Задані прямі перпендикулярні, якщо мішаний добуток $\vec{a}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.



Необхідні знання про кут між прямою і площиною та про умови їх паралельності й перпендикулярності

Def. Кут між прямою і площиною є кут між прямою і її проекцією на площину (рис. 2.39).

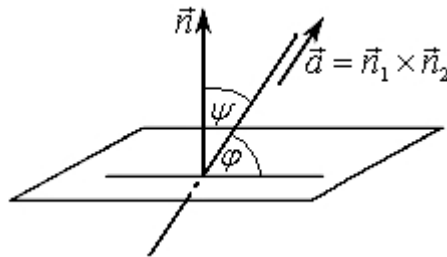


Рис. 2.39. Кут між прямою і площиною

Задамо пряму L канонічними рівняннями (2.18), а площину P – загальним рівнянням (2.13). Позначимо кут між прямою L і площиною через φ , а між нормальним вектором площини і напрямним вектором прямої – через ψ . Тоді якщо ψ – гострий кут, то кут $\varphi = 90^\circ - \psi$ і $\cos \psi = \sin \varphi$; якщо ψ – тупий кут, то кут $\varphi = \psi - 90^\circ$ і $\sin \varphi = -\cos \psi$. В обох випадках $\sin \varphi = |\cos \psi|$.

Отже, кут між прямою і площиною знаходять за формулою

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Якщо пряма паралельна площині (рис. 2.40), то вектори \vec{n} і \vec{a} перпендикулярні, отже, їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

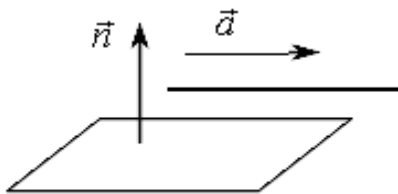


Рис. 2.40. Зображення прямої паралельної площині

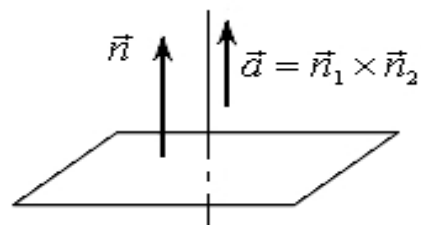


Рис. 2.41. Зображення прямої перпендикулярної площині

Якщо пряма перпендикулярна до площини (рис. 2.41), то вектори \vec{n} і \vec{a} колінеарні, отже, їхні координати пропорційні:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$



Вчимося застосувати умови взаємного розташування прямих і площин

2.13. Доведіть, що пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$ лежить у площині $3x + 6y - z + 13 = 0$.

Доведення. Перший спосіб. Достатньо показати, що будь-які дві точки прямої належать площині.

Справді, точки $M_1(-1; 1; 2)$ і $M_2(1; 5; 1)$ належать прямій (обґрунтуйте вибір цих точок). Підставивши координати точок у рівняння площини, одержимо правильні рівності.

Другий спосіб. Запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$x = -1 + 2t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 2 - t$$

і підставимо значення x, y, z у рівняння площини:

$$4(-1 + 2t) - 3(1 + 4t) - 4(2 - t) + 15 = 0.$$

звідки дістаємо тотожність: $0 = 0$. Це означає, що будь-яка точка прямої задовольняє рівняння площини, отже, належить площині.



Необхідні знання по знаходженню точки перетину прямої і площини

Для знаходження точки перетину прямої і площини, заданих рівняннями (2.18) і (2.13) відповідно, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \\ (Al + Bm + Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Кількість розв'язків останньої системи визначається рівнянням $Rt + S = 0$, де $R = Al + Bm + Cn$, $S = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$. Можливі випадки:

1) $R \neq 0$, тоді рівняння $Rt + S = 0$ має єдиний корінь $t^* = -\frac{S}{R}$. Отже, пряма і площина мають одну спільну точку $(x_0 + lt^*, y_0 + mt^*, z_0 + nt^*)$;

2) $R = 0$, $S \neq 0$, тоді рівняння $Rt + S = 0$ не має розв'язків. Це означає, що пряма і площина не мають спільних точок;

3) $R = 0$, $S = 0$, рівняння $Rt + S = 0$ має безліч розв'язків. У цьому випадку пряма належить площині.

Отже, належність прямої площині описується двома умовами:

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \end{cases}$$

перша з яких означає паралельність прямої і площини, а друга – належність площині точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої L .



Вчимося знаходити точки перетину прямої і площини

2.14. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(-2; 3; -5)$ відносно прямої $\frac{x-8}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

Розв'язання. Нехай M' – шукана точка (рис. 2.42). Задачу розв'язуємо у такій послідовності:

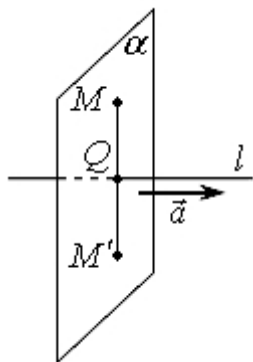


Рис. 2.42.
Зображення точки
 M' , симетричної
точці M

1) складаємо рівняння площини α , що проходить через точку M перпендикулярно до прямої l ;

2) знаходимо точку Q – проекцію точки M на пряму l ;

3) визначаємо координати точки M' , враховуючи при цьому, що точка Q – середина відрізка MM' .

Вектор $\vec{a} = \{3; 1; -1\}$ – напрямний вектор прямої l є нормальним вектором площини, яка перпендикулярна до прямої l .
Записуємо рівняння площини α :

$$3(x+2) + (y-3) - (z+5) = 0, \text{ або } 3x + y - z - 2 = 0.$$

Точка Q одночасно належить і площині, і прямій. Щоб знайти її координати, розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x-8}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}, \\ 3x + y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Таку систему зручно розв'язувати так. Запровадивши параметр t , запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді: $x = 3t + 8$, $y = t - 1$, $z = -t - 1$. Виконавши підстановку у рівняння площини, дістанемо:

$$3(3t+8) + (t-1) - (-t-1) - 2 = 0, \quad 11t + 22 = 0, \quad t = -2.$$

Отже,

$$x_Q = 3(-2) + 8 = 2, \quad y_Q = -2 - 1 = -3, \quad z_Q = 2 - 1 = 1.$$

Точка $Q(2; -3; 1)$ є серединою відрізка MM' , тому її координати

задовольняють рівності $x_Q = \frac{x_M + x_{M'}}{2}$, $y_Q = \frac{y_M + y_{M'}}{2}$, $z_Q = \frac{z_M + z_{M'}}{2}$,
тобто

$$2 = \frac{-2 + x_{M'}}{2}, \quad -3 = \frac{3 + y_{M'}}{2}, \quad 1 = \frac{-5 + z_{M'}}{2},$$

Звідси знаходимо координати симетричної точки $M'(6; -9; 7)$



Необхідні знання по знаходженню відстані між паралельними прямими

Відстань між паралельними прямими

$$L_1: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \quad \text{і} \quad L_2: \frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{z-z_2}{n}$$

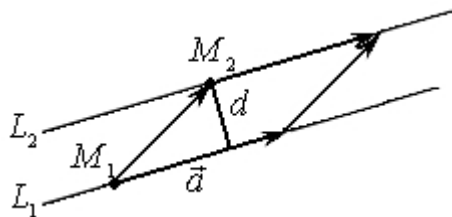


Рис. 2.43. Зображення відстані між паралельними прямими

дорівнює висоті паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (l, m, n)$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$, де M_1 — довільна точка прямої L_1 , а M_2 — довільна точка прямої L_2 (рис. 2.43).

$$d = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{a}|}$$

Отже,

Відстань між паралельними прямими L_1 і L_2 можна визначити ще так:

- 1) через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ провести площину, перпендикулярну до прямої L_1 ;
- 2) знайти точку O перетину площини з прямою L_2 ;
- 3) обчислити довжину відрізка M_1O . Це і буде шукана відстань між паралельними прямими.



Обчислюємо кути і відстані між прямими й площинами за допомогою ППЗ Gran-3D

Процедура обчислення кутів і відстаней між прямими й площинами за допомогою відповідних правил.

2.15. Звиси чотирьохскатного даху цеху створюють прямокутник, сторони якого рівні 12 і 30 м. Скати покрівлі мають

рівний ухил, що дорівнює $\frac{1}{2}$. Вибравши систему координат, як показано на рисунку, скласти рівняння скатів, рівняння ребер і гребня, записати рівняння ребер і гребня в канонічній формі, знайти кут між бічними скатами, відстань від гребня до прямокутника, що створено звисами, кількість матеріалу необхідного для поверхні покрівлі.

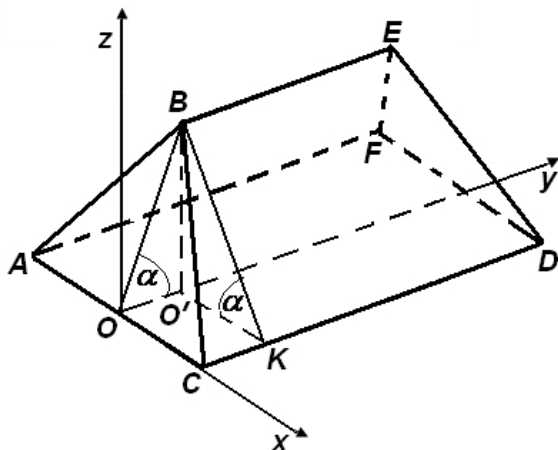


Рис. 2.44. Схема чотирьохскатного даху цеху

Звиси даху – це відрізки прямих AC, CD, DF, AF ; скати – це трикутники ABC, DEF та трапеції $BCDE, ABEF$; гребінь – відрізок прямої BE ; кут нахилу ската – кут α , що створено прямою скату BK та її горизонтальною проекцією; ухил скату – тангенс кута

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BO'}{O'K} \quad (\text{рис. 2.44}).$$

Розв'язання.

Крок 1. Координати точок A, C, D, F в обраній системі наступні: $A(-6; 0; 0)$,

$C(6; 0; 0), D(6; 30; 0), F(-6; 30; 0)$. Знайдемо координати

точок B та E . З $\triangle BO'K$ маємо $z_B = BO' = O'K \cdot \operatorname{tg} \alpha = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

З $\triangle BO'O$ знаходимо $y_B = OO' = \frac{BO'}{\operatorname{tg} \alpha} = 3 \div \frac{1}{2} = 6$. Таким чином, точка

B має координати $(0; 6; 3)$, точка E , для якої $y_E = 30 - y_B$, має координати $(0; 24; 3)$, відстань від гребня до прямокутника, що створено звисами дорівнює 3.

Крок 2. Оскільки скати даху плоскі, то їхні рівняння будемо знаходити, як рівняння площин, що проходять через три задані

точки: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$. По відомих координатах точок знайдемо рівняння:

$$\text{скату } ABC: \begin{vmatrix} x+6 & y-0 & z-0 \\ 0+6 & 6-0 & 3-0 \\ 6+6 & 0-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - 2 \cdot z = 0;$$

$$\text{скату } DEF: \begin{vmatrix} x-6 & y-30 & z-0 \\ 0-6 & 24-30 & 3-0 \\ -6-6 & 30-30 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y + 2 \cdot z - 30 = 0;$$

$$\text{скату } BCDE: \begin{vmatrix} x-0 & y-6 & z-3 \\ 6-0 & 0-6 & 0-3 \\ 6-0 & 30-6 & 0-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2 \cdot z - 6 = 0;$$

$$\text{скату } ABEF: \begin{vmatrix} x+6 & y-0 & z-0 \\ 0+6 & 6-0 & 3-0 \\ 0+6 & 24-0 & 3-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2 \cdot z + 6 = 0.$$

Крок 3. Ребра AB , BC , DE , EF й гребінь BE є лініями перетину відповідних площин $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$. Загальні й канонічні рівняння цих ліній відповідно мають вигляд: ребро AB :

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ x - 2z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+6}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1};$$

$$\text{ребро } BC: \begin{cases} y - 2z = 0 \\ x + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-3}{-1};$$

$$\text{ребро } DE: \begin{cases} y + 2z - 30 = 0 \\ x + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-6}{-2} = \frac{y-30}{-2} = \frac{z}{1};$$

$$\text{ребро } EF: \begin{cases} y + 2z - 30 = 0 \\ x - 2z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y-24}{2} = \frac{z}{-1};$$

$$\text{гребінь } BE: \begin{cases} x + 2z - 6 = 0 \\ x - 2z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{0} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-3}{0}.$$

Крок 4. Кут між бічними скатами $ABEF$ та $BCDE$ знаходимо як кут між двома площинами

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{5}.$$

Отже кут $\varphi = 59,033^\circ$

Крок 5. Щоб знайти площу поверхні покрівлі, відзначаємо, що вона складається із двох рівних трикутників $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ й двох рівних трапецій $ABEF$ та $BCDE$, площі яких відповідно

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{AC \cdot BO}{2} \quad \text{й} \quad S_{\text{трапеції}} = \frac{a + b}{2} \cdot h = \frac{BE + CD}{2} \cdot BK. \quad \text{Висоти}$$

трикутників й трапецій рівні між собою:

$$BO = BK = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \text{ м.}$$

$$S = 2 \cdot \left(\frac{12 \cdot 3\sqrt{5}}{2} + \frac{30 + 18}{2} \cdot 3\sqrt{5} \right) = 180\sqrt{5} \approx 402,5 \text{ м}^2.$$

Площа поверхні покрівлі:

Процедура знаходження рівнянь площин, кутів між площинами за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Gran-3D.



«Навчаємо» свій комп'ютер знаходженню рівнянь площин, кутів між площинами за допомогою ППЗ Gran-3D.

До завдання 2.15. знайдемо кут між бічними скатами $ABEF$ та $BCDE$ як кут між двома площинами за допомогою Gran-3D.

1. Відкрити вікно ППЗ Gran-3D.
2. Побудувати зображення площин $ABEF$ та $BCDE$ за допомогою опції *Об'єкт-Створення-Площина-Три точки* за координатами відповідних точок $A (-6; 0; 0)$, $B(0; 6; 3)$, $E(0; 24; 3)$; $C (6; 0; 0)$ (рис. 2.45)

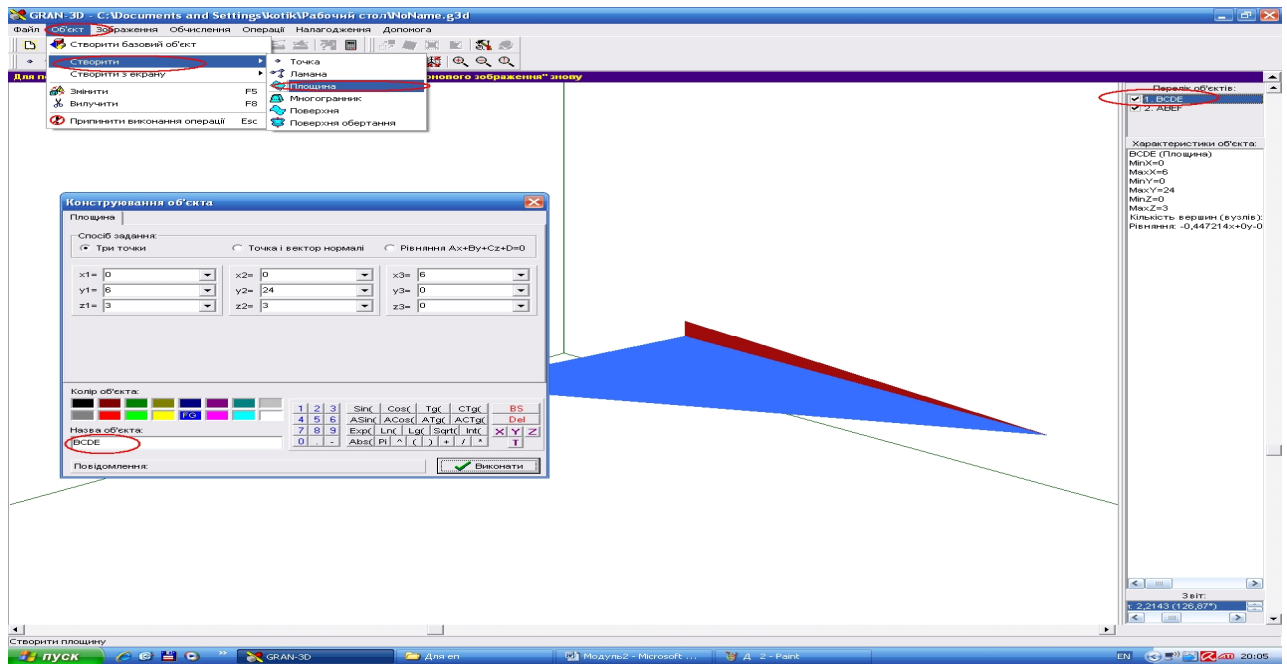


Рис. 2.45. Вікно ППЗ Gran-3D: побудова зображення площин $ABEF$ та $BCDE$

3. За допомогою опції *Обчислення-Кут-Між двома площинами*, за відповідними запитами програми послідовно вказати у полі програми об'єкти площин $ABEF$ та $BCDE$. У полі звіту з'явиться результат обчислення кута між заданими площинами $\varphi = 59,033^\circ$ (рис. 2.46).

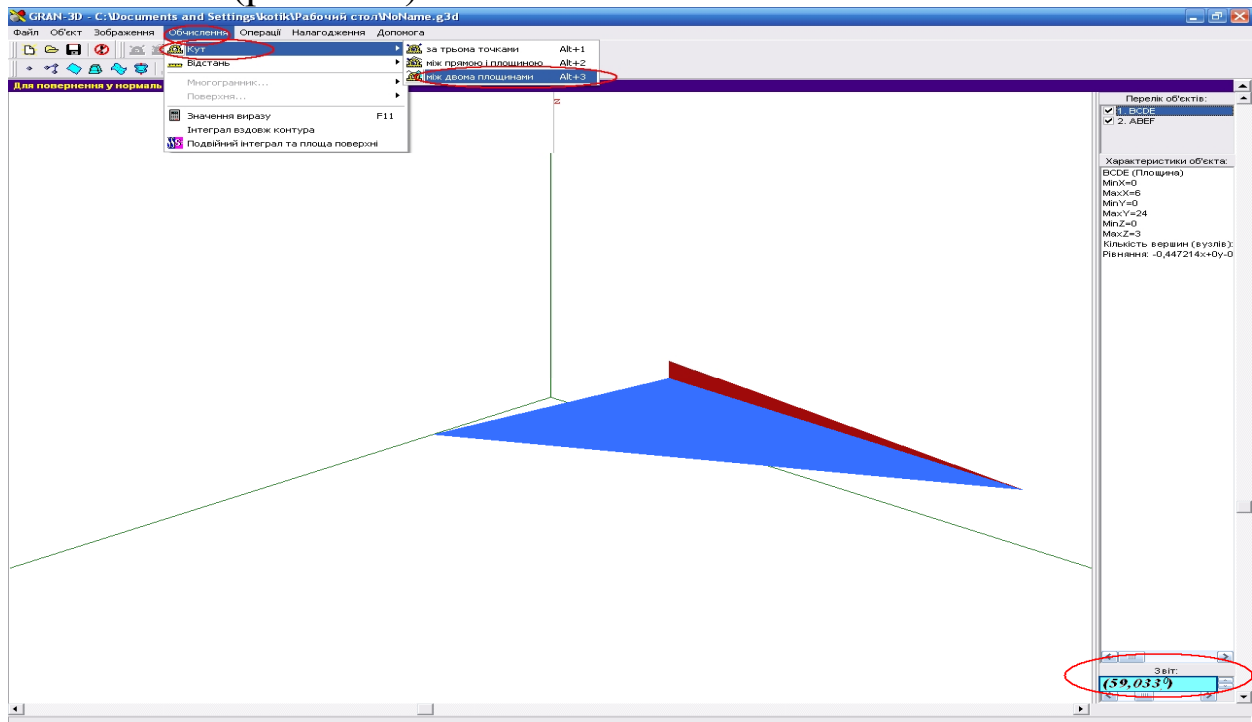


Рис. 2.46. Вікно ППЗ Gran-3D: результат обчислення кута між заданими площинами



Моделюємо професійну діяльність інженера

2.16. Поліус O' тіла описує в площині XOY коло радіуса a із центром на початку координат O . Саме тіло обертається біля цього поліусу, виконуючи прецесійний рух. Кутова швидкість обертання поліусу O' навколо точки O дорівнює кутовій швидкості ω прецесії. Проекції кутової швидкості задані формулами: $\omega_x = kv \sin vt \cdot \sin \theta_0$, $\omega_y = -kv \cos vt \cdot \sin \theta_0$, $\omega_z = v(1 + k \cos \theta_0)$, де k – постійна. Скласти рівняння миттєвої гвинтової осі в нерухомій системі координат, якщо задані координати однієї точки C на гвинтовій осі: $x_C = \lambda \cdot \cos vt$, $y_C = \alpha \cdot \sin vt$, $z_C = 0$.



Переформулюйте умову на математичну. Складіть рівняння прямої у просторі, підставляючи значення відповідних координат у

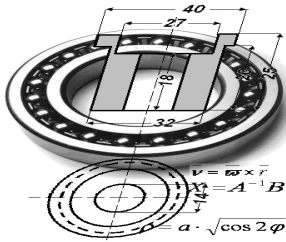
$$\text{загальне рівняння} \quad \frac{x - x_c}{\omega_x} = \frac{y - y_c}{\omega_y} = \frac{z - z_c}{\omega_z}.$$

Застосовуйте ППЗ для моделювання прецесійного руху.

Відповідь: рівняння гвинтової осі як прямої, що проходить через задану точку на ній, має вигляд:

$$\frac{x - \lambda \cos vt}{k \sin \theta_0 \sin vt} = \frac{y - \lambda \sin vt}{-k \sin \theta_0 \cos vt} = \frac{z}{1 + k \cos \theta_0} = \mu \quad \text{або у параметричній}$$

$$\text{формі:} \quad \begin{cases} x = \lambda \cos vt + \mu k \sin \theta_0 \sin vt \\ y = \lambda \sin vt - \mu k \sin \theta_0 \cos vt \\ z = \mu(1 + k \cos \theta_0) \end{cases}.$$



Тема 3. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Механізм (антипаралельний кривошип) складається з чотирьох попарно рівних ланок $AB = CD$ й $AD = BC$, шарнірно з'єднаних між собою, як показано на рисунку. Ланку AB закріплено нерухомо, а ланки AD й BC обертаються навколо центрів A і B . Визначити траєкторію руху точки $M(x; y)$ перетину малих ланок. Виберемо систему координат таким чином, щоб вісь Ox пройшла через точки A і B , а вісь Oy — через середину відрізка AB .

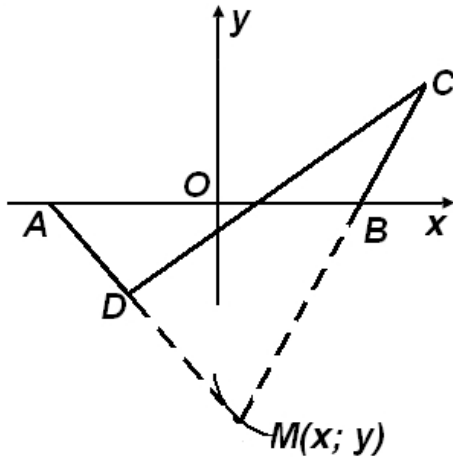


Рис.2.47. Схема механізму (антипаралельний кривошип)

Легко бачити, що різниця відстаней до точки M від точок A і B є величина постійній, рівна довжині малої ланки. Позначаючи цю довжину через $2a$, а довжину ланки AB через $2c$, будемо мати $AM - BM = \pm 2a$, або

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

(рис. 2.47).

Спрощуючи це рівняння, одержимо, що точка M рухається по дузі кривої, що називається гіперболою, для якої A і B є фокусами.

Найчастіше траєкторія руху різних механізмів або каркаси металевих споруд мають вигляд ліній, що називаються кривими другого порядку.



Необхідні знання про криві другого порядку

Def. Лінією (кривою) другого порядку називають множину точок площини, координати яких задовольняють рівняння

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

де хоча б одне з чисел a , b , c відмінне від нуля.

До ліній другого порядку належать коло, еліпс, гіпербола і парабола.

Коло

Def. Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки цієї ж площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Рівняння

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

описує коло з радіусом R , центр якого міститься у точці $K(a, b)$ (рис. 2.48).

У разі, коли центр кола – початок координат (рис. 2.49), рівняння кола набуває канонічного вигляду

$$x^2 + y^2 = R^2$$

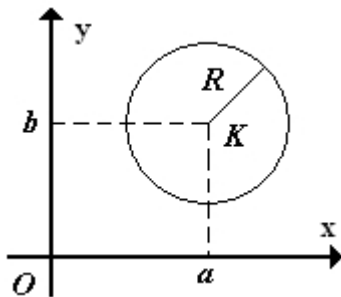


Рис. 2.48. Коло з радіусом R , центр якого у точці $K(a, b)$

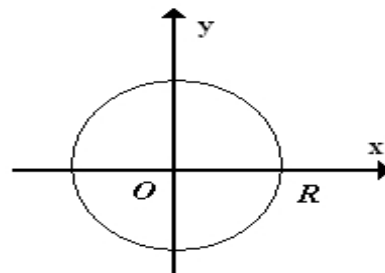


Рис. 2.49. Коло, центр якого, початок координат

Еліпс

Def. Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини (фокусів) є величина стала і більша, ніж відстань між фокусами (рис. 2.50).

Розглянемо на площині точки F_1 і F_2 – фокуси еліпса. Розмістимо координати осі так, щоб вісь Ox проходила через ці

точки, а вісь Oy - через середину відрізка F_1F_2 перпендикулярно до Ox . Позначимо відстань між фокусами $F_1F_2 = 2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів – $2a$. $2a > 2c$. Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c,0)$ та $F_2(c,0)$.

За означенням довільна точка $M(x,y)$ належить еліпсу тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Піднесемо двічі до квадрата ліву і праву частини цього рівняння, дістанемо

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Позначимо різницю $a^2 - c^2 = b^2$. Тоді

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2,$$

звідси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Це рівняння називають *канонічним рівнянням еліпса*.

Величини $A_1A_2 = 2a$ та $B_1B_2 = 2b$ називають відповідно *великою* та *малою осями* еліпса.

Якщо $a = b$, то рівняння набуває вигляду $x^2 + y^2 = a^2$. Отже, коло є частинним випадком еліпса, у якого фокуси збігаються в одну точку – центр.

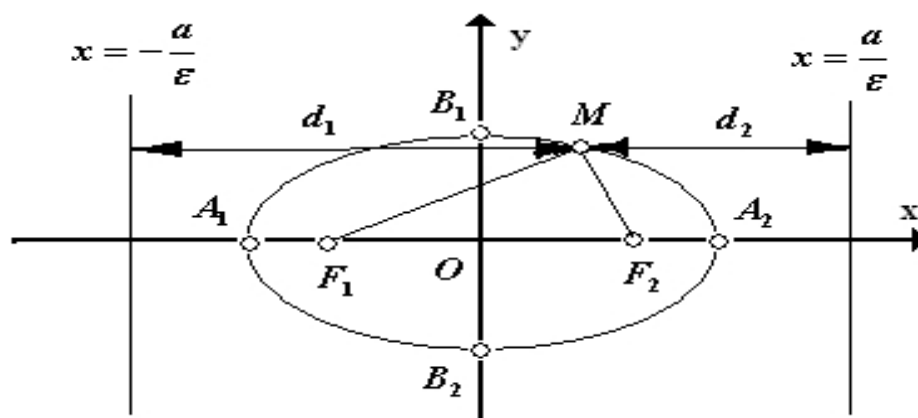


Рис. 2.50. Зображення побудови кривої еліпсу

Міру відхилення еліпса від кола характеризує величина

$\varepsilon = \frac{c}{a}$, $0 \leq \varepsilon < 1$, яку називають *ексцентриситетом* еліпса.

Відрізки F_1M і F_2M називають *фокальними радіусами* точки M :

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{і} \quad r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, або $x = \pm \frac{a^2}{c}$, називають *директрисами* еліпса.

Оскільки $0 \leq \varepsilon < 1$, то $\frac{a^2}{c} > a$, тобто директриси еліпса лежать поза ним.

Для директрис має місце таке твердження.

Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстані цієї точки до відповідних директрис є стала величина, що дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$



Вчимося будувати еліпс

2.17. Визначте тип кривої $4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$, зведіть рівняння до найпростішого вигляду та побудуйте графік рівняння.

Розв'язання.

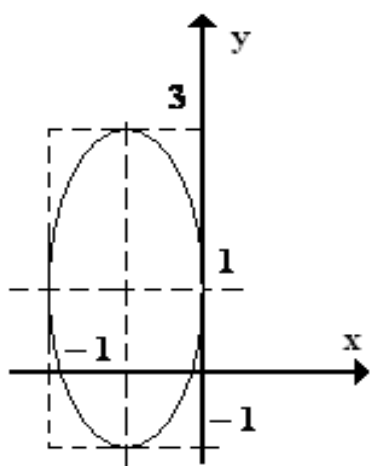


Рис. 2.51. Зображення кривої еліпса

Виділивши повні квадрати по x та y , дістанемо

$$4(x^2 + 2x) + (y^2 - 2y + 1) = 0,$$

$$4(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 4,$$

$$4(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4,$$

$$(x + 1)^2 + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1.$$

Одержали рівняння еліпса, який можна дістати за допомогою паралельного перенесення

еліпса $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ на вектор $(-1; 1)$ (рис. 2.51).

Гіпербола

Def. Гіперболою називають множину всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох заданих цієї площини (фокусів) є величина стала і менша від відстані між фокусами (рис. 2.52).

Позначимо відстань між фокусами $F_1F_2 = 2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів — $2a$, $2a < 2c$. Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c,0)$ та $F_2(c,0)$.

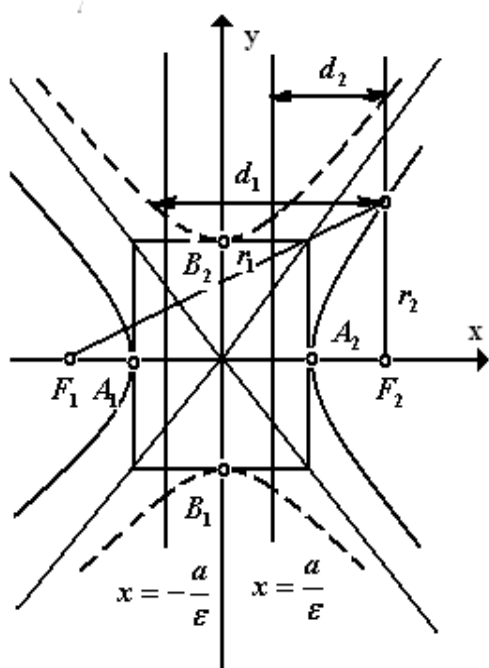


Рис. 2.52. Зображення побудови кривої гіперболи

За означенням довільна точка $M(x, y)$ належить гіперболі тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Після належних перетворень, дістаємо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = c^2 - a^2$.

Гіпербола складається з двох віток і має дві асимптоти

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називають дійсною віссю гіперболи, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ - уявною віссю.

Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

визначає гіперболу, яку називають спряженою до гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

її графік зображено на рис. 2.52 пунктирною лінією.

Ексцентриситет гіперболи визначають як відношення фокальної відстані гіперболи до довжини її дійсної осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \varepsilon > 1$$

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, де a – дійсна піввісь гіперболи, називають *директрисами* гіперболи. Вони мають ту саму властивість, що і директриси еліпса:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$



Вчимося будувати гіперболу

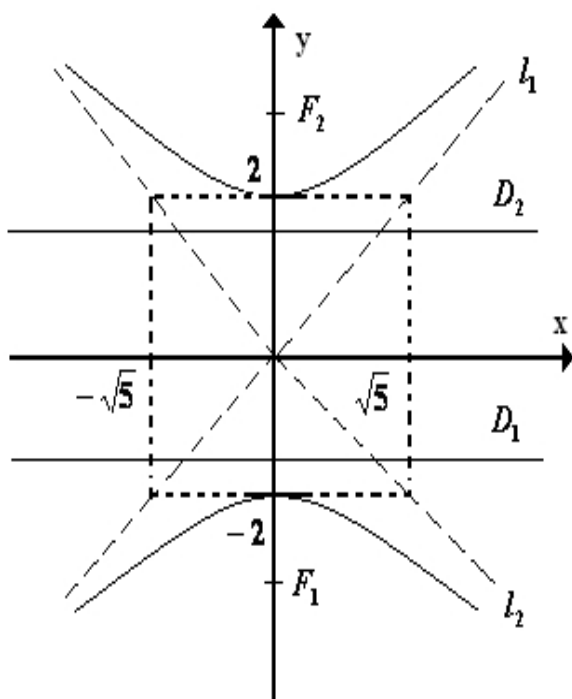
2.18. Задано рівняння лінії другого порядку $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$. Визначте вид кривої, знайдіть її фокуси, півосі, ексцентриситет, рівняння директрис і асимптот (для гіперболи). Побудуйте графік.

Розв'язання. Дане рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1, \text{ або } -\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Це - спряжена гіпербола з дійсною піввіссю $b = 2$, яка лежить на осі Oy , і уявною $a = \sqrt{5}$ - на осі Ox . Половину фокусної відстані c знайдемо з умови

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9; \quad c = 3.$$



Фокуси F_1 і F_2 лежать на осі Oy , їхні координати - $(0; -3)$ і $(0; 3)$ відповідно.

Ексцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{b} = 1,5$.

Рівняння директрис: $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$,
або $y = \pm 4/3$.

Рівняння асимптот: $y = \pm \frac{b}{a}x$,
або $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x$.

Гіперболу зображено на рис. 2.53.

Рис. 2.53. Зображення кривої гіперболи

Парабола

Def. *Параболою* називають множину всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси) (рис. 2.54).

Запишемо рівняння параболи.

Нехай на площині задано фокус F і директрису таким чином, що відстань між ними дорівнює p . Розмістимо вісь Ox так, щоб вона проходила через фокус перпендикулярно до директриси, а вісь Oy ділила навпіл відстань між фокусом і директрисою.

Тоді фокус має координати $F(\frac{p}{2}, 0)$, а рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Довільна точка $M(x, y)$ належить параболі тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $MB = MF$, де

$$MB = x + \frac{p}{2}, \quad MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}.$$

Тоді

$$x + \frac{P}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2},$$

звідки після перетворень дістаємо канонічне рівняння параболі:

$$y^2 = 2px$$

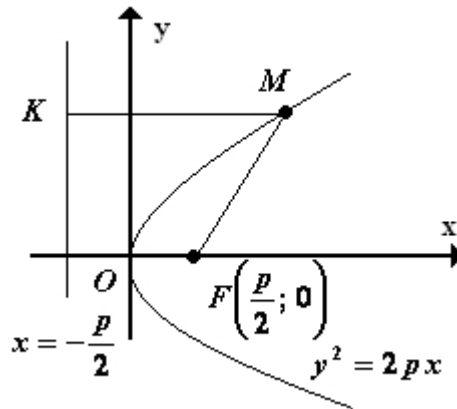


Рис. 2.54. Зображення побудови кривої параболі

Вісь симетрії параболі називають *віссю параболі*. Точку перетину параболі з віссю називають *вершиною параболі*, а число p , яке дорівнює відстані між фокусом і параболою, називають *параметром параболі*.

Параметр p характеризує ширину області, яку обмежує парабола (чим більше p , тим ширша парабола).



Вчимося будувати гіперболу

2.19. Встановіть, яку лінію визначає рівняння $y = 2 - \sqrt{x - 2}$ та побудуйте його графік.

Розв'язання.

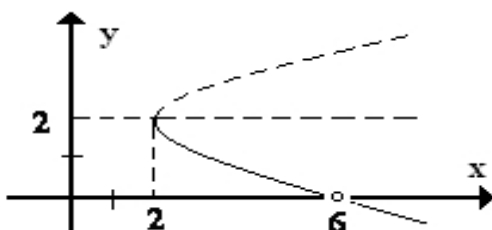


Рис. 2.55. Зображення кривої параболі

Очевидно, що $x \geq 2$, $y \leq 2$. При таких обмеженнях виконуємо перетворення: $y - 2 = -\sqrt{x - 2}$, $(y - 2)^2 = x - 2$. Графіком даного рівняння є нижня вітка параболі (рис. 2.55).



Будуємо траєкторію за допомогою ППЗ Gran1

Процедура побудови траєкторії за допомогою відповідних правил.

2.20. Потрібно з'єднати під прямим кутом дві циліндричні труби радіуса 5 см. Визначити вид кривої у площині перерізу, такий щоб при зварюванні вийшло необхідне коліно.

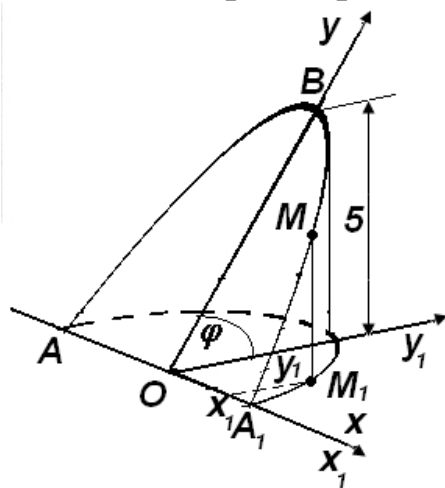


Рис. 2.56. Схема з'єднання під прямим кутом двох циліндричних труб

Скористаємося прийомом, що застосовується при виготовленні колінчатих труб.

Накреслимо півколо радіуса 5 см і приймемо її діаметр за вісь абсцис O_{x1} , а центр O — за початок координат. На відрізку, рівному випрямленій довжині півкола, побудуємо (на окремому листку) напівхвилю синусоїди з амплітудою 5 см й півпериметром $5 \cdot \pi$. Виріжемо фігуру, обмежену синусоїдою й випрямленим півколом, і сполучимо основу цієї фігури, поставивши її вертикально, з півколом. Синусоїда займе положення $AMBA_1$ (рис. 2.56).

Розв'язання.

Крок 1. Щоб скласти рівняння лінії $AMBA_1$ приймемо площину, у якій лежить ця крива, за нову координатну площину xOy . Система координат xOy виходить із раніше уведеної системи x_1Oy_1 поворотом останньої навколо вісі Ox_1 на кут $\varphi = 45^\circ$. При

$$\text{цЬОМУ} \quad x = x_1, \quad y = \frac{y_1}{\cos 45^\circ} = y_1 \cdot \sqrt{2}.$$

Крок 2. Підставляючи значення x_1 и y_1 у рівняння кола

$x_1^2 + y_1^2 = R^2$, отримаємо рівняння $x^2 + \frac{y^2}{2} = 5^2$, яке є шуканим рівнянням лінії AMB_1 у площині розрізу.

Крок 3. Записавши це рівняння у канонічному вигляді

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, отримаємо $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{2R^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{50} = 1$ — ця лінія — еліпс.

Процедура зображення кривих другого порядку за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Gran1.



«Навчаємо» свій комп'ютер зображенню кривих другого порядку за допомогою ППЗ Gran1.

1. Відкрити вікно ППЗ Gran1 та вибрати у вікні *Список об'єктів* тип системи координат – *Неявна*.

2. За допомогою опції *Об'єкт-Створити* ввести функцію

$x^2 + \frac{y^2}{2} - 5^2 = 0$ на відповідних відрізках (рис. 2.57).

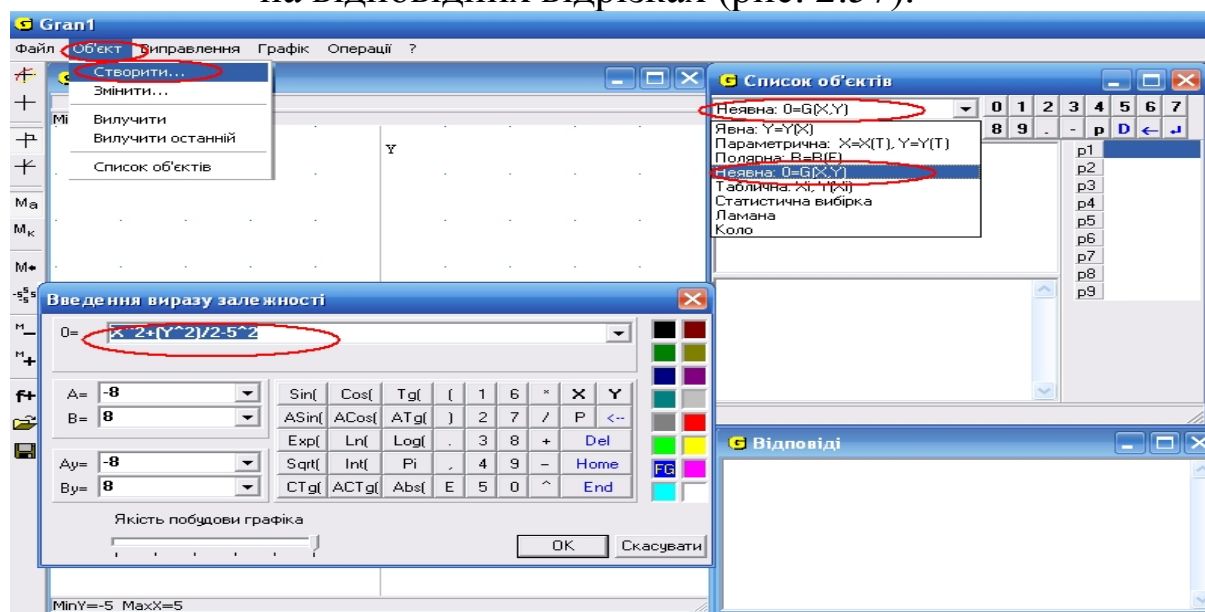


Рис. 2.57. Вікно ППЗ Gran1: введення функції $x^2 + \frac{y^2}{2} - 5^2 = 0$

3. За допомогою опції *Графік-Створити* побудувати графік функції. Отримана лінія – еліпс, канонічне рівняння якого $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{50} = 1$ (рис. 2.58).

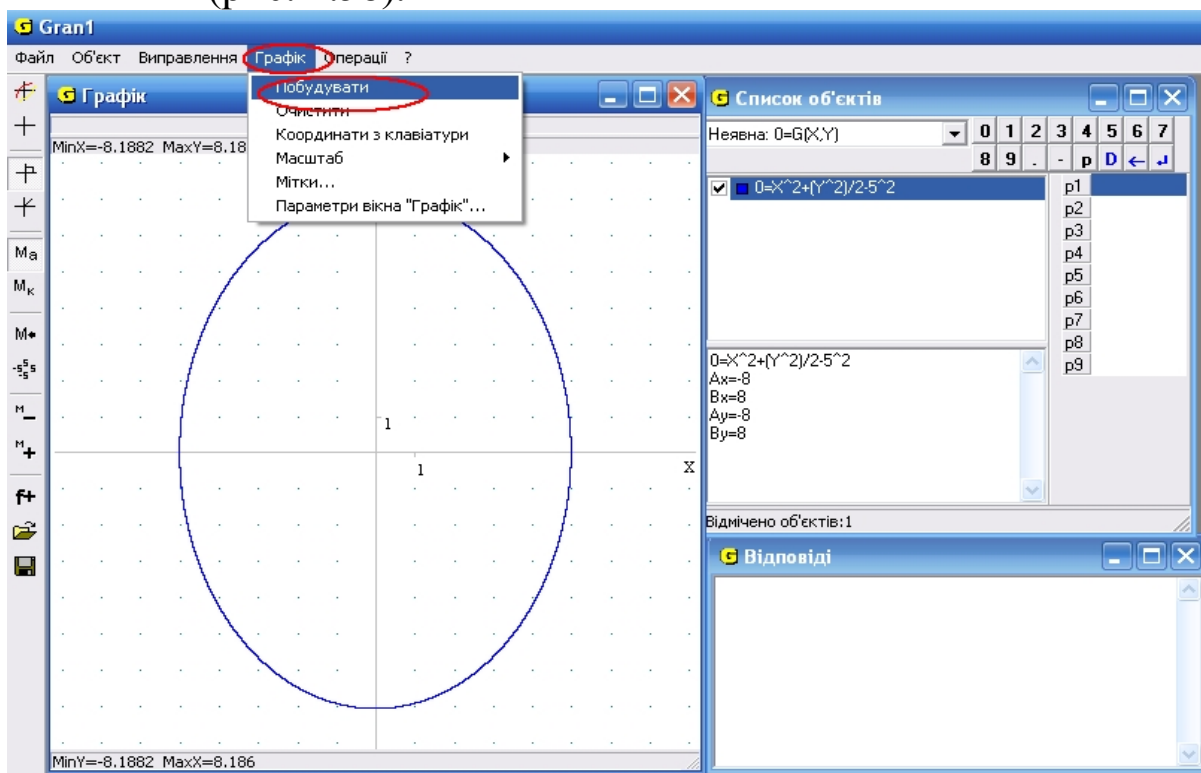


Рис. 2.58. Вікно ППЗ Gran1: побудова лінії еліпса



Моделюємо професійну діяльність інженера

2.21.

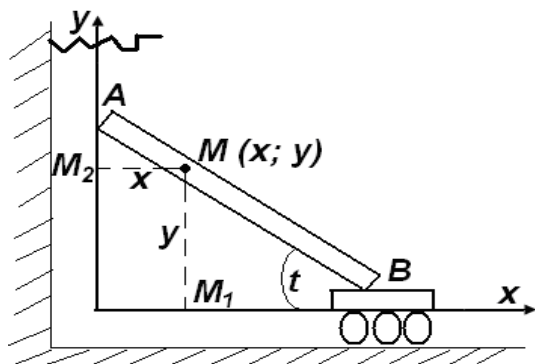


Рис. 2.59. Схема-зображення роботи важкої балки довжиною L

Важку балку довжиною L опускають на землю так, що її нижній кінець прикріплюється, а верхній – утримується канатом, що намотаний на воріт вагонетки (рис.2.59). Яку лінію описує при цьому довільна внутрішня точка $M(x; y)$ балки?



Оберіть ефективний зручний спосіб зображення балки у системі координат таким чином, щоб верхній кінець балки (точка A) ковзав по вісі Oy , а нижній (точка B) – по вісі Ox .

Застосовуйте ППЗ для впровадження схеми в реальне життя та складання рівняння кривої. Для трикутників $\triangle AM_2$, $\triangle BM_1$ скористайтесь співвідношеннями між сторонами й кутами у прямокутному трикутнику.

Відповідь: під час руху балки її довільна точка $M(x, y)$ описує дугу еліпса, що задано рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2.22.

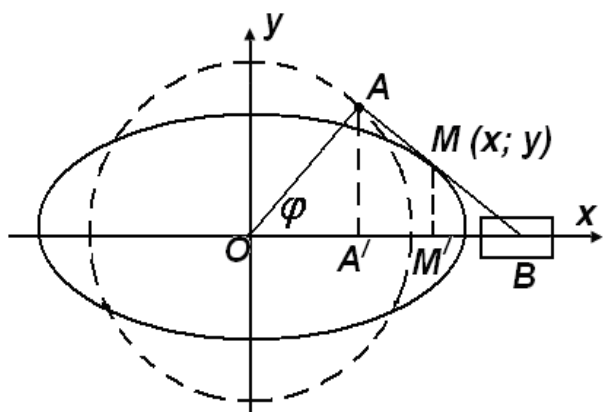
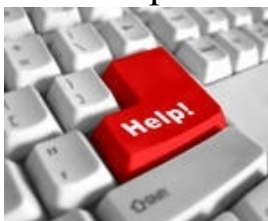


Рис. 2.60. Схема-зображення роботи кривошипу

Кривошип OA обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 10 \text{ рад / с}$ і надає руху повзуну B за допомогою шатуна AB , причому $OA = AB = 80 \text{ см}$ (рис. 2.60). Скласти рівняння траєкторії середньої точки M шатуна й зобразити цю траєкторію на рисунку.



Оберіть ефективний зручний спосіб зображення кривошипу в системі координат. Застосовуйте ППЗ для впровадження схеми в реальне життя та складання рівняння кривої.

Для отримання значень координат середньої точки шатуна $x = OM'$ та $y = MM'$ скористайтесь співвідношеннями між сторонами й кутами у прямокутному трикутнику. Для отримання значення кута φ , що зазначено на схемі, згадайте, що кутова швидкість кривошипу постійна та $\varphi = \omega = 10t$.

Відповідь: траєкторії описує дугу еліпса, що задано рівнянням $\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1$.

2.23.

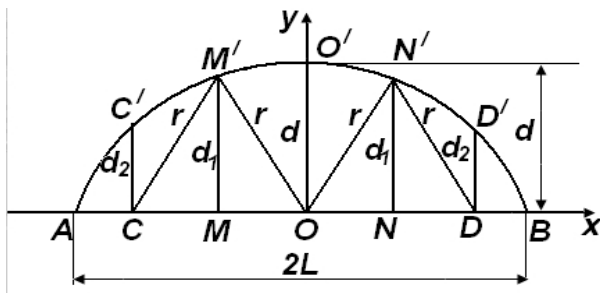


Рис. 2.61. Схема-зображення арки мосту

Арка мосту має форму дуги параболи, вершина якої ділить цю дугу навпіл. П'ять вертикальних стійок, рівновіддалених одна від одної, і чотири розкоси надають конструкції арки необхідну жорсткість.

Скласти рівняння дуги арки, прийнявши за вісь абсцис проліт мосту, а за вісь ординат вісь симетрії параболи (рис. 2.61), знайти довжини стійок і розкосів, якщо відомо, що проліт мосту дорівнює $2L$ і висота підйому арки дорівнює d .



Оберіть ефективний зручний спосіб зображення параболи арки у системі координат таким чином, щоб її вершина знаходилась у точці $O'(0; d)$, вітки напрямлені вниз та перетинали вісь Ox у точках $A(-L; 0)$, $B(L; 0)$.

Для загального рівняння параболи вигляду $x^2 = -2p \cdot (y - d)$, де p – невідомий параметр, скористайтесь умовою проходження параболи через точки A або B . Застосовуйте ППЗ для впровадження схеми в реальне життя та складання рівняння кривої. Для отримання довжин стійок знайдіть ординати точок N' та D' . Довжину розкосу обчисліть за формулою відстані між точками $O(0; 0)$ та $N'(\frac{L}{3}; \frac{8d}{9})$.

Відповідь: рівняння арки мосту $x^2 = -\frac{L^2}{d}y + L^2$; довжини стійок $d_1 = \frac{8d}{9}$, $d_2 = \frac{5d}{9}$; довжина розкосу $r = \frac{1}{9}\sqrt{9 \cdot L^2 + 64 \cdot d^2}$.

2.24.

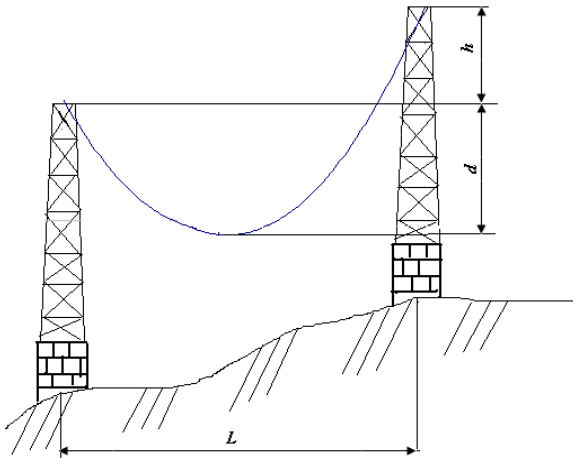


Рис. 2.62. Схема-зображення натягнутого між опорами проводу високовольтної лінії

Натягнутий між опорами провід високовольтної лінії має форму дуги параболи. Знайти рівняння цієї параболи за даними, що зазначено на рисунку 2.62 та записати його при $L = 100$ м, $h = 24$ м та $d = 1$ м.



Оберіть ефективний зручний спосіб зображення параболи проводу між опорами в системі координат таким чином, щоб її вісь симетрії була паралельна вісі Oy та зміщена відносно початку координат вершиною.

Для загального рівняння параболи вигляду $(x - x_0)^2 = 2p \cdot (y - y_0)$, де p – невідомий параметр, скористайтесь умовою проходження параболи через точки $O(0; 0)$ та $A(L; h)$. Враховуючи, що $y_0 = -d$, отримайте систему

рівнянь відносно x_0, p :
$$\begin{cases} x_0^2 = 2pd, \\ (L - x_0)^2 = 2p \cdot (h + d). \end{cases}$$
 Застосовуйте ППЗ для впровадження схеми в реальне життя та складання рівняння кривої.

Відповідь: рівняння параболи
$$\left(x - \frac{50}{3}\right)^2 = \frac{2500}{9}(y + 1).$$

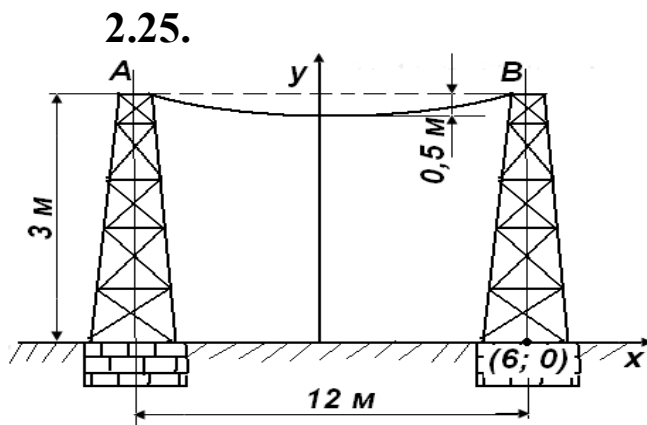


Рис. 2.63. Схема-зображення натягнутого між опорами проводу високовольтної лінії

Припускаючи, що натягнутий між точками A і B провід приблизно має вигляд параболи, знайти за даними ескізу (рис. 2.63) рівняння цієї параболи.



Оберіть ефективний зручний спосіб зображення параболи проводу між опорами в системі координат таким чином, щоб її вісь симетрії співпадала з віссю Oy .

Для загального рівняння параболи вигляду $y^2 = 2p \cdot x$, де p – невідомий параметр, скористайтесь умовою проходження параболи через точки $A(-6; 3)$ та $B(6; 3)$. Застосовуйте ППЗ для впровадження схеми в реальне життя та складання рівняння кривої.

Відповідь: рівняння параболи $y = \frac{1}{72}x^2 + 2,5$.

2.26.

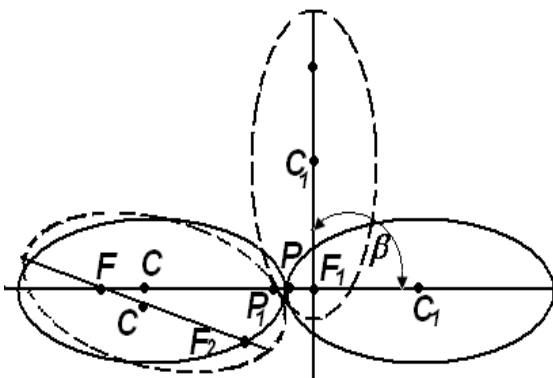


Рис. 2.64. Схема-зображення роботи еліптичні зубчатки у формувальних машинах

У формувальних машинах, стругальних верстатах застосовуються еліптичні зубчатки, в яких по два однакових еліпси із зубцями, що змонтовані на осях та проходять через відповідні фокуси F й F_1 , (рис. 2.64):

- а) показати, що точка дотику P буде завжди лежати на прямій FF_1 , що з'єднує центри обертання;
 б) приймаючи півосі еліпсу $a = 40 \text{ см}$ та $b = 25 \text{ см}$, знайти найбільший і найменший фокальний радіуси дотику;
 в) визначити найбільшу й найменшу лінійні швидкості точки кожного еліпсу, якщо вони роблять по 5 оборотів у хвилину.



Встановіть зв'язки між даними та між даними і вимогами. Представте дані задачі на схемі під час її розроблення. Обидва еліпси при будь-якому положенні будуть дотикатись один одного.

Наявність зубців не допускає ковзання. Під час порівняння довжин P_1F_1 й P_1F_2 та відповідних сум $P_1F + P_1F_1 = 2a$ й $P_1F + P_1F_2 = 2a$ зробіть висновок про належність точки дотику P прямій FF_1 , що з'єднує центри обертання. Для обчислення найбільшого і найменшого фокальних радіусів дотику змодельуйте процес за допомогою ППЗ.

- Відповідь: б) $r_{\text{найб}} = a + c \approx 70 \text{ см}$, $r_{\text{найм}} = a - c \approx 10 \text{ см}$;
 в) $v_{\text{найб}} = \omega \cdot r_{\text{найб}} \approx 35 \text{ см/сек}$, $v_{\text{найм}} = \omega \cdot r_{\text{найм}} \approx 5 \text{ см/сек}$.

2.27.

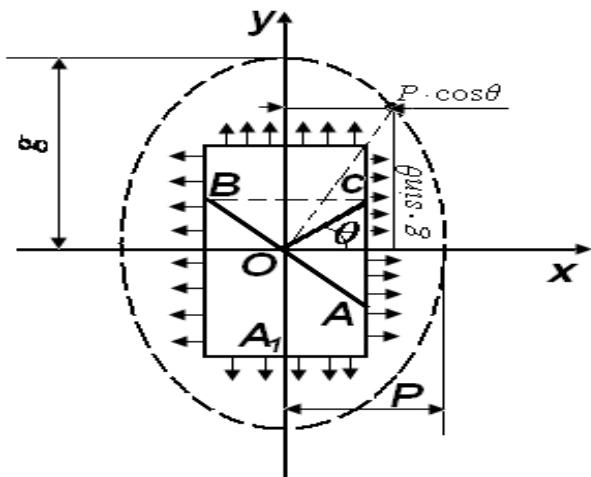


Рис. 2.65. Схема-зображення прямокутного бруса, що піддається розтягання по двох взаємно перпендикулярних напрямках

Прямокутний брус піддається розтягання по двох взаємно перпендикулярних напрямках. Напруги на лівій і правій вертикальних гранях позначимо через P , а на нижній і верхній горизонтальних гранях - через g . Визначити напругу в будь-якому похилому перерізі AB , перпендикуляр до якого створює кут θ з віссю Ox (рис. 2.65). Побудувати годограф векторів напруги навколо точки O .

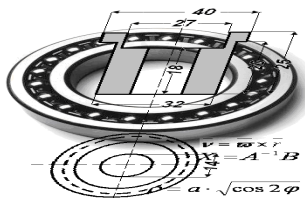


Формулюйте еквівалентну задачу на основі виявленої властивості. Дія зусиль, що розтягують на правій грані, очевидно, відповідає частині АС правої грані, а загальне зусилля, що розтягує, дорівнює $F \cdot P \cdot \cos \theta$,

де $F \cdot \cos \theta$ — площа, що відповідає АС; горизонтальна складова напруги буде $P \cdot \cos \theta$.

Аналогічно можна знайти вертикальну складову $g \cdot \sin \theta$. Розглядаючи їх як проекції векторів на осі координат за допомогою ППЗ і додаючи за правилом паралелограма, одержимо вектор, кінець якого буде мати саме координати $x = P \cdot \cos \theta$, $y = g \cdot \sin \theta$. Геометричним місцем кінців цього вектора буде крива, що називається еліпсом напруги й характеризує напружений стан навколо точки О.

Відповідь: еліпс напруги $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{g^2} = 1$.



Тема 4. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Під час вивчення напруг, що виникають у твердому тілі, користуються поняттям еліпсоїд напруг. Піввісі x , y , z є головною напругою в даній точці.

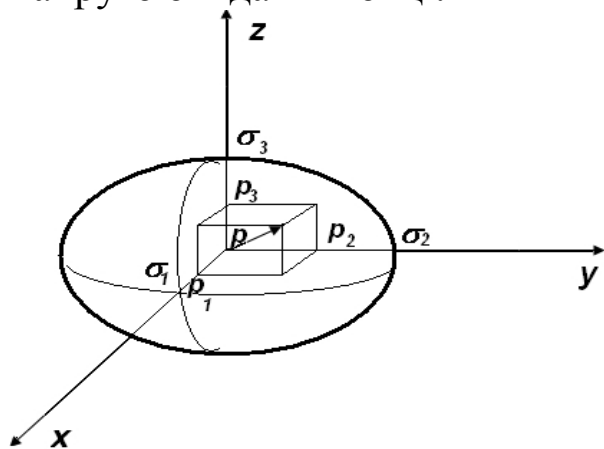


Рис. 2.66. Схема-зображення еліпсоїда напруг

Довжина радіуса-вектора \vec{r} від початку координат до будь-якої точки поверхні представляє значення повної напруги (рис. 2.66). Напрямні косинуси радіуса-вектора \vec{r}

$$\cos \alpha = \frac{p_1}{\sigma_1},$$

рівні відповідно:

$$\cos \beta = \frac{p_2}{\sigma_2}, \quad \cos \gamma = \frac{p_3}{\sigma_3}.$$

Якщо вважати, що $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, то $\frac{p_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_3^2}{\sigma_3^2} = 1$
 Отримане рівняння є рівнянням трьохосного еліпсоїда.



Необхідні знання про рівняння поверхонь другого порядку

Загальне рівняння поверхні другого порядку

Def. Поверхнею другого порядку називають множину точок, координати яких задовольняють рівняння

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0,$$

де хоча б один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля. Таке рівняння називають загальним рівнянням поверхні другого порядку.

Як геометричний об'єкт поверхня другого порядку не зміниться при переході від однієї системи координат до іншої. Існує система координат, в якій рівняння поверхні має найпростіший (канонічний) вигляд.

До поверхонь другого порядку відносять циліндричні, канонічні поверхні, поверхні обертання, сферу, еліпсоїд, однопорожнинний та двохпорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди.

Циліндричні поверхні

Def. Циліндричною поверхнею називають поверхню, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну). Найчастіше розглядають такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать у координатній площині, а твірні паралельні осі, що перпендикулярна до цієї площини. В цьому випадку рівняння циліндричної поверхні збігається з рівнянням її прямої. Наприклад, рівняння

$$f(x, y) = 0$$

описує циліндричну поверхню з прямою у площині Oxy і твірними, паралельними осі Oz .

Циліндричні поверхні, напрямними яких є криві другого порядку, називають *циліндричними поверхнями другого порядку*. Їхні канонічні рівняння такі:

1. *Круговий циліндр* $x^2 + y^2 = R^2$.
2. *Еліптичний циліндр* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 2.67).
3. *Гіперболічний циліндр* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 2.68).
4. *Параболічний циліндр* $y^2 = 2px$ (рис. 2.69).

