Міністерство освіти і науки України

Донбаська державна машинобудівна академія

Л.В.Васильєва, І.А.Гетьман, Л.М.Топтунова, В.М.Чорномаз

КУРС ЛЕКЦІЙ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ “ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА”

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів

Краматорськ 2006

УДК 519.2
ББК 22.17
В 19

Рецензенти:

Каргін А.О., д-р техн. наук, професор (Донецький національний університет);

Шелепов В.Ю., д-р ф.-м. наук, професор (Інститут штучного інтелекту);

Дьяченко О.І., д-р ф.-м. наук, с.н.с. (Донецький фізико-технічний інститут НАН України)

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Лист № 1.4/18-Г-260 від 19.06.2006

Васильєва Л.В., Гетьман І.А., Топтунова Л.М., Чорномаз В.М.

В 19 Курс лекцій та контрольні завдання з дисципліни “Прикладна математика”: Навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів. – Краматорськ: ДДМА, 2006. – 136 с.
ISBN 966-379-074-1

У навчальному посібнику викладено основи теорії ймовірностей та математичної статистики. До кожної теми наведені практичні приклади.
Для студентів та магістрантів вищих технічних навчальних закладів.

УДК 519.2
ББК 22.17

ISBN 966-379-074-1

Зміст

ВСТУП

У технічних науках зустрічаються два види явищ, що пов'язані з експериментами, спостереженнями, вимірюваннями. Одні експерименти однозначно визначають результати явищ. Їх моделюють за детермінованою схемою.

Інші експерименти викликають випадкові явища, тобто явища, результати яких неможливо наперед передбачити, не дивлячись на те, що вихідні умови експерименту зберігають незмінними або контролюють. Такі експерименти називають стохастичними або випадковими.

Предметом теорії ймовірностей є математичний аналіз випадкових явищ. Вона вивчає кількісні закономірності, що є в масових однорідних спостереженнях за ними.

Досить часто на практиці доводиться вивчати явища, на перебіг яких впливають численні фактори. У таких випадках для наближеного визначення певної характеристики досліджуваного явища здійснюється досить велика серія спостережень або випробувань. Значення, які отримують в результаті кожного з таких спостережень, є випадковими і в сукупності називаються статистичними даними. Методи їх аналізу і встановлення закономірностей, яким вони відповідають, вивчає математична статистика. Теоретичною основою математичної статистики є теорія ймовірностей.

1 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1 Класифікація подій

Подія 0 називається неможливою, якщо в даному досліді вона відбутися не може. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю: **P(0)=0.**

Подія I називається достовірною, якщо в даному досліді вона обов'язково відбудеться. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці: **P(I)=1.**

Подія A називається випадковою, якщо в даному досліді вона може відбутися, а може не відбутися. Ймовірність випадкової події укладена між нулем і одиницею**: 0≤P(A)≤1.**

1.2 Класичне визначення ймовірності

Нехай дослід має n рівноможливих наслідків. Нехай події A сприяють m з цих наслідків. Тоді ймовірність події A визначається за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Приклад 1. У кошику 3 білих і 2 чорних кулі. Навмання виймається куля. Яка ймовірність того, що вона біла?

Рішення

Нехай A - подія, яка полягає в тому, що виймуть білу кулю. Дослід має n=5 наслідків. Події A сприяють m=3 наслідкам. Ймовірність події A:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{5}.$$

Відповідь

Ймовірність того, що куля біла, дорівнює $\frac{3}{5}$.

При визначенні m і n часто можна скористатися формулами комбінаторики. Нагадаємо основні з них.

Переставленнями називаються комбінації з n елементів, що відрізняються порядком елементів. Кількість переставлень з n елементів визначається за формулою

$$P_n=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n. \qquad (2)$$

Наприклад, із трьох елементів (a,b,c) можна скласти наступні переставлення: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Їх шість.

P=3! =6.

Розміщеннями називаються комбінації, складені з n елементів по m і які відрізняються складом елементів, або порядком елементів. Кількість розміщень з n елементів по m обчислюється за формулою

$$R_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (3)$$

Наприклад, із трьох елементів (a,b,c) ,узявши по два елемента, можна скласти наступні розміщення: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Сполученнями називаються комбінації з n елементів по m, що відрізняються хоча б одним елементом. Кількість сполучень з n елементів по m обчислюється за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (4)$$

Розглянемо приклади рішення задач із застосуванням формули (1).

Приклад 2. У кошику 3 білих і 7 чорних куль. Навмання виймають 2 кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?

Рішення

Нехай А - подія, що полягає в тому, що обидві кулі білі. Загальна кількість наслідків дорівнює кількості сполучень з 10 по 2, тому що можуть бути вийняті будь-які дві кулі.

$$n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45.$$

Кількість наслідків, сприятливих події А, дорівнює кількості сполучень з числа білих куль по два:

$$m = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$$

Отже, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{45}.$

Відповідь

Ймовірність того, що обидві кулі білі, дорівнює $\frac{3}{45}$.

Приклад 3. У партії з N виробів M бракованих. З партії навмання беруть n виробів. Визначити ймовірність того, що серед цих n виробів буде m бракованих. (M≤N, m≤n).

Рішення

Нехай A - подія, що полягає в тім, що серед n виробів m бракованих. Загальна кількість наслідків дорівнює кількості сполучень з N по n. Сприятливими для події A будуть такі наслідки, коли в узятій партії з n виробів виявляться які-небудь m з M бракованих виробів, а інші (n-m) будуть стандартними. Кількість наслідків узяття бракованих виробів дорівнює кількості сполучень з M по m, а число наслідків узяття додатково до них стандартних виробів дорівнює кількості сполучень з (N-M) по (n-m). Кожен випадок узяття m бракованих виробів можна скомбінувати з кожним випадком узяття (n-m) стандартних виробів.

Отже,

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Відповідь

Якщо в партії з N виробів M бракованих, то ймовірність наявності m бракованих виробів з n навмання вибраних розраховується за формулою $P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

1.3 Геометричне визначення ймовірності

На практиці часто зустрічаються досліди, у яких кількість наслідків безмежна. У таких випадках формула $P(A)=\frac{m}{n}$ не вживається. Тоді застосовують метод геометричної імовірності.

Розглянемо його для двовимірного простору (рис. 1).

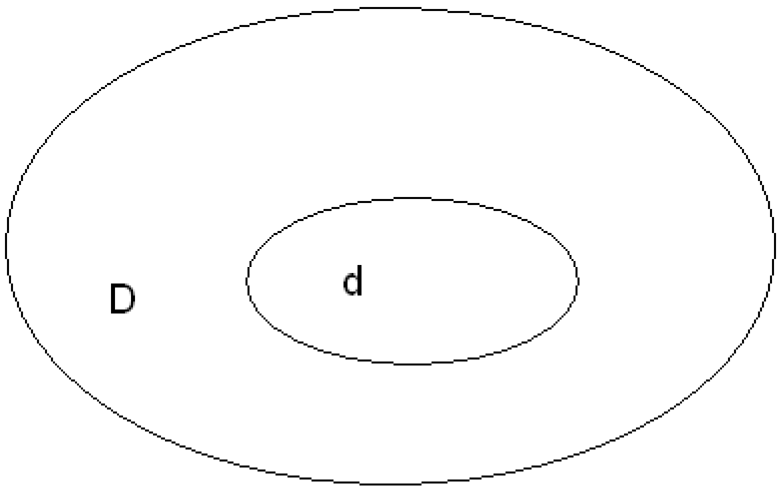


Рисунок 1

Нехай на площині розташована деяка ділянка D, площа якої дорівнює S^D і в ній міститься інша ділянка d - із площею S^d. До ділянки D навмання кидається точка (див. рис. 1). Яка ймовірність того, що точка потрапить до ділянки d? Тут припускають, що ймовірність влучення в яку-небудь частину делянки D пропорційна площі цієї частини і не залежить від її розташування і форми. У такому випадку ймовірність влучення до ділянки d дорівнює:

$$P = \frac{S^d}{S^D}. \qquad (5)$$

У випадку одномірної і тривимірної ділянки D замість площі потрібно говорити відповідно про довжину й обсяг.

Приклад 4. Усередину кола радіусом R навмання кинута точка. Знайти ймовірність того, що точка буде усередині вписаного в коло квадрата. Припускають, що ймовірність улучення точки в цю частину кола пропорційна площі цієї частини і не залежить від розташування щодо кола.

Рішення

Нехай

$$S_{KP} = \pi R^2 \ , \quad \mathrm{S_{KB}} = \mathrm{a}^2,$$

де $\mathrm{a} = \mathrm{R}\sqrt{2}$, тобто $\mathrm{S_{KB}} = 2\mathrm{R}^2$,

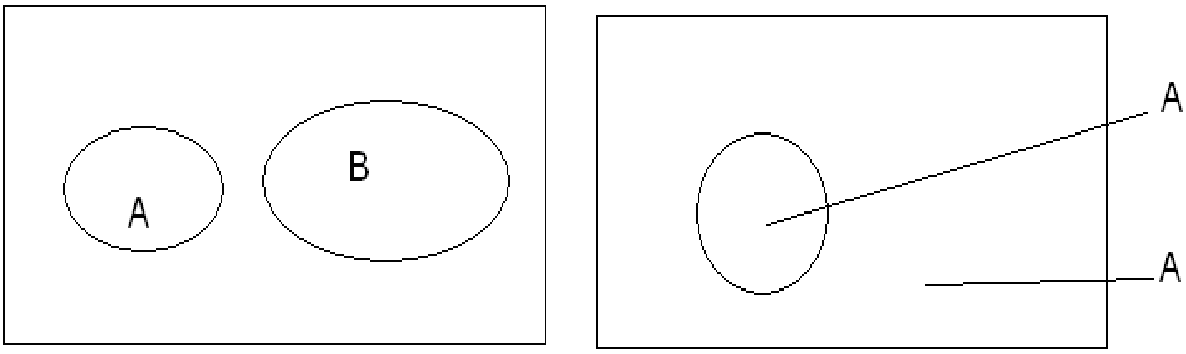
$$P = \frac{S_{KB}}{S_{KP}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \ .$$

Відповідь

Ймовірність того, що точка буде усередині вписаного в коло квадрата, розраховується за формулою $P = \frac{2}{\pi}$.

1.4 Алгебра подій. Основні формули для обчислення ймовірністі подій

Наведені нижче визначення ілюструються діаграмами, на яких достовірна подія I - влучення точки в прямокутник, подія A - влучення точки до ділянки A, подія B - влучення точки до ділянки B (рис. 2, а).



а б

Рисунок 2

1.4.1 Протилежні події

Подія $\overline{A}$ (читається «не А») полягає в тому, що подія А не відбувається (рис. 2, б).

Сума імовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1;$$
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \,. \tag{6}$$

Надійністю елемента називається ймовірність того, що протягом даного відрізку часу елемент не вийде з ладу (не відмовить).

Приклад 5. Нехай надійність елемента дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що елемент відмовить?

Рішення

Позначимо через А подію «елемент відмовить», тоді $\overline{A}$ - «елемент не відмовить». За формулою (6) маємо:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Відповідь

Ймовірність того, що елемент відмовить, дорівнює 0,1.

1.4.2 Добуток подій

Добутком двох подій А і В називається подія АВ, що полягає в тім, що в даному досліді обидві події відбудуться (рис. 3).

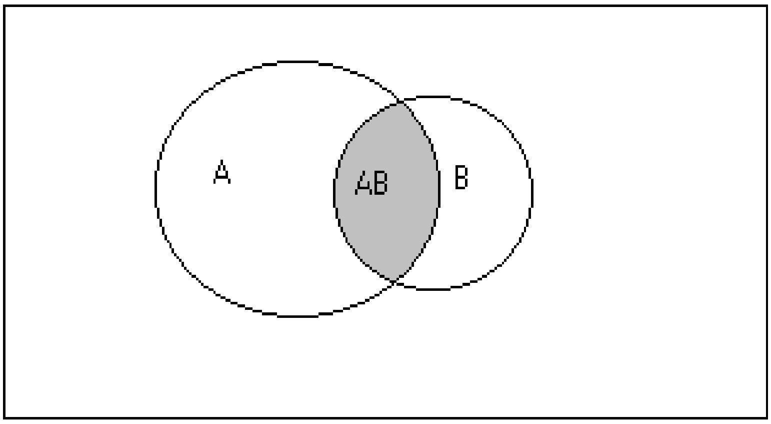


Рисунок 3

Умовною імовірністю події В, за умови, що відбулася подія А, є величина Р(В), що обчислюється за формулою

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (7)$$

Ймовірність добутку двох подій обчислюється за формулою

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad ($$

8)

Для **незалежних** подій A і B умовна ймовірність $P_A(B)$ збігається з безумовною імовірністю P(B). У цьому випадку формула (8) спрощується

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$ (8а)

Формули (8) і (8.а) узагальнюються на добуток будь-якої кількості подій:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A1}(A_2) \cdot \ldots \cdot P_{A1A2\ldots An-1}(A_n)$$ (8б)

Для незалежних подій:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$ (8в)

Приклад 6. З трьох букв розрізної абетки складене слово «рік». Дитина, що не вміє читати, розкидала букви і потім збирала їх випадково. Знайти ймовірність того, що в неї знову вийде слово «рік».

Рішення

Уведемо позначення:

A_1 - перша буква «Р»;

A_2 - друга буква «І»;

A_3 - третя буква «К»;

А - склалося слово «РІК».

Тоді $A = A_1 A_2 A_3$,

$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P_{A1}(A_2) P_{A1A2}(A_3)$.

Імовірності обчислюємо за формулою (8)

$P(A_1) = 1/3,\ P_{A1}(A_2) = 1/2,\ P_{A1A2}(A_3) = 1$.

Тоді

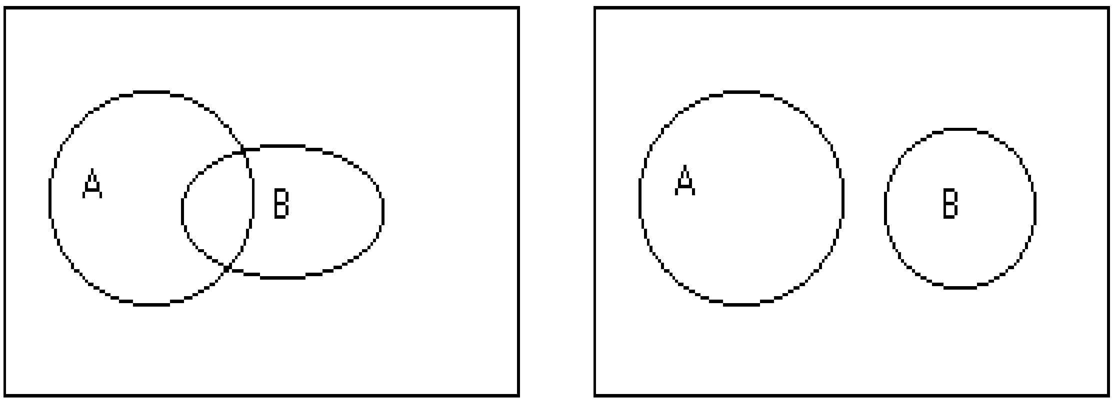
$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Відповідь

Ймовірність того, що вийде слово «рік», дорівнює $\frac{1}{6}$.

1.4.3 Сума подій

Сумою подій А і В називається подія, що полягає в тім, що відбудеться хоча б одна з цих подій.



а б

Рисунок 4

На рисункунку 4,а зображені **спільні** події А і В, тобто такі події, що обидві можуть відбутися в тому самому досліді.

На рисунку 4,б зображені **неспільні події**, що у тому самому досліді одночасно відбутися не можуть (не плутати неспільність подій з незалежністю подій).

Для неспільних подій справедлива формула

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (9)$$

Для спільних подій формула (9) невірна і потрібно користатися формулою

$$P(A+B)=1-P(\overline{A}\overline{B}). \qquad (9а)$$

Ці формули узагальнюються на будь-яку кількість подій:

- для n неспільних подій

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \qquad (9б)$$

- для n спільних подій:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}). \qquad (9в)$$

Приклад *7*. Для сигналізації про аварію встановлено три незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії перший сигналізатор спрацює, дорівнює 0,9. Для другого і третього сигналізаторів - відповідно 0,8 і 0,7. Знайти ймовірність того, що при аварії буде поданий сигнал тривоги.

Рішення

Уведемо позначення:

A - поданий сигнал тривоги;

A_1 - спрацював 1 -й сигналізатор;

A_2 - спрацював 2-й сигналізатор;

A_3 - спрацював 3-й сигналізатор.

Подія A має вид:

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

Сигналізатори можуть спрацювати одночасно, отже події $A_1,\ A_2,\ A_3$ спільні. Скористаємося формулою (9в):

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A_1 A_2 A_3}).$$

Якщо сигналізатори працюють незалежно, то для обчислення імовірності $P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3)$ скористаємося формулою (8в):

$$P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)) =$$
$$= (1 - 0{,}9)(1 - 0{,}8)(1 - 0{,}7) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006;$$
$$P(A) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Відповідь

При аварії буде поданий сигнал тривоги з ймовірністю 0,994.

1.5 Розрахунок надійності схем

Надійність Р вузла, складеного з n послідовно з'єднаних елементів (рис. 5), обчислюється за формулою (10).

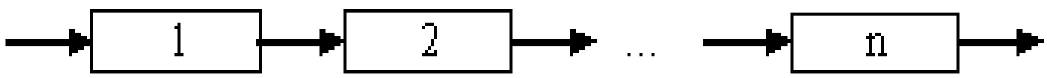


Рисунок 5

$$P_{посл} = P_1 P_2 \ldots P_n, \qquad (10)$$

де P_i- надійність i-го елемента , i=1, … ,n.

Надійність Р вузла, складеного з n паралельно з'єднаних елементів (рис. 6) обчислюється за формулою (11).

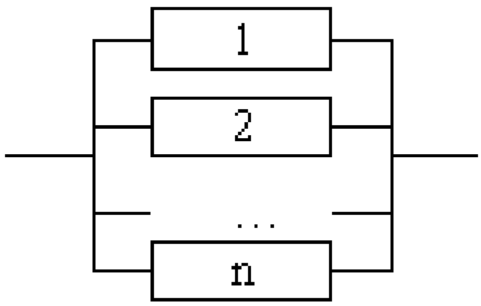


Рисунок 6

$$P_{пар} = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n, \qquad (11)$$

де q_i=1-p_i;   i=1, . . .,n.

Щоб розрахувати надійність схеми, потрібно:

1 Виділити в схемі паралельно з'єднані вітки 1, 2,   ,n.

2 Для кожної вітки надійність P_1, P_2, … ,P_n розрахувати окремо.

3 Надійність схеми розрахувати за формулою (11);

$$P_{схеми} = 1 - q_1 q_2 \dots q_n;$$
$$q_1 = 1 - p_1;$$
$$q_2 = 1 - p_2;$$
$$\dots$$
$$q_n = 1 - p_n.$$

Приклад 8. Розрахувати надійність схеми, показаної на рис. 7.

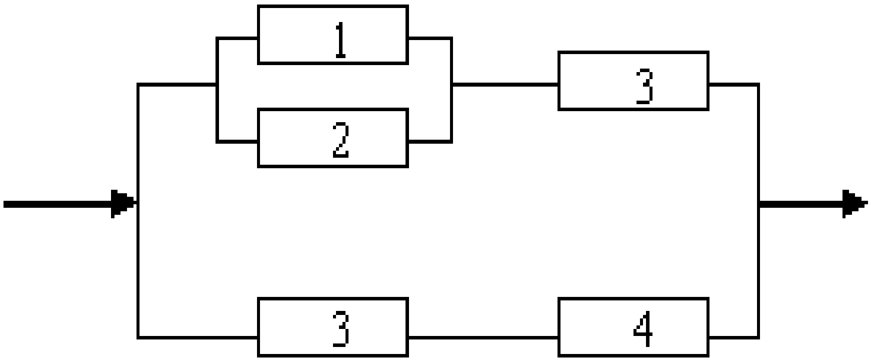
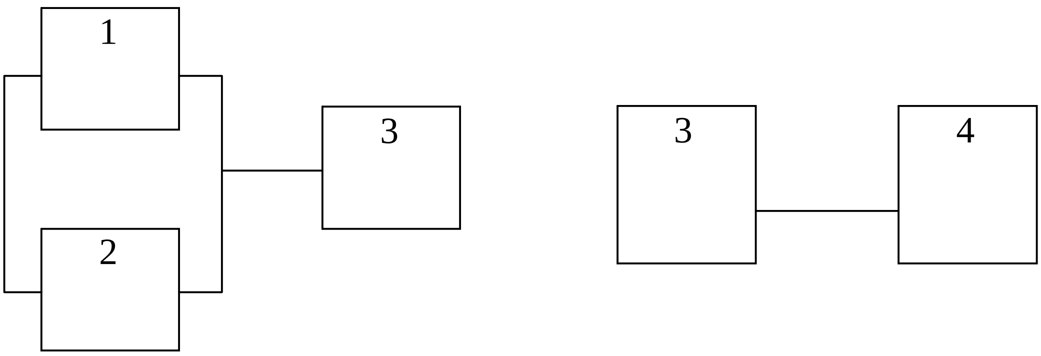


Рисунок 7

P(1)=0,1; P(2)=0,2; P(3)=0,8;   P(4)=0,7.

Послідовність дій:

1 Схему розбити на рівнобіжні гілки А і Б (рис. 8):



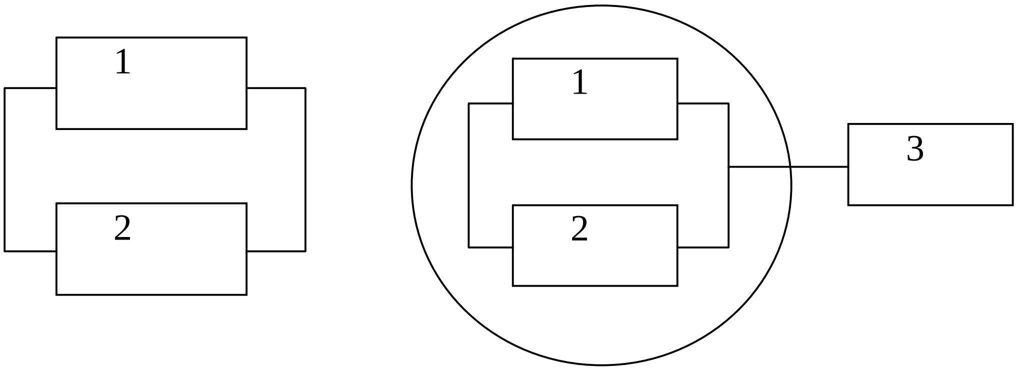
а – А

б - Б

Рисунок 8

2 Надійність кожної гілки розрахувати окремо, скористаючись формулами (10) і (11):

а) гілка А (рис. 9,а):



а б

Рисунок 9

За формулою (11): $P=1 - q_1 q_2=1-0{,}9\cdot 0{,}8=0{,}28$.

