



Робочий зошит для майбутнього інженера пропонується для студентів технічних ВНЗ як різновид навчального посібника, що може бути застосований викладачами під час лекційних і практичних занять для інтенсифікації навчальної діяльності. Достатній обсяг завдань до модуля **Елементи лінійної та векторної алгебри**, призначений для самостійної роботи студентів, допоможе засвоїти їм не тільки навчальний предмет, а й майбутню професію.

Під час розгляду кожної теми надаються пояснення того, як пов'язані основні поняття з інженерною практикою. Для студентів, які намагаються самостійно оволодіти новим для себе поняттям, це робить його появу у навчальному курсі природним та обумовленим логікою. Цим матеріалом викладачі мають можливість скористуватись під час евристичної бесіди, мотивуючи таким чином необхідність вивчення теми.


Складання опорного конспекту до кожної теми може як попереджати так і закріплювати її вивчення. Завдяки наявності в студентів робочих зошитів лектор має можливість зосередитися на найбільш істотному матеріалі, опустити технічні деталі, залишити ряд питань для самостійного опрацювання, а також вести діалог зі студентами.


Детальне опрацювання навчального матеріалу прочитаної лекції і його застосування припускає використання навчальних посібників, серед яких «Вища математика для майбутніх інженерів» [3].

Опорний конспект  є найбільш зручним засобом взаємодії студента з викладачем, оскільки студент під час роботи з пунктом **Складаємо опорний конспект** у правому стовпчику на місці пропусків у вигляді крапок заносить не тільки відповіді, але й свої питання та відповіді на них викладача, його всілякі зауваження, додаткові пояснення, приклади й тощо.

Перевірка готовності до практичного заняття виконується за допомогою тестових завдань , до кожного з яких надаються варіанти


відповідей.

Під час розв'язування завдань студентам надається інформаційна підтримка . Самостійно працюючи із тестовим завданням пункту **Перевіряємо готовність до практичного заняття**, студент має можливість звернутись до опорного конспекту. Крім того викладач має можливість застосувати ці завдання на початку заняття для проведення експрес-опитування й актуалізації теоретичних знань студентів.


Розв'язування типових задач теми  виконується покроково із наданням методичних рекомендацій та інформаційних підтримок до кожного з кроків. Це дозволяє обмежитися під час практичного заняття розглядом лише найбільш важливих прикладів, залишивши інші студентам на самостійне опанування.

Необхідні записи під час розв'язування задач пункту **Вчимося розв'язувати типові задачі** виконуються студентом у зошиті настільки докладно, наскільки це йому необхідно.


Для навчання математичному моделюванню студентам немає необхідності вести докладні записи: досить відзначити в робочому зошиті найбільш важливе, додаткову інформацію й посилання на джерела під час розбору професійно-орієнтованих завдань з пункту **Вчимося моделювати**

професійну діяльність інженера , пов'язаних з майбутньою інженерною спеціальністю слухачів.


Кожен крок моделювання під час розв'язання професійно-орієнтованих завдань пояснюється. Після створення математичної моделі за допомогою рекомендацій та інформаційних підтримок студенту необхідно самостійно закінчити розв'язування завдання, застосовуючи знання та вміння набуті після складання опорного конспекту, підготування до практичного заняття, розв'язування типових задач.


Самостійне розв'язування завдань студент має можливість розпочати із будь-якого рівня поступово удосконалюючи уміння під час практичного заняття або домашньої роботи. Диференційований підбір завдань пункту **Вчимося самостійно розв'язувати завдання**  допоможе викладачу

розподілити його за рівнем складності між студентам різної підготовки. До

завдань надаються евристичні підказки .

У заключній частині вступної лекції або практичного заняття викладачеві необхідно дати деякі рекомендації про те, яке програмне забезпечення повинні мати студенти на своїх комп'ютерах.

Під час роботи з пунктом **Вчимося застосовувати CAS (ППЗ) під час розв'язування (обчислення) ...**  студенту необхідно скопіювати вміст компакт-диску (на форзаці посібнику) на жорсткий диск свого комп'ютеру та встановити всі педагогічні програмні засоби (ППЗ) та системи комп'ютерної алгебри (CAS) з метою отримання вмінь роботи із різними програмами, порівняння їх можливостей та обрання необхідних для використання в майбутній професійній діяльності.

Наприкінці модуля у пункті **Готуємось до модульної контрольної роботи**  пропонуються орієнтовні завдання із різним рівнем складності, що виносяться на контрольну роботу. До кожного завдання пропонується інформаційна підтримка.

У кінці робочого зошиту надаються відповіді, до яких студент має можливість звернутись з метою перевірки правильності виконання кожного завдання модуля.

Доцільно рекомендувати студентам зберегти свій індивідуальний конспект, що вийшов з робочих зошитів з усіма нотатками, питаннями, відповідями й доповненнями, які робилися протягом усього модуля. У майбутньому робочий зошит може бути використаний не тільки для підготовки до контрольних заходів, включаючи іспит, але й при створенні персональної бази знань і вмінь – особистого помічника – для подальшої навчальної й навіть професійної діяльності.

Тема 1. ВИЗНАЧНИКИ



Як пов'язаний визначник з інженерною практикою

Номограмою називається креслення, що є особливим зображенням функціональної залежності. Номограми широко застосовуються в інженерних розрахунках для однотипних обчислень. Основою для побудови номограм служать функціональні шкали, що виражають залежність між функцією й аргументом. До їхнього числа відносяться номограми з вирівняними точками. Вони прості й легко читаються (рис. 1.1).

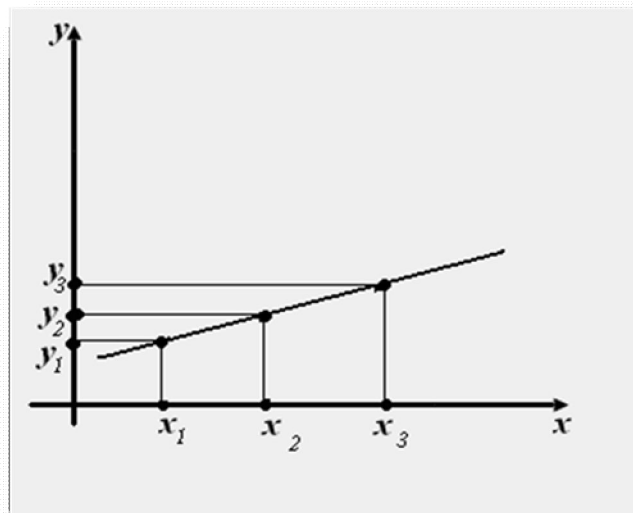


Рис. 1.1. Номограма з вирівняними точками

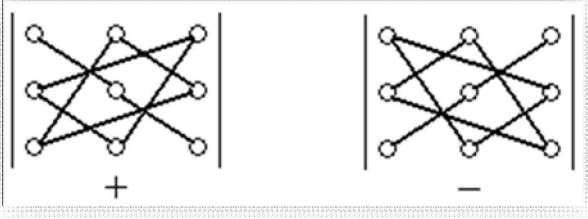
Номограми з вирівняними точками зображують рівняння типу:
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
, де $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ — координати трьох точок,

що лежать на одній прямій. У лівій частині рівняння ми бачимо вираз, що подано у вигляді **визначника 3-го порядку**.



Складаємо опорний конспект

Визначники 2-го, 3-го порядків	
Визначник (детермінант) другого порядку обчислюється за формулою $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$	= ...
Під час обчислення визначнику третього порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ перед добутками відповідних елементів ставляться знаки	$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{21} a_{32} + a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$
Символи a_{ij} називають елементами визначника, причому	перший індекс i вказує на ... , а другий індекс j – на ... , на перетині яких стоїть даний елемент.
Якщо всі елементи a_{ij} є числами, то результатом обчислення визначника є	...
Головну діагональ визначника другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ складають елементи	...
Головну діагональ визначника третього порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ складають елементи	...
Побічну діагональ визначника другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ складають елементи	...

<p>Побічну діагональ визначника третього порядку</p> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ <p>складають елементи</p>	...
<p>Визначник третього порядку можна обчислити за <i>правилом трикутника</i>, що подане у вигляді схеми</p> 	<p>Отже, за схемою обчислення визначника</p> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \dots$
<p>При обчисленні визначнику вигляду</p> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$ <p>використовують формулу</p>	$= \dots$
<p>Властивості визначників 2-го, 3-го порядків</p>	
<p>1. Якщо рядки визначника замінити стовпцями з тими ж самими номерами, то визначник не зміниться</p>	<p>Отже,</p> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \dots$
<p>2. Якщо переставити місцями два сусідні рядки (два стовпці) визначника, то його знак зміниться на протилежний</p>	<p>Отже,</p> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\dots$
<p>3. Якщо всі елементи рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює</p>	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \dots$
<p>4. Визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює</p>	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \dots$

5. Спільний множник усіх елементів рядка (стовпця) можна винести за значення визначника	Отже, $\begin{vmatrix} a_{11} & k a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & k a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & k a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \times \dots$
6. Визначник, який містить два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \dots$
7. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює	$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
8. Якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + k a_{21} & a_{12} + k a_{22} & a_{13} + k a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$ <p>то значення визначника ...</p>
Розкладання визначника за елементами довільного рядка чи стовпця	
Для визначника третього порядку	
$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ <p>мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називають визначник, утворений із даного визначника викресленням i-го рядка та j-го стовпця</p>	Отже, мінором елемента a_{23} є визначник $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
Порядок мінору M_{ij}	на ... менший від порядку даного визначника

<p>Для визначника третього порядку</p> $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{алгебраїчним доповненням}$ <p>A_{ij} елемента a_{ij} називають його мінор M_{ij} помножений на $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$</p>	<p>Отже, алгебраїчним доповненням елемента a_{23} є</p> $A_{23} = \dots \times \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$
<p>Теорема Лапласа. Визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення</p>	<p>Отже, для визначника третього порядку розклад за елементами першого рядка має вигляд</p> $\Delta = a_{11} \times \dots + a_{12} \times \dots + a_{13} \times \dots$
<p>Теорема. Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю</p>	<p>Отже, для визначника третього порядку виконуються така рівність:</p> $a_{11} \times \dots + a_{12} \times \dots + a_{13} \times \dots = 0$
Визначники n-го порядку	
<p><i>Визначником n-го порядку</i></p> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ <p>називають алгебраїчну суму всіх можливих добутків, які містять по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпця. Знак кожного доданка дорівнює $(-1)^t$, де t – число інверсій у других індексах</p>	<p>Отже,</p> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$ $= \sum_j \dots$
<p>За теоремою Лапласа визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення</p>	<p>Отже, розклад визначника за елементами першого рядка такий:</p> $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$ $= a_{11} \times \dots + a_{12} \times \dots + \dots + a_{1n} \times \dots$

Визначник n -го порядку, у якого під головною діагоналлю всі елементи дорівнюють нулю, є добутком елементів головної діагоналі	Отже, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots$
--	---



Перевіряємо готовність до практичного заняття

1.1. Елемент a_{23} визначника $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

А	Б
- 2	2



Згадайте, який зміст мають індекси елементів визначника.

1.2. Визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$ad + bc$	$bc - ad$	$ad - bc$	$ab - cd$



Скористайтесь правилом обчислення визначника II порядку.

1.3. Визначте доданок, якого бракує у виразі для обчислення визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \cdot 4 - 1(-2) \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \cdot 1 + \dots$$

А	Б	В	Г
- 12	12	6	- 6



Скористайтесь правилом обчислення визначника III порядку.

1.4. Не виконуючи обчислень, знайдіть значення визначника

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \text{ якщо відомо, що } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

А	Б	В	Г
-5	5	0	інша відповідь



Скористайтесь властивістю 2 визначників (тут і далі нумерація властивостей згідно опорного конспекту).

1.5. Відомо, що $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5$. Не виконуючи обчислень, знайдіть значення визначника $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

А	Б	В	Г
-5	5	0	інша відповідь



Скористайтесь властивістю 4 визначників.

1.6. Відомо, що $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5$. Не виконуючи обчислень, знайдіть значення визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

А	Б	В	Г
-5	5	0	інша відповідь



Зверніть увагу на те, що елементи другого та третього стовпців пропорційні та скористайтесь властивістю 6 визначників.

1.7. Знайдіть значення визначника $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

А	Б	В	Г
-12	12	0	інша відповідь



Скористайтесь властивістю 9 визначників.

1.8. Мінор M_{21} для визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$	$-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$	$-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$



Згадайте що називається мінором M_{ij} .

1.9. Алгебраїчне доповнення A_{12} для визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$	$-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$	$-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$



Згадайте що називається алгебраїчним доповненням A_{ij} .

1.10. Оберіть неправильний розклад визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

А	Б
за елементами 1-го стовпця $1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$	за елементами 1-го рядка $1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$
В	Г
за елементами 2-го рядка $2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$	за елементами 2-го стовпця $2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$



Скористайтесь теоремою про розкладання визначника за елементами рядка (стовпця).



Вчимося розв'язувати типові задачі

1.11. Обчисліть визначник 2-го порядку $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Застосуйте для обчислення визначника другого порядку формулу $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$:

Крок 2. Застосуйте для спрощення результату обчислення тригонометричну тотожність

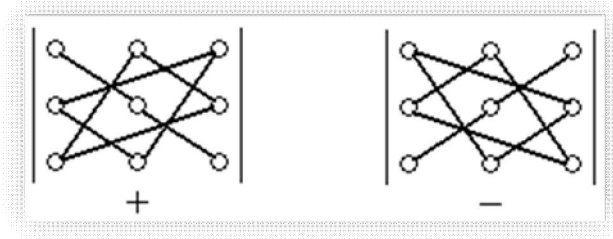
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha :$$

Відповідь: $\sin(\alpha - \beta)$.

1.12. Обчисліть визначник за правилом трикутника $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Застосуйте для обчислення схему правила трикутників:



Крок 2. Виконайте необхідні арифметичні операції над отриманими доданками:

Відповідь: – 44.

1.13. Обчисліть визначник, використовуючи його властивості

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Хід розв'язання.

І спосіб обчислення визначника.

Крок 1. Скористайтесь властивістю: якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число, то значення визначника не зміниться.

Від елементів 1-го рядка відняти елементи 2-го рядка; до елементів 2-го рядка додати елементи 3-го помножені на (-3):

Крок 2. Розкладіть отриманий визначник за теоремою Лапласа за елементами 1-го стовпця.



Теорема Лапласа: визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

II спосіб обчислення визначника.

Крок 1. Розкладіть визначник за теоремою Лапласа за елементами *l*-го рядка.



Для визначника третього порядку розклад за елементами першого рядка має вигляд: $\Delta = a_{11} \times \dots + a_{12} \times \dots + a_{13} \times \dots$

Крок 2. Обчисліть визначники 2-го порядку, що отримані під час розкладання визначника 3-го порядку на суму множників, за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Відповідь: -44 .