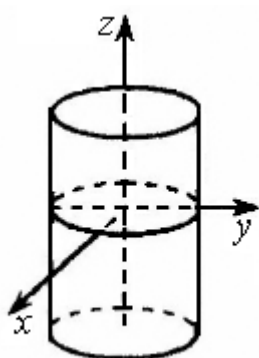


Рис. 2.67.
Зображення
еліптичного
циліндра

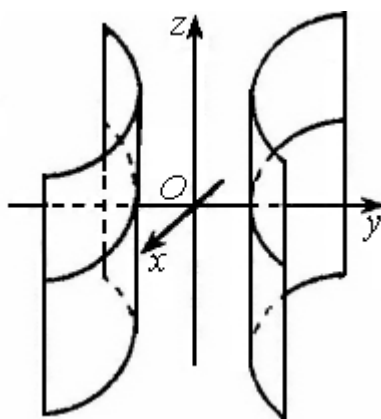


Рис. 2.68.
Зображення
гіперболічного
циліндра

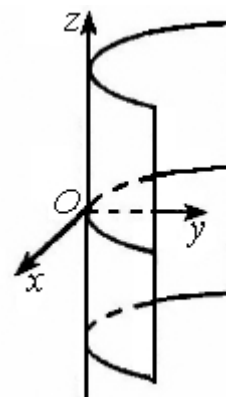


Рис. 2.69.
Зображення
параболічного
циліндра

Конічна поверхня

Def. *Конічною поверхнею* називають поверхню, утворену множиною всіх прямих (твірних), які проходять через фіксовану точку (вершину) і перетинають задану плоску криву (напрямну), причому вершина не належить напрямній. Канонічне рівняння еліптичного конуса (рис. 2.70) має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Переріз даного конуса площиною $z = z_0 \neq 0$ є еліпсом, а площиною $z = 0$ – точка $(0; 0; 0)$ (вершина конуса).

У випадку $a = b = c$ маємо *прямий круговий конус* $x^2 + y^2 = z^2$.

Сфера

Def. Сферою називають поверхню, утворену обертанням кола (півкола) навколо його діаметра.

Рівняння сфери з центром у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і радіусом R має вигляд

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Якщо центр сфери – початок координат, то маємо канонічне рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Еліпсоїд

Def. Поверхню, задану рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

називають еліпсоїдом (рис. 2.71).

Тут $a, b, c > 0$ – задані півосі еліпсоїда. Зокрема, у випадку $a = b$ маємо еліпсоїд обертання $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, який одержується обертанням навколо осі Oz еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

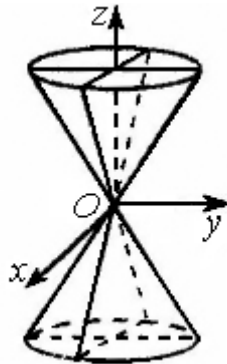


Рис. 2.70. Зображення еліптичного конуса

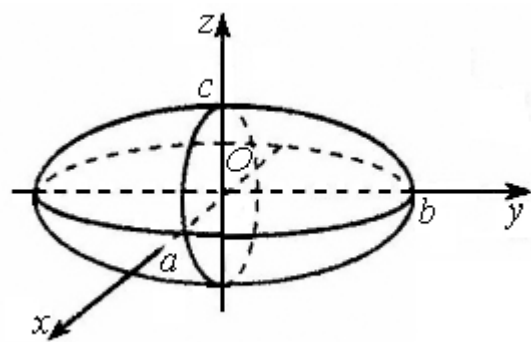


Рис. 2.71. Зображення еліпсоїда

Однопорожнинний гіперболоїд

Def. Однопорожнинним гіперболоїдом називають поверхню (рис. 2.72), яку описує рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Зокрема, у випадку $a=b$ маємо однопорожнинний гіперболоїд обертання, який утворюється обертанням навколо осі

Oz гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, що лежить у площині Oxy .

Переріз однопорожнинного гіперболоїда площиною $z = z_0$ є еліпсом, а площинами $x = x_0$ або $y = y_0$ – гіперболами.

Відзначимо, що через кожну точку будь-якого однопорожнинного гіперболоїда проходить деяка пряма, яка повністю належить цьому гіперболоїду.

Двопорожнинний гіперболоїд

Def. Двопорожнинним гіперболоїдом називають поверхню (рис. 2.73), яку описує рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Еліптичний параболоїд

Def. Еліптичним параболоїдом називають поверхню (рис. 2.74), канонічне рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (p, q > 0).$$

За умови $p=q$ маємо круговий параболоїд $x^2 + y^2 = 2pz$, утворений обертанням параболи $x^2 = 2pz$, що лежить у площині Oxz , навколо осі Oz .

Точка $(0; 0; 0)$ – вершина еліптичного параболоїда.

Переріз еліптичного параболоїда площиною $z = z_0 > 0$ є еліпсом, а площинами $x = x_0$ або $y = y_0$ – параболлами.

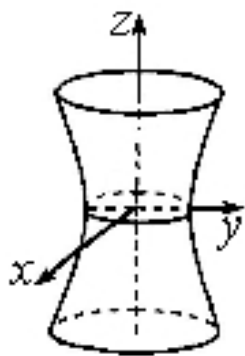


Рис. 2.72.
Зображення
однопорожнинного
гіперболоїда

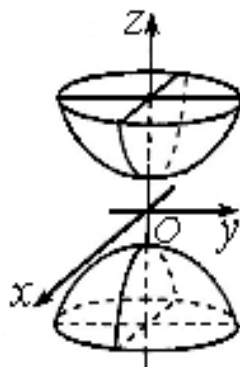


Рис. 2.73.
Зображення
двопорожнинного
гіперболоїда

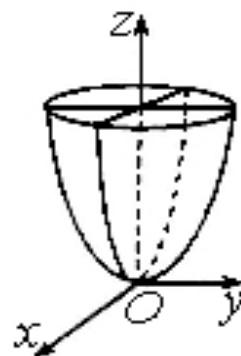


Рис. 2.74.
Зображення
еліптичного
параболоїда

Гіперболічний параболоїд

Def. Гіперболічним параболоїдом називають поверхню (рис. 2.75), канонічне рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (p, q > 0).$$

Цю поверхню ще називають *сідлоподібною поверхнею*.

Переріз гіперболічного параболоїда площиною $z = z_0 \neq 0$ є гіперболою; площиною $z = 0$ – парою паралельних прямих; площинами $x = x_0$ або $y = y_0$ – парабололами.

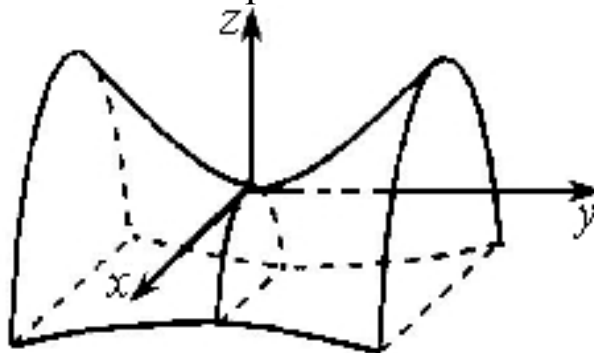


Рис. 2.75. Зображення гіперболічного параболоїда



Будуємо зображення поверхонь другого порядку за допомогою ППЗ *Gran3d, Derive, Mathcad, Maple, Mathematica*

Процедура побудови зображення поверхонь другого порядку за допомогою відповідних правил.

2.28. У різних інженерних спорудженнях застосовуються конструкції у формі еліпсоїдів, гіперболоїдів і параболоїдів. Так наприклад, насос перистальтичного типу включає еластичний насосний елемент, одна з дотичних поверхонь якого виконана у вигляді поверхні другого порядку, що може бути визначена наступним рівнянням:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1; & \text{б)} \quad x^2 - \frac{z^2}{16} = 1; \\ \text{в)} \quad 4x^2 + y^2 = 4z; & \text{г)} \quad \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 0. \end{array}$$

Вкажіть поверхню, що визначають ці рівняння.

Розв'язання:

а) рівняння $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ визначає еліпсоїд обертання, утворений обертанням еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ навколо осі Oy ;

б) задане рівняння визначає гіперболічний циліндр, твірні якого паралельні осі Oy ;

в) запишемо рівняння у вигляді $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$. Отже, маємо еліптичний параболоїд з віссю симетрії Oz ;

г) рівняння $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 0$ задає круговий конус з віссю симетрії Ox .

2.29. Механізм, що застосовує принцип перистальтичного руху, має рівняння поверхні $3x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 18x + 8y + 32z - 1 = 0$.

Зведіть це рівняння до канонічного вигляду та визначте, яку поверхню воно задає.

Розв'язання. Виконаємо перетворення лівої частини рівняння, виділивши повні квадрати:

$$\begin{aligned} & 3x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 18x + 8y + 32z - 1 = \\ & = 3(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 2y + 1) - 8(z^2 - 4z + 4) - 1 - 27 - 4 + 32 = \\ & = 3(x - 3)^2 + 4(y + 1)^2 - 8(z - 2)^2. \end{aligned}$$

Отже, дане рівняння набирає вигляду

$$3(x - 3)^2 + 4(y + 1)^2 - 8(z - 2)^2 = 0,$$

звідси після ділення обох частин рівняння на 24 дістанемо

$$\frac{(x - 3)^2}{8} + \frac{(y + 1)^2}{6} - \frac{(z - 2)^2}{3} = 0.$$

Запровадивши нові змінні $\bar{x} = x - 3$, $\bar{y} = y + 1$, $\bar{z} = z - 2$, дістанемо канонічне рівняння

$$\frac{\bar{x}^2}{8} + \frac{\bar{y}^2}{6} - \frac{\bar{z}^2}{3} = 0,$$

геометричним образом якого у системі координат $Oxyz$ є конус з вершиною у точці $(3; -1; 2)$.

Процедура побудови еліпсоїду обертання за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Gran3D.



«Навчаємо» свій комп'ютер побудові еліпсоїду обертання за допомогою ППЗ Gran3D.

До завдання 2.28 а) розглянемо процедуру побудови еліпсоїда.

1. Відкрити вікно ППЗ Gran3D.
2. За допомогою опції *Об'єкт-Створити-Поверхня обертання* викликати меню *Конструювання об'єкта*:
 - обрати тип залежності $y = f(x)$;
 - обертання навколо осі Oy ;

- ввести складові кривої еліпсу $y = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$ та її симетричну $y = -3 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$;
- ввести інтервали, на яких Вас цікавить зображення поверхні й натисніть *Виконати*.

3. Отримати зображення еліпсоїда $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ (рис. 2.76).

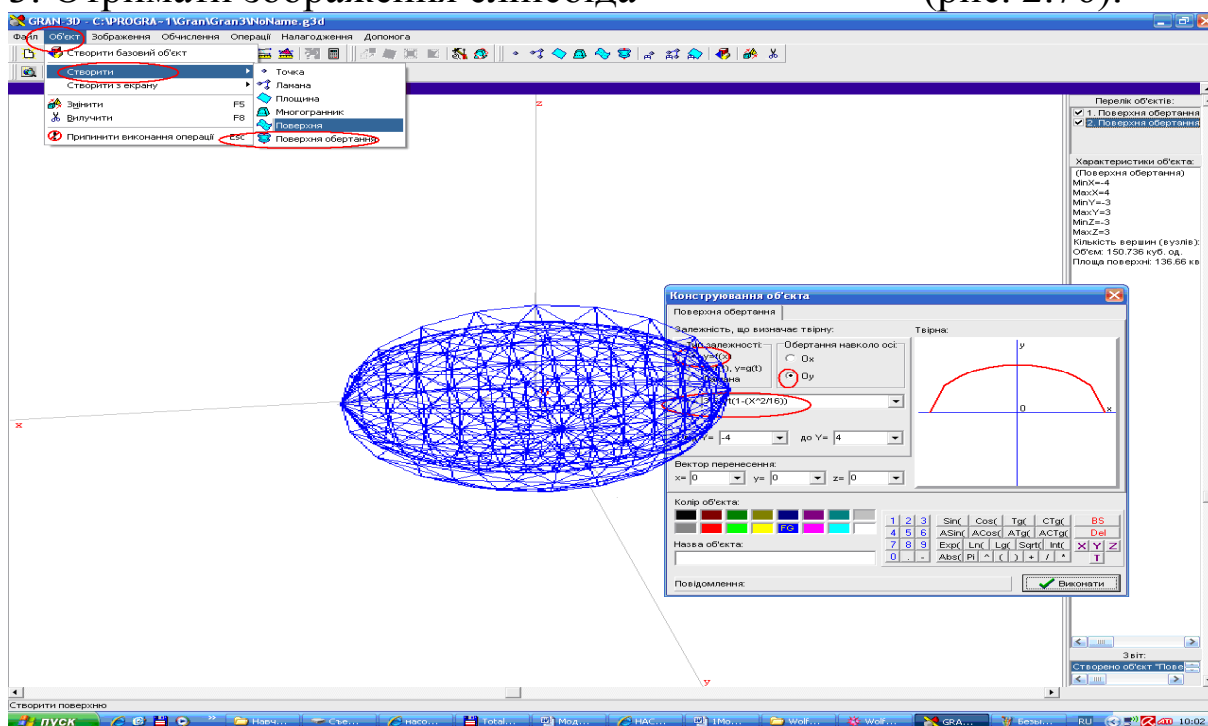


Рис. 2.76. Вікно ППЗ Gran3D: зображення еліпсоїда

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

Процедура побудови гіперболічного циліндру за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathcad.



«Навчаємо» свій комп'ютер побудові гіперболічного циліндру за допомогою ППЗ Mathcad.

До завдання 2.28 б) розглянемо процедуру побудови гіперболічного циліндру.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathcad.
2. За допомогою опції Вид – Панелі інструментов – Графики та Вид – Панелі інструментов – Вычисление винести на панель інструментів вкладки (рис. 2.77):



та

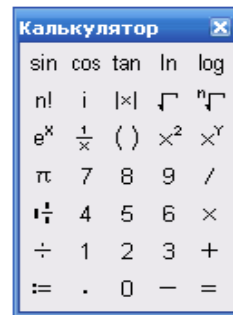




Рис. 2.77. Вкладки панелі інструментів

3. Ввести рівняння поверхні у вигляді $f(x, y) := x^2 - \frac{z^2}{16} - 1$, обрати на вкладках панелі інструментів побудову поверхні .
4. Після отримання у полі програми зображення декартової системи координат, заповнити мітку лівого кута  назвою відповідної функції f .
5. Отримати зображення гіперболічного циліндру $x^2 - \frac{z^2}{16} = 1$, твірні якого паралельні осі Oy (рис. 2.78).

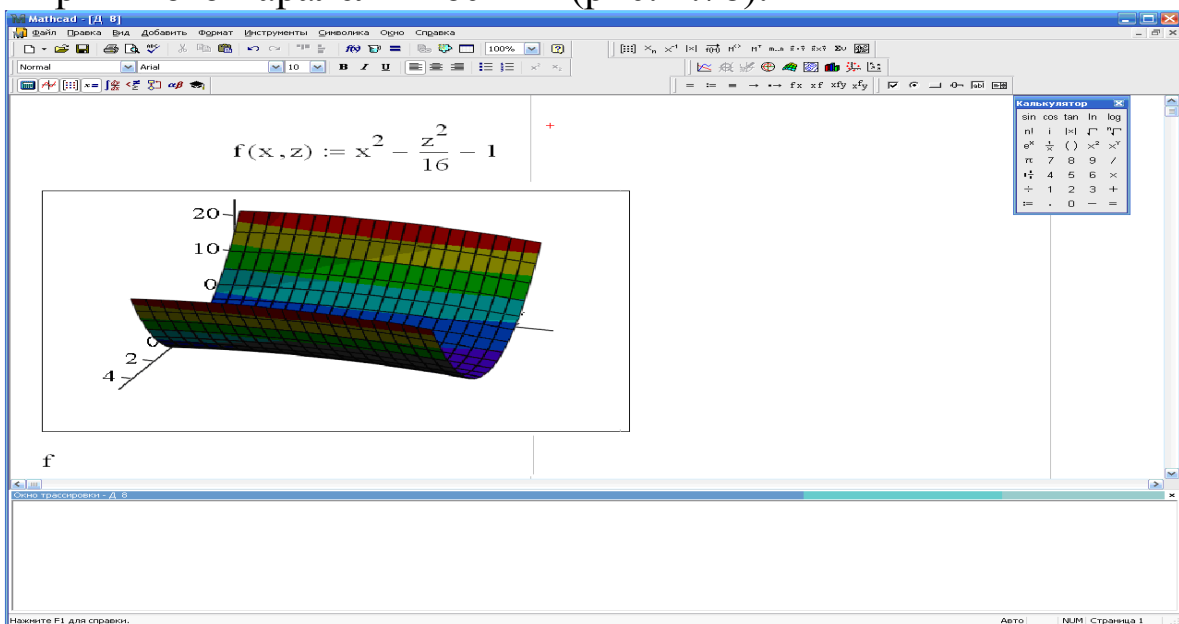


Рис. 2.78. Вікно ППЗ Mathcad: зображення

гіперболічного циліндра $x^2 - \frac{z^2}{16} = 1$

Процедура побудови еліптичного параболоїду за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Derive.



«Навчаємо» свій комп'ютер побудові еліптичного параболоїда за допомогою ППЗ Derive.

До завдання 2.28 в) розглянемо процедуру побудови еліптичного параболоїда.

1. Відкрити вікно ППЗ Derive.
2. За допомогою опції *Author-Function Definition* ввести змінні

name(x, y, z) та рівняння поверхні у вигляді $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$.

3. За допомогою опції *Insert-3D plot Object* отримати у полі програми зображення декартової системи координат (рис. 2.79).

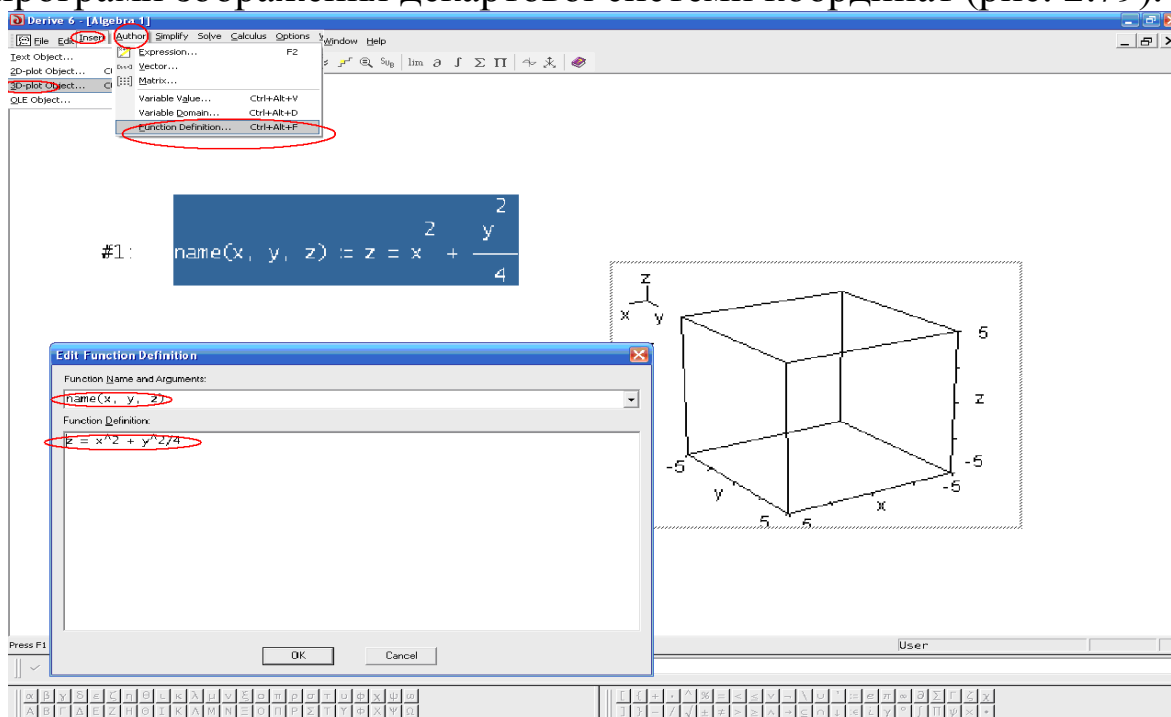


Рис. 2.79. Вікно ППЗ Derive: введення рівняння та декартової системи координат

4. За допомогою опції *Insert-Plot...* отримати зображення еліптичного параболоїда $4x^2 + y^2 = 4z$ з віссю симетрії Oz (рис. 2.80).

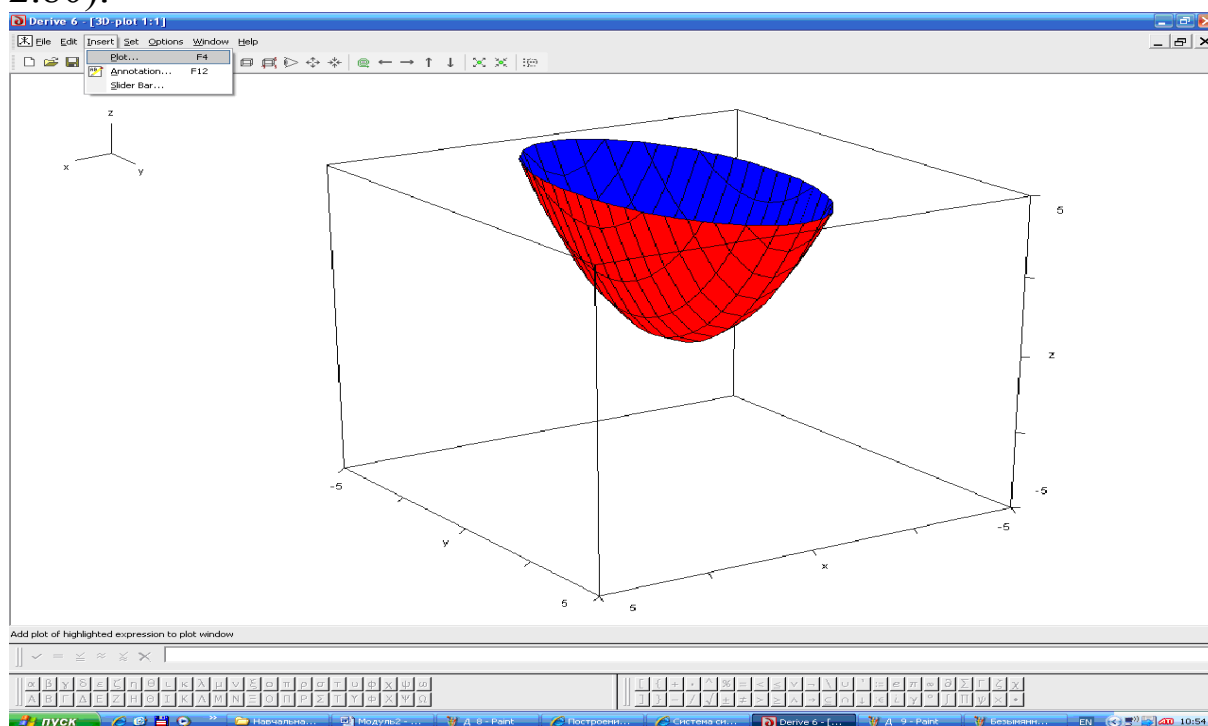


Рис. 2.80. Вікно ППЗ Derive: зображення еліптичного параболоїда $4x^2 + y^2 = 4z$

Процедура побудови кругового конусу за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Maple.



«Навчаємо» свій комп'ютер побудові кругового конусу за допомогою ППЗ Maple.

До завдання 2.28 г) розглянемо процедуру побудови кругового конуса.

1. Відкрийте вікно ППЗ Maple.
2. За допомогою опції *Insert-Execution Grope-Before Cursor* отримати у полі програми мітку \triangleright .
3. Активізувати зліва вкладки *Expression* й *Common Symbols* та з отриманих шаблонів ввести в окремих дужках складові функції

$z = f(x, y)$ й $z = -f(x, y)$, тобто $3 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}$ та її симетричну $-3 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}$.

4. В кожні дужці зазначити інтервали, на яких Вас цікавить зображення поверхні та за допомогою команди $orientation = [\alpha, \beta]$ вкажіть значення кутів, під якими краще розглянути зображення.

5. Вказати про сумісне зображення обох складових графіка у полі програми за допомогою команди $plots[display3d]({P1, P2})$.

4. Натиснути клавішу *Enter* та отримати зображення кругового конуса $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 0$ (рис. 2.81).

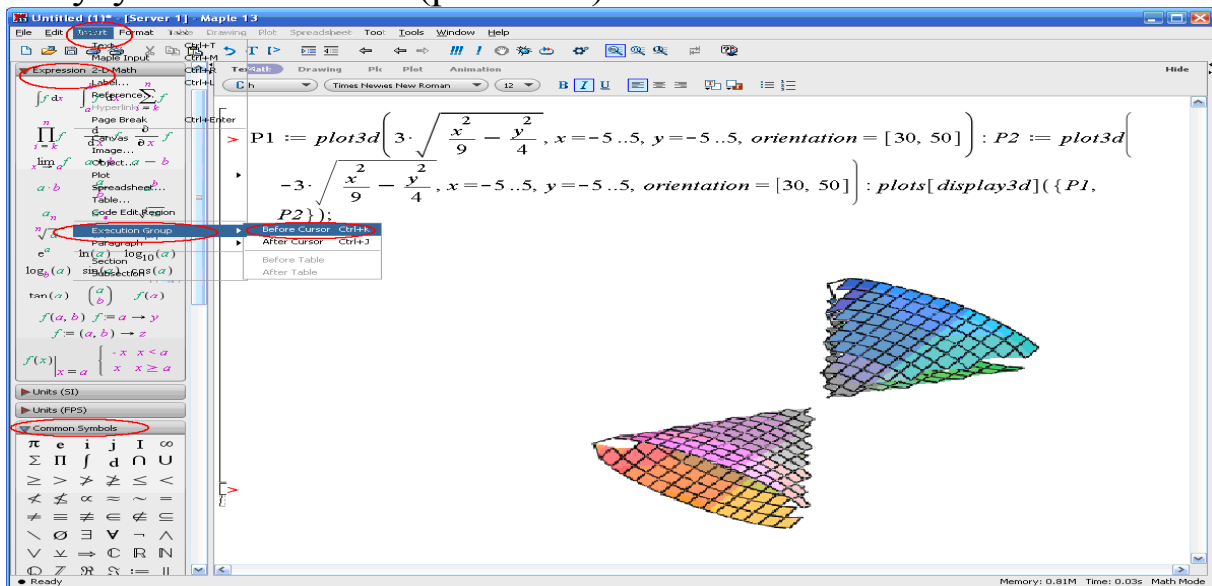


Рис. 2.81. Вікно ППЗ Maple : зображення кругового конуса

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 0$$

Процедура побудови поверхні за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathematica.



«Навчаємо» свій комп'ютер побудові поверхні за допомогою ППЗ Mathematica.

До завдання 2.29 розглянемо процедуру побудови поверхні.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathematica.

- За допомогою опції *Palettes-Classroom Assistant* викликати вкладки із шаблонами для набору символів.
- Активізувати поле програми за допомогою опції *Graphics-New Graphics*(рис. 2.82).

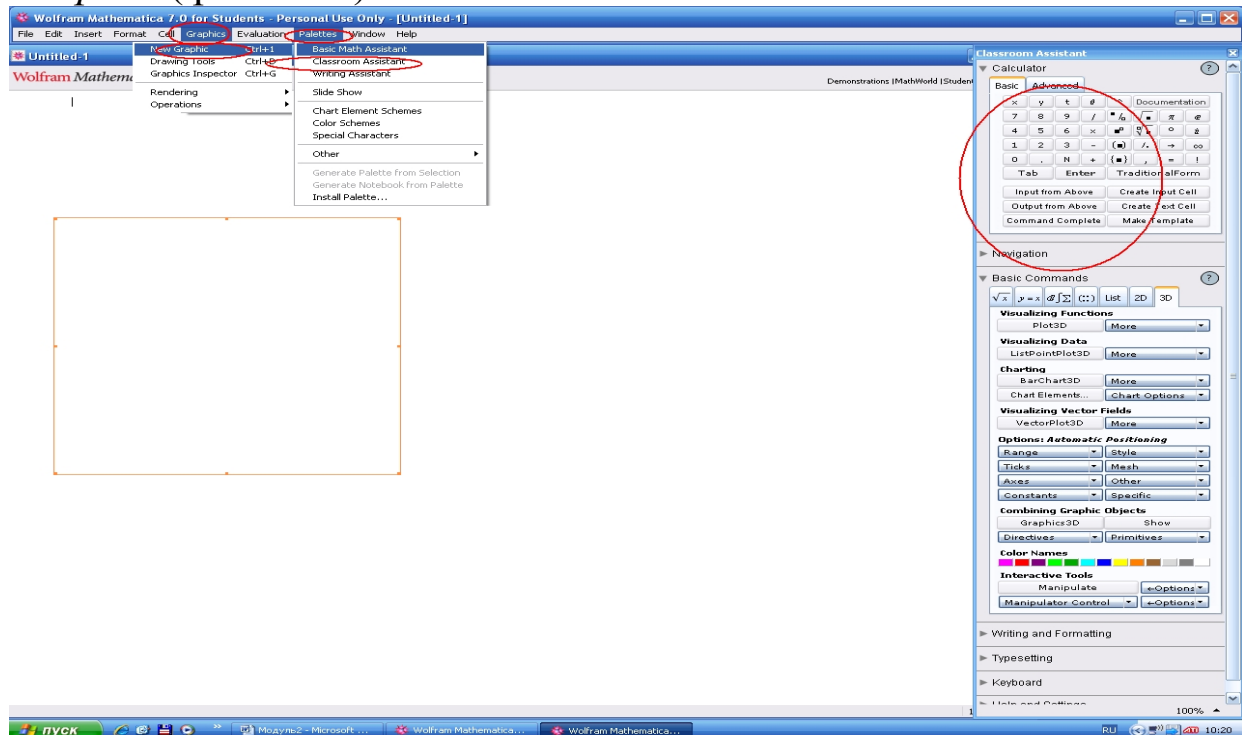

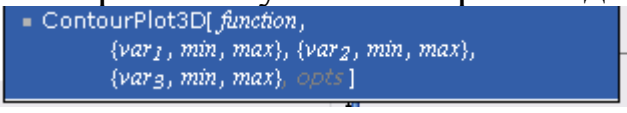




Рис. 2.82. Вікно ППЗ Mathematica: поле програми

- У вкладці *Classroom Assistant* знайти меню *Basic Commands* й активізувати кнопку . В отриманому вікні вибрати відповідно *Plot3D-More* шаблон  (рис. 2.83).

- Після введення за допомогою шаблонів $3x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 18x + 8y + 32z - 1 == 0$ зазначити інтервали, на яких Вас цікавить зображення поверхні та за допомогою опції *Evaluation-Evaluate Cells* викликати із мітками  і  побудову її графіка.

- Отримати зображення конусу з вершиною у точці $(3; -1; 2)$ (рис. 2.84).



Моделюємо професійну діяльність інженера

2.30. Дзеркальна поверхня прожектора утворена обертанням параболі навколо її осі симетрії. Діаметр дзеркала 80 см , глибина 10 см . Скласти рівняння поверхні, вибравши систему координат так, щоб її початок збігався з вершиною параболі, вісь ординат пройшла по дотичній до неї, а вісь абсцис – через фокус параболі в напрямку від вершини.



Переформулюйте умову на математичну. Складіть рівняння поверхні, підставляючи значення відповідних координат у загальне

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

рівняння канонічної поверхні

Застосовуйте ППЗ для моделювання поверхні, що отримана обертанням параболі навколо її осі симетрії.

Відповідь: рівняння поверхні $160 \cdot x^2 - y^2 - z^2 = 0$.

2.31. Резервуар охолоджувальної башти має форму кулі, що описується рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Промені Сонця, що висвітлюють резервуар, паралельні прямій $x = 0, y = z$. Знайти форму тіні резервуара на площині xOy .



Моделюйте умову завдання за допомогою ППЗ. Форма тіні резервуара визначається перетинанням циліндричної поверхні, що утворена променями, дотичними до поверхні кулі, із площиною xOy .

Складемо рівняння циліндричної поверхні за алгоритмом. Знайдіть лінію перетинання кулі із площиною, що проходить через центр кулі перпендикулярно до променів, та описувана

рівняннями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

Для довільної точки $M'(x', y', z')$, що належить напрямній лінії циліндричної поверхні складемо рівняння твірної, що має

вигляд
$$\frac{x-x'}{0} = \frac{y-y'}{1} = \frac{z-z'}{1}.$$

Підставимо координати точки $M'(x', y', z')$ у систему рівнянь, якій вона задовольняє
$$\begin{cases} (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 4, \\ y' + z' = 2. \end{cases}$$
 Виключаючи значення координат точки $M'(x', y', z')$ з систем рівнянь отримаємо шукане рівняння циліндричної поверхні $2x^2 + (y - z + 2)^2 = 8$, для якого $z = 0$.

Відповідь: тінь від резервуара на площину xOy має еліптичну форму
$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{8} = 1.$$

2.32. Дах павільйону має форму коноїда, що задано рівнянням $(a^2 - x^2) \cdot y^2 = h^2 \cdot z^2$. Дослідити поверхню даху по її перерізах площинами $z = 0$, $y = h$, $x = \pm c$, ($c \leq a$) й зобразити її на рисунку в області $z \geq 0$.

Коніодом називається поверхня, що створено рухом прямої, що паралельна даній площини й перетинає задані криву й пряму.



Моделуйте умову завдання за допомогою ППЗ. Для спрощення моделювання візьміть постійні значення a та h . Розгляньте моделі при $z = 0$, $y = h$, $x = \pm c$, ($c \leq a$) для дослідження поверхні даху по її перерізах площинами й зображення її в області $z \geq 0$.

2.33. У різних інженерних спорудженнях застосовуються конструкції у формі еліпсоїдів, гіперболоїдів і параболоїдів. Розглянемо один з можливих варіантів реалізації механізму, що використовує принцип перистальтичного руху, для переміщення твердих і тістоподібних матеріалів у трубопроводі на основі моделі поверхні другого порядку, що може бути визначена наступним рівнянням:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = -1; \quad \text{б)} \quad x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = -1; \quad \text{в)} \quad z^2 - y^2 = x; \\ \text{г)} \quad & x^2 + z^2 - 1 = 0; \quad \text{д)} \quad x^2 + y^2 - z^2 - 6x - 2y - 2z + 9 = 0. \end{aligned}$$

Вкажіть поверхню, що визначають ці рівняння.



Модельуйте умову завдання за допомогою ППЗ. Побудуйте поверхню, що визначає кожне з заданих рівнянь та за отриманою моделлю визначте її вид.

2.34. Написати рівняння прямолінійних твірних, на яких розташовані балки металевої опори, виконаної у вигляді однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, якщо ці твірні перетинається в точці $A(2; 4; 4)$.



Модельуйте умову завдання за допомогою ППЗ. Побудуйте однопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ за допомогою ППЗ. Візьміть точки, що належать моделі гіперболоїду та підставте у загальне рівняння прямої.

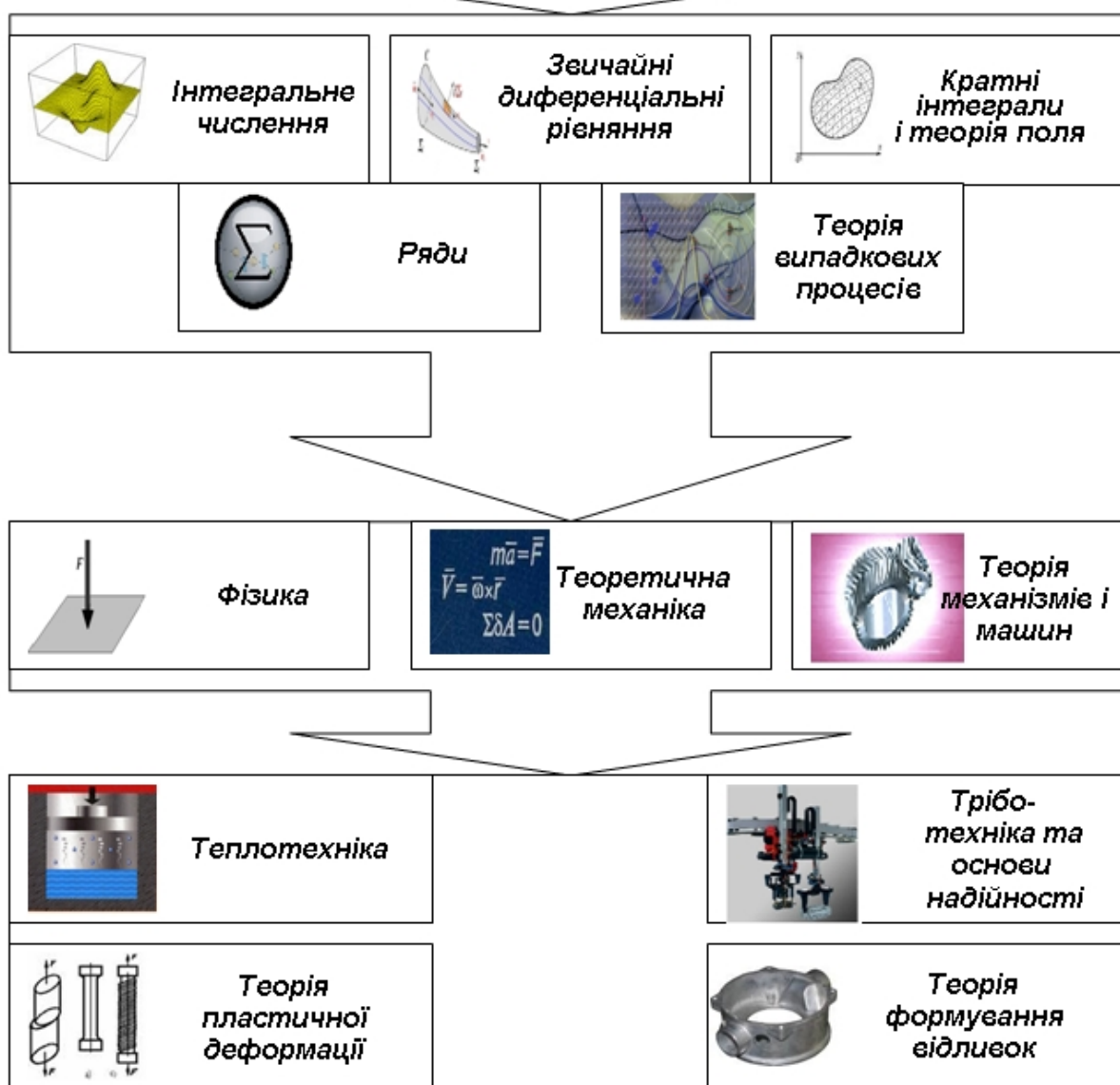
Відповідь: рівняння прямолінійних твірних, на яких розташовані балки металевої опори:
 $x + y - z - 2 = 0, \quad x - y + z - 2 = 0, \quad 3x + y - 3z + 2 = 0,$
 $x - 3y + z + 6 = 0.$



Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної

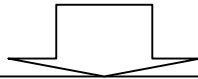
Модуль 3

Тема1. Множини. Функції. Послідовності.
Тема 2. Границя функції.
Тема3. Неперервність функції.
Тема 4. Похідна функції.
Тема5. Диференціал функції.
Тема6. Застосування похідної до дослідження функцій.



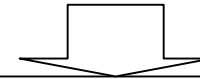
ВМІННЯ, НА ЯКИХ БАЗУЄТЬСЯ ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ

Виконувати усні і письмові обчислення; виконувати перетворення цілих, раціональних, ірраціональних виразів; задавати функцію; знаходити область визначення й область значення функції; знаходити границю функції неперервного аргументу; будувати графіки функцій, застосовувати їх властивості; обчислювати значення функції у точці; знаходити похідні елементарних функцій, похідну складеної функції, похідні вищих порядків; досліджувати функцію за допомогою похідної; розв'язувати задачі за допомогою похідної; розв'язувати лінійні, раціональні, ірраціональні, трансцендентні рівняння та їх системи; застосовувати співвідношення між сторонами й кутами в прямокутному трикутнику, формули площ фігур та об'ємів геометричних тіл.



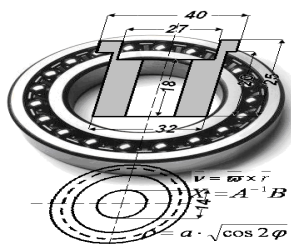
ВМІННЯ, ЯКІ ФОРМУЮТЬСЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ

Проводити найпростіші дослідження елементарних функцій (область визначення, множина значень, зростання, спадання функції, знаходження оберненої функції тощо); будувати графіки елементарних функцій; обчислювати границі; досліджувати функції на неперервність; знаходити похідні функції; розв'язувати задачі з використанням геометричного і фізичного змісту похідної; знаходити інтервали зростання і спадання функції, локальний екстремум; знаходити інтервали опуклості, вгнутості і точки перегину; знаходити асимптоти графіка функції; будувати графіки функцій; застосовувати ППЗ Mathcad, Derive, Gran2D, Gran3D, Maple, Mathematica для дослідження й побудови графіків функцій та послідовностей, для обчислення границь, похідних й диференціалів.



ВМІННЯ, ЩО НАБУВАЄ СТУДЕНТ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ІНЖЕНЕРНИХ ДИСЦИПЛІН

Визначати швидкість та прискорення руху тіл й окремих їх точок; визначати за законом руху тіла або точки сили, що спричинили цей рух (I задача динаміки); обчислювати характеристики електричних і магнітних полів; визначати магнітний потік поля; застосовувати закон Фарадея для електромагнітної індукції; розв'язувати системи рівнянь Максвела для електромагнітного поля; визначати швидкість й прискорення ланок механізму методом кінематичних діаграм; використовувати залежність між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження (теорема Журавського).



Тема 1. МНОЖИНИ. ФУНКЦІЇ. ПОСЛІДОВНОСТІ. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Як записати вираз для миттєвого значення напруги, яка задана графіком (рис. 3.1). Задані деякі значення синусоїдального току за деякий момент часу (рис. 3.2). Чи можна визначити по заданих значеннях інші показники, що отримані через деякий час?

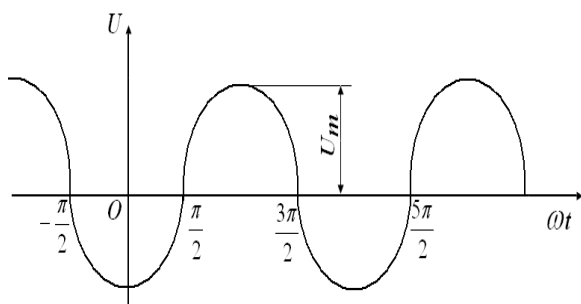


Рис 3.1. Графік функціональної залежності миттєвого значення напруги

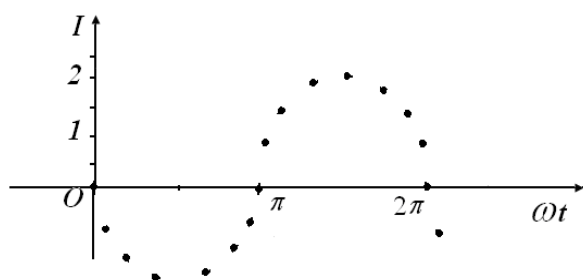


Рис 3.2. Точечний графік послідовності значень синусоїдального току за деякий момент часу

На ці питання можна відповісти, якщо мати уявлення про поняття функція та послідовність.



Необхідні знання про поняття множини та числові множини

Поняття множини є одним з найважливіших у математиці. Воно належить до понять, яким не можна дати строге означення. Під множиною розуміють сукупність (сімейство, набір) деяких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою.

Приклади множин: множина всіх натуральних чисел, множина студентів першого курсу, множина розв'язків заданого рівняння, множина міст країни тощо.

Def. Об'єкти, з яких складається множина, називають її *елементами*. Множини позначають великими буквами латинського алфавіту A, B, C, \dots , а елементи – малими буквами a, b, c, \dots .

Якщо елемент x належить множині X , то пишуть $x \in X$; запис $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X .

Множина вважається заданою, якщо відома характеристика, за якою про кожен елемент можна сказати, належить він множині чи ні.

Множину, яка містить скінченне число елементів називають скінченною. Запис $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ означає, що множина X скінченна і містить n елементів. Множину $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, яка містить нескінченне число елементів, називають *нескінченною*. Наприклад, множина всіх цілих чисел нескінченна.

Def. Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою* і позначають символом \emptyset . Наприклад, множина всіх дійсних коренів рівняння $x^2 + 2x + 3 = 0$ є порожньою.

Множину A називають підмножиною множини B , якщо кожен елемент множини A є елементом множини B , і позначають $A \subset B$ або $B \supset A$.

Множини A і B рівні ($A = B$), якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, іншими словами, ці множини складаються з однакових елементів.

Def. Об'єднанням (сумою) множин A і B називають множину, що складається з елементів, кожен з яких належить або множині A , або множині B . Позначення: $A \cup B$ або $A + B$. Отже,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ або } x \in B$$

Def. Перерізом (добутком) множин A і B називають множину, що складається з елементів, кожен з яких належить множині A і множині B . Позначення $A \cap B$ або AB . Отже,

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \in B.$$

Def. Різницею множин A і B називають множину $A \setminus B$, яка складається з елементів, кожен з яких належить множині A , і не належить множині B . Отже,

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \notin B.$$

Наприклад, якщо $A = \{x: 0 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x: 3 \leq x \leq 7\}$, то
 $A \cup B = \{x: 0 \leq x \leq 7\}$, $A \cap B = \{x: 3 \leq x \leq 4\}$, $A \setminus B = \{x: 0 \leq x \leq 3\}$.

Def. Множини, елементами яких є числа, називають *числовими*. Назвемо основні числові множини:

1) множина натуральних чисел $N = \{1; 2; \dots; n, \dots\}$;

2) множина цілих невід'ємних чисел $Z_0 = \{0; 1; 2; \dots; n, \dots\}$;

3) множина цілих чисел $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm n, \dots\}$;

4) множина раціональних чисел $Q = \left\{ \frac{m}{n}, m \in Z; n \in N \right\}$;

5) множина дійсних чисел R .

Між цими множинами існує зв'язок

$$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R.$$

Множина дійсних чисел R складається з раціональних і ірраціональних чисел. Всяке раціональне число можна подати у вигляді або скінченного десяткового дробу, або нескінченного періодичного дробу.

Ірраціональне число – це нескінченний неперіодичний дріб.



Згадаємо про поняття функції

Def. Якщо кожному значенню змінної x , що належить множині дійсних чисел D , за певним правилом ставиться у відповідність єдине число y , що належить множині дійсних чисел E , то кажуть, що y є функцією від x і пишуть $y = f(x)$.

Змінну $x \in D$ називають незалежною змінною (*аргументом*) функції f , а змінну $y \in E$ – залежною змінною (*функцією*): під символом f розуміють правило, за яким кожному x відповідає y , або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Def. Множину D називають *областю визначення* функції $f(x)$ та позначають $D(f)$, а множину E – *областю зміни* (або *множиною значень*) функції $f(x)$.

Наведене значення функції є окремим випадком більш загального означення функції.

Задамо дві не порожні множини X і Y . Відповідність f , яка кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність один і тільки один елемент $y \in Y$, називають функцією і пишуть $X \xrightarrow{f} Y$ або $f: X \rightarrow Y$.

Тут X - область визначення функції f , Y - множина значень функції f . Якщо елементами множин X і Y є дійсні числа, то дістанемо перше означення. В цьому випадку функцію f називають числовою. Надалі будемо користуватися першим означенням.

Def. Графіком функції $y = f(x)$ називають множину всіх тих і тільки тих точок (x, y) площини Oxy , які задовольняють рівність $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

Основні способи завдання функції:

- 1) *аналітичний* (функцію задають за допомогою однієї або кількох формул чи рівнянь);
- 2) *табличний* (виписують ряд числових значень незалежної змінної x і відповідних їм значень функції y);
- 3) *графічний*.



Згадаємо про поняття оберненої функції

Задамо функцію $y = f(x)$, що відображає множину D у множину E та є взаємно однозначною, тобто для будь-яких значень x_1 і $x_2 \in D$ таких, що $x_1 \neq x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тоді функцію $x = \phi(y)$, що відображає множину E в множину D , називають *оберненою* до заданої функції $f(x)$. Для того, щоб знайти функцію, обернену до даної $y = f(x)$, потрібно з цієї рівності виразити x через y (якщо це можливо).

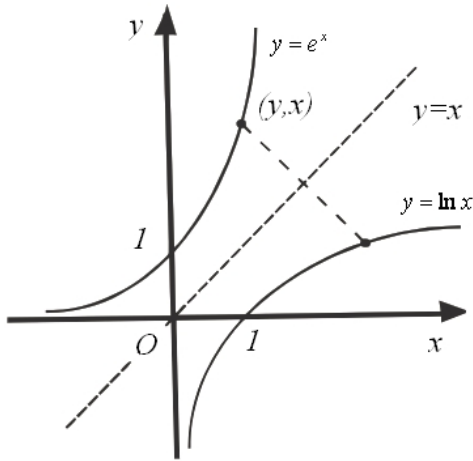


Рис 3.3. Графіки функцій $y = e^x$ і $y = \ln x$

Якщо функції $y = f(x)$ і $x = \phi(y)$ взаємно обернені, то графіком їх є одна і та сама крива. Але якщо аргумент оберненої функції позначимо знову через x , а функцію – через y , то графіки функцій $y = f(x)$ і $y = \phi(x)$ будуть симетричними відносно бісектриси першого і третього координатних кутів. Наприклад, функції $y = e^x$ і $y = \ln x$ взаємно обернені (рис. 3.3).



Згадаємо про основні характеристики функції

Def. Функцію $y = f(x)$ називають *парною*, якщо:

- 1) її область визначення симетрична відносно точки 0, тобто для довільного x з області визначення $-x$ також належить області визначення;
- 2) $f(-x) = f(x)$.

Приклади парних функцій $y = \cos x$, $y = x^2$, $y = |x|$, $y = e^x + e^{-x}$.

Def. Функцію $y = f(x)$ називають *непарною*, якщо:

- 1) її область визначення симетрична відносно точки 0;
- 2) $f(-x) = -f(x)$.

Приклади непарних функцій:

$$y = \sin x, \quad y = x^3, \quad y = \frac{|x|}{x}, \quad y = e^x - e^{-x}.$$

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат;
Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функцію, що не є ні парною, ні непарною, називають *функцією загального виду*.

Def. Функцію $f(x)$ називають *зростаючою (спадною)* на інтервалі (a,b) , якщо для довільних двох точок x_1 та x_2 із цього інтервалу таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Def. Функцію $f(x)$ називають *неспадною (незростаючою)* на інтервалі (a,b) , якщо для довільних двох точок x_1 та x_2 з указанного інтервалу таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Зростаючі, спадні, не зростаючі та неспадні функції називають *монотонними*, а зростаючі та спадні функції – *строго монотонними*.

Наприклад, функції $y = e^x$, $y = x^3$ - зростаючі функції на R .

Def. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині D , називають *обмеженою* на цій множині, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$. Графік обмеженої функції міститься у смугі між прямими $y = -M$ та $y = M$.

Приклади обмежених функцій:

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \arcsin x, y = \frac{|x|}{x}, y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Число $T > 0$ називають *періодом* функції $y = f(x)$, якщо для кожного $x \in D(f)$ виконуються рівності

$$f(x) = f(x+T) = f(x-T).$$

Функцію, що має будь-який період, називають *періодичною*.

Число T - *основний період* функції, якщо $T > 0$ і є найменшим серед усіх додатних періодів.

Наприклад, функція $y = \sin nx$ періодична з періодом $T = \frac{2\pi}{n}$.



Згадаємо про поняття складеної функції

Функція $y = f(u)$ визначена на множині A , а функція $u = g(x)$ - на множині X , причому для кожного значення $x \in X$ відповідне значення $u = g(x) \in A$. Тоді на множині X визначена функція $y = f(g(x))$, яку називають *складеною* функцією від x (або функцією від функції, або суперпозицією заданих функцій).

Змінну $u = g(x)$ функції $y = f(u)$ називають проміжним аргументом, або внутрішньою функцією, а змінну $y = f(u)$ - зовнішньою функцією.

Наприклад, функція $y = \sqrt{\cos x}$ є суперпозицією двох функцій:

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \cos x,$$

А функція $y = \ln \operatorname{tg} 3x$ - суперпозицією трьох функцій:

$$y = \ln u, \quad u = \operatorname{tg} v, \quad v = 3x.$$



Згадаємо про класифікацію елементарних функцій та їхні графіки

Основними елементарними функціями є такі аналітично задані функції:

1) *степенева* функція $y = x^\alpha$, де α - дійсне число. Область визначення і графік цієї функції залежить від значення α (рис. 3.4, а-е);

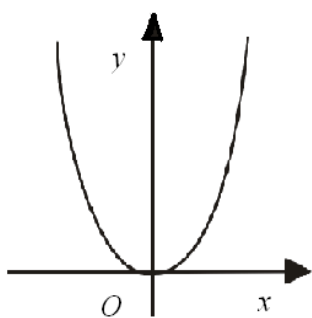


Рис 3.4, а. Графік
 $y = x^\alpha$,
 $\alpha = 2n, n \in N$

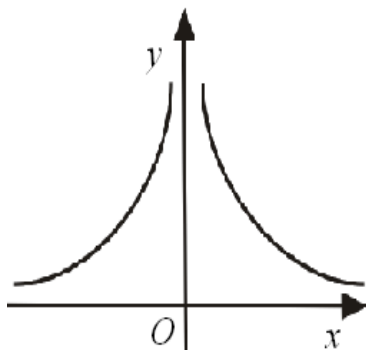


Рис 3.4, б. Графік
 $y = x^\alpha$,
 $\alpha = -2n, n \in N$

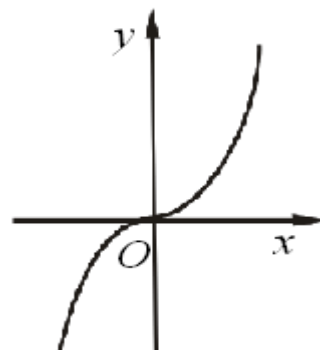


Рис 3.4, в. Графік
 $y = x^\alpha$,
 $\alpha = 2n+1, n \in N$

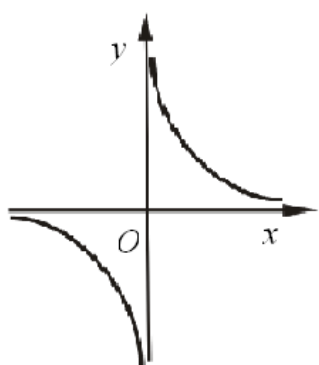


Рис 3.4, г. Графік
 $y = x^\alpha$,
 $\alpha = -(2n-1), n \in N$

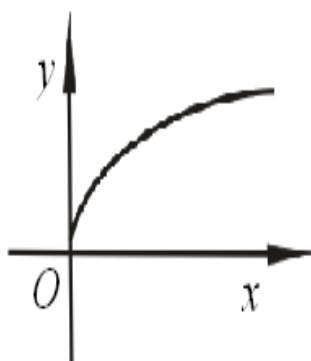


Рис 3.4, д. Графік
 $y = x^\alpha$,
 $\alpha = \frac{1}{2n}, n \in N$

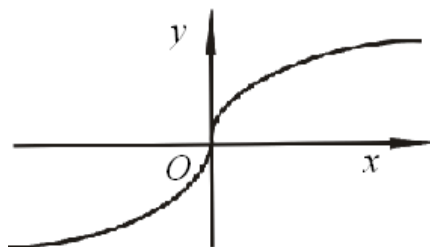


Рис 3.4, е. Графік
 $y = x^\alpha$,
 $\alpha = \frac{1}{2n+1}, n \in N$

2) показникові функція $y = a^x$, де $a > 0, a \neq 1$ (рис. 3.5);

3) логарифмічна функція $y = \log_a x$, де $a > 0, a \neq 1$ (рис. 3.6);

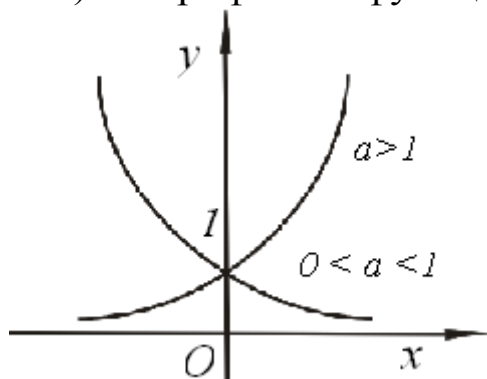


Рис 3.5. Графік $y = a^x$

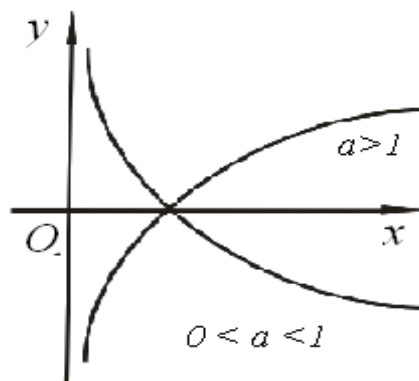


Рис 3.6. Графік $y = \log_a x$

4) тригонометричні функції
 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 3.7, а-г)

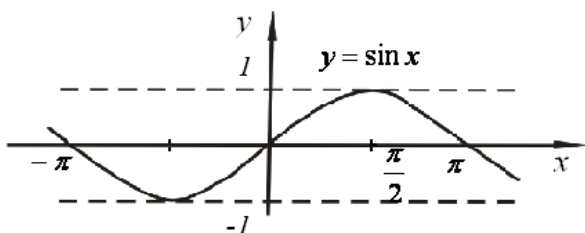


Рис 3.7, а. Графік $y = \sin x$

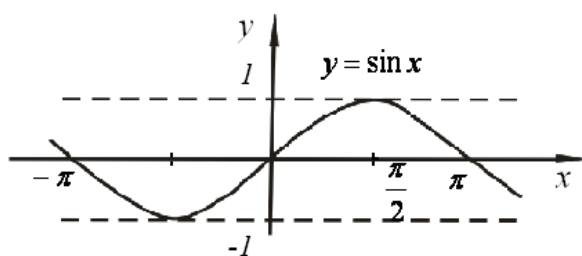


Рис 3.7, б. Графік $y = \cos x$

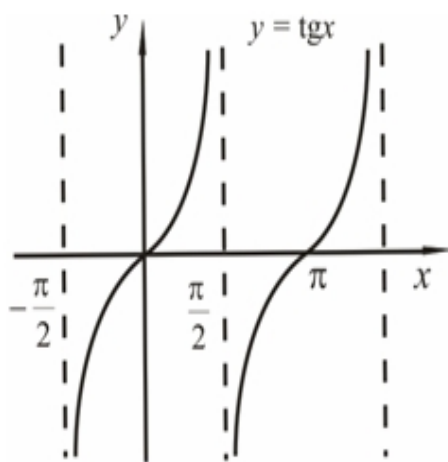


Рис 3.7, в. Графік $y = \operatorname{tg} x$

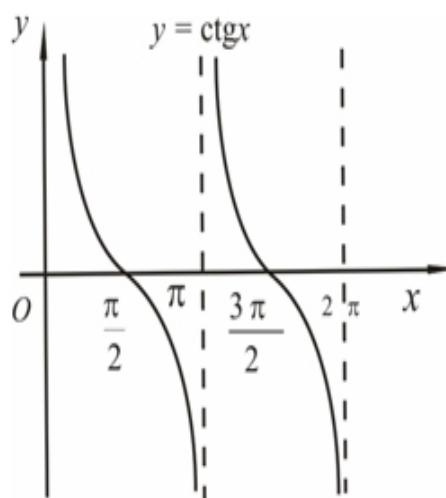


Рис 3.7, г. Графік $y = \operatorname{ctg} x$

5) обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 3.8, а-г).

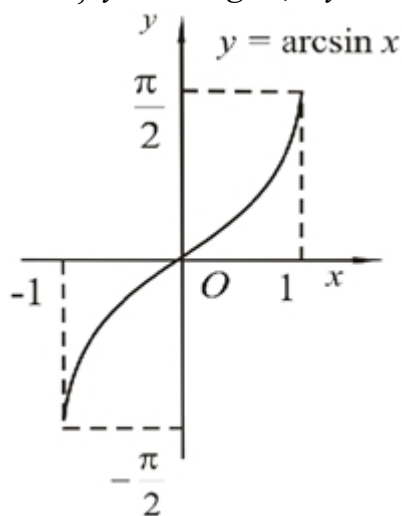


Рис 3.8, а. Графік $y = \arcsin x$

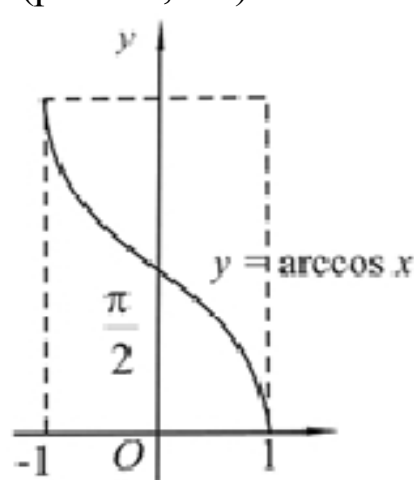


Рис 3.8, б. Графік $y = \arccos x$

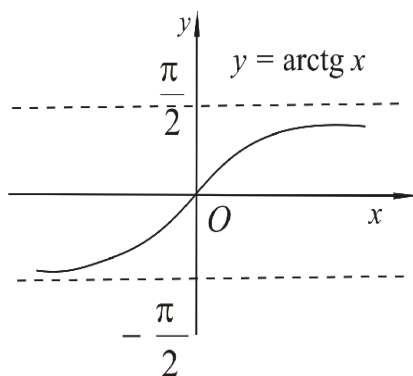


Рис 3.8, в. Графік $y = \operatorname{arctg} x$

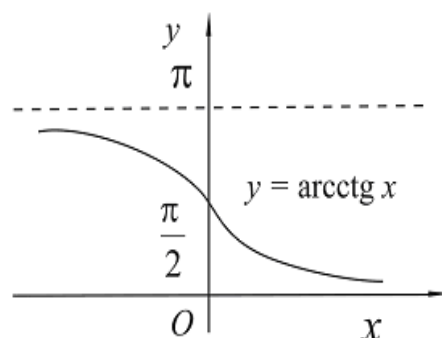


Рис 3.8, г. Графік $y = \operatorname{arcctg} x$

Def. Елементарною функцією називають функцію, одержану з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і скінченного числа утворення складених функцій.