За формулою (10): Р(А)=Р(Р(3)=0,28(0,8=0,224

б) гілка Б (рис. 9,б). Надійність вітки розраховуємо за (10):

$P(Б) = P_3 \cdot P_4 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$

3 Надійність усієї схеми:

$P_{схемы}=1 - (1 - P(A)) \cdot (1 - P(Б)) =1- (1-0{,}224)\cdot(1-0{,}56)=0{,}658.$

Відповідь

Надійність схеми (ймовірність того, що за заданий час вона не відмовить) 0,658.

1.6 Формула повної ймовірністі і формула ймовірностій гіпотез (формула Байеса)

1.6.1 Формула повної ймовірністі

Нехай цікавляча нас подія А може з'явитися тільки спільно з однією з попарно неспільних подій H_1 , H_2 ,   ,H_n (рис. 10).

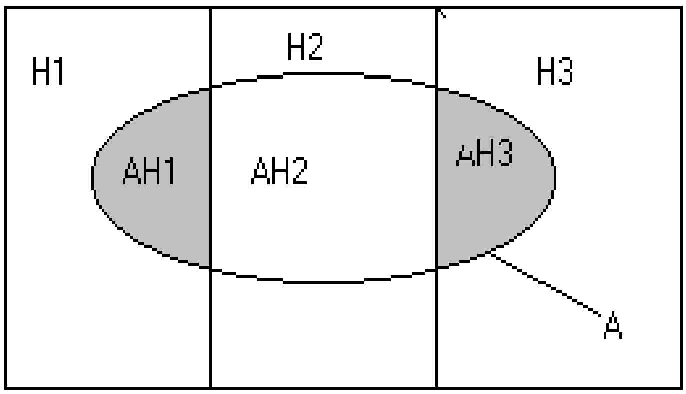


Рисунок 10

Тоді справедлива формула повної імовірності:

$$P(A) = P(H1) \cdot P_{H1}(A) + P(H2) \cdot P_{H2}(A) + \ldots + P(Hn) \cdot P_{Hn}(A)P(Hn). \qquad (12)$$

Ймовірність появи події А дорівнює сумі добутків імовірностей подій P(Hi) (i=1...n) на відповідні умовні імовірності подій $P_{Hi}(A)$.

Приклад 9. На трьох верстатах-автоматах штампуються однотипні деталі. Перший верстат штампує 45%, другий - 30%, і третій - 25% усіх деталей. Брак серед виготовлених деталей для кожного верстата відповідно дорівнює 2,5% , 2% і 1,5%. Знайти ймовірність того, що взята навмання зі складу деталь буде стандартною.

Рішення

Тут подія А - узята навмання зі складу деталь буде стандартною. Подія H_1 - деталь виготовлена на першому верстаті, H_2 - деталь виготовлена на другому верстаті. H_3 - деталь виготовлена на третьому верстаті. Обчислимо імовірності подій $P(H_i)$, i=1,2,3:

$$P(H1)=\frac{45\%}{100\%}=0,45,$$

$$P(H2)=\frac{30\%}{100\%}=0,3,$$

$$P(H3)=\frac{25\%}{100\%}=0,25.$$

Знаходимо умовні імовірності $P_{Hi}(A)$ - імовірності виготовлення стандартної деталі на і- му верстаті:

$$P_{H1}(A)=\frac{100\%-2,5\%}{100\%}=0,975,$$

$$P_{H2}(A)=\frac{100\%-2\%}{100\%}=0,98,$$

$$P_{H3}(A)=\frac{100\%-1,5\%}{100\%}=0,985.$$

Користуючись формулою (12), знаходимо P(A):

P(A)=0,45·0,975+0,3·0,98+0,25·0,985=0,979.

Відповідь

Ймовірність того, що взята навмання зі складу деталь буде стандартною, дорівнює 0,979.

1.6.2 Формула Байеса

Події H_1 , H_2 , … ,Hn часто називають гіпотезами. Тоді подія A відбувається при здійсненні однією з гіпотез. Нехай подія A уже відбулася. За умовою вона може відбутися спільно тільки з однією з гіпотез. Заздалегідь не відомо, яка з них здійснилася. Природно, що виникає питання про те, наскільки можлива кожна з гіпотез. Іншими словами, виникає задача відшукання умовних імовірностей гіпотез $P_A(H_i)$.

Вони знаходяться за формулою

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{Hi}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H2}(A) + \ldots + P(H_n)\cdot P_{Hn}(A)}. \qquad (13)$$

Це ***формула Байеса***.

Приклад 10. В умовах прикладу 9 відбулася подія А, тобто навмання узята зі складу деталь виявилася стандартною. На якому верстаті, найбільш ймовірно, вона була виготовлена? Порівняти умовні імовірності з відповідними їм імовірностями гіпотез.

Рішення

Визначимо умовні імовірності гіпотез, користуючись формулою (12):

$$P_A(H1) = \frac{0{,}45\cdot 0{,}975}{0{,}979} = 0{,}448;$$

$$P_A(H2) = \frac{0{,}3\cdot 0{,}98}{0{,}979} = 0{,}30;$$

$$P_A(H3) = \frac{0{,}25\cdot 0{,}985}{0{,}979} = 0{,}252.$$

Найбільш ймовірна перша гіпотеза - деталь виготовлена на першому верстаті. Вірність обчислень підтверджується рівністю:

$$P_A(H1) + P_A(H2) + P_A(H3) = 0{,}448 + 0{,}30 + 0{,}252 = 1.$$

Умовна ймовірність першої гіпотези зменшилася, другої - не змінилася, а третьої - збільшилася, тобто:

$$P_A(H1) < P(H1),\;\; P_A(H2) = P(H2),\;\; P_A(H3) > P(H3).$$

Ймовірності $P(H1), P(H2), P(H3)$ є додослідними (апріорними) імовірностями гіпотез, тобто висунутими до проведення досліду, а імовірності $P_A(H1), P_A(H2), P_A(H3)$ - післядослідними (апостепріорними) імовірностями гіпотез.

Відповідь

Якщо навмання узята зі складу деталь виявилася стандартною, то вона була виготовлена на 1-му верстаті з ймовірністю 0,448.

1.7 Повторення дослідів

Якщо проводять досліди, при яких ймовірність появи події А в кожнім є них не залежить від наслідків інших дослідів, то такі досліди називаються **незалежними** щодо події А.

1.7.1 Формула Бернуллі

Ймовірність того, що при n незалежних дослідах, у кожнім з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0<p<1$), подія А наступить рівно k раз (байдуже в якій послідовності) і дорівнює:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{чи } P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}. \qquad (14)$$

Імовірності того, що подія наступить:

а) менше k раз; б) більш k раз; в) не менше k раз; г) не більш k раз - знаходять відповідно за формулами:

а) $P_n(m<k) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(k-1);$

б) $P_n(m>k) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n);$

в) $P_n(m \geq k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n);$

г) $P_n(m \leq k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k).$

Приклад 11. Два рівносильних шахісти грають у шахи. Що імовірніше: виграти дві партії з чотирьох чи три партії із шести?

Рішення

Грають два рівносильних шахісти, значить ймовірність виграшу кожного дорівнює p=1/2, отже, ймовірність програшу q також дорівнює 1/2. Тому що у всіх партіях ймовірність виграшу постійна і байдуже, у якій послідовності будуть виграні партії, можна застосувати формулу Бернуллі. Знайдемо ймовірність того, що дві партії з чотирьох будуть виграні:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}.$$

Знайдемо ймовірність того, що будуть виграні три партії із шести:

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Тому що $P_4(2) > P_6(3)$, то ймовірніше виграти дві партії з чотирьох, ніж три партії із шести.

Відповідь

Ймовірніше виграти дві партії з чотирьох, ніж три партії із шести.

Приклад 12. Монету кидають п'ять разів. Знайти ймовірність того, що «герб» випадає: а) менш двох разів; б) не менш двох разів.

Рішення

а) $P = P_5(0) + P_5(1) = \frac{3}{16}$, б) $P = 1 - (P_5(0) + P_5(1)) = \dfrac{13}{16}.$

Відповідь

«Герб» випадає менш двох разів з ймовірністю $\dfrac{3}{16}$; не менш двох разів - $\dfrac{13}{16}$.

1.7.2 Найімовірніша кількість появ події в незалежних дослідах

Кількість k_0 (настання події в незалежних дослідах, у кожнім з яких ймовірність появи події дорівнює р) називається найімовірнішою, якщо ймовірність того, що подія наступить у цих іспитах k_0 разів перевищує (чи принаймні не менше) імовірності інших можливих наслідків дослідів.

Наймовірніша кількість визначається з подвійної нерівності:

$$np - q < k_0 < np + p,$$

причому:

1) якщо число $np - q$ дробове, то існує одне наймовірніше число k_0;

2) якщо число $np - q$ ціле, то існує два наймовірніших числа, а саме k_0 і $k_0 + 1$;

3) якщо число np ціле, то найімовірніше число $k_0 = np$.

Приклад 13. Випробується кожний з 15 елементів деякого приладу. Ймовірність того, що елемент витримає дослід, дорівнює 0,9. Знайти найімовірнішу кількість елементів, що витримають дослід.

Рішення

За умовою n=15; p=0,9; q=0,1. Знайдемо наймовірніше число k_0 з подвійної нерівності $np - q < k_0 < np + p$. Підставляючи дані задачі, маємо:

$15 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 < k_0 < 15 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$ або $13{,}4 < k_0 < 14{,}4$.

Тому що k_0 - ціле число, й оскільки між числами 13,4 і 14,4 знаходиться одне ціле число, а саме 14, то шукане наймовірніше число k_0 дорівнює 14.

Відповідь

Наймовірніше кількість елементів, що витримають іспит, дорівнює 14.

1.7.3 Асимптотичні формули для формули Бернуллі

При великій кількості дослідів n обчислення за формулою Бернуллі (14) занадто складне. У цьому випадку для розрахунків використовуються різні асимптотичні формули.

Асимптотичною називається наближена формула, точність якої зростає із зростом кількості іспитів n й у межі при $n \to \infty$ формула стає точною.

Для формули Бернуллі є дві локальні асимптотичні формули, що дозволяють обчислити приблизно *Pn(k),* і одна інтегральна формула, що дозволяє приблизно обчислити $Pn(k1 \le k \le k2)$.

Локальна формула Муавра-Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi(x), \qquad (14а)$$

де $x = \dfrac{k-\alpha}{\sigma}$; $\alpha = np$; $\sigma = \sqrt{npq}$.

Функція $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ затабульована (додаток А) для значень $0 \le k \le 4$. При x>4 беруть $\varphi(x)=0$; функція парна: $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Локальна формула Пуассона

$$P_n(k)\approx\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}, \qquad (14б)$$

де $\alpha = np$.

Інтегральна формула Муавра – Лапласа

$$P_n(k_1 \le k \le k_2)\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1), \qquad (14в)$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx$ - функція Лапласа;

$x_1=\frac{k_1-\alpha}{\sigma}$, $x_2=\frac{k_2-\alpha}{\sigma}$, $\alpha = np$, $\sigma=\sqrt{npq}$.

Функція $\Phi(x)$ затабульована (додаток Б) для значень 0≤x≤5.

При x>5 беруть $\Phi(x)=0{,}5$; функція непарна: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Точність формул (14а, 14б , 14в) залежить не тільки від кількості дослідів, але і від імовірності р появи події А в кожнім досліди. Однак на практиці можна керуватися наступним грубим правилом:

- при n<10 локальні значення $P_n(k)$ обчислювати за точною формулою (14);

- при n>10 і р≥0,1 - за формулою (14а);

- при n>10 і p<0,1 - за формулою (14б);

- при n>10 значення $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ обчислюються за формулою (14в).

Приклад 14. Знайти ймовірність того, що подія А наступить рівно 70 разів у 243 дослідах, якщо ймовірність появи цієї події в кожному досліди дорівнює 0,25.

Рішення

За умовою n=243; k=70; p=0,25; q=0,75. Тому що n=243 досить велике число, скористаємося локальною формулою (14а):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi(x) \ ,$$

де $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Знайдемо значення x:

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{70-243\cdot 0{,}25}{\sqrt{243\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}} = \frac{9{,}25}{6{,}75} = 1{,}37.$$

За таблицею А.1 (додаток А) знайдемо $\varphi(1{,}37) = 0{,}156.$

Шукана ймовірність $P_{243}(70) = \dfrac{1}{6{,}75}\cdot 0{,}1561 = 0{,}02331.$

Відповідь

Ймовірність того, що подія А наступить 70 разів у 243 дослідах, дорівнює 0,02331.

Приклад 15. Ймовірність появи події в кожнім з 10 незалежних іспитів постійна і дорівнює 0,8. Знайти імовірності того, що подія з'явиться: 1) не менш 75 разів і не більш 90 разів; 2) не менш 75 разів; 3) не більш 74 разів.

Рішення

Застосуємо інтегральну формулу Муавра-Лапласа (14в):

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $\Phi(x)$ - функція Лапласа;

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

1) За умовою n=100; p=0,8; q=0,2; k1=75; k2=90 .

Обчислимо x1 і x2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5.$$

З огляду на те, що функція Лапласа непарна, тобто Ф(-x)=-Ф(x), одержимо:

$$P_{100}(75,90) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

За таблицею Б.1 (додаток Б) знайдемо:

Ф(2,5)=0,4938; Ф(1,25)=0,3944.

Шукана ймовірність

$$P_{100}(75,90) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

2) Вимога, щоб подія з'явилася не менш 75 разів, означає, що кількість появ події може дорівнювати 75, чи 76 , .. , чи 100 . Таким чином, у розглянутому випадку потрібно взяти:

$k_1 = 75, \quad k_2 = 100.$

Тоді

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5.$$

За таблицею Б.1 (додаток Б) знайдемо :

Ф(1,25)=0,3944.

Шукана ймовірність $P_{100}(75{,}100) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944.$

3) Подія «подія А з'явилася не менш 75 разів» і «подія А з'явилася не більш 74 разів» протилежні, тому сума імовірностей цих подій дорівнює 1. Отже, шукана ймовірність:

$$P_{100}(0{,}74) = 1 - P_{100}(75{,}100) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$$

Відповідь

Ймовірність появи події не менш 75 разів і не більш 90 разів дорівнює 0,8882; не менш 75 разів – 0,8944; не більш 74 разів – 0,1056.

Приклад 16. По деякій цілі роблять 50 незалежних пострілів. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,04. Знайти приблизно ймовірність того, що в ціль потрапить: 1) жодного снаряда; 2) один снаряд; 3) два снаряди; 4) не менш двох снарядів.

Рішення

Скористаємося формулою Пуассона (14.б):

$$P_n(k) \approx \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha},$$

де $\alpha = np = 50 \cdot 0{,}04 = 2.$

1) $k = 0 \quad P_{50}(0) = \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = 0{,}135;$

2) $k = 1 \quad P_{50}(1) = \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} = 0{,}271;$

3) $k = 2 \quad P_{50}(2) = \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = 0{,}271;$

4) $k \geq 2, \quad P_{50}(k \geq 2) = 1 - P_{50}(0) - P_{50}(1) = 1 - 0{,}135 - 0{,}271 = 0{,}594.$

Відповідь

Ймовірність того, що в ціль не потрапить жодного снаряда, дорівнює 0,135; потрапить один снаряд – 0,271; два снаряди – 0,271; не менш двох снарядів – 0,594.

1.8 Найпростіший потік подій

Потік подій - послідовність подій, що настають у випадкові моменти часу.

Найпростіший потік подій має три властивості:

1) **стаціонарність** - ймовірність появи k подій потоку за проміжок часу t залежить тільки від тривалості проміжку часу і не залежить від початку його відліку;

2) **відсутність наслідку** - ймовірність появи k подій потоку за проміжок часу тривалістю t не залежить від того, чи з'явилися події потоку до початку відліку проміжку часу;

3) **ординарність** - поява більше однієї події за малий проміжок часу практично неможлива.

Середнє число подій потоку за одиницю часу називають **інтенсивністю потоку** і позначають λ (вибір одиниці відліку часу довільний: секунда, хвилина, година, доба і т.д.).

Ймовірність появи k подій потоку за час t визначається формулою Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \qquad (15)$$

Приклад 17. У радіоапаратурі за 10000 годин безупинної роботи відбувається заміна 10 елементів. Яка ймовірність виходу з ладу радіоапаратури за 100 годин безупинної роботи?

Рішення

Відмовлення елементів являє собою найпростіший потік подій з інтенсивністю =10/10000=0,001год$^{-1}$. Радіоапаратура вийде з ладу, якщо відмовить хоча б один елемент, тобто якщо кількість відмовлень буде дорівнювати k=1 чи k=2, чи k=3, чи k=4, і т.д.. Позначимо через А подію «відмовить хоча б один елемент». Тоді протилежна подія $\overline{A}$ - «не відмовить жоден елемент» (k=0).

Скористаємося формулою (6):

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

За формулою (15) при k=0 знаходимо:

$$P(\overline{A}) = P_t(0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-0,001 \cdot 100} = e^{-0,1} = 0,9048.$$

Отже, ймовірність виходу радіоапаратури з ладу за 100 годин безупинної роботи дорівнює P(A)=1-0,9048=0,0952.

Відповідь

Радіоапаратура вийде з ладу за 100 годин безупинної роботи з ймовірністю 0,0952.

2 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

На відміну від випадкової події А випадкова величина Х характеризується своїм числовим значенням x (порівняти “сонячний день”- випадкова подія; “кількість сонячних днів у 1998 році” - випадкова величина).

Випадкові величини бувають **дискретними** і **неперевними.** Дискретні випадкові величини набувають окремих ізольованих числових значень, які можна перенумерувати: x1, x2, . . . ,xn , . . .

Неперевні випадкові величини можуть набувати усіх значень з деякого проміжку [a, b].

2.1 Закони розподілу випадкових величин

Закон розподілу випадкової величини - це повна інформація про цю випадкову величину, тобто мають бути відомі всі значення, яких набуває випадкова величина і всі імовірності, з якими ці значення беруться.

Для дискретної випадкової величини такий закон можна задати **таблицею розподілу**, у верхньому рядку якої перелічені значення, яких набуває випадкова величина, а в нижньому - відповідні імовірності (табл.1).

Таблиця 1

X	x_1	x_2	. . .	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	. . .	p_n

Основна властивість таблиці: сума імовірностей за всіма індексами дорівнює одиниці

$$\sum P_i = 1. \qquad (16)$$

Для неперервної випадкової величини закон розподілу задається **функцією розподілу** F(x), рівної імовірності того, що випадкова величина X набуде значення менше x:

$$F(x)=P(X<x),$$

або **щільністю розподілу** f(x), що має наступний сенс:

f(x) - це коефіцієнт пропорційності при підрахунку імовірності влучення випадкової величини в малий проміжок (x; x+dx):

$$P(x<X<x+dx)=kdx;\ k=f(x),$$

$$\text{або } P(x<X<x+dx)=f(x)dx.$$

Функція розподілу F(x) і щільність розподілу f(x) зв'язані співвідношеннями:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \qquad 17)$$

$$f(x)=F'(x). \qquad 18)$$

Властивості функції розподілу F(x):

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) F(x) неспадна функція, тобто, якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$;

3) ймовірність влучення неперевної випадкової величини в проміжок (a,b) обчислюється за формулою

$$P(a \le x < b) = F(b) - F(a).$$

Властивості щільності розподілу f(x):

1) $f(x) \ge 0$;

2) ймовірність влучення неперевної випадкової величини в проміжок (a,b) обчислюється за формулою

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Для неперевної випадкової величини:

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b).$$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

2.2 Числові характеристики випадкової величини

Математичне сповідання- це середнє значення випадкової величини. Має позначення M(X) чи $\overline{X}$:

- для дискретної випадкової величини –

$$\overline{X} = M(X) = \sum_i x_i p_i; \qquad (19)$$

- для неперервної випадкової величини –

$$\overline{X} = M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \qquad (19a)$$

Дисперсія характеризує, наскільки сильно розсіяна випадкова величина навколо свого середнього значення. Позначається D(X):

- для дискретної випадкової величини –

$$D(X) = \sum_i [x_i - M(X)]^2 p_i; \qquad (20)$$

- для неперервної випадкової величини –

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx. \qquad (20a)$$

Корінь квадратний з дисперсії називається **середнім квадратич-**

ним відхиленням і позначається σ:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \tag{21}$$

Приклад 18. Дискретна випадкова величина X задана таблицею 2 розподілу

Таблиця 2

X	0	1	3
$P(X = x_i)$	P_1	1/4	1/4

Знайти ймовірність P_1, функцію розподілу F(x), $P(-1 \le X < 1{,}5)$ – ймовірність влучення випадкової величини в проміжок [-1;1,5], математичне сповідання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Рішення

Ймовірність P_1 знаходимо за формулою $\sum P_i = 1$:

$p_1 + 1/4 + 1/4 = 1.$

Отже, $P_1 = 1/2$.

График функції F(x) наведений на рис. 11.