1.14. Обчисліть визначник 4-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Хід розв'язання.

Крок 1.

У визначнику є кілька нульових елементів, проте зручно, коли нульові елементи містяться в одному рядку чи стовпці. Зробимо, наприклад, нульовими всі елементи першого рядка, крім першого елемента. Для цього додамо до третього стовпця перший, після чого помножимо елементи першого стовпця на (-2) і додамо їх до відповідних елементів четвертого стовпця. Дістанемо:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \xrightarrow{+} & \downarrow \\
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} & \xrightarrow{\times(-2)+} \\
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \xrightarrow{+} & \downarrow \\
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \dots & 3 \end{vmatrix} & \xrightarrow{\times(-2)+} \\
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \xrightarrow{+} & \downarrow \\
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & -1 & \dots \\ -1 & 3 & -1 & \dots \\ 2 & 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} & \xrightarrow{\times(-2)+} \\
 \end{array}
 \end{array}$$

Крок 2. Тепер розкладемо отриманий визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

за елементами першого рядка

$$\Delta = a_{11} A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} = \dots$$

Крок 3. За допомогою перетворень у визначнику

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

отримаємо нулі у другому стовпці. Для цього до першого і другого рядків по черзі додамо третій рядок. Тоді:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\leftarrow \\ +}} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \xrightarrow{+} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Крок 4. Розкладемо утворений визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

за елементами

$$\text{другого стовпця } \Delta = a_{32} A_{32} = 1 \cdot (-1)^{3+2} M_{32} = \dots$$

Відповідь: -21 .



Вчимося моделювати професійну діяльність інженера

1.15. Виконайте зображення номограми з вирівняними точками та знайдіть значення ординати однієї з її точок:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & y & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Хід розв'язання.

Крок 1.

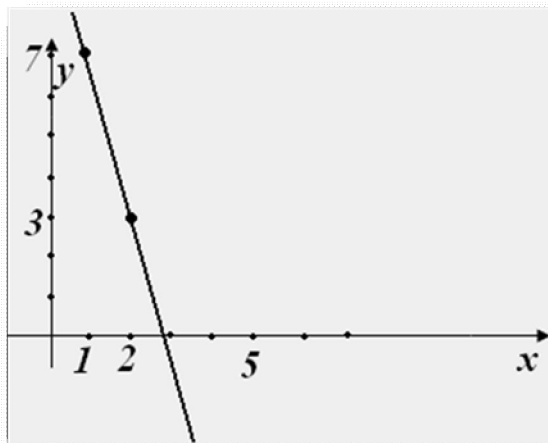


Рис. 1.2. Зображення номограми що подано у вигляді визначника 3-го порядку.

Номограму з вирівняними точками зображує рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & y & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ для якого три}$$

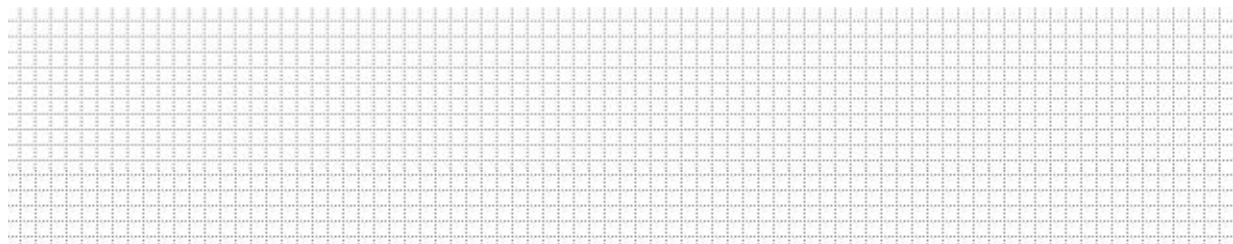
точки з відповідними координатами

(2, 3), (5, y), (1, 7) лежать на одній прямій. Для побудови зображення прямої нам достатньо координат двох точок (рис. 1.2). У лівій частині рівняння ми бачимо вираз,

Крок 2.

Переформулюйте умову на математичну. Обчисліть визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & y & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}, \text{ застосовуючи правило трикутника.}$$





Визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

можна обчислити за *правилом*

трикутника.

Крок 3.


Отриманий вираз, який залежить від y , прирівняйте до нуля. Розв'яжіть лінійне рівняння та обчисліть значення y .

Відповідь: $y = -9$.




Вчимося самостійно розв'язувати завдання

1.16.




I рівень		II рівень		III рівень	
Обчисліть визначник 2-го порядку					
а)	$\begin{vmatrix} 121 & 110 \\ 132 & 121 \end{vmatrix}$	а)	$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$	а)	$\begin{vmatrix} \log_2 5 & -\log_9 16 \\ \log_8 3 & \log_5 2 \end{vmatrix}$
б)	$\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$	б)	$\begin{vmatrix} 2t^2 & -3t \\ 4 & -t \end{vmatrix}$	б)	$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \operatorname{ctgx} & \operatorname{tgx} \end{vmatrix}$
 Застосовуйте формулу для розкладання визначника 2-го порядку					

1.17.




<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Обчисліть визначник 3-го порядку:	Знайдіть дійсні корені рівняння:	Доведіть рівність:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} =$ $= a \cdot b \cdot c \cdot (b-a)(c-a)(c-b)$
 <p>Обчислити визначник 3-го порядку можна різними способами.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Методом зведення до трикутного вигляду із послідовним застосуванням властивостей визначника. 2. Розкладанням визначника за елементами деякого рядка або стовпця. 3. За правилом трикутників. 		


1.18.

<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Обчисліть визначник:		
$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
 <p>Зверніть увагу на те, що перший стовпець містить три нульових елементи, що спрощує розклад визначника.</p>	 <p>На першому кроці «зробіть нулі» у першому стовпчику визначника, використовуючи властивість 8.</p>	 <p>На першому кроці «зробіть нулі» в будь-якому стовпці (рядку), використовуючи властивість 8.</p>

1.19.

<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
<p>Складіть алгебраїчні доповнення до елементів a_{11}, a_{12}, a_{13} визначника</p> $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -1 & -1 \\ 11 & -8 & 34 & 16 \\ 10 & -8 & 8 & -1 \end{vmatrix}$	<p>Обчисліть визначник, розклавши його за елементами першого рядка</p> $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$	<p>Обчисліть визначник</p> $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 27 & 20 \\ 2 & -11 & 10 & -3 \end{vmatrix}$
 <p>Скористайтесь означенням алгебраїчного доповнення</p>	 <p>Зробіть нульовими всі елементи першого рядка, крім першого елемента</p>	 <p>Скомбінуйте для обчислення зведення визначника до трикутного вигляду та розклад визначника за елементами деякого рядка (стовпця)</p>

1.20.



<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Знайдіть значення ординати однієї з точок номограми з вирівняними точками: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & y & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$	Знайдіть рівняння номограми з вирівняними точками: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$	За заданими точками з відповідними координатами складіть номограму (з виконанням зображення), знайдіть невідому координату x . Три точки з відповідними координатами лежать на одній прямій $(x, 3)$, $(5, -9)$, $(1, 7)$
 <p>Переформулюйте умову на математичну: обчисліть заданий у лівій частині рівняння визначник, застосовуючи будь-який з способів для цього</p>		



Вчимося застосовувати CAS під час обчислення визначників

1.21. Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ за допомогою *CAS Derive*.

Хід обчислення.

- Відкрийте вікно *CAS Derive*.
- За допомогою опції *Author-Matrix* уведіть визначник:
 - розмір визначника у вікні *Matrix Setup*;
 - числові значення елементів рядків і стовпців у вікні *Author 3×3 matrix*;
 - номер виразу, під яким записано визначник.
- За допомогою опції *Author-Expression* обчисліть визначник натиснувши кнопку  на панелі задач , яка знаходиться в нижній частині вікна програми.
- Під наступним номером після номеру виразу буде отримано вираз, що відповідає умові завдання.

1.22. Знайдіть значення коефіцієнта k рівняння номограми за допомогою *CAS Mathcad*.

$$\begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

Хід обчислення.

1. Відкрийте вікно *CAS Mathcad*.
2. За допомогою опції *Добавить-Матрицу* введіть визначник:
 - розмір визначника у вікні *Вставка матрицы*;
 - числові значення елементів рядків і стовпців у шаблоні, що з'явиться у вікні програми.
3. За допомогою опції *Символика-Матрицы-Определитель* обчисліть визначник.
4. Під шаблоном визначника буде отримано вираз, що відповідає умові завдання.

Тема 2. МАТРИЦІ



Як пов'язані матриці з інженерною практикою

Два залізобетонних заводи випускають вироби M , N , P вищої, першої й другої категорії якості. Кількість випущених кожним заводом виробів по кожній категорії якості характеризується наступною таблицею 2.1.

Таблиця 2.1.

Кількість випущених кожним заводом виробів

Категорія якості	Готові вироби					
	перший завод			другий завод		
	M	N	P	M	N	P
Вища	150	240	320	280	300	450
Перша	100	130	175	120	150	170
Друга	25	15	20	30	20	18

Який загальний випуск виробів по зазначених категоріях якості ?

Кількість виробів, що випущені першим заводом, можна розглядати як елементи таблиці A , а другим заводом – як елементи таблиці B :

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 240 & 320 \\ 100 & 130 & 175 \\ 25 & 15 & 20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 280 & 300 & 450 \\ 120 & 150 & 170 \\ 30 & 20 & 18 \end{pmatrix}.$$

Таблиці, які задано в такому вигляді, називають **матрицями**. Над матрицями можна виконувати різні дії.

Складаючи відповідні елементи заданих матриць, одержимо матрицю C , яка визначає загальне число виробів по зазначених категоріях

$$\text{якості: } C = \begin{pmatrix} 150+280 & 240+300 & 320+450 \\ 100+120 & 130+150 & 175+170 \\ 25+30 & 15+20 & 20+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 & 540 & 770 \\ 220 & 280 & 345 \\ 55 & 35 & 38 \end{pmatrix}.$$



Складаємо опорний конспект

Матриці	
<p>Таблицю</p> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$ <p>що складається з $m \times n$ чисел a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$), називають матрицею</p>	<p>Отже, матриця, що складається з 3×2 чисел a_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$) має вигляд</p> $A = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix}$
Числа a_{ij} - елементи матриці, де	i вказує ..., а j - ...
Добуток кількості рядків на кількість стовпчиків $m \times n$ називають розміром матриці	Отже, для матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ розмір ...
Коротко матрицю позначають так: $A = (a_{ij})$, де $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ та записують у вигляді таблиці	$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$
Матрицю A розміру $m \times n$ позначають $A_{m \times n}$	Отже, матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ позначають ...

Матрицю, у якої число рядків дорівнює числу стовпців, називають <i>квадратною</i>	Отже, квадратна матриця 3×3 має вигляд $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$
Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матрицю називають <i>нульовою</i>	Отже, нульова матриця 3×3 має вигляд $A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$
Квадратну матрицю називають <i>трикутною</i> , якщо всі елементи, що розташовані під (над) головною діагоналлю, дорівнюють нулю, а серед тих, що залишилися, є ненульові	Отже, трикутна матриця 3×3 має вигляд $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}$
Квадратну матрицю, всі елементи якої, крім діагональних, дорівнюють нулю, називають <i>діагональною</i>	Отже, діагональна матриця 3×3 має вигляд $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}$
Квадратну матрицю, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, а всі інші – нулю, називають <i>одиничною</i>	Отже, одинична матриця розміру 3×3 має вигляд $E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
Матрицю A^T називають <i>транспонованою</i> до матриці A , якщо рядки матриці A^T є стовпцями матриці A , а стовпці – рядками матриці A	Отже, до $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ транспонованою є $A^T = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$
Матрицю, яка містить один стовпець, називають <i>вектор-стовпцем</i> та записують у вигляді $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$	Отже вектор-стовпець розміру 3×1 записують у вигляді $A = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Матрицю, яка містить один рядок, називають <i>вектор-рядком</i> та записують у вигляді $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$	Отже вектор-рядок розміру 1×3 записують у вигляді $A = (\quad \quad \quad)$
Будь-якій квадратній матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можна поставити у відповідність визначник $\det(A)$ (або $\Delta(A)$)	$\det(A) = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$
Квадратну матрицю A називають <i>невиродженою</i> , якщо її визначник	...
Якщо $\det(A) = 0$, то матрицю A називають	...
Лінійні операції над матрицями та операція множення матриці на матрицю	
Сумою матриць A і B однакових розмірів є матриця $A + B$ того ж самого розміру, кожен елемент якої є сумою відповідних елементів матриць A і B , тобто якщо то $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$	$A + B = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$
Добутком дійсного числа λ на матрицю є матриця, кожен елемент якої є добутком цього числа на відповідні елементи матриці, тобто якщо то $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$	$\lambda A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$
Різницю матриць $A - B$ однакових розмірів визначають як суму матриці A і матриці B , помноженої на -1 : $A - B = A + (-1) \cdot B$, тобто якщо	то

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$	$A - B = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$
Матриці A і B (тут A - перша матриця, B - друга матриця) називають узгодженими, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B	Отже, до матриці A розмірів 2×3 узгодженою може бути матриця B розміром $3 \times \dots$
Добутком матриці A на матрицю B , розміри яких 2×3 і 3×2 відповідно, для $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix},$ називають матрицю $C = AB$ розміру	..., де $C = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$
Якщо A і B – матриці однакового розміру, то $A + B =$...
Якщо A - матриця, α, β – довільні сталі, то $(\alpha + \beta)A =$...
Якщо A - матриця, α, β – довільні сталі, то $\alpha(\beta A) =$...
Якщо A, B, C - матриці, де C – матриця узгоджена з A і B , то $(A + B)C =$...
Якщо A - матриця та A^T - транспонована до неї, то $(A^T)^T =$...
Якщо A, B, C - матриці, де C – матриця того ж розміру, що A і B , то $A + (B + C) =$...
Якщо A і B – матриці однакового розміру, α – довільна стала, то $\alpha(A + B) =$...
Якщо A і B – узгоджені матриці, α – довільна стала, то $(\alpha A)B =$...
Якщо A, B і C – узгоджені матриці, то $(A B) C =$...
Якщо A і B – матриці однакового розміру, то $(A + B)^T =$...