Елементарні функції поділяють на *алгебраїчні* і *трансцендентні*.

До алгебраїчних функцій належать:

- ціла раціональна функція або многочлен

$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, де n - ціле невід'ємне число;

- дробово-раціональна функція, яка виражається відношенням двох многочленів:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}.$$

- ірраціональна функція, яку записують виразами, де крім додавання, віднімання, множення і ділення є піднесення до степеня з раціональним нецілим показником.

Функції, що не є алгебраїчними, називають трансцендентними. Наприклад, $y = \log_a x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \arcsin x$.



Згадаємо про перетворення графіків функцій

Задамо графік функції $y = f(x)$. Використовуючи геометричні перетворення:

а) зсуву (паралельного перенесення) вздовж координатних осей Ox і Oy ;

б) розтягу (стиснення) вздовж осей координат;

в) симетричного відображення відносно осі Ox або Oy

можна дістати графіки таких функцій (табл. 3.1):

Таблиця 3.1.

Геометричні перетворення графіків функцій

Функція	Дія над графіком функції $y = f(x)$
$y = f(x) + A$	Зсув вздовж осі Oy на A одиниць угору, якщо $A > 0$ і на $ A $ одиниць вниз, якщо $A < 0$.
$y = f(x - a)$	Зсув вздовж осі Ox на a одиниць праворуч, якщо $a > 0$ і на $ a $ одиниць ліворуч, якщо $a < 0$
$y = f(-x)$	Симетричне відображення відносно осі Oy
$y = -f(x)$	Симетричне відображення відносно осі Ox
$y = mf(x)$	а) $m > 1$ - розтяг вздовж осі Oy в m разів б) $0 < m < 1$ - стиснення вздовж осі Oy у $\frac{1}{m}$ разів
$y = f(kx)$	а) $k > 1$ - стиснення вздовж осі Ox у k разів; б) $0 < k < 1$ - розтяг вздовж осі Ox у $\frac{1}{k}$ разів
$y = f(x)$	При $x \geq 0$ залишаємо графік функції $y = f(x)$, після чого відображаємо його симетрично відносно осі Oy
$y = f(x) $	На проміжках, де $f(x) \geq 0$, залишаємо графік функції $y = f(x)$; на проміжках, де $f(x) < 0$, симетрично відображаємо його відносно осі Ox

Евристичний тренажер «Функції» допоможе згадати властивості елементарних функцій та їх графіки.

1. Запустіть програму для роботи (рис. 3.9) та виберіть необхідний тренажер *Fet_1* або *Fet_2*.

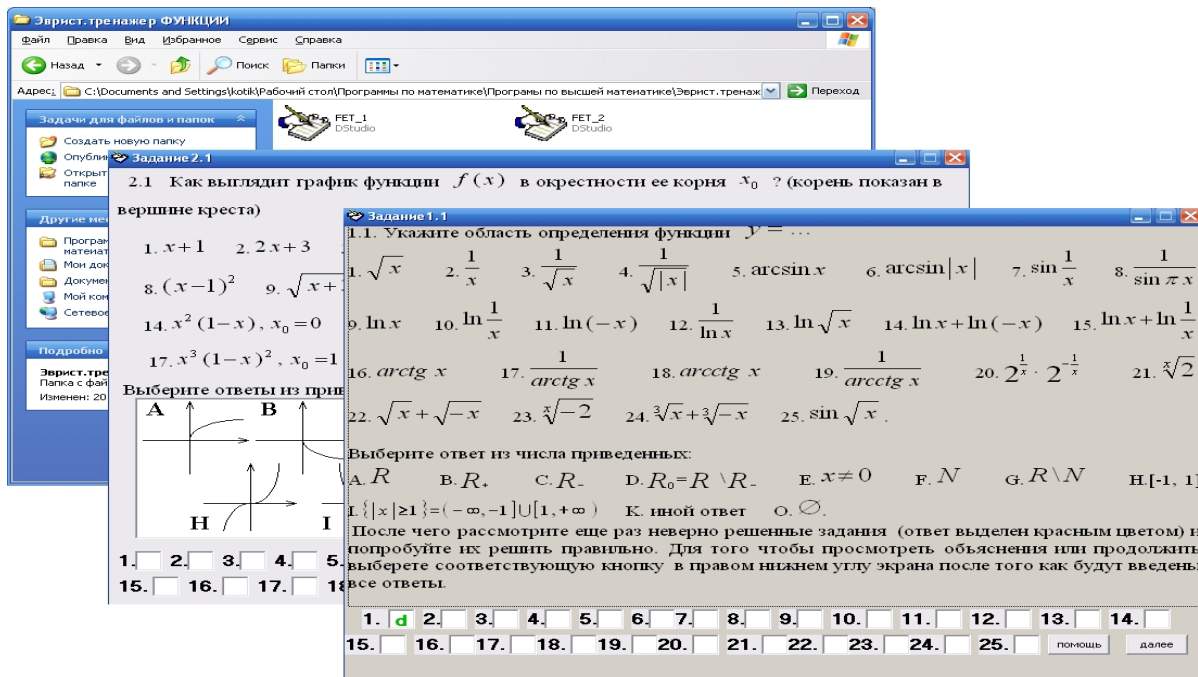


Рис. 3.9. Запуск эвристического тренажера «Функции»

2. В отриманому вікні виконайте завдання. В разі необхідності (зазначена відповідь у вигляді букви отримана червоною) ви маєте можливість отримати допомогу викликом кнопки **ПОМОЩЬ** (рис. 3.10).

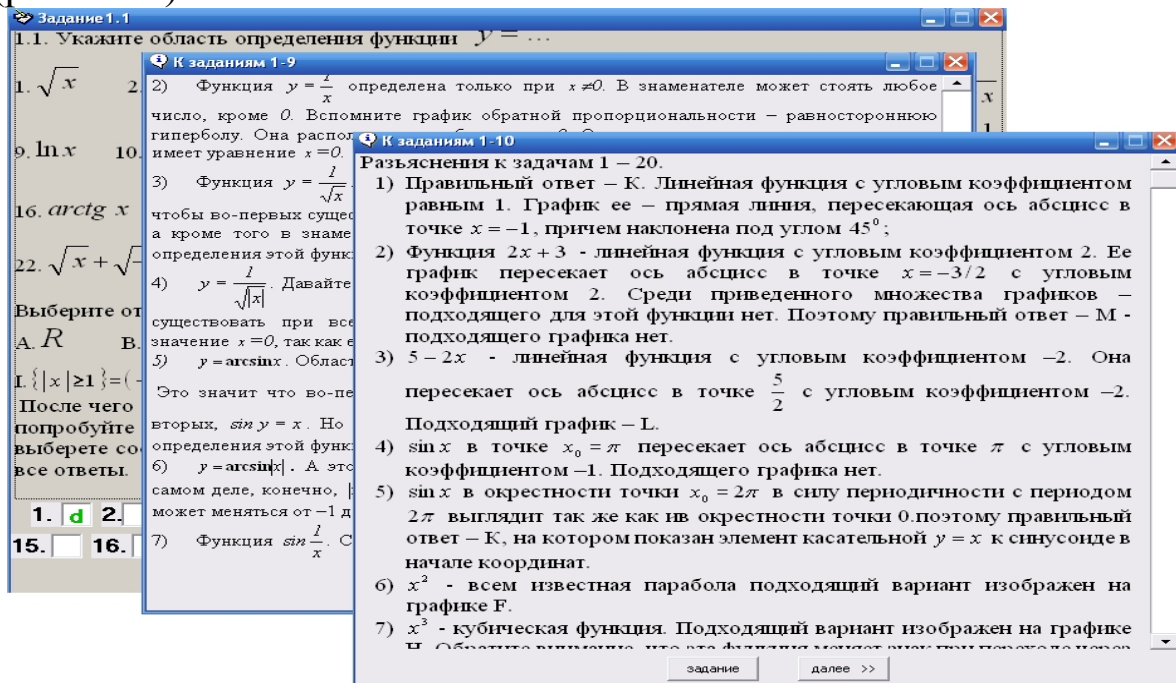


Рис. 3.10. Виклик допомоги у вікні тренажеру «Функции»

3. Розібравшись із правильною відповіддю продовжить далі виконання тренажеру викликом кнопки **далее**.



Необхідні знання про послідовність

Def. Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n , то множину чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ називають *числовою послідовністю* і позначають символом $\{x_n\}$.

Іншими словами послідовність $\{x_n\}$ - це функція

$$x_n = f(n), \quad (3.1)$$

визначена на множині N натуральних чисел, до області значення якої належать дійсні числа.

Тут $x_1 = f(1)$ - перший член послідовності, $x_2 = f(2)$ - другий, ..., x_n - n -й або загальний член послідовності.

Послідовність вважають заданою, якщо вказано спосіб відшукування її загального члена. Найчастіше загальний член послідовності задають формулою (3.1). Наприклад, формула

$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ задає послідовність

$$\left\{ -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots \right\}.$$

Def. Послідовність $\{x_n\}$ називають *обмеженою*, якщо існує таке число $M > 0$, що для будь-якого $n \in N$ виконується нерівність $|x_n| \leq M$.

В іншому випадку послідовність називають *необмеженою*.

Наприклад, послідовність $x_n = 2n + 1$, де $\{x_n\} = \{3; 5; 7; 9; \dots\}$ є необмеженою, а $x_n = \frac{1}{n}$, де $\{x_n\} = \left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots \right\}$ - обмежена.

Def. Послідовність $\{x_n\}$ називають *зростаючою* (неспадною), якщо для довільного натурального n виконується нерівність

$$x_n < x_{n+1} \quad (x_n \leq x_{n+1}).$$

Def. Послідовність $\{x_n\}$ називають *спадною* (не зростаючою), якщо для довільного натурального n виконується нерівність

$$x_n > x_{n+1} \quad (x_n \geq x_{n+1}).$$

Визначені таким чином послідовності називають *монотонними*.

Наприклад, послідовність $\{\ln n\}$ є зростаючою, $\left\{\sin \frac{1}{n}\right\}$ - спадною, $\{\sin n\}$, $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ - послідовності немонотонні.



Необхідні знання про границю числової послідовності

Def. Число a називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

У цьому випадку записують $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ або $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$ і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ є *збіжною*. Послідовність, яка не має границі називають *розбіжною*.

З'ясуємо геометричний зміст означення границі послідовності.

Інтервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ називають ε - *околом* точки a (рис. 3.11).

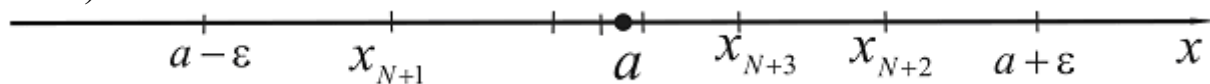


Рис. 3.11. ε - *оکیل* точки a

Оскільки нерівність (3.2) рівносильна нерівності $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, то означення границі послідовності можна сформулювати так: число a називають *границею послідовності*

$\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що всі члени x_n , для $n = N + 1, N + 2, \dots$ потрапляють в ε -оکیل точки a (рис. 3.11). Тобто всередині ε -околу міститься нескінченне число членів послідовності, тоді як поза околom точки a - скінченне. Зрозуміло, що чим менше значення $\varepsilon > 0$, тим більше число N , але обов'язково таке число існує.

Наприклад нерівність $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0,01$ виконується для всіх $n > 100$, тут $N = 100$, а $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0,001$ - для всіх $n > 1000$, тут $N = 1000$.

Звідси випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ і ця границя є єдиною.

Def. Послідовність $\{x_n\}$ називають *нескінченно малою*, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Відзначимо, що якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\{x_n - a\}$ - нескінченно мала послідовність.

Послідовність $\{x_n\}$ називають *нескінченно великою*, якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує номер N такий, що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

У цьому випадку записують так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.



Вчимося знаходити границі послідовності за означенням

3.1. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+5} = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Нехай довільне $\varepsilon > 0$ задано. Згідно з означенням потрібно вказати номер $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\left| \frac{n+2}{2n+5} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Звідси дістаємо

$$\left| \frac{2(n+2) - 2n - 5}{2(2n+5)} \right| < \varepsilon, \quad \frac{1}{2(2n+5)} < 5, \quad 4n+10 > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 10 \right).$$

Візьмемо за $N(\varepsilon)$ цілу частину від числа

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 10 \right): N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) - 10 \right], \quad \text{тоді нерівність } \left| \frac{n+2}{2n+5} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

виконується для всіх $n > N(\varepsilon)$. Це й означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+5} = \frac{1}{2}$.



Необхідні знання про властивості границь послідовності

Теорема 3.1. Всяка збіжна послідовність має тільки одну границю.

Теорема 3.2. Збіжна послідовність обмежена.

Теорема 3.3. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збіжні, то виконуються граничні рівності:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} C y_n = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, де C - стала;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \right)$.

Теорема 3.4. Якщо для послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ виконуються умови $x_n \leq y_n \leq z_n$ для кожного $n \in N$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Теорема 3.5. (Вейєрштраса). Монотонна обмежена послідовність має границю.

За допомогою останньої теореми доводять існування границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, значення якої позначають числом $e = 2,71828\dots$.

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$



Необхідні знання про визначені та невизначені вирази

При обчисленні границь треба враховувати такі твердження:

1) сума й добуток скінченного числа нескінченно малих, а також добуток нескінченно малої величини на величину обмежену є нескінченно малі величини;

2) сума й добуток нескінченно великих величин, а також добуток нескінченно великої на ненульову сталу є нескінченно великі величини;

3) частка від ділення сталої на нескінченно велику є нескінченно мала величина, частка від ділення ненульової сталої на нескінченно малу – нескінченно велика величина;

У прикладах на відшукування границь зазвичай зустрічаються невизначені вирази: відношення двох нескінченно малих величин; відношення двох нескінченно великих величин; різниця двох нескінченно великих величин; добуток нескінченно малої на нескінченно велику величину; нескінченно мала або нескінченно велика величина в нескінченно малому степені; величина, що прямує до одиниці, в нескінченно великому степені. Символічно невизначені вирази можна записати у вигляді (їх усього сім):

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$



Вчимося обчислювати границі послідовностей за допомогою теорем

Обчисліть границі.

3.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^4 - 5n^2 + 4n}{10 + 2n - 3n^4}.$

Розв'язання. При $n \rightarrow \infty$ чисельник і знаменник прямують до ∞ . Отже, маємо невизначеність вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Розкриваємо її, поділивши чисельник і знаменник на найвищий ступінь n , тобто на n^4 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^4 - 5n^2 + 4n}{10 + 2n - 3n^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{5}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{\frac{10}{n^4} + \frac{2}{n^3} - 3} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 7 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n^4} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} - \lim_{n \rightarrow \infty} 3} = \frac{7 - 0 + 0}{0 + 0 - 3} = -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $-\frac{7}{3}.$

М.В. Обґрунтуйте самостійно правильність такої формули:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \dots + b_k} = \begin{cases} a_0 / b_0, & \text{якщо } m = k, \\ 0, & \text{якщо } m < k, \\ \infty, & \text{якщо } m > k. \end{cases}$$

3.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{5}} - n^{\frac{1}{3}} + 4}{(n-2)^{\frac{3}{7}} - 5}.$

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Виконуємо перетворення

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{5}} - n^{\frac{1}{3}} + 4}{(n-2)^{\frac{3}{7}} - 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{5}} \left(1 - n^{-\frac{1}{15}} + 4n^{-\frac{2}{5}} \right)}{n^{\frac{3}{7}} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{\frac{3}{7}} - 5n^{-\frac{3}{7}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{5}}}{n^{\frac{3}{7}} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{\frac{3}{7}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{5}}}{n^{\frac{3}{7}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{7} - \frac{2}{5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{35}}} = \frac{1}{\infty} = 0.\end{aligned}$$

Тут ми скористалися границями

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = 0, \text{ якщо } p < 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \infty, \text{ якщо } p > 0.$$

Відповідь: 0.

$$\text{3.4. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n+1)!}{(n+2)! - n!}.$$

Розв'язання. Нагадаємо, що за означенням $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Тоді

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n+1)!}{(n+2)! - n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - n!(n+1)}{n!(n+1)(n+2) - n!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(1 - n - 1)}{n!((n+1)(n+2) - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{(n+1)(n+2) - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n^2 + 3n + 1} = 0\end{aligned}$$

Відповідь: 0.

$$\text{3.5. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2)}.$$

Розв'язання. Чисельник і знаменник дробу є сумою відповідної арифметичної прогресії. Використовуючи формулу

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ (суми n перших членів арифметичної прогресії), дістанемо:

$$\begin{aligned}1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) &= \frac{1 + 2n-1}{2} n = n^2. \\ 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) &= \frac{1 + 3n-2}{2} n = \frac{n(3n-1)}{2}.\end{aligned}$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+4+7+\dots+(3n-2)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n(3n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

3.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n - 3} - n)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $(\infty - \infty)$. Застосуємо стандартний прийом – домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз $\sqrt{n^2 - 2n - 3} + n$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n - 3} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 2n - 3} - n)(\sqrt{n^2 - 2n - 3} + n)}{\sqrt{n^2 - 2n - 3} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n - 3 - n^2}{\sqrt{n^2 - 2n - 3} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n - 3}{\sqrt{n^2 - 2n - 3} + n} = \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 - \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}} + 1} = \frac{-2}{1+1} = -1 \end{aligned}$$

Відповідь: -1.

3.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^{n+1}}{2^n - 5^n}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Поділивши чисельник і знаменник дробу на 5^n , дістанемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^{n+1}}{2^n - 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 5}{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1} = -5.$$

Відповідь: -5.

$$3.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\sin n}}{n}.$$

Розв'язання.

Враховуючи

нерівності

$$-1 \leq \sin n \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq 2^{\sin n} \leq 2,$$

запишемо подвійну нерівність

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{2^{\sin n}}{n} \leq \frac{2}{n}.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$, за теоремою 3.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\sin n}}{n} = 0$$

дістаємо відповідь:

Відповідь: 0.



Обчислюємо границі послідовностей за допомогою ППЗ Derive, Mathcad, Maple, Mathematica

Процедура обчислення границь послідовностей за допомогою відповідних правил.

У теорії механізмів і машин для кінематичного дослідження механізмів застосовуються графічний метод визначення траєкторії руху точок і побудови планів механізмів, що задані у вигляді послідовностей та метод кінематичних діаграм із дослідженням граничної поведінки послідовностей, що визначають переміщення ланок механізмів.

3.9. Задамо траєкторії переміщення ланок механізмів за допомогою послідовностей та дослідимо їх граничну поведінку.

$$\text{Обчисліть } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3 + n^2 - 3}{7n^3 - 2n^2 + 4}.$$

Розв'язання.

Крок 1. При $n \rightarrow +\infty$ чисельник і знаменник дробу

необмежено зростають, тому має місце невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Крок 2. В даному випадку загальний член послідовності є дробово-раціональною функцією натурального аргументу n . Для таких функцій невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ можна розкрити, якщо розділити чисельник і знаменник дробу на n^k , де k – найбільший з показників степенів n , які входять в даний вираз. У даному прикладі розділимо чисельник і знаменник дробу на n^3 . Отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3 + n^2 - 3}{7n^3 - 2n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^3}}{7 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^3}} = \frac{5 + 0 - 0}{7 - 0 + 0} = \frac{5}{7}$$

Відповідь: $\frac{5}{7}$.

Процедура обчислення границь послідовностей за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathcad.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню границі послідовності за допомогою ППЗ Mathcad.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathcad.
2. За допомогою опції *Вид – Панелі інструментов – Исчисления, Вид – Панелі інструментов – Калькулятор* та *Вид – Панелі інструментов – Вычисление* винести на панель інструментів вкладки (рис. 3.12):

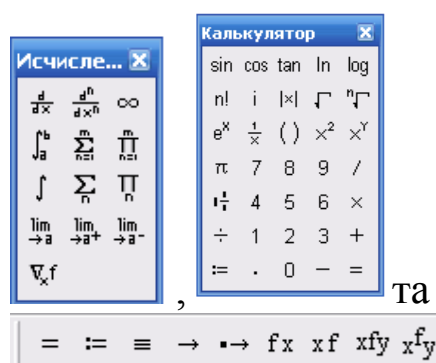


Рис. 3.12. Вкладки панелі інструментів ППЗ Mathcad

3. Обрати у вкладці *Исчисление* «Двухсторонняя граница».
4. Набрати з клавіатури *Калькулятора* задану послідовність та із вкладки *Вычисление* обрати \rightarrow .
5. Отримати значення границі послідовності (рис. 3.13).

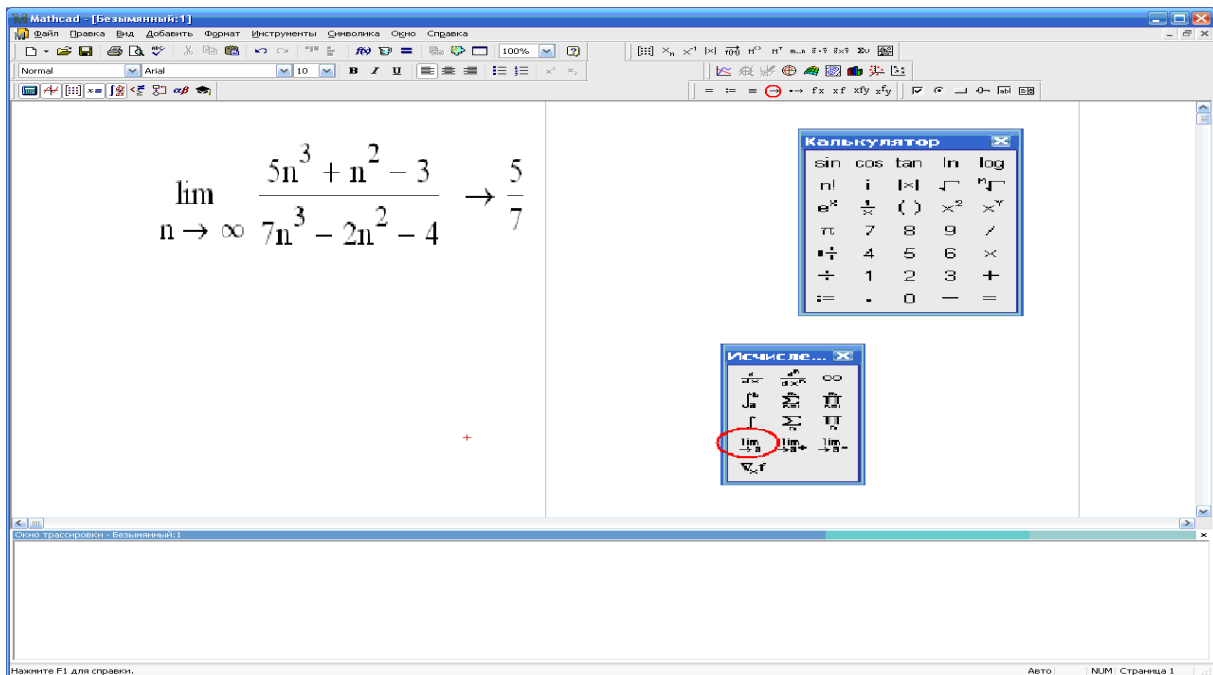


Рис. 3.13. Вікно ППЗ Mathcad: обчислення границі послідовності

3.10. Обчисліть $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)! + 3n!}{(n+1)(n-1)! - (n-2)!}$.

Розв'язання.

Крок 1. Для того щоб позбавитися факторіалів, які входять в заданий вираз, виразимо їх через $(n-2)!$, тобто через факторіал меншого з чисел. Маємо:

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)! + 3n!}{(n+1)(n-1)! - (n-2)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-2)!(n-1) + 3(n-2)!(n-1)n}{(n+1)(n-2)!(n-1) - (n-2)!}$$

Крок 2. Розділивши чисельник і знаменник на $(n-2)!$, отримаємо границю дрібно-раціональної функції:

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1+3(n-1)n}{(n+1)(n-1)-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2-2n-1}{n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}} = \frac{3-0-0}{1-0} = 3$$

Відповідь: 3.

Процедура обчислення границь послідовностей за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Maple.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню границі послідовності за допомогою ППЗ Maple.

1. Відкрити вікно ППЗ Maple.
2. За допомогою опції *Insert-Execution Grope-Before Cursor* отримати у полі програми мітку \rightarrow .
3. Активізувати зліва вкладки *Expression* й *Common Symbols* та з отриманих шаблонів ввести $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)! + 3n!}{(n+1)(n-1)! - (n-2)!}$ та символ «;».
4. Отримати значення границі послідовності (рис. 3.14).

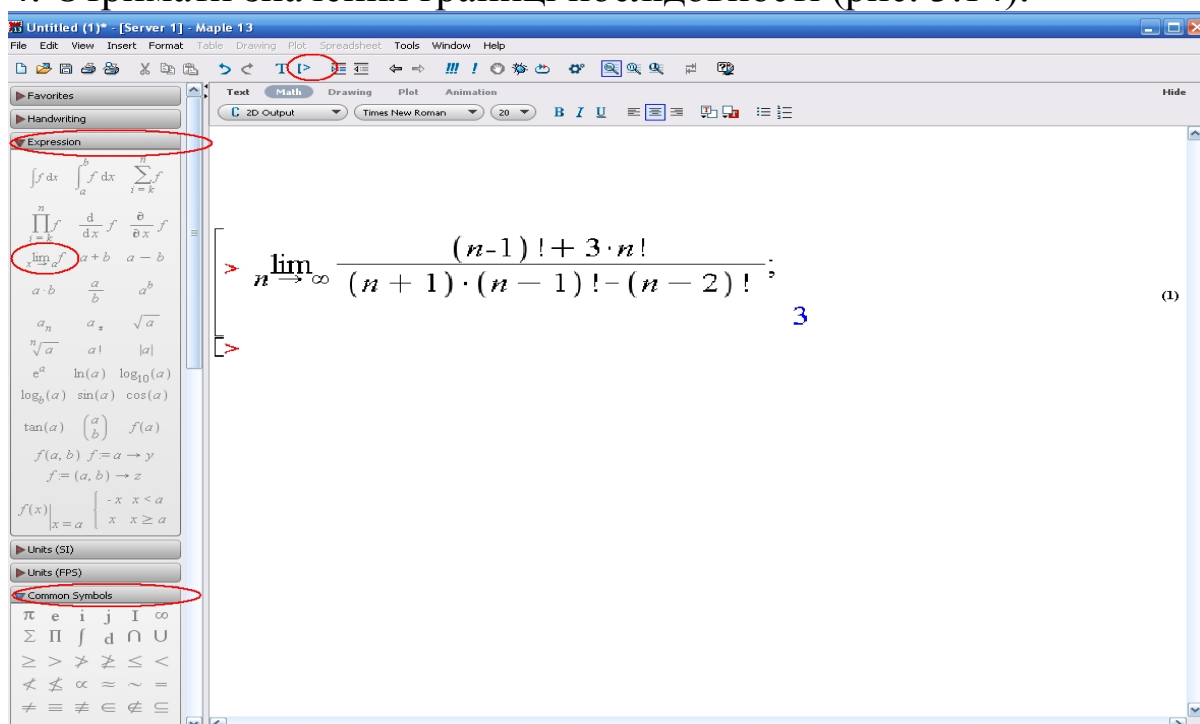


Рис. 3.14. Вікно ППЗ Maple: обчислення границі послідовності

3.11. Обчисліть $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2n^2 + 4n - 1} - \sqrt{2n^2 + 3n + 2} \right)$.

Розв'язання.

Крок 1. У цьому випадку при $n \rightarrow +\infty$ отримуємо невизначеність виду $(\infty - \infty)$, яку можна звести до невизначеності виду $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ множенням і діленням на вираз, спряжений даному.

Крок 2. Таким чином,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2n^2 + 4n - 1} - \sqrt{2n^2 + 3n + 2}) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2n^2 + 4n - 1} - \sqrt{2n^2 + 3n + 2})(\sqrt{2n^2 + 4n - 1} + \sqrt{2n^2 + 3n + 2})}{\sqrt{2n^2 + 4n - 1} + \sqrt{2n^2 + 3n + 2}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 4n - 1 - 2n^2 - 3n - 2}{\sqrt{2n^2 + 4n - 1} + \sqrt{2n^2 + 3n + 2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - 3}{\sqrt{2n^2 + 4n - 1} + \sqrt{2n^2 + 3n + 2}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{n}}{\sqrt{2 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Процедура обчислення границь послідовностей за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Derive.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню границі послідовності за допомогою ППЗ Derive.

1. Відкрити вікно ППЗ Derive.
2. Ввести до розгляду вираз $(\sqrt{2n^2 + 4n - 1} - \sqrt{2n^2 + 3n + 2})$ набравши його з клавіатури нижнього поля програми та зробити його активним натисненням кнопки **=**.
3. За допомогою опції *Calculus-Limit* викликати вікно для зазначення змінної та до якого значення вона прямує й натиснути кнопку **Simplify**.
4. Отримати значення границі послідовності (рис. 3.15).

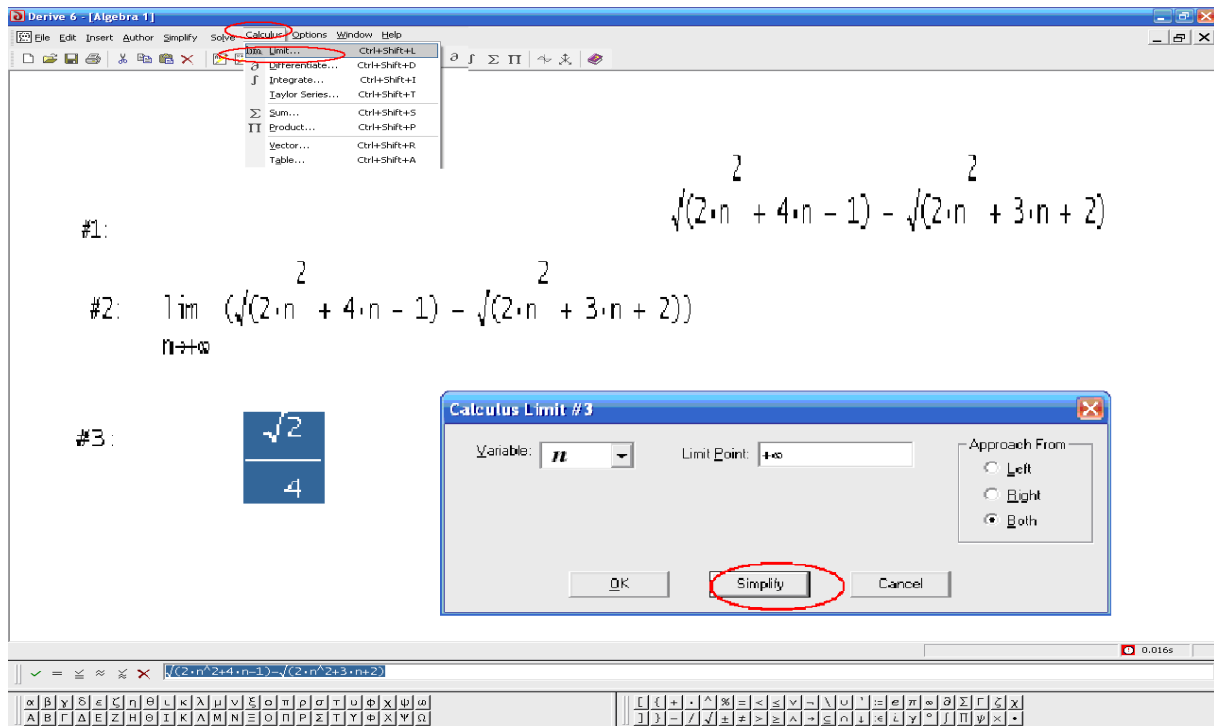


Рис. 3.15. Вікно ППЗ Derive: обчислення границі послідовності

3.12. Обчисліть границю показниково-степеневої числової послідовності

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n^2 - n + 3}{4n^2 + 2n - 1} \right)^{n+2}$$

Розв'язання.

Так як $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - n + 3}{4n^2 + 2n - 1} = 1$, а $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 2) = +\infty$, маємо невизначеність виду (1^∞) . Для розкриття цієї невизначеності потрібно скористатися важливою границею $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + a_n)^{k/a_n} = e^k$, де a_n - нескінченно мала послідовність. Тому алгоритм розв'язку цієї задачі складається з трьох кроків.

Крок 1. Числову послідовність $\frac{4n^2 - n + 3}{4n^2 + 2n - 1}$ потрібно уявити у вигляді $1 + a_n$, де a_n - нескінченно мала послідовність.

Крок 2. У показнику степеня відокремити множник виду $\frac{1}{a_n}$.

Крок 3. На основі формули $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + a_n)^{k/a_n} = e^k$ обчислити задану границю.

Таким чином, маємо:

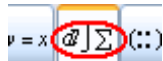
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n^2 - n + 3}{4n^2 + 2n - 1} \right)^{n+2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4-3n}{4n^2 + 2n - 1} \right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4-3n}{4n^2 + 2n - 1} \right)^{\frac{4-3n}{4-3n} \cdot \frac{4n^2 + 2n - 1}{4-3n} (n+2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{(4-3n)(n+2)}{4n^2 + 2n - 1}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n^2 - 2n + 8}{4n^2 + 2n - 1}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3 \frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}} = e^{-3/4} \end{aligned}$$



Відповідь: $e^{-3/4}$.

Процедура обчислення границь послідовностей за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathematica..



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню границі послідовності за допомогою ППЗ Mathematica.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathematica.
2. За допомогою опції *Palettes-Classroom Assistant* викликати вкладки із шаблонами для набору символів.
3. Активізувати праворуч у вкладці *Basic Commands* кнопку  та обрати у вікні *Calculus* обчислення Limit .

4. У полі програми з'явиться шаблон $\text{Limit}[\text{expr}, \text{var} \rightarrow \text{value}]$ для запису виразу числової послідовності та позначання, що $n \rightarrow \infty$. Записати вираз послідовності застосовуючи шаблони вкладки *Calculator-Basic* виокремити його та за допомогою опції *Evaluation-Evaluate Cells* викликати із мітками  і  обчислення границі послідовності.
5. Отримати значення границі послідовності (рис. 3.16).

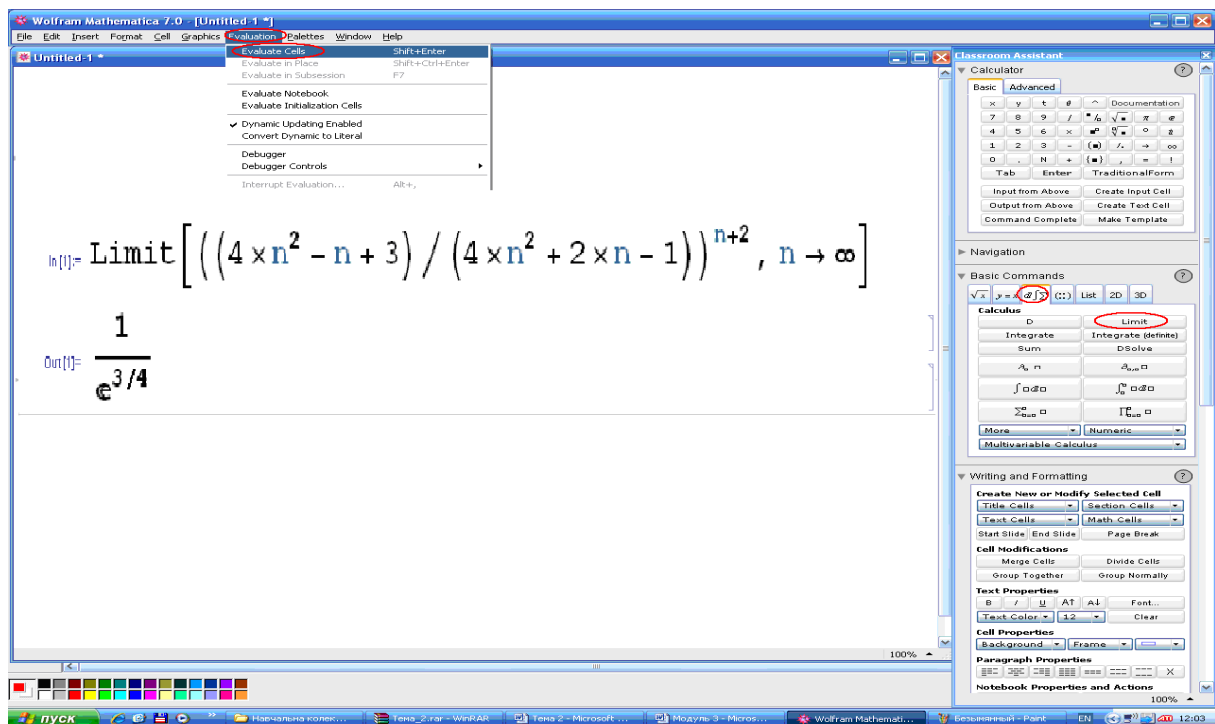


Рис. 3.16. Вікно ППЗ Mathematica: обчислення границі послідовності



Моделюємо професійну діяльність інженера

3.13. Залежність між швидкістю течії v (м/с) й числом обертів n у хвилину для гвинта під час руху гідрометричної вертушки у стоячій воді наближено виражається формулою $v = v_0 + \alpha \cdot n$, де v_0 — та границя швидкості, з якою гвинт не обертається. Побудувати графік залежності v від n при $v_0 = 0,167$ й $\alpha = 0,0111$. За графіком знайдіть наближене значення v при $n = 75$.



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Побудуйте графік залежності $v = 0,167 + 0,0111 \cdot n$ за допомогою ППЗ. За графіком знайдіть наближене значення v при $n = 75$.

3.14. Температуру проволочки довжиною в l м вимірюють у кожній її точці. Якщо температуру вимірювати у градусах за Цельсієм, а відстань від одного з кінців проволочки позначити у сантиметрах S , то отримаємо функцію

$$T(S) = \begin{cases} S^2, & \text{якщо } 0 \leq S \leq 50, \\ (100 - S)^2, & \text{якщо } 50 \leq S \leq 100. \end{cases}$$

Побудувати графік цієї функції. Яку функцію буде отримано, якщо температуру вимірювати у градусах за Фаренгейтом, а відстань у метрах? Нагадаємо, що залежність температур у градусах за Цельсієм (C) й у градусах за Фаренгейтом (F)

виражається співвідношенням $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$.



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Скористайтесь ППЗ для дослідження функції, побудови її графіка. Здійсніть перетворення графіків функції при

переході від градусів за Цельсієм (C) до градусів за Фаренгейтом (F) $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ за допомогою ППЗ.

3.15. Динамічна самоіндукція антени при постійному подовженні хвилі на одиницю довжини виражається формулою

$L = L_0 \frac{\operatorname{tg}(\pi l / \lambda)}{2\pi l / \lambda}$ — де, L - динамічна самоіндукція; L_0 — статична

самоіндукція; l — діюча довжина антени; λ — довжина хвилі

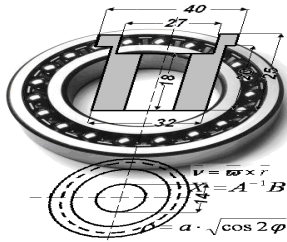
антени. Знайти $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} L$.



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Знайдіть границю послідовності

$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} L_0 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\pi \cdot l / \lambda)}{2 \cdot \pi \cdot l / \lambda}$ *за допомогою ППЗ.*

Відповідь: $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} L = L_0 \cdot \sqrt{2}$.



Тема 2. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Припустимо, що деяке тіло починає рухатися у момент часу $t = 0$ по прямій лінії (рис. 3.17). Нехай шлях, що пройшло тілом за час t , визначається формулою $S = f(t)$.

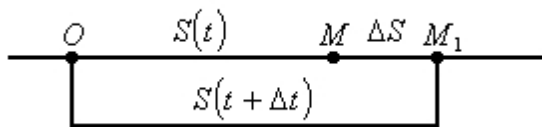


Рис. 3.17. Схема руху тіла деякий шлях за деякий час

Функцію $S = f(t)$ називають законом руху тіла. Розглянемо шлях MM_1 , пройдений тілом за відрізок часу $[t; t + \Delta t]$ (рис. 3.17). Він дорівнює $\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t)$.

Якщо тіло рухається рівномірно, то відношення пройденого шляху до часу

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

є швидкістю руху і не залежить від t і Δt .

У разі нерівномірного руху це відношення залежить як від вибраного моменту часу t , так і від приросту Δt і виражає середню швидкість руху у проміжку часу $[t; t + \Delta t]$. Чим менший проміжок часу Δt , тим з більшою підставою можна вважати, що рух протягом часу від t до $t + \Delta t$ – рівномірний.

Для отримання миттєвої швидкості в момент часу t застосовується поняття границі функції в точці, що позначається

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = v(t)$$



Необхідні знання про границю функції в точці

Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену в деякому околі точки із координатами $(a; 0)$, крім, можливо, самої точки.

Def. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, причому $x \neq a$, виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Записують це так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

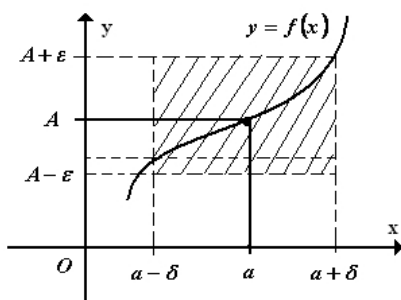


Рис. 3.18. Геометричне тлумачення означення границі функції при $x \rightarrow a$.

Означення границі функції має просте *геометричне тлумачення*: для всіх точок x , які віддалені від точки a не далі, ніж на δ , графік функції $y = f(x)$ лежить усередині смуги шириною 2ε , обмеженої прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$ (рис. 3.18).

N.B.

1. Для існування границі функції при $x \rightarrow a$ не вимагають, щоб функція була визначена в точці a .
2. Границя не залежить від того, з якої сторони точка x наближається до точки a .

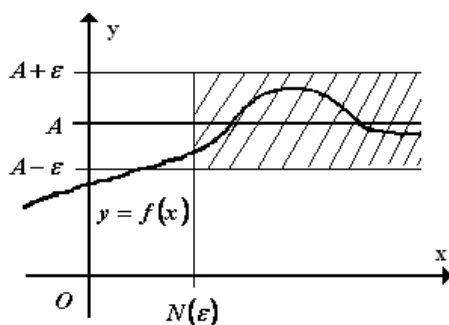


Рис. 3.19. Геометричне тлумачення означення границі функції при $x \rightarrow \infty$

Def. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $M(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x , що задовольняють умову $|x| > M(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 3.19).

При цьому пишуть: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow \infty$. Тут $x \rightarrow \infty$ означає, що або $x \rightarrow +\infty$, або $x \rightarrow -\infty$.

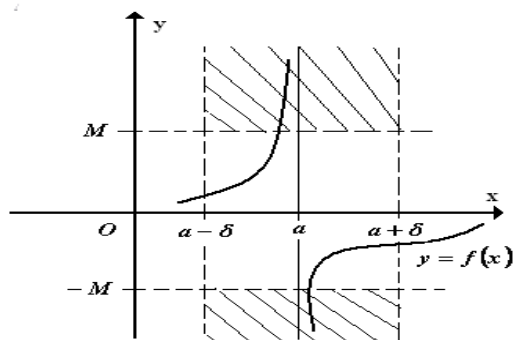


Рис. 3.20. Геометричне тлумачення означення нескінченно великої функції

Def. Функцію $y = f(x)$ називають нескінченно великою при $x \rightarrow a$, якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує число $\delta(M)$ таке, що для всіх $x \neq a$, і таких, які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$ (рис. 3.20).
Записується це так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Def. Функцію $\alpha(x)$ називають нескінченно малою при $x \rightarrow a$, де a - стала або символ нескінченності, якщо $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Так, наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ - нескінченно велика при $x \rightarrow 0$; ця сама функція є нескінченно мала при $x \rightarrow \pm\infty$.



Необхідні знання про односторонні границі

Трапляються випадки, коли границя функції у точці залежить від того, з якої сторони (лівої чи правої) змінна x наближається до точки a . Тому виникає потреба у введенні поняття односторонніх границь.

Def. Число A_n називають *правосторонньою* границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = A_n$, тобто для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x з інтервалу $(a, a + \varepsilon)$ виконується нерівність $|f(x) - A_n| < \varepsilon$.

Якщо A_n - правостороння границя, то пишуть:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_n, \text{ або } f(a+0) = A_n.$$

За аналогією, якщо $A_{\text{л}}$ - лівостороння границя, тоді

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) = A_{\text{л}}$$

Якщо функція $f(x)$ у точці a має границю, то виконуються рівності

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a-0) = f(a+0)$$

Наприклад, для функції $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ у точці $x=0$ односторонні границі такі: $A_{\text{л}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$ $A_{\text{п}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$. Звідси видно, що границя функції у точці $x=0$ не існує.



Необхідні знання про властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій

1. Сума нескінченно великої функції і обмеженої є нескінченно велика функція. Символічно це записують так: $c + \infty = \infty$.

2. Сума двох нескінченно великих функцій одного знака є нескінченно велика функція: $\infty \cdot \infty = \infty$.

3. Добуток двох нескінченно великих функцій є нескінченно велика функція: $\infty \cdot \infty$.

На відміну від цього сума двох нескінченно великих функцій різних знаків не завжди буде нескінченно великою функцією, тому ця сума називається невизначеністю вигляду $\infty - \infty$.

4. Добуток нескінченно великої функції на функцію, що більша за абсолютним значенням від деякого додатного числа, також є нескінченно великою функцією.

Частка двох нескінченно великих функцій не завжди є нескінченно великою функцією, тому дробовий вираз, чисельник і знаменник якого нескінченно великі змінні величини, називають

невизначеністю вигляду $\frac{\infty}{\infty}$.

5. Сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно мала величина.

6. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно мала величина.

Частка від ділення двох нескінченно малих величин у загальному випадку не є нескінченно мала величина. У зв'язку з цим відношення двох нескінченно малих величин називають

невизначеністю виду $\frac{0}{0}$. Те саме стосується добутку нескінченно великої на нескінченно малу величину, цей добуток називають неvizначеністю виду $0 \cdot \infty$.

7. Для того, щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, необхідно і достатньо, що різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою величиною.

8. Якщо функція $\alpha(x)$ - нескінченно мала при $x \rightarrow x_0$ ($\alpha \neq 0$), то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно велика при $x \rightarrow x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ - нескінченно велика при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно мала при $x \rightarrow x_0$.



Необхідні знання про основні теореми про границі

Сформулюємо теореми, які значно полегшують відшукування границі функції.

Теорема 3.6.

Нехай кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має скінченну границю в точці a , тоді в цій точці виконуються рівності:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\text{при } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (c - \text{стала величина}).$$

Доведемо, наприклад, формулу (2). Нехай $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, тоді $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, де $\alpha(x) \rightarrow 0$, $\beta(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ (див. властивість 7 попереднього пункту).

Звідси маємо

$$f(x)g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = AB + \alpha(x)B + A\beta(x) + \alpha(x)\beta(x).$$

Вираз $\alpha(x)B + A\beta(x) + \alpha(x)\beta(x)$ при $x \rightarrow a$ є нескінченно малою функцією, тому

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Теорема 3.7 (про границю проміжної функції).

Якщо функції $g(x)$, $f(x)$ та $h(x)$ визначені в околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ і $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Теорема 3.8 (про границю монотонної функції).

Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x < x_0$ або при $x > x_0$, то існує її лівостороння границя або її правостороння границя, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ або $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.



Вчимося обчислювати границі функції в точці

Обчисліть границі функцій.

$$3.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x - 1}{3x^4 - 2x^2 + 10x - 5}.$$

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділивши чисельник і знаменник на x^4 , дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x - 1}{3x^4 - 2x^2 + 10x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{3 - \frac{2}{x^2} + \frac{10}{x^3} - \frac{5}{x^4}} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

3.17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^3 - 1}$.

Розв'язання. У точці $x=1$ чисельник і знаменник дробу обертаються в нуль, іншими словами, число $x=1$ - корінь чисельника і знаменника. Значить, маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Щоб позбутися цієї невизначеності, скористаємося таким твердженням.

Якщо $P_n(\lambda)=0$, тобто число λ - корінь многочлена

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

тоді многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на $x - \lambda$ і його можна подати у вигляді

$$P_n(x) = (x - \lambda)Q_{n-1}(x),$$

де $Q_{n-1}(x)$ - многочлен $(n-1)$ - го ступеня.

У нашому випадку

$$4x^2 + x - 5 = (x-1)(4x+5), \quad x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Тоді

$$\frac{4x^2 + x - 5}{x^3 - 1} = \frac{(x-1)(4x+5)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{4x+5}{x^2 + x + 1}.$$

Функція $f(x) = \frac{4x^2 + x - 5}{x^3 - 1}$ і $g(x) = \frac{4x+5}{x^2 + x + 1}$ при $x \neq 1$ тотожно рівні, причому функція $g(x)$ у точці $x=1$ визначена:
 $g(1) = \frac{4+5}{1+1+1} = 3$.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ не залежить від значення функції в самій точці $x=a$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+5}{x^2 + x + 1} = 3.$$

Відповідь: 3.

3.18. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 + 6x + 5}$.

Розв'язання. Підставивши у чисельник і знаменник дробу значення $x = -1$, переконаємося, що маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити цю невизначеність треба позбутися ірраціональності, яка несе цю невизначеність; для цього помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника. Дістанемо

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 + 6x + 5} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{3-x} - \sqrt{2x+6})(\sqrt{3-x} + \sqrt{2x+6})}{(x^2 + 6x + 5)(\sqrt{3-x} + \sqrt{2x+6})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3-x) - (2x+6)}{(x^2 + 6x + 5)(\sqrt{3-x} + \sqrt{2x+6})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3(x+1)}{(x+5)(x+1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{2x+6})} = \\ &= -3 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+5)(\sqrt{3-x} + \sqrt{2x+6})} = -\frac{3}{4(2+2)} = -\frac{3}{16}.\end{aligned}$$

Фактично у цьому прикладі, як і в попередньому, ми вилучаємо множник $(x+1)$, оскільки $x = -1$ є корінь функції, що стоять у чисельнику і знаменнику.

Відповідь: $-\frac{3}{16}$.

3.19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x^2} - 2}{x^2}.$

Розв'язання. Множення на спряжений вираз у цьому разі не врятовує ситуацію, тому треба помножити чисельник і знаменник на такий вираз, щоб скористатися формулою: $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x^2} - 2}{x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{8+x^2} - 2)(\sqrt[3]{(8+x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+x^2} + 4)}{(\sqrt[3]{(8+x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+x^2} + 4)x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(8+x^2) - 8}{(\sqrt[3]{(8+x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+x^2} + 4)x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+x^2} + 4} = \\ &= \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{1}{12}$.



Необхідні знання про першу важливу границю

Границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (3.3) називають *першою важливою границею*.

Відмітимо, що функція $\frac{\sin x}{x}$ у точці $x=0$ має невизначеність $\frac{0}{0}$.

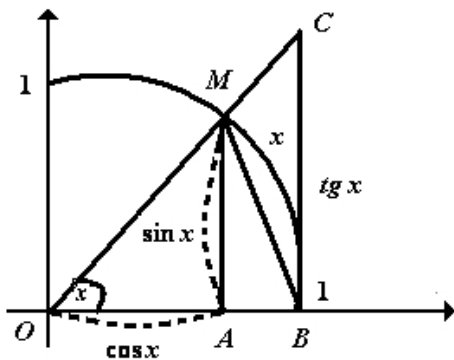


Рис. 3.21. Геометричне тлумачення доведення формули (3.3)

Доведемо формулу (3.3). Візьмемо круг з одиничним радіусом (рис. 3.21) і позначимо радіанну міру кута

$\angle COB$ через x . Нехай $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Запишемо співвідношення між площами трикутників OMB , OCB та кругового сектора OMB :

$$S_{\triangle OMB} < S_{\text{сектора } OMB} < S_{\triangle OCB}$$

де

$$S_{\triangle OMB} = \frac{1}{2} OB \cdot AM = \frac{1}{2} \sin x,$$

$$S_{\text{сектора } OMB} = \frac{1}{2} OM^2 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

$$S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} OB \cdot BC = \frac{1}{2} \tan x,$$

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

то

$$\text{звідси} \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad (\sin x > 0) \quad \text{або} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ і $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то за теоремою 3.7 (про границю проміжної функції) існує границя

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (3.4)$$

Нехай тепер $x < 0$. Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ парна: $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$,
тому

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (3.5)$$

Із формул (3.4) та (3.5) випливає формула (3.3).

Першу важливу границю широко використовують для обчислення границь виразів, що містять тригонометричні функції. За допомогою формули (3.3) можна довести границі:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} &= k; & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} &= k; & 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin kx}{x} &= k; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} kx}{x} &= k; & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Вчимося застосовувати першу важливу границю

3.20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}.$

$$3.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - 3 \cos 2x + 2}{\cos x - \cos 3x}.$$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - 3 \cos 2x + 2}{\cos x - \cos 3x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 2x - 1)(\cos 2x - 2)}{2 \sin 2x \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin 2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin 2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

$$3.22. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}.$$

Розв'язання. Передусім звернемо увагу на те, що в першій важливій границі аргумент $x \rightarrow 0$. Тому для зручності виконаємо заміну $\pi - x = t$. При цьому, якщо $x \rightarrow \pi$, то $t \rightarrow 0$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 5(\pi - t)}{\sin 2(\pi - t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(5\pi - 5t)}{\sin(2\pi - 2t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 5t}{-\sin 2t} = -\frac{5}{2}.$$

Відповідь: $-\frac{5}{2}$.

$$3.23. \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}.$$

Розв'язання. Маємо невизначеність $(0 \cdot \infty)$. Нехай $x - 2 = t$; при $x \rightarrow 2$, $t \rightarrow 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} &= \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi(2 + t)}{4} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{4} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi t}{4} \right) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos \frac{\pi t}{4}}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\frac{4}{\pi} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi t}{4}}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Відповідь: $-\frac{4}{\pi}$.



Необхідні знання про другу важливу границю

Другою важливою границею називають границею

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (3.6)$$

Відмітимо, що формула (3.6) справедлива як при $x \rightarrow +\infty$, так

і при $x \rightarrow -\infty$. Графік функції $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ зображено на рис. 3.22.

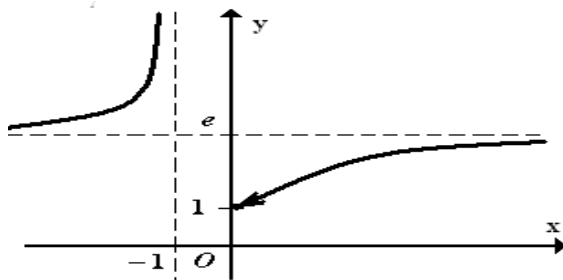


Рис. 3.22. Графік функції

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Виконавши у формулі (3.6)

заміну $\frac{1}{x} = t$, дістанемо формулу $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$, яку також називають другою важливою границею.

Число e - трансцендентне число, його наближене значення з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

Друга важлива границя пов'язана з невизначеністю 1^∞ (це не одиниця в якомусь конкретному степені, а символ для скороченого позначення границі виразу $u(x)^{v(x)}$, де $u(x) \rightarrow 1$, $v(x) \rightarrow \infty$, якщо $x \rightarrow x_0$).

Наслідки з другої важливої границі:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x &= e^k; & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \log_a e; \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a; & 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} &= k. \end{aligned}$$

При $a = e$ формули 2) і 3) набувають вигляду:

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Доведемо, наприклад, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Виконаємо заміну $e^x - 1 = t$, звідси $x = \ln(1+t)$. При $x \rightarrow 0$ $e^x - 1 \rightarrow 0$, отже, $t \rightarrow 0$. Тоді

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}} = \\ &= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\ln \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\ln e} = 1.\end{aligned}$$



Вчимося застосовувати другу важливу границю

При розкритті *невизначеності вигляду* 1^∞ використовують другу важливу границю або наслідки з неї.

3.24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{3x-2}.$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{3x-2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+1)-3}{x+1} \right)^{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+1} \right)^{3x-2} = (1^\infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{-3} \cdot \frac{-3}{x+1} (3x-2)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x+1} (3x-2)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x+6}{x+1}} = e^{-9}.\end{aligned}$$

Відповідь: e^{-9} .

М.В. При розв'язанні даного прикладу ми скористалися другою важливою границею, а також відомою властивістю границь

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}.$$

3.25. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3x+6}{x+4} \right)^{\frac{2}{x+1}}.$

Розв'язання. При $x = -1$ маємо невизначеність вигляду 1^∞ . Для зручності перетворень позначимо $x+1=t$. Тоді

$$\left(\frac{3x+6}{x+4} \right)^{\frac{2}{x+1}} = \left(\frac{3(x+1)+3}{(x+1)+3} \right)^{\frac{2}{x+1}} = \left(\frac{3+3t}{3+t} \right)^{\frac{2}{t+1}} = \left(\frac{3+t+2t}{3+t} \right)^{\frac{2}{t}} = \left(1 + \frac{2t}{3+t} \right)^{\frac{2}{t}}.$$

Отже,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3x+6}{x+4} \right)^{\frac{2}{x+1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{2t}{3+t} \right)^{\frac{3+t}{2t}} \right]^{\frac{2t}{3+t} \cdot \frac{2}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{4}{3+t}} = e^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{e^4}.$$

Розглянемо найбільш загальний випадок. Нехай потрібно обчислити границю $\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x))^{v(x)}$, де $u(x) \rightarrow 1$, $v(x) \rightarrow \infty$ за умови $x \rightarrow x_0$.

Виконаємо перетворення:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (u(x))^{v(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + (u(x) - 1) \right)^{\frac{1}{u(x) - 1} \cdot (u(x) - 1) v(x)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) - 1) v(x)} = \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) - 1) \cdot v(x) = A \right\} = e^A. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким чином, задача зведена до обчислення границі

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) - 1) v(x).$$

Висновок. Якщо $u(x) \rightarrow 1$, $v(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x))^{v(x)} = e^A,$$

де $A = \lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) - 1) v(x)$.

Відповідь: $\sqrt[3]{e^4}$.

Обчисліть границі, використовуючи наслідки з другої важливої границі.

3.26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 4^{-x}}{2^{\sin x} - 1}.$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 4^{-x}}{2^{\sin x} - 1} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4^x - 1) - (4^{-x} - 1)}{\frac{2^{\sin x} - 1}{\sin x} \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4^x - 1) - (4^{-x} - 1)}{\ln 2 \cdot \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4^x - 1}{x} + \frac{4^{-x} - 1}{-x}}{\ln 2 \cdot \frac{\sin x}{x}} = \frac{\ln 4 + \ln 4}{\ln 2} = 4. \end{aligned}$$

Тут ми двічі скористалися наслідком з другої важливої границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Відповідь: 4.

$$3.27. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x).$$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = [\infty \cdot 0] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: 1.

$$3.28. \lim_{x \rightarrow 0} \log_{\cos x} (1 + x^2).$$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log_{\cos x} (1 + x^2) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln \cos 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln(1 - 2\sin^2 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} \cdot x^2}{\frac{\ln(1 - 2\sin^2 x)}{-2\sin^2 x} \cdot (-2\sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2\sin^2 x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

$$3.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-x)^5 - 1}{x^2 - 1}.$$

Розв'язання. Для зручності виконаємо заміну $x-1=t$; якщо $x \rightarrow 1$, то $t \rightarrow 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-x)^5 - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1-t)^5 - 1}{(1+t)^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1-t)^5 - 1}{t(t+2)} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1-t)^5 - 1}{-t} = -\frac{1}{2} \cdot 5 = -2,5. \end{aligned}$$

Тут ми скористалися наслідком з другої важливої границі, а саме:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k.$$

Відповідь: $-2,5$.



Необхідні знання про порівняння нескінченно малих величин та еквівалентність нескінченно малих функцій

Дві нескінченно малі функції порівнюють між собою за допомогою дослідження їх відношення.

Нехай $\alpha(x), \beta(x)$ - нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$. Припустимо, що існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$, де k - дійсне число або ∞ . Тоді:

- 1) якщо $k \neq 0$ і $k \in \mathbb{R}$, то нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *нескінченно малими одного порядку*, при цьому пишуть: $\alpha(x) = O(\beta(x))$;
- 2) якщо $k = 0$, то нескінченно малу $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою вищого порядку*, ніж $\beta(x)$, при цьому пишуть: $\alpha(x) = o(\beta(x))$;
- 3) якщо $k = 1$, то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *еквівалентними*. Це позначають так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$;
- 4) якщо $k = \infty$, то нескінченно малу $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою нижчого порядку*, ніж $\beta(x)$, при цьому пишуть: $\beta(x) = o(\alpha(x))$;
- 5) функцію $\alpha(x)$ називають нескінченно малою p -го порядку відносно $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^p} = k \quad (k \neq 0, \quad k \neq \infty).$$

З останньої формули випливає еквівалентність

$$\alpha(x) \sim k \cdot (\beta(x))^p.$$

У цьому разі величину $k \cdot (\beta(x))^p$ називають *головною частиною* функції $\alpha(x)$.

М.В.

1. Якщо границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує (і не дорівнює ∞), то нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ порівняти не можна.
2. За такими ж правилами порівнюють нескінченно малі функції і при $x \rightarrow \pm\infty$ та $x \rightarrow \pm x_0$, а також нескінченно великі величини.

Серед нескінченно малих функцій особливу роль відіграють еквівалентні нескінченно малі.

Перелічимо найважливіші еквівалентні нескінченно малі величини.

Нехай $x \rightarrow 0$, тоді існує низка еквівалентностей

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x),$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad a^x - 1 \sim x \ln a, \quad (1+k)^k - 1 \sim kx,$$

$$\log_a(1+x) \sim x \log_a e, \quad \text{якщо } x \rightarrow 0.$$

При обчисленні границь широко використовують такі властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій:

1. Якщо $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \quad (3.7)$$

Доведення. Нехай $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)}{\beta(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \end{aligned}$$

Ця властивість дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожен з них (або тільки одну) замінити іншою нескінченно малою, яка еквівалентна заданій.

2. Сума нескінченно малих різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

Доведення. Нехай $\alpha(x) \rightarrow 0$, $\beta(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, причому $\alpha(x)$ - нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Отже, $\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

3. Різниця двох еквівалентних нескінченно малих функцій є нескінченно мала більш високого порядку, ніж кожна з них.