Для дискретної випадкової величини функція розподілу F(x) має стрибки в точках $x_{i\,,}$ рівні p_i:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{при} \ x \le 0, \\ 1/2, \ \textit{при} \ 0 < x \le 1, \\ 3/4, \ \textit{при} \ 1 < x \le 3, \\ 1, \ \textit{при} \ x > 3. \end{cases}$$

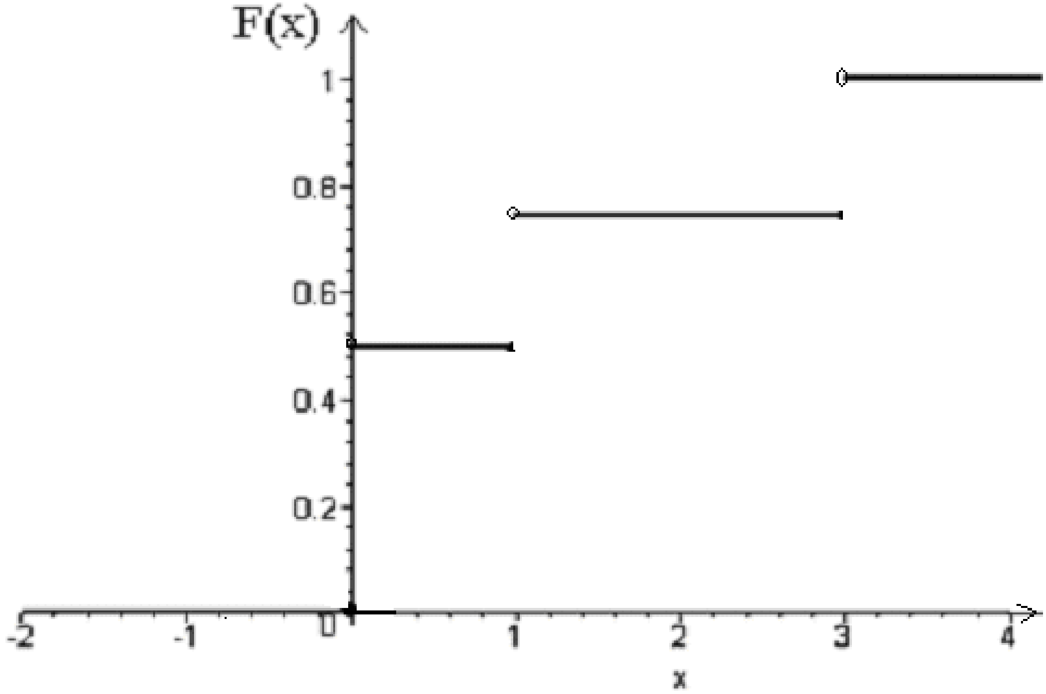


Рисунок 11

Ймовірність влучення випадкової величини в проміжок [-1;1,5] дорівнює

$P(-1 \leq X < 1{,}5) = F(1{,}5) - F(-1) = 3/4 - 0 = 3/4 = 0{,}75.$

Математичне чекання знаходимо за формулою

$$\overline{X} = M(X) = \sum_{1} x_i p_i ,$$

$M(X) = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/4 = 1.$

Дисперсію знаходимо за формулою

$$D(X) = \sum_{1} [x_i - M(X)]^2 p_i ,$$

$D(X) = (0-1)^2 \cdot 1/2 + (1-1)^2 \cdot 1/2 + (3-1)^2 \cdot 1/4 = 1{,}5.$

Середнє квадратичне відхилення знаходимо за формулою

$$\sigma = \sqrt{D(X)}:$$

$\sigma = \sqrt{1{,}5} = 1{,}225.$

Приклад 19. Випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 1, \\ ax, & при\ 1 \le x < 2, \\ 0, & при\ x \ge 2. \end{cases}$$

Знайти параметр *a*, функцію розподілу F(x), математичне сподівання й ймовірність влучення величини в проміжок [1; 1,5].

Рішення

Параметр *a* знаходимо, виходячи з властивості 3 функції f(x):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} axdx + \int_{2}^{\infty} 0dx =$$

$$= a\int_{1}^{2} xdx = a\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = a(2 - 1/2) = \frac{3}{2}a.$$

Отже, 3/2a = 1, a = 2/3.

Функцію F(x) знаходимо за формулою (17):

якщо $x < 1$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0;$

якщо $1 \le x < 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{1}^{x} f(x)dx = \frac{2}{3}\int_{1}^{x} xdx = \frac{2}{3}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^x =$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2 - 1}{3};$$

якщо $x \ge 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{x} f(x)dx =$

$$= 0 + \frac{2}{3}\cdot\int_{1}^{2} xdx + 0 = \frac{2}{3}\cdot\left.\frac{x}{2}\right|_1^2 = 1.$$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x<1,\\ (x^2-1)/3, & при\ 1\le x<2,\\ 1, & при\ x\ge 2.\end{cases}$$

Математичне сподівання знайдемо за формулою (14.а):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{1}^{2} x\cdot\frac{2}{3}xdx=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{2}{9}\cdot(8-1)=\frac{14}{9}.$$

Ймовірність $P(1\le x\le 1{,}5)$ знаходимо за властивістю 3 функції F(x):

$$P(1\le x\le 1.5)=F(1{,}5)-F(1)=\frac{1{,}5^2-1}{3}-0=\frac{1{,}25}{3}=0{,}416.$$

2.3 Нормальний розподіл

Нормальний розподіл виникає завжди, коли сумують велику кількість випадкових доданків, байдуже як розподілених, головне щоб жоден доданок не був домінуючим. Усі природні процеси формуються саме так: на деякий параметр накладається багато малих випадкових впливів, від цього цей параметр виявляється нормально розподіленим. Цим пояснюється велике прикладне значення нормального розподілу: технологічні погрішності, погрішності приладів і т.п. як правило розподілені за нормальним законом.

2.3.1 Щільність нормального розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}},$$

де α – математичне сподівання, σ-середнє квадратичне відхилення (якщо мова йде про прилад, то σ - його точність). На рис.12 наведений графік щільності розподілу f(x) при $\alpha = 2$, $\sigma = 1$.

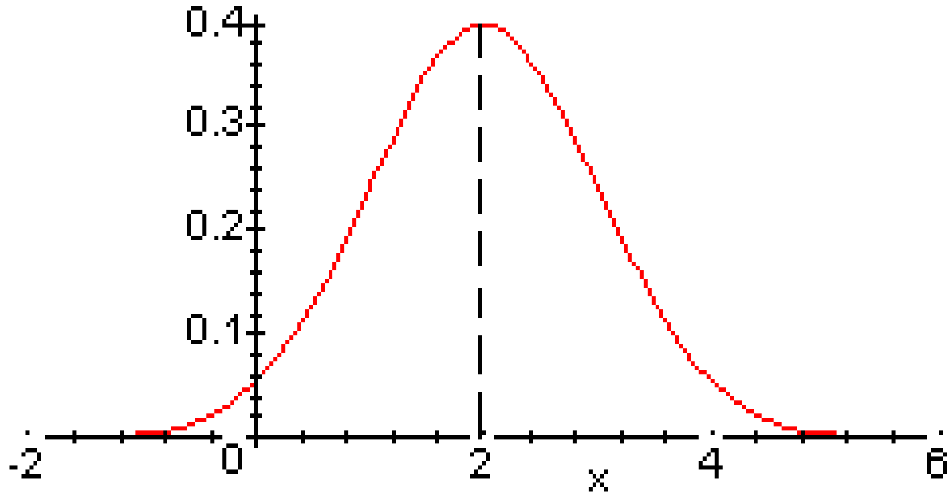


Рисунок 12

2.3.2 Функція нормального розподілу

$$F(x) = 1/2 + \Phi(x_{норм}),$$

де $x_{норм} = \frac{x-\alpha}{\sigma}$, Ф(x) – функція Лапласа.

Значення функції Ф(x) обчислюються за таблицею Б.2 (додаток

Б). З приводу властивостей функції Ф(х) дивіться в розділі “Інтегральна формула Муавра-Лапласа” (формула 14.в). На рис.13 приведений графік функції розподілу F(x) при $\alpha = 2,\ \sigma = 1$.

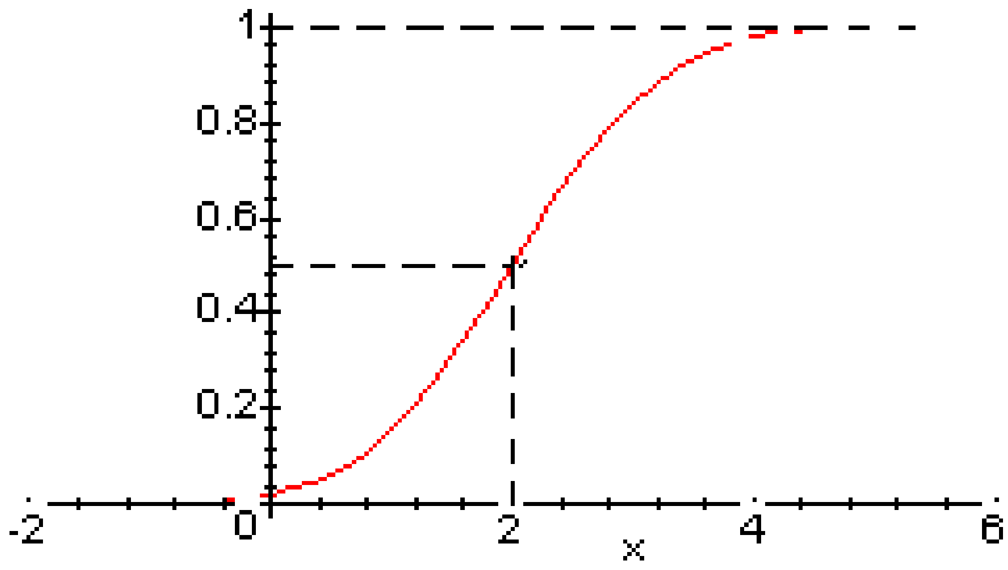


Рисунок 13

2.3.3 Типові задачі на нормальний розподіл

Задача 1. Ймовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини в заданий проміжок $P(a \le \xi < b)$ обчислюється за формулою

$$P(a \le \xi < b) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{22}$$

де $x_1 = \dfrac{a-\alpha}{\sigma}$; $x_2 = \dfrac{b-\alpha}{\sigma}$.

Задача 2. Ймовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого середнього значення не більше ніж на задану величину δ, обчислюється за формулою

$$P(|\xi-\alpha|<\delta)=2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}). \quad (23)$$

Задача 3. Правило 3-х сигм: ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання не більш ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення 3σ, дорівнює одиниці (точніше 0,9974), тобто ця подія практично достовірна.

$$P(\alpha-3\sigma\le\xi<\alpha+3\sigma)\approx 1. \quad (24)$$

Приклад 20. Контрольований розмір деталей, виготовлених на верстаті-автоматі, знаходиться в межах від 97 мм до103 мм. Допуск складає 1,5 мм. Знайти відсоток придатних деталей, якщо верстат відрегульований правильно.

Рішення

Середина проміжку (97; 103) є математичним сподівання контрольованого розміру деталей: $\alpha=100.$ Тому що верстат відрегульований правильно, то $\alpha=100$ і є розмір за кресленням. Відповідно до правила 3-х сигм (24), вірний розмір виготовлених деталей є випадкова величина $\xi,$ укладена в межах $\alpha-3\sigma\le\xi<\alpha+3\sigma,$ у нашому випадку це $97\le\xi<103.$ З порівняння двох останніх виражень видно, що$\sigma=1.$ Допуск $\delta=1{,}5.$ За формулою (22) знаходимо ймовірність потрапити в допуск:

$$P(|\xi - \alpha| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{1,5}{1}) = 2 \cdot \Phi(1,5) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664.$$

Переводимо ймовірність у відсотки: 0,8664·100%=86,64%.

Відповідь: придатна продукція складає 86,64%.

3 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

3.1 Точкові оцінки числових характеристик. Інтервальні оцінки числових характеристик нормально розподіленої випадкової величини

Нехай після проведення n дослідів отримано n значень випадкової величини X: x1, x2, ..., xn. Ці значення називають вибіркою обсягу n. Тоді математичне сподівання M(X), дисперсія D(X) і середнє квадратичне відхилення σ оцінюються за формулами:

$$M^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad 25)$$

$$D^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M^*)^2, \qquad 26)$$

$$\sigma^* = \sqrt{D^*}. \qquad 27)$$

M*, D* і σ^* називають точковими оцінками числових характеристик випадкової величини.

У результаті проведення n дослідів одержуємо випадкові значення величини X: x1, x2, ... ,xn; в іншій серії дослідів вони будуть трохи іншими. Тому M* і D* самі є випадковими величинами і тому їх потрібно оцінювати за допомогою довірчих інтервалів.

Довірчим інтервалом називається інтервал, що з імовірністю γ накриває оцінюваний параметр. Параметр γ називають надійністю інтервальної оцінки.

Якщо випадкова величина розподілена за нормальним законом, то довірчий інтервал для оцінки невідомого значення M(X)=α знаходиться за формулою

$$M^* - t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} < \alpha < M^* + t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}. \qquad (28)$$

Величину t_γ визначаємо за таблицею В.1 (додаток В); значення t_γ залежить від обсягу вибірки n і від надійності γ: $t_\gamma = t(\gamma, n)$.

Середнє квадратичне відхилення σ оцінюється за допомогою одного з довірчих інтервалів:

$$\sigma^*(1-q) < \sigma < \sigma^*(1+q), \quad \text{при q<1}, \qquad (29)$$

$$0 < \sigma < \sigma^*(1+q), \quad \text{при q>1}, \qquad (29а)$$

де q знаходять за таблицею Г.4 (додаток Г): $q = q(\gamma, n)$.

Приклад 21. За даними вибірки обсягу n=16 знайдене вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma = 1$. Припускаючи, що досліджувана величина розподілена за нормальним законом, знайти довірчий інтервал для σ з надійністю $\gamma = 0{,}95$.

Рішення

За таблицею Г.1(додаток Г) при $\gamma = 0{,}95$ і n=16 знаходимо $q = 0{,}44.$ Тому що $q < 1,$ то довірчий інтервал знаходиться за формулою (29)

$0{,}56 < \sigma < 1{,}44.$

Відповідь

Довірчий інтервал для σ з надійністю $\gamma = 0{,}95$ дорівнює $0{,}56 < \sigma < 1{,}44.$

4 ЕЛЕМЕНТИ КОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ

Допустимо, є підстава припускати, що дві величини x і y зв'язані функціональною залежністю y=f(x) і для визначення виду цієї залежності проведена серія з n іспитів, у яких виконувалися одночасні виміри x і y: (x1,y1), (x2,y2), ... ,(xn,yn) . Через усілякі випадкові впливи (вібрації, температури і т.п.) функціональна залежність, навіть якщо вона і є, буде перекручена. Якщо точки (xi,yi) нанести на графік, то одержимо зображення, що складається з точок і нагадує розмиту лінію. Це зображення називається кореляційним полем. За ним іноді візуально вдається встановити форму вихідної залежності y=f(x). Якщо залежність між x та y припустити лінійною –

$$y = kx + b, \tag{30}$$

то коефіцієнти k і b підбирають так, щоб сума квадратів відхилень експериментальних точок (xi,yi) від прямої (30) була мінімальною (метод найменших квадратів).

У цьому випадку рівняння називається рівнянням лінійної регресії. Для обчислення коефіцієнтів k і b треба спочатку обчислити такі вибіркові характеристики:

1) середнє значення x і y:

$$\overline{x^*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \overline{y^*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

2) середні квадратичні відхилення x і y:

$$\sigma_x^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}^*)^2}; \quad \sigma_y^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}^*)^2}.$$

3) Коефіцієнт кореляції:

$$r^* = \frac{1}{(n-1)\cdot\sigma_x^*\cdot\sigma_y^*}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}^*)(y_i - \overline{y}^*).$$

Значення коефіцієнтів k і b в рівнянні (30) обчислюється за формулами:

$$k = r^*\cdot\frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*}; \quad b = \overline{y^*} - \overline{x^*}\cdot r^*\cdot\frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*}. \qquad 31)$$

Модуль коефіцієнта кореляції $\left|r^*\right|$ характеризує щільність лінійного зв'язку між змінними x і y. Для характеристики щільності лінійного зв'язку прийнята наступна градація (табл.3)

Таблиця 3

Модуль $\left\|r^*\right\|$	Щільність лінійного зв'язку
0,9 .. 1,0	зв'язок тісний
0,6 .. 0,9	зв'язок достатній
0,3 .. 0,6	зв'язок слабкий
0 .. 0,3	зв'язок відсутній

Приклад 22. Дані іспиту наведені в табл. 4. Вважаємо, що x і y зв'язані лінійною залежністю. Знайти рівняння лінійної регресії, визначити щільність лінійного зв'язку між x і y, побудувати на одному графіку кореляційне поле і лінію регресії.

Таблиця 4

X	1,033	0,012	0,045	0,243	0,266	0,302	0,451	1,041	1,423	1,914
Y	1,83	0,58	1,34	1,34	1,64	1,65	1,91	1,96	2,08	2,18

У таблиці наведені 10 пар значень (xi,yi), тому обсяг вибірки n=10. Знаходимо вибіркові числові характеристики:

$$\overline{x^*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0{,}673;$$

$$\overline{y^*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 1{,}651;$$

$$\sigma_x^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}^*)^2} = 0{,}644324;$$

$$\sigma_y^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}^*)^2} = 0{,}471297;$$

$$r^* = \frac{1}{(n-1)\cdot\sigma_x^*\cdot\sigma_y^*}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}^*)(y_i - \overline{y}^*) = 0{,}783278.$$

Так як, $0{,}6 \le 0{,}783278 \le 0{,}9$, то зв'язок між x і y достатній.

Обчислюємо коефіцієнти k і b:

$$k = r^*\cdot\frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*} = 0{,}573; \quad b = \overline{y^*} - \overline{x^*}\cdot r^*\cdot\frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*} = 1{,}265.$$

Рівняння лінійної регресії:

$$y = 0{,}573x + 1{,}265.$$

Побудуємо кореляційне поле і лінію регресії на одному рисунку:

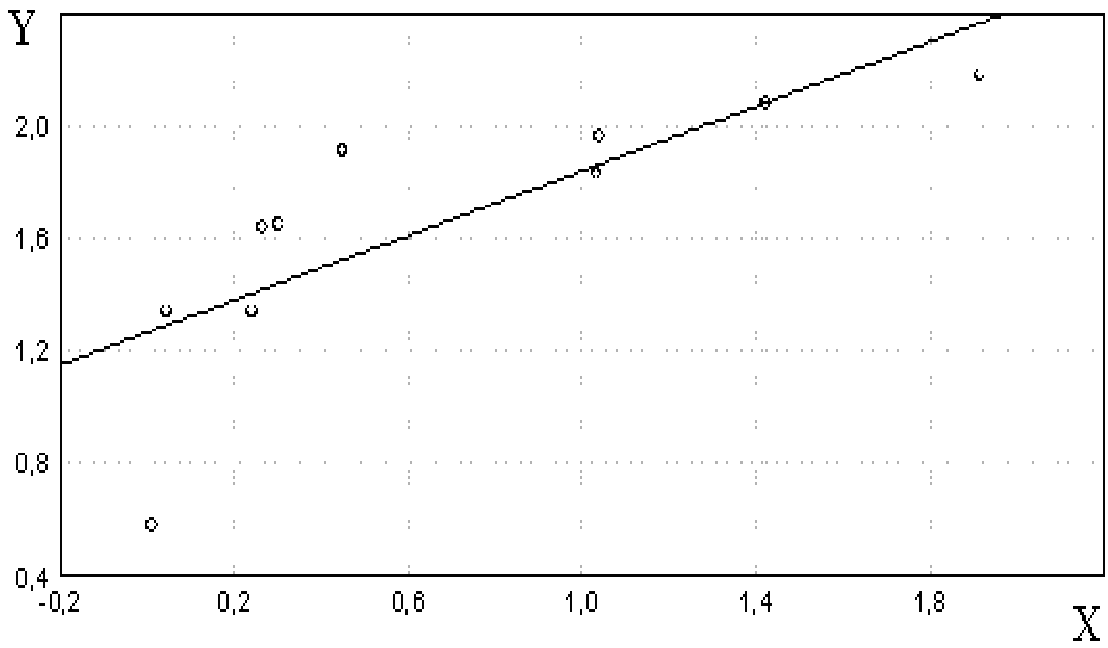


Рисунок 14

Відповідь

Рівняння лінійної регресії $y = 0{,}573x + 1{,}265$; коефіцієнт кореляції $r^* = 0{,}783278$.

5 ПРАВИЛА ВИКОНАННЯ Й ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОГО ВІДДІЛЕННЯ

При виконанні контрольних робіт необхідно строго дотримувати зазначених нижче правил. Роботи, виконані без дотримання цих правил, не перевіряються і повертаються студенту для перероблення.

1 Контрольна робота має бути виконана в окремому зошиті в кліточку чорнилом будь-якого кольору, крім червоного. Необхідно залишати поля шириною 4-5 см для зауважень рецензента.

2 На обкладинці зошита мають бути ясно написані прізвище студента, його ініціали, навчальний номер (шифр), назва дисципліни.

3 У роботі мають бути виконані всі задачі, зазначені в завданні, за своїм варіантом. Контрольні роботи, що містять не всі задачі завдання, а також задачі не свого варіанта, не перевіряються.

4 Перед рішенням кожної задачі треба цілком виписати її умову.

5 Рішення задач варто викладати докладно й акуратно, пояснюючи і мотивуючи всі дії під час рішення і роблячи необхідні креслення.

6 Після одержання прорецензованої роботи, як не зарахованої так і зарахованої, студент повинний виправити усі відзначені рецензентом помилки і недоліки і виконати всі рекомендації рецензента. Якщо рецензент пропонує внести в рішення задач ті чи інші виправлення чи доповнення і надіслати їх для повторної перевірки, то це варто зробити в короткий термін.

При виправленнях, що висилаються, повинна обов'язково знаходитися рецензована робота і рецензія на неї. Тому рекомендується при виконанні контрольної роботи залишати наприкінці зошита кілька чистих аркушів для всіх доповнень і виправлень відповідно до вказівок рецензента. Вносити виправлення в сам текст роботи після її рецензування забороняється.

5.1 Вибір варіанта

Варіант вибирається за номером залікової книжки відповідно до наступної таблиці 5:

Таблиця 5

Передостання цифра залікової книжки	**Остання цифра залікової книжки**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	25
1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	10
2	21	22	23	24	25	1	2	3	4	20
3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	5
4	16	17	18	19	20	21	22	23	24	15
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	25
6	11	12	13	14	15	16	17	18	19	10
7	21	22	23	24	25	1	2	3	4	20
8	6	7	8	9	10	11	12	13	14	5
9	16	17	18	19	20	21	22	23	24	15

5.2 Індивідуальні завдання

Варіант 1

1 На складі знаходиться 90 придатних і 10 дефектних деталей. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання взятих деталей немає дефектних.