Якщо A і B – узгоджені матриці, то $(A \cdot B)^T =$...
Якщо A і E (єдинична) – узгоджені матриці, то $A_{m \times n} \cdot E_{n \times n} =$...
Обернена матриця	
Обернена матриця A^{-1} існує тільки	для кожної ... матриці A
Якщо виконуються рівності $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – єдинична матриця, того ж розміру, що й A , то	матрицю A^{-1} називають ... до матриці A
Транспонована матриця, що складається з алгебраїчних доповнень A_{ij} до відповідних елементів a_{ij} матриці до матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ має вигляд	$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$
Обернену матрицю A^{-1} до матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ знаходять за формулою	$A^{-1} = \frac{1}{\dots} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$
Матричні рівняння	
Матричне рівняння $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ де } -$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{невироджена}$ матриця, а $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} -$ вектори-стовпці може бути записано у вигляді	...

Розв'язати матричне рівняння $AX=B$, де A і B – відомі матриці, означає	знайти невідому матрицю ..., що задовольняє це матричне рівняння
Розв'язок матричного рівняння $AX=B$, де A і B – відомі матриці, знаходять за формулою	$X = \dots$
Ранг матриці	
Визначник порядку k , складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називають	... k -го рядку матриці A
Найбільший порядок відмінного від нуля мінору матриці називають	... матриці A і позначають $r(A)$
Ранг нульової матриці дорівнює	...
Міnor, порядок якого визначає ранг матриці, називають	...
Ранг матриці можна знаходити так. Якщо в матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ знайдено відмінний від нуля міnor:	
1) 2-го порядку, а міnори порядку вище 2-го дорівнюють нулю, то ранг матриці	1) дорівнює ... ;
2) k -го порядку, то ранг матриці	2) не менший ... ;
3) k -го порядку та всі міnори $(k+1)$ -го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці	3) дорівнює ... ;
4) $(k+1)$ -го порядку, то переходять до дослідження міnorів	4) порядку
Ранг матриці не зміниться, якщо над нею виконати елементарні перетворення, а саме:	1) переставити місцями ... ; 2) помножити кожний елемент ... ; 3) додати до елементів рядка (стовпця) ... ; 4) викреслити



Перевіряємо готовність до практичного заняття

2.1. Елемент a_{11} суми матриць $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
0	2	-2	інша відповідь



Скористайтесь означенням суми двох матриць.

2.2. Елемент a_{22} різниці матриць $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
1	5	-1	інша відповідь



Скористайтесь означенням різниці двох матриць.

2.3. Матриця $A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$	інша відповідь



Скористайтесь означенням добутку матриці на число.

2.4. Елемент c_{23} добутку двох матриць $C=AB$ дорівнює:

А	Б	В	Г
добутку відповідних елементів матриць A і B	сумі добутків відповідних елементів 2-го стовпця матриці A і 3-го рядка матриці B	сумі добутків відповідних елементів 2-го рядка матриці A і 3-го стовпця матриці B	інша відповідь



Скористайтесь означенням добутку двох матриць.

2.5. Елемент a_{21} добутку двох матриць $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$-1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1$	$1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2)$	$-1 \cdot 1$	інша відповідь



Скористайтесь означенням добутку двох матриць.

2.6. Розв'язок матричного рівняння $AX=B$ знаходиться за формулою:

А	Б	В	Г
$X = \frac{B}{A}$	$X = B \cdot A^{-1}$	$X = A^{-1} \cdot B$	інша відповідь



Скористайтесь формулою для розв'язку матричного рівняння $AX=B$.

2.7. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

оберіть неправильне твердження:

А	Б	В	Г
A і D неузгоджені	A і B узгоджені	B і C неузгоджені	C і A узгоджені



Скористайтесь означенням узгоджених матриць.

2.8. Добутком матриць $A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 4}$ є матриця розміром:

А	Б	В	Г
2×4	3×3	3×4	2×3



Скористайтесь означенням добутку двох матриць.

2.9. Добутком вектора-рядка з двох елементів на вектор-стовпець з двох елементів є

А	Б	В	Г
вектор-рядок з двох елементів	вектор-стовпець з двох елементів	матриця розміром 2×2	інша відповідь



Скористайтесь означенням добутку двох матриць.

2.10. Добутком вектора-стовпця з двох елементів на вектор-рядок з двох елементів є

А	Б	В	Г
вектор-рядок з двох елементів	вектор-стовпець з двох елементів	матриця розміром 2×2	інша відповідь



Скористайтесь означенням добутку двох матриць.

2.11. Одинична матриця розміру 3×3 має вигляд:

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Скористайтесь означенням одиничної матриці.

2.12. Якщо $\det(A) = 2$, то $\det(A^{-1})$ дорівнює:

А	Б	В	Г
0,5	2	-2	інша відповідь



Скористайтесь властивостями оберненої матриці.

2.13. Визначіть ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
1	2	3	інша відповідь



Рангом матриці називають найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

2.14. Визначіть ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
1	2	3	інша відповідь

2.15. Визначіть ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
1	2	3	інша відповідь

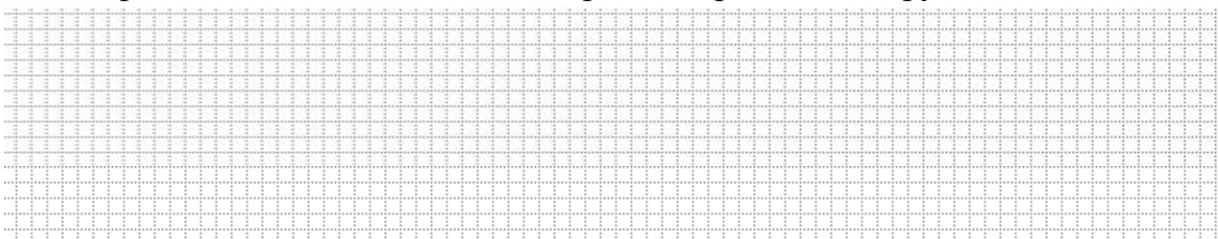


Вчимося розв'язувати типові задачі

2.16. Обчисліть значення виразу $4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Виконайте множення першої матриці на 4, а другої на 3.



Скористайтесь означенням добутку матриці на число: *добуток дійсного числа λ на матрицю* є матриця, кожен елемент якої є добутком цього числа на відповідні елементи матриці.

Крок 2. Обчисліть різницю отриманих матриць.

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 12 & -8 & 20 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 \\ -3 & 0 & 15 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix} =$$



Скористайтесь правилом обчислення різниці двох матриць: *різниця двох матриць* дорівнює матриці елементи якої дорівнюють різниці відповідних елементів матриці-зменшуваного та матриці-від'ємника.

Відповідь: $\begin{pmatrix} -10 & -12 & 5 \\ 15 & -8 & 5 \\ 7 & -1 & 18 \end{pmatrix}$

2.17. Обчисліть добуток матриць AB , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Хід розв'язання.

Крок 1. Визначте розмір матриць та з'ясуйте чи є вони узгодженими.

Розмірність матриці A :

Розмірність матриці B :



Розміром матриці називається пара чисел $m \times n$, де m - кількість рядків, а n - кількість стовпців матриці.

Крок 2. Визначте розмір матриці AB :



Добутком матриці $A_{m \times n}$ на матрицю $B_{n \times k}$ є матриця $C_{m \times k}$

Крок 3. Обчисліть елементи матриці-добутку.

$$a_{11} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) =$$

$$a_{22} =$$

$$a_{12} =$$

$$a_{31} =$$

$$a_{21} =$$

$$a_{32} =$$



Елемент a_{ij} матриці AB дорівнює сумі добутків відповідних елементів i -ого рядка матриці A та j -ого стовпця матриці B .

Крок 4. Запишіть отриману матрицю AB .

Відповідь: $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 12 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$.

2.18. Знайдіть $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 2x - 5$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Складіть вираз $f(A)$, значення якого необхідно обчислити.



Якщо $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, то для будь-якої квадратної матриці A $f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nE$, де E – одинична матриця того ж розміру, що й матриця A .

Крок 2. Обчисліть значення отриманого виразу за діями.

$$1) A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$2) 2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$3) 5E = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$4) A^2 + 2A - 5E = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

2.19. Знайдіть обернену матрицю до матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ та виконайте

перевірку.

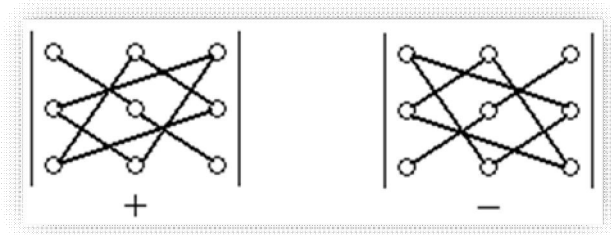
Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть визначник матриці A .

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$



Застосуйте для обчислення схему правила трикутників:



Крок 2. Оскільки $\det(A) = 1 \neq 0$, то матриця A – невироджена, тобто має обернену. Знайдіть алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів матриці A .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$A_{13} =$$

$$A_{12} =$$

$$A_{21} =$$

$$A_{22} =$$

$$A_{31} =$$

$$A_{23} =$$

$$A_{32} =$$

$$A_{33} =$$



Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називають його мінор M_{ij} , помножений на $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називають визначник, утворений із даного визначника викресленням i -го рядка та j -го стовпця.

Крок 3. Запишіть матрицю A^{-1} .



Скористайтесь формулою для знаходження оберненої матриці:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Крок 4. Виконайте перевірку.

$$A \cdot A^{-1} =$$

$$A^{-1} \cdot A =$$



Скористайтесь означенням матриці, оберненої до матриці A : матрицю A^{-1} називають *оберненою* до матриці A , якщо виконуються рівності $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = E$, де E – одинична матриця того ж розміру, що й A .

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2.20. Розв'яжіть матричне рівняння $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 12 & -10 \end{pmatrix}$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Позначимо $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 12 & -10 \end{pmatrix}$. У такому випадку

подане матричне рівняння запишеться як $XA=B$. Виразіть з цього рівняння матрицю X .

Крок 2. Знайдіть матрицю A^{-1} .

$$\det(A) =$$

$$A_{11} =$$

$$A_{21} =$$

$$A_{12} =$$

$$A_{22} =$$

$$A^{-1} =$$



Скористайтесь формулою для знаходження оберненої матриці:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Знайдіть матрицю X за формулою $X = B \cdot A^{-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 12 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix} =$$



Елемент a_{ij} матриці AB дорівнює сумі добутків відповідних елементів i -ого рядка матриці A та j -ого стовпця матриці B .

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

2.21. Знайдіть ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$

Хід розв'язання.

Виконуючи елементарні перетворення матриці, зведіть матрицю до

Крок 1. Для цього другий рядок додайте до третього.
Крок 2. Перший рядок помножений на (-2) додайте до другого.
Крок 3. Третій рядок, помножений на (-1) додайте до четвертого.
Крок 4. Другий рядок додайте до четвертого.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \times (-2) + \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times (-1) + \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 7 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix};$$

Крок 6. Третій рядок додайте до першого.

Крок 8. Викреслити нульовий рядок.

Крок 10. Поміняйте місцями третій та четвертий стовпець.

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 7 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \times (-7) \\
 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 7 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times (-3) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

38

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$



Застосуйте для обчислення правило обчислення визначників, що мають трикутний вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}.$$

Крок 12. Визначить ранг матриці.

$$r(A) =$$



Скористайтесь означенням рангу матриці: *рангом матриці* називають найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Відповідь: $r(A) = 3$.



Вчимося моделювати професійну діяльність інженера

2.22. За заданою таблицею 2.2 «Витрати-випуск НКМЗ» визначте, якими мають бути трудові ресурси та рівні випусків продукції у кожному виробничому секторі (I-III), якщо припускається в наступному терміні спожити 50 тис. т продукції металевого цеху, 70 тис. машин та винайняти 60 робітників.

Таблиця 2.2.

Витрати – випуск НКМЗ

Виробничий сектор	Споживаючий сектор x_{ij}				Валовий випуск x_j
	I	II	III	Державний сектор (кінцевий продукт) y_j	
I	8	6	4	12	30
II	10	2	4	24	40
III	6	4	4	46	60

Хід розв'язання.

Крок 1. Переформулюйте умову на математичну. Проаналізуйте умову, з'ясуйте як складається й застосовується модель Леонтьєва та введіть позначання x_j - валовий об'єм продукції, y_i - кінцевий продукт. Визначте елементи матриці A як коефіцієнти прямих матеріальних витрат, які характеризують кількість продукту i , що використовується під час виробництва одиниці продукції j . Для цього скористаємось пропозицією про пропорційну залежність між витратами та об'ємами виробництва $x_{ij} = a_{ij}x_j$, де x_{ij} - об'єм продукції i -тої галузі, що споживається j -тою у процесі виробництва.



Для складання матриці A необхідно обчислити її елементи $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$.

Тоді:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}: \quad a_{11} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}; \quad a_{21} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; \quad a_{31} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}; \quad a_{12} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20};$$

$$a_{22} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}; \quad a_{32} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}; \quad a_{13} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}; \quad a_{23} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}; \quad a_{33} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}.$$

Складаємо матрицю A :

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Крок 2.

Перевірте продуктивність матриці A .



Економічний зміст продуктивності полягає в наступному: матриця $A \geq 0$ продуктивна, якщо існує такий план випуску продукції, що кожний об'єкт має можливість виробити деяку її кількість.

Продуктивність матриці $A \geq 0$ є необхідною й достатньою умовою існування, одиничності й невід'ємності розв'язків системи рівнянь $(E - A)X = Y$, яке при будь-якому невід'ємному Y , можна записати у вигляді $X = (E - A)^{-1}Y$, де A - матриця

коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, $Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}$ – матриця нового кінцевого

продукту, X – матриця об'ємів валової продукції.

Дана теорема показує, що при розрахунку плану по балансовій моделі необхідно заздалегідь знати, чи є технологічна матриця A продуктивною.

Продуктивність матриці перевіряється в чотири етапи.

1. Значення усіх елементи головної діагоналі менше 1.

$$a_{11} < 1; \quad a_{22} < 1; \quad a_{33} < 1.$$

2. Добутки симетричних відповідних елементів $a_{ij} \cdot a_{ji}$ менше одиниці.

3. Суми елементів, що знаходяться в одному рядку менше одиниці.

4. Норма матриці, що співпадає з максимальним значенням сум елементів, що знаходяться в одному рядку менше одиниці.

Перевіряємо продуктивність матриці:

$$1) \ a_{11} = \dots < 1; \ a_{22} = \dots < 1; \ a_{33} = \dots < 1.$$

2)

$$a_{12} \times a_{21} = \dots \times \dots < 1; \quad a_{13} \times a_{31} = \dots \times \dots < 1; \quad a_{23} \times a_{32} = \dots \times \dots < 1.$$

$$3) \ a_{11} + a_{12} + a_{13} = \dots < 1; \quad a_{21} + a_{22} + a_{23} = \dots < 1;$$

$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = \dots < 1.$$

4) Норма матриці A ($\|A\|$ – модуль значення визначника): $\|A\| = \max \{ \dots ; \dots ; \dots \} = \dots < 1.$

Тобто, матриця A продуктивна і для будь-якої матриці кінцевого продукту Y існує матриця валових випусків X , яка задовольняє матричному рівнянню $X = AX + Y$. Це рівняння запишемо у вигляді $(E - A)X = Y$.