4. Сума нескінченно великих різних порядків еквівалентна доданку вищого порядку.

5. Якщо $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\gamma(x) \sim \gamma_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$, причому $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) - \gamma_1(x)}{\beta(x)}.$$



**Вчимося застосовувати
еквівалентності нескінченно
малих функцій**

Обчисліть границі, використовуючи еквівалентності.

3.30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\arcsin 3x}.$

Розв'язання. При $x \rightarrow 0$ $\sin 5x \sim 5x$, $\arcsin 3x \sim 3x$. За формулою (3.7) дістаємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\arcsin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Відповідь: $\frac{5}{3}$.

$$3.31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \sin 3x + e^{x^2} - 1}{\arctg^2 x - x + \tg 4x}.$$

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. При $x \rightarrow 0$ правильні еквівалентності:

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \sin 3x \sim 3x, \quad e^{x^2} - 1 \sim x^2, \quad \arctg^2 x \sim x^2, \\ \tg 4x \sim 4x.$$

Спираючись на теореми про еквівалентності, дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \sin 3x + e^{x^2} - 1}{\arctg^2 x - x + \tg 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3x + x^2}{x^2 - x + 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + x^2}{x^2 + 3x} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + x}{x + 3} = \frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}$.

$$3.32. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x - \sin x)^3}{\tg x - \sin x}.$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Розглянемо чисельник. При $x \rightarrow 0$ $\sin 2x \sim 2x$, $\sin x \sim x$, тому границя не зміниться, якщо $(\sin 2x - \sin x)^3$ замінити на x^3 . Розглянемо тепер знаменник. При $x \rightarrow 0$ функції $\tg x$ і $\sin x$ між собою еквівалентні. Оскільки різниця еквівалентних нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ - нескінченно мала вищого порядку, ніж $\alpha(x)$, і $\beta(x)$ і не дорівнює нулю, не можна у даному прикладі знаменник замінити на $x - x$, або $\tg x - x$, або $x - \sin x$. Перетворимо знаменник так:

$$\tg x - \sin x = \tg x(1 - \cos x) = 2 \tg x \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2x \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{2}.$$

Отже,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x - \sin x)^3}{\tg x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^3}{2}} = 2.$$

Відповідь: 2.

3.33. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x) = x^2 + 3x + 2$ та $\beta(x) = \operatorname{tg}(x+1)$ при $x \rightarrow -1$.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення даних функцій:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{\operatorname{tg}(x+1)} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+4)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+4) = 3.\end{aligned}$$

Отже, функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \rightarrow -1$ - нескінченно малі одного порядку.

3.34. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x) = x \operatorname{arctg} x^{-2}$ та $\beta(x) = (x-3)^{-1/3}$ при $x \rightarrow \infty$.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення наведених функцій:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \operatorname{arctg} x^{-2}}{(x-3)^{-1/3}} &= |x-3 \sim x| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \operatorname{arctg} x^{-2}}{x^{-1/3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x^{-2}}{x^{-4/3}} = |x^{-2} = t| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^{2/3}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^{2/3}} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{1/3} = 0.\end{aligned}$$

Отже, $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow \infty$.

3.35. Доведіть еквівалентність $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$, якщо $x \rightarrow 0$.

Розв'язання. Достатньо показати, що границя відношення цих функцій при $x \rightarrow 0$ дорівнює 1. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\frac{x}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{2}{1+1} = 1$$

3.36. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x) = \sin x$ та $\beta(x) = |x|$ при $x \rightarrow 0$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|};$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x}{-x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{x} = 1.$$

Отже, границя відношення даних функцій при $x \rightarrow 0$ не існує. Це означає, що зазначені функції при $x \rightarrow 0$ порівняти не можна.

3.37. Порівняйте нескінченно великі функції $\alpha(x) = x^2 + 1$ та $\beta(x) = \frac{2x^3 + 3x + 4}{2x + 1}$ при $x \rightarrow \infty$.

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{\frac{2x^3 + 3x + 4}{2x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)(2x + 1)}{2x^3 + 3x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{2 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = 1,$$

то задані функції при $x \rightarrow \infty$ еквівалентні.

Евристичний тренажер «Limit» допоможе оволодіти вмінням по обчисленню границь функцій.

1. Запустіть програму (рис. 3.23) та виберіть для роботи вкладки «Актуалізація знань», «Основна частина», «Тест».

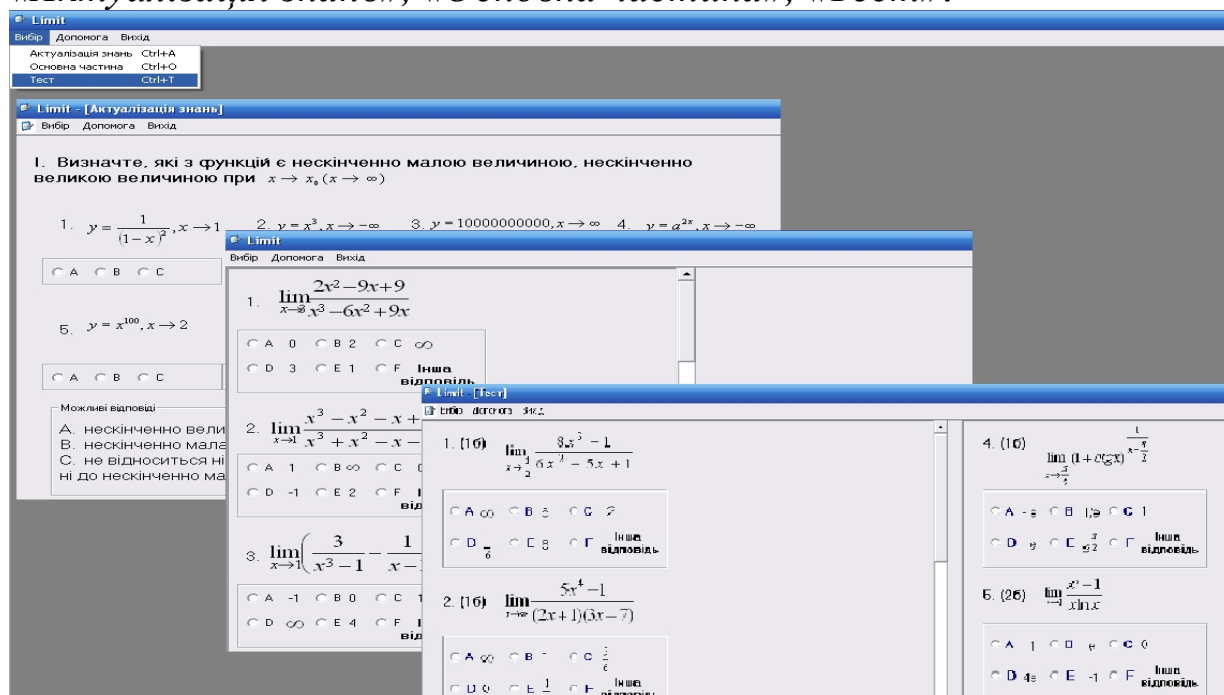


Рис. 3.23. Запуск тренажеру «Limit» та вибір вкладки

2. Отримайте вікно із завданням по дослідженню функції та обчисленню її границі. Обирайте в залежності від особистої орієнтації у завданнях «Основної частини» пропозиції «далі» або **Допомога** в разі необхідності допомоги (рис. 3.24).

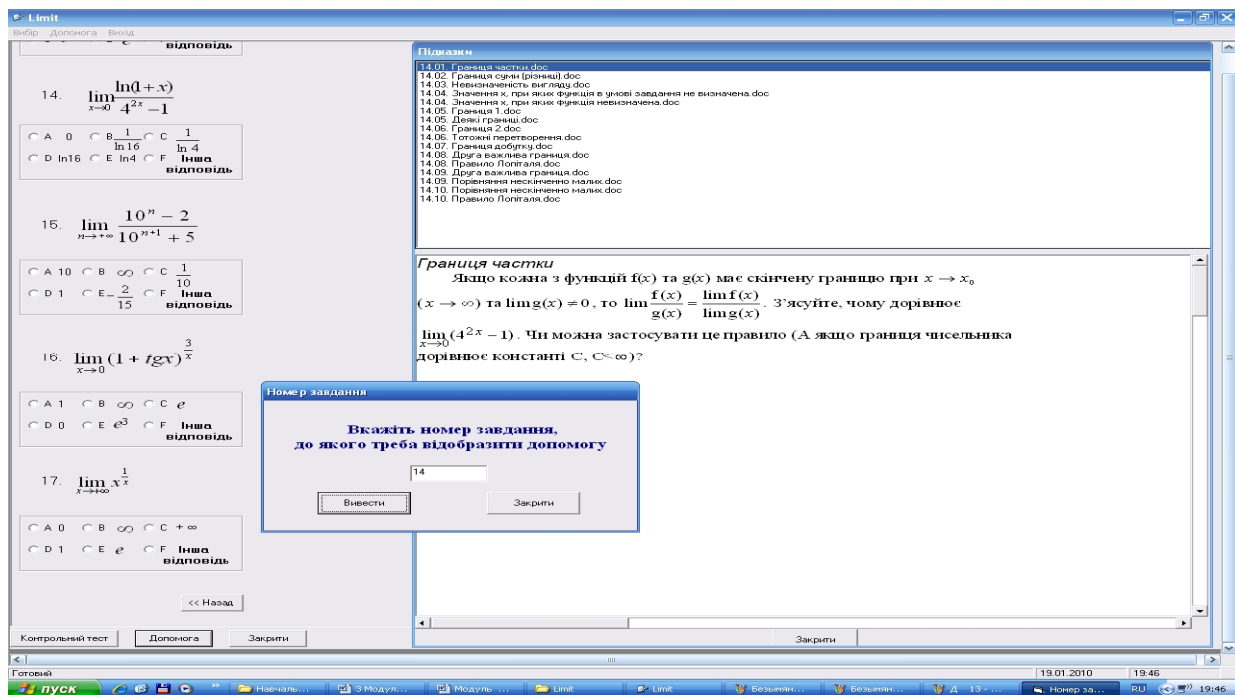


Рис. 3.24. Вікно із завданням по дослідженню функції та обчисленню її границі



Обчислюємо границі функції в точці за допомогою ППЗ Maple

Процедура обчислення границь функцій за допомогою відповідних правил.

У теорії механізмів і машин для кінематичного дослідження механізмів застосовуються графічний метод визначення траєкторії руху точок і побудови планів механізмів, що задані у вигляді не тільки послідовностей, але й функцій та метод кінематичних діаграм із дослідженням граничної поведінки функцій, що визначають переміщення ланок механізмів.

3.38. Задамо траєкторії переміщення ланок механізмів за допомогою функцій та дослідимо їх граничну поведінку.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Розв'язання.

Крок 1. Маємо невизначеність вигляду 1^∞ , для розкриття якої використаємо зведення до обчислення границі $\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) - 1)v(x)$

за формулою (3.8). У нашому випадку $u(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$, $v(x) = \frac{1}{x^2}$,
 $u(x) \rightarrow 1$, $v(x) \rightarrow \infty$, якщо $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x} \right).$$

Крок 2. Для спрощення чисельника виразу $\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cdot \cos 2x}$ скористаємось тригонометричною тотожністю $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)$, після чого застосуємо властивості границі функції (якщо кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має скінченну границю в точці a , тоді в цій точці виконуються рівність: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x^2 \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

Крок 3. За першою важливою границею $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} = 3 \quad \text{та} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Крок 4. Якщо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

Крок 5. Якщо $u(x) \rightarrow 1$, $v(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, то $\lim_{x \rightarrow x_1} (u(x))^{v(x)} = e^A$,
де $A = \lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) - 1)v(x)$.

$$\text{Тоді } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}.$$

Відповідь: $\sqrt{e^3}$.

Процедура обчислення границь функцій за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Maple.



«Навчаємо» свій комп'ютер одночасному обчисленню границі функції та побудові траєкторії руху за допомогою ППЗ Maple.

1. Відкрити вікно ППЗ Maple.
2. За допомогою опції *Insert-Execution Grope-Before Cursor* отримати у полі програми мітку **>**.
3. Активізувати зліва вкладки *Expression* й *Common Symbols* та з отриманих шаблонів ввести в окремих дужках границю функції, її складові та символ «;».
4. Отримати значення границі послідовності.
5. Натиснути клавішу *Enter* та отримати курсор для опрацювання функції.
6. Ввести в окремих дужках складові функції із зазначенням інтервалів, на яких Вас цікавить зображення траєкторії руху в *style = point*.
7. За допомогою опції *Insert-Plot-2D* отримати Декартову систему координат, в яку скопіювати вираз функції.
8. Отримати траєкторію руху точок для побудови планів механізмів (рис.3.25).

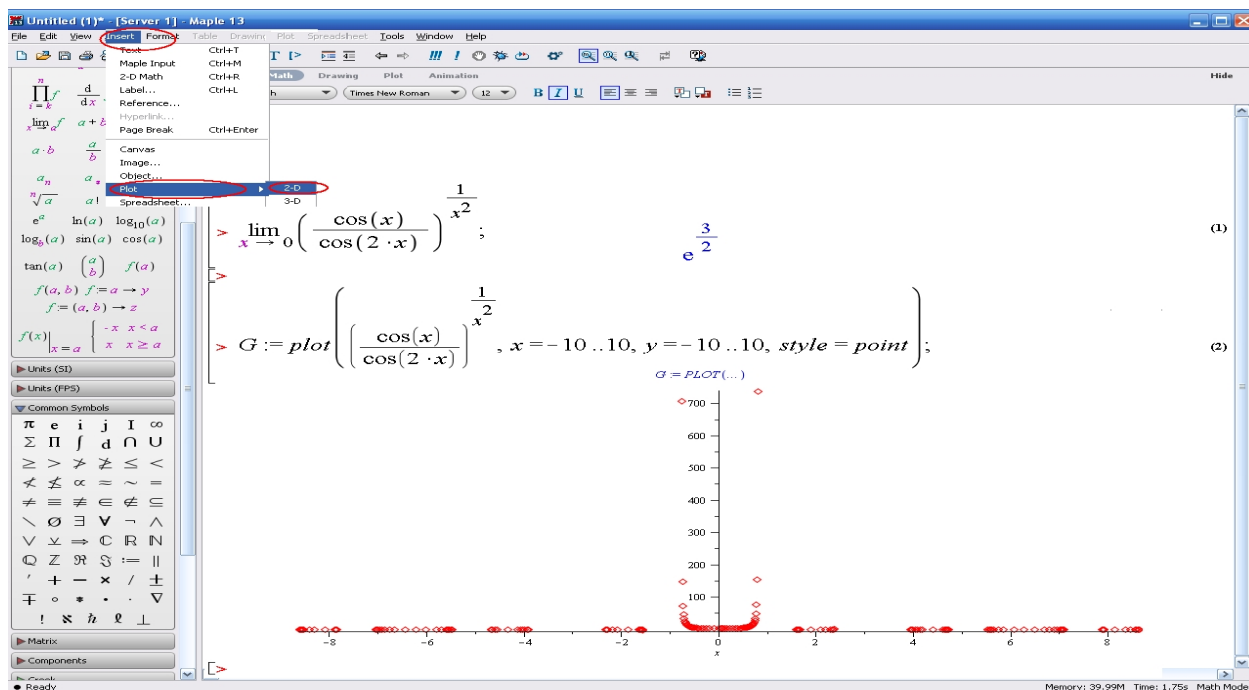
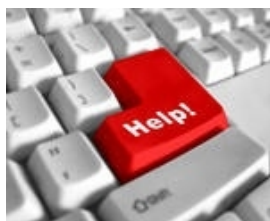


Рис. 3.25. Вікно ППЗ Maple: задання траєкторії переміщення ланок механізмів за допомогою функцій та дослідження їх граничної поведінки



Моделюємо професійну діяльність інженера

3.39. Матеріальна точка коливається по колу біля свого середнього положення за законом $x = A \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin \omega \cdot t$, де $(A, k, \omega > 0)$. Знайдіть $\lim_{t \rightarrow \infty} x$.



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Знайдіть границю функції $\lim_{t \rightarrow \infty} A \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin \omega \cdot t$ за допомогою ППЗ.

Відповідь: $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$ - коливання затухаючі.

3.40. Розрахунок робочого колеса турбіни приводить до рівняння $\ln y = -k^2 \cdot x^2 + \ln y_0$, де y – товщина колеса на відстані x від осі обертання, y_0 – значення y при $x = 0$. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{y_0}$.



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Скористайтесь основною логарифмічною тотожністю та властивостями степеня для вираження

відношення $\frac{y}{y_0}$: $y = e^{-k^2 \cdot x^2 + \ln y_0} = e^{-k^2 \cdot x^2} \cdot e^{\ln y_0} = e^{-k^2 \cdot x^2} \cdot y_0$.

Знайдіть границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-k^2 \cdot x^2}$ за допомогою ППЗ.

Відповідь: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{y_0} = 1$.

3.41. Висота частини вертикального струменя фонтану наближено виражається формулою $h = \frac{H}{1 + \varphi \cdot H}$, де H – величина напору води в насадках (у метрах водяного стовпа), φ – коефіцієнт, що визначається діаметром d (мм) вихідного перерізу насадки.

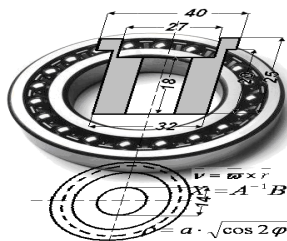
Побудуйте графіки залежності $h(H)$ при різних значеннях φ : $\varphi = 0,023$, $\varphi = 0,009$, $\varphi = 0,004$; дослідіть та порівняйте поведінку відповідних функцій.



Переформулюйте задачу математичною мовою, тобто знайдіть $\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{H}{1 + \varphi \cdot H}$ за допомогою ППЗ.

Значення цієї границі $\frac{1}{\varphi}$ вказує на існування горизонтальної асимптоти $h = \frac{1}{\varphi}$ (при $\varphi = 0,023$, $h = 43,48$, тобто необхідно побудувати лінію $y(x) = 43,48$) Для інтерпретації результатів порівняння отриманих залежностей побудуйте за допомогою ППЗ графіки залежностей при різних значеннях φ , з урахуванням того, що за змістом задачі h обмежено відрізком $[0; H]$

Відповідь: при збільшенні φ висота струменя зменшується, причому зміна величини напору при збільшенні φ майже не впливає на висоту струменя; при зменшенні φ $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{H}{1 + \varphi \cdot H} = H$, тобто висота струменя прямує до H .



Тема 3. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

Моделі з неперервними змінними широко використовуються для опису й аналізу явищ нелінійної динаміки в механіці, фізиці рідин і газів.

Чи є неперервними функціональні залежності для реальних величин? Ситуація з поняттям неперервності стає невизначеною, якщо мова йдеться про інтенсивні величини, наприклад швидкість зміни розподілу якої-небудь квантової

частинки, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v(t)$. Якщо дійсно, вимагати, щоб $\Delta t \rightarrow 0$, то функція $v(t)$ буде прямувати до $+\infty$ або $-\infty$ (у момент розподілу або загибелі частинки), а в проміжках між розподілами частинок буде прямувати до нуля. Отже, поняття $v(t)$, як неперервної функції, що залежить від t , можна ввести тільки наближено, якщо розглядати кінцеві, досить великі проміжки часу Δt й відповідні їм кінцеві прирощення Δx .



Необхідні знання про неперервність функції у точці

Розглянемо графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, зображені на рис. 3.26.

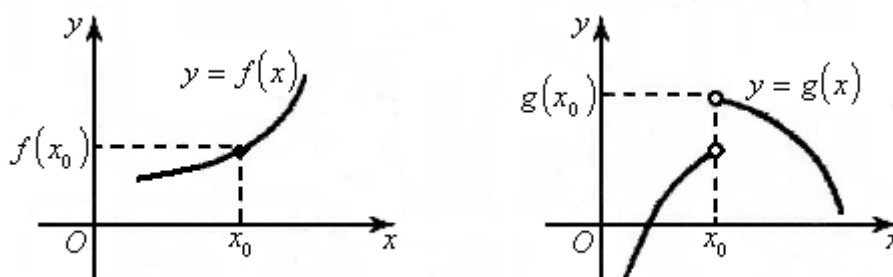


Рис. 3.26. Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$

З рисунка 3.26 видно, що графіком функції $f(x)$ є суцільна крива, яку можна побудувати, не відриваючи олівець від паперу. Графік функції $g(x)$ не є суцільною кривою, у точці x_0 графік робить «стрибок». Тому кажуть, що функція $f(x)$ у точці x_0 неперервна, а $g(x)$ у точці x_0 розривна.

Дамо строге означення неперервності функції у точці.

Def. Функцію $f(x)$ називають *неперервною в т. x_0* , якщо вона визначена в цій точці й деякому її околі та

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \quad (3.9)$$

тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

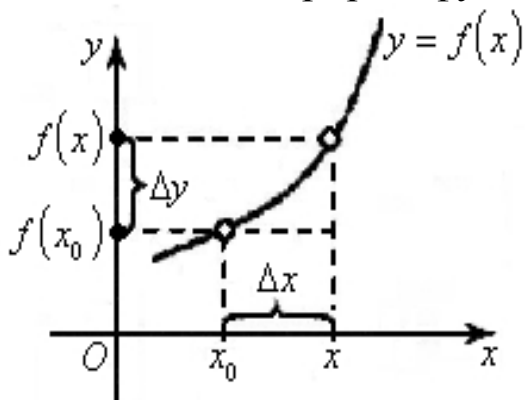


Рис. 3.27. Геометричне тлумачення неперервної функції

На рис. 3.27 $\Delta x = x - x_0$ — приріст аргументу, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приріст функції. Перетворимо рівність (3.9):

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= 0, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] &= 0, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0). \end{aligned}$$

З останньої рівності випливає, що $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0)$.

Отже, при відшукуванні границі *неперервної* функції можна перейти до границі під знаком функції, тобто у функцію $f(x)$ замість аргументу x підставити значення $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x$.

Сформулюємо ще одне означення неперервності, рівносильне попередньому.

Def. Функцію $f(x)$ називають *неперервною* в точці x_0 , якщо виконуються умови:

- 1) вона визначена в цій точці і деякому її околі;
- 2) існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) ця границя дорівнює значенню функції в точці x_0 , тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$



Вчимося досліджувати функції на неперервність

3.42. Дослідіть на неперервність функцію $y = \sin x$.

Розв'язання. Функція $y = \sin x$ визначена для всіх дійсних значень x .

Нехай x — довільна точка. Розглянемо приріст функції у цій точці:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 0 \cdot \cos x = 0 \end{aligned}$$

Отже, для будь-якої точки $x \in \mathbb{R}$ нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст функції Δy , тобто задана функція неперервна на всій числовій осі.

3.43. Дослідіть на неперервність функцію $y = \frac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Функція $y = \frac{\sin x}{x}$ є відношенням двох елементарних функцій $y = \sin x$ та $y = x$, які неперервні для всіх $x \in \mathbb{R}$.

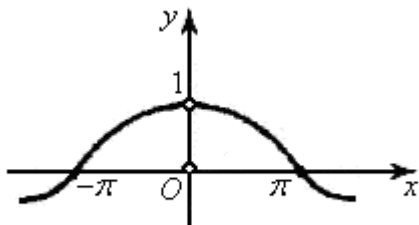


Рис. 3.28. Геометричне тлумачення точки розриву

функції $y = \frac{\sin x}{x}$

Відношення цих функцій є неперервною функцією для всіх x , крім точки $x = 0$, в якій дріб невизначений. Отже, $x = 0$ – точка розриву заданої функції (рис. 3.28).

Дослідимо цю точку:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Отже, $x = 0$ – точка усувного розриву.

Якщо довизначити функцію у точці $x = 0$, поклавши $y(0) = 1$, то дістанемо вже неперервну функцію

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Евристичний тренажер «Continuity and Graphics» допоможе оволодіти вмінням по дослідженню функції на неперервність.

1. Запустіть програму для роботи (рис. 3.29) та оберіть завдання для опрацювання.

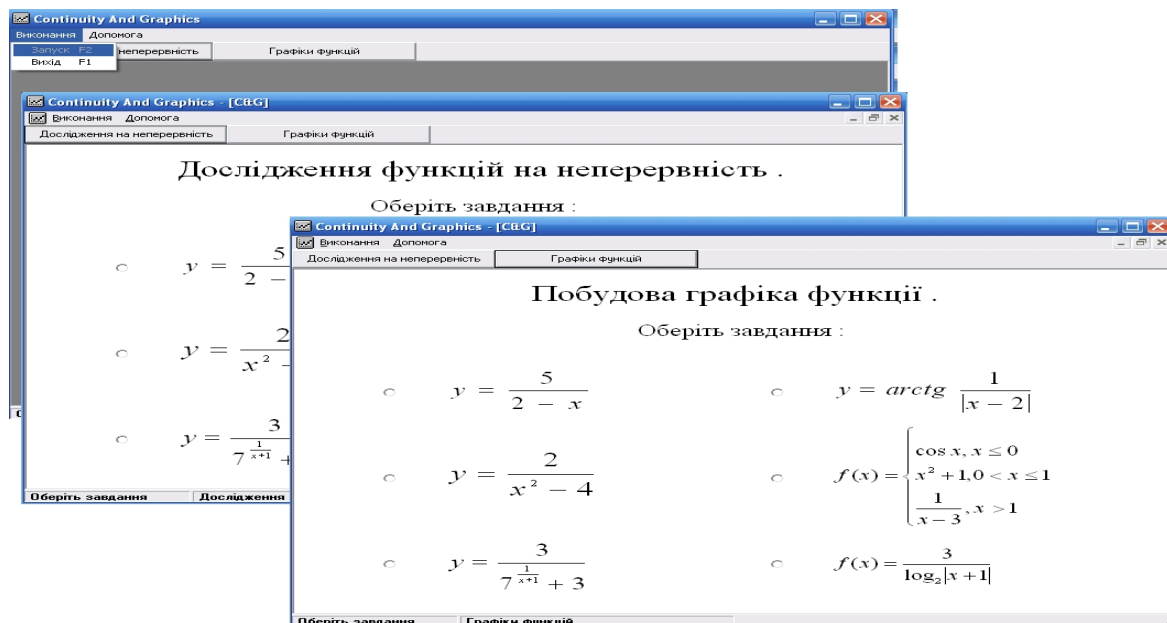


Рис. 3.29. Запуск тренажеру «Continuity and Graphics» та робота із вкладками

2. Отримайте вікно із завданням по дослідженню на неперервність функції. Обирайте в залежності від особистої орієнтації у наступних діях пропозиції **Завдання** або **Допомога** в разі необхідності допомоги (неправильність виконання завдання зазначається червоним хрестиком) (рис. 3.30).

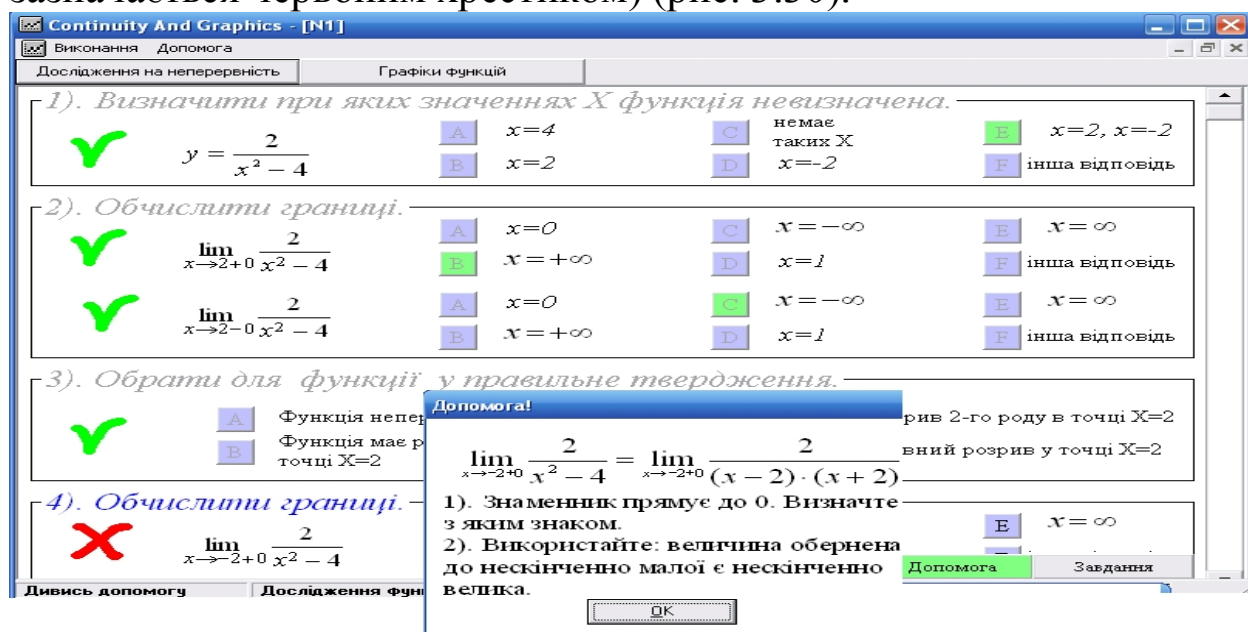


Рис. 3.30. Вікно із завданням по дослідженню на неперервність функції

3. Результати правильних або не правильних перетворень допоможуть обрати правильний шлях по дослідженню функції та закінчити виконання завдання.



Необхідні знання про розриви функцій та їх класифікація

Def. Якщо хоча б одна з умов неперервності функції в точці не виконується, то функція *розривна* в точці x_0 , а саму точку x_0 називають *точкою розриву функції*.

Класифікацію точок розриву приводять так:

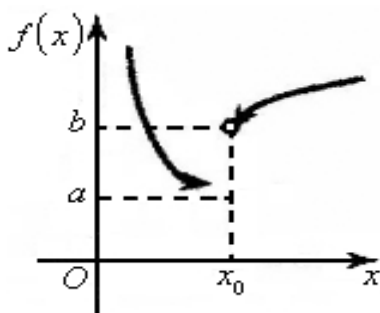


Рис. 3.31. Геометричне тлумачення точок розриву першого роду

1) якщо існують лівостороння і правостороння границі функції в точці x_0 , тобто $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = b$, де a і b – скінченні числа, причому $a \neq b$ (рис. 3.31), то точку x_0 називають *точкою розриву першого роду*; в точці x_0 сама функція може бути як визначена, так і невизначена;

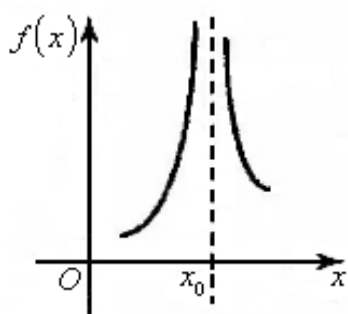


Рис. 3.32. Геометричне тлумачення точок розриву другого роду

2) якщо хоча б одна з границь $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, то точку x_0 називають *точкою розриву другого роду* (рис. 3.32);

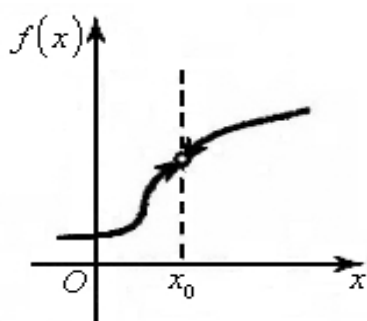


Рис. 3.33. Геометричне тлумачення усувної точки розриву

3) якщо $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$, $a \neq \infty$, $f(x_0) \neq a$ або в цій точці функція невизначена, то точку x_0 називають усувною точкою розриву (рис. 3.33).

У першому випадку кажуть, що функція робить «скінченний стрибок», а у другому – «нескінченний стрибок».



Вчимося досліджувати функції на неперервність та існування точок розриву

3.44. Дослідіть на неперервність функцію $y = \arctg \frac{1}{x}$ у точці $x = 0$.

Розв'язання. Очевидно, що в точці $x = 0$ функція не має сенсу.

Знайдемо односторонні границі: $\lim_{x \rightarrow 0-0} \arctg \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

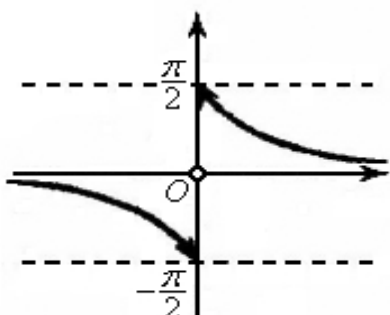


Рис. 3.34. Геометричне тлумачення точки розриву функції

Згідно з класифікацією точок розриву робимо висновок, що $x = 0$ – точка розриву першого роду (рис.3.34).



Необхідні знання про основні властивості неперервних у точці функцій

1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в т. x_0 , то в цій точці неперервні функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови $g(x_0) \neq 0$).

2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в т. x_0 , а функція $y = f(u)$ неперервна в т. $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x_0))$ неперервна в т. x_0 .

3. Всяка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.



Необхідні знання про властивості функцій, неперервних на відрізку

Def. Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу $(a; b)$, то вона називається неперервною на цьому інтервалі.

Def. Функція неперервна на відрізку $[a; b]$, якщо вона неперервна на $(a; b)$ і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b .

Сформулюємо теореми про неперервні функції.

Теорема 3.8 (перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набуває значень різних знаків, то всередині відрізку $[a; b]$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$, в якій функція дорівнює нулю.

Теорема 3.9 (друга теорема Больцано-Коші). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і набуває на його кінцях різних значень: $f(a) \neq f(b)$. Тоді для довільного числа $\mu \in [f(a); f(b)]$ знайдеться таке число $c \in (a; b)$, що $f(c) = \mu$.

Теорема 3.10 (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найбільше і найменше.

Із цієї теореми випливає, що неперервна на відрізку функція обмежена на цьому відрізку.



Досліджуємо функції на неперервність у точці за допомогою ППЗ Gran2D

Процедура дослідження функції на неперервність у точці за допомогою відповідних правил.

Рівняння нерозривності (неперервності) виражають однакову ідею неперервної зміни деякої величини. Рівняння неперервності в *теоретичній механіці* застосовується як локальна форма законів зберігання. У *електродинаміці* рівняння неперервності застосовується для розрахунків щільності струму. У *теорії хвиль* рівняння неперервності виражає собою закон зберігання енергії в елементарній області, в якій розповсюджуються хвилі будь-якої природи. У *гідродинаміці* рівняння неперервності іноді називається рівнянням нерозривності та виражає собою закон зберігання маси в елементарній області, тобто неперервність потоку рідини або газу. В *опорі матеріалів* одне з основних припущень є припущення про суцільну (неперервну) будову тіл, що дозволяє використовувати математичний апарат неперервних функцій.

3.45. Дослідіть функцію $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$ на неперервність для подальшого розрахунку прикладних завдань (внутрішньої напруги, деформацій і так далі) у точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ і $x_3 = 2$.

Розв'язання.

Крок 1. У точці $x_1 = 0$ функція визначена: $y(0) = -1$, значить, вона неперервна як елементарна функція.

Крок 2. Перевіримо точку $x_2 = 1$. У цьому разі знаменник функції обертається в нуль, отже, $x_2 = 1$ – точка розриву.

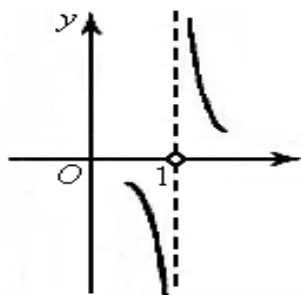


Рис. 3.35. Поведінка графіка функції в околі точки $x_2 = 1$

Крок 3. Розглянемо поведінку графіка функції в околі точки $x_2 = 1$ (рис. 3.35).

Крок 4. Знайдемо односторонні границі при $x \rightarrow 1 \pm 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

Обидві границі дорівнюють нескінченності. Отже, $x=1$ – точка розриву другого роду.

Крок 5. У точці $x_3 = 2$ функція невизначена, тобто $x_3 = 2$ – точка розриву. Обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-1} = 1.$$


$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$, $a \neq \infty$, $f(x_0) \neq a$ та в цій точці функція невизначена, отже, $x_3 = 2$ – точка усувного розриву.


Процедура дослідження функції на неперервність у точці за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathcad.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню границі послідовності за допомогою ППЗ Mathcad.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathcad.
2. За допомогою опції Вид – Панели инструментов – Исчисления, Вид – Панели инструментов – Калькулятор, Вид – Панели инструментов – Вычисление та Вид – Панели инструментов – Графики винести на панель інструментів вкладки (рис. 3.36):

3. Обрати на вкладках панелі інструментів *Графики* побудову кривої .

4. Після отримання у полі програми зображення декартової системи координат, заповнити мітку лівого кута  виразом

відповідної функції $\frac{x-2}{x^2-3x+2}$ із зазначенням змінної, за якою відбувається дослідження.

Розгляньте поведінку графіка функції в околі точок $x_1=0$, $x_2=1$ і $x_3=2$.

5. Обрати у вкладці *Исчисление* «Односторонняя граница».

6. Набрати з клавіатури *Калькулятора* задану функцію та із вкладки *Вычисление* обрати \rightarrow .

7. Отримати значення односторонніх границь функції при $x \rightarrow 1^+$ та $x \rightarrow 2^+$ й зробити відповідні висновки (рис. 3.37).

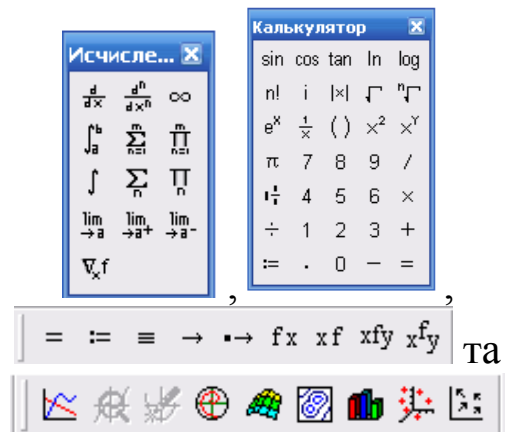


Рис. 3.36. Вкладки панелі інструментів ППЗ Mathcad

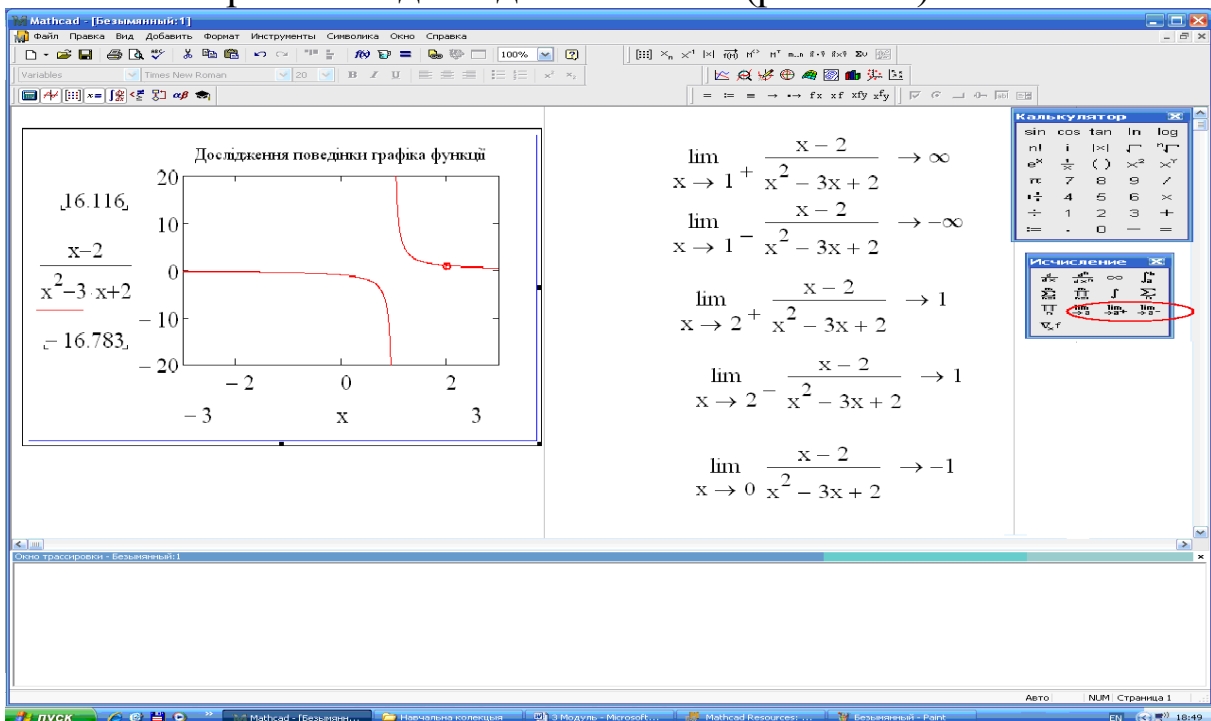


Рис. 3.37. Вікно ППЗ Mathcad: побудова графіку функції для дослідження й обчислення односторонніх границь



Моделюємо професійну діяльність інженера

3.46. Кількість електроенергії, що протікає через який-небудь переріз провідника, вважаючи від деякого початкового моменту, є неперервна функція від часу: $Q = Q(t)$. Визначити величину току в момент t для постійного й змінного току.



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Враховуючи, що середня величина току $I_{cp} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, моделюйте умову завдання вводячи функціональні залежності $Q = Q(t)$ різного вигляду із дослідженням їх на неперервність за допомогою ППЗ.

Відповідь: величина току в момент часу t для постійного току – $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ (постійне значення), для змінного току – $i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \varphi(t)$ (функціональна залежність).

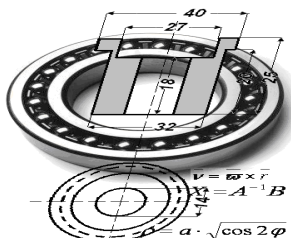
3.47. Уздовж балки неперервно розподілене навантаження p . Навантаження, що доводиться на ділянку балки від її початку до точки з абсцисою x , буде функціональною залежністю від x : $p = p(x)$, неперервною по всій довжині балки. Визначити середню інтенсивність навантаження для ділянки x й інтенсивність навантаження в точці x . Якою буде інтенсивність навантаження при рівномірному розподілі її?



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Моделюйте умову завдання вводячи функціональні залежності $p = p(x)$ різного вигляду із дослідженням їх на неперервність за допомогою ППЗ.

Відповідь: середня інтенсивність навантаження $q_{cp} = \frac{\Delta p}{\Delta x}$.

Інтенсивність у будь-якому перерізі $q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} = q(x)$, а при рівномірному розподілі навантаження $q = const$.



Тема 4. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Припустимо, що в момент часу t розпочинається хімічна реакція. Кількість речовини, яка вступила в реакцію до моменту часу t , позначимо $c(t)$. Кількість речовини, яка вступила в реакцію за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$, дорівнюватиме $c(t + \Delta t) - c(t)$.

Відношення

$$\frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t}$$

характеризує середню швидкість реакції, а границя

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t}$$

називається швидкістю хімічної реакції в момент часу t та визначає поняття похідної функції, що задана у вигляді $y = c(t)$.



Необхідні знання про означення похідної

Задамо функцію $y = f(x)$ визначену на проміжку $(a; b)$. Візьмемо будь-яке значення x із цього проміжку і надамо йому приросту Δx .

Різницю

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

називають *приростом функції в точці x* .

Приріст аргументу $\Delta x \neq 0$ може набувати як додатних, так і від'ємних значень, але так, що значення $x + \Delta x$ не виходить за межі області визначення функції $f(x)$.

Def. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ до приросту аргументу Δx , коли останній прямує до нуля, тобто

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Функцію, яка має скінченну похідну в точці x , називають *диференційованою* в цій точці. Обчислення похідної називають диференціюванням.

Позначення похідної: $y'(x)$, $f'(x)$ (за Лагранжем), або $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ (за Лейбніцем). З означення похідної випливає, що похідна $y'(x)$ у точці x є числом. Але якщо таке число існує для кожної внутрішньої точки проміжку $(a; b)$, то похідну можна розглядати як функцію точки x із даного проміжку.

Якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \pm\infty$, тоді функція $f(x)$ має в точці x нескінченну похідну.

Відмітимо, що з диференційовності функції в деякій точці випливає неперервність у цій точці. Обернене твердження неправильне.



Вчимося обчислювати похідну за означенням

3.48. Користуючись означенням похідної, покажіть, що похідна функції $y = \sqrt[3]{x}$ у точці $x = 0$ не існує.

Розв'язання. Для функції $y = \sqrt[3]{x}$, визначеної і неперервної на всій числовій прямій, у точці $x = 0$ маємо:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = \infty.\end{aligned}$$

Отже, границя при $\Delta x \rightarrow 0$ нескінченно зростає. Тому похідна функції $y = \sqrt[3]{x}$ у точці $x = 0$ не існує. Так само можна показати, що неперервна на всій числовій прямій функція $y = |x|$ також не має похідної в точці $x = 0$.

Висновок. Якщо функція неперервна в точці x , то не обов'язково вона має похідну в цій точці. Проте, якщо функція диференційована (існує похідна) в точці x , то вона і неперервна в цій точці.



Необхідні знання про геометричний, фізичний та механічний зміст похідної

Дамо геометричне тлумачення похідної.

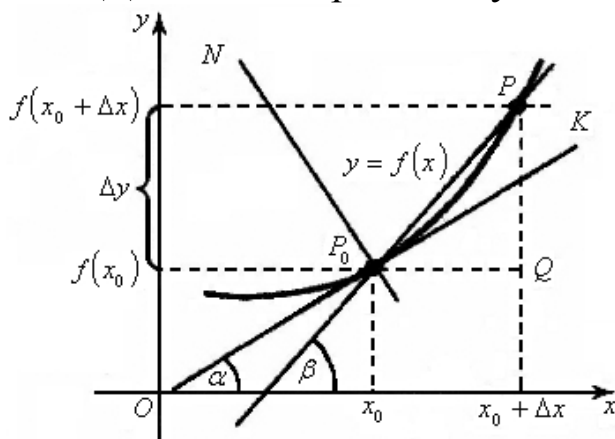


Рис. 3.38. Геометричне тлумачення похідної

Розглянемо графік функції $y = f(x)$ в околі точки x_0 (див. рис. 3.38). Нехай P_0 – точка кривої з координатами $(x_0; f(x_0))$, а P – точка графіка з координатами $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Пряму, проведену через точки P_0 і P , називають *січною*.

Якщо при необмеженому наближенні точки P за графіком функції $y = f(x)$ до точки P_0 січна P_0P наближається до певного граничного положення (пряма P_0K), то це граничне положення січної називають *дотичною* до кривої $y = f(x)$ у точці P_0 .

Задамо α – кут, який утворює дотична з додатним напрямом осі Ox , а β – кут між січною P_0P і віссю Ox . З прямокутного трикутника P_0QP випливає, що

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{QP}{P_0Q} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тоді існує границя

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (P \rightarrow P_0)}} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці, абсциса якої дорівнює x_0 , тобто

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

де α – кут між дотичною та віссю Ox .

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $P_0(x_0, y_0)$, має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad (3.10)$$

де $y_0 = f(x_0)$.

Нормалю до кривої називають пряму, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної (на рис. 3.38 – це пряма P_0N).

Рівняння нормалі:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3.11)$$

Фізичний зміст похідної. Якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна y' є швидкістю зміни цього процесу. Іншими словами, яку б фізичну залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як середню швидкість зміни функції y відносно аргументу x , а похідну $f'(x)$ – як миттєву швидкість зміни цієї функції.

Механічний зміст похідної. Якщо $S = S(t)$ – закон руху матеріальної точки (тобто залежність пройденого точкою шляху S від часу t), то похідна $S'(t)$ – це швидкість v точки в момент

часу t ; друга похідна $S''(t)$ – миттєве прискорення a точки в момент t , тобто $v = S'(t)$, $a = S''(t) = v'(t)$.



Необхідні знання про основні правила диференціювання

Нехай $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ – диференційовані в точці x функції, C – стала. Тоді правильні формули:

- | | |
|--|---|
| 1) $(u + v)' = u' + v'$;
2) $(u - v)' = u' - v'$;
3) $(uv)' = u'v + uv'$; | 4) $(Cu)' = Cu'$;
5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$;
6) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$. |
|--|---|

Доведемо формулу для обчислення похідної добутку. За означенням похідної маємо

$$\begin{aligned}
 (uv)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x)v(x) + \Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v - u(x)v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \right) = \\
 &= v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = \\
 &= u'v + uv' + u'(x) \cdot 0 = u'v + uv'.
 \end{aligned}$$

Зокрема, якщо функція $v(x) = C$, тобто $v(x)$ – стала, тоді

$$(Cu)' = C'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'.$$

Аналогічно дістанемо формулу

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \left(\frac{1}{C}u\right)' = \frac{1}{C}u'.$$



Необхідні знання про таблицю похідних елементарних функцій

Таблиця 3.2

Формули диференціювання основних елементарних функцій

$(C)' = 0$	$(x^n)' = n x^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Тут $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ — гіперболічні функції.



Вчимося обчислювати похідну за правилами диференціювання

Знайдіть похідні функцій за правилами диференціювання.

3.49. $y = 4x^5 - 3x^4 + 1$.

Розв'язання. $y' = (4x^5 - 3x^4 + 1)' = (4x^5)' - (3x^4)' + (1)' =$
 $= 4(x^5)' - 3(x^4)' = 4 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 4x^3 = 20x^4 - 12x^3.$

3.50. $y = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$

Розв'язання. $y' = \left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)' = (3x^{-2} - x^{-1/2})' =$
 $= 3(x^{-2})' - (x^{-1/2})' = 3 \cdot (-2)x^{-2-1} - (-1/2)x^{-1/2-1} =$
 $= -6x^{-3} + (1/2)x^{-3/2} = -\frac{6}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$

3.51. $y = \frac{x^2}{\sin x}.$

Розв'язання. За похідної частки маємо

$$y' = \left(\frac{x^2}{\sin x} \right)' = \frac{(x^2)' \sin x - x^2 (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}.$$

3.52. $y = \arcsin x \cdot \operatorname{tg} x.$

Розв'язання. $y' = (\arcsin x \cdot \operatorname{tg} x)' = (\arcsin x)' \cdot \operatorname{tg} x +$
 $+ \arcsin x \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \operatorname{tg} x + \arcsin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$

3.53. Знайдіть $y'(0)$, якщо $y = e^x \cdot x.$

Розв'язання. $y' = (e^x)' \cdot x + e^x \cdot x' = e^x \cdot x + e^x;$ $y'(0) = e^0 \cdot 0 + e^0 = 1.$

Відповідь: 1.



Необхідні знання про похідну складеної функції та таблицю похідних складеної функції

Def. Якщо функція $u = g(x)$ має похідну в точці x , а функція $y = f(u)$ – у відповідній точці $u = g(x)$, то складена функція $y = f(g(x))$ диференційована в точці x , причому

$$y' = f'(u) \cdot g'(x) \quad (y = y'_u \cdot u'_x).$$

Іншими словами, похідна складеної функції $y = f(u)$, $u = g(x)$ дорівнює добутку похідної від зовнішньої функції, взятої по внутрішньому аргументу u , і похідної від внутрішньої функції, взятої по незалежній змінній x .

Нехай $u(x)$ – диференційована в точці x функція, тоді виконуються такі формули диференціювання складених функцій (табл. 3.3):

Таблиця 3.3

Формули диференціювання складених функцій

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	$(e^u)' = e^u u'$
$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$
$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$
$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u'$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} u'$
$(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$	$(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
$(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} u'$	$(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} u'$



Вчимося обчислювати похідну складеної функції

Застосовуючи правило диференціювання складеної функції, знайдіть похідні функцій:

3.54. $y = (x^2 + 1)^3$.

Розв'язання. Позначимо $u = x^2 + 1$, тоді $y = (u(x))^3$. За правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y' = (u^3)' = 3u^2 \cdot u' = 3(x^2 + 1)^2 \cdot (x^2 + 1)' = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2.$$

3.55. $y = \sin^3 x$.

Розв'язання. Позначимо $u = \sin x$, тоді $y = (u(x))^3$. Далі маємо

$$y' = (u^3)' = 3u^2 \cdot u' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

3.56. $y = \sqrt{x^4 + x^3 + 1}$.

Розв'язання. У даному разі $y = \sqrt{u}$, де $u = x^4 + x^3 + 1$. Тоді

$$y' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{(x^4 + x^3 + 1)'}{2\sqrt{x^4 + x^3 + 1}} = \frac{4x^3 + 3x^2}{2\sqrt{x^4 + x^3 + 1}}.$$

3.57. $y = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Розв'язання. Запишемо дану функцію у вигляді $y = \cos^{-2} x$.
Тоді

$$u = \cos x, \quad y = u^{-2},$$

$$y' = (u^{-2})' = -2u^{-3} \cdot u' = -2\cos^{-3} x \cdot (\cos x)' = 2\cos^{-3} x \cdot \sin x.$$

3.58. $y = 5^{\sin x}$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = 5^u$, де $u = \sin x$.
Тоді

$$y' = (5^u)' = 5^u \ln 5 \cdot u' = 5^{\sin x} \ln 5 \cdot (\sin x)' = 5^{\sin x} \ln 5 \cdot \cos x.$$

3.59. $y = \operatorname{tg} e^x$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = \operatorname{tg} u$, де $u = e^x$. Тоді

$$y' = (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u' = \frac{1}{\cos^2 e^x} (e^x)' = \frac{e^x}{\cos^2 e^x}.$$

3.60. $y = \arcsin \sqrt{x} \cdot \sqrt{\arcsin x}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для знаходження похідної від добутку двох функцій, дістанемо

$$y' = (\arcsin \sqrt{x})' \cdot \sqrt{\arcsin x} + \arcsin \sqrt{x} \cdot (\sqrt{\arcsin x})' =$$

$$= \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \sqrt{\arcsin x} + \arcsin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arcsin x}} (\arcsin x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \cdot \sqrt{\arcsin x + \arcsin \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arcsin x}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.61. $y = \ln(x^2 + 1)$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = \ln u$, де $u = x^2 + 1$.
Тоді

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

3.62. $y = \arctg(\log_2(x + \cos x))$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = \arctg u$, де проміжна функція $u = \log_2(x + \cos x)$ також є складеною, тобто $u = \log_2 w$, $w = x + \cos x$. У цьому разі похідну знаходимо так:

$$\begin{aligned} y' &= (\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} u' = \frac{1}{1+u^2} (\log_2 w)' = \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{w \ln 2} w' = \\ &= \frac{(x + \cos x)'}{(1 + (\log_2(x + \cos x))^2)(x + \cos x) \ln 2} = \frac{1 - \sin x}{(1 + \log_2^2(x + \cos x))(x + \cos x) \ln 2}. \end{aligned}$$

3.55. $y = \arcc tg^2(x^3 - 2)$.

Розв'язання. $y' = 2 \arcc tg(x^3 - 2) \cdot (\arcc tg(x^3 - 2))' =$
 $= 2 \arcc tg(x^3 - 2) \frac{-1}{1 + (x^3 - 2)^2} (x^3 - 2)' = -\frac{6x^2 \arcc tg(x^3 - 2)}{1 + (x^3 - 2)^2}.$



Необхідні знання про похідну оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = g(y)$ – пара взаємно обернених функцій (нагадаємо, що графіки цих функцій збігаються).

Сформулюємо теорему про зв'язок між похідними цих функцій.

Теорема 3.11. Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі (a, b) і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ у довільній точці цього інтервалу, тоді існує обернена функція $x = g(y)$, яка також має похідну $g'(y)$, причому

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ або } y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Ця формула має такий *геометричний* зміст. Нехай крива задається функцією $y = f(x)$ або оберненою функцією $x = g(y)$ (рис. 3.39).

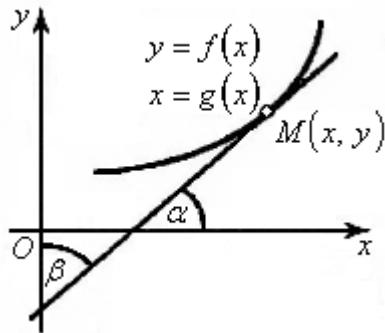


Рис. 3.39. Геометричний зміст формули

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Тоді $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ (α – кут між дотичною до кривої та віссю абсцис), $g'(y) = \operatorname{tg} \beta$ (β – кут між дотичною до кривої та віссю ординат). Оскільки $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta},$$

звідки випливає, що $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.



Вчимося обчислювати похідну оберненої функції

3.63. Знайдіть похідну y'_x , якщо $x = y^3 + 3y$.

Розв'язання. Маємо

$$x'_y = 3y^2 + 3, \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2 + 1)}.$$

3.64. Знайдіть похідну x'_y , якщо $y = x + e^x$.

Розв'язання. Похідна $y' = 1 + e^x > 0$ при довільному $x \in \mathbb{R}$ і функція $y(x)$ строго монотонна. Тому для функції $y(x)$ існує

обернена функція $x = x(y)$, її похідна $x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 + e^x}$.

3.65. Доведіть, що

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Доведення. Функція $y = \arcsin x$, де $x \in [-1; 1]$, є оберненою до функції $x = \sin y$, $y \in [-\pi/2; \pi/2]$. Оскільки на інтервалі $(-\pi/2; \pi/2)$ функція $x = \sin y$ зростає і похідна $x'_y = \cos y > 0$, тобто всі умови теореми про похідну оберненої функції виконуються, то дістанемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$



Необхідні знання про диференціювання неявної функції

Нехай неявна функція $y(x)$ задана рівнянням $F(x, y) = 0$, не розв'язаним відносно залежної змінної y . Щоб знайти похідну y' , потрібно виконати такі дії:

- 1) продиференціювати обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$ за змінною x , не забуваючи при цьому, що y є функцією змінної x ,
- 2) розв'язати одержане рівняння відносно y' .

Похідна неявно заданої функції виражається через змінні x та y .



Вчимося обчислювати похідну неявної функції

3.66. Знайдіть похідну y' , якщо $x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання. Функція $y(x)$ задана неявно. Продиференціюємо рівняння за x : $2x + 2yy' = 0$, звідси дістаємо $y' = -\frac{x}{y}$. При диференціюванні враховуємо, що y^2 – складена функція змінної x .

3.67. Знайдіть похідну y' , якщо $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$.

Розв'язання. Продиференціюємо за x обидві частини рівняння, не забуваючи, що y є функцією від x :

$$2x + 2(y + xy') - 2yy' = 2, \text{ або } x + y + xy' - yy' = 1.$$

Звідси знаходимо

$$y'(x - y) = 1 - x - y, \text{ тобто } y' = \frac{1 - x - y}{x - y}.$$

3.68. Знайдіть y' , якщо $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Послідовно маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right), \quad \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \left(\frac{y}{x} \right)' = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} (x^2 + y^2)' \\ \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{y'x - y}{x^2} &= \frac{2x + 2yy'}{2(x^2 + y^2)}, \quad y'x - y = x + yy', \quad y'(x - y) = x + y, \end{aligned}$$

звідси

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$



Необхідні знання про диференціювання функцій, заданих параметрично

Def. Нехай функціональна залежність між аргументом x і функцією $y(x)$ задана рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (3.12)$$

де t – параметр, що належить проміжку (α, β) . У цьому разі кажуть, що функція $y(x)$ задана *параметрично*.

Вважатимемо, що функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ диференційовані в точці $t \in (\alpha, \beta)$, причому $\psi'(t) \neq 0$, і функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = g(x)$. За правилом диференціювання оберненої функції

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

Функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складену функцію $y = \psi(g(x))$, похідна якої

$$y' = (\psi(g(x)))' = y'_t \cdot t'_x = \psi'(t) \cdot g'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Отже, похідну функції, заданої параметрично, обчислюють за формулою

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \text{або} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (3.13)$$



Вчимося диференціювати функції, задані параметрично

3.69. Знайдіть y'_x , якщо $\begin{cases} y = a \sin t, \\ x = b \cos t. \end{cases}$

Розв'язання. Функція $y(x)$ задана параметрично. Застосовуючи формулу (3.13), дістанемо:

$$y'(t) = a \cos t, \quad x'(t) = -b \sin t, \quad y'_x = \frac{a \cos t}{-b \sin t} = -\frac{a}{b} \operatorname{ctg} t.$$

3.70. Знайдіть y'_x , якщо $\begin{cases} y = t^2 - 2t^3, \\ x = 2t + t^2. \end{cases}$

Розв'язання. Знаходимо похідні

$$y'(t) = 2t - 6t^2, \quad x'(t) = 2 + 2t,$$

тоді

$$y'_x = \frac{2t - 6t^2}{2 + 2t} = \frac{t - 3t^2}{1 + t}.$$



Необхідні знання про логарифмічне диференціювання

У деяких випадках при відшукуванні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції. Така операція називається логарифмічним диференціюванням.

Зокрема, логарифмічне диференціювання доцільно використовувати, якщо функція задана у вигляді:

$$y = \frac{u_1^{k_1}(x) \cdot u_2^{k_2}(x) \cdot \dots \cdot u_m^{k_m}(x)}{v_1^{l_1}(x) \cdot v_2^{l_2}(x) \cdot \dots \cdot v_n^{l_n}(x)}; \quad \text{б) } y = u(x)^{v(x)}.$$

Покажемо, як знайти похідну показниково-степеневі функції $y = u(x)^{v(x)}$, де $u(x)$, $v(x)$ – диференційовані функції від x , $u(x) > 0$.

Виконавши логарифмування, дістанемо

$$\ln y = \ln(u^v) = v \ln u; \quad (\ln y)' = (v \ln u)'; \quad \frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u';$$

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{1}{u} u' \right) = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$$

Висновок. Похідна показниково-степеневі функції дорівнює сумі похідної показникової функції за умови, що $u = \text{const}$, і похідної степеневі функції за умови, що $v = \text{const}$:

$$y' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$$

Зазначимо, що при диференціюванні показниково-степеневі функції студенти досить часто помиляються, вважаючи її або лише степеневою, або лише показниковою.