2 Відділ технічного контролю перевіряє деякі вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб нестандартний, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що нестандартним буде тільки четвертий перевірений виріб.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,1; P2=0,2; P3=0,9, P4=0,3, розрахувати надійність схеми (рис.15).

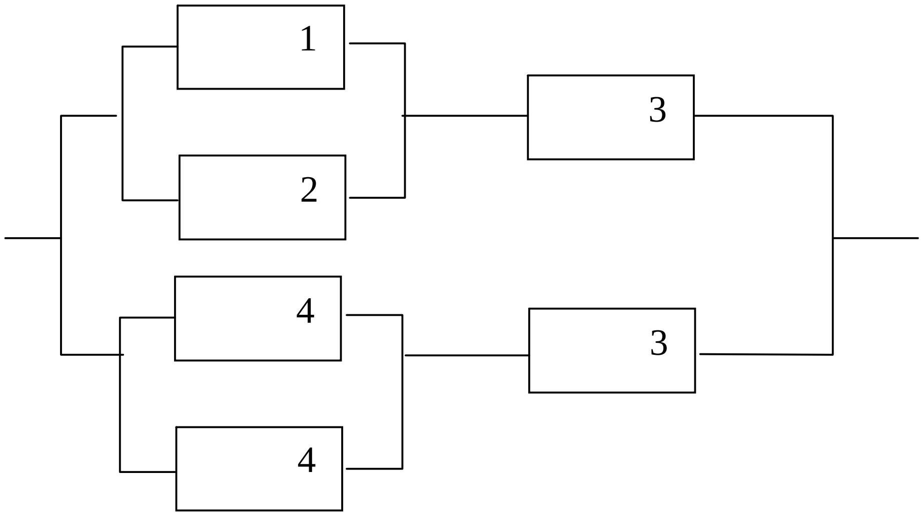


Рисунок 15

4 ВТК проводить контроль приладів, що випускаються. Прилади мають приховані дефекти з ймовірністю 0,15. При перевірці наявність дефекту виявляється з імовірністю 0,9. Крім того, з імовірністю 0,05 доброякісний прилад може бути помилково визнаний дефектним. При виявленні дефекту прилади бракуються. Визначити ймовірність того, що забракований прилад має дефект.

5 Ймовірність влучення в десятку для даного стрільця при одному пострілі дорівнює 0,2. Знайти ймовірність влучення в десятку не менш трьох разів при десятьох пострілах.

6 При транспортуванні та вантажно-розвантажувальних роботах 6% цеглин виявилися битими. Яка ймовірність того, що з партії в 1000 цеглин битими виявиться не більш 70 штук?

7 При масовому виробництві інтегральних схем ймовірність появи браку дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що в партії з 600 виробів бракованими будуть не більш ніж три вироби; рівно чотири вироби.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл.6):

Таблиця 6

x_i	-4	0	2	3	5
P_i	0,1	0,2	0,1	***p***	0,3

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P (0≤<X<3).

9 Щільність імовірності розподілу деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 1, \\ Ax, \quad 1 \le x < 2, \\ 0, \ x \ge 2. \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт A, функцію розподілу, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

10 Відповідно до статистичних спостережень для даного регіону в липні-серпні місяцях відношення витрат на харчові продукти до інших витрат у середньому складає 2,4. Середнє квадратичне відхилення дорівнює 0,2.

1) Знайти ймовірність того, що в поточному році відхилення відношення витрат від середнього значення не перевищить 0,3.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу

для випадкового значення відхилення. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Максимальна товщина снігового покрову за останні 15 років у даній місцевості за даними спостережень дорівнювала (у сантиметрах):

50	48	52	53	54	61	52	60
50	48	54	53	50	46	53	61

Знайти довірчі інтервали для середнього значення товщини снігового покриву з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Мається на увазі, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 7 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 7

X	41	50	81	104	120	139	154	180	208	241
Y	4	8	10	14	15	20	19	23	25	30

Варіант 2

1 Із 30 деталей, серед яких 10 вищої якості, випадковим образом вибирають 20 деталей. Яка ймовірність того, що серед них виявиться 7 деталей вищої якості?

2 Лінією зв'язку, що має чотири приймально-передавальних пункти, передається повідомлення. Ймовірність того, що повідомлення буде перекручено на першому, другому, третьому і четвертому пунктах відповідно дорівнює 0,1; 0,15; 0,2 і 0,25. Яка ймовірність одержання неспотвореного повідомлення?

3 За заданою надійністю елементів: Р1=Р2=0,9; Р3=0,8, Р4=0,1, розрахувати надійність схеми (рис 16).

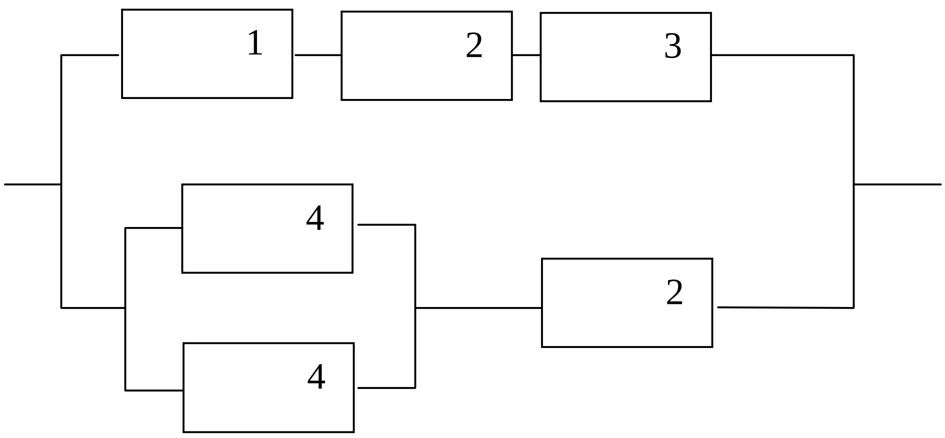


Рисунок 16

4 На деякому заводі перший верстат виробляє 40% усієї продукції, а другий - іншу. У середньому 9 з 1000 деталей, вироблених першим верстатом, виявляються бракованими, а для другого верстата - 1 деталь з 250. Випадково обрана з усієї денної продукції деталь виявилася за результатами перевірки бракованою. Яка ймовірність того, що вона зроблена на першому верстаті?

5 Гравець накидає кільця на кілочок, ймовірність удачі при цьому дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що із шести кілець на кілочок потраплять хоча б два.

6 У деякому місті в середньому за рік народжуються 1200 дітей. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Визначити ймовірність того, що в даному місті за рік хлопчиків народиться менше, ніж дівчинок.

7 Середнє число викликів мобільної телефонної станції 1,7 за 30 хвилин. Яка ймовірність, що за годину надійде рівно два виклики, більш двох викликів?

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл.8):

Таблиця 8

x_i	-1	1	2	3	5
P_i	0,2	0,1	***p***	0,1	0,2

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P(0≤X<3).

9 Щільність імовірності розподілу деякої випадкової величини задається в такий спосіб:

$$f(x)=\begin{cases}0, \; x<1,\\ A(2x+1), \quad 1\le x<2,\\ 0, \; x\ge 2.\end{cases}$$

Визначити коефіцієнт A, функцію розподілу, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

10 Відповідно до документації розмір кулькопідшипників повинний дорівнювати 100 мм. Середньоквадратичне відхилення розміру кулькопідшипників дорівнює 1 мм. Припустиме відхилення розміру кулькопідшипнику від 100 мм не повинно перевищувати 1,5 мм, інакше кулькопідшипник бракується.

1) Знайти відсоток браку.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу розміру випадково взятих кулькопідшипників. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Кількость працівників торгових підприємств міста в розрахунку на 100000 грн. товарообігу наведені нижче:

12	12	13	13	13	13	14	14	14	14
15	15	15	16	16	17	17	18	19	20

Знайти довірчі інтервали для середнього значення числа працівників з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99.Припустити, що дані в таблиці розподілені за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 9 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле ;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії ;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 9

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	16,50	13,75	13,31	12,50	12,75	12,35	11,83	10,50	9,83

Варіант 3

1 У партії з десяти деталей - вісім стандартних. Визначити ймовірність того, що серед двох випадково взятих з партії деталей є хоча б одна стандартна.

2 Автомобіль оснащений двома протиугінними пристосуваннями: механічним і електричним. Механічне спрацьовує з імовірністю 0,9, а електричне з імовірністю 0,8. Яка ймовірність, що автомобіль не уженуть?

3 За заданою надійністю елементів: Р1=Р2=0,8; Р3=0,1, Р4=0,2 розрахувати надійність схеми (рис. 17).

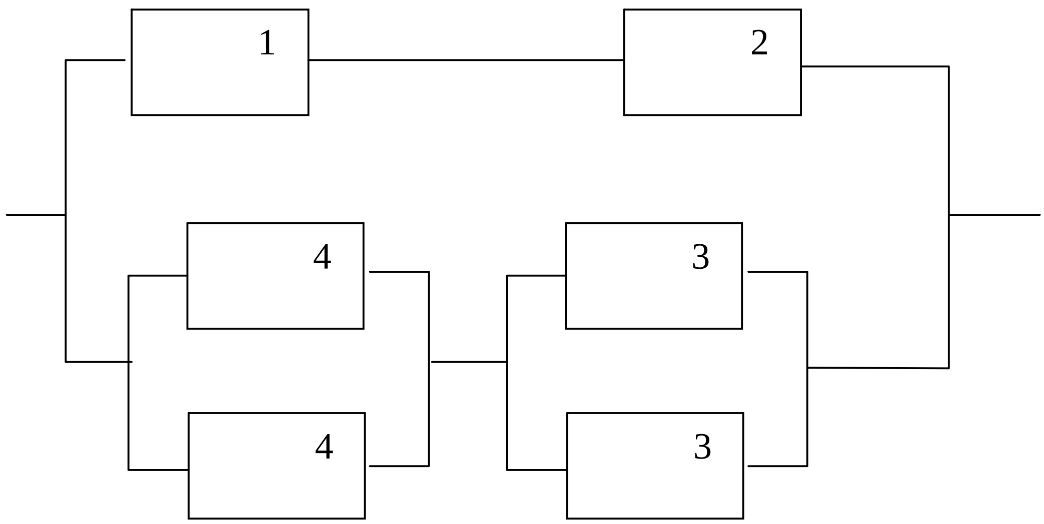


Рисунок 17

4 Ймовірність того, що при буравленні шпари будуть знайдені ґрунтові води, дорівнює 0,3. Ґрунтові води супроводжують тверді породи з імовірністю 0,6. Там, де ґрунтових вод немає, тверді породи зустрічаються з імовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що при буравленні будуть виявлені тверді породи.

5 Ймовірність того, що зразок цементного каменю витримає десять циклів заморожування-відтавання дорівнює 0,7. Випробується партія з десяти зразків. Визначити ймовірність того, що не менш восьми зразків витримають іспит.

6 Ймовірність того, що пара взуття, узята випадково з виготовленої партії, буде вищого ґатунку, дорівнює 0,4. Визначити ймовірність того, що серед 600 пар, що надійшли для контролю, від 228 до 252 пар взуття будуть вищого готунку.

7 Касир ощадбанку обслуговує в середньому одного клієнта за 15 хвилин. Яка ймовірність, що за годину касир обслужить більш трьох чоловік? Рівно чотирьох чоловіків?

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 10):

Таблиця 10

x_i	2	3	4	5
P_i	0,1	$\boldsymbol{p}$	0,4	0,3

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P ($0 \le X < 3$).

9 Функція розподілу деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ A + Bx^2 & , 0 < x \le 2, \\ 1 & , x > 2. \end{cases}$$

Визначити коефіцієнти A і B, знайти вираження для щільності імовірності, математичне сподівання і дисперсію, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [-1, 1].

10 Середньомісячний товарообіг у розрахунку на душу населення в середньому складає 25 гр.од. Середнє квадратичне відхилення дорівнює 0,3 гр.од.

1) Знайти ймовірність того, що в поточному році середньомісячний товарообіг у розрахунку на душу населення впаде нижче 24,5 гр.од.

2) Записати формули щільності та функції розподілу для випадкового відхилення середньомісячного товарообігу від середнього значення. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Час, затрачуваний на буравлення шпурів у скельній породі, при 25 незалежних ділянках виявився наступним (у хвилинах):

11,0	10,0	9,5	10,0	10,3	11,0	12,0	10,0	
10,3	9,0	9,5	10,0	10,3	11,0	12,0	12,5	
9,5	10,0	10,3	11,0	12,5	10,5	10,3	11,0	12,0

Знайти довірчі інтервали для середнього значення обумовленої величини з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Передбачається, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 11 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 11

X	0,1	1,3	0,6	1,0	1,2	1,8	2,1	2,7
Y	1,04	1,08	0,94	1,06	1,35	2,01	2,62	3,00

Варіант 4

1 Чотири квитки у театр розігруються випадковим чином серед п'яти юнаків і сімох дівчат. Визначити ймовірність того, що квитки дістануться двом юнакам і двом дівчатам.

2 На автоматичній лінії, що складається з чотирьох послідовно працюючих верстатів, виготовляються деякі деталі. Ймовірність виготовлення бракованої деталі на першому, другому, третьому і четвертому верстатах дорівнює 0,05; 0,06; 0,07 і 0,08. Визначити ймовірність появи не бракованих деталей.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,9; P2=0,1; P3=0,8, P4=0,2, розрахувати надійність схеми (рис. 18).

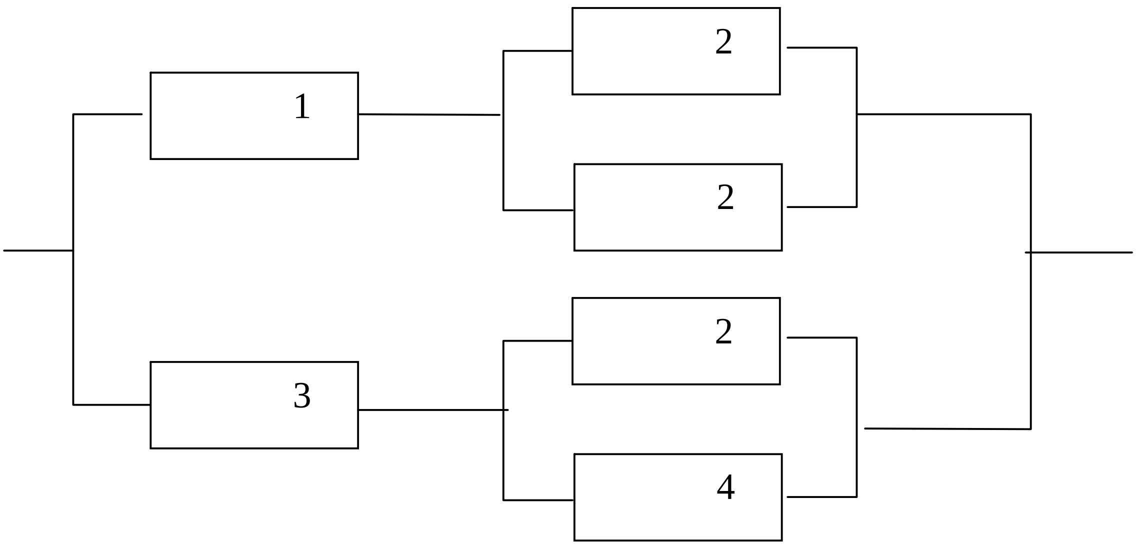


Рисунок 18

4 Деталь може надходити для обробки на перший верстат з імовірністю 0,2, на другий з імовірністю – 0,3 і на третій з імовірністю 0,5. Відсоток браку складає для цих верстатів відповідно 0,2%, 0,3% і 0,1% . Знайти ймовірність того, що деталь після оброблення виявиться бракованою.

5 Що імовірніше: виграти в рівносильного супротивника три партії у шахи із шести чи чотири партії з восьми, якщо нічиї не враховуються.

6 У механічному цеху працюють 120 токарів. Ймовірність того, що кожному токарю у даний момент часу знадобиться різець даного типу, дорівнює 0,2. Скільки різців даного типу повинна мати інструментальна комора, щоб забезпечити з імовірністю 0,95 потреби в них?

7 При артилерійському обстрілі "по площах" на один гектар попадає в ціль в середньому 500 снарядів. Визначити ймовірність руйнування бліндажа площею в 20 м^2, якщо він витримує не більш одного влучення.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл.12):

Таблиця 12

x_i	-3	-1	0	1	4
P_i	0,2	0,3	***p***	0,1	0,1

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P (-1≤X<5).

9 Функція розподілу деякої випадкової величини задається в такий спосіб:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , x < 0, \\ Ax^3 + B \quad , 0 \le x < 1, \\ 1 \quad , x \ge 1. \end{cases}$$

Визначити параметри A і B, знайти вираження для щільності імовірності, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [1/2; 3].

10 Продуктивність праці по хлібозаводах області в середньому складає 2672 г.о./міс. Середнє квадратичне відхилення дорівнює 300 г.о./міс.

1) Зайти ймовірність того, що в поточному місяці продуктивність праці буде не нижче 2700 гр.од.

2) Записати формули щільності та функції розподілу для випадкового відхилення продуктивності праці від її середнього значення. Прийняти, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Питома вага продовольчих товарів (у відсотках) у товарообігу торгових підприємств наведена нижче:

81	85	81	82	81	81	80	81	79	81
81	82	80	80	79	83	79	78	79	77

Знайти довірчі інтервали для середнього значення питомої ваги з надійністю 0,99 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,95. Мається на увазі, що випадкова величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 13 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 13

X	0	4	10	15	21	29	36	51	68	75
Y	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1	134

Варіант 5

1 У шухляді знаходяться 50 однакових куль, з них 10 пофарбованих. Навмання витягли 3 кулі. Знайти ймовірність того, що 2 кулі будуть пофарбовані.

2 Для сигналізації про пожежу встановлені два незалежно працюючих датчики. Ймовірність того, що при пожежі датчик спрацює, для першого і другого відповідно дорівнює 0,9 і 0,95. Визначити ймовірність того, що при пожежі спрацює хоча б один датчик.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,2; P2=0,4; P3=0,1; P4=0,1; P5=0,2, розрахувати надійність схеми (рис. 19).

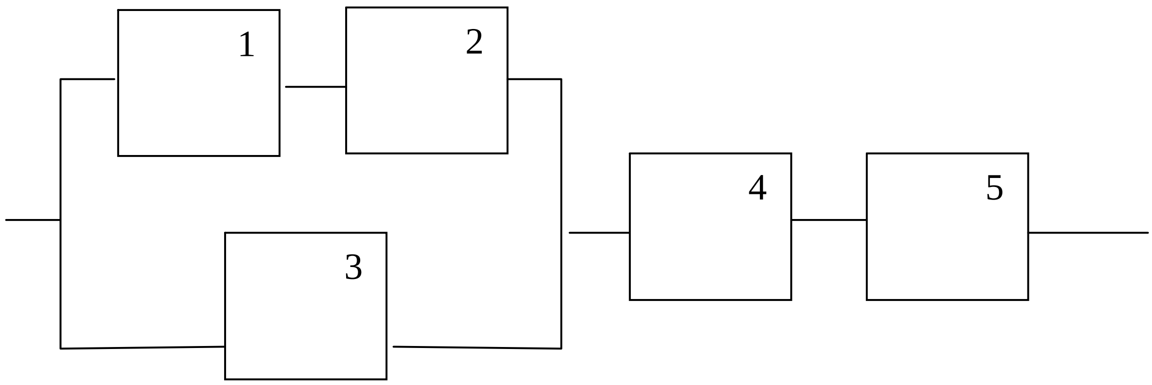


Рисунок 19

4 На станцію очищення стічних вод 10% стоку надходить з першого підприємства, 40% - із другого, а інше - із третього. Ймовірність появи у воді солей важких металів для першого, другого і третього підприємства відповідно дорівнює 0,01; 0,02; і 0,04. Визначити ймовірність появи солей важких металів у всьому стоці.

5 Для запуску деякої установки необхідно включити 6 блоків. Ймовірність того, що блок включиться при натисканні відповідної кнопки на пульті керування, дорівнює 0,9 для кожного блоку. Натиснуто всі кнопки. Визначити ймовірність того, що: а) установка працюватиме; б) два блоки не включаться.

6 Читальний зал інституту розрахований на 300 студентів, кожний з яких з імовірністю 0,2 бере на абонементі англо-російський словник. Скільки таких словників має бути на абонементі, щоб з імовірністю 0,85 можна було забезпечити всіх бажаючих?

7 Ймовірність появи бракованого виробу при масовому виробництві дорівнює 0,002. Визначити ймовірність того, що в партії з 2000 виробів знайдеться більш п'яти бракованих.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл.. 14).

Таблиця 14

x_i	-1	0	2	3	4
P_i	0,3	0,1	***p***	0,1	0,2

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P (0≤X<5).

9 Щільність імовірності деякої випадкової величини задається в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ C(x^2 + 2x), & 0 \le x < 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт C, функцію розподілу, математичне сподівання, середньоквадратичне відхилення, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [1/4; 1].

10 Проведені виміри довжини точно відрегульованим приладом. Середньоквадратичне відхилення помилки приладу дорівнює 5 см.

1) Знайти ймовірність того, що помилка при вимірі перевищить 15 см:

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу помилки виміру. Прийняти, що обумовлена величина розподілена за

нормальним законом.

11 Проведені виміри ємності кожного з 19 конденсаторів дали наступні результати (у мікрофарадах)

3,5 3,8 4,0 4,3 4,0 4,3 3,7 4,3 4,3

4,5 3,8 4,0 3,8 4,0 4,3 3,7 4,3 3,7 4,0

Знайти довірчі інтервали для середнього значення ємності конденсаторів з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Припустити, що ємність конденсаторів розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 15 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 15

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	30,0	29,1	28,4	28,1	28,0	27,7	27,5	27,2	27,0	26,8

Варіант 6

1 Визначити ймовірність відгадати три числа в грі “Спортлото 5 з 36”.

2 Прилад, що працює протягом доби, складається з трьох вузлів, кожний з яких, незалежно від інших, може за цей час вийти з ладу. Несправність хоча б одного з вузлів призводить до відмовлення приладу в цілому. Ймовірність безвідмовної роботи протягом доби для першого, другого і третього вузла відповідно дорівнює 0,9; 0,95 і 0,85. Визначити ймовірність того, що протягом доби прилад буде працювати безвідмовно.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,3; P2=0,2; P3=0,4, P4=0,5, P5=0,3, розрахувати надійність схеми (рис. 20).