Крок 3. Для того, щоб розв'язати останнє рівняння, знайдіть матрицю $E - A$.

$$E - A =$$



Різницю матриць $E - A$ визначають як суму матриці E і матриці A , помноженої на -1 : $E - A = E + (-1) \cdot A$.

Крок 4. Обчислюємо визначник матриці $E - A$.

$$|E - A| =$$



Визначник матриці 3-го порядку може бути обчислений за визначенням:
Значення виразу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}.$$

називають *визначником третього порядку*

Крок 5. Оскільки $|E - A| \neq 0$, розв'язок рівняння $(E - A)X = Y$ можна знайти за формулою $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$. Для побудови матриці $(E - A)^{-1}$ обчислюємо алгебраїчні доповнення матриці $(E - A)$.

$$A_{11} =$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$

$$A_{21} =$$

$$A_{22} =$$

$$A_{23} =$$

$$A_{31} =$$

$$A_{32} =$$

$$A_{33} =$$



Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називають його мінор M_{ij} , помножений на $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називають визначник, утворений із даного визначника викресленням i -го рядка та j -го стовпця.

Крок 6.

Складіть матрицю C з алгебраїчних доповнень A_{ij} , причому

алгебраїчні доповнення рядків записуємо в стовпчики (транспонування матриці).

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$



Матрицю A^T називають *транспонованою* до матриці A , якщо рядки матриці A^T є стовпцями матриці A , а стовпці – рядками матриці A .

Крок 7.

Знайдіть матрицю $(E - A)^{-1}$.

$$(E - A)^{-1} =$$



Обернену матрицю знаходять за формулою $(E - A)^{-1} = \frac{1}{|E - A|} C$.

Крок 8.

Обчисліть об'єми валової продукції X , помножуючи матрицю $(E - A)^{-1}$ на матрицю нового кінцевого продукту Y .

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y =$$





Добутком матриці $(E - A)^{-1}$ розміру 3×3 на матрицю Y розміру 3×1 є матриця $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$ розміру 3×1 , у якої елемент x_{ij} є сумою добутків елементів i -го рядка матриці $(E - A)^{-1}$ на відповідні елементи j -го стовпця матриці Y .

Відповідь: для задоволення нових показників попиту необхідно буде виробити десь 101 тис. т. продукції металевого цеху, 116 тис. машин та найняти 98 робітників.




Вчимося самостійно розв'язувати завдання


2.23.

I рівень	II рівень	III рівень
Знайдіть матрицю C :		
$C = A + 2B$ $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$	$C = 3B - A^T$ $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$	$C = A^T - BE$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & -5 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$
	 A^T - транспонована до матриці A .	 У даному випадку $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2.24.

I рівень	II рівень	III рівень
Знайдіть добутки AB та BA , якщо це можливо:		
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$	$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$ $B = (4 \ 0 \ -2 \ 3).$
 З'ясуйте, чи узгоджені матриці-множники та визначте розмір матриці-добутку.		

2.25.




I рівень	II рівень	III рівень
Знайдіть матрицю обернену до матриці A та виконайте перевірку:		
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
		 <p>Обчислюючи $A^{-1} \cdot A$ та $A \cdot A^{-1}$ під час перевірки, множник $\frac{1}{\det(A)}$ краще залишити перед матрицею.</p>

2.26.



I рівень	II рівень	III рівень
Розв'яжіть матричне рівняння:		
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$	$A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
 <p>Розбийте задачу на підзадачі: 1) знайдіть матрицю обернену до матриці, що є першим множником у рівнянні; 2) помножьте обидві частини рівняння на знайдену матрицю зліва.</p>		

2.27.

I рівень	II рівень	III рівень
Знайдіть ранг матриці:		
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

 <p>Перший рядок матриці, помножений на (-1), додайте до другого та третього</p>	 <p>Додаючи перший рядок, помножений на відповідні числа, до інших рядків перетворіть матрицю так, щоб всі елементи першого стовпця крім a_{11} дорівнювали нулю.</p>	 <p>За допомогою елементарних перетворень отримайте чотири нулі в першому стовпці.</p>
--	---	---

2.28.

II рівень	III рівень									
<p>Підприємство випускає продукцію двох типів (A і B) та використовує сировину двох типів (I і II). Норми затрат сировини подано в таблиці:</p> <table><tr><td></td><td>I</td><td>II</td></tr><tr><td>A</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>B</td><td>5</td><td>20</td></tr></table> <p>Знайти загальні затрати сировини на виробництво 100 одиниць продукції A та 60 одиниць продукції B.</p>		I	II	A	2	3	B	5	20	<p>Підприємство виробляє продукцію трьох видів і використовує сировину двох типів. Норми витрат на одиницю продукції кожного виду продукції задано за допомогою матриці:</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$ <p>Вартість одиниці сировини кожного типу задає матриця $B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}$. Знайдіть загальні витрати підприємства на виробництво 100 одиниць продукції першого виду, 200 одиниць продукції другого виду та 150 одиниць продукції третього виду.</p>
	I	II								
A	2	3								
B	5	20								
 <p>План виробництва подайте у вигляді матриці $C = (100; 60)$, а норми витрат сировини у вигляді матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}$. Загальні затрати сировини визначаються як CA.</p>	 <p>Спочатку знайдіть матрицю вартості S витрат на одиницю продукції ($S = AB$), а потім загальну вартість витрат підприємства (CS, де $C = (100; 200; 150)$ – план виробництва)</p>									



Вчимося застосовувати CAS для виконання операцій над матрицями

2.29. Відповідно до програми запуску доменних цехів установлено, що буде споруджено та запущено:

а) на котельно-механічному заводі (X_1) буде запущено 10 одиниць об'єктів типу I і 15 одиниць типу II ;

б) на Старокраматорському заводі (X_2) буде запущено 20 одиниць об'єктів типу *III*;

в) на Новокраматорському заводі (X_3) буде запущено 100 одиниць об'єктів типу *IV*.

Визначте витрати матеріалів видів p і q на кожному заводі, якщо норми витрати матеріалів (у відповідних одиницях виміру) наведені в таблиці 2.3. Операції над матрицями виконайте за допомогою *CAS Derive*.

Таблиця 2.3.

Норми витрат матеріалів

Тип об'єкта	Норми витрати матеріалів	
	p	q
<i>I</i>	2	15
<i>II</i>	10	20
<i>III</i>	10	100
<i>IV</i>	5	50

Переформулюйте умову на математичну. Уведіть матриці: M – матриця об'єктів по заводах, A – матриця норм витрати матеріалів по об'єктах:

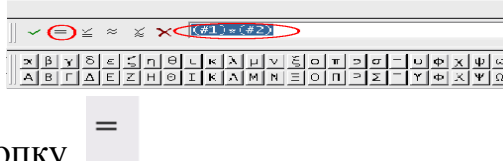
$$M = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 10 & 20 \\ 10 & 100 \\ 5 & 50 \end{pmatrix} \quad \text{та знайдіть їх добуток для}$$

визначення витрат матеріалів видів p і q на кожному заводі.

Хід обчислення.

1. Відкрийте вікно *CAS Derive*.
2. За допомогою опції *Author-Matrix* уведіть матриці:
 - розмір матриці у вікні *Matrix Setup*;
 - числові значення елементів рядків і стовпців у вікні *Author 3×3 matrix*;
 - номер виразу, під яким записано матрицю (з'являється після натиснення клавіші *Enter*).
3. За допомогою опції *Author-Expression* ввести добуток першої та другої

матриць $(\#1)*(\#2)$ на панелі символів



4. Обчисліть добуток натиснувши кнопку $=$.
5. Під наступним номером буде отримано матрицю, елементи якої вказують на витрати матеріалів видів p і q на кожному заводі.

2.30. У завданні з пункту «Вчимося моделювати професійну діяльність інженера» замініть кроки 4-7 обчислення $(E - A)^{-1}$ для

$$E - A = \begin{pmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{19}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{14}{15} \end{pmatrix} \text{ за допомогою відповідних правил застосуванням}$$

CAS Mathcad.

1. Відкрити вікно *CAS Mathcad*.
2. За допомогою опції *Добавить - Матрицу* введіть матрицю:
 - розмір матриці у вікні *Вставка матрицы*;
 - числові значення елементів рядків і стовпців у шаблоні поля програми

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

3. За допомогою опції *Символика-Матрицы-Обратит* знайдіть обернену матрицю .
4. Виокремте отриману матрицю та за допомогою опції *Вычислить – С плавающей запятой* знайдіть приблизні значення елементів матриці.
5. Отриману матрицю $(E - A)^{-1}$ застосуйте для продовження інших обчислень.

Тема 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ



Як пов'язані системи лінійних алгебраїчних рівнянь з інженерною практикою

Два елементи з ЕДС $1,6 \text{ В}$ й $1,3 \text{ В}$ та внутрішніми опорами відповідно $1,0 \text{ Ом}$ і $0,5 \text{ Ом}$ з'єднані, як показано на рисунку 3.1. Опір $R = 0,6 \text{ Ом}$. Визначте струми у всіх вітках проводів. Опір сполучних проводів не враховувати.

Користуючись законами Кірхгофа й з огляду на умовно обрані напрямки струмів

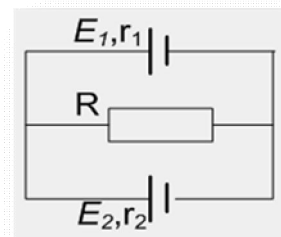


Рис. 3.1. Схема до задачі

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3, \\ I_1 r_1 - I_2 r_2 = E_1 - E_2, \\ I_1 r_1 + I_3 R = E_1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_{11} - 0,5 \cdot I_2 = 0,3, \\ I_1 + 0,6 \cdot I_3 = 1,6. \end{cases}$$

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

49

Методи розв'язання СЛАР	
<p>Визначник головної матриці системи</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$ <p>має вигляд</p>	$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ <p>та називають</p> <p>...</p>
<p>Якщо головний визначник системи не дорівнює нулю, то систему називають</p>	...
<p>Якщо у головному визначнику матриці A перший стовпець замінений на стовпець вільних членів системи</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$ <p>то він має вигляд</p>	$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
<p>Якщо у головному визначнику матриці A другий стовпець замінений на стовпець вільних членів системи</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$ <p>то він має вигляд</p>	$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$
<p>Якщо у головному визначнику матриці A третій стовпець замінений на стовпець вільних членів системи</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$ <p>то він має вигляд</p>	$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$
<p>Якщо $\Delta = 0$, а принаймні один із визначників $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 \neq 0$</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$ <p>то вона</p>	...

<p>Якщо $\Delta = 0$ і всі визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ дорівнюють нулю, то система</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$...
<p>Якщо $\Delta \neq 0$, то СЛАР</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$ <p>має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:</p>	$x_1 = \dots, \quad x_2 = \dots, \quad x_3 = \dots$
<p>У матричному вигляді систему</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$ <p>можна записати у вигляді $AX = B$, де матриці</p>	$A = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$
<p>Якщо в СЛАР кількість рівнянь співпадає з кількістю невідомих і визначник системи $\Delta(A) \neq 0$, то єдиний розв'язок системи $AX = B$ за матричним методом можна знайти</p>	$X = \dots$
<p>До елементарних перетворень рядків системи, під час яких система залишається рівносильною початковій, відносяться:</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) ... двох рівнянь; 2) ... обох частин рівняння на ненульовий множник; 3) ... до рівняння елементів іншого рівняння, помножених на одне й те саме число
<p>У прямому ході методу Гауса за допомогою елементарних перетворень систему</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$ <p>можна звести до трапецієподібного (або трикутного) вигляду</p>	$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \bar{a}_{13}x_3 = \bar{b}_1, \\ \bar{a}_{22}x_2 + \bar{a}_{23}x_3 = \bar{b}_2, \\ \bar{a}_{33}x_3 = \bar{b}_3, \end{cases} \quad \text{де}$ $\bar{a}_{21} = \dots, \quad \bar{a}_{31} = \dots, \quad \bar{a}_{32} = \dots$

А	Б	В	Г
$\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 3x + 6z - 7 = 0, \\ 2x + 5y - z = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} z + 4x - y = 0, \\ 5x + z = 0, \\ 7y - x = 5z. \end{cases}$	$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ 2x - 5z = z, \\ x - 2y + 7z = 5. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1, \\ x - 4y + 3z = 4, \\ 7x + y + z = 9. \end{cases}$



Скористайтесь означенням однорідної СЛАР: СЛАР називають *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю.

3.3. Головна матриця системи
$$\begin{cases} x + 2z - y = 0, \\ 3x + 6z - 7 = 0, \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$
 має вигляд:

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -7 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$



Скористайтесь означенням головної матриці системи: *головною матрицею системи*
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$
 називають матрицю її коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

3.4. Розширена матриця системи
$$\begin{cases} x + 2z - y = 0, \\ 3x + 6z - 7 = 0, \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$
 має вигляд:

А	Б	В	Г
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -7 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -7 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right)$



Розширеною матрицею системи
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$
 називається матриця

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

3.5. Систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1, \\ x - 4y + 3z = 4, \\ 7x + z - 9 = 0. \end{cases}$ можна записати у вигляді

наступного матричного рівняння:

А	Б
$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 7 & 1 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$
В	Г
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$



СЛАР $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ можна записати у вигляді рівняння $AX=B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

3.6. Для деякої СЛАР $\Delta = 3$, $\Delta_x = 12$, $\Delta_y = -6$, $\Delta_z = 0$. Можна стверджувати, що система:

А	Б	В	Г
система несутимісна	система має єдиний розв'язок	система має три розв'язки	система має безліч розв'язків



СЛАР несутимісна, якщо $\Delta = 0$, а принаймні один з визначників Δ_x , Δ_y , Δ_z не дорівнює нулю; СЛАР має безліч розв'язків або не має розв'язків, якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$; СЛАР має єдиний розв'язок, якщо $\Delta \neq 0$.

3.7. Для деякої СЛАР $\Delta = 0$, $\Delta_x = 12$, $\Delta_y = -6$, $\Delta_z = 0$. Можна стверджувати, що:

А	Б	В	Г
система несутимісна	система має єдиний розв'язок	система має три розв'язки	система має безліч розв'язків



Дивись підказку до попередньої вправи 3.6.

3.8. Для деякої СЛАР $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$. Можна стверджувати, що:

А	Б	В	Г
система несумісна	система має єдиний розв'язок	система має безліч розв'язків	система або несумісна, або має безліч розв'язків



Дивись підказку до вправи 3.6.