Вчимося застосовувати логарифмічне диференціювання

3.71. Знайдіть похідну функції $y = \frac{x^2 (3x - 2) e^x}{\sin x \cdot \sqrt{2x + 1}}.$

Розв'язання. Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання частки. Проте такий спосіб для даного прикладу громіздкий. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо:

$$\ln y = \ln \left(\frac{x^2 (3x - 2) e^x}{\sin x \cdot \sqrt{2x + 1}} \right), \quad \ln y = 2 \ln x + \ln(3x - 2) + x - \ln \sin x - \frac{1}{2} \ln(2x + 1),$$

$$(\ln y)' = (2 \ln x + \ln(3x - 2) + x - \ln \sin x - \frac{1}{2} \ln(2x + 1))',$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2}{x} + \frac{3}{3x-2} + 1 - \frac{1}{\sin x} \cos x - \frac{1}{2x+1},$$

$$y' = y \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{3x-2} + 1 - \frac{1}{\sin x} \cos x - \frac{1}{2x+1} \right),$$

або

$$y' = \frac{x^2(3x-2)e^x}{\sin x \sqrt{2x+1}} \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{3x-2} + 1 - \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2x+1} \right).$$

3.72. Знайдіть похідну функції $y = x^{\cos x}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо

$$\ln y = \ln x^{\cos x}, \quad \ln y = \cos x \ln x, \quad (\ln y)' = (\cos x \ln x)',$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \ln x + \cos x \frac{1}{x}, \quad y' = y \left(-\sin x \ln x + \cos x \frac{1}{x} \right),$$

тобто

$$y' = x^{\cos x} \left(-\sin x \ln x + \cos x \frac{1}{x} \right).$$

Другий спосіб. Скориставшись основною логарифмічною тотожністю $a^{\log_a b} = b$, запишемо дану функцію у вигляді

$$y = x^{\cos x} = (e^{\ln x})^{\cos x} = e^{\cos x \ln x}.$$

Тоді

$$y' = (e^{\cos x \ln x})' = e^{\cos x \ln x} (\cos x \ln x)' =$$

$$= e^{\cos x \ln x} \left(-\sin x \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\cos x} \left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right).$$



Необхідні знання про похідні вищих порядків

Нехай на інтервалі $(a; b)$ задана диференційована функція $y = f(x)$, тоді її похідна $f'(x)$, яку ще називають *похідною першого порядку*, або *першою похідною*, також є функцією від x .

Def. Якщо функція $f'(x)$ диференційована, то її похідну називають *другою похідною* (або *похідною другого порядку*) і позначають одним із таких символів:

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Друга похідна має такий механічний зміст. Якщо рух матеріальної точки відбувається за законом $S = f(t)$, то похідна S' – це швидкість у даний момент часу, а S'' – прискорення в той же момент часу t .

Def. Похідну від другої похідної, якщо вона існує, називають *похідною третього порядку*, тобто за означенням

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right).$$

Def. Похідною n -го порядку функції $y = f(x)$ називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n - 1)$ -го порядку:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})', \text{ або } y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Похідні порядку вище першого називають похідними вищих порядків.



Вчимося обчислювати похідні вищих порядків

3.73. Знайдіть похідну третього порядку функції $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 5$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$$y' = 4x^3 - 4x + 3, \quad y'' = 12x^2 - 4, \quad y''' = 24x.$$

3.74. Знайдіть похідну другого порядку функції

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}), \quad a = \text{const}.$$

Розв'язання. Для розв'язання даного прикладу використовуємо правила диференціювання різниці функцій,

добутку, похідної складеної функції, а також табличні похідні.
Маємо

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{2} \left(x' \sqrt{x^2 - a^2} + x (\sqrt{x^2 - a^2})' \right) - \frac{a^2}{2} (\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}))' = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 - a^2} + x \frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}} 2x \right) - \frac{a^2}{2} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \left(x' + (\sqrt{x^2 - a^2})' \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) - \frac{a^2}{2(x + \sqrt{x^2 - a^2})} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) = \\
 &= \frac{x^2 - a^2 + x^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{2(x + \sqrt{x^2 - a^2})\sqrt{x^2 - a^2}} = \\
 &= \frac{2x^2 - a^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2} ; \\
 y'' &= (\sqrt{x^2 - a^2})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}} (x^2 - a^2)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} .
 \end{aligned}$$



Необхідні знання про формулу Лейбніца

Нехай $y = uv$, де $u(x)$ та $v(x)$ – n раз диференційовані функції. Тоді

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

де $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, $0! = 1$.

Зокрема,

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (n = 1),$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'' \quad (n = 2),$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \quad (n = 3).$$



Вчимося застосовувати формули Лейбніца до обчислення похідних n - го порядку

3.75. Знайдіть похідну n -го порядку функцій:

а) $y = e^x$; б) $y = a^x$; в) $y = \sin x$; г) $y = \frac{1}{x}$.

Розв'язання:

а) $y' = e^x$, $y'' = e^x$, ..., $y^{(n)} = e^x$;

б) $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$, ..., $y^{(n)} = a^x \ln^n a$;

в) $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,
 $y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, ..., $y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$;

г) $y' = -x^{-2}$, $y'' = 2x^{-3}$, $y''' = -2 \cdot 3x^{-4}$, $y^{(4)} = 2 \cdot 3 \cdot 4x^{-5}$, ...,
 $y^{(n)} = (-1)^n \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \cdot x^{-(n+1)} = (-1)^n n! \cdot x^{-(n+1)}$.

3.76. Знайдіть похідну n -го порядку функції

$$y = \frac{3x+1}{x^2+2x-3}.$$

Розв'язання. Розкладемо дану функцію на елементарні дробі:

$$\frac{3x+1}{x^2+2x-3} = \frac{3x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}.$$

Звідси

$$3x+1 = A(x+3) + B(x-1).$$

Нехай $x=1$, тоді $4=4A$, тобто $A=1$. Якщо $x=-3$, то $-8=-4B$,
 $B=2$.

Отже,

$$y = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+3}.$$

Враховуючи результат попереднього пункту, дістанемо

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + 2(-1)^n n! \frac{1}{(x+3)^{n+1}}.$$



Необхідні знання про обчислення похідних вищих порядків функцій, заданих параметрично

Якщо функція задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, тоді похідні $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, ..., $\frac{d^n y}{dx^n}$ обчислюють за формулами

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)'_t}{x'_t}, \quad \dots, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}.$$



Вчимося обчислювати похідні вищих порядків

3.77. Знайдіть $\frac{d^2 y}{dx^2}$, якщо $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$.
Розв'язання. Маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3 \sin t)'_t}{(2 \cos t)'_t} = \frac{3 \cos t}{-2 \sin t} = -\frac{3}{2} \operatorname{ctg} t;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(-\frac{3}{2} \operatorname{ctg} t\right)'_t}{(2 \cos t)'_t} = \frac{\frac{3}{2 \sin^2 t}}{-2 \sin t} = -\frac{3}{4 \sin^3 t}.$$

3.78. Складіть рівняння дотичної до еліпса, заданого рівняннями $x = 2 \sin t$, $y = 3 \cos t$, у точці $M_0(1; y_0)$, де $y_0 > 0$ (рис. 3.40).

Розв'язання. Рівняння дотичної $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

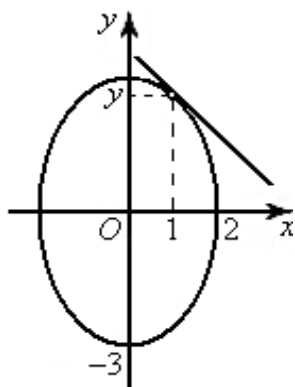


Рис. 3.40. Зображення дотичної до еліпса

За умовою $x_0 = 1$. Знайдемо ординату точки дотику y_0 . Розв'язками рівняння $1 = 2 \sin t$ за умови $t \in [0; 2\pi)$ є значення $t = \pi/6$ та $t = 5\pi/6$. Враховуючи обмеження $y_0 > 0$, тобто $\cos t > 0$, дістаємо $t = \pi/6$. Тоді $y_0 = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Визначаємо похідну $f'(x_0)$ параметрично заданої функції:
 $y'(t) = -3 \sin t$, $x'(t) = 2 \cos t$.

Тоді

$$y'_x = \frac{-3 \sin t}{2 \cos t} = -\frac{3}{2} \operatorname{tg} t; \quad f'(1) = -\frac{3}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Рівняння дотичної має вигляд

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - 1), \text{ або } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}.$$



Обчислюємо похідну функції у точці за допомогою ППЗ Gran2D

Процедура обчислення похідної функції у точці за допомогою відповідних правил.

3.79. Залежність кількості теплоти Q , що отримана тілом при нагріванні, від температури τ визначається за законом $Q = 0,24 \cdot \tau^2 + e^{0,4 \cdot \tau}$. Знайдіть теплоємність c тіла при $\tau = 4^\circ \text{C}$.

Розв'язання.

Крок 1. Теплоємність c характеризує швидкість зміни теплоти тіла. Це означає, що $c = Q'(\tau)$.

Крок 2. Для обчислення похідної застосовуємо правило диференціювання суми $(u + v)' = u' + v'$ та формули диференціювання складених функцій

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \text{ й } (e^u)' = e^u u'.$$

Отже $Q' = 0,48 \cdot \tau + 0,4 \cdot e^{0,4 \cdot \tau}$ або $c(\tau) = 0,48 \cdot \tau + 0,4 \cdot e^{0,4 \cdot \tau}$.

Крок 3. Знайдемо значення

$$c(4) = 0,48 \cdot 4 + 0,4 \cdot e^{0,4 \cdot 4} = 3.90121302259$$

Відповідь: $c(4) \approx 3,9012$.

Процедура обчислення похідної функції у точці за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Gran2D.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню похідної функції у точці за допомогою ППЗ Gran2D.

1. Відкрити вікно ППЗ Gran2D.
2. За допомогою опції *Обчислення-Похідна* відкрити вікно *Обчислення* та обрати в ньому вкладку *Похідна*.
3. Набрати з клавіатури вікна залежність для кількості теплоти й зазначити точку, при якій необхідно обчислити значення теплоємності.
4. Отримати значення теплоємності $c(4) = 3.90121302259$ (рис. 3.41).

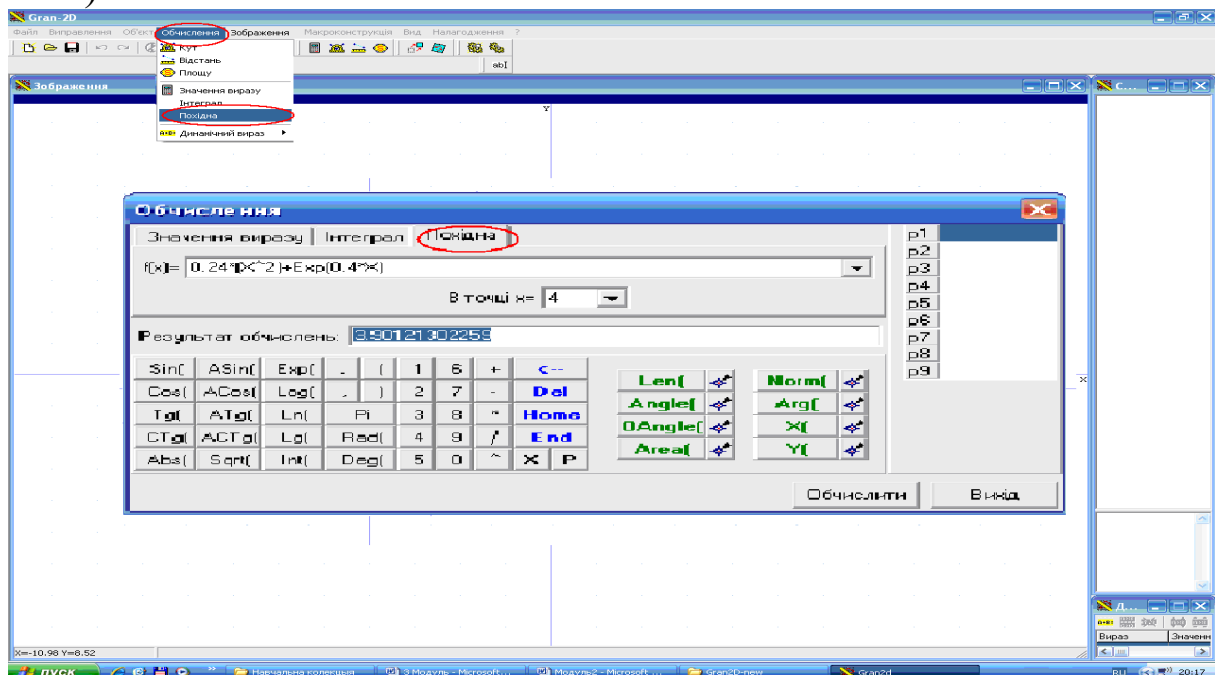


Рис. 3.41. Вікно ППЗ Gran2D: обчислення похідної функції у точці

Процедура обчислення похідної функції за допомогою відповідних правил.

3.80. Точка рухається за законом $S = A \cdot e^{-kt} \cdot \sin \omega t$, де A , k , $\omega > 0$. Знайдіть швидкість, прискорення точки в будь-який момент часу t та силу, під дією якої відбувається розглянутий рух.

Розв'язання.

Крок 1. Розглянутий рух називається загасаючим коливанням, тому що $\lim_{t \rightarrow \infty} S = 0$ й точка, хоча й коливається біля середнього положення, все ж таки прагне до збігу з ним.

Крок 2. Швидкість й прискорення руху точки знайдемо як першу й другу похідні від шляху за часом $v = S'(t)$, $a = S''(t) = v'(t)$.

$$v = \frac{dS}{dt} = -Ae^{-kt} (\omega \cos \omega t - k \sin \omega t),$$

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = -Ae^{-kt} (\omega^2 \sin \omega t + 2\omega k \cos \omega t - k^2 \sin \omega t)$$

Крок 3. Додаючи й віднімаючи в дужках для виразу прискорення a член $k^2 \cdot \sin \omega t$, після перетворень отримаємо

$$a = -Ae^{-kt} ((\omega^2 + k^2) \sin \omega t + 2k(\cos \omega t - k \sin \omega t)) = -(\omega^2 + k^2)S - 2kv.$$

Крок 4. Сила, під дією якої відбувається розглянутий рух, дорівнює $F = m \cdot a$. Отже $F = -(\omega^2 + k^2)mS - 2kmv$.

Як бачимо, вона складається із двох сил – сили, що пропорційна відстані точки від середнього положення й спрямованої до цього середнього положення (як у випадку гармонійного коливання), й сили, що гальмує рух, пропорційної швидкості й спрямованої протилежно швидкості.

Процедура обчислення похідної функції за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Maple.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню похідної функції за допомогою ППЗ Maple.

1. Відкрити вікно ППЗ Maple.

2. За допомогою опції *Insert-Execution Grope-Before Cursor* отримати у полі програми мітку \triangleright .
3. Активізувати зліва вкладки *Expression* й *Greek* та з отриманих шаблонів ввести обчислення диференціалу за відповідною змінною t та в окремих дужках вираз функції й символ «;».
4. Отримати значення диференціалу функції.
5. Натиснути клавішу *Enter* та отримати курсор для наступних перетворень із функцією – обчислення похідної функції другого порядку (рис. 3.42).

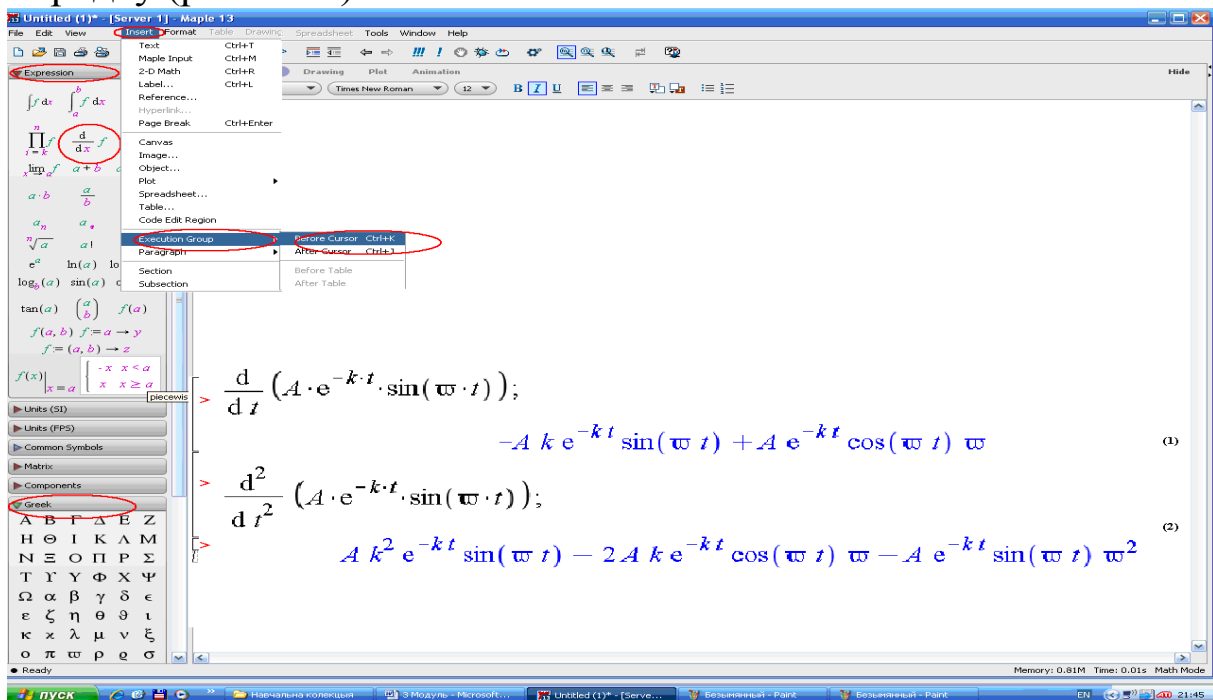


Рис. 3.42. Вікно ППЗ Maple: обчислення значення диференціалу функції



Моделюємо професійну діяльність інженера

3.81. Тіло рухається прямолінійно по заданій формулі $S(t) = 29 - 3 \cdot t^2 - 6 \cdot t$ м. Який шлях пройшло тіло за час від початку руху до моменту, коли швидкість його руху стала рівною нулю? Чому дорівнює прискорення в цей момент часу?



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Скористайтесь механічним змістом похідної. Знайдіть й обчисліть за допомогою ППЗ першу й другу похідні функції $S(t) = 29 - 3 \cdot t^2 - 6 \cdot t$.

Відповідь: $S(1) = 32 \text{ м}$; $a(1) = -6 \text{ м/с}^2$.

3.82. Кількість електроенергії у провіднику вимірюється за законом $Q(t) = 2 \cdot t^2 - 4 \cdot t$ Кл. Знайдіть: а) середню величину току за перші дві секунди; б) величину току в кінці другої й наприкінці п'ятої секунд.



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Скористайтесь залежністю $Q'(t) = I(t)$ (зміна кількості електроенергії вказує на величину току у провіднику).

Знайдіть й обчисліть за допомогою ППЗ значення першої похідної функції $Q(t) = 2 \cdot t^2 - 4 \cdot t$.

Відповідь: а) $I_{\text{сер}} = 0$; б) $I(2) = 4a$; $I(5) = 16a$.

3.83. Маса T неоднорідного стержню розподіляється за законом $T = l^2 + 3 \cdot l + 5$, де l — довжина стержню. Знайдіть: а) середню лінійну щільність стержню довжиною 5 см, рахуючи від його початку; б) лінійну щільність стержню при $l = 5 \text{ см}$ и $l = 10 \text{ см}$.

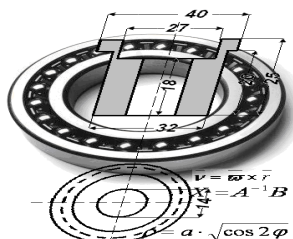


Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Скористайтесь залежністю $T'(l) = \delta(l)$ (зміна маси неоднорідного стержню вказує на його лінійну щільність).

Знайдіть й обчисліть за допомогою ППЗ значення першої похідної функції $T = l^2 + 3 \cdot l + 5$.

Відповідь:

а) $\delta_{\text{сер}} = 9 \text{ г/см}$; б) $\delta(5) = 13 \text{ г/см}$; $\delta(10) = 23 \text{ г/см}$.



Тема 5. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Нерозривну швидкість v (м/с) руху води в каналі одержують по формулі $v = v_0 k^{0.2}$, де v_0 — нерозривна швидкість потоку на глибині 1м, k — чисельне значення середньої глибини потоку задано у м. Знайти наближене значення нерозривної швидкості потоку на глибині $k = 2,5$ м, поклавши $v_0 = 0,6$ м/с.

Нерозривна швидкість v (м/с) руху води в каналі — це така швидкість, при якій виключається випадання зважених у воді часток (не відбувається замулення) й виключається розмив стінок каналу. Для обчислення наближеного значення функції достатньо часто застосовують заміну приросту функції її диференціалом $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$,



Необхідні знання про диференціал та його геометричний зміст

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x , тобто в цій точці має похідну

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

У загальному випадку $f'(x) \neq 0$. Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \text{ де } \alpha \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0,$$

Звідки приріст функції

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x \quad (3.14)$$

Перший із доданків виразу лінійний відносно Δx , другий доданок – нескінченно мала функція вищого порядку, ніж Δx . Таким чином, перший доданок складає головну частину приросту функції, яка і носить назву диференціал функції.

Def. Диференціалом dy функції $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx , частину приросту функції $f(x)$ в цій точці:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Def. Диференціал dy називають також диференціалом першого порядку, або першим диференціалом.

Якщо $y = x$, то $dy = dx = x'\Delta x = \Delta x$, тобто диференціал незалежної змінної x збігається з її приростом. Тому $dy = f'(x)dx$.

Геометричний зміст диференціала зрозумілий з рисунка 3.43.

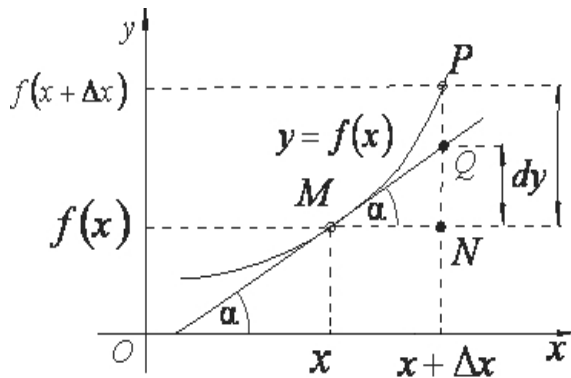


Рис. 3.43. Геометричний зміст диференціала

Маємо

$$NP = \Delta y, \quad NQ = MN \operatorname{tg} \alpha = \Delta x \cdot f'(x) = f'(x)dx = dy$$

Отже, диференціал функції $f(x)$ при заданих значеннях x і Δx дорівнює приросту NQ ординати дотичної MQ , яка проведена до кривої $y = f(x)$ в точці M , коли аргумент отримує приріст Δx .



Необхідні знання про основні властивості функції

Нехай $u(x)$, $v(x)$, $f(u)$ – диференційовані функції. Тоді виконуються рівності

1. $dC = 0$ ($C = \text{const}$).

2. $d(u + v) = du + dv$.

3. $d(uv) = u dv + v du$.

4. $d(Cu) = C du$.

$$5. \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}, \quad v \neq 0. \quad 6. \quad df(u) = f'(u)du, \quad u = u(x).$$

Доведемо, наприклад, третю формулу. За означенням диференціала маємо:

$$d(uv) = (uv)'dx = (uv' + u'v)dx = uv'dx + vu'dx = u dv + v du.$$

Останню рівність називають властивістю *інваріантності (незмінності) форми диференціала першого порядку*, яка полягає в тому, що форма диференціалу не залежить від того, є x незалежною змінною, чи деякою диференційованою функцією.



Вчимося знаходити диференціал функції

3.84. Знайдіть диференціал функції $y = x^2 + 2x$ у точці $x = 2$.

Розв'язання. Перший спосіб. Оскільки диференціал – це головна, лінійна відносно Δx , частина приросту функції у точці x , знайдемо приріст даної функції у точці $x = 2$, тобто

$$\Delta y = y(2 + \Delta x) - y(2) = (2 + \Delta x)^2 + 2(2 + \Delta x) - 8 = 6\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Лінійною частиною приросту є вираз $6\Delta x$. Отже $dy(2) = 6\Delta x$.

Другий спосіб. Оскільки $dy = f'(x)dx$, то маємо

$$y' = 2x + 2, \quad y'(2) = 6, \quad dy(2) = 6dx.$$

3.85. Знайдіть диференціал функції $y = \sqrt{1 - x^2} + \ln \sin x$.

Розв'язання. Маємо

$$dy = d(\sqrt{1 - x^2} + \ln \sin x) = (\sqrt{1 - x^2} + \ln \sin x)' dx = \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} + \operatorname{ctg} x \right) dx.$$



Необхідні знання про застосування диференціалу в наближених обчисленнях та в теорії помилок

Із формули (3.14) випливає, що при малих Δx правильна наближена формула

$$\Delta y \approx dy, \quad (3.15)$$

або

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Диференціал зазвичай відшукується значно простіше, ніж приріст функції, тому формулу (3.14) зручно використовувати для наближених обчислень значень функції.

Нехай $y = f(x)$, при цьому величина x визначається наближено, тобто з деякою абсолютною похибкою Δx , тоді значення функції y матиме свою абсолютну похибку Δy . Відносна похибка при обчисленні значення функції y може бути наближено визначена за допомогою диференціала, тобто

$$\left| \frac{\Delta y}{y} \right| \approx \left| \frac{dy}{y} \right|.$$



Вчимося обчислювати наближено за допомогою диференціалу

3.86. Обчисліть наближено за допомогою диференціала значення $\sqrt{15}$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = \sqrt{x}$. Покладемо $x = 16$,
 $x + \Delta x = 15$, $\Delta x = -1$.

Тоді $\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x$, або $\sqrt{15} \approx 4 + \frac{1}{2 \cdot 4}(-1) = \frac{31}{8}$. Отже,

$$\sqrt{15} \approx \frac{31}{8} = 3,875.$$

Відповідь: $\approx 3,875$.

3.87. Обчисліть наближено значення $\operatorname{tg} 54^\circ$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \operatorname{tg} x$. Тоді

$$\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + (\operatorname{tg} x)' \Delta x, \text{ або } \operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \Delta x.$$

Переведемо градуси у радіани (обов'язкова дія для Δx !):

$$54^\circ = \frac{54\pi}{180} = \frac{3\pi}{10}.$$

Нехай $x = \frac{\pi}{4}$ (за x можна також взяти значення $\frac{\pi}{3}$),
 $x + \Delta x = \frac{3\pi}{10}$, $\Delta x = \frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{20}$, тоді

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{10} \approx \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{20} = 1 + \frac{\pi}{10} \approx 1,314$$

Відповідь: $\operatorname{tg} 54^\circ \approx 1,314$.



Необхідні знання про диференціали вищих порядків

Def. Диференціалом другого порядку двічі диференційованої функції $y = f(x)$ називають диференціал від диференціалу першого порядку функції $f(x)$, тобто

$$d^2 y = d(dy).$$

Def. Взагалі, n -м диференціалом $d^n y$, або диференціалом n -го порядку n раз диференційованої функції $y = f(x)$, називають диференціал від диференціала $(n-1)$ -го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Коли x – незалежна змінна, диференціали функції $y = f(x)$ обчислюють за формулами

$$d^2 y = f''(x)(dx)^2, \quad (3.16)$$

$$d^3 y = f'''(x)(dx)^3, \dots, d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Якщо ж x – деяка функція від змінної t , тоді

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = \\ &= f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x \end{aligned}$$

Якщо x – залежна функція незалежної змінної $t: x = x(t)$, тоді

$$d^2 x = x''(t)(dt)^2$$

$$i \quad d^2 y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)x''(t)(dt)^2. \quad (3.17)$$

Порівнявши формули (3.16), (3.17), переконаємось, що для складеної функції $y = f(x)$, де $x = x(t)$, вигляд другого диференціала (3.17) відрізняється від вигляду формули (3.16) наявністю доданка $f'(x)x''(t)(dt)^2$. Це означає, що *диференціали другого і вище порядків* (на відміну від диференціалів першого порядку) *не мають інваріантної властивості*.



Вчимося обчислювати диференціали вищих порядків

3.88. Знайдіть $d^3 y$, якщо $y = \cos 3x$.

Розв'язання. Знайдемо похідні

$$y' = -3 \sin 3x, \quad y'' = -9 \cos 3x, \quad y''' = 27 \sin 3x.$$

Тоді

$$d^3 y = 27 \sin 3x (dx)^3.$$

3.89. Знайдіть $d^2 y(0)$, якщо $y = 4^{-x^2}$.

Розв'язання. Знайдемо похідну другого порядку в точці $x = 0$. Маємо

$$y' = 4^{-x^2} \ln 4 (-2x), \quad y'' = -2 \ln 4 \left[\left(4^{-x^2} \right)' x + 4^{-x^2} \right] = -2 \ln 4 \cdot 4^{-x^2} [-2x^2 \ln 4 + 1]$$

Отже,

$$d^3 y = 27 \sin 3x (dx)^3.$$



Необхідні знання про деякі теореми диференціального числення

Функції, які на певному проміжку мають похідну, відзначаються цілком певними властивостями, знання яких допомагає досліджувати поведінку функцій на проміжку диференційованості.

Теорема 3.12. (Ферма). Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b) і набуває свого найбільшого або найменшого

значення у деякій точці c цього інтервалу. Тоді, якщо в точці c існує похідна $f'(c)$, то $f'(c)=0$.

Ця теорема має досить просте геометричне тлумачення. Якщо в точці $x=c$ функція $f(x)$ сягає найбільшого або найменшого значення (рис. 3.44 та 3.45 відповідно), то дотична до графіка цієї функції в точці $(c; f(c))$ паралельна вісі абсцис.

Теорема 3.14. (Ролля). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, має похідну в кожній точці інтервалу $(a; b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a)=f(b)$, то існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$, в якій $f'(c)=0$.

Геометричне тлумачення цієї теореми зрозуміле з рис. 3.46 - 3.48.

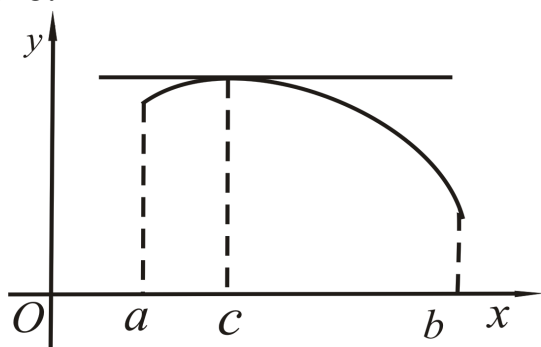


Рис. 3.44. Геометричне тлумачення теореми Ферма

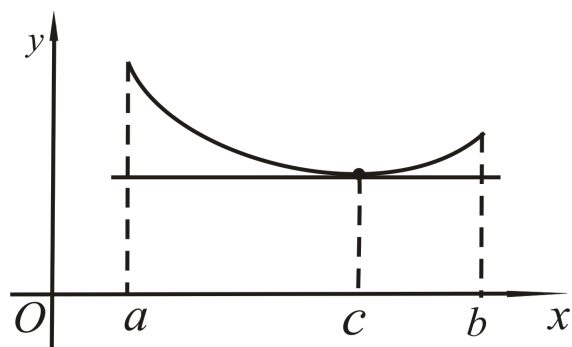


Рис. 3.45. Геометричне тлумачення теореми Ферма

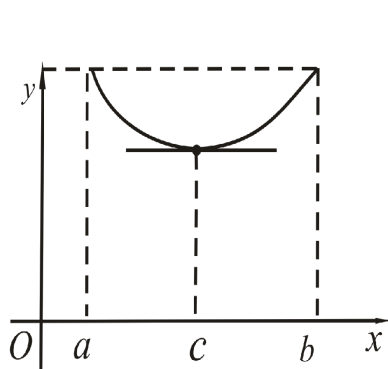


Рис. 3.46.
Геометричне тлумачення теореми Ролля

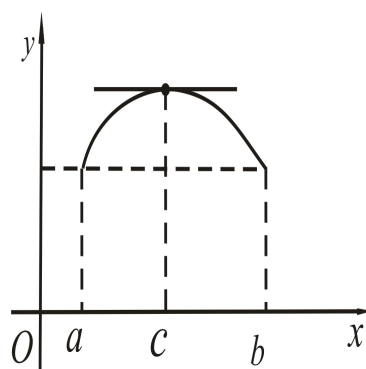


Рис. 3.47.
Геометричне тлумачення теореми Ролля

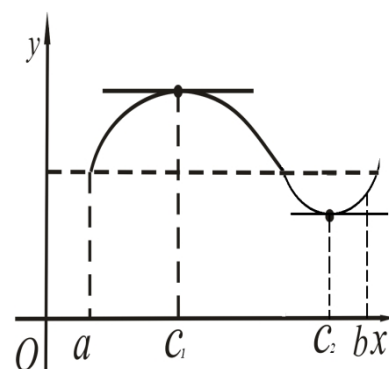


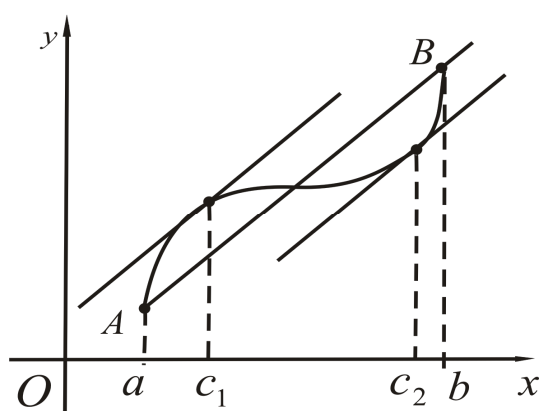
Рис. 3.48.
Геометричне тлумачення теореми Ролля

Теорема 3.15 (Лагранжа). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційована в інтервалі $(a; b)$, то всередині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Цю формулу називають формулою *скінчених приростів Лагранжа*. Її записують ще так:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$



Геометричний зміст теореми Лагранжа

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучує кінці кривої $A(a; f(a))$ і $B(b; f(b))$ (рис. 3.49).

Рис. 3.49. Геометричне тлумачення теореми Лагранжа

З теореми Лагранжа випливають кілька корисних наслідків:

1) якщо похідна $f'(x) = 0$ для всіх точок проміжку, то $f(x) = \text{const}$;

2) якщо похідна $f'(x) = c$ для всіх точок проміжку, то $f(x) = cx + 2$, тобто функція є лінійною;

3) якщо похідна в деякій точці додатна (від'ємна), то в околі цієї точки функція зростає (спадає);

4) якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ диференційовані в інтервалі $(a; b)$, $f_1'(x) = f_2'(x)$, у точках a та b функції неперервні, тоді ці функції відрізняються сталою c , тобто $f_1(x) - f_2(x) = c$.

Теорема 3.16. (Коші). Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$, диференційовані в інтервалі $(a; b)$, причому

$g'(x) \neq 0$, $x \in (a; b)$, то існує хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій виконується формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$



Необхідні знання про формули Тейлора і Маклорена

Для дослідження функцій (відшукування значення функції, границі функції тощо) в ряді випадків використовують формулу Тейлора.

Теорема 3.17. Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 і деякому її околі похідні до $(n+1)$ -го порядку включно і нехай x – довільне значення аргументу із вказаного околу ($x \neq x_0$). Тоді між точками x_0 і x знайдеться така точка c , що виконується *формула Тейлора*.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

де $R_0(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ – залишковий член у формі Лагранжа, $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Вираз

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Називають *многочленом Тейлора*. Отже, формула Тейлора складається з двох частин: многочлена Тейлора та залишкового члена. Величина $R_n(x)$ показує, яку похибку ми робимо, замінюючи функцію $f(x)$ її многочленом Тейлора.

Формулою Маклорена називають формулу Тейлора при $x_0 = 0$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

де точка c міститься між 0 і x .

Наведемо розклади деяких елементарних функцій за формулою Маклорена:

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x); \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2n+1}(x); \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x); \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x); \\
 \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}(x); \\
 (1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \\
 &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))}{n!}x^n + R_n(x),
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Зокрема при $m = -1$ маємо формули

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + R_n(x), \tag{3.20}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + R_n(x). \tag{3.21}$$



Вчимося розкладувати функції у ряд Тейлора і Маклорена

Розкладання функції за формулою Тейлора (чи Маклорена) часто призводить до громіздких перетворень. На практиці намагаються використати для цього готові розклади основних елементарних функцій.

3.90. Розкладіть за формулою Маклорена функції:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } f(x) &= \frac{1}{4+x^2}; & \text{б) } f(x) &= \ln(2x^2 + 7x + 3).
 \end{aligned}$$

Розв'язання: а) запишемо функцію у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Тоді за формулою (3.20) маємо

$$f(x) = \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots + (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + R_n(x) \right];$$

б) виконаємо перетворення

$$\begin{aligned} \ln(2x^2 + 7x + 3) &= \ln(1 + 2x)(x + 3) = \ln(1 + 2x) + \ln(x + 3) = \\ &= \ln(1 + 2x) + \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right) + \ln 3. \end{aligned}$$

Скориставшись двічі формулою (3.18), дістанемо

$$\begin{aligned} \ln(1 + 2x) &= 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n} + R_n^1(x), \\ \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right) &= \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{3}\right)^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n + R_n^2(x), \\ \ln(2x^2 + 7x + 3) &= \ln 3 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(2^k + \frac{1}{3^k}\right) x^k + R_n(x). \end{aligned}$$



Необхідні знання про правило Лопіталя

Досить часто невизначеності $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$ розкривають за допомогою похідних.

Теорема 3.18. (правило Лопіталя розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$). Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ задовольняють умови:

1) визначені і диференційовані в околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 , причому $g'(x) \neq 0$ в цьому околі;

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, тобто $f(x)$, $g(x)$ – одночасно малі при $x \rightarrow x_0$;

3) існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тоді існує границя відношення функції $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доведення. Нехай x_0 – скінченне число. Якщо в точці x_0 функції $f(x)$ та $g(x)$ невизначені або не дорівнюють нулю, вважатимемо, що $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (таке припущення не впливає на значення границі). Тоді ці функції будуть неперервні в точці x_0 та її околі. Візьмемо відрізок $[x_0; x]$ із цього околу. За теоремою Коші знайдеться точка $c \in (x_0; x)$, для якої виконується рівність

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Оскільки $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то формула набуває вигляду

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

З умови $x \rightarrow x_0$ випливає, що $c \rightarrow x_0$ (рис. 3.50).

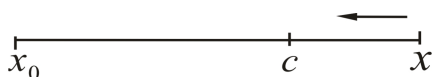


Рис. 3.50. Геометричне тлумачення умови $x \rightarrow x_0$ з якої випливає, що $c \rightarrow x_0$

Тоді враховуючи третю умову теореми, дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Н.В.

1. Теорема правильна і в тому разі, коли $x_0 = \infty$.

2. Інколи студенти припускаються *грубої помилки*, шукаючи

замість границі $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ границю $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$.

3. Якщо відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ є знову невизначеністю $\frac{0}{0}$ і функції $f'(x)$, $g'(x)$ задовольняють умови теореми, то правило Лопітала можна застосовувати повторно, тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Правило Лопітала названо іменем математика, який уперше його опублікував, але його вперше відкрив І.Бернуллі, тому правило Лопітала ще називають правилом Бернуллі-Лопітала.

Сформулюємо теорему, за якою можна розкривати невизначеності вигляду $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 3.19 (правило Лопітала розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$). Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ задовольняють умови:

- 1) визначені і диференційовані в околі точки x_0 ;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ в цьому околі;
- 3) існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тоді існує границя відношення функції $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопітала безпосередньо застосовують до розкриття невизначеностей вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, які називаються основними. Інші невизначеності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 зводять до основних.

1. Невизначеність $0 \cdot \infty$ (тобто маємо границю $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$, де $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$) зводять до невизначеності $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ так:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0} \right) \quad \text{або} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

2. Невизначеність $\infty - \infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$, коли $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$) зводять до неvizначеності $\frac{0}{0}$ так:

$$f(x) - g(x) = f(x)g(x) \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \left(\frac{0}{0} \right).$$

3. Невизначеності 1^∞ , 0^0 , ∞^0 зводять до неvizначеності $0 \cdot \infty$ за допомогою попереднього логарифмування або подання функції $[f(x)]^{g(x)}$ у вигляді $e^{g(x)\ln f(x)}$ (тут використано основну логарифмічну тотожність $a = e^{\ln a}$).



Вчимося обчислювати границі за допомогою правила Лопіталя

Обчисліть границі використовуючи правило Лопіталя.

3.91. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$

Розв'язання. Маємо неvizначеність $\frac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя, дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Відповідь: 1.

3.92. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}.$

Розв'язання. Маємо неvizначеність $\frac{\infty}{\infty}$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Відповідь: 0.

$$3.93. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Розв'язання. Безпосередня підстановка $x = 0$ дає
 $\frac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя, дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$$

Знову маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Правило Лопіталя застосовуємо ще раз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

Відповідь: 2.

$$3.94. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} (n \in \mathbb{N}, a > 1).$$

Розв'язання. Тут невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^n)'}{(a^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a}.$$

Знову дістали невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Повторюючи процес n разів, дістанемо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: 0.

$$3.95. \text{Обчисліть } \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x.$$

Розв'язання. У цьому разі маємо невизначеність $0 \cdot \infty$.

Перейдемо до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$ і застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(1/x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{-2/x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0$$

М.В. Переконайтесь самостійно, що перехід до невизначеності $\frac{0}{0}$ лише ускладнює задачу.
Відповідь: 0.

3.96. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Знайдемо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$$

Остання границя не існує. Тоді як

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

Висновок. Границя відношення двох функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ може існувати і тоді, коли відношення похідних $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ границі не має.

Існування границі $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ є лише достатньою умовою існування

границі $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Відповідь: 1.

3.97. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

Розв'язання. Цей приклад є ще однією ілюстрацією неможливості застосування правила Лопіталя. Справді,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+x^2})'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

і т. д.

Тоді як

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1.$$

Відповідь: 1.

3.98. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (tgx - \sec x)$.

Розв'язання. Тут невизначеність $\infty - \infty$. Зведемо її до невизначеності $\frac{0}{0}$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} (tgx - \sec x) &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(tgx - \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\sin x - 1)'}{(\cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: 0.

3.99. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x)^{\cos x}$.

Розв'язання. Підставивши у вираз значення $x = \frac{\pi}{4}$, переконаємося, що маємо невизначеність 0^0 . Для зручності виконаємо заміну $\pi - 2x = t$, тоді $t \rightarrow 0$, $x = \frac{\pi - t}{2}$, $\cos x = \sin \frac{t}{2}$. Отже,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x)^{\cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\sin(t/2)} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\sin(t/2) \ln t} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \sin(t/2) \ln t} = e^A,$$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t \rightarrow 0} \sin(t/2) \ln t = [0 \cdot \infty] = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{1/t} = \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\ln t)'}{(1/t)'} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1/t}{-1/t^2} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} t = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x)^{\cos x} = e^0 = 1.$$

Відповідь: 1.



Обчислюємо наближене значення функції за допомогою ППЗ Gran 2D

Процедура наближеного обчислення значення функції за допомогою відповідних правил.

3.100. Нерозривну швидкість v (м/с) руху води в каналі одержують по формулі $v = v_0 k^{0.2}$, де v_0 — нерозривна швидкість потоку на глибині 1м, k — чисельне значення середньої глибини потоку задано у м. Знайти наближене значення нерозривної швидкості потоку на глибині $k = 2,5$ м, поклавши $v_0 = 0,6$ м/с та замінивши приріст функції її диференціалом.

Розв'язання.

Крок 1. Нерозривну швидкість v (м/с) руху води в каналі одержують по формулі $v = v_0 k^{0.2}$. Необхідно знайти наближене значення числового виразу $0,6 \cdot (2,5)^{0.2}$. Це число можна вважати одним із значень функції $f(x) = 0,6 \cdot (2,5)^x$.

Крок 2. Знайдемо похідну цієї функції, якщо $(Cu)' = Cu'$ та $(a^x)' = a^x \ln a$. Отже $f'(x) = 0,6 \cdot (2,5)^x \cdot \ln 2,5$.

Крок 3. Застосуємо наближену рівність для приросту функції

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

при $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,2$, $f(x_0) = 0,6 \cdot (2,5)^0$, $f'(x_0) = 0,6 \cdot (2,5)^0 \cdot \ln 2,5$ отримаємо

$$0,6 \cdot (2,5)^{0.2} \approx 0,6 \cdot (2,5)^0 + 0,6 \cdot (2,5)^0 \cdot \ln 2,5 \cdot 0,2 \approx 0,7.$$

Таким чином, наближене значення нерозривної швидкості на глибині 2,5м при $v_0 = 0,6$ м/с дорівнює 0,7 м/с.

Відповідь: 0,7 м/с.

Процедура наближеного обчислення значення функції за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Gran2D.



«Навчаємо» свій комп'ютер знаходженню наближеного значення функції за допомогою ППЗ Gran2D.

1. Відкрити вікно ППЗ Gran2D.
2. Побудувати графік функції $f(x) = 0,6 \cdot x^{0,2}$, для якої змінною буде глибина потоку:
 - за допомогою опції *Об'єкт-Створення-Графік функції* викликати вікно *Функціональна залежність*;
 - для типу залежності *явна* ввести з клавіатури функцію, натиснути кнопку *Ok*.
3. Отримати зображення кривої, за яким маємо можливість знайти значення функції для будь-якої глибини потоку:
 - для глибини *2,5м* знайти курсором на кривій точку, абсциса якої дорівнює *2,5*. Абсциса і ордината точок відображується у лівому нижньому куті вікна програми (ордината точки $\approx 0,7$).
4. Якщо для функції змінною зробити іншу компоненту, від цього її значення не зміниться для цієї ж глибини (рис. 3.51).

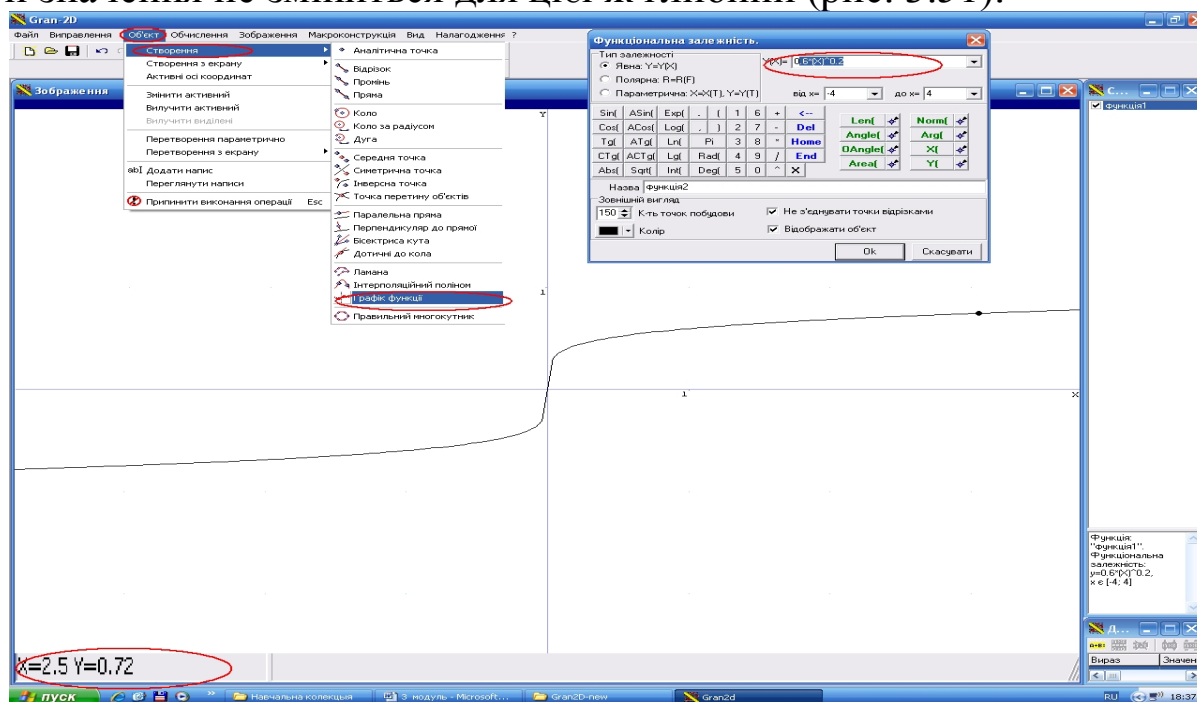


Рис. 3.51. Вікно ППЗ Gran2D: знаходження наближеного значення функції за графіком



Застосовуємо й обчислюємо диференціал функції за допомогою ППЗ Mathematica

Процедура обчислення диференціала функції за допомогою відповідних правил.

3.101. Період коливання маятника $T = 2\pi\sqrt{l/980}$ с, де $l = 20$ см — довжина маятника. Як потрібно змінити довжину маятника, щоб період коливання зменшився на $0,1$ с?

Розв'язання.

Крок 1. Позначимо зміну періоду коливання маятника dT , а зміни довжини маятника dl .

Крок 2. Знайдемо зміну періоду коливання маятника dT .

Якщо $df(u) = f'(u)du$, $u = u(x)$ та $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$, отже

$$dT = \frac{2\pi dl}{2 \cdot 980\sqrt{l/980}} = \frac{2\pi dl}{2\sqrt{980 \cdot l}} = \frac{\pi dl}{\sqrt{980 \cdot l}}.$$

Крок 3. Виразимо dl з рівняння $dT = \frac{\pi dl}{\sqrt{980 \cdot l}}$.

$$dl = \frac{\sqrt{980 \cdot l} dT}{\pi}.$$

Отримаємо

Крок 4. Підставляємо в отримане співвідношення $l = 20$, $dT = -0,1$ (знак мінус означає зменшення), одержимо

$$dl = \frac{-14}{\pi} \approx -4,46 \text{ см}.$$

Відповідь: $\approx -4,46$ см.

Таким чином, щоб період коливання маятника зменшився на $0,1$, його довжину необхідно зменшити на $4,46$ см.

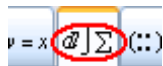
Процедура обчислення диференціала функції за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathematica.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню диференціалу функції за допомогою ППЗ Mathematica.

Для завдання 3.101. Крок2 може бути виконаний за допомогою ППЗ Mathematica.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathematica.
2. За допомогою опції *Palettes-Classroom Assistant* викликати вкладки із шаблонами для набору символів.
3. Активізувати праворуч у вкладці *Basic Commands* кнопку



та обрати у вікні *Calculus* обчислення $\partial_x \square$.

4. У полі програми з'явиться шаблон $\partial_{var} expr$ для запису виразу функції $2\pi\sqrt{1/980}$ c , та позначання змінної диференціювання l . Записати вираз функції застосовуючи шаблони вкладки *Calculator-Basic* виокремити його та за допомогою опції *Evaluation-Evaluate Cells* викликати із мітками $In[5]=$ і $Out[5]=$ обчислення диференціалу.

5. Отримати вираз диференціалу (рис. 3.52).

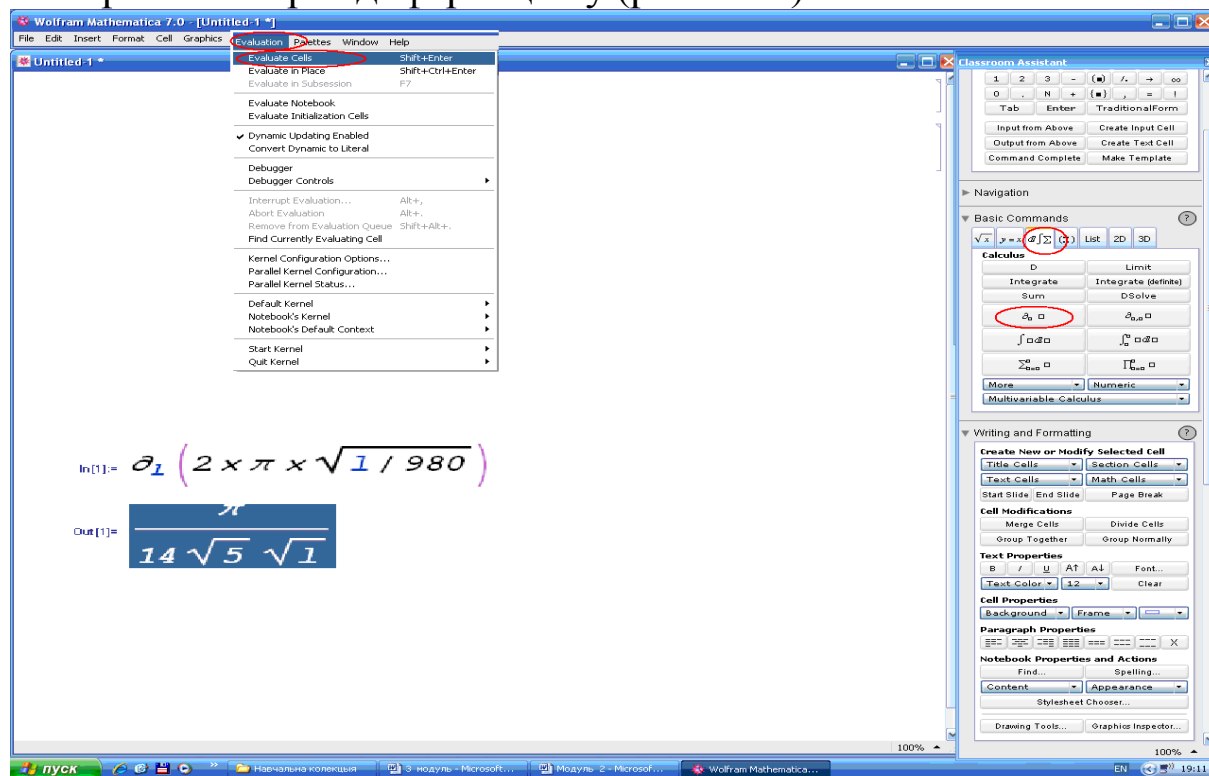


Рис. 3.52. Вікно ППЗ Mathematica: обчислення диференціалу функції



Моделюємо професійну діяльність інженера

3.102. Для обчислення довжини L важкого проводу (каната), що підвішеного за обидва кінця, використовують наближену

$$L = (1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{h^2}{a^2}),$$

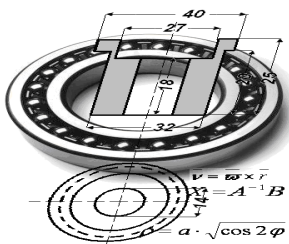
формулу де a – довжина прольоту, h – стріла провису. Встановити зв'язок між зміною довжини L й стріли провису h , замінивши відповідні прирости диференціалами.



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Перенесіть алгоритм застосування й обчислення диференціалу функції на структуру об'єкту: позначте зміну довжини L - dL , а зміни стріли провису dh ;

знайдіть зміну довжини dL , якщо $df(u) = f'(u)du$, $u = u(x)$ за допомогою ППЗ; виразіть dh з отриманого рівняння.

Відповідь:
$$dL = \frac{16h}{3a} dh$$



Тема 6. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

Опір на вигин балки прямокутного поперечного перерізу завдається якоюсь функцією.

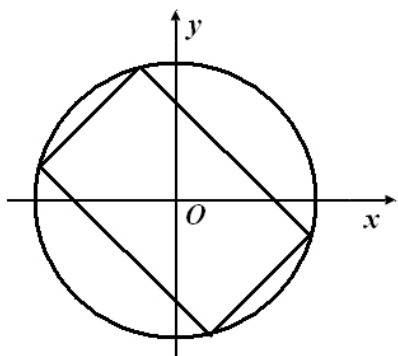


Рис. 3.53. Схематичне зображення балки прямокутного поперечного перерізу

Які повинні бути розміри перетину балки, вирізаної із круглої труби заданого діаметру, щоб її опір на вигин було найбільшим, тобто щоб балка мала найбільшу міцність (рис. 3.53)?

Як може бути пристосована похідна для дослідження виразу, що завдає опір на вигин балки? В якого типу задач похідна спрощує дослідження функції, що завдає процес або явище?



Необхідні знання про зростання й спадання функції

Def. Функцію $f(x)$ називають *зростаючою (спадною)* на інтервалі $(a; b)$, якщо для довільних двох точок x_1 та x_2 із вказаного інтервалу таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Достатні ознаки зростання та спадання функції:

Теорема 3.20. Нехай функція $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a; b)$. Тоді

- 1) якщо $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a; b)$, то функція $f(x)$ зростає на $(a; b)$;
- 2) якщо $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (a; b)$, то функція $f(x)$ спадає на $(a; b)$;
- 3) якщо $f'(x) = 0$ для всіх $x \in (a; b)$, то функція $f(x)$ стала на $(a; b)$.

Доведення проведемо для випадку, коли $f'(x) > 0$. Візьмемо довільні точки x_1 та x_2 ($x_1 < x_2$) з інтервалу $(a; b)$. Тоді на відрізку $[x_1; x_2]$ виконуються умови теореми Лагранжа, отже,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \text{ де } c \in (x_1; x_2).$$

Оскільки за умовою $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, то $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, тобто $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Це означає, що функція $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$ зростає.

Аналогічно доводять твердження теореми для випадків, коли $f'(x) < 0$ або $f'(x) = 0$.

Теорема 3.21 (необхідна умова зростання (спадання) функції).

Якщо диференційована на інтервалі $(a; b)$ функція зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всіх $x \in (a; b)$.

Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на всій числовій осі, її похідна $y' = 3x^2 > 0$ для всіх $x \neq 0$ і $y' = 0$, якщо $x = 0$.



Вчимося досліджувати функцію на зростання і спадання

3.103. Знайдіть інтервали зростання та спадання функції

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2}.$$

Розв'язання. Область визначення $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$. Знайдемо похідну

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^4} = -\frac{2(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю в точці $x = -1$ і не існує, якщо $x = 1$. Отже, $x = -1$; 1 - критичні точки функції $f(x)$.

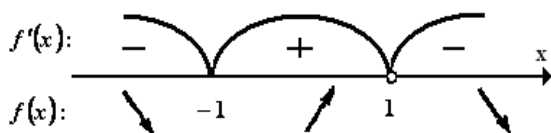


Рис. 3.54. Визначення знаку похідної на кожному з інтервалів

Позначаємо ці точки на числовій прямій (при цьому пам'ятаємо про область визначення функції) і визначаємо знак похідної на кожному з інтервалів (рис. 3.54).

Отже, функція спадає, якщо $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$, і зростає на інтервалі $(-1; 1)$.

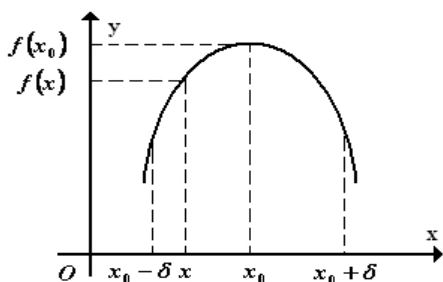


Необхідні знання про локальний екстремум функції

Def. Точку x_0 називають *точкою локального максимуму* (мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0 , який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність

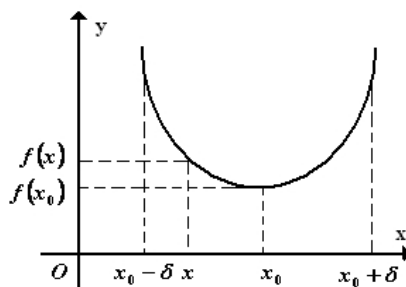
$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Геометричний зміст означення зрозумілий з рис. 3.55 та 3.56.



x_0 – точка максимуму

Рис. 3.55. Геометричний зміст означення



x_0 – точка мінімуму

Рис. 3.56. Геометричний зміст означення

Def. Точки локального максимуму і локального мінімуму називають *точками локального екстремуму*, а значення функції у цих точках називають відповідно *локальним максимумом* і *локальним мінімумом* або *локальним екстремумом*.

З'ясуємо умови існування локального екстремуму.

Теорема 3.22 (необхідна умова локального екстремуму).

Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційована в цій точці, то $f'(x_0)=0$.

Доведення. Нехай x_0 - точка максимуму. Згідно з означенням це означає, що в околі точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$, якщо $\Delta x > 0$, і $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, якщо $\Delta x < 0$. За умовою теореми існує похідна $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

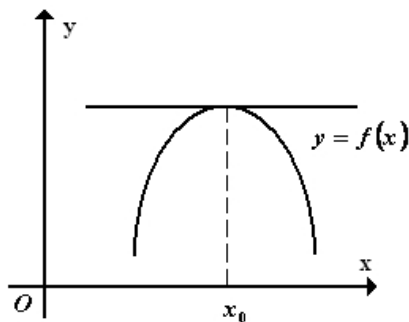


Рис. 3.57.

Геометричний зміст
необхідної умови
локального екстремуму

Звідси випливає, що $f'(x) \geq 0$ для $\Delta x > 0$ і $f'(x) \leq 0$ для $\Delta x < 0$. Залишається єдина можливість $f'(x_0)=0$.

Геометричний зміст теореми 3.22. Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційована в цій точці, то в цій точці існує дотична до графіка функції $y=f(x)$, і ця дотична паралельна осі Ox (рис. 3.57).

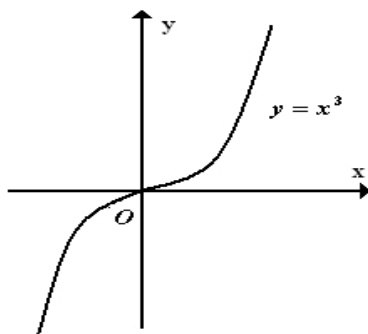


Рис. 3.58. Графік
функції $y=x^3$

Умова $f'(x_0)=0$ є необхідною, але не достатньою для того, щоб диференційована в точці x_0 функція мала локальний екстремум.

Наприклад, похідна функції $y=x^3$ в точці $x=0$ дорівнює нулю, але не має в цій точці екстремуму (рис. 3.58). Проте існують функції, які в точках екстремуму не мають похідних.

Так, функція $y=|x|$ має в точці $x=0$ мінімум, але не має в цій точці похідної (рис. 3.59). Ще один приклад. Функція $y=\sqrt[3]{x}$

недиференційована в точці $x=0$ і не має в цій точці екстремуму (рис. 3.60).

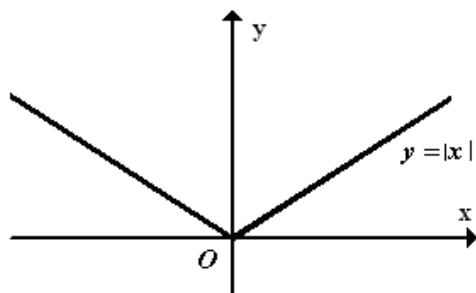


Рис. 3.59. Графік функції $y = |x|$

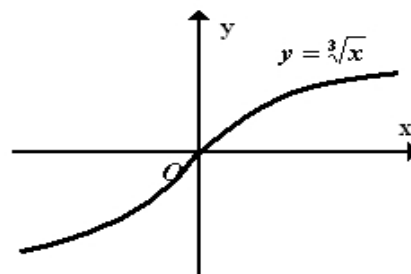


Рис. 3.60. Графік функції $y = \sqrt[3]{x}$

Def. Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називають *стаціонарними*. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними*. Критичні точки – це точки можливого екстремуму.