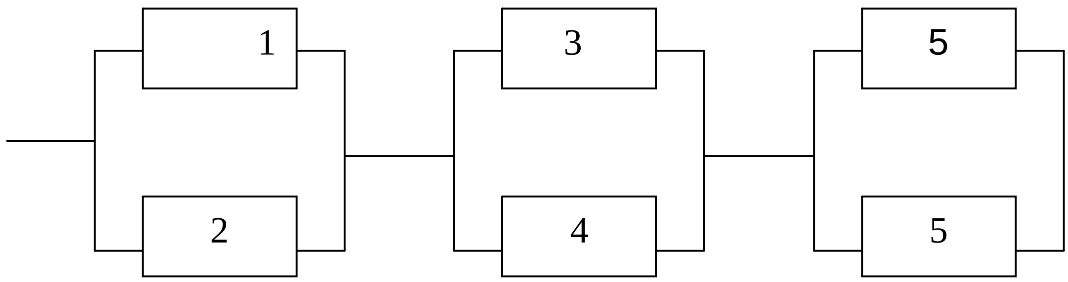


Рисунок 20

4 На деякій фабриці 30% продукції виробляється першою машиною, 25%- на другій, а інша продукція – на третьій. Перша машина дає 1% браку, друга -2% і третя-3%. Випадково обрана одиниця продукції виявилася бракованою. Визначити ймовірність того, що вона виготовлена на першій машині.

5 Верстат-автомат виробляє 70% усіх виробів першим сортом, а інші - другим. Потрібно визначити, що є більш ймовірним - одержати два першосортних вироби з п'яти на вмання відібраних, чи п'ять першосортних з десяти.

6 До технічного водопроводу підключено 160 підприємств, кожне з яких з імовірністю 0,7 у визначений момент часу здійснює добір води з магістралі. Визначити ймовірність того, що в даний момент часу забір води роблять не менш 80 і не більш 120 підприємств.

7 Радіоапаратура відмовляє в середньому один раз на місяць.

Знайти ймовірність того, що протягом двох тижнів радіоапаратура не відмовить.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 16):

Таблиця 16

x_i	-5	1	2	3	4
P_i	0,4	0,2	***p***	0,1	0,1

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P ($-6 \le X < 3$).

9 Щільність імовірності випадкової величини задається в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ A(x^2 + 2) & , 0 \le x < 1, \\ 0 & , x \ge 1. \end{cases}$$

Знайти параметр A, функцію розподілу, математичне сподівання, середньоквадратичне відхилення й ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [0.3, 2].

10 Проведені виміри діаметра труби приладом, що дає систематичне заниження розміру на 2 см. Середньоквадратичне відхилення помилки приладу дорівнює 1 см.

1) Знайти ймовірність того, що помилка при вимірі перевищить 3 см.

2) Записати формули щільності та функції розподілу помилки виміру. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Витрати часу (людино-годин) на виробництво 1ц зерна, зафіксовані при щоденному контролі протягом двох тижнів, такі:

8,12	8,17	8,20	8,21	8,20	8,17	8,22
8,27	8,22	8,17	8,32	8,20	8,21	8,16

Припускаючи, що часові витрати розподілені за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для середнього значення часових витрат з надійністю 0,99 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,95.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 17 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 17

X	0	2	3	4	5	6	8	10
Y	4,3	5,1	5,6	7,4	8,8	9,7	10,1	9,4

Варіант 7

1 Із шести карток з буквами "Л" , "І , "Т" , "Е" , "Р" , "А" вибирають навмання у визначеному порядку 4. Визначити ймовірність того, що при цьому вийде слово "ТИРЕ".

2 Три стрільці стріляють у ціль. Ймовірність влучення в ціль для першого, другого і третього стрільця відповідно дорівнює 0,6; 0,7 і 0,75. Визначити ймовірність хоча б одного влучення в ціль, якщо кожен стрілець зробить по одному пострілу.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,9; P2=0,3; P3=0,2, P4=0,1,розрахувати надійність схеми (рис. 21).

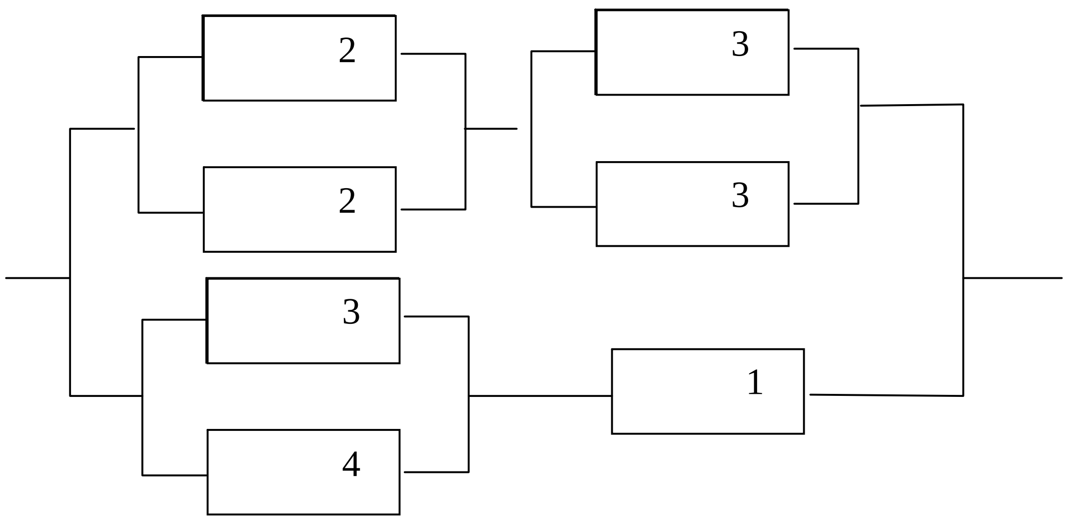


Рисунок 21

4 У цеху працюють три автомати. Перший випускає 35% усіх деталей і дає 2% браку, другий автомат випускає 30% усіх деталей і дає 3% браку, третій автомат випускає 35% усіх деталей і дає 1% браку. Визначити ймовірність надходження для складання бракованої деталі, виготовленої другим автоматом.

5 Студент вибирає таку екзаменаційну «стратегію»: у середньому з 20 питань програми з кожного предмета він не готує два, сподіваючись, що малоймовірно витягти білет відразу з двома «поганими» питаннями, тільки в цьому випадку ставиться незадовільна оцінка. Яка ймовірність одержання не більш двох незадовільних оцінок, якщо в сесії складається 10 іспитів і заліків?

6 На моделі греблі встановлено 120 датчиків. Ймовірність їхнього неправильного підключення до вимірювальної установки для кожного дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що неправильно підключено не більш 15 датчиків.

7 У середньому даний відділ магазина обслуговує трьох клієнтів за 20 хвилин. Яка ймовірність, що за годину обслужать не більш 4 клієнтів; рівно 9 клієнтів?

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 18):

Таблиця 18

x_i	-2	-1	1	4	5
P_i	0,1	***p***	0,2	0,1	0,2

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P $(-2 \le X < 4)$.

9 Щільність імовірності деякої випадкової величини задається в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ A(x+2), & 0 \le x < 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт A, функцію розподілу, математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [1/2; 2].

10 Рівень збитковості вирощування овочів у сільськогосподарських підприємствах у середньому складає 43%. Середнє квадратичне відхилення дорівнює 6%.

1) Знайти ймовірність того, що в поточному році збитковість не перевищить 42%;

2) Записати формули щільності та функції розподілу для випадкового відхилення збитковості від її середнього значення. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Виміри часу, необхідного для виготовлення визначеної деталі, дали наступні результати (у хвилинах):

13,0	10,1	11,2	9,8	11,3	12,5	10,1	11,1	11,8
11,5	10,7	10,0	10,6	11,8	11,3	10,5	11,5	12,4

Припускаючи, що обумовлений час розподілений за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для середнього значення часу з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 19 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 19

X	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2
Y	0,43	0,94	1,91	1,01	4,0	4,56	6,45	8,59

Варіант 8

1 У прямокутному броньовому щиті розмірами 2 м на 1 м є невидима для супротивника амбразура розмірами 10 см на 10 см. Визначити ймовірність того, що куля, що потрапила в щит, потрапить в амбразуру, якщо влучення в будь-яку точку щита можливе.

2 Ймовірність своєчасного одержання вантажу дорівнює 0,8, а ймовірність того, що упакування вантажу не буде ушкоджене – 0,7. Яка ймовірність, що вантаж буде отриманий вчасно в неушкодженому упакуванні? Яка ймовірність, яка буде дотримана хоча б одна з умов: 1) вантаж отриманий вчасно; 2) упакування неушкоджене?

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,8; P2=0,9; P3=0,7, P4=0,2, розрахувати надійність схеми (рис.22).

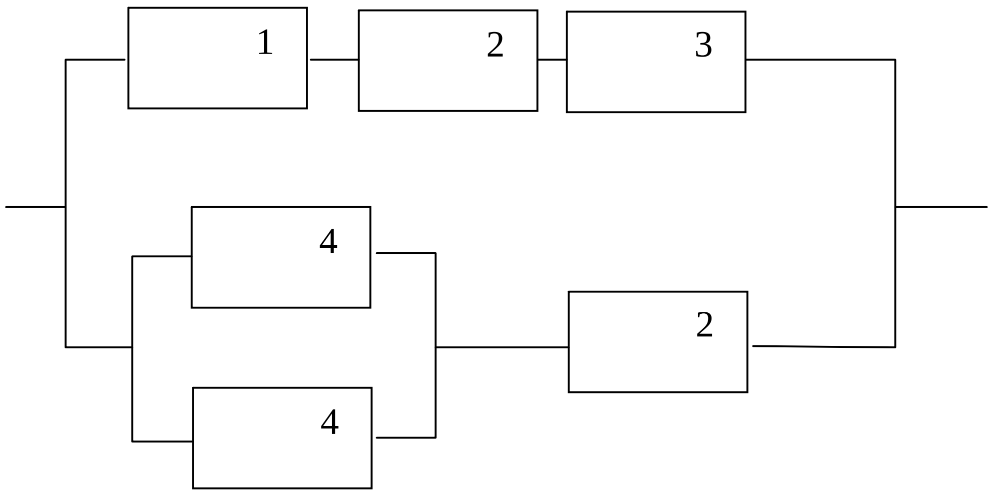


Рисунок 22

4 На складі знаходяться електролампи, виготовлені двома заводами. Серед них 70% виготовлені першим, а інші - другим заводом. Відомо, що з кожних 100 лампочок, виготовлених першим заводом - 90 задовольняють стандарту, а з 100 ламп виготовлених другим - 80 задовольняють стандарту. Визначити ймовірність того, що узята на вмання лампочка буде задовольняти вимогам стандарту.

5 Ймовірність влучення в десятку для даного стрільця при одному пострілі дорівнює 0,8. Визначити ймовірність того, що при 10 незалежних пострілах влучень у десятку буде не менш 7.

6 Школа приймає в перші класи 200 дітей. Визначити ймовірність того, що серед них виявиться не менш 100 дівчинок, якщо хлопчики складають у середньому 48%.

7 Трос складається з 200 окремих сталевих жил (дротів). Ймовірність того, що одна жила не задовольняє технічним умовам, дорівнює 0,015. Трос бракується, якщо в ньому більше 4 дефектних жил. Визначити ймовірність появи браку.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл..20):

Таблиця 20

x_i	-2	0	1	3	5
P_i	0,2	0,1	0,1	***p***	0,4

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P (-1$\le$X<6).

9 Щільність імовірності випадкової величини задається функцією:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ Ax^2, & 1\le x<2,\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт А, функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [0;3].

10 Контролюється еластичність синтетичної пряжі. Пряжа вважається придатної, якщо еластичність її укладена в межах від 1,5 до 2 Середнє значення еластичності береться рівним 1,75. Середньоквадратичне відхилення еластичності дорівнює 0,2

1) Знайти відсоток браку.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу еластичності випадково узятого зразка пряжі. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Проведені виміри часу роботи дизельного двигуна однієї марки до першого капремонту дали наступні результати (у годинах):

3960	5000	4250	3680	4000	4360	4120	
4720	4640	3920	5600	4880	4040	4800	5240

Знайти довірчі інтервали для середнього значення ресурсу двигуна з надійністю 0,99 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,95. Прийняти, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 21 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 21

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	100	85,6	74,4	65,3	56,7	43,3	40,8	34,8

Варіант 9

1 На складі телеательє є п'ятнадцять кінескопів, причому десять з них виготовлені московськими, а інші - львівським заводом. Знайти ймовірність того, що серед п'яти навмання узятих кінескопів виявиться три кінескопи, виготовлені московським заводом.

2 Абонент забув останню цифру номера телефону і набирає її на удачу. Знайти ймовірність того, що йому доведеться набирати номер не більш трьох разів.

3 За заданою надійністю елементів: P1=P2=0,9; P3=0,8, P4=0,1, розрахувати надійність схеми (рис.23):

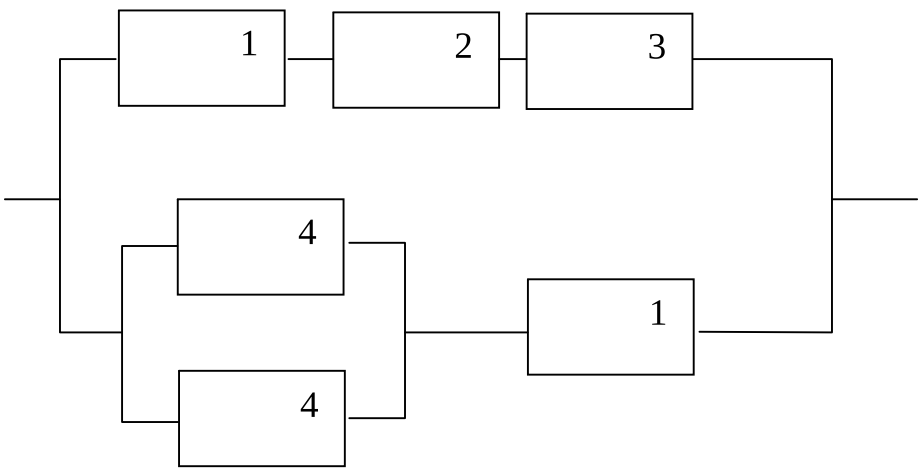


Рисунок 23

4 На конвеєр надходять однотипні вироби, виготовлені двома робітниками. При цьому перший поставляє 60%, а другий - 40% від загального кількості виробів. Ймовірність того, що виріб, виготовлений першим робітником, виявиться нестандартним, дорівнює 0,005, другим – 0,01. Узятий навмання з конвеєра виріб виявився нестандартним. Визначити ймовірність того, що цей виріб виготовлений першим робітником.

5 На будівництво мають завезти 6 партій оздоблювальних матеріалів. Ймовірність того, що кожна партія буде завезена у відповідності до графіка, дорівнює 0,8. Визначити ймовірність того, що не менш 4 партій буде доставлено в термін.

6 У будинку інституту є 6000 електроламп, ймовірність включення кожної з них дорівнює 0,5. Визначити ймовірність того, що кількість одночасно включених електроламп складе від 2800 до 3200.

7 Протягом години комутатор одержує в середньому шістдесят викликів. Телефоністка відлучилася на дві хвилини. Визначити ймовірність того, що за цей час: не надійде жодного виклику, надійде не більш двох викликів?

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл.22):

Таблиця 22

x_i	-3	-1	0	2	4
P_i	0,2	0,3	***p***	0,1	0,1

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P $(-1 \le X < 4)$.

9 Щільність імовірності деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A(x+2), & 0 \le x < 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт A, функцію розподілу, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [0; 2].

10 Рівень рентабельності в товарообігу підприємств суспільного харчування в середньому складає 4,9%. Середнє квадратичне відхилення дорівнює 0,3%.

1) Знайти ймовірність того, що в поточному році рівень рентабельності буде не нижче 5,2%.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу для рівня рентабельності. Прийняти, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Дослід на тривалість роботи радіоламп визначеного типу дав наступні результати (у годинах):

1800	1200	2400	1600	1800	1200	2400	3000	1800	1200
2400	1900	1200	1800	2400	3000	1200	2400	1800	

Припускаючи, що обумовлений параметр розподілений за нормальним законом, знайти довірчі інтервали для середнього значення часу роботи з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 23 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 23

X	0,33	0,65	0,99	1,33	1,66	1,99	2,33	2,66
Y	11,86	15,67	20,60	26,69	33,71	43,93	51,13	61,49

Варіант 10

1 Дві бригади будівельників одержують 10 інструментів, серед яких 2 – відмінної якості. Інструменти випадковим образом поділяються навпіл. Яка ймовірність того, що в кожній бригаді буде інструмент відмінної якості?

2 На будівництво від різних постачальників повинні надійти 4 партії матеріалів. Імовірності того, що партії будуть доставлені в термін, рівні відповідно 0,9; 0,8; 0,7 і 0,95. Знайти ймовірність того, що хоча б одна партія не буде доставлена в термін.

3 За заданою надійністю елементів: P1=P2=0,8; P3=0,7, P4=0,6, P5=0,8 , розрахувати надійність схеми (рис. 24).

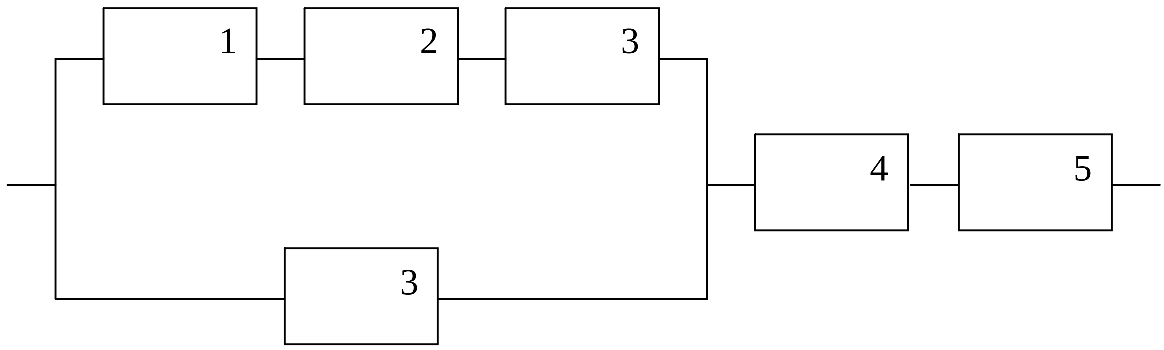


Рисунок 24

4 Для складання надходять однотипні деталі з трьох підприємств, причому перше поставляє 50% , друге 30% і третє - 20% усієї кількості деталей. Імовірності появи браку для першого, другого і третього підприємств відповідно рівні 0,05; 0,1 і 0,15. Вибірковий контроль знайшов браковану деталь. Яка ймовірність того, що брак відбувся з вини другого підприємства?

5 Прилад складається з 8 вузлів. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи протягом часу T) для кожного вузла дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що за час T відмовить не більш двох вузлів, якщо вузли виходять з ладу незалежно один одного.

6 Відомо, що 60% усієї кількості виготовлених заводом телефонних апаратів випускається першим сортом. Визначити ймовірність того, що в партії з 200 апаратів першосортних виявиться від 110 до 130 штук.

7 У камері Уілсона в середньому реєструється 15 елементарних часток у 1 годину. Визначити ймовірність того, що протягом 20 хвилин буде зареєстровано: дві частки; більш двох.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл.. 24):

Таблиця 24

x_i	-5	-3	1	2	3
P_i	0,2	0,3	0,1	***p***	0,1

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P $(-3 \le X < 4)$.

9 Функція розподілу деякої випадкової величини задається в такий спосіб:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax, & 0\le x<2,\\ B, & x\ge 2.\end{cases}$$

Знайти параметри А і В, вираження для щільності імовірності, математичне сподівання і дисперсію, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [1/2; 3/2].

10 Прилад для виміру відстані до об'єкта систематично занижує показання на 10 м. Середньоквадратичне відхилення помилки приладу дорівнює 5 м.

1) Знайти ймовірність того, що помилка при вимірі відстані до об'єкта не перевищить 15 м.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу помилки приладу. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Проведено контрольні іспити 16 освітлювальних ламп. Їхній термін служби виявився рівним (у годинах):

2500	2640	3120	3500	3200	3010	2780	2850
2990	3620	3200	2400	3520	3120	3000	3010

Вважаючи, що термін служби кожної лампи є нормальною випадковою величиною, знайти довірчі інтервали для середнього терміну служби з надійністю 0,99 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,95.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 25 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y; визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 25

X	0,1	0,91	0,90	1,50	2,00	2,20	2,62	3,00	3,30	3,52
Y	0,15	0,20	0,43	0,35	0,52	0,61	0,68	1,15	1,22	1,37

Варіант 11

1 У шухляді лежать 15 плавких запобіжників , що відрізняються тільки силою струму, на який вони розраховані. З них 7 розраховані на 10 А, 5 - на 8 А , і 3 - на 5 А. Навмання берутся два запобіжники. Визначити ймовірність того, що вони розраховані на максимальний струм.

2 Ймовірність влучення в ціль першим стрільцем дорівнює 0,8, другим – 0,75. Стрілки роблять по одному пострілу одночасно. Визначити ймовірність того, що в ціль потрапить тільки один стрілець.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,9; P2=0,1; P3=0,5, P4=0,6, розрахувати надійність схеми (рис. 25):

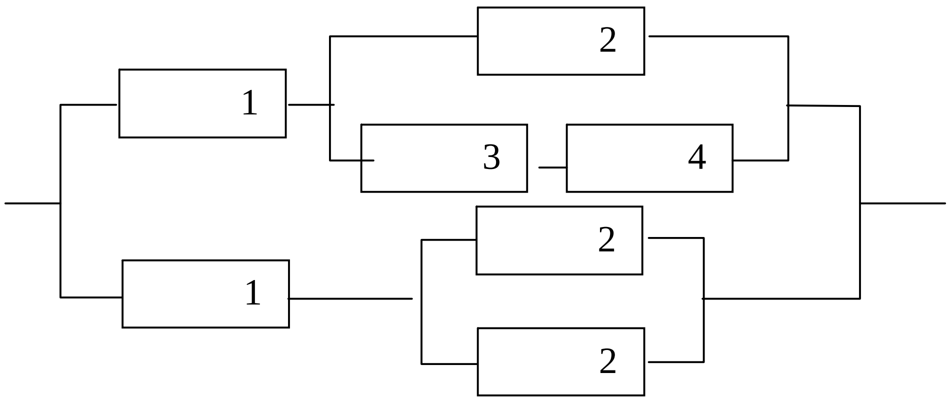


Рисунок 25

4 Є 10 однакових урн, у 9 з який знаходиться по 2 білих і 2 чорних кулі, а в одній - 5 білих куль і 1 чорна. З урни, взятої навмання, витягнута біла куля. Яка ймовірність того, що куля витягнута з урни, яка містить 5 білих куль?