3.9. Які з наведених дій не є елементарними перетвореннями рядків розширеної матриці СЛАР:

А	Б	В	Г
множення рядка на ненульовий множник	почленне додавання двох рядків	переставляння місцями двох рядків	почленне множення двох рядків



Скористайтесь переліком елементарних перетворень рядків розширеної матриці системи СЛАР.

3.10. Нехай A – основна матриця СЛАР, а \bar{A} – її розширена матриця. Відомо, що $r(A) = 2$ і $r(\bar{A}) = 3$. У цьому випадку:

А	Б	В	Г
СЛАР несумісна	СЛАР має єдиний розв'язок	СЛАР має безліч розв'язків	інша відповідь



Скористайтесь *теоремою Кронекера-Капеллі*: СЛАР сумісна тоді і лише тоді, коли ранг розширеної матриці дорівнює рангу основної матриці. Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то СЛАР має єдиний розв'язок; якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від кількості невідомих, то система має безліч розв'язків.

3.11. Нехай A – основна матриця СЛАР з трьома невідомими. Якщо $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, то:

А	Б	В	Г
СЛАР несумісна	СЛАР має єдиний розв'язок	СЛАР має безліч розв'язків	інша відповідь



Скористайтесь *теоремою Кронекера-Капеллі* (дивись попередню вправу 3.10).



Вчимося розв'язувати типові задачі

3.12. Розв'яжіть систему рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 3z = -4, \\ x + y - 2z = -4, \\ 8x + 3y - 6z = -7. \end{cases}$$

Хід розв'язання.

Крок 1. Випишіть матрицю системи A , матрицю-стовпець невідомих X та матрицю-стовпець із вільних членів B .

$A =$

$X =$

$B =$

Крок 2. Запишіть подану систему у вигляді матричного рівняння та виразіть з цього рівняння матрицю X .



Для розв'язання матричного рівняння $AX=B$ необхідно його обидві частини помножити на A^{-1} зліва та скористатись тим, що $A^{-1}A = E$.

Крок 3. Знайдіть матрицю A^{-1} .

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & 3 & -6 \end{vmatrix} =$$

$A_{11} =$

$A_{12} =$

$A_{13} =$

$A_{21} =$

$A_{22} =$

$A_{23} =$

$A_{31} =$

$A_{32} =$

$$A_{33} =$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -10 & 0 & 5 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$



Скористайтесь формулою для знаходження матриці оберненої до A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення до елементів матриці A .

Крок 4. Знайдіть X за формулою $X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -10 & 0 & 5 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} =$$



Елемент a_{ij} матриці AB дорівнює сумі добутків відповідних елементів i -ого рядка матриці A та j -ого стовпця матриці B .



Для раціонального обчислення використовуйте властивість множення матриці на число: $(\lambda A)B = \lambda(AB)$.

Відповідь: $(1; -1; 2)$.

$$\mathbf{3.13. Розв'яжіть систему} \begin{cases} 4x + 2y - 3z = -4, \\ x + y - 2z = -4, \\ 8x + 3y - 6z = -7. \end{cases} \text{ за формулами Крамера.}$$

Хід розв'язання.

Крок 1. Обчисліть визначник системи Δ та допоміжні визначники Δ_x, Δ_y і Δ_z .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & 3 & -6 \end{vmatrix} =$$

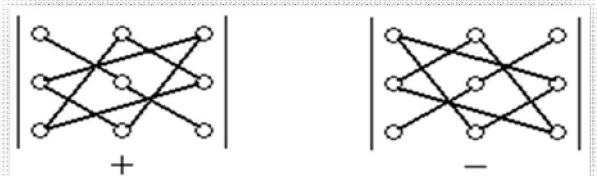
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & -2 \\ -7 & 3 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & -4 & -3 \\ 1 & -4 & -2 \\ 8 & -7 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 8 & 3 & -7 \end{vmatrix} =$$



Застосуйте для обчислення визначників схему правила трикутників:



Крок 2. Знайдіть значення x, y, z .



Використовуйте формули Крамера: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

Відповідь: (1;-1;2).

3.14. Розв'яжіть систему за формулами Крамера:
$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 2z = -5, \\ 2x + 3z = -2. \end{cases}$$

Хід розв'язання.

Крок 1. Обчисліть визначник системи Δ та зробіть висновок щодо розв'язків системи.

$\Delta =$



Якщо визначник $\Delta = 0$, то СЛАР або не має розв'язків, або має безліч розв'язків.

Крок 2. Обчисліть допоміжні визначники системи.

$\Delta_x =$

Крок 3. Враховуючи, що $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 6 \neq 0$, зробіть висновок про розв'язки системи.



СЛАР несумісна, якщо $\Delta = 0$, а принаймні один з визначників Δ_x , Δ_y , Δ_z не дорівнює нулю.

Відповідь: система не має розв'язків.

3.15. Розв'яжіть систему за формулами Крамера:
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ x - y + z = 0, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

Хід розв'язання.

Крок 1. Обчисліть визначник системи Δ та допоміжні визначники Δ_x , Δ_y і Δ_z .

$\Delta =$

$\Delta_x =$

$$\Delta_y =$$

$$\Delta_z =$$



Елементами визначника системи Δ є коефіцієнти при невідомих. Визначники $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ отримують з визначника Δ шляхом заміни відповідно його першого, другого та третього стовпців на стовпець вільних членів (дивись розв'язання попередньої задачі).

Крок 2. Оскільки $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то $r(A) < 3$, $r(\bar{A}) < 3$

де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – головна матриця системи. Обчисліть ранг матриць A і

\bar{A} . Для цього обчисліть мінор другого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ матриці A .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

Отже, $r(A) =$

$r(\bar{A}) =$



Рангом матриці називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора.

Крок 3. Оскільки $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$ (3 – число невідомих), то система має безліч розв'язків. Можна побачити, що третє рівняння є сумою перших двох, тому це рівняння можна відкинути і отримаємо систему двох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

Крок 4. Залишимо в лівій частині рівнянь лише доданки, що містять x та y : $\begin{cases} x + 2y = 1 + z, \\ x - y = -z \end{cases}$ Розв'яжемо отриману систему за формулами

Крамера, вважаючи змінну z параметром.

$$\Delta =$$

$$\Delta_x =$$

$$\Delta_y =$$

Крок 5. Знайдіть x та y .

$$x =$$

$$y =$$



Застосуйте формули Крамера: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$, де Δ - головний, а $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ - допоміжні визначники системи.

Крок 6. Якщо $z = t$ ($t \in R$), то отримаємо безліч розв'язків. Запишіть ці розв'язки:

$$x =$$

$$y =$$

$$z = t, \text{ де } t \in R.$$

Відповідь: $\left(\frac{1-t}{3}; \frac{2t+1}{3}; t\right)$, де $t \in R$.

3.16. Розв'яжіть систему рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x + 2y - 3z = -4, \\ x + y - 2z = -4, \\ 8x + 3y - 6z = -7. \end{cases}$$

Хід розв'язання.

Крок 1. Запишіть розширену матрицю системи.



Розширеною матрицею системи

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \text{ називається матриця}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

Крок 2. Прямий хід. Зведіть отриману матрицю до трикутного вигляду.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 8 & 3 & -6 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & -3 & -4 \\ 8 & 3 & -6 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-8)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & 10 & 25 \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \xrightarrow{\times 5} \left(\begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \xrightarrow{\times 5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Крок 3. Знайдіть ранги основної та розширеної матриці системи.

$$r(A) =$$

$$r(\bar{A}) =$$



Рангом матриці називають найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Крок 4. Порівняйте $r(A)$, $r(\bar{A})$ та кількість невідомих n . Зробіть висновок щодо кількості розв'язків системи.

$$r(A) \quad r(\bar{A}) \quad n.$$



Скористайтеся *теоремою Кронекера-Капеллі*: якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то СЛАР має єдиний розв'язок.

Крок 5. Зворотний хід. Запишіть рівняння, яким відповідають рядки отриманої матриці (починаючи з останнього).

$$\begin{cases} 5 \dots = 10, \\ -2 \dots + 5 \dots = 12, \\ \dots + \dots - 2 \dots = -4. \end{cases}$$

Звідси знайдіть x , y , z .

Відповідь: $(1; -1; 2)$.

3.17. Розв'яжіть систему $\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ x - y + z = 0, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$ методом Гауса.

Хід розв'язання.

Крок 1. Запишіть розширену матрицю системи.

Крок 2. Прямий хід. Зведіть отриману матрицю до трикутного вигляду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-2) + \\ \leftarrow \end{matrix}} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow \\ \times(-1) + \end{matrix}} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(викресліть один з однакових рядків)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Крок 3. Знайдіть ранги основної та розширеної матриці системи.

$$r(A) =$$

$$r(\bar{A}) =$$



Рангом матриці називають найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Крок 4. Порівняйте $r(A)$, $r(\bar{A})$ та кількість невідомих n . Зробіть висновок щодо кількості розв'язків системи.

$r(A)$ $r(\bar{A})$ n .



Скористайтесь *теоремою Кронекера-Капеллі*: якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і менше за кількість невідомих, то СЛАР має безліч розв'язків.

Крок 5. Зворотний хід. Запишіть рівняння, яким відповідають рядки отриманої матриці (починаючи з останнього).

Крок 6. Виразіть невідомі x та y через z .

$x =$ $y =$

Крок 7. Якщо $z = t$, то отримаємо безліч розв'язків. Запишіть ці розв'язки:

$x =$ $y =$ $z = t$, де $t \in R$.

Відповідь: $\left(\frac{1-t}{3}; \frac{2t+1}{3}; t\right)$, де $t \in R$.

3.18. Розв'яжіть систему $\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ x - y + z = 0, \\ 3x + 3y - z = 5. \end{cases}$ методом Гауса.

Хід розв'язання.

Крок 1. Запишіть розширену матрицю системи.

Крок 2. Прямий хід. Зведіть отриману матрицю до трикутного вигляду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-1) + \\ \leftarrow \end{matrix}} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-3) + \\ \leftarrow \end{matrix}} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-1) + \\ \leftarrow \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Знайдіть ранги основної та розширеної матриці системи.

$$r(A) = \quad r(\bar{A}) =$$



Рангом матриці називають найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Крок 4. Порівняйте $r(A)$, $r(\bar{A})$. Зробіть висновок щодо кількості розв'язків системи.

$$r(A) \quad r(\bar{A})$$



Скористайтесь *теоремою Кронекера-Капеллі*: СЛАР сумісна тоді і лише тоді, коли якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці.

Відповідь: система несумісна.



Вчимося моделювати професійну діяльність інженера

3.19. Задана електрична схема (рис.3.2). Відомо, що $\varepsilon_1 = 10 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 12 \text{ В}$, $r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$, $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 200 \text{ Ом}$. Розрахуйте, якої сили струм проходить через кожен з елементів цього ланцюга.

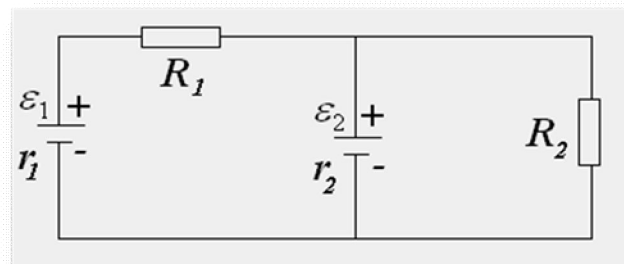


Рис. 3.2. Електрична схема до завдання

Хід розв'язання.

Крок 1. Послідовне застосування правил Кірхгофа до всіх вузлів й контурів у складній електротехнічній мережі дозволяє скласти повну систему лінійних рівнянь для визначення сил струму на кожній із ділянок.

Скористаємось правилами Кірхгофа.



Правило 1. В кожній точці розгалуження провідників алгебраїчна сума струмів I_i дорівнює нулю.



Правило 2. Для будь-якого замкненого контуру провідників сума електрорушійних сил ε_i дорівнює сумі добутків сил струмів I_i на кожній ділянці контуру на опір ділянки R_i , враховуючи внутрішній опір джерел струму r_i .

Довільним чином позначимо на схемі (рис.3.3) стрілками напрями струмів на кожній ділянці й один напрям обходу, потім виокремимо замкнені контури й обійдемо їх за обраним напрямом. Якщо стрілка, яка вказує напрям струму напрямлена проти обходу, то відповідний добуток струму на опір береться зі знаком «-». Якщо при обході переходять від від'ємного полюса джерела струму до додатного, то ε_i записується з додатним знаком, якщо навпаки, то – з від'ємним.

Крок 2. Складемо систему лінійних рівнянь для визначення сил струму на кожній із ділянок відповідно схемі (рис.3.3).

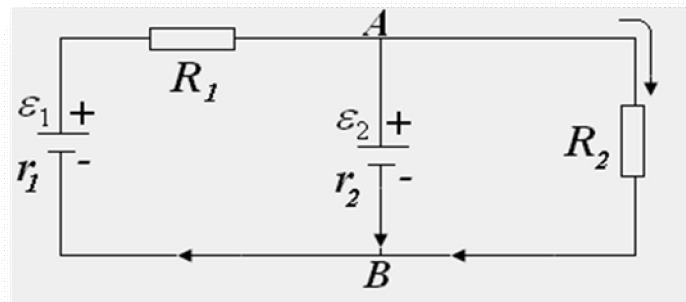


Рис.3.3. Електрична схема із позначанням напрямів струмів і напрямку обходу

Проаналізуємо схему. Маємо три струми: I_1 , I_2 , I_3 – отже система також буде мати три рівняння:

- 1) для вузла B : $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$;
- 2) для контуру I : $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1(r_1 + R_1) + I_2 \cdot r_2$;
- 3) для контуру II : $\varepsilon_2 = I_3 \cdot R_2 - I_2 \cdot r_2$.

Отримайте математичну модель даної задачі – систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_3 = 0, \\ 10 - 12 = I_1(1 + 100) + 200 I_2, \\ 12 = 200 I_3 - I_2; \end{cases} \Rightarrow$$

Крок 3. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь та знайдемо силу струму.



Для системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}I_1 + a_{12}I_2 + a_{13}I_3 = b_1, \\ a_{21}I_1 + a_{22}I_2 + a_{23}I_3 = b_2, \\ a_{31}I_1 + a_{32}I_2 + a_{33}I_3 = b_3; \end{cases}$$

уведіть наступні позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta I_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Визначник Δ , який складається з коефіцієнтів при невідомих системи називається головним визначником цієї системи. Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається формулами Крамера

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta}, \quad I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta}, \quad I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta}.$$

Обчисліть визначники $\Delta, \Delta I_1, \Delta I_2, \Delta I_3$.



Для обчислення визначників скористайтесь теоремою Лапласа.