Висновок. Якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка обов'язково є критичною. Проте не всяка критична точка є екстремальною.

Теорема 3.23 (перша достатня умова локального екстремуму).

Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 , в якому функція має похідну $f'(x)$, крім, можливо, точки x_0 . Тоді:

1) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$, то точка x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$;

2) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) > 0$, то точка x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$;

3) якщо в обох інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ і $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то точка x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Іншими словами, якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на

мінус, то x_0 – точка локального максимуму; якщо знак похідної змінюється з мінуса на плюс, то x_0 – точка локального мінімуму; якщо похідна не змінює знаку, то в точці x_0 екстремуму немає.

Дослідити функцію на екстремум означає знайти всі її екстремуми.

Правило дослідження функції на екстремум

Щоб знайти локальний екстремум функції $f(x)$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x)=0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті корені, які є внутрішніми точками області існування функції; знайти точки, в яких похідна не існує;

2) якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область існування цими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь одній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише переходячи через критичну точку;

3) за зміною знака $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках.

Теорема 3.24 (друга достатня умова локального екстремуму).

Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0)=0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму.

Справді, нехай для визначеності $f''(x_0) > 0$. Оскільки

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0,$$

то $\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ в достатньо малому околі точки x_0 , причому якщо $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$; якщо $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$.

Отже, при переході через точку x_0 перша похідна змінює знак з мінуса на плюс. Це означає, що x_0 – точка локального мінімуму.

Теорема 3.25 (третья достатняя умова локального екстремуму).

Нехай в околі стаціонарної точки x_0 існує неперервна похідна $f^{(n)}(x)$, причому $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, а $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тоді

1) якщо n – парне і $f^{(n)}(x_0) < 0$, то функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний максимум;

2) якщо n – парне і $f^{(n)}(x_0) > 0$, то функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний мінімум;

3) якщо n – непарне, то функція $f(x)$ в точці x_0 локального екстремуму не має.



Вчимося досліджувати функцію на локальний екстремум

3.104. Знайдіть локальні екстремуми функції

$$f(x) = x - x^5 / 5.$$

Розв'язання. Область визначення $(-\infty; \infty)$. Знайдемо критичні точки:

$$f'(x) = 1 - x^4, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x)(1+x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Отже, точки $x = \pm 1$ – критичні (стаціонарні) точки.

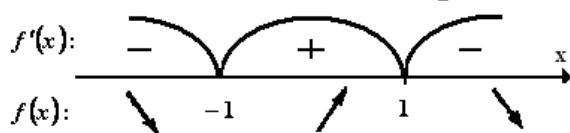


Рис. 3.61. Знаки похідної на інтервалах знакосталості

Визначимо знаки похідної на інтервалах знакосталості функції (рис. 3.61). Як видно з рисунку, на інтервалах $(-\infty; -1)$, $(1; \infty)$ функція спадає, а на інтервалі $(-1; 1)$ – зростає.

За теоремою 3.22 робимо висновок, що $x = -1$ – точка локального мінімуму; $x = 1$ – точка локального максимуму, причому $y_{\min} = y(-1) = -4/5$, $y_{\max} = y(1) = 4/5$.

3.105. Знайдіть локальні екстремуми функції $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$.

Розв'язання. Область визначення. $(-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$.
Знайдемо критичні точки:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}(x+2) - x^{2/3}}{(x+2)^2} = \frac{2x^{-1/3}(x+2) - 3x^{2/3}}{3(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x+4-3x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2} = -\frac{x-4}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}.$$

Рівняння $f'(x)=0$ має єдиний корінь $x=4$. Похідна не існує в точках $x=-2$ і $x=0$. При цьому в точці $x=-2$ функція невизначена, а в точці $x=0$ - визначена.

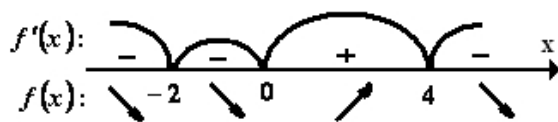


Рис. 3.62. Знаки похідної на інтервалах знакосталості

Визначимо знаки похідної на інтервалах знакосталості функції (рис.3.62).

Переходячи через точку $x=0$ (зліва на право), похідна змінює знак з мінуса на плюс.

Тобто на інтервалі $(-2; 0)$ функція спадає, а на інтервалі $(0; 4)$ - зростає. Враховуючи, що $x=0$ функція неперервна, доходимо висновку, що $x=0$ - точка локального мінімуму. Аналогічно переконуємося, що $x=4$ - точка локального максимуму. Відмітимо, що точка $x=-2$ не є критичною точкою (у цій точці функція невизначена).

3.106. Дослідіть функцію $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ на екстремум.

Розв'язання. Область визначення $(-\infty; \infty)$. Похідна заданої функції $y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x$. Розв'язуємо рівняння $f'(x)=0$:

$$12x^3 - 12x^2 - 24x = 0, \quad 12x(x^2 - x - 2) = 0;$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2 \text{ - стаціонарні точки.}$$

Друга похідна $y'' = 36x^2 - 24x - 24 = 12(3x^2 - 2x - 2)$. Визначимо знак y'' у стаціонарних точках:

$$y''(-1) = 12(3 + 2 - 2) = 36 > 0, \quad y''(0) = -24 < 0, \quad y''(2) = 72 > 0.$$

З теореми 3.24 випливає висновок, що $x_1 = -1$ та $x_3 = 2$ - точка локального мінімуму, а $x_2 = 0$ - точка локального максимуму.

М.В. Звичайно достатні умови екстремуму можна було б з'ясувати і за теоремою 3.23.

3.107. Дослідити на екстремум у точці $x = 0$ функцію

$$f(x) = \sin^2 x - x^2 + 1.$$

Розв'язання. Застосуємо теорему 3.24. Маємо

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin 2x - 2x, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= 2 \cos 2x - 2, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -4 \sin 2x, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= -8 \cos 2x, & f^{(4)}(0) &= -8 < 0. \end{aligned}$$

Отже задана функція має в точці $x = 0$ локальний максимум.



Необхідні знання про найбільше та найменше значення функції

Не слід плутати локальний максимум (мінімум) з найбільшим (найменшим) значенням функції, якого вона досягає на відрізку. Локальних максимумів і мінімумів функція може мати кілька, тоді як найбільше значення (його ще називають абсолютним максимумом), якщо воно існує, єдине. Це саме стосується і найменшого значення (абсолютного мінімуму) функції.

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$, потрібно:

- 1) знайти похідну $f'(x)$ і визначити критичні точки даної функції;
- 2) обчислити значення функції в тих критичних точках, що належать інтервалу $(a; b)$, а також у точках a і b ;
- 3) серед одержаних значень вибрати найбільше і найменше.



Вчимося досліджувати функцію на найбільше та найменше значення

3.108. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = x^2 \ln x$ на відрізку $[1; e]$.

Розв'язання. Знайдемо похідну

$$y' = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$

Оскільки функція визначена при $x > 0$, то критичну точку знаходимо з умови $2 \ln x + 1 = 0$, звідки дістаємо $x = e^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Ця точка не належить проміжку $[1; e]$. Тому згідно з п. 6.3 обчислюємо лише значення функції на кінцях відрізка. Маємо: $y(1) = 0$, $y(e) = e^2$.

Отже, $\max_{x \in [1; e]} f(x) = f(e) = e^2$, $\min_{x \in [1; e]} f(x) = f(1) = 0$.

3.109. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ на відрізку $[0; 3]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки:

$$y' = \frac{x^2 + 1 - 2x(x+1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$-x^2 - 2x + 1 = 0, \quad x_1 = -1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

Точка $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ не належить проміжку $[0; 3]$. Обчислимо значення $f(x_2) = f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$; $f(0) = 1$; $f(3) = \frac{2}{5}$. Отже,

$$\max_{x \in [0; 3]} f(x) = f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \quad \min_{x \in [0; 3]} f(x) = f(3) = \frac{2}{5}.$$



Необхідні знання про опуклість і вгнутість кривих та точки перегину

Def. Криву $y = f(x)$ називають *опуклою* на інтервалі $(a; b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі (рис. 3.63).

Def. Криву $y = f(x)$ називають *вгнутою* на інтервалі $(a; b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі (рис. 3.64).

Def. *Точкою перегину* називають таку точку кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої (рис. 3.65).

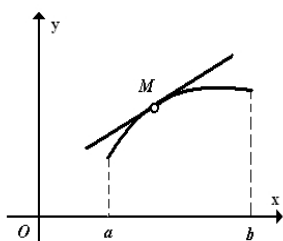


Рис. 3.63.
Графік опуклої кривої

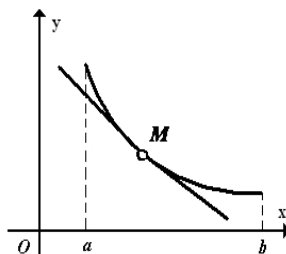


Рис. 3.64.
Графік вгнутої кривої

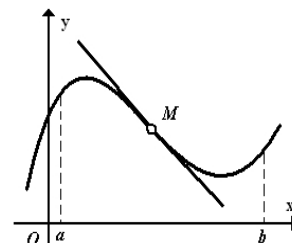


Рис. 3.65. Графік кривої з точкою перегину

Для дослідження графіка функції на опуклість та вгнутість застосовують другу похідну функції.

Теорема 3.26. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на $(a; b)$. Тоді

1) якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a; b)$, то графік функції $y = f(x)$ опуклий на $(a; b)$;

2) якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a; b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на $(a; b)$.

Доведення. Позначимо довільну ординату кривої через y , а дотичної через Y (рис. 3.66).

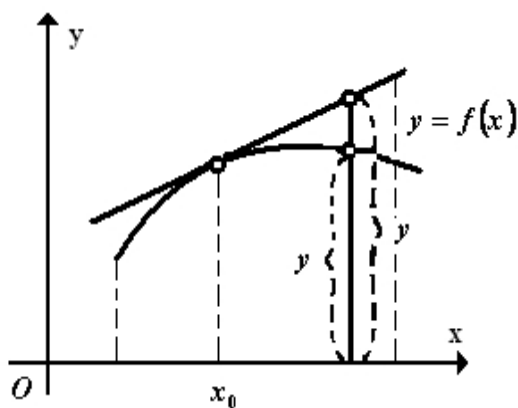


Рис. 3.66. Геометричне тлумачення теореми

Рівняння дотичної до кривої у точці дотику $M(x_0; y_0)$ має вигляд $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Запишемо формулу Тейлора

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2$$

де точка c лежить між точками x і x_0 . Звідси дістаємо

$$y - Y = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

Нехай на інтервалі $(a; b)$ $f''(x) < 0$. Тоді для довільного $x \in (a; b)$, $x \neq x_0$ виконується нерівність $y - Y < 0$. Це означає, що крива $y = f(x)$ на інтервалі $(a; b)$ опукла.

Аналогічно доводять теорему для випадку $f''(x) > 0$.

З теореми випливає, що в точці перегину друга похідна дорівнює нулю, якщо вона існує. Однак точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує, наприклад, точка $x = 0$ кривої $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (рис. 3.60).

Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками другого роду функції $y = f(x)$. Отже, якщо x_0 — абсциса точки перегину, то x_0 є критичною точкою другого роду цієї функції. Обернене твердження неправильне.

Сформулюємо достатні умови існування точки перегину.

Теорема 3.27. Нехай x_0 — критична точка другого роду функції $f(x)$. Якщо переходячи через точку x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$.



Вчимося досліджувати криві на опуклість і вгнутість та точки перегину

3.110. Знайдіть інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1.$$

Розв'язання. Знаходимо похідні

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2,$$

$$f''(x) = 36x^2 - 24x = 36x \left(x - \frac{2}{3} \right).$$

Розв'язуємо рівняння $f''(x) = 0$, $36x \left(x - \frac{2}{3} \right) = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2}{3}$ - критичні точки другого роду. Визначимо знак другої похідної: якщо $x < 0$, то $f''(x) > 0$ - крива вгнута; якщо $x \in (0; 2/3)$, то $f''(x) < 0$ - крива опукла; якщо $x > 2/3$, то $f''(x) > 0$ - крива вгнута.

При переході через точки $x_1 = 0$ і $x_2 = \frac{2}{3}$ друга похідна змінює знак. Звідси випливає, що точки $(0; f(0))$ та $(2/3; f(2/3))$, тобто $(0; 1)$ та $(2/3; 11/27)$ є точками перегину кривої $f(x)$.



Необхідні знання про асимптоти кривої

Def. Асимптотою кривої $y = f(x)$ називають пряму, до якої необмежено наближається точка кривої при необмеженому віддаленні її від початку координат. Існує три типи асимптот: вертикальні, похилі та горизонтальні.

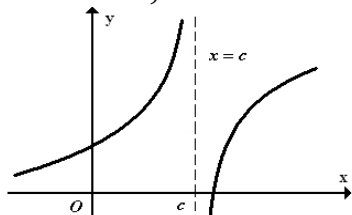


Рис. 3.67. Пряма $x = c$ - вертикальна асимптота

Пряма $x = c$ - вертикальна асимптота (рис. 3.67), якщо $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = \pm\infty$ або $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \pm\infty$.

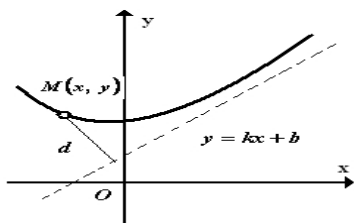


Рис. 368. Пряма $y = kx + b$
похила асимптота

Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою (рис. 3.68), якщо існують скінченні границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \text{де } (k \neq 0) \quad \text{та} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b.$$

Знайдемо вирази для k і b . Нехай $M(x; y)$ – довільна точка кривої $y = f(x)$.

Використовуючи формулу (2.11), запишемо відстань від цієї точки до прямої $y = kx + b$:

$$d = \frac{|kx - y + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

За умовою $d \rightarrow 0$, коли точка $M(x; y)$ віддаляється у нескінченність ($x \rightarrow \infty$). Звідси випливає, що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (kx - y + b) = 0, \quad (3.22)$$

або $kx - y + b = \alpha(x)$, де $\alpha(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow \infty$. Розділимо обидві частини рівності $y = kx + b - \alpha(x)$ на x і перейдемо до границі при $x \rightarrow \infty$, дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(k + \frac{b}{x} - \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k,$$

оскільки $\frac{b}{x} \rightarrow 0$, $\frac{\alpha(x)}{x} \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow \infty$. Отже,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (3.23)$$

Тоді з (3.22) випливає, що

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx). \quad (3.24)$$

Н.В.

1. У формула (3.23), (3.24) потрібно розглядати випадки як $x \rightarrow +\infty$, так і $x \rightarrow -\infty$.

2. Якщо одна з границь (3.23) або (3.24) не існує, то похила асимптота не існує.

3. Горизонтальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ називають пряму $y = b$ (рис. 3.69), коли $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$).

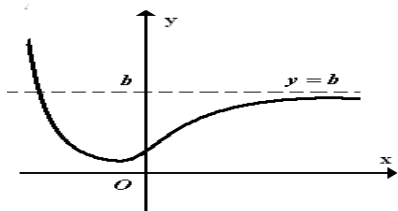


Рис. 3.69. Горизонтальна асимптота $y = b$

Зрозуміло, що горизонтальна асимптота є окремим випадком похилої асимптоти ($k = 0$).



Вчимося знаходити асимптоти кривої

3.111. Знайдіть асимптоти кривої $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

Розв'язання. Рівняння похилої асимптоти шукаємо у вигляді $y = kx + b$. За формулами (3.23), (3.24) дістаємо:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0.$$

Отже, $y = x$ - рівняння похилої асимптоти. Далі, оскільки

функція $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ в точках $x = \pm 2$ має розрив другого роду, то прямі $x = -2$ та $x = 2$ - вертикальні асимптоти заданої кривої.

Горизонтальних асимптот крива не має $\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty \right)$.



Необхідні знання про загальну схему дослідження функції та побудову її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба виконати такі дії:

- 1) знайти область існування функції;
- 2) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з осями координат;
- 3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність. Зауважимо, що графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції – відносно початку координат;
- 4) знайти точки розриву та встановити їх характер;
- 5) за першою похідною знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
- 6) за другою похідною знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
- 7) знайти асимптоти кривої;
- 8) дослідити поведінку функції в нескінченно віддалених точках;
- 9) обчислити, якщо необхідно, значення функції в кількох контрольних точках;
- 10) побудувати графік функції з урахуванням результатів попередніх пунктів.



Вчимося досліджувати функцію та будувати її графік

3.112. Дослідіть функцію $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ та побудуйте її графік.

Розв'язання. 1) Область визначення – вся числова пряма, за винятком точки $x = 1$, тобто $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2) Графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь ординат (якщо це можливо) в точці $(0; f(0))$. У нашому випадку $y(0) = -1$, отже,

$A(0; -1)$ - точка перетину кривої з віссю Oy . Щоб знайти точки перетину графіка з віссю Ox , потрібно розв'язати рівняння $y=0$,

$$\frac{x^2 + 1}{x - 1} = 0$$
 тобто $\frac{x^2 + 1}{x - 1} = 0$. Це рівняння не має дійсних коренів, тому функція не перетинає вісь абсцис.

3) Функція неперіодична. Розглянемо вираз

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x - 1} = \frac{x^2 + 1}{-x - 1},$$

отже, $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$. Це означає, що дана функція не є ні парною, ні непарною, тобто є функцією загального вигляду.

4) Функція в точці $x=1$ має розрив другого роду, причому

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = +\infty$$
 . В усіх інших точках функція неперервна.

5) Знаходимо похідну

$$y' = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

і розв'язуємо рівняння $y'=0$, або $x^2 - 2x - 1 = 0$, звідки дістаємо стаціонарні точки $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ та $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Крім того, похідна невизначена при $x=1$. Отже, $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = 1$ - критичні точки, або точки можливого екстремуму даної функції. Ці точки розбивають числову пряму на чотири інтервали $(-\infty; 1 - \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}; 1)$, $(1; 1 + \sqrt{2})$, $(1 + \sqrt{2}; \infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, який можна встановити за методом інтервалів або обчислення значень похідної в окремих точках (по одній точці з кожного інтервалу). На інтервалах $(-\infty; 1 - \sqrt{2})$ та $(1 + \sqrt{2}; \infty)$ похідна додатна, отже, функція зростає; для $x \in (1 - \sqrt{2}; 1) \cup (1; 1 + \sqrt{2})$ функція спадає, бо на цих інтервалах похідна від'ємна. При переході через точку $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ (рух відбувається зліва направо) похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, в цій точці функція має локальний максимум. Тоді

$$y_{\max} = y(1 - \sqrt{2}) = \frac{(1 - \sqrt{2})^2 + 1}{1 - \sqrt{2} - 1} = 2 - 2\sqrt{2}.$$

При переході через точку $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці існує локальний мінімум, причому

$$y_{\min} = y(1 + \sqrt{2}) = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 1}{1 + \sqrt{2} - 1} = 2 + 2\sqrt{2}.$$

Точка $x=1$ не є точкою екстремуму (в цій точці функція невизначена).

6) Знайдемо другу похідну

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x - 1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

На інтервалі $(-\infty; 1)$ $y'' < 0$, отже, на цьому інтервалі крива опукла; якщо $x \in (1; \infty)$, то $y'' > 0$ - крива вгнута. У точці $x=1$ - вертикальна асимптота кривої.

7) Із результатів п.4 випливає, що пряма $x=1$ - вертикальна асимптота кривої.

Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty,$$

то горизонтальних асимптот немає. Обчислимо границі

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = 1.$$

$$k = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1.$$

Таким чином, пряма $y = x + 1$ — похила асимптота даної кривої. Інших асимптот немає.

8) Обчислимо додатково (хоча це зовсім необов'язково) кілька значень функції: $y(3) = 5$, $y(-1) = -1$. Отже, точки $B(3; 5)$, $C(-1; -1)$ належать графіку.

9) Підсумовуючи проведені дослідження, будуємо графік (рис. 3.70).

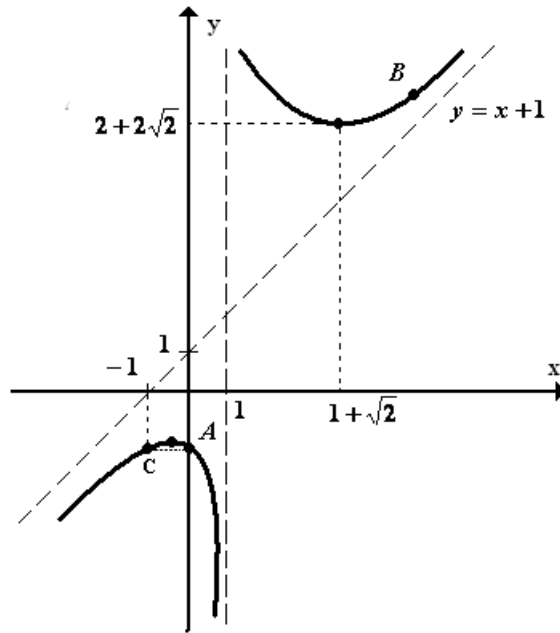


Рис. 3.70. Графік функції $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

3.113. Дослідіть функцію $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ та побудуйте її графік.

Розв'язання. 1) Область визначення — вся числова пряма, тобто $D(y) = (-\infty; \infty)$.

2) Точки перетину з осями координат: якщо $x = 0$, то $y = 0$; якщо $y = 0$, то $x = 0$ або $x = 2$. Отже, крива проходить через точки $(0; 0)$; $(2; 0)$.

3) Функція ні парна, ні непарна.

4) Точок розриву і вертикальних асимптот не існує.

$$y' = \frac{1}{3} \frac{3x^2 - 4x}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}} = \frac{x(x - 4/3)}{\sqrt[3]{x^4(x - 2)^2}}$$

5) Знайдемо похідну точки - $x = 0$; $4/3$; 2 . Ці точки розбивають числову пряму на чотири інтервали $(-\infty; 0)$, $(0; 4/3)$, $(4/3; 2)$, $(2; \infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, а саме: якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $y' > 0$ - функція зростає; якщо $x \in (0; 4/3)$, то $y' < 0$ — функція спадає; якщо $x \in (4/3; 2) \cup (2; \infty)$, то $y' > 0$ - функція зростає. Переходячи через точку $x = 0$, похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, $x = 0$ є точкою максимуму, причому

$y_{\max} = y(0) = 0$. Переходячи через точку $x = 4/3$, похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці існує мінімум:

$$y_{\min} = y(4/3) = \sqrt[3]{(4/3)^2(4/3-2)} = -\sqrt[3]{32/27} = -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{3} \approx -1,1.$$

Переходячи через точку $x = 2$, похідна не змінює знаку, отже, ця точка не є точкою екстремуму.

6) Знайдемо другу похідну

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x(x-4/3)}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^2}} \right)' = \left(\frac{x-4/3}{\sqrt[3]{x(x-2)^2}} \right)' = \\ &= \frac{\sqrt[3]{x(x-2)^2} - (x-4/3) \frac{(x-2)^2 + x \cdot 2(x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2(x-2)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(x-2)^4}} = \\ &= \frac{9x(x-2)^2 - (3x-4)(x-2)(3x-2)}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4(x-2)^8}} = -\frac{8}{9} \frac{(x-2)}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^8}}. \end{aligned}$$

Друга похідна не існує у точках $x = 0$ та $x = 2$. Отже, точки $x = 0$; 2 – критичні точки другого роду. Розглянемо проміжки $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ і $(2; \infty)$. На інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(0; 2)$ $y'' > 0$ – крива вгнута; якщо $x \in (2; \infty)$, то $y'' < 0$ – крива опукла. Точка перегину має координати $(2; 0)$.

7) Знайдемо похилу асимптоту:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x^2}}{x} = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Отже, пряма $y = x - 2/3$ – похила асимптота даної кривої. Інших асимптот немає.

8) Враховуючи проведені дослідження, будуюмо графік даної функції (рис. 3.71).

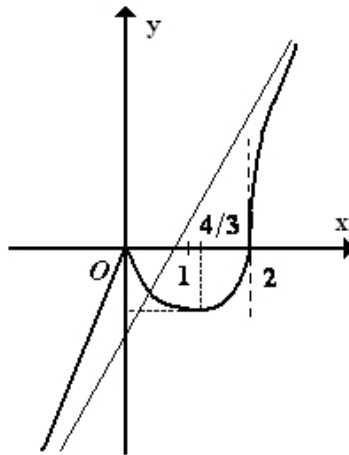


Рис. 3.71. Графік функції $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$



Досліджуємо та будуємо графіки функцій за допомогою ППЗ Mathcad, Maple, Mathematica

Процедура дослідження та побудови графіка функцій за допомогою відповідних правил.

3.114. Якими повинні бути довжина твірної l й діаметр d днища циліндричної ємності, щоб при заданому її об'ємі V загальна довжина зварених швів виявилася мінімальною? Урахувати, що зварювати приходиться краї сталевих листа, що зігнуто в циліндр по твірній, а після до отриманої труби приварювати днища.

Розв'язання.

Крок 1. У позначеннях, що нами прийнято, загальна довжина L зварених швів виражається співвідношенням $L = l + 2\pi d$.

Крок 2. Множина припустимих розв'язків завдання визначається системою обмежень $l > 0, d > 0$. Ці умови накладені на кожен із шуканих змінних, тому що це виміри тіла.

Крок 3. Знайдемо умову, що зв'яже змінні одну з одною. Якщо ємність циліндричної форми, то за формулою об'єму циліндра маємо $V = p \cdot r^2 \cdot l$ та $r = \frac{d}{2}$. Отже $V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot l}{4}$.

Крок 3. Виразимо з останньої умови змінну l через d , отже $l = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2}$. Підставимо її значення у співвідношення $L = l + 2\pi d$.

Крок 4. Одержимо функціональну залежність загальної довжини зварених швів від діаметра днища при заданому об'ємі ємності:

$$L = \frac{4V}{\pi d^2} + 2\pi d.$$

Крок 5. Знайдемо мінімум функції, що отримана, за другою достатньою умовою локального екстремуму.

Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму.

Крок 6. Похідна функції визначається за правилами $(u + v)' = u' + v'$ та $(x^n)' = n x^{n-1}$. Отже

$$L' = -\frac{8 \cdot V}{\pi \cdot d^3} + 2\pi.$$

Якщо $L' = 0$, то $d = \sqrt[3]{4V/\pi^2}$ це критична точка.

Крок 7. Друга похідна функції визначається за тими ж правилами, що й перша $L'' = \frac{24 \cdot V}{\pi \cdot d^4}$, $(2\pi)' = 0$.

Крок 8. Якщо $L'' = \frac{24 \cdot V}{\pi \cdot d^4} > 0$, то критична точка $d = \sqrt[3]{4V/\pi^2}$ є точкою мінімуму функції.

Крок 9. Підставимо отримане значення d у вираз довжини твірної $l = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2}$. Довжина твірної у точці мінімуму дорівнює $l = \sqrt[3]{4\pi V}$.

Крок 10. Порівняємо значення l та d (знайдемо відношення їх виразів). Бачимо, що загальна довжина зварених швів буде

мінімальною при $l = \pi d$, тобто коли довжина твірної у π разів більше діаметру днища.

Процедура обчислення першої і другої похідних функції та знаходження критичних точок за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathcad.



«Навчаємо» свій комп'ютер знаходженню критичних точок за допомогою ППЗ Mathcad.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathcad.
2. За допомогою опції *Вид – Панели инструментов – Калькулятор* винести на панель інструментів вкладку.
3. Ввести вираз для дослідження функції $L = \frac{4V}{\pi \cdot x^2} + 2\pi \cdot x$, після чого виокремити змінну x , за якою відбувається диференціювання.
4. За допомогою опції *Символика-Перменная-Дифференцировать* отримати вираз першої похідної функції.
5. Виокремити змінну x , за якою необхідно розв'язати рівняння $L' = 0$. За допомогою опції *Символика-Перменная-Решить* отримати значення точки, що є підозрілою на екстремум $\sqrt[3]{4V/\pi^2}$.
6. Знайти другу похідну від функції за аналогією з першою й отримати $L'' = \frac{24 \cdot V}{p \cdot d^4} > 0$, то критична точка $x = \sqrt[3]{4V/\pi^2}$ є точкою мінімуму функції (рис. 3.72).

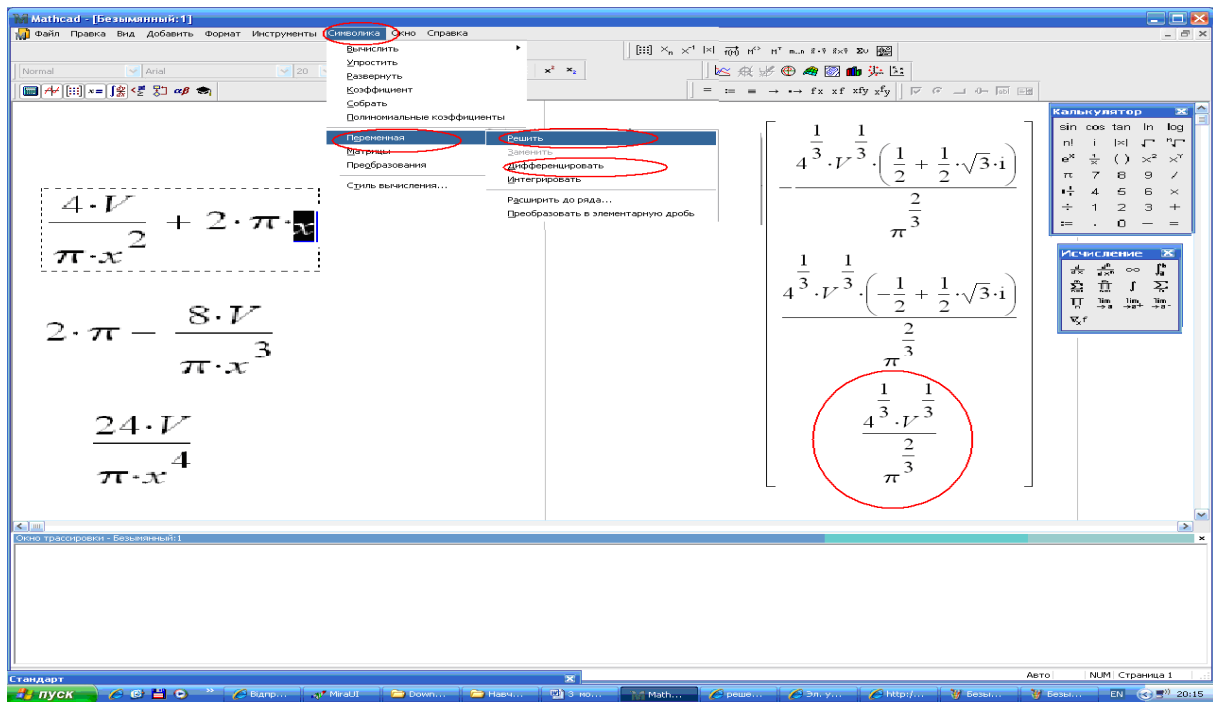


Рис. 3.72. Вікно ППЗ Mathcad: дослідження функції

Процедура дослідження функції на екстремум за допомогою відповідних правил.

3.115. Тіло вагою \vec{P} , що лежить на горизонтальній площині, повинне бути зрушене силою \vec{F} , що прикладена до нього (рис.3.73). Під яким кутом до обрію необхідно прикласти цю силу, щоб її значення було найменшим?

Розв'язання.

Крок 1.

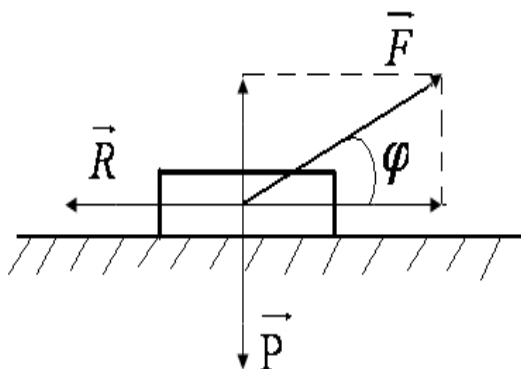


Рис. 3.73. Схема зрушення тіла вагою \vec{P} силою \vec{F}

На тіло, крім власної ваги \vec{P} й прикладеної до нього сили \vec{F} , діє сила тертя \vec{R} . Величина цієї сили пропорційна величині сили, що притискає тіло до площини й спрямована проти руху, тобто $R = \mu \cdot (P - F \cdot \sin \varphi)$, де μ — коефіцієнт пропорційності, що називається коефіцієнтом тертя.

Крок 2. Оскільки сила тертя \vec{R} повинна врівноважувати горизонтальною складовою $\vec{F} \cdot \cos \varphi$ сили \vec{F} , то величини цих сил рівні між собою, отже $R = F \cdot \cos \varphi$.

Крок 3. Прирівнюємо праві частини обох рівностей для R , одержимо $\mu \cdot (P - F \cdot \sin \varphi) = F \cdot \cos \varphi$, звідки

$$F = \frac{\mu \cdot P}{\cos \varphi + \mu \cdot \sin \varphi}.$$

Крок 4. Ця функція досягає свого найменшого значення в тій же точці проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, в якій функція $y = \cos \varphi + \mu \cdot \sin \varphi$ приймає своє найбільше значення.

Крок 5. Похідна $y' = \mu \cdot \cos \varphi - \sin \varphi$ дорівнює нулю, якщо $\operatorname{tg} \varphi = \mu$ або $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$ - кут тертя, оскільки $y'' = -\mu \cdot \sin \varphi - \cos \varphi < 0$.



Крок 6. Прикладати силу \vec{F} під кутом тертя виявляється найбільше вигідно, тому що при цьому її величина буде найменшою.

Так, наприклад, якщо тіло пересувається по дерев'яному настилі, то $\mu = 0,4$ й $\varphi \approx 22^\circ$.

Процедура дослідження функції на екстремум за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Maple.



«Навчаємо» свій комп'ютер дослідженню функції на екстремум за допомогою ППЗ Maple.

1. Відкрити вікно ППЗ Maple.
2. За допомогою опції *Insert-Execution Grope-Before Cursor* або виклику в рядку інструментів кнопки  отримати у полі програми мітку .
3. Ввести команду *solve()*, що дозволить виконати розв'язування нерівностей та необхідних рівнянь під час дослідження функції на екстремум.
4. Для обчислення похідних функції $y = \cos \varphi + \mu \cdot \sin \varphi$ під час дослідження користуємось командою *diff(...)*.

5. Активізувати зліва вкладки *Expression*, *Common Symbols* й *Greek* та з отриманих шаблонів ввести вираз функції $y = \cos \varphi + \mu \cdot \sin \varphi$ при $\mu = 0,4$.
6. Після обчислення інтервалів монотонності функції (знаходяться проміжки, де похідна функції приймає додатні й від'ємні значення) визначити точки підозрілі на екстремум, для чого похідну функції прирівняти до нуля.
7. Отримати єдине значення кута у радіанах $0,3805$, що відповідає 22° (рис. 3.74).

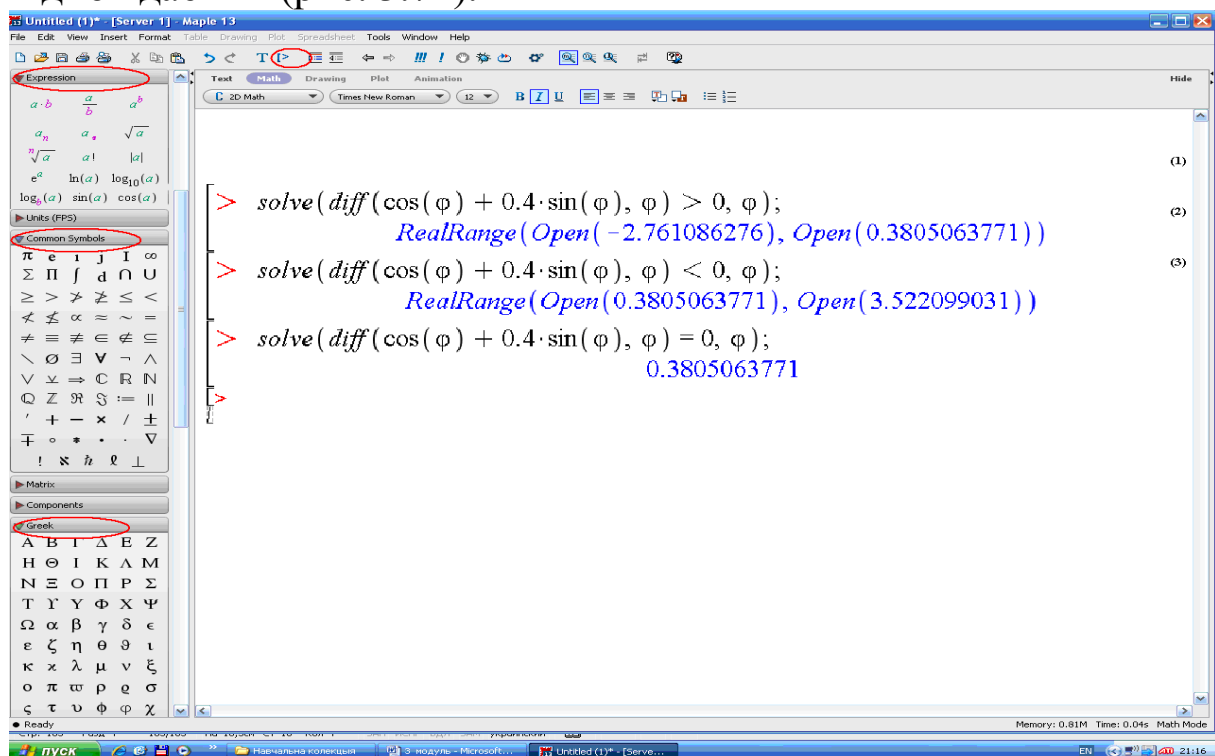


Рис. 3.74. Вікно ППЗ Maple: дослідження функції на екстремум

Процедура обчислення екстремуму функції за допомогою відповідних правил.

3.116. Опір на вигин балки прямокутного поперечного перерізу пропорційний добутку ширини цього перерізу на квадрат його висоти. Яким повинні бути розміри перерізу балки, що вирізаної із круглої труби діаметра d , щоб її опір на вигин був найбільшим, тобто щоб балка мала найбільшу міцність?

Розв'язання.

Крок 1. За умовою завдання опір балки на вигин (міцність) визначається виразом $\sigma = kxy^2$, де

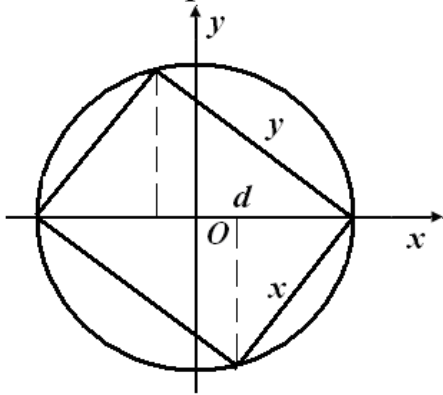


Рис. 3.75. Схема балки прямокутного поперечного перерізу

x — ширина балки, y — її висота, k — коефіцієнт пропорційності, що залежить від матеріалу (рис. 3.75).

Крок 2. Оскільки за теоремою Піфагора $y^2 = d^2 - x^2$, то йдеться мова про найбільше значення виразу $\sigma = kx(d^2 - x^2)$, де $x \in (0; d)$.

Крок 3. Перша похідна $\sigma' = k(d^2 - 3x^2)$ дорівнює нулю в точці $x = d\sqrt{3}/3$.

Крок 4. Друга похідна $\sigma'' = -6kx$ при $x = d\sqrt{3}/3$ приймає від'ємне значення, отже, в цій точці σ досягає максимуму, а з ним і найбільшого значення. При $x = d\sqrt{3}/3$ маємо $y = d\sqrt{6}/3$, так що $d \div y \div x = \sqrt{3} \div \sqrt{2} \div 1$.

Крок 5. З рисунку бачимо, що для побудови такого прямокутника необхідно діаметр розділити на три рівні частини, у точках ділення поставити перпендикуляри й точки перетину цих перпендикулярів з колом з'єднати відрізками прямих з кінцями діаметру.

У будівній справі зазвичай використовується відношення $y \div x = 7 \div 5$. Це є наближеним значенням $\sqrt{2} = 1,4...$

Відповідь: $y \div x = 7 \div 5$.

Процедура обчислення екстремуму функції за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathematica.



«Навчаємо» свій комп'ютер обчисленню екстремуму функції за допомогою ППЗ Mathematica.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathematica.
2. За допомогою опції *Palettes-Classroom Assistant* викликати вкладки із шаблонами для набору символів.
3. У вкладці *Classroom Assistant* знайти меню *Basic Commands* й активізувати кнопку $\frac{d}{dx}$. В отриманому вікні вибрати у шаблонах команд FindMaximum відповідно $\text{FindMaximum}[\text{expr}, \{\text{var}, \text{estimate}\}]$.
4. Після введення за допомогою шаблонів виразу функції $kx(d^2 - x^2)$ при якихось заданих значеннях $k=6$ та $d=5$ зазначити змінну x й з якого значення можна розпочати пошук максимального та за допомогою опції *Evaluation-Evaluate Cells* викликати із мітками $\text{In}[5]:=$ і $\text{Out}[5]=$ обчислення максимального значення x .
5. Отримати максимум функції та максимальне значення x (рис. 3.76)

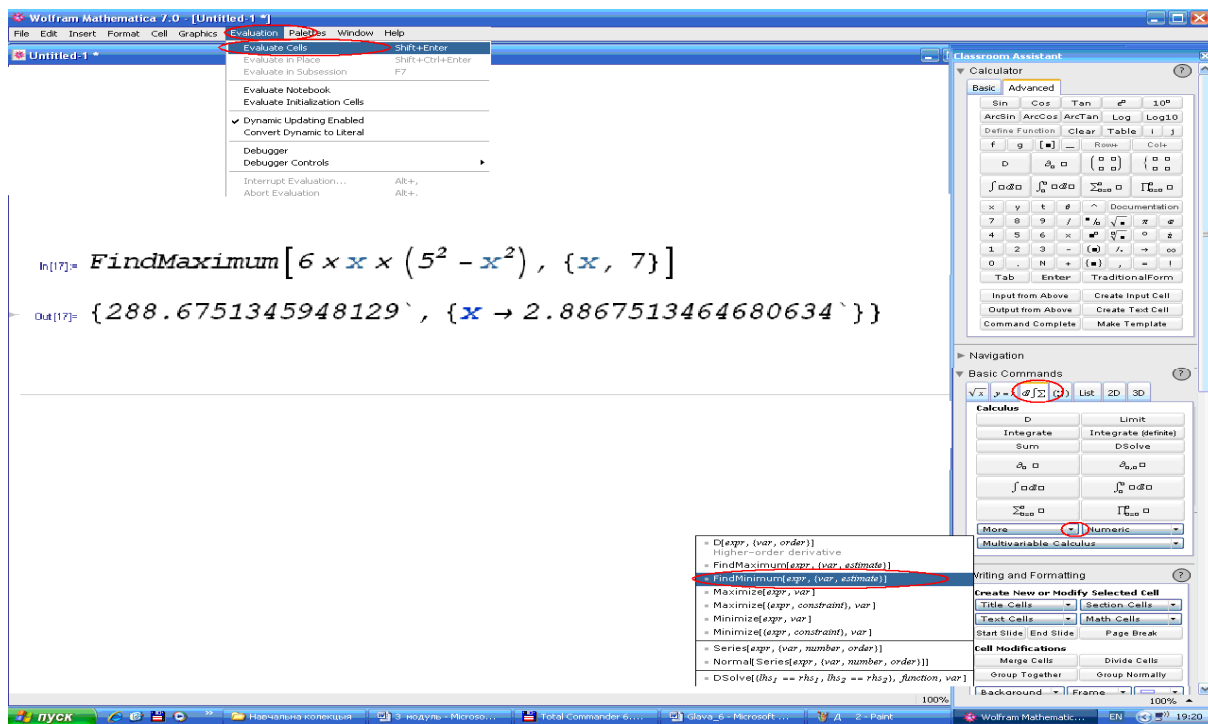


Рис. 3.76. Вікно ППЗ Mathematica: обчислення екстремума



Моделюємо професійну діяльність інженера

3.117. Матеріальна точка коливається по колу біля свого середнього положення за законом $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$, де (A , $\omega > 0$). Знайдіть найбільші значення швидкості й прискорення руху точки в будь-який момент часу t (таке коливання називається гармонійним, де A - амплітуда, ω - частота, α - початкова фаза).



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Перенесіть алгоритм дослідження функції на найбільше значення на структуру об'єкту: знайдіть швидкість руху як похідну шляху за часом скориставшись ППЗ; знайдіть критичні точки функції та дослідіть графік функції похідної за допомогою ППЗ; знайдіть другу похідну від функції шляху для отримання функції прискорення; проаналізуйте вираз отриманого прискорення, для якого $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$; уведіть масу матеріальної точки та скористайтесь законом Ньютона $F = ma$.

Відповідь: сила під дією якої відбувається гармонійне коливання приймає значення $F = -m\omega^2 x$. Як бачимо, вона завжди спрямована до середнього положення (тому що має знак, зворотний знаку x і пропорційна віддаленню точки від середнього положення).

3.118. Потужність W гідравлічного колеса визначається за формулою $W = (\gamma / g) \cdot \omega_0 \cdot v_0 \cdot (v_0 - v) \cdot v$, де γ - питома вага потоку рідини g — прискорення вільного падіння, ω_0 — живий переріз струї, що падає на колесо, v_0 — швидкість струї, v — швидкість руху лопаток колеса. Знайдіть найбільшу потужність, що можна отримати під час обертання гідравлічного колеса.



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Перенесіть алгоритм дослідження функції на найбільше значення на структуру об'єкту: знайдіть першу похідну від

функції потужності W гідравлічного колеса скориставшись для її дослідження ППЗ; знайдіть критичні точки функції, інтервал дослідження функції та дослідіть графік функції похідної за допомогою ППЗ.

Відповідь:
$$W_{\max} = \frac{(\gamma \cdot \omega_0^2 \cdot v_0^3)}{4g} \quad \text{при} \quad v = \frac{v_0}{2} .$$

3.119. Які найбільш вигідні розміри закритої цистерни, що має форму прямого кругового циліндру радіуса R й висоти H , якщо площа її повної поверхні задана й дорівнює S ?

Найбільш вигідною формою цистерни є та, при якій її об'єм V буде найбільшим.



Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Перенесіть алгоритм дослідження функції на найбільше значення на структуру об'єкту: знайдіть першу похідну від

функції об'єму цистерни, що має форму циліндра, $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$ скориставшись для її дослідження ППЗ; знайдіть критичні точки функції, інтервал дослідження функції та дослідіть графік функції похідної за допомогою ППЗ.

Відповідь: V досягає максимуму при $H : R = 2$, де

$$R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} .$$

3.120. Пряма l ділить площину на два середовища I і II (рис.3.77).

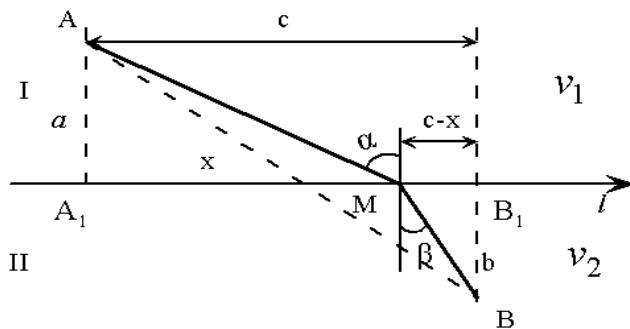


Рис.3. 77. Схематичне зображення руху точки у середовищах

У середовищі *I* точка рухається з швидкістю v_1 , а в середовищі *II* – із швидкістю v_2 . По якому шляху має рухатись точка, щоб найшвидше дістатися з точки *A* середовища *I* у точку *B* середовища *II*?



Зрозуміло, що як в середовищі *I*, так у середовищі *II* найкоротший шлях має бути прямолінійним, але шлях по прямій *AB* найкоротшим не буде. Отже, найкоротший шлях складається з двох прямолінійних відрізків *AM* і *MB*, причому точка $M \in l$. Перенесіть алгоритм дослідження функції на найбільше значення на структуру об'єкту: за незалежну змінну x виберіть абсцису точки *M* ($x = A_1M$) і знайдемо час t , за який рухома точка перейде з точки *A* в точку *B*:

$$t = f(x) = \frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2} \quad \text{для } -\infty < x < +\infty;$$

знайдіть першу й другу похідні за допомогою ППЗ; знайдіть критичні точки функції $f'(x)=0$; за допомогою ППЗ проаналізуйте

поведінку знакосталості $f'(x)$ і $f''(x)$; з'ясуйте геометричний зміст знайдених результатів за допомогою співвідношень у

прямокутному трикутнику $\frac{A_1M}{v_1 AM} = \frac{MB}{v_2 BM}$ або $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$.

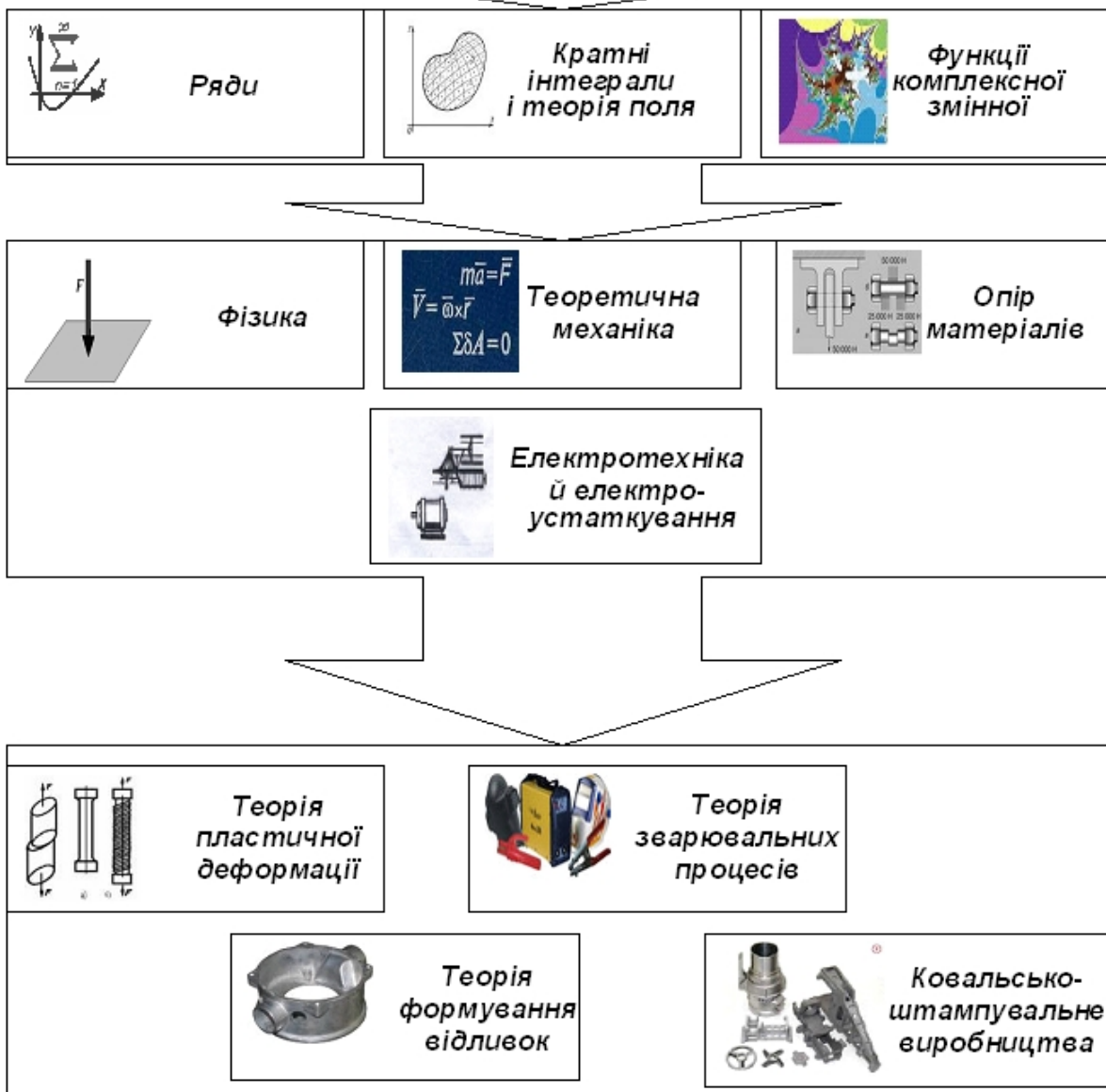
Відповідь: отримано відомий з фізики закон заломлення світла: заломлення світла відбувається так, наче промінь світла обирає найшвидший час з точок одного середовища в точки другого. Цей результат повністю узгоджується з відомим у оптиці принципом Ферма: із всіх можливих шляхів, які йдуть з *A* в *B*, промінь світла обирає такий, який він проходить за найменший час. Найкоротший шлях складається з двох прямолінійних відрізків *AM* і *MB*, т. *M* знаходиться між точкам A_1 і B_1 .



Диференціальне числення функції декількох змінних. Комплексні числа

Модуль 4

- Тема 1. Функція декількох змінних.
Границя та неперервність
функції.
- Тема 2. Похідні і диференціали функції
декількох змінних.
- Тема 3. Деякі застосування частинних
похідних.
- Тема 4. Комплексні числа.



ВМІННЯ, НА ЯКИХ БАЗУЄТЬСЯ ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ

Виконувати усні і письмові обчислення; виконувати перетворення цілих, раціональних, ірраціональних виразів; задавати функцію; знаходити область визначення й область значення функції; знаходити границю функції неперервного аргументу; будувати графіки функцій, застосовувати їх властивості; обчислювати значення функції у точці; знаходити похідні елементарних функцій, похідну складеної функції, похідні вищих порядків; розв'язувати задачі за допомогою похідної; виконувати дії над комплексними числами; розв'язувати лінійні, раціональні, ірраціональні, трансцендентні рівняння та їх системи; застосовувати співвідношення між сторонами й кутами в прямокутному трикутнику, формули площ фігур та об'ємів геометричних тіл.



ВМІННЯ, ЯКІ ФОРМУЮТЬСЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ

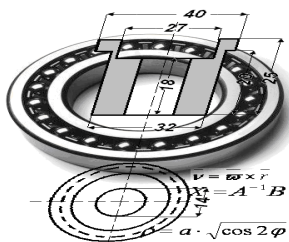
Знаходити область визначення функції двох змінних; знаходити частинні похідні першого та вищих порядків явно заданої функції; знаходити похідні складених та неявних функцій; знаходити повні диференціали першого і другого порядків функції двох аргументів; знаходити безумовні й умовні екстремуми функції; знаходити найбільше та найменше значення функції в обмеженій замкненій області; будувати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні; обчислювати похідну за напрямом й градієнт функції; виконувати дії з комплексними числами; застосовувати ППЗ Mathcad, Derive, Gran 3D для роботи з функцією декількох змінних, отримання зображень її області визначення та значення; обчислення похідних, диференціалів, екстремумів, найбільших та найменших значень; побудови дотичних площин та нормалі до поверхні.



ВМІННЯ, ЩО НАБУВАЄ СТУДЕНТ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ІНЖЕНЕРНИХ ДИСЦИПЛІН

Застосовувати функцію декількох змінних під час розрахунків потенційних силових полів; вивчати рух механічних систем з геометричними в'язями за допомогою рівняння Лагранжа (рівняння руху системи в узагальнених координатах); вивчати малі коливання системи навколо положення стійкої рівноваги (теорема Лагранжа-Дирихле); розраховувати конструкції за законом мінімуму потенційної енергії деформації (принцип найменшої роботи).

Застосовувати комплексні числа для додавання й розкладу швидкостей та сил; розраховувати ланцюги змінного току (метод комплексних амплітуд); обробляти цифрові сигнали; аналізувати коливальні процеси в генераторних системах; алгоритмізувати стиснення інформації; використовувати теорію фракталів у комп'ютерному дизайні.



Тема 1. ФУНКЦІЯ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Наприкінці XIX століття фізикам стало зрозуміло, що для характеристики деформацій, інерції при обертovому русі, зусиль у деформованих твердих тілах та інших процесів необхідні величини ще більш складної математичної природи. Такі величини називали тензорами. З іншого боку, розвиток кількісних методів показав, що та ж сама фізична властивість у різних точках об'єкта, що досліджується, може приймати різні значення, і тому для математичного опису необхідно знати сукупність значень відповідної величини в усіх його точках. Так у фізиці запропонували поняття математичного поля-області простору, кожній точці якого відповідає певне значення деякої фізичної величини.

Поля бувають скалярні, векторні й тензорні. Кожне з них, у свою чергу, може бути стаціонарним (якщо фізична величина в кожній точці області згодом не змінюється) або нестаціонарним. Стаціонарне поле є функція, що залежить від координат x, y, z точок простору й може бути позначеною у вигляді $u = f(x, y, z)$



Необхідні знання про деякі основні поняття функції декількох змінних

Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x, y) .

Def. Якщо кожній парі чисел з D за певним правилом ставиться у відповідність єдине дійсне число z , то кажуть, що на множині D визначено *функцію z від двох змінних x та y* і записують $z = f(x, y)$.

При цьому змінну z називають *залежною змінною (функцією)*, а x та y – *незалежними змінними (аргументами)*.

Def. Множину пар (x, y) , для яких функція $z = f(x, y)$ існує, називають, *областю визначення (існування)* цієї функції і позначають $D(f)$, або D .

Множину значень змінної z називають *областю значень* цієї функції позначають $E(f)$, або E .

Кожній упорядкованій парі чисел (x, y) у прямокутній декартовій системі координат взаємно однозначно відповідає точка $M(x, y)$ площини Oxy . Тому функцію $z = f(x, y)$ можна розглядати як функцію точки $M(x, y)$ і записувати $z = f(M)$.

Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ позначають так: $z_0 = f(x_0, y_0)$, або $z_0 = f(M_0)$, або $z_0 = z|_{M_0}$.

Областю визначення функції двох змінних $z = f(x, y)$ є деяка множина точок координатної площини R^2 (площини Oxy).

Def. Будь-який упорядкований набір m дійсних чисел x_1, x_2, \dots, x_m позначають (x_1, x_2, \dots, x_m) , або $M(x_1; x_2; \dots; x_m)$, і називають точкою m -вимірного координатного простору R^m . Числа x_1, x_2, \dots, x_m називають координатами точки M .

Простір R^1 - це множина всіх дійсних чисел, тобто координатна пряма; R^2 - множина усіх дійсних пар (x, y) , тобто координатна площина; R^3 - множина всіх дійсних трійок (x, y, z) , тобто координатний простір.

Відстань між точками $M(x_1; x_2; \dots; x_m)$ і $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_m^0)$ визначають за формулою

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2}.$$

Множину всіх точок M , координати яких задовольняють нерівність $\rho(M, M_0) < \varepsilon$, називають ε - околom точки M_0 . Так, ε - окіл точки $M_0(x_0, y_0)$ - множина всіх точок площини, які містяться всередині кола радіуса ε з центром у точці M_0 .

Def. Лінію, що обмежує область D , називають *границею області визначення*. Точки області, які не лежать на її границі,

називають *внутрішніми*. Область, яка містить лише внутрішні точки, називають *відкритою*. Якщо ж до області визначення належать і всі точки границі, то таку область називають *замкненою*.

Якщо всі точки області D містяться всередині деякої m -вимірної кулі, то цю область називають *обмеженою*.

Область D називають *зв'язною*, якщо дві довільні її точки можна з'єднати неперервною кривою, усі точки якої містяться в області D .

Наприклад, круг – це зв'язна область, а об'єднання двох кругів, які не мають спільних точок, – незв'язна область.

Надалі під оком точки M будемо розуміти довільну відкриту зв'язну множину, яка містить точку M .

Узагальнимо поняття функції на випадок трьох і більше незалежних змінних.

Def. Якщо кожній трійці чисел $(x, y, z) \in D$, $D \subset R^3$ за певним правилом відповідає єдине число u , то кажуть, що на множині D визначено *функцію u від трьох змінних x, y та z* , і записують $u = f(x, y, z)$, або $u = f(M)$, де $M \in R^3$.

Тут u - залежна змінна (функція), а x, y, z – незалежні змінні(аргументи). Область існування функції $u = f(x, y, z)$ - деяка множина точок простору R^3 . Саму функцію геометрично зобразити можливо тільки за допомогою програмованих засобів.

Def. Якщо кожній точці $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ із області $D \subset R^m$ ставиться за певним правилом у відповідність деяке число u , то кажуть, що на множині D визначено *функцію m змінних*, і пишуть $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, або $u = f(M)$, де $M \in R^m$.



Вчимося знаходити області визначення та значення функції декількох змінних

4.1. Визначте область існування функції $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$.

Розв'язання.

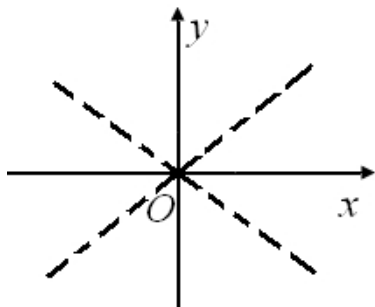


Рис.4.1. Область існування
функції $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$

Вираз $\frac{1}{x^2 - y^2}$ має зміст, якщо $x^2 - y^2 \neq 0$, тобто $x \neq y$ та $x \neq -y$. Областю існування даної функції є вся площина Oxy , за винятком прямих $y = x$ та $y = -x$. Шукана область є необмеженою, відкритою і незв'язною (рис. 4.1).

4.2. Знайдіть область визначення функції

$$z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}.$$

Розв'язання. Функція $z(x, y)$ визначена в усіх точках (x, y) , для яких підкореневий вираз невід'ємний, тобто виконується нерівність

$$36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0.$$

Границя даної області описується рівнянням $4x^2 + 9y^2 = 36$, яке запишемо так: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Це рівняння визначає в площині Oxy еліпс із центром у початку координат і півосями $a = 3$ і $b = 2$, який ділить площину на дві частини. Для точок однієї з цих частин виконується умова $36 - 4x^2 - 9y^2 > 0$, а для іншої - $36 - 4x^2 - 9y^2 < 0$. Щоб виявити, яка з цих частин є областю визначення даної функції, достатньо перевірити умову $36 - 4x^2 - 9y^2 > 0$ для однієї довільної точки, яка не належить еліпсу.