5 У телевізійній студії є чотири телевізійних передавальних камери. Ймовірність того, що одна камера в даний момент часу включена, дорівнює 0,6. Визначити ймовірність того, що в даний момент включені: рівно дві камери; хоча б одна камера.

6 З великої партії зерна, що надійшла, і у якій частка великих зерен складає 20%, відбирають для проби 1000 зерен. Визначити ймовірність того, що кількість великих зерен у цій пробі виявиться не менше 160 і не більше 240.

7 За даний проміжок часу середня кількість помилкових з'єднань, що припадає на одного телефонного абонента, дорівнює 5. Яка ймовірність того, що за розглянутий час для даного абонента кількість помилкових з'єднань буде більше двох?

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл..26):

Таблиця 26

x_i	-1	0	2	4	6
P_i	0,1	0,2	$\boldsymbol{p}$	0,2	0,1

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P $(0 \le X < 7)$.

9 Щільність імовірності деякої випадкової величини задається в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ A\left(x + \frac{1}{2}\right), & 1 \le x < 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт А, функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [-2; 1,5].

10 Середній термін служби електроламп, що випускаються ламповим заводом, дорівнює 150 год. Середньоквадратичне відхилення часу служби дорівнює 10 год.

1) Знайти ймовірність того, що куплена електролампа пропрацює менш 100 годин.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу для часу служби електролампи. Прийняти, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Проведені виміри погрішності в установці опорних колон дали наступні результати:

4,3	4,4	4,2	4,3	4,4	4,5	4,3	4,5	4,4	
4,6	4,4	4,1	4,3	4,4	4,5	4,3	4,3	4,6	4,2

Знайти довірчі інтервали для середньої погрішності в установці колон з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Прийняти, що обумовлений параметр має нормальний розподіл.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 27 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 27

X	7,9	11,6	12,8	14,9	16,3	18,6	20,3	21,9	23,6	25,2
Y	13,0	22,8	24,8	28,6	31,6	38,7	40,0	44,9	43,0	44,3

Варіант 12

1 У книжковій лотереї розігруються п'ять книг. Усього в урні мається 30 квитків. Перший, який прийшов до урни, виймає чотири квитки. Визначити ймовірність того, що два з цих квитків виявляться виграшними.

2 Три стрільці, незалежно один від одного, роблять по одному пострілу. Ймовірність влучення в мішень для першого, другого і третього стрільця відповідно дорівнює 0,6; 0,7; і 0,8. Визначити ймовірність того, що перший і другий стрілець потрапили, а третій промахнувся.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,8; P2=0,3; P3=0,5, P4=0,6, P5=0,7, розрахувати надійність схеми (рис. 26):

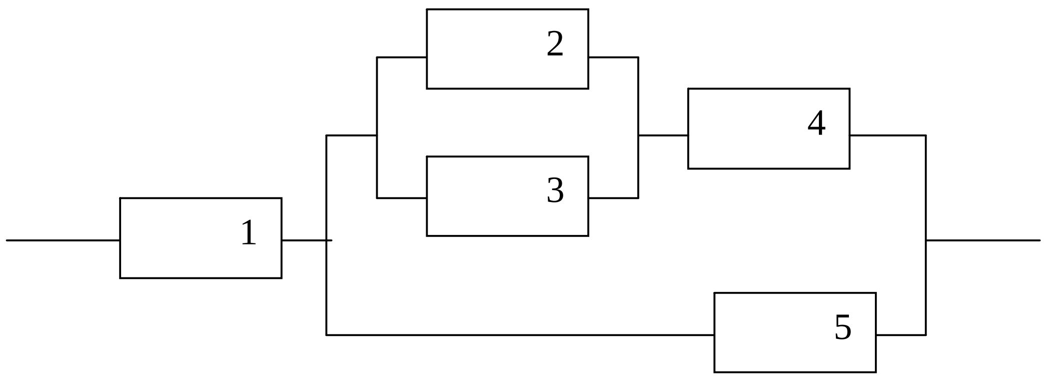


Рисунок 26

4 У цеху два автомати. Один випускає 55% усієї продукції і дає 3% браку, другий випускає 45% продукції і дає 2% браку. Знайти ймовірність надходження для складання бракованої деталі.

5 У магазин увійшло 8 покупців. Знайти ймовірність того, що три з них зроблять купівлю, якщо ймовірність зробити купівлю для кожного з них дорівнює 0,3.

6 У спеціалізований магазин радіоапаратури надійшло 150 кольорових телевізорів. Ймовірність того, що телевізор вимагає регулювання перед продажем, дорівнює 0,4 для кожного з них. Знайти ймовірність того, що не менш 50 і не більш 80 телевізорів вимагають додаткового регулювання.

7 Прилад складається з 2000 однотипних елементів, причому ймовірність відмовлення для кожного з них дорівнює 0,005. Знайти ймовірність відмовлення приладу, якщо він відбувається при відмовленні більш одного елемента.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл..28):

Таблиця 28

x_i	-2	0	1	3	5
P_i	0,1	0,1	***p***	0,2	0,3

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P $(-1 \le X < 3)$.

9 Щільність імовірності деякої випадкової величини задається в такий спосіб:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A(x+2), & 0\le x<1,\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт А, функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію, а також ймовірність того, що випадкова величина приймає значення в інтервалі [-1;1].

10 Завод випускає телевізори, термін служби яких до 1-го ремонту коливається від 1-го року до 4-х років.

1) Знайти відсоток телевізорів, термін служби яких не менш 2-х років.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу для терміну служби випадкового узятого телевізора. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Оцінюється концентрація домішки деякої речовини в досліджуваному матеріалі. Отримано такі результати (у відсотках):

5,0	5,8	5,5	5,7	4,5	4,9	5,0	5,8	5,8
4,2	4,5	4,8	4,9	5,0	5,3	5,5	5,3	

Знайти довірчі інтервали для середньої концентрації даної речовини з надійністю 0,95 і середньоквадратичне відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Припустити, що результати вимірів розподілені за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 29 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 29

X	26	30	34	36	42	46	50	54
Y	3,94	4,60	5,67	6,93	8,25	7,73	10,55	12,40

Варіант 13

1 Групу монтажників з 18 осіб, серед яких 4 вищої кваліфікації розподіляють на дві однакові бригади. Яка ймовірність того, що при випадковому виборі в кожній бригаді буде по 2 фахівця вищої кваліфікації?

2 Стрілець робить три постріли по рушійній мішені. Ймовірність влучення в ціль при першому пострілі дорівнює 0,1, при другому – 0,3 і при третьому – 0,5. Знайти ймовірність хоча б одного влучення.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,1; P2=0,2; P3=0,8, P4=0,7, розрахувати надійність схеми (рис. 27):

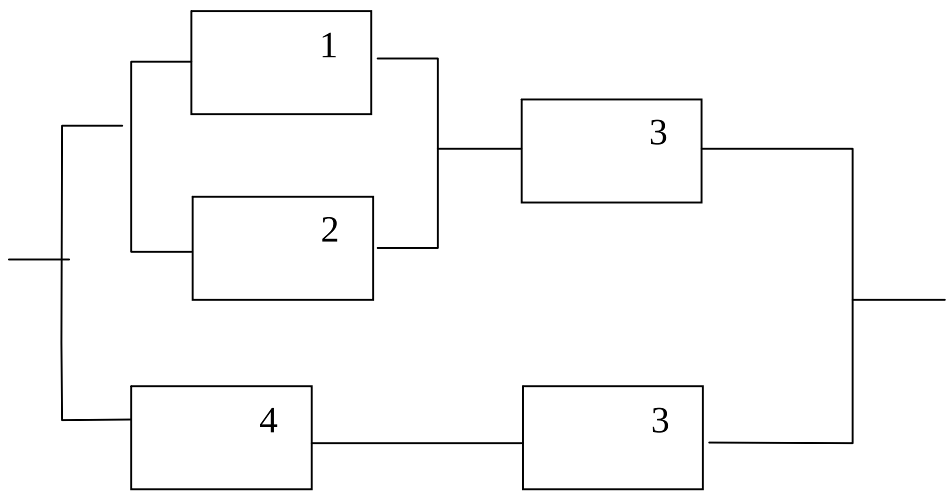


Рисунок 27

4 Ймовірність того, що вироби деякого виробництва задовольняють стандарту, дорівнює 0,96. Пропонується спрощена система контролю, що пропускає з імовірністю 0,98 вироби, які задовольняють стандарту, і з імовірністю 0,05 вироби, які не задовольняють стандарту. Яка ймовірність того, що виріб, що пройшов такий контроль, задовольняє стандарту?

5 Робітник обслуговує чотири верстати, кожний з яких може вийти з ладу під час зміни з імовірністю 0,02 Знайти ймовірність того, що з ладу вийдуть не більш 2 верстатів.

6 Ймовірність того, що після одного навчального року підручник буде мати потребу в новому плетінні, дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що не менш 800 і не більш 1100 підручників буде необхідно переплести заново, якщо фонд навчальної бібліотеки складається з 4000 книг.

7 На один кубічний метр ґрунту припадає в середньому 2 каменя. Знайти ймовірність того, що в ковші екскаватора, ємністю в 2,5 куб. м виявиться : п'ять каменів, більше п’яти.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл.. 30):

Таблиця 30

x_i	-3	-1	0	2	5
P_i	0,2	0,1	0,1	$\boldsymbol{p}$	0,4

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P $(-3 \le X < 6)$.

9 Щільність імовірності деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ Ax+1, & 1\le x<2,\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$$

Визначити параметр А, функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [0; 1,5].

10 Відповідно до креслення, довжина деталі повинна дорівнювати 50 см. Середнє квадратичне відхилення довжини дорівнює 1 см. Припустиме відхилення розміру деталі від 50 см не повинно перевищувати 1,5 см, інакше деталь бракується.

1) Знайти відсоток придатних деталей.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу довжини випадково узятої деталі. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Час, затрачуваний на виконання деякої операції при 20 незалежних дослідах, виявилося наступним (у хвилинах):

16,0	16,6	17,9	17,5	5,5	17,9	17,5	18,0	14,5	16,0
16,5	17,5	19,0	15,5	16,5	17,9	18,0	16,0	17,9	17,5

Знайти довірчі інтервали для середнього часу з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 31 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між

X і Y;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 31

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	4	8	10	14	16	20	23	26

Варіант 14

1 Кинуто дві гральні кісти. Знайти ймовірність того, що на обох випаде число очок у сумі, які дорівнюють 6.

2 Букви, що складають слово “ремонт”, виписані кожна на окремій картці. Картки ретельно перемішуються, після чого виймаються чотири з них у визначеному порядку. Яка при цьому ймовірність одержати слово “море”?

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,8; P2=0,7; P3=0,6, P4=0,9; P5=0,75? розрахувати надійність схеми (рис. 28).

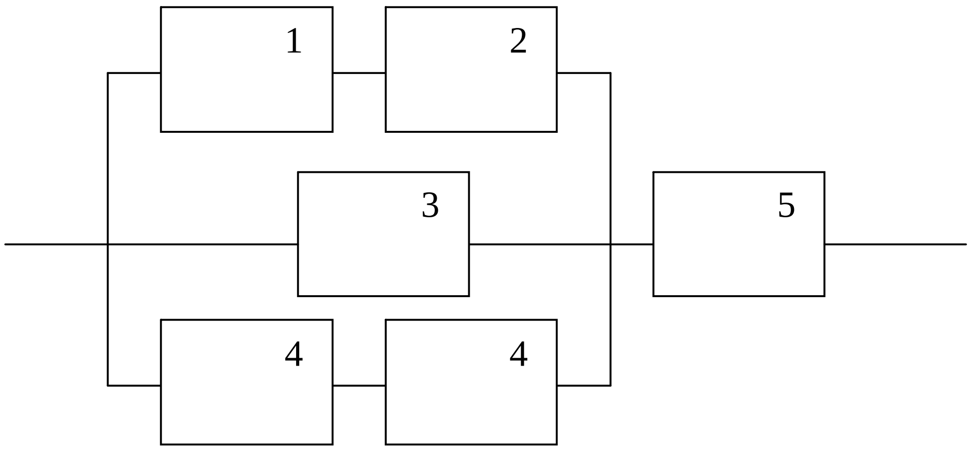


Рисунок 28

4 При перевірці посівних якостей зерен пшениці встановлено, що всі зерна можуть бути розбиті на чотири групи. До першої групи відносяться 96% усіх зерен, до другої, третьої і четвертої відносяться відповідно 2%, 1% і 1%. Ймовірність того, що з зерна виросте колосся, що містить не менш 50 зерен, для насінь першої, другої, третьої і четвертої груп відповідно рівні 0,5; 0,2; 0,18 і 0,02 Визначити ймовірність того, що з узятого навмання зерна виросте колосся, яке містить не менш 50 зерен.

5 Для даного баскетболіста ймовірність закинути м'яч у кошик дорівнює 0,7. Проведено десять кидків. Що імовірніше - закинути м'яч у кошик шість чи вісім разів?

6 Ймовірність виходу з ладу за час Т одного конденсатора дорівнює 0,2 Визначити ймовірність того, що за цей час з 100 конденсаторів з ладу вийдуть не більш 20 штук.

7 При роботі ЕОМ у середньому за 5 годин відбувається два збої в її роботі. Визначити ймовірність того, що програма, яка займає 30 хв. машинного часу, пройде без збою.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл.. 32).

Таблиця 32

x_i	-6	2	1	2	5
P_i	0,3	0,1	***p***	0,1	0,2

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P (-2$\le$X<2).

9 Функція розподілу деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x<2,\\ Ax+B, \quad 2\le x<4,\\ 1, \quad x\ge 4.\end{cases}$$

Визначити параметри A і B, знайти вираження для щільності імовірності, математичне сподівання і дисперсію, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [2; 3].

10 Середня напруга в електромережі дорівнює 220 В. Середньо-квадратичне відхилення напруги дорівнює 5 В.

1) У скількох відсотках випадків відхилення напруги від 220 В не перевищить 10 В.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу напруги. Прийняти, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 За результатами спостережень за сумарними річними опадами в даній місцевості за 17 років були отримані наступні дані (у міліметрах):

992	969	992	878	1060	961	1002	960	1054
969	1018	902	1054	1098	1015	1012	1010	

Знайти довірчі інтервали для середнього сумарного значення річних опадів з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Припустити, що обумовлений параметр має нормальний розподіл.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 33 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 33

X	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81	4,22	5,45	5,94
Y	0,1	1,20	1,12	2,25	4,26	4,83	12,8	16,35

Варіант 15

1 У лотереї є всього 1000 квитків, з них 20 виграшних. Куплено два квитки. Визначити ймовірність того, що обидва квитки виграшні.

2 У студентській групі 18 юнаків і 12 дівчин. За списком випадковим образом вибирають делегацію з двох чоловік. Визначити ймовірність того, що обрано дівчину і юнака.

3 За заданою надійністю елементів: Р1=0,1; Р2=0,2; Р4=0,9, розрахувати надійність схеми (рис. 29):

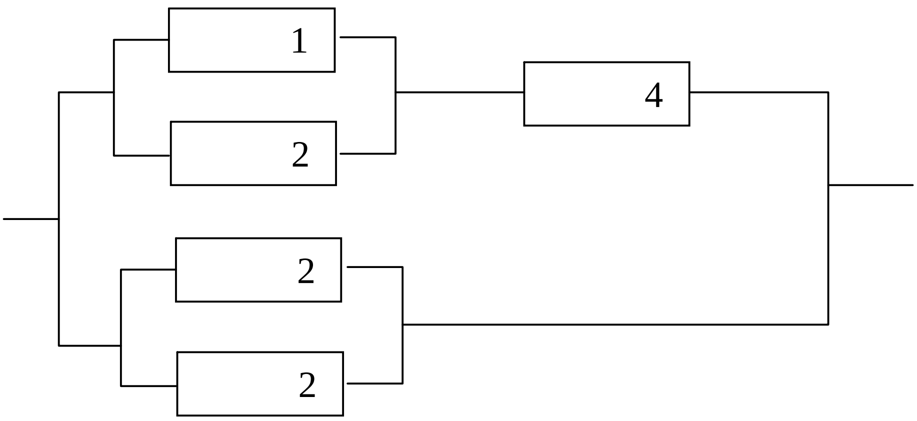


Рисунок 29

4 У цеху три типи автоматичних верстатів виробляють однакові деталі. Продуктивність верстатів однакова, але якість роботи відрізняються: верстати першого типу виробляють 90% продукції відмінної якості, другого -85% і третього -80%. Усі виготовлені за зміну деталі надходять на склад в одну ємкість. Визначити ймовірність того, що навмання обрана деталь виявиться вищої якості, якщо верстатів першого типу - 10 штук, другого - 6 і третього - 4.

5 На відрізок [0; 10] навмання кинуто п'ять точок. Визначити ймовірність того, що дві крапки потраплять на відрізок [3; 5]. Мається на увазі, що ймовірність улучення на будь-який відрізок пропорційна його довжині.

6 До цехової магістралі стиснутого повітря підключено 100 пневматичних інструментів, кожний з яких працює в даний момент часу з імовірністю 0,4. Магістраль не перевантажена, якщо кількість синхронно працюючих інструментів не перевищує 50. Знайти ймовірність того, що магістраль у даний момент не перевантажена.

7 Зразок радіоактивної речовини в середньому за 10 с випускає чотири заряджені частки. Визначити ймовірність того, що за 1 с зразок випустить: хоча б одну частку; рівно одну частку.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл.. 34):

Таблиця 34

x_i	-1	2	3	5	7
P_i	0,2	***p***	0,1	0,1	0,4

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P ($-1 \le X < 5$).

9 Функція розподілу деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ Ax+B, & 2\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

Визначити параметри А і В, знайти вираження для щільності імовірності, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [0; 1].

10 Терези для зважування клієнток у салоні краси систематично занижують на вагу на 1,5 кг. Середньоквадратичне відхилення помилки приладу дорівнює 0,5 кг.

1) Знайти ймовірність того, що помилка при зважуванні не перевищить 1 кг.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу помилки зважування. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Оцінюється процентний вміст деякого компонента в досліджуваному матеріалі. Проведені виміри для 16 проб дали наступні результати:

33,0	31,0	32,5	27,5	29,0	31,0	32,5	33,0
33,05	34,0	29,0	31,0	32,5	33,0	33,5	33,0

Знайти довірчі інтервали для середнього значення процентного вмісту з надійністю 0,99 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,95. Мається на увазі, що обумовлений параметр розподілений за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 35 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 35

X	12,0	13,1	14,0	16,1	17,4	18,0	20,0	21,4
Y	54	59	67	76	85	97	107	118

Варіант 16

1 Пакет містить 20 плиток, причому 3 з них мають дефекти. Контролер витягає 4 плитки навмання. Знайти ймовірність того, що пакет буде прийнятий контролером, якщо для цього необхідно, щоб він не знайшов ні однієї бракованої плитки.

2 Ймовірність того, що весь комплект стінових панелей, виготовлених із застосуванням склоопору, буде вищої якості, дорівнює 0,9. Для комплекту панелей, виготовлених за старою технологією, без склоопори, ця ймовірність дорівнює 0,7. Бригада одержала три комплекти панелей першого виду і два - другого. Визначити ймовірність того, що всі п'ять комплектів панелей будуть вищої якості.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,4; P2=0,5; P3=0,7; P4=0,9, розрахувати надійність схеми (рис. 30):

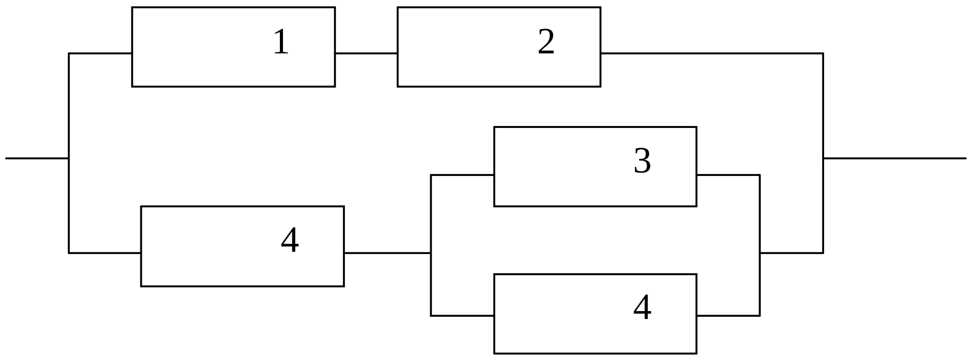


Рисунок 30

4 Об'єкт зводять три бригади монтажників. Імовірності того, що бригади допустять порушення технології при монтажі одного блоку, рівна відповідно: 0,01; 0,15; 0,02 Перша бригада виконала 50% всього обсягу робіт, друга - 30%, третя - 20%. Яка ймовірність того, що обраний випадковим образом блок змонтований з порушенням технології?

5 Відомо, що 10% усієї кількості радіоламп не задовольняє усім вимогам стандарту. Визначити ймовірність того, що з чотирьох узятих навмання ламп виявиться не більш однієї нестандартної.

6 Відділ технологічного контролю перевіряє 475 виробів із усієї партії. Ймовірність того, що виріб бракованої – 0,05. Якщо серед перевірених виробів виявиться більш 30 бракованих, то вся партія не приймається. Знайти ймовірність того, що партія буде прийнята.

7 Протягом години комутатор одержує в середньому 60 викликів. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: не буде жодного виклику; буде не більше одного виклику.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл.. 36):

Таблиця 36

x_i	-4	-2	0	1	3
P_i	0,1	0,3	0,4	0,1	***p***

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P $(-4 \le X < 1)$.