Визначник Δ дорівнює сумі добутків елементів другого рядка на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 101 & 200 & 0 \\ 0 & -1 & 200 \end{vmatrix} =$$

Визначник ΔI_1 дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 200 & 0 \\ 12 & -1 & 200 \end{vmatrix} =$$

Визначник ΔI_2 дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 101 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 200 \end{vmatrix} =$$

Визначник ΔI_3 дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 101 & 200 & -2 \\ 0 & -1 & 12 \end{vmatrix} =$$

Обчисліть значення I_1 , I_2 , I_3 .

$$|I_1| = \begin{vmatrix} \text{---} \end{vmatrix} \approx \quad (A); \quad |I_2| = \begin{vmatrix} \text{---} \end{vmatrix} \approx \quad (A);$$

$$|I_3| = \begin{vmatrix} \text{---} \end{vmatrix} \approx \quad (A)$$

Якщо сила струму отримана від'ємною, то це означає, що напрям струму на даній ділянці обрано не правильно, хоча це не впливає на правильність результату, адже значення сили струму береться за модулем.

Відповідь: $I_1 = 0,0331 \text{ A}$; $I_2 = 0,0267 \text{ A}$; $I_3 = 0,0599 \text{ A}$.





Вчимося самостійно розв'язувати завдання

3.20.



<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Розв'яжіть систему матричним способом:		
$\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 4x + y = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z = 36, \\ 2x + 17 = 3z, \\ 6x - 7 - 5z = 0. \end{cases}$

		 <p>Перенесіть доданки, що містять невідомі в ліву частину рівнянь, а вільні члени у праву частину.</p>
--	--	--

3.21.




<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Розв'яжіть систему за формулами Крамера:		
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 5x_3 = 6 + 2x_2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x - 5z + y = -1, \\ x - y - z + 2 = 0. \end{cases}$
	 <p>Перенесіть доданки, що містять невідомі в ліву частину рівнянь, а вільні члени у праву частину.</p>	 <p>Перенесіть доданки, що містять невідомі в ліву частину рівнянь, а вільні члени у праву частину.</p>

3.22.




<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Розв'яжіть систему методом Гауса:		
$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + 2z + 3y = 7, \\ 3x + y + z = 5, \\ 5x - y - 3 = z. \end{cases}$
	 <p>Перепишіть друге рівняння системи у вигляді: $x_1 + 0 \cdot x_2 + 3x_3 = -6$</p>	 <p>Перенесіть доданки, що містять невідомі в ліву частину рівнянь, а вільні члени у праву частину.</p>

3.23.




<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Розв'яжіть систему рівнянь:		
$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 28. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$

 Застосуйте метод Гауса або метод Крамера.	 Застосуйте метод Гауса. Виразіть невідомі x_1, x_2 через x_3 .	 Застосуйте метод Гауса. Друге рівняння переписіть у вигляді: $x_1 - x_2 - 5x_3 + 0 \cdot x_4 = 2$
---	--	--

3.24.

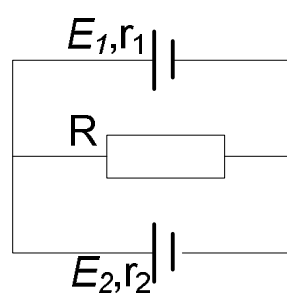


<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Розв'яжіть систему однорідних рівнянь:		
$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$
 Застосуйте метод Гауса або метод Крамера.	 Застосуйте метод Гауса або метод Крамера.	 Застосуйте метод Гауса.

3.25.

<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Знайдіть значення a , при яких система має єдиний розв'язок: $\begin{cases} x - ay + z = 3, \\ 2x + ay - z = -1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$	Доведіть, що система має єдиний розв'язок, та розв'яжіть її за формулами Крамера. $\begin{cases} x + z - y = a, \\ x + y - z = b, \\ y + z - x = c. \end{cases}$	Довести, що якщо система рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \\ a_3x + b_3y = c_3; \end{cases}$ сумісна, то $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$
 Переформулюйте задачу: при яких a визначник системи не дорівнює нулю.	 Переформулюйте задачу: довести, що визначник системи не дорівнює нулю при будь-яких a, b, c .	 Переписіть систему у вигляді: $\begin{cases} a_1x + b_1y + 0 \cdot z = c_1, \\ a_2x + b_2y + 0 \cdot z = c_2, \\ a_3x + b_3y + 0 \cdot z = c_3. \end{cases}$

3.26.

<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Цех випускає продукцію трьох найменувань і використовує на її виготовлення два типа сировини. У таблиці наведено витрати кожного типу сировини на виробництво	Два елементи з ЕДС $1,6 \text{ В}$ й $1,3 \text{ В}$ та внутрішнім опором відповідно $1,0$ й $0,5 \text{ Ом}$ з'єднані, як показано на рисунку. Опір $R = 0,6 \text{ Ом}$. Знайдіть струм в усіх гілках. Опір

одиниці кожного найменування та запаси цієї сировини.					з'єднуючих проводів не враховувати.	
Пр. Сир.	I	II	III	запаси сировини		
1-й вид	2	3	1	21		
2-й вид	1	0	2	15		
Яку кількість продукції можна виготовити з цієї сировини?						
 Оберіть ефективну систему позначень (x – кількість одиниць продукції першого найменування, y – другого, z – третього) та складіть систему лінійних рівнянь, що моделює виробничу ситуацію.					 Оберіть ефективний зручний запис подання даних. Представте дані задачі на схемі, користуючись законами Кірхгофа й враховуючи напрями струмів, що обрані умовно: I_1 – стум у першому елементі, напрямлено ліворуч; I_2 – стум у другому елементі, напрямлено праворуч; I_3 – стум на ділянці з опором R , напрямлено праворуч.	



Вчимося застосовувати CAS під час розв'язування СЛАР

3.27. Джерела струму з електрорушійними силами E_1 і E_2 включені у ланцюг, як показано на рисунку 3.4. Знайдіть силу струму на всіх ділянках ланцюга, якщо $E_1 = 2,1\text{В}$, $E_2 = 1,9\text{В}$, $R_1 = 45\text{ Ом}$, $R_2 = 10\text{ Ом}$, $R_3 = 10\text{ Ом}$. Внутрішнім опором елементів зневажити.

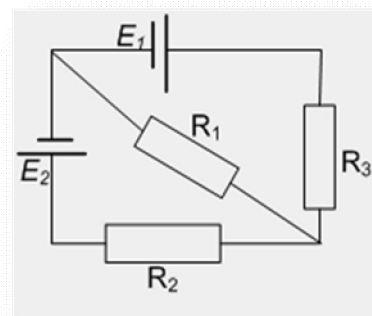


Рис. 3.4. Схема до завдання

Переформулюйте умову на математичну Складіть систему лінійних рівнянь за допомогою законів Кірхгофа (позначимо силу струму на відповідних ділянках ланцюга за X , Y , Z):

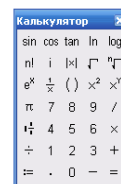
$$\begin{cases} X + Y - Z = 0, \\ 45 \cdot X + 10 \cdot Y = 2,1, \\ 45 \cdot X - 10 \cdot Z = 1,9. \end{cases}$$

Розв'яжіть отриману СЛАР за допомогою *CAS Derive*.
Хід обчислення.

1. Відкрийте вікно *CAS Derive*.
2. За допомогою опції *Solve-System* ввести систему лінійних алгебраїчних рівнянь:
 - порядок системи $n=3$ у вікні *Solve Sistem Setup*;
 - рівняння системи у вікні *Solve 3 equation(s)*;
 - тип змінної, натиснувши правою клавішею мишки на вікні *Solution Variables*;
 - номер виразу, під яким записано СЛАР (з'являється після натиснення клавіші *Enter*).
3. За допомогою опції *Symplify-Basic* розв'яжіть задану систему. Під наступним номером буде отримано розв'язки СЛАР, що визначають силу струму на всіх ділянках ланцюга.

Розв'яжіть отриману СЛАР за допомогою *CAS Mathcad*.

1. Відкрийте вікно *CAS Mathcad*.
 2. За допомогою слова *Given*, що вживається як математичний термін, уведіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь у полі програми:
 - запис символів виконуйте за допомогою вкладки, що отримується з використанням опції *Вид – Панели инструментов*
 - *Вычисление* та виноситься на панель інструментів;
 - для запису десяткових дробів вживайте точку, наприклад 2.1 ;
 - перехід на наступний рядок для запису рівнянь відбувається натисненням клавіші *Enter*.
 3. За допомогою опції *Добавить – Функции – Все – Find* введіть *Find* (x, y, z) та отримайте результат після введення символу « $=$ ».
- Буде отримано розв'язки СЛАР, що визначають силу струму на всіх ділянках ланцюга.



Тема 4. ВЕКТОРИ



Як пов'язані вектори з інженерною практикою

Механізм – сукупність рухливих матеріальних тіл, одне з яких закріплене, а всі інші роблять цілком певні рухи, щодо нерухомого матеріального тіла. Ланки – матеріальні тіла, з яких складається механізм.

Монтажна щогла є найпростішим механізмом для підйому вантажів та виготовляється з металу. Щоглу встановлюють на опорній подушці. Її стійкість досягається натягом сталевого тросу або умовою замкненості механізму.

Під час проектування механізму його ланки, зазвичай, позначають векторами. Їхня сума визначає умову замкненості механізму.

Вектори допомагають записати умову замкненості до схеми, вказаного на рисунку 4.1, підйомного механізму в ненавантаженому стані.

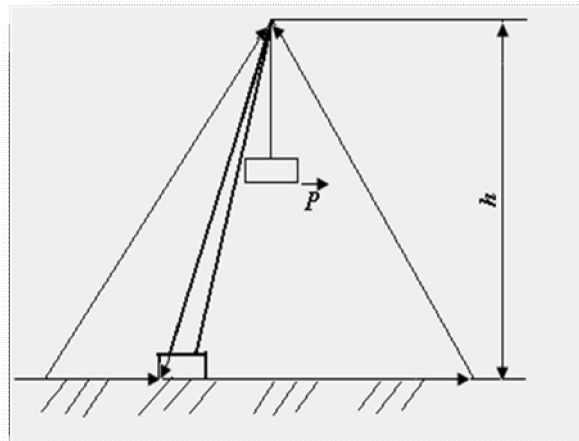


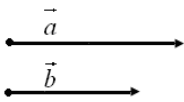
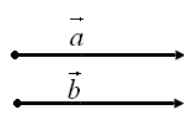
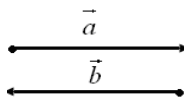
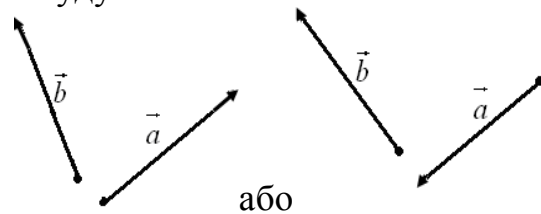
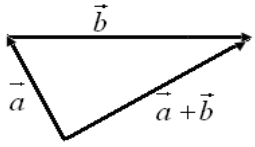
Рис. 4.1. Зображення схеми монтажно́ї щогли

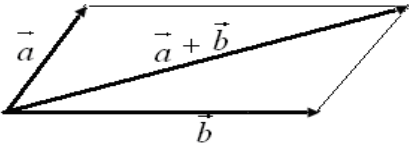
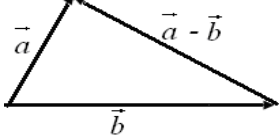
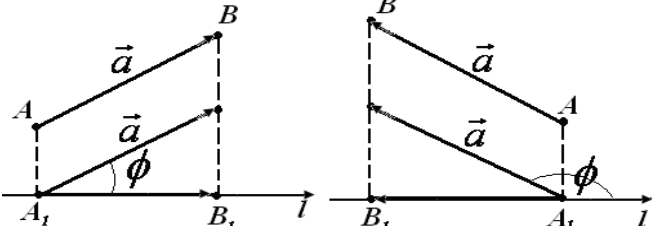
Під час моделювання зображення монтажно́ї щогли ми позначаємо її ланки **векторами**.

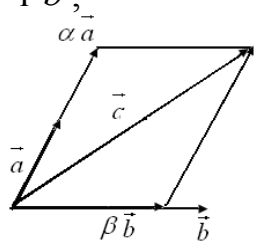


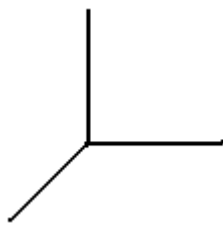
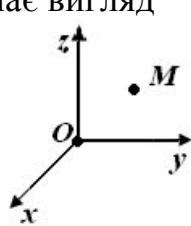
Складаємо опорний конспект

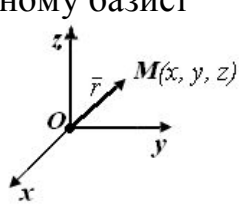
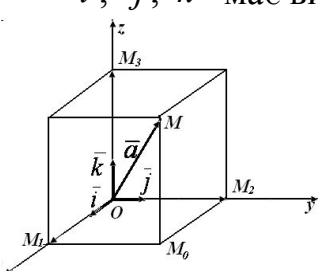
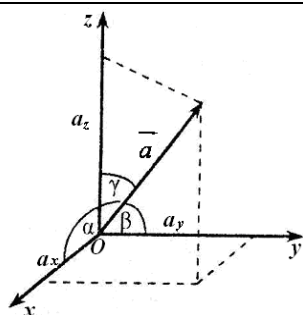
Вектор	
Векторна величина на відміну від скалярної задається не лише своїм чисельним значенням, а й	...
Геометрично вектор це <i>напрявлений відрізок</i> , який позначається \vec{a} , або \overrightarrow{AB} та зображується	<div style="text-align: center;"> $\overset{A}{\bullet}$ $\overset{B}{\bullet}$ </div> <p>де точка A - ... вектора, а B - його ...</p>
Відстань між початком вектора і його кінцем позначають $ \vec{a} $, або $ \overrightarrow{AB} $ та називають	...