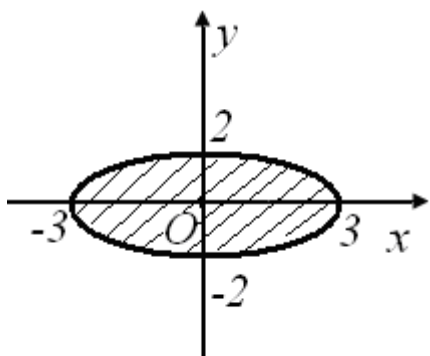


Рис.4.2. Область визначення функції $z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$

Точка $(0;0)$, яка лежить усередині еліпса, задовольняє дану умову. Отже, областю визначення є множина точок, обмежених еліпсом, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. При цьому сам еліпс також належить області визначення (рис. 4.2).

Відзначимо, що шукана область замкнена, обмежена і зв'язана.

4.3. Знайдіть область визначення функції

$$z = \sqrt{y - x + 2} + \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4}$$

Розв'язання. Область визначення цієї функції визначаємо із системи нерівностей:

$$\begin{cases} y - x + 2 \geq 0, \\ -1 \leq \frac{x^2 + y^2}{4} \leq 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y \geq x - 2, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

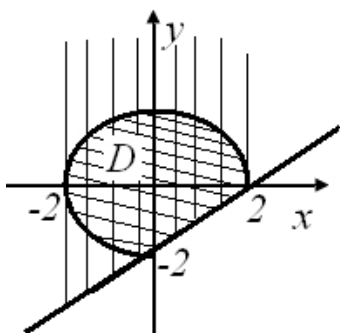


Рис. 4.3. Область визначення функції

$$z = \sqrt{y - x + 2} + \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4}$$

Графічним образом нерівності $y \geq x - 2$ є півплощина, розміщена над прямою $y = x - 2$, разом з цією прямою. Нерівність $x^2 + y^2 \leq 4$ визначає в площині круг із центром у початку координат і радіусом 2. Перетин цих множин і є областю визначення даної функції (рис. 4.3). Шукана множина є обмеженою, замкненою і зв'язною.



Необхідні знання про границю функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в деякій області D і точка M_0 - гранична точка області D , тобто точка $M_0 \in D$ або $M_0 \notin D$, але в довільному околі цієї точки міститься принаймні одна точка множини D , відмінна від точки M_0 .

Def. Число b називають *границею функції* $f(M)$ у скінченній точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх точок $M(x, y)$, які задовольняють умову $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x, y) - b| < \varepsilon.$$

При цьому пишуть: $\lim_{\substack{y \rightarrow y_0, \\ x \rightarrow x_0}} f(x, y) = b$, або $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = b$.

М.В. Слід пам'ятати, що границя функції, якщо вона існує, не залежить від шляху наближення до точки, в якій ця границя шукається. Інакше границя не існує. Для доведення не існування границі функції декількох змінних достатньо вказати хоча б такі два шляхи наближення точки M до точки M_0 , вздовж яких границі набувають різних значень.

Обчислення границь у багатьох випадках доцільно виконувати у такій послідовності:

1. Перенести початок координат у точку $M_0(x_0, y_0)$ (якщо не всі координати точки M_0 дорівнюють нулю). Так, якщо $x_0 \neq 0$, виконують заміну

$$t = \begin{cases} x - x_0, & \text{якщо } x_0 \neq 0, x_0 \neq \infty, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x_0 = \infty. \end{cases}$$

Наприклад, якщо $M(x, y) \rightarrow M_0(2; \infty)$, то після заміни $t_1 = x - 2$, $t_2 = \frac{1}{y}$ дістанемо $M(t_1, t_2) \rightarrow M_0(0; 0)$.

2.

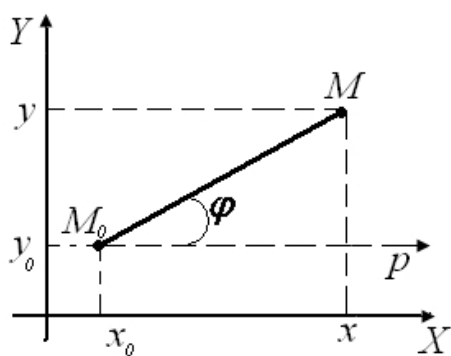


Рис.4.4. Геометрична інтерпретація переходу від прямокутних декартових координат (x, y) до полярних координат (ρ, φ)

Іноколи необхідно перейти до полярних координат із полюсом у точці $M_0(x_0, y_0)$ і полярною віссю, напрям якої зберігається з додатним напрямом осі абсцис, тоді перехід від прямокутних декартових координат (x, y) до полярних координат (ρ, φ) здійснюється за формулами (рис. 4.4):

$$x - x_0 = \rho \cos \varphi, \quad y - y_0 = \rho \sin \varphi$$

де

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

М.В. Отже, задача відшукування границі $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ зводиться до обчислення границі $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(M)$, де ρ є однією з координат точки M , а інша координата (кут φ) вважається довільною. При цьому казати про існування границі можна тільки тоді, коли існує та сама границя при $\rho \rightarrow 0$ при будь-яких залежностях $\varphi = \varphi(\rho)$, $\theta = \theta(\rho)$.



Вчимося знаходити границі функції двох змінних

4.4. Обчисліть $\lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

Розв'язання. Функція $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ обмежена $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \frac{x}{y} < \frac{\pi}{2}$. При $x \rightarrow 0$ та $y \rightarrow 0$ сума $x^2 + y^2$ є нескінченно малою величиною. Оскільки добуток нескінченно малої величини на обмежену є нескінченно малою величиною, то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 0$$

4.5. Доведіть, що $\lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2}$ не існує.

Розв'язання. Розглянемо спочатку границю за умови, що $y = kx$ ($k = \text{const}$). Маємо

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 k}{x^8 + x^2 k^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 k}{x^6 + k^2} = 0.$$

Проте це ще не означає, що шукана границя існує і також дорівнює нулю.

Нехай точка $(x; y)$ прямує до точки $(0; 0)$ вздовж кривої $y = x^4$, тоді

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{x^8 + x^8} = \frac{1}{2}$$

Отже, значення границі залежить від шляху наближення довільної точки $(x; y)$ до точки $(0; 0)$, а тому границя не існує.

4.6. Обчисліть $\lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^4} - e^{y^4}}{x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^4} - e^{y^4}}{x^2 - y^2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{y^4} (e^{x^4 - y^4} - 1)}{x^2 - y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^4 - y^4} - 1}{x^2 - y^2} \left| \begin{array}{l} x^4 - y^4 \rightarrow 0 \\ e^{x^4 - y^4} - 1 \rightarrow x^4 - y^4 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) = 0. \end{aligned}$$



Необхідні знання про неперервність функції двох змінних

Нехай точка $M_0(x_0; y_0)$ належить області визначення функції $u = f(x, y)$.

Def. Функцію $u = f(x, y)$ називають *неперервною* в точці M_0 , якщо виконується нерівність

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (4.1)$$

тобто

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$$

причому точка M прямує до точки M_0 довільно, залишаючись в області визначення функції.

Позначимо $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$. Тоді формулу (4.1) можна записати так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0, \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x, y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

або

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \Delta u = 0,$$

де $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ - відстань між точками M та M_0 , де $\Delta u = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ - називають повним приростом функції в точці M_0 .

Def. Функцію, неперервну в кожній точці деякої області, називають неперервною в цій області.

Якщо в деякій точці M_0 не виконується умова неперервності (4.1), то цю точку називають *точкою розриву*. Це досягається у таких випадках:

1) функція визначена в усіх точках деякого околу точки M_0 , за винятком самої точки M_0 ;

2) функція визначена в усіх точках деякого околу точки M_0 , але не існує $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$;

3) функція визначена в усіх точках околу точки M_0 , існує $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$, але $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \neq f(M_0)$;

Сформулюємо властивості функцій неперервних у замкненій обмеженій області.

Теорема 4.1. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна у замкненій обмеженій області D , то вона обмежена в цій області, тобто існує таке число $M > 0$, що для всіх точок області D виконується нерівність

$$|f(x, y)| < M.$$

Теорема 4.2. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна у замкненій області, то в цій області існують точки, в яких функція набуває найбільшого та найменшого значень.

Теорема 4.3. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна у замкненій обмеженій області D то існують точки M_1 і M_2 у цій області, в яких функція набуває значень різного знака, тобто $f(M_1) \cdot f(M_2) < 0$, то існує точка $M_0 \in D$, для якої $f(M_0) = 0$.



Вчимося досліджувати на неперервність функцію декількох змінних

4.7. Дослідіть на неперервність функцію

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}, & \text{якщо } x-y \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x-y = 0. \end{cases}$$

у точці $(0; 0)$.

Розв'язання. Знайдемо $f(0, 0)$. Якщо $x - y = 0 - 0 = 0$, то $f(0, 0) = 0$. Розглянемо границю даної функції вздовж координатної осі ординат. Для цього покладемо $x = 0$, тоді $\lim_{\substack{x=0, \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y} = -1$.

Оскільки знайдена границя відмінна від значення функції у точці $(0; 0)$: $-1 \neq 0$, то робимо висновок про те, що дана функція у точці $(0; 0)$ розривна.

4.8. Дослідіть на неперервність функцію

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана функція визначена у кожній точці площини Oxy . Крім того

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \left| \sin(x^2 + y^2) \sim x^2 + y^2 \right| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1 = f(0; 0)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sin(x_0^2 + y_0^2)}{x_0^2 + y_0^2} = \frac{\sin(x_0^2 + y_0^2)}{x_0^2 + y_0^2} \quad \text{для випадку } x_0^2 + y_0^2 \neq 0.$$

Згідно з означенням неперервності (4.1) функція $f(x, y)$ неперервна у кожній точці площини Oxy .



Будуємо область визначення функції декількох змінних за допомогою ППЗ Gran1

Процедура побудови області визначення функції декількох змінних за допомогою відповідних правил.

4.9. Індуктивність одношарової короткої котушки на низькій частоті приблизно визначається функцією $L = \frac{0,04r^2\omega^2}{9r - 10l}$, де r — радіус витків; l — довжина котушки; ω — число витків котушки. Вважаючи ω постійним, побудувати область визначення L .

Розв'язання.

Крок 1. Вираз $\frac{0,04r^2\omega^2}{9r - 10l}$ має зміст, якщо $9r - 10l \neq 0$, тобто $r \neq \frac{10}{9}l$.

Крок 2. Якщо r — радіус витків; l — довжина котушки; ω — число витків котушки (ω постійне), то необхідно вважати, що $r > 0$ та $l > 0$.

Крок 3. Областю існування даної функції є I —ша чверть площини Oxy , за винятком прямих, що відображують осі Ox , Oy та прямої $r = \frac{10}{9}l$. Отже шукана область є необмеженою, відкритою, незв'язною.

Процедура побудови області визначення функції $L = \frac{0,04r^2\omega^2}{9r - 10l}$ за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Gran1.



«Навчаємо» свій комп'ютер побудові області визначення функції за допомогою ППЗ Gran1.

1. Відкрити вікно ППЗ Gran1.

2. Побудувати область існування даної функції. Це є I -ша чверть площини Oxy , за винятком прямих, що відображують осі Ox , Oy

та прямої $r \neq \frac{10}{9}l$:

- обрати у вікні *Список об'єктів* Явна: $Y=Y(X)$;
- за допомогою опції *Об'єкт-Створити* у вікні *Введення виразу залежності* ввести вираз функції $Y(x) = (10/9) * x$;
- у цьому ж вікні *Введення виразу залежності* обрати найменше граничне значення $A=0$ та можливість *Не з'єднувати точки відрізками*;
- за допомогою опції *Графік-Побудувати* отримати зображення області, що є необмеженою, відкритою, незв'язною (рис. 4.5).

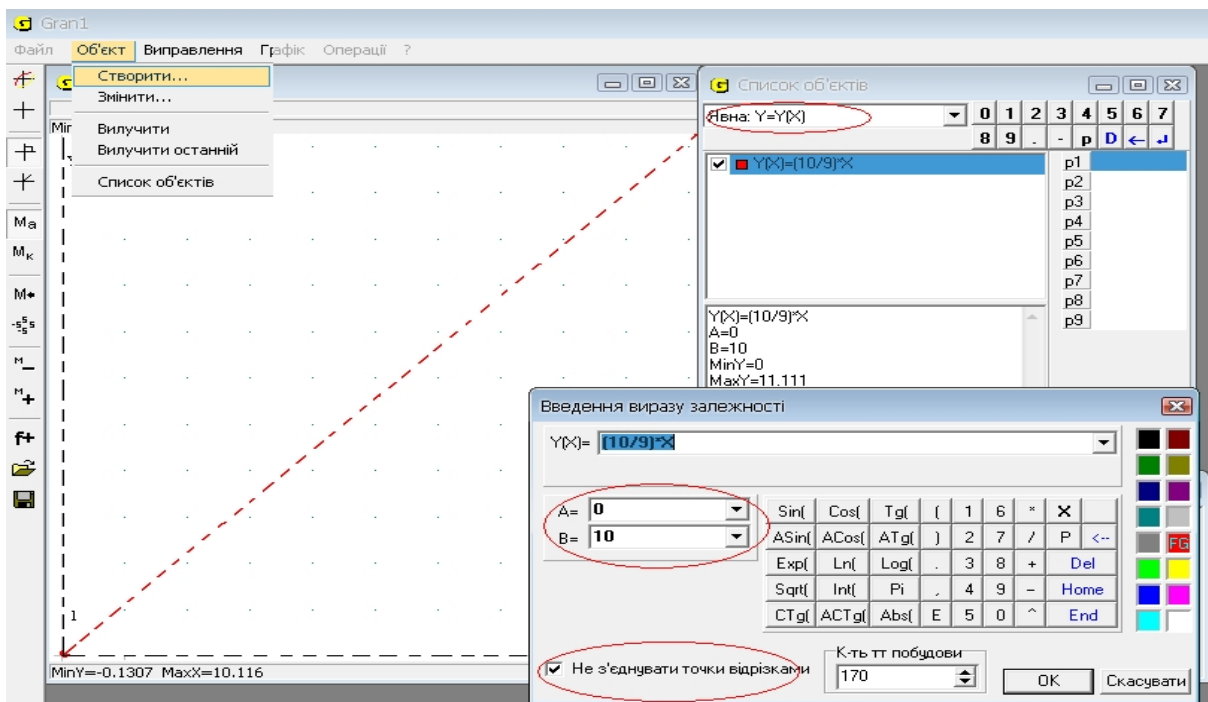


Рис. 4.5. Вікно ППЗ Gran1: побудова області існування даної функції



Моделюємо професійну діяльність інженера

4.10. При надзвуковій швидкості v_x у потоці газу виникає стрибок ущільнення. При цьому щільність стрибка ущільнення (ударна хвиля) у зверненому русі має ту ж швидкість поширення

$v_1 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{k\rho_2}{\rho_1}}$. Тут відповідно P_1 й ρ_1 — тиск і щільність газу до стрибка, а P_2 й ρ_2 — після стрибка. Обчисліть швидкість поширення слабкої ударної хвилі, тобто в припущенні, що $\rho_2 \rightarrow \rho_1$, $P_2 \rightarrow P_1$.



Переформулюйте умову на математичну. Перейдіть до граничного значення швидкості поширення слабкої ударної хвилі при $\rho_2 \rightarrow \rho_1$, $P_2 \rightarrow P_1$. Для обчислення границі скористайтесь можливостями ППЗ.

Відповідь: $v_1 = \sqrt{k \cdot \frac{P_1}{\rho_1}}$, швидкість поширення слабкої ударної хвилі співпадає із швидкістю звука.

4.11. Дві металеві лійки, вершини й осі симетрії яких лежать на одній прямій, перебувають у повітрі, звернені вістрями одна до одної й не стикаються. Потенціали першої й другої лійок відповідно $\varphi_1 = 0$ й $\varphi_2 = \varphi$. Напруженість електричного поля в

$$E = -\frac{\varphi_2}{R \sin \theta \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right)},$$

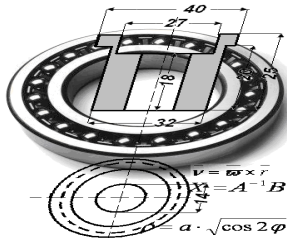
просторі між лійками, що утворені твірними лійок з додатним напрямком осі симетрії лійок. Знайдіть, при яких θ_1 і θ_2 існує функція напруженості електричного поля E , якщо $0 < \theta < \pi$, $R > 0$.



Переформулюйте умову на математичну. Згадайте область визначення логарифмічної $\left(\frac{\operatorname{tg}(\theta_2/2)}{\operatorname{tg}(\theta_1/2)} > 0 \right)$ та дробово-раціональної $\left(\frac{\operatorname{tg}(\theta_2/2)}{\operatorname{tg}(\theta_1/2)} \neq 1 \right)$ функцій.

Для виконання різного виду обчислень скористайтесь можливостями ППЗ.

Відповідь:
$$\begin{cases} 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}; \\ 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$



Тема 2. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Як зміниться повна поверхня закритого циліндричного бака із заданим радіусом основи й висотою, якщо радіус основи й висоту збільшити на кілька сантиметрів?

Шукана зміна повної поверхні бака позначається ΔS і приблизно дорівнює повному диференціалу функції.



Необхідні знання про частинний і повний прирости функції декількох змінних

Нехай на деякій множині D задано функцію $z = f(x, y)$ і точку $M(x, y) \in D$.

Def. Повним приростом функції $z = f(x, y)$ у точці M називають функцію

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Def. Частинним приростом функції $z = f(x, y)$ у точці M , який відповідає приросту Δx аргументу x , називають функцію

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \text{ де } y - \text{ не змінюється.}$$

За аналогією,
 $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$, частинний приріст за змінною y , де x – не змінюється.

М.В. Повний приріст функції $z = f(x, y)$ - це функція двох змінних x та y , тоді як приріст $\Delta_x z$ - функція однієї змінної x , а $\Delta_y z$ - функція змінної y . У загальному випадку $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.



Вчимося знаходити частинний і повний прирости функції декількох змінних

4.12. Знайдіть повний і частинний прирости функції $z = x^2 + xy - 2y$ у точці $M(0;1)$ при $\Delta x = 2$, $\Delta y = -1$.

Розв'язання. Обчислимо значення $z(0;1)$:

$$z(0;1) = 0^2 + 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -2,$$

нові значення змінних будуть такі:

$$x + \Delta x = 0 + 2 = 2, \quad y + \Delta y = 1 - 1 = 0; \quad z(x + \Delta x, y + \Delta y) = z(2;0) = 4,$$

$$z(x + \Delta x, y) = z(2;1) = 4, \quad z(x, y + \Delta y) = z(0;0) = 0.$$

Отже,

$$\Delta z(0;1) = 4 - (-2) = 6, \quad \Delta_x z = 4 - (-2) = 6, \quad \Delta_y z = 0 - (-2) = 2.$$

Відповідь: $\Delta z = 6$; $\Delta_x z = 6$; $\Delta_y z = 2$.



Необхідні знання про частинні похідні функції декількох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$.

Def. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то її називають *частинною похідною* функції $f(x, y)$ у точці

$M(x, y)$ за змінною x і позначають $z'_x, f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$.

За аналогією,

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

частинна похідна функції $f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ за змінною y .

Щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial y}$, потрібно взяти звичайну похідну функції $z = f(x, y)$ за змінною x , вважаючи змінну y

сталою. Аналогічно, $\frac{\partial z}{\partial y}$ – це похідна за змінною y функції $z = f(x, y)$ при фіксованому значенні x . Звідси випливає, що частинні похідні знаходять за звичайними правилами диференціювання функції однієї змінної.

Для функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ може існувати m частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}.$$

Частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ знаходять, як звичайну похідну функції $u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ за змінною x_k , вважаючи решту змінних сталими.

Частинні похідні складеної функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, де $x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$, $i = 1, 2, \dots, m$, знаходять за формулами.

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

$$\dots \dots \dots \frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k}.$$

Зокрема, якщо $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, маємо тільки похідну за змінною x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.2)$$

Для функції $z = f(u, v)$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$, маємо тільки похідну за змінною x :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Цю формулу називають формулою для обчислення повної $\frac{dz}{dx}$ (на відміну від частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$).

Якщо функція $u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ задана неявно співвідношенням

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, u(x_1, x_2, \dots, x_m)) = 0.$$

причому $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$, тоді частинні похідні можна обчислити за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_m}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Наприклад, якщо $F(x, y, z(x, y)) = 0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0\right). \quad (4.3)$$



Вчимося знаходити частинні похідні функції декількох змінних

4.13. Знайдіть частинні похідні функції:

$$z = x^5 y^2 + 2y^3 - x - 4.$$

Розв'язання. Маємо:

1) $z = f(x, y)$ є функцією від двох змінних x та y , тому має дві частинні похідні $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$;

2) $z = f(x, y)$ є сумою чотирьох доданків, два з яких залежать від x , знайдемо $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, вважаючи y – сталою та використовуючи, що $(a \cdot x^n)' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$;

3) два доданки суми залежать від y , знайдемо $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$, вважаючи x – сталою та використовуючи, що $(a \cdot y^n)' = a \cdot n \cdot y^{n-1}$;

4) отже $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 y^2 - 1$, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^5 y + 6y^2$.

4.14. Знайдіть частинні похідні функції $z(x, y)$, заданої неявно рівнянням

$$x^2 + y^2 z^2 + xyz = 0.$$

Розв'язання. За формулами (4.3) дістаємо

$$F \equiv x^2 + y^2 z^2 + xyz, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + yz,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2yz^2 + xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2zy^2 + xy.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + yz}{2zy^2 + xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yz^2 + xz}{2zy^2 + xy}.$$

4.15. Знайдіть частинні похідні функції

$$z = f(x + 2y, x^2 y).$$

Розв'язання. Маємо складену функцію $z = f(u, v)$, де $u = x + 2y, v = x^2 y$.

За формулами (4.2) знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} x^2.$$

4.16. Знайдіть частинні похідні функції

$$z = (2x + y)^{\frac{x}{y}}.$$

Розв'язання. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо

$$\ln z = \frac{x}{y} \ln(2x + y); \quad (\ln z)'_x = \left(\frac{x}{y} \ln(2x + y) \right)'_x;$$

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} \ln(2x + y) + \frac{x}{y} \frac{2}{2x + y}; \quad \frac{dz}{dx} = z \left[\frac{1}{y} \ln(2x + y) + \frac{x}{y} \frac{2}{2x + y} \right].$$

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x + y)^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} \left[\ln(2x + y) + \frac{2x}{2x + y} \right].$$

Частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial y}$ знаходимо так само:

$$(\ln z)'_y = \left(\frac{x}{y} \ln(2x + y) \right)'_y; \quad \frac{1}{z} \frac{dz}{dy} = -\frac{x}{y^2} \ln(2x + y) + \frac{x}{y} \frac{1}{2x + y};$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{x}{y^2} (2x + y)^{\frac{x}{y}} \left[-\ln(2x + y) + \frac{y}{2x + y} \right].$$



Необхідні знання про повний диференціал функції декількох змінних та його застосування до наближених обчислень

Розглянемо повний приріст функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$:
$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Def. Функцію $z = f(x, y)$ називають диференційованою у точці $M(x, y)$, якщо її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad (4.4)$$

де A і B - деякі незалежні від Δx та Δy числа, а $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$, $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$, якщо $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Def. Диференціалом dz функції $z = f(x, y)$ називають головну лінійну відносно Δx та Δy частину її приросту, тобто

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована у точці $M(x, y)$, то

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y.$$

У випадку, коли x, y - незалежні змінні, $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, тоді

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (4.5)$$

Формулу (4.4) тепер можна записати у вигляді

$$\Delta z = dz + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

Звідки випливає наближена рівність

$$\Delta z \approx dz$$

або

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y. \quad (4.6)$$

Ця наближена рівність тим точніша, чим менші величини Δx та Δy .

Формулу (4.6.) застосовують до наближених обчислень значень функцій, оскільки диференціал функції обчислити простіше, ніж її повний приріст.

Для функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ повний диференціал обчислюють за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m.$$

Диференціал складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, обчислюють за формулою

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (4.7)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

де



Вчимося знаходити повний диференціал функції декількох змінних та застосовувати його до наближених обчислень

4.17. Знайдіть повний диференціал функцій:

$$z = e^x y^3.$$

Розв'язання. Маємо:

1) $z = f(x, y)$ є функцією від двох змінних x та y , тому

необхідно знайти дві частинні похідні $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$, враховуючи, що $(e^x)' = e^x$, $(a \cdot y^n)' = a \cdot n \cdot y^{n-1}$;

$$4) \text{ отже } dz = (e^x y^3)'_x dx + (e^x y^3)'_y dy = dz = e^x y^3 dx + 3e^x y^2 dy.$$

4.18. Обчисліть наближено $(0,92)^3 (1,04)^2$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (4.6) для функції $f(x, y) = x^3 y^2$.

Покладемо $x + \Delta x = 0,92$, $y + \Delta y = 1,04$, $x = 1$, $y = 1$,

тоді $f(1;1) = 1$, $\Delta x = 0,92 - 1 = -0,08$, $\Delta y = 1,04 - 1 = 0,04$. Знайдемо частинні

похідні функції $f(x, y)$ у точці $(1;1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 2.$$

Отже,

$$(0,92)^3 (1,04)^2 = 1 + 3(-0,08) + 2 \cdot 0,04 = 0,84.$$

Відповідь: $\approx 0,84$.



Необхідні знання про частинні похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в області D і має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в усіх точках $(x, y) \in D$. Тоді ці похідні можна розглядати як нові функції, задані в області D .

Def. Якщо існує частинна похідна за змінною x від функції $\frac{dz}{\partial x}$, то її називають *частинною похідною другого порядку* від функції $z = f(x, y)$ двічі за змінною x і позначають одним із символів: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z''_{xx}$, або $z''_{xx} = (z'_x)'_x$.

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \text{ або } z''_{xx} = (z'_x)'_x.$$

Аналогічно визначають похідну другого порядку від функції $z = f(x, y)$ двічі за змінною y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \text{ або } z''_{yy} = (z'_y)'_y.$$

Def. Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ за змінною y , то цю похідну називають *мішаною частинною похідною другого порядку* від функції $z = f(x, y)$ і позначають $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, z''_{xy}$.

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \text{ або } z''_{xy} = (z'_x)'_y.$$

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ може існувати чотири похідні другого порядку, серед яких дві похідні мішані.

Теорема 4.4 (про мішані похідні). Якщо в околі точки (x, y) функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, то вони рівні між собою.

Для функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ може існувати m^2 частинних похідних другого порядку: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \right)$, $i, k = 1, 2, \dots, m$.

Аналогічно вводяться поняття частинних похідних третього і вищих порядків.

Def. Другим диференціалом $d^2 z$ функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називають диференціал від першого диференціала dz , тобто

$$d^2 z = d(dz).$$

Якщо x, y - незалежні змінні, тоді

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \quad (4.8)$$

Def. Диференціалом n -ого порядку $d^n z$ функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називають диференціал від диференціала $(n-1)$ -го порядку $d^{n-1} z$, тобто

$$d^n z = d(d^{n-1} z). \quad (4.9)$$

У випадку, коли x, y - незалежні змінні, формулу (4.9) можна записати так:

$$d^n z = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial k^k \partial y^{n-k}} dx^k dy^{n-k}, \quad \text{де} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Символічний запис цієї формули такий:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f.$$

М.В. Форма диференціалів другого і вищих порядків змінюється залежно від того, є x і y незалежними змінними чи диференційованими функціями змінних u та v .



Вчимося знаходити частинні похідні функції та диференціали вищих порядків

4.19. Знайдіть частинні похідні другого порядку функцій:

а) $z = 2x^4y^3 + \sin 2y - \frac{x^2}{y}$; б) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо:

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 8x^3y^3 - 2\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^4y^2 + 2\cos 2y + \frac{x^2}{y^2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(8x^3y^3 - 2\frac{x}{y} \right) = 24x^2y^3 - \frac{2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(6x^4y^2 + 2\cos 2y + \frac{x^2}{y^2} \right) = 12x^4y - 4\sin 2y - 2\frac{x^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(8x^3y^3 - 2\frac{x}{y} \right) = 24x^3y^2 + \frac{2x}{y^2};$$

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2} = \frac{-y^2}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) = \frac{-x^2}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) = x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= x \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} (-2y) = \frac{xy}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

4.20. Покажіть, що функція $z = x^2 \ln y$ задовольняє рівняння

$$\frac{d^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{d^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{d^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x \ln y) = \frac{2x}{y}, \quad \frac{d^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{y} \right) = \frac{2x}{y},$$

що і треба було довести.

4.21. Знайдіть частинні похідні $\frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dx dy}$ функції, заданої неявно рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Розв'язання. Маємо:

- 1) функція задана у вигляді $F(x, y, z) = 0$, тобто $F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1$, для якої $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$;
 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$;
 2) послідовно дістаємо:
 3) отже:

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \quad 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{z} \right) = -\frac{z - x \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = -\frac{z - x \left(-\frac{x}{z} \right)}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{z} \right) = -x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{z} \right) = x \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = x \frac{-\frac{y}{z}}{z^2} = \frac{-xy}{z^3}.$$

4.22. Знайдіть диференціал другого порядку функції $z = (3x - 2y)^4$ у точці $M(3; 4)$.

Розв'язання. Обчислюємо похідні другого порядку даної функції у точці M :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4(3x - 2y)^3 \cdot 3 = 12(3x - 2y)^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4(3x - 2y)^3 (-2) = -8(3x - 2y)^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (12(3x - 2y)^3) = 36(3x - 2y)^2 \cdot 3 = 108(3x - 2y)^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (-8(3x - 2y)^3) = -24(3x - 2y)^2 (-2) = 48(3x - 2y)^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (12(3x - 2y)^3) = 36(3x - 2y)^2 \cdot (-2) = -72(3x - 2y)^2;$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_M = 108(3x - 2y) \Big|_{\substack{x=3 \\ y=4}} = 108, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_M = 48, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M = -72.$$

Підставивши одержані значення частинних похідних другого порядку у формулу (4.8), остаточно дістанемо

$$d^2 z(M) = 108dx^2 - 144dxdy + 48dy^2.$$

4.23. Знайдіть $d^2 u$, якщо $u = x^3 y + xz^2$.

Розв'язання. Для функції $u = f(x, y, z)$, де x, y, z - незалежні змінні, другий диференціал знаходиться за формулою (4.10):

$$d^2 u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz.$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + z^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xz.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2z; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

Отже,

$$d^2 u = 6xydx^2 + 2xdz^2 + 6x^2dxdy + 4zdx dz.$$

4.24. Знайдіть $d^2 z$ у точці $M(-2; 0; 1)$, якщо функція $z(x, y)$ задовольняє рівняння $z + y^2 + z + z^3 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$F \equiv x + y^2 + z + z^3; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + 3z^2; \\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{1+3z^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{1+3z^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x} \left(-\frac{1}{1+3z^2} \right) = \frac{6z \frac{\partial z}{\partial x}}{(1+3z^2)^2} = -\frac{6z}{(1+3z^2)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial y} \left(-\frac{2y}{1+3z^2} \right) = -2 \left(\frac{1}{1+3z^2} - \frac{6z \frac{\partial z}{\partial y}}{(1+3z^2)^2} \right) = \frac{-2}{1+3z^2} - \frac{24}{(1+3z^2)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \left(-\frac{1}{1+3z^2} \right) = \frac{6z \frac{\partial z}{\partial y}}{(1+3z^2)^2} = -\frac{12yz}{(1+3z^2)^3}.$$

У точці $M(-2; 0; 1)$ маємо

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_M = -\frac{3}{32}, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_M = -\frac{1}{2}.$$

Підставляємо значення частинних похідних у формулу (4.8):

$$d^2 z|_M = -\frac{3}{32} dx^2 - \frac{1}{2} dy^2.$$



Обчислюємо частинні похідні функції декількох змінних за допомогою ППЗ Mathematica, Maple

Процедура побудови області визначення та обчислення частинної похідної функції декількох змінних за допомогою відповідних правил.

4.25. У нестигломому середовищі потенціал швидкості просторового джерела, що розташовано в точці $M(x_0, y_0, z_0)$, з інтенсивністю q визначається за формулою

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 16}}.$$
 Знайдіть область визначення функції $\varphi(x, y, z)$ та її частинні похідні.

Розв'язання.

Крок 1. Функція $\varphi(x, y, z)$ визначена в усіх точках $M(x; y; z)$, для яких підкореневий вираз додатний $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 16 > 0$ (вираз підкореневий та знаходиться у знаменнику), тобто виконується нерівність: $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 16 > 0$. Границя даної області описується рівнянням $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 16$. Це рівняння визначає у просторі $Oxyz$ сферу із центром у точці $M(3; 2; 5)$ та радіусом $R=4$.

Крок 2. Множина точок, що лежить поза сферою у просторі належить області визначення функції. Сама сфера області визначення не належить. Шукана область необмежена, відкрита, незв'язна.


Крок 3. Функція $\varphi(x, y, z)$ - складена. Отже частинні похідні складеної функції мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{q}{4\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{((x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 16)^3}} \right) \cdot ((x-3)^2)' = \\ &= \frac{q}{4\pi} \cdot (x-3) \cdot \frac{1}{\sqrt{((x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 16)^3}} ; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{q}{4\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{((x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 16)^3}} \right) \cdot ((y-2)^2)' = \\ &= \frac{q}{4\pi} \cdot (y-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{((x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 16)^3}} ; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{q}{4\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{((x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 16)^3}} \right) \cdot ((z-5)^2)' = \\ &= \frac{q}{4\pi} \cdot (z-5) \cdot \frac{1}{\sqrt{((x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 16)^3}} .\end{aligned}$$

Процедура побудови області визначення та знаходження частинних похідних за допомогою відповідних правил може бути замінена процедурою застосування ППЗ Mathematica.



«Навчасмо» свій комп'ютер побудові області визначення та знаходженню частинних похідних за допомогою ППЗ Mathematica.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathematica.
2. За допомогою опції *Palettes-Classroom Assistant* викликати вкладки із шаблонами для набору символів.
3. Активізувати поле програми за допомогою опції *Graphics-New Graphics*.
4. У вкладці *Classroom Assistant* знайти меню *Basic Commands* й активізувати кнопку . В отриманому вікні вибрати відповідно

Plot3D-More шаблон

```
ContourPlot3D[function,
{var1, min, max}, {var2, min, max},
{var3, min, max} opts]
```

5. Після введення за допомогою шаблонів $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 16 = 0$ зазначити інтервали, на яких Вас

цікавить зображення поверхні та за допомогою опції *Evaluation->Evaluate Cells* викликати із мітками **In[5]:=** і **Out[5]=** побудову її графіка.

6. Отримати зображення сфери з центром у точці $M(3; 2; 5)$ (рис. 4.6). Сама сфера області визначення не належить. Шукана область необмежена, відкрита, незв'язна.

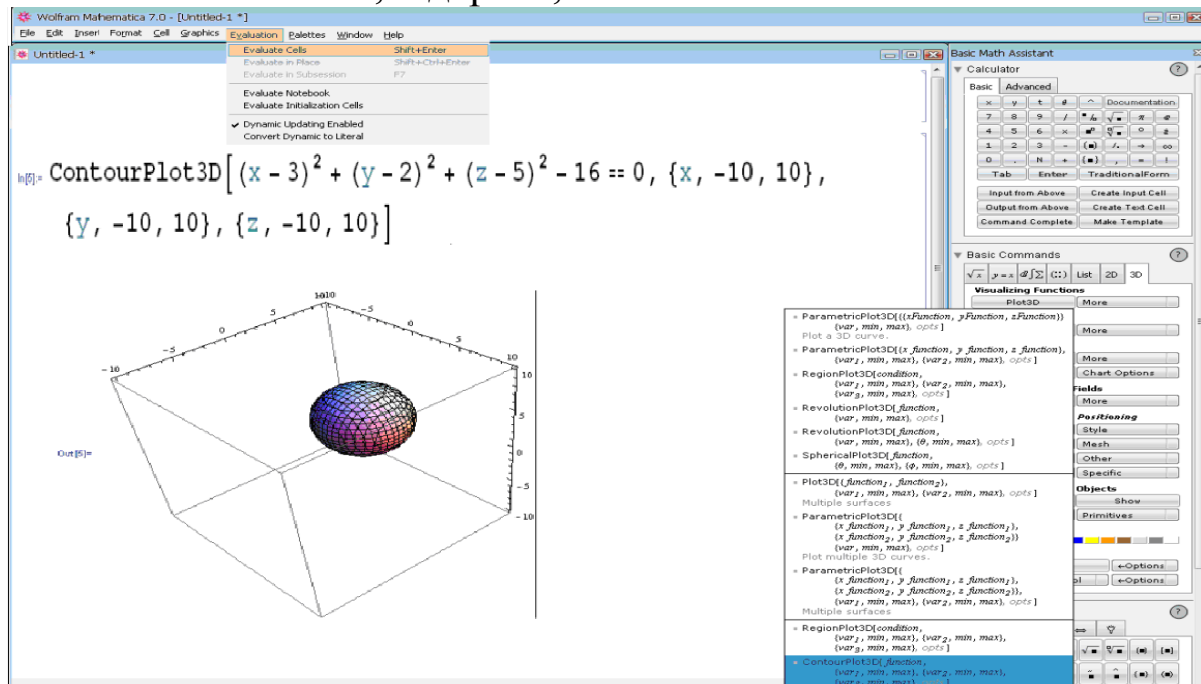


Рис. 4.6. Вікно ППЗ Mathematica: побудова зображення сфери

7. У вкладці *Classroom Assistant* знайти меню *Basic Commands* й активізувати кнопку $\partial/\partial x$. В отриманому вікні вибрати відповідно

More шаблон $D[\text{expr}, \{\text{var}, \text{order}\}]$ Higher-order derivative.

8. Після введення за допомогою шаблонів

$$-\frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 - 16}}$$

зазначити змінну, за якою Ви шукаєте частинну похідну та за допомогою опції *Evaluation->Evaluate Cells* викликати із мітками **In[6]:=** і **Out[6]=** обчислення частинних похідних функції $\varphi(x, y, z)$ за кожною із змінних (рис. 4.7).

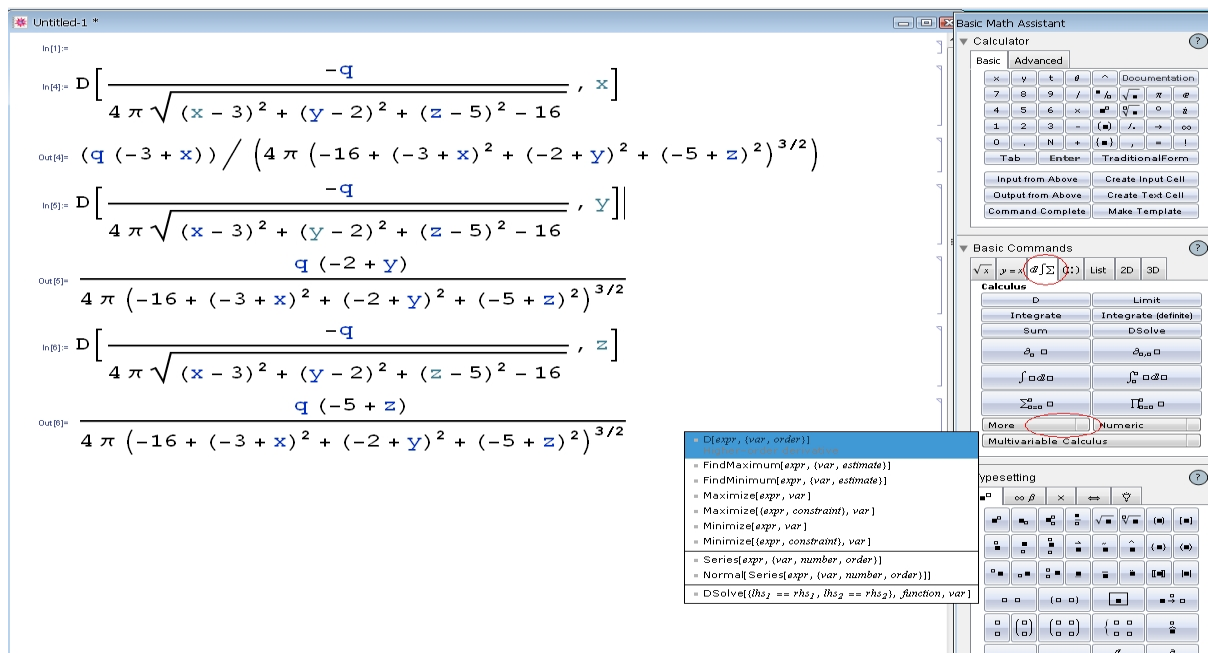


Рис. 4.7. Вікно ППЗ Mathematica: обчислення частинної похідної функції

Процедура знаходження повного диференціалу функції декількох змінних та з його застосування до наближених обчислень за допомогою відповідних правил.

4.26. Як зміниться повна поверхня закритого циліндричного бака з радіусом основи 2 м і висотою 10 м , якщо радіус основи збільшити на 1 см , а висоту на 3 см ?

Розв'язання.

Крок 1. Шукана зміна повної поверхні бака позначається ΔS і приблизно дорівнює повному диференціалу функції $S = 2\pi(R^2 + RH)$.

Крок 2. Повний диференціал функції обчислюється за формулою

$$dS = \frac{\partial S}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial S}{\partial H} \Delta H$$

Оскільки $\frac{\partial S}{\partial R} = 2\pi(2R + H)$, $\frac{\partial S}{\partial H} = 2\pi R$, то

$$\Delta S \approx 2\pi((2R + H)\Delta R + R\Delta H)$$




Крок 3. Після підстановки значень $R = 2\text{ м}$, $H = 10\text{ м}$, $\Delta R = 0,01\text{ м}$, $\Delta H = 0,03\text{ м}$ отримаємо

$$\Delta S \approx 2\pi(14 \cdot 0,01 + 2 \cdot 0,03) = 0,4\pi = 1,2566\text{ м}^2.$$

Відповідь: при збільшенні радіуса основи на 1 см й висоти на 3 см повна поверхня закритого циліндричного бака збільшується приблизно на $1,2566 \text{ м}^2$. Точне збільшення повної поверхні бака становить $1,2592 \text{ м}^2$ (обчислюється за допомогою формули повної поверхні закритого циліндричного бака: $S_{n.n.} = (2\pi \cdot R \cdot H + 2\pi \cdot R^2) - (2\pi \cdot (R+0,01) \cdot (H+0,03))$). Відносна погрішність при заміні повного збільшення повним диференціалом становить приблизно 0,2 %.



«Навчаємо» свій комп'ютер знаходженню повного диференціалу функції декількох змінних та з його застосування до наближених обчислень за допомогою ППЗ Maple.

1. Відкрити вікно ППЗ Maple.
2. За допомогою опції *Insert-Execution Grope-Before Cursor* або кнопки  отримати у полі програми мітку .
3. Активізувати зліва вкладки *Expression* й *Common Symbols* та з отриманих шаблонів ввести функцію $S = 2\pi(R^2 + RH)$. Замість знака «=» застосувати символ «:=». Наприкінці кожного рядка ставити «;» та натискувати клавішу *Enter*. З'являється мітка .
4. За допомогою шаблонів ввести формулу для обчислення повного диференціалу $\frac{\partial S}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial S}{\partial H} \Delta H$. У наступному рядку буде отримано вираз повного диференціалу функції, що досліджується $2\pi((2R + H)\Delta R + R\Delta H)$.
5. Присвоїти шуканій зміні повної поверхні баку ΔS за допомогою символу «:=» вираз повного диференціалу функції $2\pi((2R + H)\Delta R + R\Delta H)$.
6. Для підстановки замість складових останнього виразу значень $R = 2$, $H = 10$, $\Delta R = 0,01$, $\Delta H = 0,03$ застосувати команду *subs(..., ΔS)*. Після натиснення клавіші *Enter* з'явиться шукана відповідь $0,4 \cdot \pi$ (рис. 4.8).

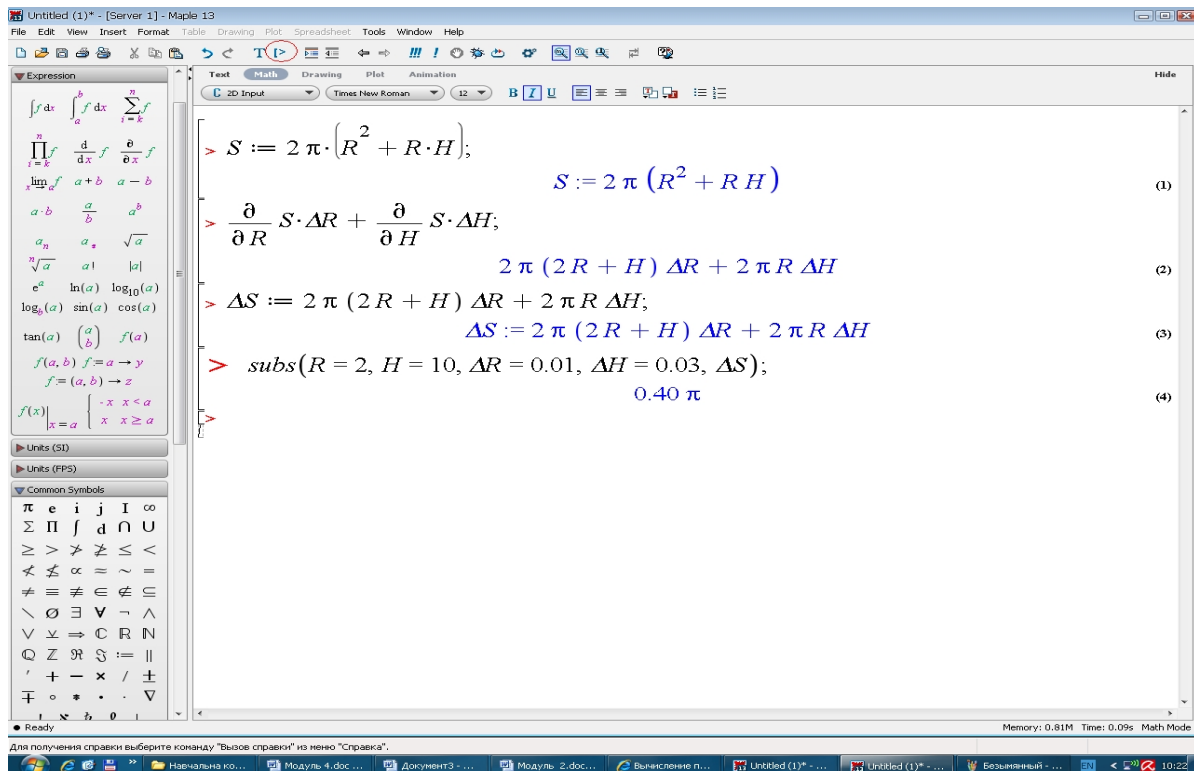


Рис. 4.8. Вікно ППЗ Maple: обчислення повного диференціалу функції



Моделюємо професійну діяльність інженера

4.27. Горизонтальна складова H напруженості магнітного поля земного магнетизму визначається за формулою $H = \frac{A}{T \cdot \sqrt{\sin \varphi}}$, де T — період коливання маятника, φ — кут відхилення маятника й A — деяка постійна. Абсолютна погрішність при визначенні тривалості одного коливання дорівнює 10^{-3} сек. Кут відхилення можна знайти, якщо розглядати наведення й відлік з точністю до $0,5'$. Знайдіть викликану цим погрішність ΔH при умовах: $\varphi = 25^\circ$, $T = 35^0$ $\Delta\varphi = 1' = 29 \cdot 10^{-5}$ рад, $\Delta t = 10^{-3}$ сек.



Перенесіть структуру об'єктів, що пропонуються у завданні, в інші умови. Скористайтесь поняттям повного диференціалу для наближених обчислень.

Для обчислення частинних похідних скористайтесь можливостями ППЗ.

Відповідь: $\Delta H = \left| \frac{H}{T} \right| \Delta T + \frac{1}{2} |H \cdot \operatorname{ctg} \varphi| \Delta \varphi$; $\Delta H = 10^{-3}$ од. Гаусса.

4.28. Під час вимірювання температури реальних тіл пірометр показує так названу оптичну (яскравну) температуру, що пов'язана із істиною температурою вираженням:

$T_n = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{\lambda}{c_0} \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}$, де T_0 — оптична температура за $^{\circ}\text{K}$; T_n — істинна температура за $^{\circ}\text{K}$; λ — довжина хвилі пірометра, що завдано у м; c_0 — постійний коефіцієнт. Знайдіть частинні похідні функції T_n по $T_0, \lambda, \varepsilon$.



Перенесіть функції об'єктів, які вже побудовані, в інші умови. Для обчислення похідних функцій зробіть їх залежними тільки від однієї змінної,

наприклад $T_n(T_0) = T_n(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{\lambda}{c_0} \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}$.

Позначте для похідної типу $((f(x))^{-1})' = -(f(x))^{-2} \cdot f'(x)$ вираз $-(f(x))^{-2} = A$ Для обчислення частинних похідних скористайтесь можливостями ППЗ.

Відповідь: $\frac{dT_n}{dT_0} = -\frac{1}{T_0^2} A$; $\frac{dT_n}{d\lambda} = -\frac{1}{c_0}$; $\frac{dT_n}{d\varepsilon} = \frac{\lambda}{c_0 \varepsilon} A$, де

$$A = -\left(\frac{1}{T_0} - \frac{\lambda}{c_0} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2}.$$

4.29. В електронній теорії для найпростішого випадку атомів, що не впливають помітно один на одного та мають незначне внутрішнє загасання, можна записати

$$\varepsilon \cdot \frac{\delta E}{\delta t} = \frac{\delta E}{\delta t} + 4\pi \cdot Ne \times \frac{\delta x}{\delta t}, \quad \text{де } E = E_0 \cdot \sin 2\pi vt, \quad x = A \cdot \sin 2\pi vt,$$

$$A = \frac{e \cdot E_0}{4m\pi^2 \cdot (v_0^2 - v^2)}; \quad \varepsilon - \text{діелектрична проникність}; \quad E_0 - \text{амплітуда змушеної гармонійної хвилі}; \quad m - \text{маса електрона}; \quad Ne - \text{загальний заряд електронів в одиниці об'єму}; \quad v - \text{частота коливань. Визначіть } \varepsilon(v).$$



Переформулюйте умову на математичну.

Знайдіть частинні похідні $\frac{\delta E}{\delta t}$ для функції $E = E_0 \cdot \sin 2\pi vt$ та $\frac{\delta x}{\delta t}$ для функції $x = A \cdot \sin 2\pi vt$

Для обчислення частинних похідних скористайтесь можливостями ППЗ. Підставте значення частинних похідних у

рівняння $\varepsilon \cdot \frac{\delta E}{\delta t} = \frac{\delta E}{\delta t} + 4\pi \cdot Ne \times \frac{\delta x}{\delta t}$, спростіть його та виразіть значення $\varepsilon(v)$.

$$\varepsilon(v) = 1 + \frac{Ne^2}{m\pi(v_0^2 - v^2)}.$$

Відповідь:

4.30. Покажіть, що функція потенціалу швидкості просторового джерела розглянута в теорії електрики й магнетизму, задовольняє

рівнянню Лапласа $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$.



Перенесіть функції об'єктів, які вже побудовані, в інші умови. Для обчислення частинних похідних другого порядку та спрощення отриманого виразу після підстановки значень частинних похідних скористайтесь можливостями ППЗ.

4.31. У теорії теплопровідності важливу роль грає рівняння

$\frac{dy}{dt} = k \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$. Покажіть, що цьому рівнянню задовольняє функція $y = e^{-k \cdot t} \cdot \sin x$.



Перенесіть структуру об'єктів, що пропонуються у завданні, в інші умови. Знайдіть частинні похідні $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функції $y = e^{-k \cdot t} \cdot \sin x$.

Підставте значення частинних похідних у рівняння $\frac{dy}{dt} = k \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$ й спростіть його. Для обчислення частинних похідних скористайтесь можливостями ППЗ.

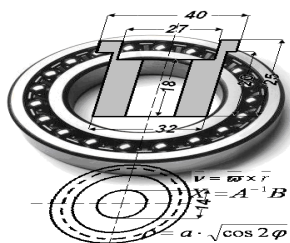
4.32. У теоретичній фізиці (наприклад, в акустиці й теорії

коливань) важливу роль грає рівняння $\frac{d^2 y}{dt^2} = k^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$. Покажіть, що цьому рівнянню задовольняє функція $y = \varphi \cdot (x + k \cdot t) + \psi \cdot (x - k \cdot t)$, де φ, ψ — будь-які диференційовані функції від відповідних аргументів.



Перенесіть структуру об'єктів, що пропонуються у завданні, в інші умови. Знайдіть частинні похідні $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функції $y = \varphi \cdot (x + k \cdot t) + \psi \cdot (x - k \cdot t)$.

Підставте значення частинних похідних у рівняння $\frac{d^2 y}{dt^2} = k^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$ й спростіть його. Для обчислення частинних похідних скористайтесь можливостями ППЗ.



Тема 3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Для ковальського заліза дослідження дали наступну таблицю залежності зусилля різання P від глибини різання a при подачі 1 мм:

a , мм	3	4	5	7	10
P , кН	5,34	7,55	8,82	12,26	16,96

За допомогою методу найменших квадратів виразити емпіричною формулою залежність P від a .

В основі методу найменших квадратів, що широко використовується під час підбору емпіричних формул, лежить дослідження на екстремум функції декількох змінних, яке пов'язане із обчисленням й застосуванням частинних похідних.



Необхідні знання про дотичну площину та нормаль до поверхні

Def. Дотичною площиною до поверхні у точці дотику $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називають площину, що містить у собі всі дотичні прямі в точці M_0 до кривих, що лежать на поверхні і проходять через точку M_0 .

Def. Нормаллю до поверхні у точці M_0 називають пряму, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.

Рівняння дотичної та нормалі до поверхні подано у таблицях 4.1 та 4.2.

Таблиця 4.1

Рівняння поверхні	Рівняння дотичної площини до поверхні
$F(x, y, z) = 0$	$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right _{M_0} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right _{M_0} \cdot (y - y_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right _{M_0} \cdot (z - z_0) = 0$
$z = f(x, y)$	$z - z_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right _{(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right _{(x_0, y_0)} \cdot (y - y_0)$

Таблиця 4.2

Рівняння поверхні	Рівняння нормалі до поверхні
$F(x, y, z) = 0$	$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right _{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right _{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right _{M_0}}$
$z = f(x, y)$	$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right _{(x_0, y_0)}} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right _{(x_0, y_0)}} = \frac{z - z_0}{-1}$



Вчимося складати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

4.33. Складіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = x^2y + xy^3$ у точці $M(2;1)$.

Розв'язання. За умовою $x_0 = 2, y_0 = 1$. Знаходимо аплікату точки дотику $z_0 = x_0^2 \cdot y_0 + x_0 \cdot y_0^3 = 6$. Обчислюємо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ у точці дотику:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3xy^2;$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2, 1)} = 5, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2, 1)} = 10.$$

Підставивши ці значення у відповідні формули з таблиць 4.1 і 4.2, дістанемо рівняння дотичної площини $z - 6 = 5(x - 2) + 10(y - 1)$, або $5x + 10y - z - 14 = 0$ і рівняння нормалі

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-6}{-1}.$$

4.34. Складіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$$x^3 + y^3 + z^3 + xy^2z^3 = 4$$

у точці $M_0(1;1;1)$.

Розв'язання. Скористаємося формулами, поданими у таблицях 4.1 та 4.2. Маємо

$$F = x^3 + y^3 + z^3 + xy^2z^3 - 4; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^2z^3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 2xyz^3; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 3xy^2z^2;$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0} = 4; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0} = 5; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} = 6.$$

Отже, рівняння дотичної площини

$$4(x-1) + 5(y-1) + 6(z-1) = 0, \text{ або } 4x + 5y + 6z - 15 = 0$$

рівняння нормалі –

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{6}.$$



Необхідні знання про похідну за напрямом та градієнт функції декількох змінних

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена і неперервна в околі точки $M(x, y, z)$.

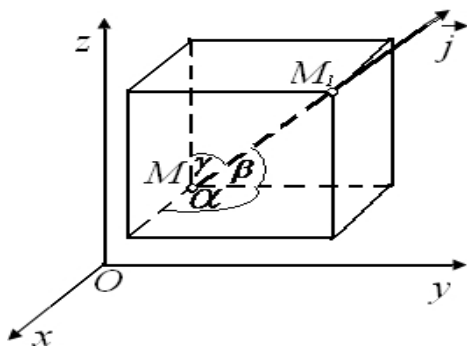


Рис. 4.9. Геометричне тлумачення похідної за напрямом

Задамо у точці M одиничний вектор $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, що утворює з осями координат Ox , Oy , Oz відповідно кути α , β , γ . Візьмемо на прямій, яка проходить через точку M у напрямі вектора \vec{l} , точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ (рис. 4.9).

Позначимо довжину MM_1 через Δl . Тоді,

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Def. Похідною функції $u(x, y, z)$ за напрямом \vec{l} називають границю відношення $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$, якщо вона існує, і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta l}.$$

Похідну функції $u(x, y, z)$ у напрямі вектора $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ обчислюють за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (4.10)$$

де $\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}$, $\cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$, $\cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}$ - напрямні косинуси вектора \vec{l} ,
 $|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}$ - довжина вектора \vec{l} .

Похідна за напрямом узагальнює поняття частинної похідної. Так, якщо $\vec{l} = \{1; 0; 0\}$, то $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}$; якщо $\vec{l} = \{0; 1; 0\}$, то $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial y}$; якщо $\vec{l} = \{0; 0; 1\}$, то $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Def. Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z)$ називають вектор, координатами якого є частинні похідні функції $u(x, y, z)$, обчислені у точці M , тобто

$$\text{grad } u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \vec{k},$$

або

$$\text{grad } u(M) = \left\{ \frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z} \right\}.$$

Між градієнтом і похідною за напрямом існує такий зв'язок:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \vec{l} = |\text{grad } u| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos \varphi.$$

де φ - кут між градієнтом функції $u(x, y, z)$ і напрямним вектором \vec{l} . З цієї формули випливає, що похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ набуває найбільшого

значення тоді, коли $\cos \varphi = 1$, тобто тоді, коли напрям вектора \vec{l} збігається з напрямом градієнта, при цьому найбільше значення похідної $\frac{\partial u}{\partial l}$ дорівнює модулю градієнта функції $u = f(x, y, z)$, що обчислено в точці M , тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$



Вчимося обчислювати похідну за напрямом та градієнт функції декількох змінних

4.35. Обчисліть похідну функції $u = x^2y + xy^2z + z^3$ у точці $M(0;1;-1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо напрямну косинуси вектора \vec{l} :

$$\vec{l} = \{-2, 1, 2\}, |\vec{l}| = \sqrt{4+1+1} = 3, \cos \alpha = -\frac{2}{3}, \cos \beta = \frac{1}{3}, \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

Обчислимо частинні похідні даної функції в точці $M(0;1;-1)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M &= 2xy + y^2z \Big|_M = -1; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = x^2 + 2xyz \Big|_M = 0; \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M &= xy^2 + 3z^2 \Big|_M = 3. \end{aligned}$$

Підставивши одержані значення у формулу (4.10), дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (-1) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Зазначимо, що функція $u(x, y, z)$ у точці M за напрямом вектора \vec{l} зростає, оскільки $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$.

Відповідь: $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{8}{3}.$

4.36. Знайдіть кут між градієнтами функції $u = \frac{\sqrt{xy}}{z}$, які обчислені в точках $M_1(2;2;1)$ та $M_2(1;1;-1)$.

Розв'язання. Кут між векторами \vec{a}_1 та \vec{a}_2 знайдемо за формулою

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|}.$$

У нашому випадку $\vec{a}_1 = \text{grad } u(M_1)$, $\vec{a}_2 = \text{grad } u(M_2)$. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2z} \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2z} \sqrt{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} \sqrt{xy}, \\ \vec{a}_1 &= \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{a}_2 = -\frac{1}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j} - \vec{k}; \\ \cos \varphi &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \cdot (-1)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$



Необхідні знання про екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ (або $z = f(M)$) визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$.

Def. Функція $z = f(M)$ має в точці M_0 *локальний максимум* (*мінімум*), якщо існує такий окіл точки M_0 , при якому для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$).

Def. Точки локального максимуму та мінімуму називають точками локального екстремуму.

Означення локального екстремуму можна сформулювати ще й так:

Def. Функція $z = f(M)$ має в точці M_0 локальний екстремум, якщо у достатньо малому околі точки M_0 приріст функції $\Delta z(M_0) > 0$, то M_0 - точка локального мінімуму, якщо ж $\Delta z(M_0) < 0$, то M_0 - точка локального максимуму.

Далі поняття екстремуму та локального екстремуму будемо ототожнювати.

Наведемо приклади, які ілюструють поняття екстремуму.

1.

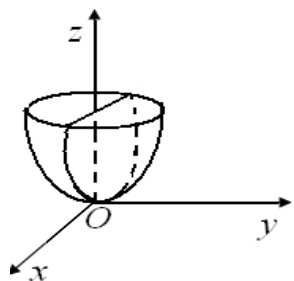


Рис. 4.10. Мінімум функції $z = x^2 + y^2$

Функція $z = x^2 + y^2$ досягає мінімуму в точці $(0;0)$, причому $z_{\min} = 0$ (рис. 4.10). Справді, вираз $x^2 + y^2$ завжди невід'ємний і обертається в нуль тільки при $x = y = 0$. Отже, приріст $\Delta z(0;0) > 0$.

2.

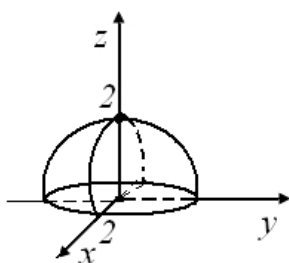


Рис.4.11.
Максимум функції
 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Функція $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ має в точці $(0;0)$ максимум, причому $z_{\max} = 2$ (рис. 4.11). Тут $\Delta z(0;0) < 0$. Сформулюємо необхідні та достатні умови існування локального екстремуму.