9 Функція розподілу деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ A + Bx, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

Визначити параметри A і B, знайти вираження для щільності імовірності, математичне сподівання і дисперсію, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [1; 4].

10 Автобус проїжджає даний маршрут у середньому за 6 годин. Середньоквадратичне відхилення для часу проїзду дорівнює 30 хв.

1) Знайти ймовірність того, що час проїзду відхилиться від 6 годин не більш, ніж на 20 хв.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу для часу відхилення проїзду від 6 годин. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Протягом короткого проміжку часу виміряласе вологість повітря в цеху й отримані наступні дані (у відсотках):

49	50	52	48	49	51	48	49	49	50
50	53	48	49	51	47	49	50	51	52

Знайти довірчі інтервали для середньої вологості повітря в цеху з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Передбачається, що обумовлений параметр розподілений за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 37 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 37

X	1,5	4,0	5,0	7,0	8,5	10,0	11,0	12,5	14,0	15,5
Y	5,0	4,5	7,0	7,5	9,5	9,0	11,3	9,2	11,6	12,3

Варіант 17

1 На складі є 20 контрольно-вимірювальних приладів, і тільки 12 з них відтарировані. Визначити ймовірність того, що з п'яти узятих приладів чотири відтарировані.

2 Мисливець вистрілив 3 рази по цілі, що віддаляється. Ймовірність влучення в неї при першому пострілі дорівнює 0,8, а після кожного пострілу зменшується на 0,1 Знайти ймовірність того, що він потрапить два рази.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,7; P2=0,8; P3=0,5; P4=0,6, розрахувати надійність схеми (рис. 31):

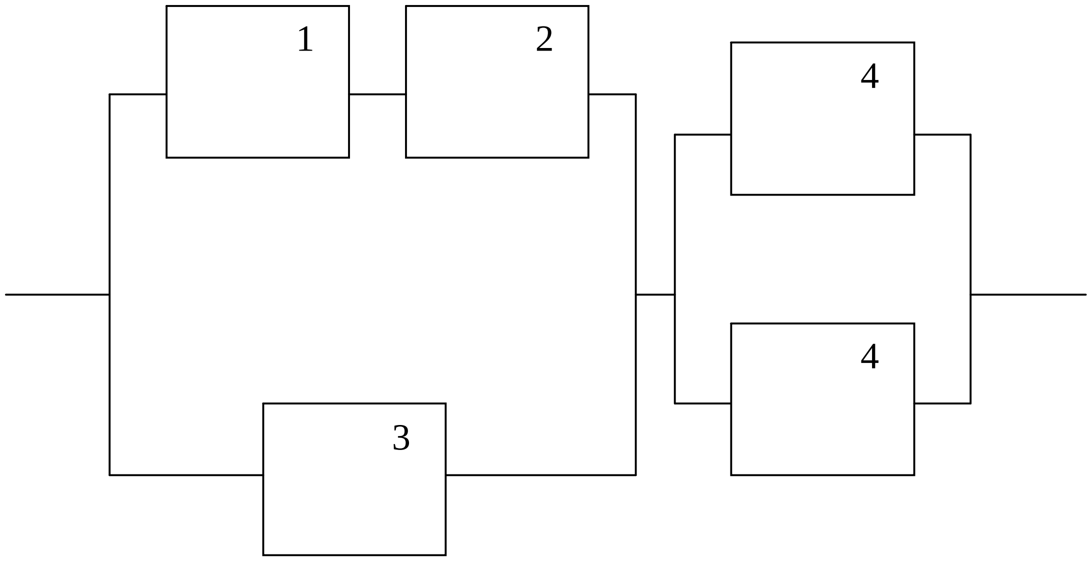


Рисунок 31

4 На деякій фабриці 30% усієї продукції виробляється першою машиною, 25%- другою машиною, а інша продукція - третьої. Перша машина дає 1% браку, друга –1,5% і третя - 2%. Визначити ймовірність того, що випадково обрана одиниця продукції виявиться бракованою.

5 Студент складає іспит автоматичному екзаменатору. На кожне питання відповідь дається "так" чи "ні". Яка ймовірність скласти іспити навмання, якщо для цього потрібно дати вірні відповіді не менш чим на сім питань з десяти?

6 За зміну виробляється 2000 деталей, що потім розподіляються на два ґатунки і складуються в два відповідних контейнери. Ймовірність виготовлення деталей першого ґатунку 0,6, другого- 0,4. На яку кількість деталей має бути розрахований кожен контейнер, щоб з імовірністю 0,9 він не був переповнений до кінця зміни?

7 При безупинній роботі ЕОМ відбувається в середньому одна аварійна зупинка за 100 год. роботи. Яка ймовірність, що за добу відбудеться аварійна зупинка?

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 38):

Таблиця 38

x_i	0	1	2	7	8
P_i	0,1	0,1	***p***	0,2	0,3

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P ($1 \le X < 8$).

9 Функція розподілу деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2 + B, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

Визначити параметри A і B, знайти вираження для щільності імовірності, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі $\left[-1; \frac{\pi}{6}\right]$.

10 Прилад для виміру глибини водойми дає систематичне заниження на 1м. Середньоквадратичне відхилення помилки приладу дорівнює 0,5 м.

1) Знайти ймовірність того, що помилка виміру не перевищить 1,5 м.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу помилки виміру. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Двадцять вимірів часу, необхідного для проходження всього маршруту автобусом, дали наступні результати (у хвилинах):

24,0	25,6	27,6	26,2	26,2	28,4	28,0	29,8	30,0	26,0
28,0	31,0	31,8	33,8	33,8	34,0	35,0	36,0	36,6	35,4

Знайти довірчі інтервали для середнього часу проходження маршруту з надійністю 0,99 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,95. Передбачається, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 39 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 39

X	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	10,6	12,0	13,4	14,7
Y	17,0	16,2	13,3	13,0	9,7	9,9	6,2	5,8	5,7

Варіант 18

1 З десяти лотерейних білетів виграшними є два. Визначити ймовірність того, що серед узятих навмання п'яти білетів два виявляться виграшними.

2 Ймовірність того, що деталь, виготовлена на першому верстаті, буде першосортною, дорівнює 0,7. При виготовленні такої ж деталі на другому верстаті ця ймовірність дорівнює 0,8. На 1 - му верстаті виготовлені 2 деталі, на 2 - му верстаті – 3 деталі. Яка ймовірність того, що всі деталі виявляться першосортними?

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,7; P2=0,8; P3=0,1, P4=0,2, розрахувати надійність схеми (рис. 32):

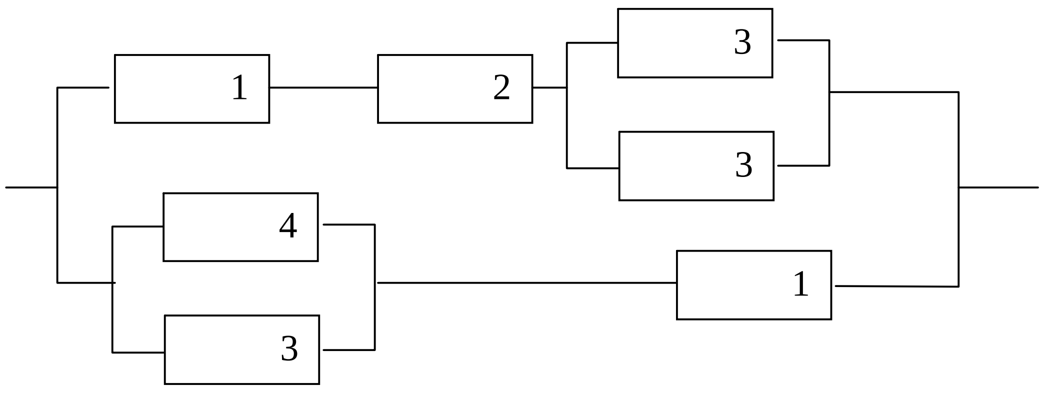


Рисунок 32

4 У цеху виготовляють деякі будівельні деталі, кожна з яких може бути дефектною з імовірністю 0,01 Деталь перевіряється контролером, що виявляє дефект з імовірністю 0,95. Крім того, контролер може помилково забракувати гарну деталь з імовірністю 0,05. Визначити ймовірність того, що деталь буде забракована.

5 Ймовірність виграшу на біржі протягом дня – 0,3. Яка ймовірність хоча б одного виграшу протягом трьох днів?

6 Для дослідів на міцність виготовлено 5000 зразків. Ймовірність руйнування зразка через випадкові дефекти його структури дорівнює 0,2 Визначити ймовірність руйнування: рівно 80 зразків; не менш 75 і не більш 125 зразків.

7 Середній термін служби транзистора – 2 роки. Яка ймовірність, що транзистор відмовить протягом першого року служби?

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 40):

Таблиця 40

x_i	-3	-1	0	4	5
P_i	0,2	0,3	0,1	***p***	0,1

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P ($-3 \le X < 4$).

9 Функція розподілу деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A+Bx^3, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

Визначити параметри A і B, знайти вираження для щільності імовірності, математичне сподівання і дисперсію, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [-1/2; 1/2].

10 Птицефабрика продає яйця, вага яких коливається від 60 г до 90 г.

1) Знайти відсоток яєць, вага яких не менше 75г.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу випадкової ваги окремо узятого яйця. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Результати гідрологічних спостережень протягом 20 років за величиною річкового стоку ріки (у куб. кілометрах) наведені нижче:

0,81	0,79	0,85	0,81	0,82	0,81	0,82	0,80	0,81	0,81
0,80	0,79	0,80	0,83	0,79	0,78	0,79	0,77	0,80	0,81

Знайти довірчі інтервали для середнього значення річного стоку з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 41 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 41

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Y	3,3	3,7	4,0	4,3	4,5	4,9	5,1	5,5	5,8	6,2

Варіант 19

1 У групі 12 чол., четверо мають спортивні розряди. Випадковим образом група розподіляється на дві команди. Визначити ймовірність того, що в кожній команді виявиться рівна кількість розрядників.

2 Два стрільці роблять по одному пострілі. Ймовірність влучення в мішень для першого дорівнює 0,7, а для другого 0,8. Визначити ймовірність поразки мішені.

3 За заданою надійністю елементів: P1=P2=0,1; P3=0,9, P4=0,2, розрахувати надійність схеми (рис. 33):

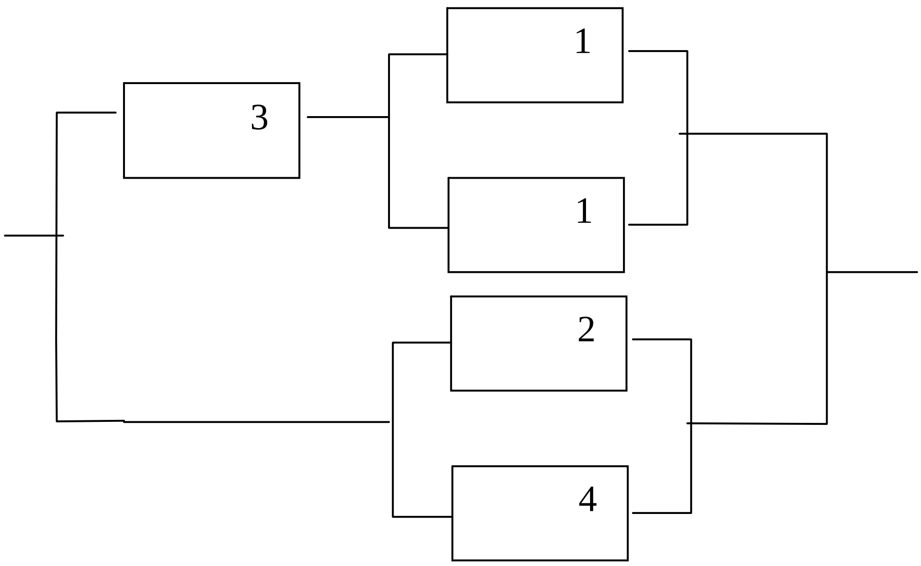


Рисунок 33

4 40 **%** усіх приладів, що випускаються, збираються з високоякісних деталей, а інші **-** з деталей звичайної якості. Надійність приладу, зібраного з високоякісних деталей, дорівнює 0,95, а зібраного з деталей звичайної якості – 0,7. Прилад випробувався протягом часу t і працював безвідмовно. Знайти ймовірність того, що прилад зібраний з високоякісних деталей.

5 При передачі повідомлення ймовірність перекручування одного знака дорівнює 0,1 Визначити ймовірність того, що повідомлення з десяти знаків містить не більш двох перекручувань.

6 За зміну виготовляється 2000 однотипних вузлів деякого приладу. Ймовірність того, що вузол доведеться відправити на додаткове регулювання, дорівнює 0,4. Ймовірність того, що кількість таких вузлів не перевищить К, дорівнює 0,95. Потрібно знайти К.

7 У середньому на 1 $м^2$ поверхні штучного супутника попадає за час його роботи на орбіті 400 мікрометеоритів. Визначити ймовірність влучення більше 5 мікрометеоритів на скло ілюмінатора, якщо його площа дорівнює 100 $см^2$.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 42):

Таблиця 42

x_i	-2	0	1	3	5
P_i	0,3	0,1	***p***	0,1	0,2

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P ($-2 \le X < 3$).

9 Функція розподілу деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$F(X)=\begin{cases}0, & x<1,\\ A+Bx^2, & 1\le x<2,\\ 1, & x>\ge 1.\end{cases}$$

Визначити параметри А і В, знайти вираження для щільності імовірності, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [-1/2; 1/2].

10 Питома вага продовольчих товарів у товарообігу в середньому складає 75%. Середнє квадратичне відхилення дорівнює 1%.

1) Знайти ймовірність того, що в поточному році питома вага продовольчих товарів у товарообігу перевищить 76%.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу для випадкового відхилення питомої ваги продовольчих товарів у товарообігу від 75%. Припустити, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

11 Однакові зразки деякого сплаву повинні містити рівно три грами срібла. Дослідження 20 зразків дало наступні результати (у міліграмах):

22960	32010	22980	33000	22950	33000	33040	33010	22980	33000
22980	33000	22950	22960	33010	22980	33000	33000	22960	33010

Знайти довірчі інтервали для середнього змісту срібла з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Припустити, що визначена величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 43 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 43

X	1,2	1,8	2,3	3,1	4,1	4,6	5,2	6,7	8,3
Y	5,01	4,72	4,07	3,81	3,40	3,64	3,11	2,88	2,83

Варіант 20

1 У групі 11 чоловік, шестеро з яких мають перші спортивні розряди. Визначити ймовірність того, що серед 5 випадково обраних спортсменів виявиться три першорозрядники.

2 Механізм складається з трьох вузлів. Ймовірність браку при виготовленні першого вузла дорівнює 0,08, другого вузла – 0,12 і третього – 0,01 Визначити ймовірність того, що при виготовленні механізму тільки другий вузол бракований.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,6; P2=0,2; P3=0,8; P4=0,7, розрахувати надійність схеми (рис. 34):

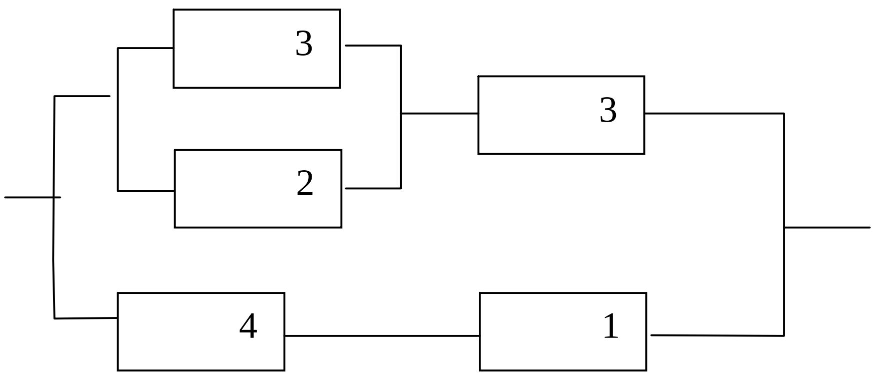


Рисунок 34

4 У партії з 600 радіоламп 200 виготовлені на першому заводі, 250 - на другому й інші - на третьому. Ймовірність того, що лампа, виготовлена на першому заводі, виявиться стандартною, дорівнює 0,97, на другому – 0,91, на третьому – 0,95. Навмання узята лампа виявилася стандартною. Визначити ймовірність того, що вона виготовлена на першому заводі.

5 Робітник обслуговує п'ять верстатів, кожний з яких може вийти з ладу протягом зміни з імовірністю 0,01 Визначити ймовірність того, що щонайменше чотири верстати пророблять усю зміну.

6 В усьому будинку гуртожитку використовуються 600 електроламп, кожна з яких може з імовірністю 0,3 перегоріти раніш, ніж пробить покладений термін. Визначити ймовірність того, що за даний термін доведеться замінити більш 200 електроламп.

7 У відділ вин звертаються в середньому три покупців за 40 хв. Яка ймовірність, що за годину у відділ вин звернуться більш трьох покупців?

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 44):

Таблиця 44

x_i	1	2	4	5	7
P_i	0,1	0,2	***p***	0,3	0,3

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) $P(2 \le X < 7)$.

9 Щільність імовірності деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \mathrm{Ax}, & 1 \le \mathrm{x} < 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт А, функцію розподілу, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

10 Середній ріст чоловіків у даному регіоні дорівнює 175 см. Середньоквадратичне відхилення росту дорівнює 10 см.

1) Знайти відсоток чоловіків, ріст яких перевищує 175 см.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу зросту чоловіків.

11 Двадцятилітні виміри товщини льоду в січні і лютому на акваторії водоймища дали наступні результати (у сантиметрах):

61	62	64	66	62	68	63	65	62	65
58	65	61	63	65	66	65	62	58	62

Знайти довірчі інтервали для середньої товщини льоду з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Мається на увазі, що обумовлений параметр розподілений за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 45 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y, визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 45

X	21	24	28	30	34	35	36	39	40
Y	1,8	1,3	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	1,1	0,8

Варіант 21

1 Є 6 деталей першого ґатунку, 5 - другого, 4 – третього ґатунку. Яка ймовірність того, що серед трьох випадково обраних деталей виявляться деталі всіх ґатунків?

2 Радист тричі викликає кореспондента. Ймовірність того, що буде прийнятий перший виклик, дорівнює 0,2, другий виклик – 0,3, третій виклик – 0,4. Яка ймовірність того, що кореспондент почує виклик?

3 За заданою надійністю елементів: P1=P2=0,8; P3=0,1, P4=0,2, розрахувати надійність схеми (рис. 35):

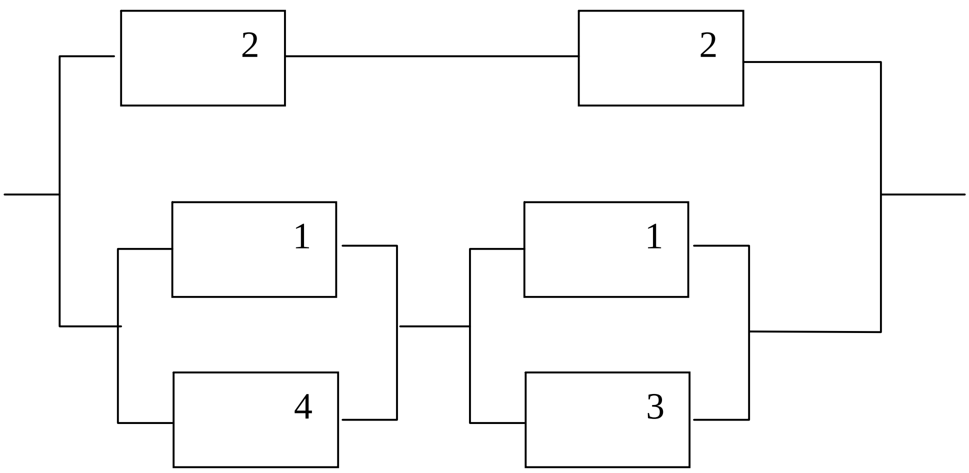


Рисунок 35

4 Для складання надходять деталі з маркою трьох заводів. З маркою заводу №1 надходить 45% усіх деталей та ймовірність того, що деталь нестандартна - 0,01; з маркою заводу №2 надходить 30% деталей та ймовірність того, що деталь виявиться нестандартною – 0,015;

з маркою заводу №3 надходить 25% усіх деталей та ймовірність того, що деталь виявиться нестандартною – 0,02 Знайти ймовірність того, яка нестандартна деталь, що надійшла на зборку, належить заводу №2

5 Ймовірність того, що електрична лампа проробить не менш 1000 ч, дорівнює 0,6. Визначити ймовірність того, що хоча б одна з п'яти ламп проробить весь цей термін.

6 ОТК перевіряє на стандартність 900 деталей. Ймовірність того, що деталь виявиться стандартною, дорівнює 0,9. Визначити ймовірність того, що в партії, що перевіряється, стандартними виявляться не більш 830 деталей.

7 На диспетчерський пункт у середньому надходить три замовлення в хвилину на таксі. Визначити ймовірність того, що за дві хвилини надійде: а) не більш трьох викликів; б) рівно п'ять викликів.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 46):

Таблиця 46

x_i	-3	-2	-1	0	4
P_i	0,2	0,1	***p***	0,3	0,1

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) $P(-3 \le X < 0)$.

9 Щільність імовірності деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A(3+x), & 0\le x<2,\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$$

Визначити коефіцієнт А, функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [-0,5; 0,5].

10 Фондовіддача по плодоовочевих заводах у середньому складає 0,8 гр.од. Середнє квадратичне відхилення дорівнює 0,2 гр.од.

1) Знайти ймовірність того, що в поточному році фондовіддача перевищить 1 гр. од.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу для випадкового відхилення фондовіддачі від середнього значення.

11 При розробленні технології виробництва нового матеріалу зроблено 20 проб і отримані наступні результати (у відсотках):

1,8	2,3	1,5	1,8	2,5	1,8	2,3	2,6	1,5	1,8
2,5	3,0	1,8	2,3	2,8	1,5	1,8	2,5	2,5	1,8

Знайти довірчі інтервали для середнього відсотка з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Передбачається, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 47 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y; визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 47

X	2,0	1,0	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Y	5,1	9,8	16,3	14,3	16,9	26,4	22,9	27,5	30,2

Варіант 22

1 З 10 білетів виграшними є 2 Визначити ймовірність того, що серед узятих навмання 5 білетів виявиться один виграшний.