<p>Вектори \vec{a} і \vec{b}</p>  <p>називають <i>колінеарними</i>, якщо</p>	<p>вони лежать на одній або на ... прямих</p>
<p>Вектори \vec{a} і \vec{b}</p>  <p>називають <i>рівними</i>, якщо</p>	<p>вони ... , мають однакові ... і однакові ...</p>
<p>Два вектори</p>  <p>називають <i>протилежними</i>, якщо</p>	<p>вони ... , мають однакові ... і протилежні ...</p>
<p>Вектор називають <i>нуль-вектором</i>, якщо його</p>	<p>... і ... збігаються</p>
<p>Вектор називають <i>одиничним</i>, якщо його</p>	<p>... дорівнює одиниці</p>
<p>Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора \vec{a}, називають</p>	<p>... вектора \vec{a} і позначають \vec{a}_0</p>
<p>Кут між двома векторами \vec{a} і \vec{b}, зведеними до спільного початку, називають найменший кут, на який треба повернути вектор \vec{a} навколо спільного початку, щоб його напрям збігався з напрямом вектора \vec{b}</p>	<p>Отже кут між векторами \vec{a} і \vec{b} будується</p> 
<p>Якщо три вектори лежать в одній або паралельних площинах,</p>	<p>то вони називаються ...</p>
<p>Лінійні операції над векторами</p>	
<p>Сумою векторів \vec{a} і \vec{b} за правилом трикутника</p>  <p>називають вектор $\vec{a} + \vec{b}$,</p>	<p>який з'єднує ... вектора \vec{a} з ... вектора \vec{b} за умови ...</p>

<p>Сумою векторів \vec{a} і \vec{b} за правилом паралелограма</p>  <p>називають вектор $\vec{a} + \vec{b}$,</p>	<p>який є ... паралелограма, що побудовано на ... за умови ...</p>
<p>Різницею векторів \vec{a} і \vec{b}</p>  <p>називають вектор $\vec{a} - \vec{b}$,</p>	<p>який у сумі з вектором ... складає вектор ...</p>
<p>Добутком вектора \vec{a} на скаляр $\lambda \neq 0$ називають вектор $\lambda \vec{a}$ такий, що $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{a}$ і напрям</p>	<p>якого збігається з напрямом вектора \vec{a}, якщо ..., або він має напрям протилежний до напрямку вектора \vec{a}, якщо ...</p>
<p>Властивості лінійних операцій над векторами:</p> $\vec{a} + \vec{b} = \dots$ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \dots$ $\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \dots$ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \dots$ $\vec{a} + \vec{0} = \dots$ $\vec{a}(\lambda + \mu) = \dots$ $\lambda(\mu \vec{a}) = \dots$	
<p>Проекція вектора на вісь</p>	
<p>Проекцією вектора \vec{a} на вісь l називають число, яке дорівнює</p> 	<p>... , якщо вісь l і вектор $\overline{A_1B_1}$ однаково напрямлені або ... , якщо вісь l і вектор $\overline{A_1B_1}$ протилежно напрямлені</p>
<p>Властивості проєкцій. 1. Проекція суми кількох векторів на ту саму вісь дорівнює сумі їх</p>	

<p>проекцій на цю вісь, тобто</p> <p>2. При множенні вектора \vec{a} на число λ його проекція також помножиться на це число, тобто</p>	$np_l(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) = \dots$ $np_l(\lambda \vec{a}) = \dots$
Лінійна залежність і незалежність векторів, базис	
Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називають <i>лінійно залежними</i> , якщо існують такі числа c_1, c_2, \dots, c_n не всі рівні нулю, що лінійна комбінація	$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n = \dots$
Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називають <i>лінійно незалежними</i> , якщо рівність $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n = 0$ виконується лише за умови, коли	всі числа c_1, c_2, \dots, c_n дорівнюють \dots
Будь-який упорядкований набір n дійсних чисел x_1, x_2, \dots, x_n позначають (x_1, x_2, \dots, x_n) або $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і називають точкою n -вимірного координатного простору, що позначається	\dots
Сукупність лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називають базисом координатного простору R^n , якщо для кожного вектора існують такі дійсні числа x_1, x_2, \dots, x_n , що виконується	рівність $\vec{b} = \dots \cdot \vec{a}_1 + \dots \cdot \vec{a}_2 + \dots + \dots \cdot \vec{a}_n$
Довільну упорядковану пару не колінеарних векторів координатного простору R^n називають	\dots
<p>Якщо вектор \vec{c} має координати α і β в даному базисі координатної площини R^2 векторів \vec{a} і \vec{b},</p>  <p>то</p>	$\vec{c} = \alpha \cdot \dots + \beta \cdot \dots$
Довільну упорядковану трійку не компланарних векторів координатного простору R^n називають	\dots

Якщо вектори \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} – базис у координатному просторі R^3 і вектор \vec{d} має координати α, β, γ у даному базисі, то вектор \vec{d} розкладається за базисом, тобто	$\vec{d} = \alpha \cdot \dots + \beta \cdot \dots + \gamma \cdot \dots$
Прямокутна декартова система координат	
Точку O і упорядковану трійку не компланарних базисних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ називають декартовою системою координат у просторі, де	точка O – \dots , а осі, які проходять через початок координат у напрямі базисних векторів, називають \dots
Ортнормованим базисом називають упорядковану трійку векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	одиничних $(\vec{i} = \dots, \vec{j} = \dots, \vec{k} = \dots)$ та попарно перпендикулярних $(\vec{i} \dots \vec{j}; \vec{k} \dots \vec{i}; \vec{j} \dots \vec{k})$
Прямокутною декартовою системою координат (ПДСК) у просторі називають Декартову систему координат, базис якої ортонормований	Отже, доповнене зображення  позначають $Oxyz$, де Ox - вісь \dots , Oy - вісь \dots , Oz - вісь \dots
Координати точки	
Довільній точці трьохвимірного простору M можна поставити у відповідність у ПДСК вектор $\vec{r} = \overline{OM}$, де O – початок координат та який називають радіус-вектором точки M	Отже, на рисунку радіус-вектор точки M має вигляд 
Координати x, y, z радіус вектора \overline{OM} називають координатами точки M і пишуть	$M(\dots, \dots, \dots)$

Якщо відомі координати початку $A(x_1, y_1, z_1)$ та кінця $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора \overline{AB} , то його координати знаходять за формулою	$\overline{AB} = (\dots - \dots; \dots - \dots; \dots - \dots)$
Довжину вектора \overline{AB} (або відстань між точками A і B) записують та обчислюють за формулою	$ \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Розкладання вектора за ортонормованим базисом	
Вектор \vec{r} має координати (x, y, z) в ортонормованому базисі 	
та розкладається за базисом	$\vec{r} = x \cdot \dots + y \cdot \dots + z \cdot \dots$
Розклад довільного вектора \vec{a} за ортонормованим базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ має вигляд 	$\vec{a} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j} + \dots \cdot \vec{k}$
Довжина вектора та напрямні косинуси	
Довжину (модуль) вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ обчислюють за формулою	$ \vec{a} = \sqrt{\dots^2 + \dots^2 + \dots^2}$
Косинуси $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ кутів α, β, γ , який вектор утворює з координатними вісями, називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$; вони визначають напрям вектора \vec{a} в системі $Oxyz$ та обчислюються за формулами 	$\cos \alpha = \frac{\dots}{ \dots }, \cos \beta = \frac{\dots}{ \dots }, \cos \gamma = \frac{\dots}{ \dots }$

Дії над векторами, заданими координатами	
Якщо вектори \vec{a} , \vec{b} задані координатами, тобто $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то	$\vec{a} + \vec{b} = (... + ..., ... + ..., ... + ...)$
Якщо вектор \vec{a} заданий координатами, тобто $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ то	$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot ..., \lambda \cdot ..., \lambda \cdot ...)$
Вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ є рівними тоді і тільки тоді, коли	$... = ...$; $... = ...$; $... = ...$ одночасно
Умова колінеарності векторів, заданих координатами	
Координати колінеарних векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ пропорційні	$\frac{...}{...} = \frac{...}{...} = \frac{...}{...}$
Ділення відрізка у заданому відношенні	
Координати точки $M(x, y, z)$, яка ділить відрізок $A_1 A_2$, де $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і $A_2(x_2, y_2, z_2)$ навпіл, знаходять за формулами	$x = \frac{... + ...}{2}$, $y = \frac{... + ...}{2}$, $z = \frac{... + ...}{2}$
Координати точки $M(x, y, z)$, яка ділить відрізок $A_1 A_2$, де $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і $A_2(x_2, y_2, z_2)$, у відношенні λ , тобто $ \overline{A_1 M} : \overline{M A_2} = \lambda$, знаходять за формулами	$x = \frac{... + \lambda \cdot ...}{1 + \lambda}$, $y = \frac{... + \lambda \cdot ...}{1 + \lambda}$, $z = \frac{... + \lambda \cdot ...}{1 + \lambda}$



Перевіряємо готовність до практичного заняття

4.1. Як позначається сума векторів $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$.

А	Б	В	Г
\overline{DA}	\overline{AD}	\overline{BD}	не можна дати однозначну відповідь



За «правилом трикутника» додавання векторів $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

4.2. Як позначається різниця векторів $\overline{AB} - \overline{CB}$.

А	Б	В	Г
\overline{AC}	\overline{CA}	не можна дати однозначну відповідь	інша відповідь



Скористайтесь означенням різниці векторів: $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$. Згадайте поняття вектора протилежного даному: вектор \overline{BA} є протилежним до вектора \overline{AB} , та позначається: $-\overline{AB}$.

4.3. На рис. 4.2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ паралелепіпед. Оберіть трійку компланарних векторів.

А	Б
$\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{AB_1}$	$\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{A_1 B_1}$
В	Г
$\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{AA_1}$	немає правильної відповіді

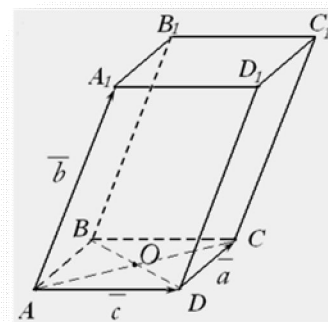


Рис. 4.2.
Паралелепіпед



Скористайтесь означенням компланарних векторів: вектори називають *компланарними* якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

4.4. За даними наведеними на рис. 4.2. виразіть вектор $\overline{OA_1}$

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{c}) - \overline{b}$	$\overline{b} + \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{c})$	$\overline{b} - \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{c})$	інша відповідь



Скористайтесь правилом паралелограма додавання векторів та правилом віднімання векторів (рис. 4.3 – 4.4)

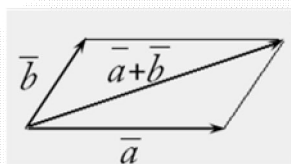


Рис. 4.3. Правило паралелограма
додавання векторів

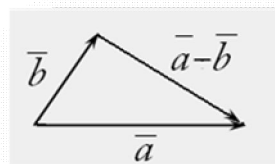


Рис. 4.4. Правило віднімання векторів

4.5. Вкажіть за рис. 4.2 вектор, який не є колінеарним вектору \vec{c}

А	Б	В	Г
\vec{BC}	$\vec{B_1C_1}$	$2\vec{D_1A_1}$	$\vec{B_1A_1}$



Скористайтесь означенням колінеарних векторів: вектори називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

4.6. Вкажіть вектор, однаково спрямований з вектором $-3\vec{c}$.

А	Б	В	Г
$2\vec{c}$	$3\vec{c}$	\vec{c}	$-\vec{c}$



Скористайтесь означенням добутку вектора на скаляр: добутком вектора \vec{a} на скаляр λ називають вектор $\lambda\vec{a}$, що $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ і напрям збігається з напрямом вектора \vec{a} , якщо $\lambda > 0$, або він має напрям протилежний до напрямку \vec{a} , якщо $\lambda < 0$.

4.7. Знайдіть модуль вектора $-25\vec{a}$, якщо $|\vec{a}| = 3$.

А	Б	В	Г
15	75	-75	-15



Скористайтесь означенням добутку вектора на скаляр (див. попереднє завдання).

4.8. Які з наведених значень можуть бути напрямними косинусами деякого вектора?

А	Б	В	Г
$\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{\sqrt{7}}, \frac{-2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}$	немає правильної відповіді



Скористайтесь тим, що напрямні косинуси $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ задовольняють рівність $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

4.9. Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 30° . Знайдіть кут між векторами \vec{a} і $3\vec{b}$.

А	Б	В	Г
30°	90°	120°	інша відповідь



Скористайтесь означенням добутку вектора на скаляр (див. завдання 4.6).

4.10. Модуль вектора $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$ дорівнює:

А	Б	В	Г
$\sqrt{6}$	2	$\sqrt{14}$	інша відповідь



Скористайтесь формулою для знаходження модуля вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$:
 $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

4.11. Якщо $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, то його проекція на вісь Oy дорівнює:

А	Б	В	Г
$\frac{2}{\sqrt{14}}$	$\frac{-2}{\sqrt{14}}$	2	-2



Скористайтесь означенням координат вектора: проекції вектора на вісі Ox , Oy та Oz називають координатами вектора.

4.12. Якщо $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, то його розклад за декартовим ортонормованим базисом має вигляд:

А	Б	В	Г
$3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$	$3\vec{i} - 2\vec{k} + \vec{j}$	$3\vec{i} + \vec{k} - 2\vec{j}$	інша відповідь



Скористайтесь тим, що векторну рівність $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ у символічній формі записують так $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

4.13. Якщо $A(1; 2; -3)$ і $B(3; -3; 0)$, то координати вектора \vec{AB} :

А	Б	В	Г
$\{4; -1; -3\}$	$\{2; -5; 3\}$	$\{-2; 5; -3\}$	інша відповідь



Скористайтесь тим, що у разі, коли відомі координати початку $A(x_1; y_1; z_1)$ та кінця $B(x_2; y_2; z_2)$ вектора \vec{AB} , то його координати знаходять за формулою $\vec{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

4.14. Обчисліть $\vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$ і $\vec{b} = \{5; -7; -3\}$.

А	Б	В	Г
$\{8; -9; -2\}$	$\{-2; 5; 4\}$	46	7



Якщо вектори задано своїми координатами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ тоді

$$\overline{a \pm b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}.$$

4.15. Які з векторів $\overline{a} = \{3; -2; 1\}$, $\overline{b} = \{-6; 4; 1\}$, $\overline{c} = \{9; -6; 3\}$ і $\overline{d} = \{6; -4; 1\}$ є колінеарними?

А	Б	В	Г
\overline{b} і \overline{d}	\overline{a} і \overline{b}	\overline{b} і \overline{c}	\overline{a} і \overline{c}



Скористайтесь умовою колінеарності: вектори колінеарні, якщо їхні відповідні координати пропорційні.



Вчимося розв'язувати типові задачі

4.16. Точка M лежить стороні AB трикутника ABC і поділяє її у відношенні 2:3, якщо рахувати від точки A . Знайдіть координати, модуль вектора \overline{CM} та кути, які він утворює з координатними осями, якщо $A(5; -10; -1)$, $B(0; 15; 4)$, $C(1; 2; -1)$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть координати точки M , що поділяє відрізок AB у відношенні $AM:MB=2:3$.

$$x_M = \frac{\dots + \frac{2}{3} \cdot \dots}{1 + \frac{2}{3}} = \quad y_M = \frac{\dots + \frac{2}{3} \cdot \dots}{1 + \frac{2}{3}} =$$

$$z_M = \frac{\dots + \frac{2}{3} \cdot \dots}{1 + \frac{2}{3}} =$$



Якщо $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ і точка M поділяє відрізок AB у відношенні $AM:MB=\lambda$, то координати точки $M(x; y; z)$ знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}$$

Отже, отримали $M(6; 4; 1)$.