Теорема 4.5. (необхідна умова локального екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю або не існують.

Зокрема, якщо $z = f(x, y)$ - диференційована функція і $M_0(x_0, y_0)$ - точка екстремуму, то в цій точці виконується умова

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \end{cases},$$

тобто

$$dz(x_0, y_0) = 0. \quad (4.11)$$

Def. Точку $M_0(x_0, y_0)$, що задовольняє умову (4.11), називають *стаціонарною* точкою функції $z = f(x, y)$

Def. Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні не існують, називають *критичними* (або точками, в яких можливе існування екстремуму).

Теорема 4.6. (достатня умова локального екстремуму). Нехай $M_0(x_0, y_0)$ - стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$. Позначимо

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}, \quad \Delta = AC - B^2.$$

Тоді:

- 1) якщо $\Delta > 0, A > 0 (C > 0)$, то $M_0(x_0, y_0)$ - точка мінімуму;
- 2) якщо $\Delta > 0, A < 0 (C < 0)$, то $M_0(x_0, y_0)$ - точка максимуму;
- 3) при $\Delta < 0$, екстремуму не існує;
- 4) при $\Delta = 0$ не можна зробити висновок, чи є у функції екстремум у точці.



Вчимося обчислювати екстремуму функції двох змінних

4.37. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x^2 - 2y^3 - 2x + 6y.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції $z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6y^2 + 6.$$

Необхідна умова екстремуму (4.11) набуває вигляду

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ -6y^2 + 6 = 0. \end{cases}$$

звідки дістаємо дві стаціонарні точки: $M_1(1;1)$ і $M_2(1;-1)$.

З'ясуємо виконання достатньої умови локального екстремуму у знайдених точках.

Знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y.$$

У точці $M_1(1;1)$ маємо:

$$A = 2, B = 0, C = -12, \Delta = 2 \cdot (-12) - 0 = -24 < 0.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то в точці $M_1(1;1)$ екстремуму немає.

Точці $M_2(1;-1)$ відповідають значення

$$A = 2, B = 0, C = 12, \Delta = 24 > 0.$$

Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то в точці $M_2(1;-1)$ функція сягає мінімуму, причому $z_{\min} = z(1;-1) = -3$.

Відповідь: $z_{\min} = -3$.

4.38. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x^3 + xy^2 + x^2y.$$

Розв'язання. За необхідною умовою екстремуму маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 2xy = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x^2 = 0. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + (2xy + x^2) = 0, \\ 2xy + x^2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 0, \\ x \cdot (2y + x) = 0; \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 0, \\ x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 0, \\ 2y + x = 0; \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y^2 = 0, \\ x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 9y^2 = 0, \\ x = -2y; \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 0, \\ x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

звідки знаходимо єдину стаціонарну точку $M(0;0)$.

Частинні похідні другого порядку мають вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y + 2x, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x.$$

У точці $M(0;0)$ усі похідні другого порядку обертаються в нуль, тобто $A = B = C = \Delta = 0$. Теорема 4.6 не дає відповіді про існування екстремуму у точці M . Проведемо додаткове

дослідження. Значення функції у точці $M(0;0)$ дорівнює нулю; $z(0;0)=0$ на прямій $y=0$, $z=x^3$. При $x>0$ $z(x;0)=x^3>0$, а при $x<0$ $z(x;0)=x^3<0$. Отже, у довільному околі точки $M(0;0)$ функція приймає як додатні, так і від'ємні значення. Це означає, що в цій точці функція $z(x,y)$ не має локального екстремуму.



Необхідні знання про умовний екстремум

Def. Розглянемо функцію $z = f(x, y)$ за умови, що її аргументи зв'язні між собою співвідношенням

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (4.12)$$

що визначає на площині Oxy деяку лінію L і називається рівнянням зв'язку. Нехай координати точки $M_0(x_0, y_0)$ задовольняють рівняння зв'язку (4.12), тобто точка M_0 лежить на лінії L .

Функція $z = f(M)$ має в точці M_0 *умовний мінімум (максимум)* за умови зв'язку (4.12), якщо існує такий окіл точки M_0 , що для довільної точки $M(x, y)$ ($M \neq M_0$) із цього околу, координати якої задовольняють рівняння зв'язку, виконується нерівність

$$f(M) > f(M_0) \text{ (} f(M) < f(M_0) \text{)}.$$

Def. Отже, умовний мінімум (максимум) – це найменше (найбільше) значення функції в точці M_0 відносно тільки тих точок із деякого околу точки M_0 , які належать лінії L .

Точки умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$, аргументи якої задовольняють умову (4.12), знаходять так: якщо рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ можна розв'язати, наприклад, відносно змінної $y: y = g(x)$, то, підставляючи у функцію $z = f(x, y)$ замість y значення $g(x)$, дістаємо функцію однієї змінної $z = f(x, g(x))$. Оскільки умова зв'язку врахована, то задача відшукування

умовного екстремуму зводиться до задачі на локальний екстремум функції однієї змінної.

Коли ж рівняння зв'язку допускає параметризацію:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

тобто

$$\varphi(x(t), y(t)) = 0,$$

задача відшукування умовного екстремуму зводиться до задачі на локальний екстремум функції $z = f(x(t), y(t))$, яка є функцією однієї змінної.

Проте не завжди рівняння зв'язку можна параметризувати або розв'язати відносно якоїсь змінної. У цьому разі, для відшукування умовного екстремуму, застосовують *метод множників Лагранжа*, суть якого полягає в тому, що задача умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$ замінюється задачею відшукування локального екстремуму функції Лагранжа:

$$L(x, y, z) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y) \quad (4.13)$$

де λ – множник Лагранжа, який не залежить від x і y .

Зазначимо, що в довільній точці $M(x, y)$, координати якої задовольняють рівняння зв'язку, виконується рівність:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y)$$

Для відшукування можливих точок екстремуму функції (4.13) необхідно розв'язати систему трьох рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi = 0 \quad (4.14)$$

відносно незалежних змінних x, y та λ . Якщо x_0, y_0, λ_0 – один із розв'язків системи (4.14), то $M_0(x_0, y_0)$ – критична точка функції $z = f(x, y)$ за умови, що $\varphi(x, y) = 0$. Далі досліджують знак другого диференціала d^2L функції Лагранжа, враховуючи співвідношення

$$d\varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0.$$

Якщо $d^2L(M_0) > 0$, то M_0 – точка умовного мінімуму.

Якщо $d^2L(M_0) < 0$, то M_0 – точка умовного максимуму.



Вчимося обчислювати умовний екстремум

4.39. Знайдіть умовний екстремум функції $u = x^2 + y^2 + 2z^2$, якщо $x - y + z = 1$.

Розв'язання. Виразимо з умови зв'язку змінну z :

$$z = 1 - x + y$$

і підставимо її значення у функцію $u(x, y, z)$. У результаті прийдемо до задачі про безумовний екстремум функції двох змінних x та y :

$$u = x^2 + y^2 + 2(1 - x + y)^2.$$

Знайдемо можливі точки екстремуму для одержаної функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 4(1 - x + y) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 4(1 - x + y) = 0;$$

$$\begin{cases} x - 2(1 - x + y) = 0, \\ y + 2(1 - x + y) = 0; \end{cases} \begin{cases} y = -x, \\ 5x = 2; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2}{5}, \\ y = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

Отже, функція $u(x, y)$ має єдину стаціонарну точку $M\left(\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

Частинні похідні другого порядку функції $u(x, y)$ такі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -4; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6.$$

Оскільки $\Delta(M) = 6 \cdot 6 - (-4)^2 = 20 > 0$ та $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6 > 0$, то у точці $M\left(\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ функція досягає мінімуму. Знаходимо координату z :

$$z = 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Отже, функція $u = x^2 + y^2 + 2z^2$ за умови $x - y + z = 1$ має у точці $M_1\left(\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$ мінімум, причому $u_{\min} = u(M_1) = \frac{2}{5}$.

Відповідь: $u_{\min} = \frac{2}{5}$.

4.40. Знайдіть умовний екстремум функції $z = 3x + 2y^2$ за умови $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (рівняння еліпса), $x \geq 0$.

Розв'язання. Зручно записати умову зв'язку, яка геометрично є правою частиною еліпса, у параметричній формі:

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Тоді функція $z(x, y)$ набуде вигляду $z(t) = 6 \cos t + 2 \sin^3 t$.

Досліджуємо цю функцію на екстремум:

$$z'(t) = -6 \cdot \sin t + 6 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t = -6 \cdot \sin t + 3 \cdot \sin 2t \cdot \sin t;$$

$$\sin t(\sin 2t - 2) = 0, \quad \sin t = 0, \quad t = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

За умовою $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тому $t = 0$ — єдина стаціонарна точка, переходячи через яку похідна змінює знак із «+» на «-». Отже, $t = 0$ — точка максимуму функції $z(t)$. Знаходимо $x_{\max} = 2 \cos 0 = 2$, $y_{\max} = \sin 0 = 0$, $z_{\max} = 6$.

Таким чином, точка $(2; 0)$ — точка умовного максимуму функції $z = 3x + 2y^3$ на кривій $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, x \geq 0$.

Відповідь: $z_{\max} = 6$.

4.41. Знайдіть екстремум функції $z = 8 - 2x - 4y$ за умови $x^2 + 2y^2 - 12 = 0$ (рівняння еліпса).

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа $L = 8 - 2x - 4y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 12)$, де λ — змінний множник Лагранжа.

Необхідні умови екстремуму отриманої функції мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -2 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -4 + 4\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 2y^2 - 12 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x = 1, \\ \lambda y = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 12; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda}, \\ y = \frac{1}{\lambda}, \\ \lambda^2 = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

звідки знаходимо дві критичні точки: якщо $\lambda = \frac{1}{2}$, то $x = y = 2$; якщо $\lambda = -\frac{1}{2}$, то $x = y = -2$. Отже, точки $M_1(2; 2), M_2(-2; -2)$ — можливі точки екстремуму функції $z = 8 - 2x - 4y$ за умови $x^2 + 2y^2 - 12 = 0$.

Перейдемо до перевірки достатніх умов існування екстремуму.

Знаходимо d^2L :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda; \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 4\lambda; \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 2 \cdot 0 dx dy + 4\lambda dy^2 = 2\lambda (dx^2 + 2dy^2).$$

При $\lambda = \frac{1}{2}$ виконується нерівність $d^2L > 0$, значить точка $M_1(2;2)$ є точкою умовного мінімуму; при $\lambda = -\frac{1}{2}$ $d^2L < 0$, тобто точка $M_2(-2;-2)$ є точкою умовного максимуму. Знаходимо

$$z_{\min} = z(2;2) = -4, \quad z_{\max} = z(-2;-2) = 20.$$

Відповідь: $z_{\min} = -4$, $z_{\max} = 20$.



Необхідні знання про найбільше і найменше значення функції декількох змінних у замкненій області

У замкненій та обмеженій області D задамо неперервну функцію $z = f(x, y)$. Згідно з теоремою 3.10 функція z досягає свого найбільшого та найменшого значень в області D .

Відшукування цих значень здійснюють за таким алгоритмом:

1. Знаходять усі точки підозрілі на екстремуму функції z , які належать області D . Це – *стаціонарні* точки і точки, в яких не

існує хоча б одна частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Знаходять усі точки границі області D , в яких може бути екстремум. Для цього необхідно скористатися одним із методів відшукування умовного екстремуму.

3. Знаходять точки перетину різних гладких частин границі.

4. Обчислюють значення функції z у точках, що отримані на основі необхідної умови існування екстремуму, після чого вибирають серед них найбільше та найменше значення.



Вчимося обчислювати найбільше й найменше значення функції декількох змінних

4.42. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + xy + 2y^2$ в області $D = \{(x, y) | x \leq 1, y \leq x+1, y \geq |x|-1\}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку стаціонарні точки функції $z(x, y)$. Маємо

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Отже, $M(0;0)$ - єдина стаціонарна точка даної функції. Ця точка належить області D .

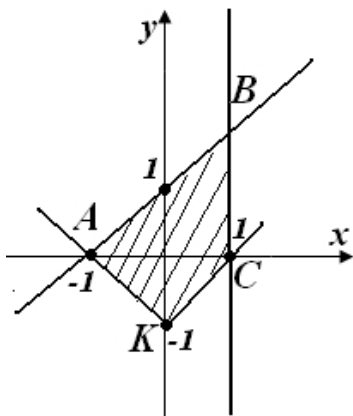


Рис. 4.12.

Зображення області D

Переходимо до дослідження функції на межі області D , яка складається із чотирьох відрізків AB , BC , CK і KA (рис. 4.12).

Рівняння відрізка $AB: y = x+1, x \in [-1; 1]$, на цьому відрізку функція має вигляд:

$$z = x^2 + x(x+1) + 2(x+1)^2 = 4x^2 + 5x + 2,$$

мінімум якої досягається в точці, при якій $\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{8}$. Оскільки $-\frac{5}{8} \in [-1; 1]$, то точка

$M_1\left(-\frac{5}{8}; \frac{3}{8}\right)$ належить відрізку AB .

На відрізку $BC: x = 1, y \in [0; 2]$ функція набуває вигляду $z = 1 + y + 2y^2$, її точка мінімуму, при якій $\frac{dz}{dy} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \in [0; 2]$, тобто точка $M_2\left(1; -\frac{1}{4}\right)$ не належить відрізку BC . Виключаємо цю точку з подальшого розгляду.

Розглянемо функцію на відрізку $KC: y = x-1, x \in [0; 1]$. Маємо

$$z = x^2 + x(x-1) + 2(x-1)^2 = 4x^2 - 5x + 2,$$

її точка мінімуму, при якій $\frac{d z}{d x}=0 \Rightarrow x=\frac{5}{8} \in[0 ; 1]$. Цьому значенню відповідає точка $M_2\left(\frac{5}{8} ;-\frac{3}{8}\right)$ відрізка $K C$.

Нарешті, на межі $K A: y=-x-1, x \in[-1 ; 0]$ функція

$$z=x^2+x(-x-1)+2(-x-1)^2=2 x^2+3 x+2$$

має мінімум у точці, при якій $\frac{d z}{d x}=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{4} \in[-1 ; 0]$, тобто точка $M_3\left(-\frac{3}{4} ;-\frac{1}{4}\right) \in K A$.

Обчислимо значення функції $z(x, y)$ у відповідних точках M, M_1, M_2, M_3 , а також у точках A, B, C та K :

$$z(M)=0, z\left(M_1\right)=\frac{7}{16}, z\left(M_2\right)=\frac{7}{16}, z\left(M_3\right)=\frac{7}{8}, z(A)=1,$$

$$z(B)=11, z(C)=1, z(K)=2.$$

Отже,

$$\max _D z(x, y)=z(1 ; 2)=11 ; \min _D z(x, y)=z(0 ; 0)=0.$$

Відповідь: $\max _D=11, \max _D=11$.



Застосовуємо частинні похідні за допомогою ППЗ Mathcad

Процедура обчислення локального екстремуму за допомогою відповідних правил.

4.43. Канал, що підводить воду до турбіни, має поперечний переріз у вигляді рівнобічної трапеції, площа якої дорівнює Q . Визначить глибину каналу R та кут укосу α так, щоб його змочений периметр був найменшим.

Розв'язання.

Крок 1.

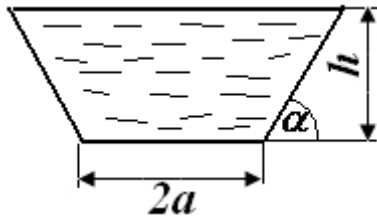


Рис. 4.13.
Зображення
поперечного перерізу

Для знаходження змоченого периметру перерізу додамо довжину нижньої основи трапеції та дві рівні довжини її бічних сторін (рис. 4.13). Довжина бічної сторони знаходиться з співвідношень сторін і кутів у прямокутному трикутнику. Змочений

периметру каналу: $L = 2a + \frac{2h}{\sin \alpha}$.

Крок 2. З формули для площі трапеції

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h \Rightarrow S = \frac{2a + 2a + 2h \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{2} \cdot h$$

маємо, що $Q = \frac{4a + 2 \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{2} \cdot h = (2a + h \cdot \operatorname{ctg} \alpha) \cdot h$.

Крок 3. Виразимо значення $2a$ з останньої формули.

Отже,

$$2a = \frac{Q}{h} - h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

Підставимо вираз для $2a$ у формулу змоченого периметру каналу L , будемо мати функцію декількох змінних $L(h, \alpha)$ для дослідження на локальний екстремум:

$$L = \frac{Q}{h} - h \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2h}{\sin \alpha}.$$

Крок 4. Знайдемо критичні точки. Для цього застосовуємо необхідну умову локального екстремуму. Знаходимо частинні похідні для функції декількох змінних $L(h, \alpha)$:

$$\frac{\partial L}{\partial h} = -\frac{Q}{h^2} - \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2}{\sin \alpha} = \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{Q}{h^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = h \cdot \cos^2 \alpha - \frac{2 \cdot h \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{h \cdot (1 - 2 \cdot \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha}.$$

та розв'язуємо систему
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial h} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Отже, з системи

$$\begin{cases} \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{Q}{h^2} = 0, \\ \frac{h \cdot (1 - 2 \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = 0. \end{cases}$$

отримуємо $\begin{cases} \frac{Q}{h^2} = \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ 1 - 2 \cos \alpha = 0; \end{cases}$ та $\begin{cases} h^2 = \frac{Q}{\sqrt{3}}, \\ \cos \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Отже, $h = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$, $\alpha = \pi/3$ – координати критичної точки.

Крок 5. Застосовуємо достатня умова локального екстремуму.

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad \Delta = AC - B^2.$$

Визначимо значення похідних другого порядку при знайдених значеннях h і α . Оскільки

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial h^2} = \frac{2Q}{h^3}, \quad B = \frac{\partial^2 L}{\partial h \partial \alpha} = \frac{1 - 2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad C = \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = \frac{2h \cdot (1 - \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin^3 \alpha},$$

то при $h = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$ та $\alpha = \pi/3$ ці похідні відповідно мають вигляд:

$$A = \frac{6}{\sqrt{Q} \cdot \sqrt[4]{3}}, \quad B = 0, \quad C = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{Q} \cdot \sqrt[4]{3}.$$

Величина $\Delta = AC - B^2 = 8 > 0$, $A > 0$, а це означає, що при значеннях $h = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$ та $\alpha = \pi/3$ функція $L(h, \alpha)$ досягає мінімуму, тобто змочений периметр каналу при цих значеннях h і α є найменшим: $L_{\min} = 2\sqrt{Q} \cdot \sqrt[4]{3}$.

Відповідь: $L_{\min} = 2\sqrt{Q} \cdot \sqrt[4]{3}$.



«Навчаємо» свій комп'ютер дослідженню функції декількох змінних на локальний екстремум за допомогою ППЗ Mathcad.

1. Відкрити вікно ППЗ Mathcad.

2. За допомогою опції Вид – Панели инструментов – Калькулятор, Вид – Панели инструментов – Вычисление та Вид – Панели инструментов – Исчисление винести на панель інструментів відповідні вкладки.

3. Знайти частинні похідні функції:

– задати функцію $L(h, \alpha) = \frac{Q}{h} - h \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2h}{\sin \alpha}$ із застосуванням оператора присвоювання := з панелі інструментів;

– обчислення частинних похідних $\frac{dL}{dh}$, $\frac{dL}{d\alpha}$ здійснити за допомогою оператору $\frac{d}{dx}$, змінюючи при цьому змінну диференціювання. Для отримання результату застосувати оператор \rightarrow .

4. Знайти критичні точки функції за необхідною умовою існування екстремуму:

– задати за допомогою оператора Given систему рівнянь для отримання критичних точок. Для отримання символу = під час запису рівнянь системи застосувати одночасне натиснення «Ctrl+=»;

– значення критичних точок знаходяться за допомогою функції $\operatorname{Find}(\alpha, h) \rightarrow$.

5. Застосувати достатню умовою існування екстремуму:

– обчислення частинних похідних другого порядку здійснити за допомогою оператору $\frac{d^2}{dx^2}$, змінюючи при цьому змінну диференціювання;

– змішану частинну похідну другого порядку $\frac{d^2 L}{dh d\alpha}$ знайти як частинну похідну першого порядку за змінною α від результату $\frac{dL}{dh}$. Для отримання результату застосувати оператор \rightarrow ;

– проаналізувати отримані результати $AC - B^2 = 8 > 0$, $A > 0$, а це

означає, що при значеннях $h = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$ та $\alpha = \pi/3$ функція $L(h, \alpha)$ досягає мінімуму.

6. Знайти значення змоченого периметру каналу $L_{\min} = 2\sqrt{Q} \cdot \sqrt[4]{3}$ при $h = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$, $\alpha = \pi/3$ (рис. 4.14).

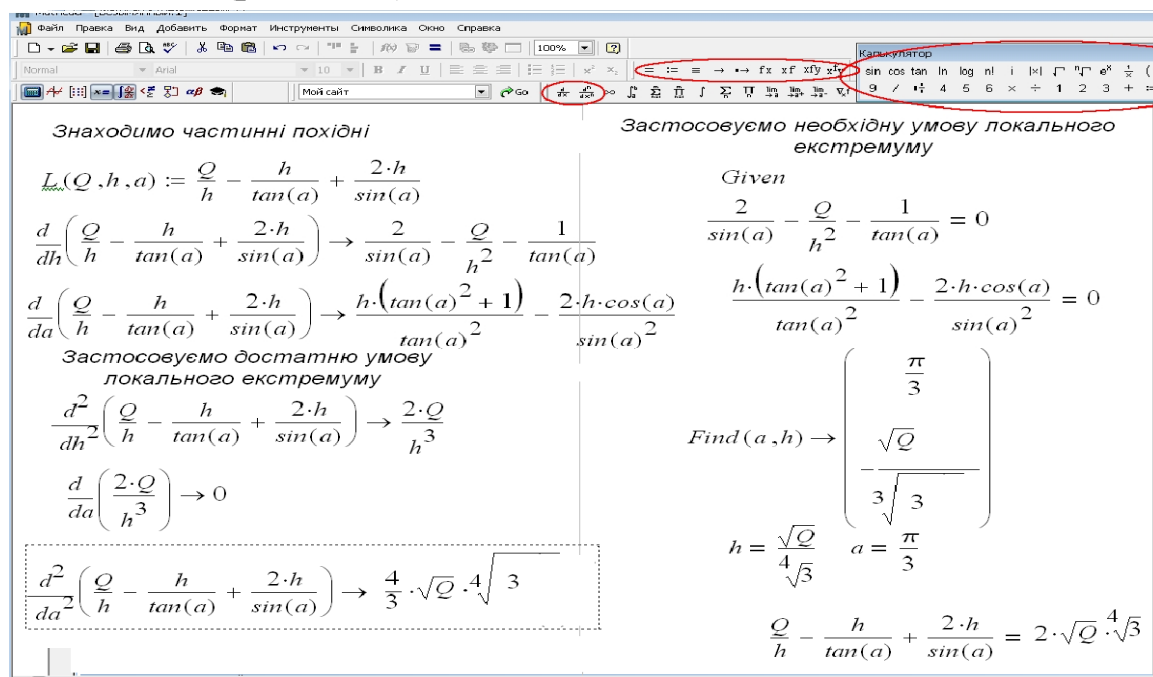


Рис. 4.14. Вікно ППЗ Mathcad: дослідження функції на локальний екстремум

Процедура застосування методу найменших квадратів за допомогою відповідних правил.

4.44. Тиск газу вимірюється двома приладами. Дані вимірів приладу I – y_i та відповідні показання приладу II – x_i наведені в таблиці

x_i	1,5	1,7	1,8	1,9	2,3	2,4	2,5	2,6	2,9
y_i	1,4	1,8	1,7	1,9	2,3	2,3	2,5	2,4	2,8

Методом найменших квадратів для даних, що наведено, знайдіть емпіричну залежність $y = a_1 \cdot x + a_0$, де a_0, a_1 – числові коефіцієнти.

Розв'язання.

Крок 1. Важливе практичне застосування частинних похідних здійснюється в методі найменших квадратів. Метод найменших квадратів широко застосовується для визначення коефіцієнтів емпіричних формул у тих випадках, коли потрібна

більша точність: значеннями коефіцієнтів вважаються такі, для яких сума квадратів відхилень емпіричних значень від

$$s = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2$$

теоретичних виявляється найменшою.

Прирівнюючи до нуля частинні похідні, узяті за коефіцієнтами, знайдемо ці коефіцієнти. Наприклад, для випадку емпіричної залежності $y = a_1 \cdot x + a_0$ коефіцієнти a_1 і a_0 визначаються з системи так званих нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_0 \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i; \end{cases}, \text{ де } a_0, a_1 - \text{числові коефіцієнти, } n -$$

кількість вимірювань, x_i, y_i – дані вимірів.

Крок 2. Система рівнянь для наших даних приймає вигляд:

$$\begin{cases} 9a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^9 x_i = \sum_{i=1}^9 y_i, \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^9 x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^9 x_i^2 = \sum_{i=1}^9 x_i y_i. \end{cases}$$

Отже, якщо $n = 9, \sum_{i=1}^9 x_i = 19,6, \sum_{i=1}^9 y_i = 19,1, \sum_{i=1}^9 x_i^2 = 44,36,$
 $\sum_{i=1}^9 x_i \cdot y_i = 43,25$, то система має вигляд:

$$\begin{cases} 9 \cdot a_0 + 19,6 \cdot a_1 = 19,1, \\ 19,6 \cdot a_0 + 44,36 \cdot a_1 = 43,25. \end{cases}$$

Крок 3. Розв'язками системи є значення $a_0 = -0,14, a_1 = 1,37$.

Крок 4. Таким чином, у системі координат Oxy шукана емпірична формула має вигляд $y = -0,14 + 1,37 \cdot x$.

Відповідь: $y = -0,14 + 1,37 \cdot x$.



«Навчаємо» свій комп'ютер застосуванню методу найменших квадратів для знаходження емпіричної залежності за допомогою ППЗ Maple.

1. Відкрити вікно ППЗ Maple.

2. За допомогою опції *Insert-Execution Grope-Before Cursor* отримати у полі програми мітку \triangleright .

3. Активізувати зліва вкладки *Expression* й *Common Symbols* для введення складових з отриманих шаблонів.

4. Обчислити значення сум $\sum_{i=1}^9 x_i$, $\sum_{i=1}^9 x_i^2$, $\sum_{i=1}^9 x_i \cdot y_i$ системи за допомогою функції *subs*.

$$\begin{cases} a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_0 \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$
 Кожний запис закінчуйте символом «;» та натисненням клавіші *Enter*.

5. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 9a + b \cdot \sum_{i=1}^9 x_i = \sum_{i=1}^9 y_i, \\ a \sum_{i=1}^9 x_i + b \cdot \sum_{i=1}^9 x_i^2 = \sum_{i=1}^9 x_i y_i. \end{cases}$$
:

– ввести за допомогою операторів відповідні рівняння системи: *First* :=, *Second* := та *sys* := {*first, second*}. Кожний запис закінчувати символом «:»;

– обчислити розв'язки системи за допомогою функції *solve(sys)*.
Шукана емпірична формула має вигляд $y = -0,14 + 1,37 \cdot x$ (рис. 4.15).

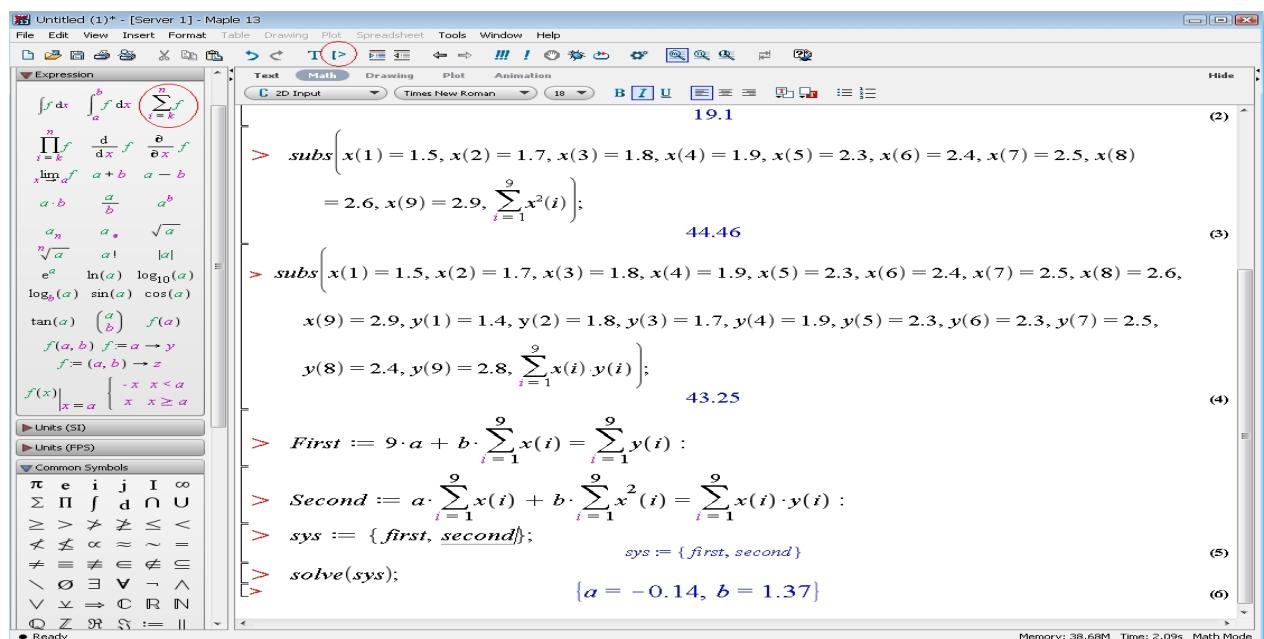


Рис. 4.15. Вікно ППЗ Maple: знаходження емпіричної залежності



Моделюємо професійну діяльність інженера

4.45. Знайдіть градієнт потенціалу $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



Переформулюйте умову на математичну.

Знайдіть частинні похідні $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ для отримання вектора градієнту.

Для обчислення частинних похідних скористайтесь можливостями ППЗ.

$$\text{grad}\varphi = \frac{x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Відповідь:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

4.46. Задано потенціал $\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Знайдіть поверхні рівня й градієнт.



Переформулюйте умову на математичну.

Знайдіть частинні похідні $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ для отримання вектора градієнту.

Для обчислення частинних похідних скористайтесь можливостями ППЗ.

$$\text{grad}\varphi = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$$

Відповідь:

4.47. Задано потенціал $\varphi = x^y - z^2$. Знайдіть градієнт потенціалу в точці $x = 2,7$; $y = 2$; $z = 2$.



Переформулюйте умову на математичну.

Знайдіть частинні похідні $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ для отримання вектора градієнту.

Для обчислення частинних похідних скористайтесь можливостями ППЗ.

Відповідь: $\text{grad}\varphi = 5,4i + 7,29j + 4k$.

4.48. Знайдіть напруженість E поля $\varphi = r \cdot \ln \sqrt{\cos^2 \frac{\pi \cdot x}{a} + \sin^2 \frac{\pi \cdot y}{a}}$, якщо $E = -\text{grad} \varphi$, а й r — const.



Переформулюйте умову на математичну. Знайдіть частинні похідні $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ для отримання вектора градієнту.

Для обчислення частинних похідних скористайтесь можливостями ППЗ.

$$E = \frac{i \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} - j \cdot \sin \frac{2\pi y}{a}}{\cos \frac{2\pi x}{a} + \sin \frac{2\pi y}{a}} \cdot \frac{k\pi}{a}.$$

Відповідь:

4.49. Як із прямокутної жерстини шириною a (рис. 4.16, а) виготовити жолоб призматичної форми так, щоб його поперечний переріз мав найбільшу площу?

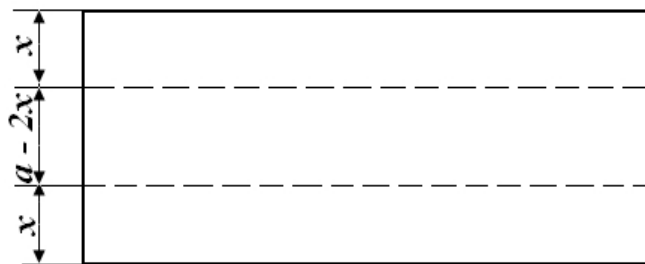


Рис. 4.16, а.

Вид зверху прямокутної жерстини шириною a

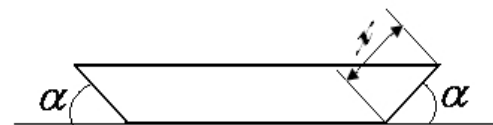


Рис. 4.16, б.

Поперечний переріз жерстини шириною a



Складіть план покрокового впровадження розв'язання задачі в життя. Поперечний переріз жолоба є рівнобічною трапецією (рис. 4.16, б), для якої введемо позначення через S – площі перерізу, через x – ширини похилої грані жолоба, через α – кута нахилу.

Тоді нижня основа трапеції буде дорівнювати $b = a - 2 \cdot x$, верхня – $c = a - 2 \cdot x + 2 \cdot x \cdot \cos \alpha$ й висота – $h = x \cdot \sin \alpha$. При цьому

площа трапеції може бути обчислена за формулою: $S = \frac{b + c}{2} \cdot h$.

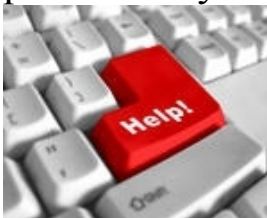
Отримаємо для дослідження на найбільше значення функцію $S = a \cdot x \cdot \sin \alpha - 2 \cdot x^2 \cdot \sin \alpha + x^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$. Для обчислення частинних похідних та розв'язування системи відповідних рівнянь (алгоритм дослідження на найбільше значення) скористайтесь можливостями ППЗ.

Відповідь: поперечний переріз жолоба призматичної форми буде мати найбільше значення при $x = \frac{a}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

4.50. Робота деформації рами виражається формулою:

$$A = \frac{L^3}{2 \cdot E \cdot J} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot H^2 - N \cdot H + \frac{1}{3} \cdot N^2 + \frac{1}{3} \cdot P \cdot H - \frac{1}{4} \cdot P \cdot N + \frac{1}{10} \cdot P^2 \right),$$

де P — постійне навантаження, N та H — відповідно вертикальна й горизонтальна реакції опори, L — довжина, E — модуль пружності, J — момент інерції. Якими повинні бути N і H , щоб робота A була найменшою?



Складіть план покрокового впровадження розв'язання задачі в життя. Для обчислення частинних похідних та розв'язування системи відповідних рівнянь (алгоритм дослідження на найменше значення) скористайтесь можливостями ППЗ.

Відповідь: $H = \frac{P}{28}$, $N = \frac{3}{7} P$.

4.51. Довжина металевого стрижня залежно від температури виражається формулою $l_t = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)$, де l_0 — довжина стрижня при 0°C . Визначить лінійний коефіцієнт розширення α методом найменших квадратів, користуючись даними таблиці:

$t^\circ \text{C}$	25	50	75	100	125	150	175	200
$l_{t \text{ см}}$	200,1	200,2	200,33	200,4	200,52	200,61	200,6	200,80



Складіть план покрокового впровадження розв'язання задачі в життя. Маємо:

$$l_{200} - l_{25} = 0,66; \quad l_0 \cdot \alpha = 0,66 : 175 = 0,00377.$$

Покладемо: $X = 200 + x, \quad Y = l_0 \cdot \alpha + y = 0,004 + y.$

Тоді для $x + t_k y = a_k$:

- 1) $x + 25 \cdot y = 0,14 - 0,1 = 0,4;$
- 2) $x + 50 \cdot y = 0,24 - 0,2 = 0,04;$
- 3) $x + 75 \cdot y = 0,33 - 0,3 = 0,03;$
- 4) $x + 100 \cdot y = 0,41 - 0,4 = 0,01;$
- 5) $x + 125 \cdot y = 0,52 - 0,5 = 0,02;$
- 6) $x + 150 \cdot y = 0,61 - 0,60 = 0,01;$
- 7) $x + 175 \cdot y = 0,69 - 0,70 = -0,01;$
- 8) $x + 200 \cdot y = 0,80 - 0,80 = 0,00.$

У рівняннях вигляду $x + t_k y = a_k$ необхідно, щоб $\sum_{k=1}^{k=8} (a_k - x - t_k y)^2$ мала найменше значення. Тоді

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{k=8} a_k - 8x - y \sum_{k=1}^{k=8} t_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{k=8} (t_k a_k) - x \sum_{k=1}^{k=8} t_k - y \sum_{k=1}^{k=8} t_k^2 = 0, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} 0,14 - 8x - 90y = 0, \\ 8,50 - 900x - 250500y = 0. \end{cases}$$

Для обчислення значень сум та розв'язування системи відповідних рівнянь скористайтесь можливостями ППЗ.

$$x = 0,048; \quad y = -0,0027; \quad X = 200,048; \quad Y = 0,00372.$$

Відповідь: $\alpha = Y : X = 0,0000186$ — коефіцієнт розширення.

4.52. При яких розмірах прямокутної металевої ємності даної місткості V на облицювання його стін і дна буде потрібно найменша кількість матеріалу? Знайдіть площу лицювальної поверхні.



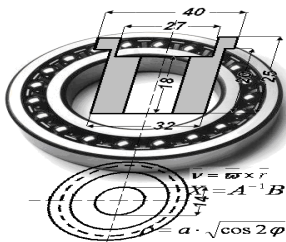
Складіть план покрокового впровадження розв'язання задачі в життя. Маємо: ємність має форму прямокутного паралелепіпеда. Позначимо його розміри через x, y, z .

Оскільки об'єм ємності $V = x \cdot y \cdot z$, то $z = \frac{V}{xy}$. Функція площі поверхні ємності як сума площ відповідних прямокутників:

$$S = 2 \cdot (x \cdot z + y \cdot z) + x \cdot y = 2 \cdot (x + y) \cdot \frac{V}{x \cdot y} + x \cdot y = 2 \cdot V \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + x \cdot y.$$

Для обчислення частинних похідних та розв'язування системи відповідних рівнянь (алгоритм дослідження на екстремум) скористайтесь можливостями ППЗ.

Відповідь: функція S при $x = y = \sqrt[3]{2 \cdot V}$ має мінімум. При цьому $z = \sqrt[3]{2 \cdot V / 2}, S_{\min} = 3 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot V^2}$.



Тема 4. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

За допомогою комплексних чисел досліджуються траєкторія руху тіл: течія ріки, польоти літаків, ракет й тощо. Застосовуються комплексні числа під час креслення географічних карт й для вивчення явищ в атомах і атомних ядрах. Поняття багатьох фізичних величин (сила, швидкість, прискорення та інших) узагальнюються й зображуються у вигляді комплексних чисел, тому що деякі дії над ними (додавання, віднімання, множення на число) аналогічні діям над векторами.



Необхідні знання про поняття комплексного числа

Def. Вираз $z = a + bi$, де a і b – дійсні числа, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця ($i^2 = -1$), називають комплексним числом. Таку форму запису комплексного числа називають *алгебраїчною*, число a – дійсною частиною комплексного числа z , а b – уявною частиною z і позначають

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Позначення дійсної й уявної частин комплексного числа z походить від французьких слів: *reel* – дійсний, *imaginaire* – уявний.

Def. Два комплексні числа $z = a + bi$ і $\bar{z} = a - bi$ називають *спряженими*.

Комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ рівні між собою ($z_1 = z_2$) тоді і тільки тоді, коли рівні їхні дійсні та уявні частини, тобто $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$.

Комплексне число $z = a + bi$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $a = b = 0$.

М.В. Поняття «більше-менше» для комплексних чисел не існує.



Вчимося розв'язувати квадратні рівняння, що мають від'ємний дискримінант

4.53. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Розв'язання. маємо квадратне рівняння з від'ємним дискримінантом: $D = 16 - 4 \cdot 5 = -4$. Значить рівняння має пару комплексно-спряжених коренів:

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i,$$
$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{-4}}{2} = 2 - i.$$

Відповідь: $x_1 = 2 + i$, $x_2 = 2 - i$.



Необхідні знання про дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1i$ та $z_2 = a_2 + b_2i$ виконують за такими правилами:

1) додавання:

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i.$$

2) віднімання:

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i.$$

3) множення:

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

4) ділення ($z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i, \text{ де } \bar{z}_2 = a_2 - b_2 i \text{ — число спряжене до } z_2.$$



Вчимося виконувати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

4.54. Нехай $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 4 - 3i$. Виконайте дії:

а) $z_1 + z_2$; б) $3z_1 - 2z_2$; в) $z_1 z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$; д) $(z_1)^3$.

Розв'язання. а) $z_1 + z_2 = (3 + i) + (4 - 3i) = 7 - 2i$.

б) $3z_1 - 2z_2 = 3(3 + i) - 2(4 - 3i) = 9 + 3i - 8 + 6i = 1 + 9i$.

в) $z_1 z_2 = (3 + i)(4 - 3i) = 12 + 4i - 9i - 3i^2 = 12 - 5i + 3 = 15 - 5i$.

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + i}{4 - 3i} = \frac{(3 + i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{12 + 4i + 9i + 3i^2}{16 - 9i^2} = \frac{9 + 13i}{25} = \frac{9}{25} + \frac{13}{25}i$;

д) $(z_1)^3 = (3 + i)^3 = 27 + 27i + 9i^2 + i^3 = 27 + 27i - 9 - i = 18 + 26i$.



Необхідні знання про геометричне зображення комплексних чисел про модуль і аргумент комплексного числа

Між множиною \mathbb{C} усіх комплексних чисел і всіма точками площини існує взаємно однозначна відповідність, іншими словами, кожному комплексному числу $z = a + bi$. На рисунку 4.17 комплексне число $z = a + bi$ зображується точкою $M(a, b)$. Таку точку умовно називають комплексною площиною змінної z , вісь Ox - дійсною, а вісь Oy - уявною віссю. Комплексне число $z = a + bi$ можна також зображувати вектором, початок якого знаходиться у точці $O(0; 0)$, а кінець – у точці $M(a, b)$.

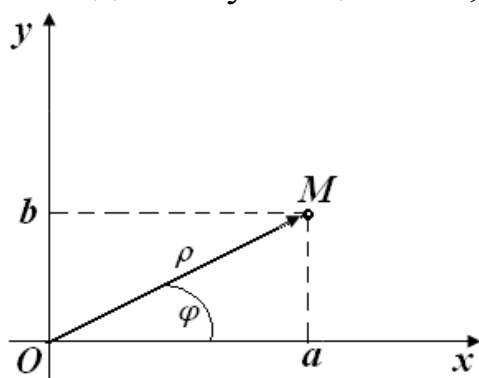


Рис. 4.17. Зображення комплексного числа $z = a + bi$ точкою $M(a, b)$

Якщо $b = 0$, тоді комплексне число $z = a + 0 \cdot i = a$ є дійсним числом. Отже, дійсні числа є окремим випадком комплексних чисел, їх позначають точками осі Ox .

Якщо $a = 0$, то комплексні числа $z = 0 + bi = bi$ називають суто уявними; такі числа зображують точками осі Oy .

Довжину ρ вектора \overrightarrow{OM} називають *модулем* комплексного числа і позначають $|z|$.

З рис. 4.17 зрозуміло, що

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.15)$$

Кут φ між додатним напрямом осі Ox і вектором \overrightarrow{OM} , який відповідає комплексному числу $z = a + bi$, називають *аргументом* комплексного числа $z (z \neq 0)$ і позначають $\varphi = \arg z$.

Кожне ненульове комплексне число має безліч аргументів. Усі вони задаються формулою

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $\text{Arg } z$ - загальне значення аргументу; $\arg z$ - головне значення аргументу, яке задовольняє умові:

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

Пошук аргументу комплексного числа рекомендуємо розпочинати з геометричного зображення цього числа.

Головне значення аргументу комплексного числа $z = a + bi$ можна визначити за таким правилом:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{якщо } a > 0, \\ \arctg \frac{b}{a} + \pi, & \text{якщо } a < 0, b \geq 0, \\ \arctg \frac{b}{a} - \pi, & \text{якщо } a < 0, b < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0, b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0, b < 0. \end{cases} \quad (4.16)$$



Вчимося виконувати дії над комплексними числами, що подані в алгебраїчній формі

4.55. Знайдіть дійсну та уявну частини комплексного числа

$$z = \frac{(3-2i)^2}{2i+1} + (i-1)^3$$

Розв'язання. Виконаємо перетворення

$$\begin{aligned} z &= \frac{9-12i+4i^2}{2i+1} + i^3 - 3i^2 + 3i - 1 = \frac{5-12i}{2i+1} - i + 3 + 3i - 1 = \\ &= \frac{(5-12i)(2i-1)}{(2i+1)(2i-1)} + 2i + 2 = \frac{10i + 24 - 5 + 12i}{-5} + 2i + 2 = \frac{12i + 9}{-5} \end{aligned}$$

Отже, $\text{Re } z = -\frac{9}{5}, \text{Im } z = -\frac{12}{5}.$

Відповідь: $\text{Re } z = -\frac{9}{5}, \text{Im } z = -\frac{12}{5}.$

4.56. Знайдіть модуль й головне значення аргументу комплексних чисел, запишіть ці числа у тригонометричній формі:

а) $z_1 = 3$; б) $z_2 = 2i$; в) $z_3 = -1$.

г) $z_4 = 1 + i$; д) $z_5 = 1 - i\sqrt{3}$; е) $z_6 = -2 - i$.

Розв'язання.

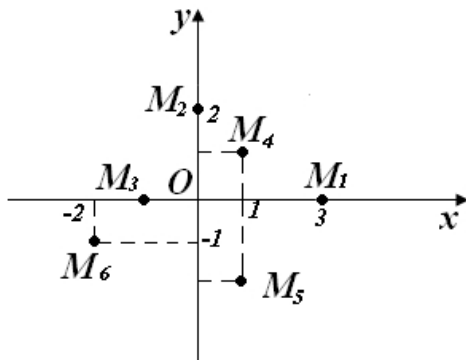


Рис. 4.18. Зображення точками комплексних чисел завдання 4.56

Вказаним числам відповідають на площині точки $M_1 - M_6$ (рис. 4.18).

За формулами (4.15) – (4.17) дістаємо:

а) $|z_1| = 3$, $\varphi_1 = 0$, $z_1 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$;

б) $|z_2| = 2$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $|z_3| = 1$, $\varphi_3 = \pi$, $z_3 = \cos \pi + i \sin \pi$;

г) $|z_4| = \sqrt{2}$, $\varphi_4 = \frac{\pi}{4}$, $z_4 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$;

д) $|z_5| = \sqrt{1+3} = 2$, $\varphi_5 = \arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, $z_5 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

е) $|z_6| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $\varphi_6 = \arctg \frac{1}{2} - \pi$, $z_6 = \sqrt{5}(\cos \varphi_6 + i \sin \varphi_6)$.

4.57. Розв'яжіть рівняння $|z| - 2z = -1 - 8i$.

Розв'язання. Невідоме число z запишемо у алгебраїчній формі: $z = x + iy$. Тоді

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 2x - 2yi = -1 - 8i.$$

З умови рівності комплексних чисел одержуємо систему двох рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - 2x = -1, \\ -2y = -8, \end{cases}$$

розв'язок якої $x = 3$, $y = 4$. Отже, шукане число $z = 3 + 4i$.

Відповідь: $z = 3 + 4i$.



Необхідні знання про тригонометричну форму комплексного числа

З рисунка 4.17 маємо, що

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (4.17)$$

Праву частину формули (4.17) називають тригонометричною формою комплексного числа z .



Необхідні знання про дії над комплексними числами у тригонометричній формі

Нехай $z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Знайдемо добуток

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)) = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i (\sin(\varphi_1 + \varphi_2))]. \end{aligned}$$

Висновок. Під час множення комплексних чисел їхні модулі перемножують, а аргументи додають.

Піднесення комплексного числа, заданого у тригонометричній формі, до n -ого степеня, де $n \in \mathbb{N}$, виконують за формулою Муавра:

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos n \cdot \varphi + i \cdot \sin n \cdot \varphi). \quad (4.18)$$

Ділення комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Корінь степеня n , де n — ціле додатне число, з комплексного числа $z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ добувають за формулою:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (4.19)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Отже, існує n різних значень кореня n -ого степеня з числа z . Усім цим значенням відповідають точки площини, які лежать на колі радіуса $\sqrt[n]{\rho}$ із центром у початку координат і є вершинами правильного n -кутника.



Вчимося виконувати дії над комплексними числами, що подані у тригонометричній формі

4.58. Знайдіть $(-\sqrt{3} + i)^{13}$.

Розв'язання.

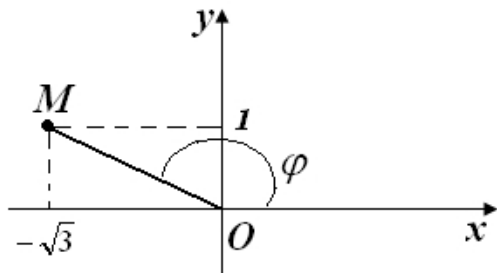


Рис. 4.19. Зображення комплексного числа завдання

4.58

За формулою Муавра дістанемо

$$\begin{aligned} (-\sqrt{3} + i)^{13} &= 2^{13} \left(\cos 13 \cdot \frac{5\pi}{6} + i \sin 13 \cdot \frac{5\pi}{6} \right) = \\ &= 2^{13} \left(\cos \left(10\pi + \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(10\pi + \frac{5\pi}{6} \right) \right) = 2^{13} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 4096(-\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

4.59. Розв'яжіть рівняння $z^4 + 16 = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $z^4 = -16$. Тепер подамо число -16 у тригонометричній формі: $-16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Використовуючи формулу (4.18), дістаємо

$$\sqrt[4]{-16} = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Послідовно визначаємо усі чотири корені даного рівняння:

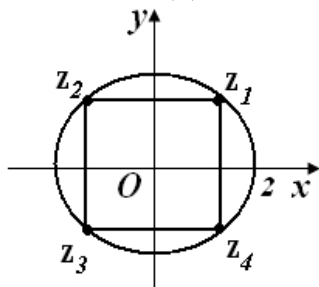


Рис. 4.20.

Зображення коренів рівняння $z^4 + 16 = 0$

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\ z_2 &= 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\ z_3 &= 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$z_4 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

З погляду геометрії одержані корені – вершини квадрата, що вписано у коло радіуса 2 (рис. 4.20).



Необхідні знання про показникову форму комплексного числа

За формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Звідси випливає, що комплексне число, записане у тригонометричній формі, можна подати ще й так:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i\varphi}$$

Вираз $|z| e^{i\varphi}$ називають *показниковою* формою комплексного числа.

Нехай $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$. Тоді:

$$1) \quad z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$2) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$3) \quad z^n = |z|^n \cdot e^{in\varphi}.$$



Вчимося виконувати дії над комплексними числами, що подані у показниковій формі

4.60. Нехай $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$. Виконайте дії:

а) $z_1 z_2$; б) $(z_1)^6$.

Розв'язання:

а) $z_1 z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 6e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} = 6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 6i;$

$$б) (z_1)^6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^6 = 64e^{i\pi} = -64$$



Виконуємо дії над комплексними числами за допомогою ППЗ Maple

Процедура виконання дії над комплексними числами за допомогою відповідних правил.

4.61. Для заданих синусоїдальних функцій ЕДС $e(t) = 220\sqrt{2} \cdot \sin(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2})$ В, запишіть миттєве значення синусоїдально змінюючогося ЕДС у вигляді комплексного числа та знайдіть комплексну амплітуду.

Розв'язання.

Крок 1. Синусоїдальні струм й напругу ЕДС можна зобразити графічно, записати за допомогою рівнянь із тригонометричними функціями, представити у вигляді векторів у декартовій площини або за допомогою комплексних чисел.

Геометричні операції з векторами можна замінити алгебраїчними операціями з комплексними числами, що істотно підвищує точність одержуваних результатів. Кожному вектору на комплексній площині відповідає певне комплексне число, що може бути записане у різних формах (уявну одиницю i можна замінити уявною j). Наприклад:

- показниковій $\vec{a} = a \cdot e^{j\psi}$;
- тригонометричній $\vec{a} = a \cdot \cos\psi + j \cdot a \cdot \sin\psi$;
- алгебраїчній $\vec{a} = b + j \cdot c$.

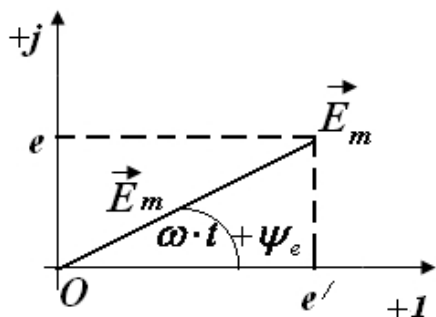


Рис. 4.21. Зображення ЕДС за допомогою комплексного числа

Наприклад, ЕДС $e = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_e)$, що зображено на рисунку 4.21 вектором обертання, відповідає комплексне число

$$E_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_e)} = E_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_e) + j \cdot E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_e) = e',$$

де E_m - амплітуда ЕДС; величина ω характеризує швидкість зміни фазового кута, що називають кутовою частотою; ψ_e - початкова фаза, фазовий кут $(\omega \cdot t + \psi_e)$ визначається по проєкціях вектора на вісі «+1» та «+j» системи

$$\text{координат, так що } \operatorname{tg}(\omega \cdot t + \psi_e) = \frac{e}{e'}.$$

Крок 2. Відповідно до тригонометричної форми запису уявна складова комплексного числа визначає миттєве значення синусоїдально змінюючогося ЕДС:

$$e = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_e) = \operatorname{im} \{E_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_e)}\}.$$

$$\text{Отже, } e = \operatorname{im} \left\{ 220\sqrt{2} \cdot e^{j(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2})} \right\} = 220\sqrt{2} \cdot \sin\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Крок 3. Комплексне число $E_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_e)}$ зручно представити у вигляді добутку двох комплексних чисел: $E_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_e)} = \underbrace{E_m \cdot e^{j \cdot \psi_e}}_{\dot{E}_m} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = \dot{E}_m \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$, де параметр \dot{E}_m , що відповідає положенню вектора для $t=0$, називають комплексною амплітудою.

$$\text{Це означає, що } E_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_e)} = 220\sqrt{2} \cdot e^{j(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2})} = 220\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{j \cdot \pi \cdot t}.$$

$$\text{Отже комплексна амплітуда } \dot{E}_m = 220\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}.$$



«Навчаємо» свій комп'ютер виконанню дій над комплексними числами за допомогою ППЗ Maple.

1. Відкрити вікно ППЗ Maple.
2. За допомогою опції *Insert-Execution Grope-Before Cursor* отримати у полі програми мітку **>**.
3. Активізувати зліва вкладки *Expression* й *Common Symbols* та з отриманих шаблонів ввести в окремих дужках складові функції $e(t) = 220\sqrt{2} \cdot \sin(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2})$.
4. Отримати тимчасову діаграму для ЕДС у вигляді графічного зображення синусоїдальної величини у заданому масштабі в залежності від часу за допомогою функції *plot(...)*.
5. Увести функцію ЕДС у вигляді комплексного числа (показникові форма) та визначити миттєве значення синусоїдально змінюючогося ЕДС як уявну складову комплексного числа за допомогою команди *Im(z)* (рис. 4.22).

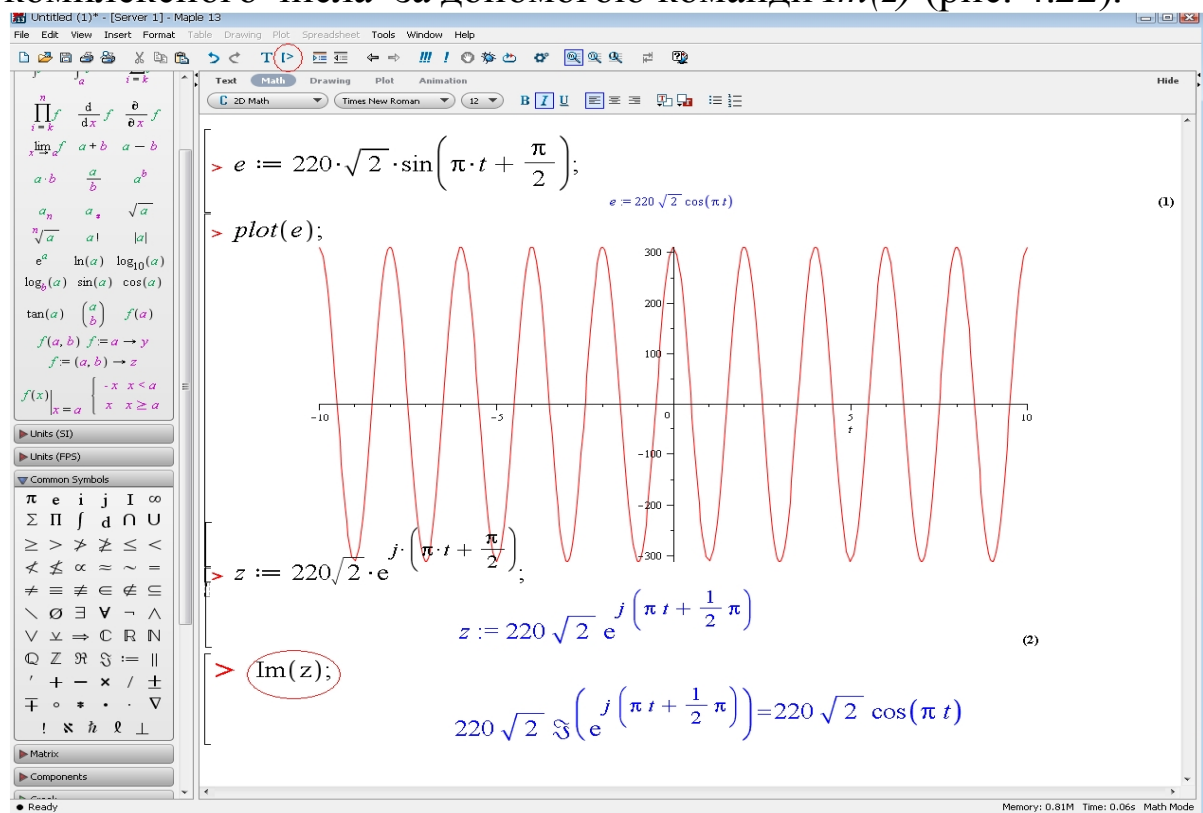


Рис. 4.22. Вікно ППЗ Maple: отримання тимчасової діаграми та миттєвого значення синусоїдально змінюючогося для ЕДС



Моделюємо професійну діяльність інженера

4.62.

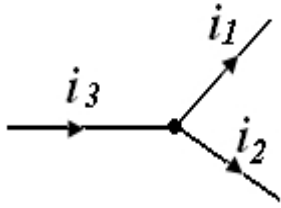


Рис. 4.23.
Розгалуження
ланцюга у точці

Припустимо, наприклад, у точці розгалуження ланцюга (рис. 4.23) загальний струм i_3 дорівнює сумі токів i_1 й i_2 двох віток, де

$$i_1 = 2,82 \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right) A$$

$$i_2 = 14,1 \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) A$$

. Визначить i_3 .



Створіть векторну діаграму за допомогою ППЗ. Побудова векторної діаграми в масштабі дозволяє визначити значення I_{3m} й Ψ_3 з діаграми, після чого може бути записане розв'язання для миттєвого значення i_3 шляхом формального обліку кутової частоти:

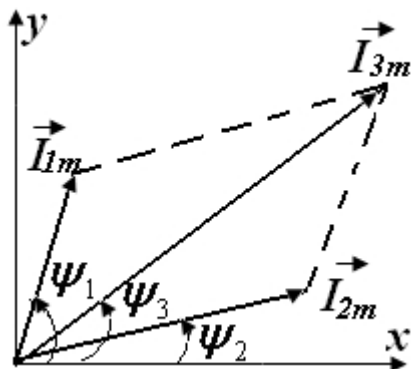
$$i_3 = I_{3m} \sin(\omega t + \Psi_3).$$


Рис. 4.24. Схематична
векторна діаграма для
отримання значення I_{3m}

На рис. 4.24 зображені початкові положення векторів струмів, проекції яких на вісь ординат дають миттєві значення струмів для $t=0$.

Відповідь: результуючий струм також буде синусоїдальним:

$$i_3 = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \cdot \sin(\omega t + \psi_2) = I_{3m} \cdot \sin(\omega t + \psi_3) =$$

$$= 15,08 \cdot \sin(\omega t + 34,6^\circ) A.$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. **Буйвол В.М.** Елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії / В.М.Буйвол. — К.: КМУЦА, 1996. — 200с.
2. **Буйвол В.М.** Диференціальне числення функції однієї змінної / В.М.Буйвол. — К.: КМУЦА, 1998.— 168 с.
3. **Буйвол В.М.** Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної / В.М.Буйвол. —К.: НАУ, 2000. —312 с.
4. **Гриньов Б.В.** Векторна алгебра: Підручник для вищих технічних навчальних закладів / Б.В.Гриньов, І.К.Кириченко За ред. О.М.Литвина. — Харків: Гімназія, 2008. — 164 с.
5. **Гриньов Б.В.** Аналітична геометрія: Підручник для вищих технічних навчальних закладів / Б.В.Гриньов, І.К.Кириченко За ред. О.М.Литвина. — Харків: Гімназія, 2008. — 340 с.
6. **Грищенко Л. З.** Вступ до математичного аналізу. Комплексні числа. Многочлени: Конспект лекцій / Л.З.Грищенко, В.Ф.Рудь.— К.: КМУЦА, 1998. — 88 с.
7. **Дубовик В.П.** Вища математика: Навч. посібник / В.П.Дубовик, І.І.Юрик. — К.: А.С.К., 2001. — 648 с.
8. **Дюженкова Л.І.** Вища математика: Приклади і задачі. Посібник / Л.І.Дюженкова, О.Ю.Дюженкова, Г.О.Михалін. — К.: Видавничий центр “Академія”, 2002. — 624 с.
9. **Жалдак М.І.** Комп’ютер на уроках математики. Посібн. для вчителів / М.І.Жалдак. — К.: Техніка, 1997. — 304 с.
10. **Жильцов О.Б.** Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навч. Посіб / О.Б.Жильцов, Г.М.Торбін. — К.: МАУП, 2002. — 408 с.
11. **Письменный Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Т.Письменный. — 2-е изд., испр. — М: Айрис-пресс, 2004. — 288 с.
12. **Письменный Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике. 2 часть / Д.Т.Письменный. — 2-е изд., испр. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 256 с.