2 Стріляють по деякій цілі, ймовірність влучення в яку при одному пострілі дорівнює 0,2 Постріли припиняються при першому влученні. Знайти ймовірність того, що буде зроблено рівно 6 пострілів.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,9; P2=0,3; P3=0,5, P4=0,6, розрахувати надійність схеми (рис. 36):

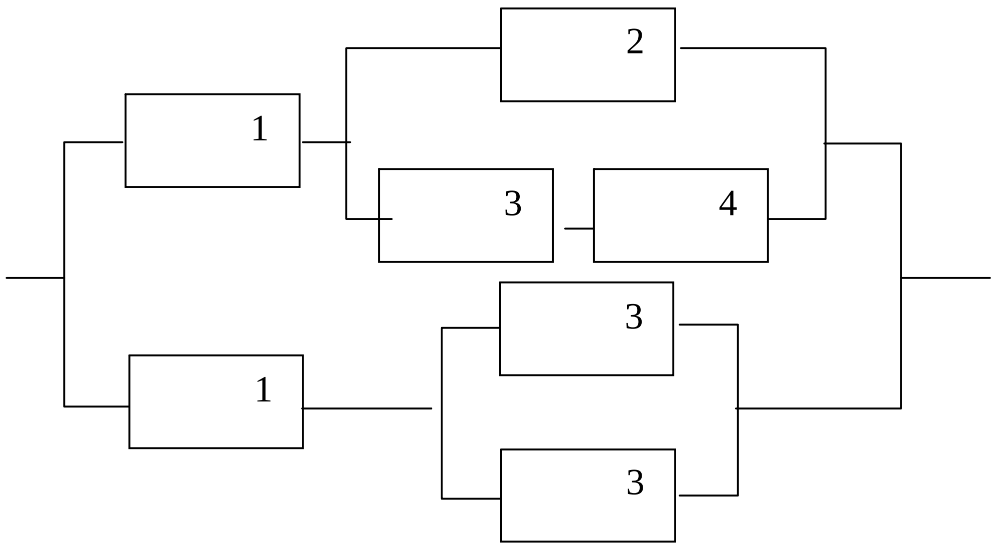


Рисунок 36

4 На двох верстатах виробляється однакова продукція. Продуктивність першого верстата в два рази більше продуктивності другого. Ймовірність появи браку на першому верстаті 0,1, на другому – 0,15. Виготовлені за зміну деталі складаються в контейнер. Знайти ймовірність того, що випадково обраний з контейнера виріб не виявиться бракованим.

5 ВТК перевіряє деякі вироби, кожний з яких незалежно від інших з імовірністю 0,02 може виявитися дефектним. Визначити ймовірність того, що з дев'яти деталей дефектними виявляться не більше двох.

6 У цеху працюють незалежно один від одного в однаковому режимі 100 верстатів, електропривід яких включений протягом 0,8 усього часу роботи. Визначити ймовірність того, що в довільно узятий момент часу виявляться включеними від 70 до 86 верстатів.

7 У середньому на станцію швидкої допомоги протягом години надходить 12 викликів. Знайти ймовірність того, що за двадцять хвилин надійде: рівно чотири виклики; не більш шести викликів.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 48):

Таблиця 48

x_i	-5	2	4	5	6
P_i	0,4	0,1	0,2	***p***	0,1

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P ($-5 \le X < 4$).

9 Щільність імовірності деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A(1+x), & 0\le x<3,\\ 0, & x\ge 3.\end{cases}$$

Визначити коефіцієнт А, функцію розподілу, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

10 Прилад для виміру кров'яного тиску систематично занижує тиск на 10 одиниць. Середньоквадратичне відхилення помилки приладу дорівнює 5 одиницям.

1) Знайти ймовірність того, що помилка при вимірі кров'яного тиску не перевищить 15 одиниць.

2) Записати формули щільності та функції розподілу помилки приладу.

11 Проведені виміри кількості опадів, що випали, у жовтні за період у 15 років для даної місцевості дали наступні результати (у міліметрах):

99	125	103	92	100	109	118	106
116	98	140	122	101	120	131	

Знайти довірчі інтервали для середнього значення кількості опадів, з довіреною імовірністю 0,99 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,95. Передбачається, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 49 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y; визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 49

X	0,3	0,25	0,20	0,14	0,12	0,10	0,09	0,08	0,05
Y	5,0	4,5	7,0	6,5	9,5	9,0	11,3	9,2	11,8

Варіант 23

1 З 36 білетів виграшними є 5. Визначити ймовірність того, що серед узятих навмання 5 білетів виявиться рівно 3 виграшних.

2 Абонент забув останню цифру номера телефону і набирає її на вмання. Визначити ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більш, ніж у три місця.

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,1; P2=0,4; P3=0,5, P4=0,2; P5=0,3; P6=0,2, розрахувати надійність схеми (рис. 37):

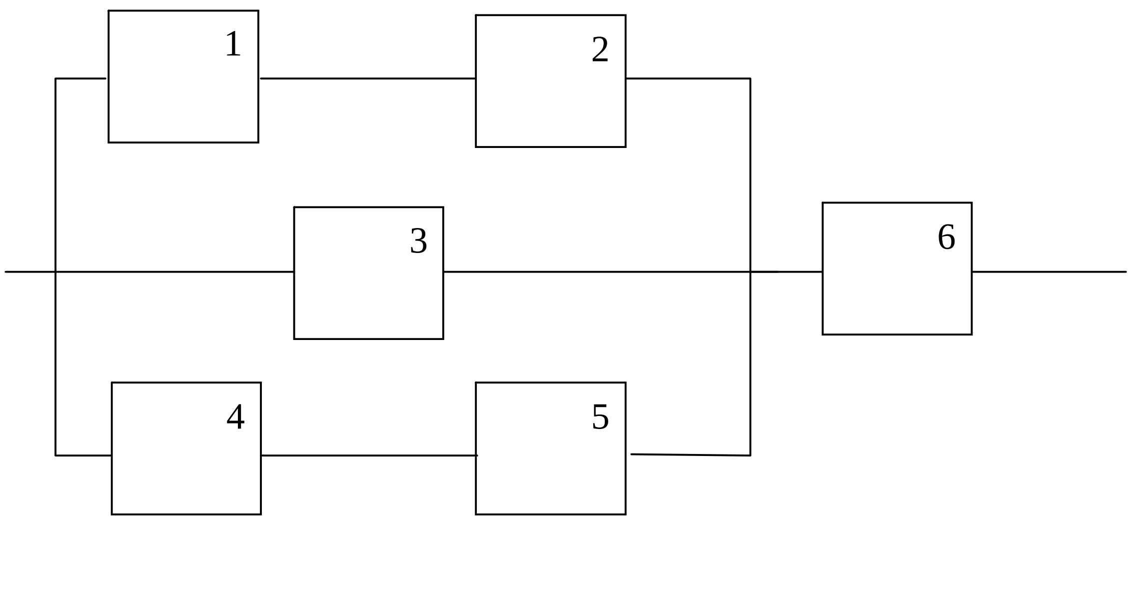


Рисунок 37

4 Деякі вироби перевіряються на стандартність двома контролерами, причому перший перевіряє 60%, а другий - 40% усієї продукції. Ймовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним при перевірці першим контролером, дорівнює 0,95, а другим – 0,9 (якість перевірки контролерів залежить від їхньої кваліфікації). Визначити ймовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним.

5 Робиться 10 незалежних пострілів по цілі. Ймовірність влучення при одному пострілі 0,25. Знайти ймовірність не менше 3 влучень.

6 Ймовірність того, які кульки, що виготовляються для підшипників, не вкладаються в припустимі розміри, дорівнює 0,1 Визначити ймовірність того, що в партії з 1000 штук, забракованих кульок залишиться не більш 240.

7 У камері Вілсона фіксується 30 зіткнень часток у годину. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини: не відбудеться жодного зіткнення; відбудеться більш одного зіткнення; відбудеться більш двох зіткнень.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 50):

Таблиця 50

x_i	-3	-1	0	1	4
P_i	0,1	0,1	***p***	0,3	0,2

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P $(-1 \le X < 1)$.

9 Щільність імовірності випадкової величини задана в такий спосіб:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A(3x+1), & 0\le x<2,\\ 0, & \mathrm{x}\ge 2.\end{cases}$$

Визначити коефіцієнт А, функцію розподілу, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

10 Врожай яблук, зібраний з одного дерева, розрізняється за кількістю цукру в плодах. Для даного дерева зміст цукру в плодах коливається від 7% до 13%.

1) Знайти відсоток яблук, зміст цукру в який не нижче 11%.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу випадкового відсотка цукру в окремо взятому яблуці.

11 Дано значення проміжків часу (перерв у газопостачанні Московської області, викликаних ушкодженнями на газопроводах середнього і високого тиску) у годинах:

1,0 2,2 2,6 3,0 4,0 1,3 2,3 2,8 3,0 4,3 1,5 2,5 3,0
5,0 3,0 1,5 2,5 3,0 3,4 4,0 2,0 2,5 3,0 3,8 6,0

Знайти довірчі інтервали для середнього значення проміжку часу з довіреною імовірністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Передбачається, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 51 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y; визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 51

X	3,0	1,5	1,0	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
Y	11,8	19,7	50,7	46,7	43,7	49,9	51,1	72,9	80,3

Варіант 24

1 Розглядаються всілякі п'ятизначні числа. Визначити ймовірність того, що всі цифри випадково обраного п'ятизначного числа різні.

2 Два стрільці зробили по пострілу в мішень. Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює 0,6, для другого – 0,9. Яка ймовірність того, що в мішень потрапили дві кулі?

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,2; P2=0,1; P3=0,2, P4=0,3, P5=0,4, розрахувати надійність схеми (рис. 38):

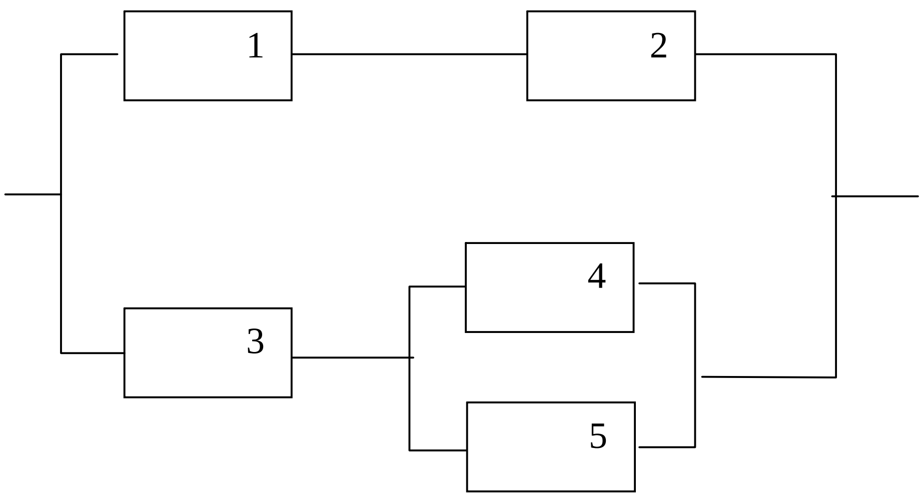


Рисунок 38

4 Є дві партії однотипних виробів з 12 і 10 штук, причому в кожній партії - по одному бракованому. Виріб, узятий навмання з першої партії, перекладено в другу, після чого вибирається навмання виріб із другої партії. Визначити ймовірність того, що в другий раз буде витягнутий бракований виріб.

5 Що імовірніше – виграти в рівносильного супротивника не більше трьох чи не менше п'яти партій з восьми, якщо нічийний результат виключений?

6 У меню студентської їдальні три перших блюда - борщ, розсольник і харчо. Ймовірність того, що довільний студент візьме борщ, дорівнює 0,4. Скільки порцій борщу має бути підготовлено, щоб з імовірністю 0,9 задовольнити попит, якщо їдальню за зміну відвідує 400 чоловік?

7 При масовому виробництві інтегральних схем ймовірність появи браку дорівнює 0,005. Визначити ймовірність того, що в партії з 600 виробів бракованими будуть: а) не більш ніж три вироби; б) рівно чотири вироби.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 52):

Таблиця 52

x_i	-2	-1	1	2	3
P_i	0,2	0,3	0,1	***p***	0,1

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P (-2$\le$X<4).

9 Щільність імовірності деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ Ax^2, & 1\le x<2,\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$$

Визначити коефіцієнт A**,** функцію розподілу, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [0,5; 2].

10 Питома вага продукції власного виробництва в коопторгах у середньому складає 51%. Середнє квадратичне відхилення дорівнює 6%.

1) Знайти ймовірність того, що в майбутньому році продукція власного виробництва буде укладена в межах від 45% до 55%.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу для випадкового відхилення продукції власного виробництва від її середнього значення.

11 Для визначення марки цементу були проведені іспити зразків цементного каменю на стиск, що дали наступні результати (кілограм на кв.сантиметр):

298 290 298 263 318 288 301 288 316 291 306 271

316 328 305 304 303 291 255 295 296 293 308 316 286

Знайти довірчі інтервали для середнього значення вимірюваної величини з довіреною імовірністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Передбачається, що вимірювана величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 53 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y; визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 53

X	1	2	3	5	10	20	30	50	100
Y	4,15	3,52	4,08	3,25	2,91	2,62	2,41	2,30	1,21

Варіант 25

1 30 мулярів, серед яких 6 вищого розряду, розподілені випадковим образом на 3 бригади по 10 чоловік у кожній. Яка ймовірність того, що всі муляри вищого розряду потраплять до першої бригади?

2 У першій урні 1 біла і 4 чорних кулі, у другій – 2 білих і 3 чорних, у третій - 3 білих і 4 чорних кулі. З кожної урни взяли по кулі. Яка ймовірність того, що серед вийнятих куль буде 1 біла і 2 чорних кулі?

3 За заданою надійністю елементів: P1=0,1; P2=0,4; P3=0,3, P4=0,2, P5=0,5, розрахувати надійність схеми (рис. 39):

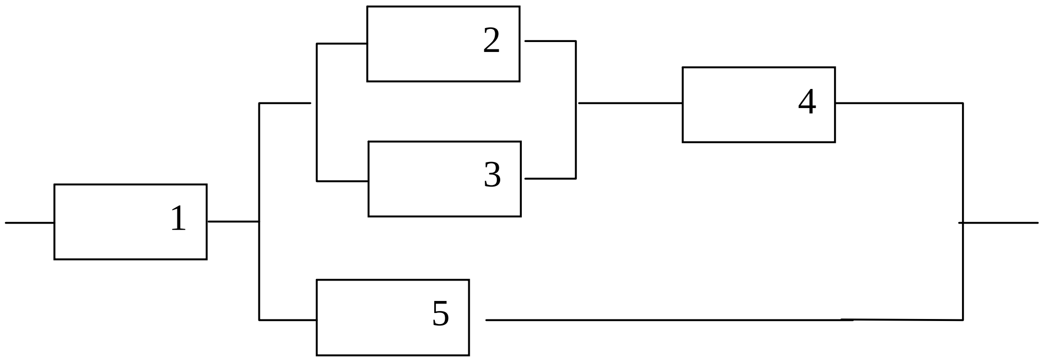


Рисунок 39

4 У тирі є п'ять різних за точністю бою гвинтівок. Ймовірність влучення в мішень для даного стрільця з них відповідно дорівнює 0,5; 0,6; 0,3; 0,7; 0,9. Визначити ймовірність влучення в мішень, якщо стрілець робить один постріл з виданої навмання гвинтівки.

5 Серед коконів шовковичного шовкопряда в даній партії 70% містять осіб жіночої статі. Визначити ймовірність того, що серед десяти випадково відібраних з цієї партії коконів містить осіб жіночої статі сім коконів.

6 За даними технічного контролю в середньому 10% виготовлених на заводі годиників вимагають додаткового регулювання. Чому дорівнює ймовірність того, що з 400 виготовлених годинників не менш 350 шт. не будуть мати потребу в додатковому регулюванні?

7 Автоматична телефонна станція одержує в середньому 300 викликів за годину. Визначити ймовірність того, що за дану хвилину вона одержить: рівно два виклики; більш двох викликів.

8 Випадкова величина X задана законом розподілу (табл. 54):

Таблиця 54

x_i	-3	0	1	4	6
P_i	0,1	0,2	$\boldsymbol{p}$	0,3	0,1

Знайти:

1) p;

2) функцію розподілу F(x) і її графік;

3) математичне сподівання M[X];

4) дисперсію D[X] і середнє квадратичне відхилення σ[X];

5) P (-3 $\le$ X<4).

9 Щільність імовірності деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A(x^2 + 2), & 0 \le x < 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт A, функцію розподілу, математичне сподівання, а також ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [1; 5].

10 Відповідно до статистичних спостережень середній врожай пшениці в даному регіоні дорівнює 25 ц/га. Середньоквадратичне відхилення дорівнює 0,4 ц/га.

1) Знайти, в скількох відсотках випадків врожай перевищить 30 ц/га.

2) Записати формули щільності розподілу і функції розподілу для випадкового значення врожаю по роках.

11 Проведені іспити на розтягання зразків конструкційної сталі дали наступні значення для максимальної напруги (кілограм на кв.сантиметр):

3200 4000 3800 4100 3400 4200 3700

3900 3200 4100 3800 4200 3500 4000 3900

Знайти довірчі інтервали для середнього значення максимальної напруги з надійністю 0,95 і середньоквадратичного відхилення від середнього значення з надійністю 0,99. Передбачається, що обумовлена величина розподілена за нормальним законом.

12 Дані експерименту наведені в таблиці 55 в безрозмірному вигляді. Потрібно:

а) побудувати кореляційне поле;

б) висловити гіпотезу про вид статистичної залежності між X і Y; визначити коефіцієнт кореляції і тісноту лінійного зв'язку;

в) знайти рівняння лінії регресії;

г) побудувати лінію регресії.

Таблиця 55

X	5,7	4,3	3,8	3,1	2,7	2,0	1,7	1,1	0,7
Y	4,15	3,52	4,08	3,25	2,91	2,62	2,41	2,3	1,21

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця А.1 - Значенняь функції $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290

Продовження таблиці А.1

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0071	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток Б

Таблиця Б.1 - Значення функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849	1,60	0,4452
0,01	0,004	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869	1,61	0,4463
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3888	1,62	0,4474
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907	1,63	0,4484
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925	1,64	0,4495
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944	1,65	0,4505
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962	1,66	0,4515
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980	1,67	0,4525
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997	1,68	0,4535
0,09	0,3569	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015	1,69	0,4545
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032	1,70	0,4554
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049	1,71	0,4564
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066	1,72	0,4573
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082	1,73	0,4582
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099	1,74	0,4591
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115	1,75	0,4599
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131	1,76	0,4608
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147	1,77	0,4616
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162	1,78	0,4625
0,19	0,0754	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177	1,79	0,4633
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192	1,80	0,4641
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207	1,81	0,4649
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222	1,82	0,4656
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236	1,83	0,4664
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251	1,84	0,4671

Продовження таблиці Б.1

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265	1,85	0,4678
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279	1,86	0,4686
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292	1,87	0,4693
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306	1,88	0,4699
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319	1,89	0,4706
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332	1,90	0,4713
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345	1,91	0,4719
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357	1,92	0,4726
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370	1,93	0,4732
0,34	0,1331	0,74	0,2704	1,14	0,3729	1,54	0,4382	1,94	0,4738
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394	1,95	0,4744
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406	1,96	0,4750
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418	1,97	0,4756
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429	1,98	0,4761
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441	1,99	0,4767
2,00	0,4773	2,26	0,4881	2,52	0,4941	2,78	0,4973	3,20	0,4993
2,02	0,4783	2,28	0,4887	2,54	0,4945	2,80	0,4974	3,30	0,4995
2,04	0,4793	2,30	0,4893	2,56	0,4948	2,82	0,4976	3,40	0,49966
2,06	0,4803	2,32	0,4898	2,58	0,4951	2,84	0,4977	3,50	0,49978
2,08	0,4812	2,34	0,4904	2,60	0,4953	2,86	0,4979	3,60	0,499841
2,10	0,4821	2,36	0,4909	2,62	0,4956	2,88	0,4980	3,70	0,499903
2,12	0,4830	2,38	0,4913	2,64	0,4959	2,90	0,4981	3,80	0,499928
2,14	0,4838	2,40	0,4918	2,66	0,4961	2,92	0,4983	3,90	0,499943
2,16	0,4846	2,42	0,4922	2,68	0,4963	2,94	0,4984	4,00	0,499968
2,18	0,4854	2,44	0,4927	2,70	0,4965	2,96	0,4985	4,50	0,499997
2,20	0,4861	2,46	0,4931	2,72	0,4967	2,98	0,4986	5,00	0,499997
2,22	0,4868	2,48	0,4934	2,74	0,4969	3,00	0,4987		
2,24	0,4875	2,50	0,4938	2,76	0,4971	3,10	0,4990		

Додаток В

Таблиця В.1 - Значення $t = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,87	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,47	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	140	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток Г

Таблиця Г.1 -Значення $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Список літератури

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. школа, 1993. – 224 с.

2 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. школа,1993. – 180 с.

3 Мицкевич И.П. Высшая математика: Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. – Мн.: Выш. шк.., 1993. – 269 с.

4 Беляев Б.И. Теория погрешностей и способ наименьших квадратов: Учеб. Для вузов. – М.: Недра, 1992. – 286 с.

5 Жалдак М.І. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології: Навч. посібник / М.І.Жалдак, Н.М. Кузьміна, С.Ю. Берлінська. – К.: Вища шк.., 1995. – 351 с.

Навчальне видання

ВАСИЛЬЄВА Людмила Володимирівна

ГЕТЬМАН Ірина Анатоліївна

ТОПТУНОВА Людмила Михайлівна

ЧОРНОМАЗ Володимир Миколайович

КУРС ЛЕКЦІЙ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ "ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА"

Навчальний посібник
для студентів вищих технічних навчальних закладів

Редактор І.І.Дьякова

Верстка О.П.Ордіна

43/2005. Підп. до друку 01.11.06. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 8,5. Обл.-вид. арк. 6,18.
Тираж 200 прим. Зам. № 292.

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003 р.