Крок 2. Знайдіть координати вектора \overline{CM} .

$$\overline{CM} = \{6-1; \dots; \dots\} =$$



Скористайтесь тим, що у разі, коли відомі координати початку $A(x_1; y_1; z_1)$ та кінця $B(x_2; y_2; z_2)$ вектора \overline{AB} , то його координати знаходять за формулою $\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Тобто, $\overline{CM} = \{5; 2; 2\}$.

Крок 3. Знайдіть $|\overline{CM}|$.



Скористайтесь формулою для знаходження модуля вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$:
 $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Крок 4. Обчисліть напрямні косинуси вектора \overline{CM} .

$$\cos \alpha = \quad \cos \beta = \quad \cos \gamma =$$



Напрямні косинуси вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ обчислюються за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Крок 5. Обчисліть кути α , β і γ , що утворює \overline{CM} з осями Ox , Oy та Oz відповідно.

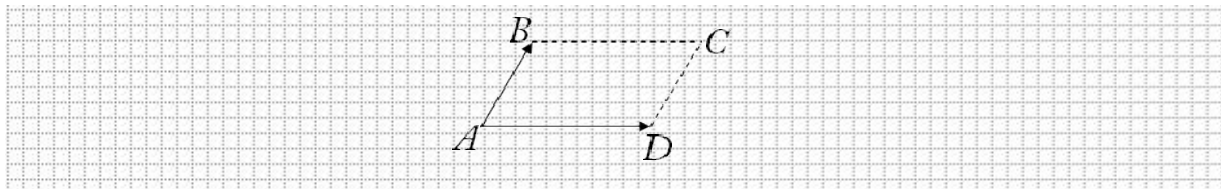
$$\alpha = \arccos \frac{5}{\sqrt{31}}, \quad \beta = \quad \gamma =$$

Відповідь: $\overline{CM} = \{5; 2; 2\}$, $|\overline{CM}| = \sqrt{31}$, $\alpha = \arccos \frac{5}{\sqrt{31}}$, $\delta = \gamma = \arccos \frac{2}{\sqrt{31}}$.

4.17. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\varphi = 60^\circ$. Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b}|$ та $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 8$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Зобразіть вектори \vec{a} і \vec{b} таким чином, щоб вони мали спільний початок, та побудуйте їхню суму та різницю.



Скористайтесь правилом паралелограма додавання векторів та правилом віднімання векторів (рис. 4.5 – 4.6)

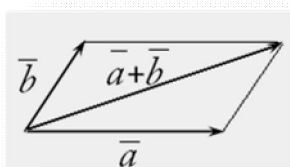


Рис. 4.5. Правило паралелограма додавання векторів

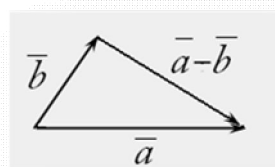


Рис. 4.6. Правило віднімання векторів

Крок 2. Знайдіть сторони, кути та діагоналі паралелограма $ABCD$.

$$AB = DC =$$

$$AD = BC =$$

$$\angle A =$$

$$\angle B =$$

За теоремою косинусів з $\triangle ABD$:

$$BD =$$

За теоремою косинусів з $\triangle ABC$:

$$AC =$$



Скористайтесь для знаходження сторони трикутника теоремою косинусів:
 $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}$ (де b, c – дві інші сторони, α – кут між ними).

Крок 3. Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$|\vec{a} + \vec{b}| =$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| =$$



Скористайтесь означенням модуля вектора: модуль вектора – відстань між його початком та кінцем (тобто довжина відрізка, яким зображений вектор).

Відповідь: $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{129}$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 7$.

4.18. Дано два вектори $\bar{a}\{3; -2; 6\}$ і $\bar{b}\{-2; 1; 0\}$. Знайдіть проекції на координатні осі вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть координати вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$.

$$2\bar{a} =$$

$$3\bar{b} =$$

$$\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b} =$$



Скористайтесь правилами множення вектора на скаляр та додавання векторів, що задані своїми координатами: якщо $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то $\bar{a} + \bar{b} = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$, $\lambda\bar{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$.

Крок 2. Знайдіть проекції c_x , c_y , c_z вектора \bar{c} на координатні осі.

$$c_x =$$

$$c_y =$$

$$c_z =$$



Скористайтесь означенням координат вектора: проекції вектора на осі координат називаються координатами вектора.

Відповідь: $c_x = 0$, $c_y = -1$, $c_z = 12$.

4.19. З'ясуйте при яких значеннях p і q вектори $\bar{a} = \{p; 1; -2\}$ і $\bar{b} = \{2; q; -1\}$ колінеарні.

Хід розв'язання.

Крок 1. Запишіть умову колінеарності векторів.



Вектори колінеарні тоді і лише тоді, коли їхні координати пропорційні.

Крок 2. Знайдіть з отриманих рівностей p і q .

Відповідь: $p=4$, $q=\frac{1}{2}$.

4.20. З'ясуйте який вид має чотирикутник $ABCD$, якщо відомі координати його вершин $A(-3;2;1)$, $B(1;1;2)$, $C(7;20;-3)$, $D(3;21;-4)$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть координати векторів \overline{AB} , \overline{DC} :



Скористайтесь тим, що у разі, коли відомі координати початку $A(x_1; y_1; z_1)$ та кінця $B(x_2; y_2; z_2)$ вектора \overline{AB} , то його координати знаходять за формулою $\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Крок 2. Оскільки $\overline{AB} = \{4; -1; 1\}$ і $\overline{DC} = \{4; -1; 1\}$, то вони є рівними. Зробіть висновок щодо взаємного розташування та довжин відрізків AB і DC .



Скористайтесь ознакою рівності векторів: вектори рівні тоді і лише тоді, коли їхні відповідні координати рівні.

Крок 3. Оскільки протилежні сторони чотирикутника паралельні та рівні, то він є паралелограмом.

Крок 4. Знайдіть довжини діагоналей паралелограма AC і DB та з'ясуйте чи є паралелограм $ABCD$ прямокутником.

$\overline{AC} =$

$AC = |\overline{AC}| =$

$\overline{DB} =$

$DB = |\overline{DB}| =$



Скористайтесь ознакою прямокутника: якщо діагоналі паралелограма рівні, то він є прямокутником.

Тобто, $ABCD$ – прямокутник.

Крок 5. Знайдіть довжину сторони BC . З'ясуйте, чи є прямокутник $ABCD$ квадратом.

$$\overline{BC} =$$

$$BC = |\overline{BC}| =$$



Скористайтесь ознакою квадрата: якщо в прямокутнику дві суміжні сторони рівні, то він є квадратом.

Відповідь: $ABCD$ – прямокутник.

4.21. Дано вектори $\overline{p} = \{2; 1; -1\}$, $\overline{q} = \{0; 1; -2\}$, $\overline{r} = \{2; 1; 3\}$. Знайдіть розклад вектора $\overline{c} = \{10; 2; 9\}$ за векторами \overline{p} , \overline{q} і \overline{r} .

Хід розв'язання.

Крок 1. Запишіть розклад вектора \overline{c} за векторами \overline{p} , \overline{q} і \overline{r} у загальному вигляді.

$$\overline{c} = x_1 \cdot \overline{p} + \dots \cdot \overline{q} + x_3 \cdot \dots$$



Розкладом вектора \overline{b} за базисом $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$ називають рівність $\overline{b} = x_1 \overline{a}_1 + x_2 \overline{a}_2 + \dots + x_n \overline{a}_n$, де x_1, x_2, \dots, x_n – деякі числа.

Крок 2. Підставте координати векторів $\overline{c}, \overline{p}, \overline{q}$ і \overline{r} в отриману рівність. Спростіть праву частину рівності.



Для зручності записуйте вектори як вектор-стовпці.

Крок 3. Складіть, виходячи з отриманої рівності векторів, систему алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} 10 = 2x_1 + 0 + 2x_2, \\ 2 = \\ 9 = \end{cases}$$



Скористайтесь ознакою рівності векторів: вектори рівні тоді і лише тоді, коли їхні відповідні координати рівні.

Крок 4. Розв'яжіть систему рівнянь.



Скористайтесь методом Крамера.

Таким чином, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.

Відповідь: $\vec{c} = 2\vec{p} - \vec{q} + 3\vec{r}$.



Вчимося моделювати професійну діяльність інженера

4.22. До схеми монтажної щогли (рис. 4.7) записати умову замкненості у ненавантаженому стані.

Хід розв'язання.

Крок 1. Проаналізуйте умову задачі та переформулюйте її «мовою векторів».

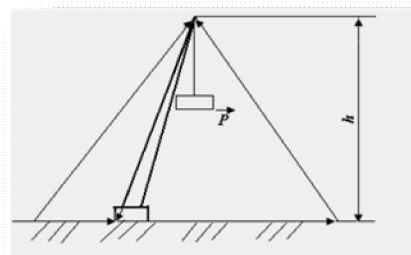


Рис. 4.7. Зображення схеми монтажної щогли



Монтажна щогла є найпростішим механізмом для підйому вантажів та виготовляється з металу. Проектуючи механізм позначимо його ланки векторами. Їхня сума визначає умову замкненості механізму. Для зображення ланок щогли векторами скористайтесь означенням вектора та правилом трикутника для побудови суми векторів.

Зобразимо модель монтажної щогли й позначимо її ланки векторами на рисунку 4.8.

AB на схемі зображує щоглу – $\overrightarrow{AB} = \vec{r}$;

OA та AC утворюють натягнутий трос – $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1$; $\overrightarrow{CA} = \vec{r}_2$;
 $\overrightarrow{OB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$; α — кут, що створено натягнутим тросом із поверхнею землі; β — кут, що створено щоглою із вертикаллю.

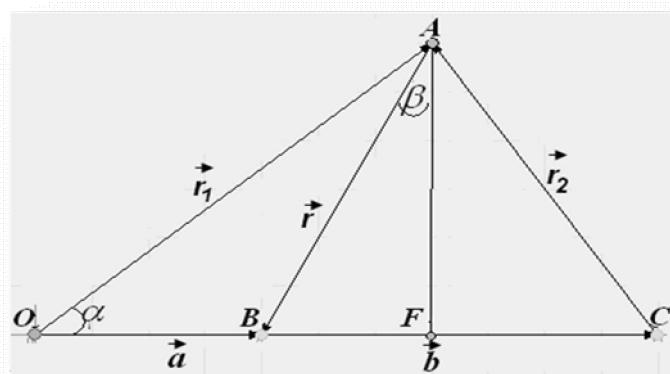


Рис. 4.8. Векторна схема монтажної щогли

Крок 2. Запишіть умову замкненості для повної схеми щогли, що є об'єднанням двох схем із контурами $OBAO$ та $BCAB$.



Оскільки векторна схема монтажної щогли є об'єднанням двох схем із контурами $OBAO$ та $BCAB$, то умова замкненості для повної схеми щогли запишеться у вигляді суми умов замкненості для кожної із частин окремо. У векторній формі цей запис має вигляд. Підставте введені позначання векторів.

$$(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \dots = \vec{0}.$$

Крок 3. Спростіть умову замкненості, використовуючи правила суми векторів.



Оскільки за правилом суми векторів $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} = -\vec{r}$, то $\vec{b} + \vec{r}_2 + \vec{r} = \vec{0}$, а це означає, що умова замкненості виразиться векторним рівнянням:

$$(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO}) =$$



Крок 4. Спроектуйте рівняння $\vec{a} - \vec{r} - \vec{r}_1 = \vec{0}$ на осі координат.

Скористайтесь означенням проекції вектора \vec{a} на вісь l . Проекцію вектора \vec{a} на вісь l обчислюють за формулою $np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \phi$, де ϕ - кут між напрямом осі l і напрямом вектора \vec{a} .

Проекція суми кількох векторів на ту саму вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь, тобто:

$$np_l (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) = np_l \vec{a}_1 + np_l \vec{a}_2 + \dots + np_l \vec{a}_n.$$

У нашому випадку:

- 1) \vec{a} збігається з віссю Ox проектування, тому $np_{Ox} \vec{a} = \dots$;
- 2) $np_{Ox} \vec{r} = -|\vec{r}| \cos(90^\circ - \beta) = \dots$, $np_{Ox} \vec{r}_1 = \dots$;
- 3) \vec{a} перпендикулярний вісі Oy проектування, тому $np_{Oy} \vec{a} = \dots$;
- 4) $np_{Oy} \vec{r} = -\dots$, $np_{Oy} \vec{r}_1 = |\vec{r}_1| \cos(90^\circ - \alpha) = \dots$.

Одержимо умову замкненості в скалярній формі (замість векторів \vec{a} ; \vec{r} ; \vec{r}_1 у рівняння $\vec{a} - \vec{r} - \vec{r}_1 = \vec{0}$ підставте їх проекції на вісі):




Відповідь: умова замкненості механізму монтажною щогли

$$|\vec{a}| + |\vec{r}| \sin \beta - |\vec{r}_1| \cos \alpha = 0, \quad |\vec{r}| \cos \beta - |\vec{r}_1| \sin \alpha = 0.$$





Вчимося самостійно розв'язувати завдання

4.23.




I рівень	II рівень	III рівень
У паралелограмі $ABCD$ O – точка перетину діагоналей, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Виразіть через вектори \vec{a} і \vec{b} вектор \overrightarrow{CO} .	Точка M – середина ребра CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Виразіть вектор \overrightarrow{AM} через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.	Точка M не лежить в площині трикутника ABC . Виразіть вектор \overrightarrow{AK} через вектори $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$, якщо K – середина відрізка BC .
 Скористайтесь тим, що $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	 Вектор \overrightarrow{AM} виразіть через вектори \overrightarrow{AC} і \overrightarrow{CM} .	 Здійснить перехід у площину: знайдіть координати векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} .

4.24.




I рівень	II рівень	III рівень
Знайдіть $\vec{c} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$ та його модуль, якщо $\vec{a} = \{12; 0; 3\}$, $\vec{b} = \{-4; 0; -1\}$.	Знайдіть $\vec{c} = 2(3\vec{a} - \vec{b}) - (5\vec{b} + 2\vec{a}) - 4\vec{b}$ та його модуль, якщо $\vec{a} = \{12; 0; 3\}$, $\vec{b} = \{-4; 0; -1\}$.	Знайдіть $\vec{c} = 3(5\vec{a} - \vec{b}) + (-2\vec{b} + 3\vec{a}) - 5\vec{b}$ та його модуль, якщо $\vec{b} = -5\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.
	 Спростіть вираз, яким визначається вектор \vec{c} .	 Спростіть вираз, яким визначається вектор \vec{c} та перейдіть від розкладу вектора за ортами до його координат.

4.25.

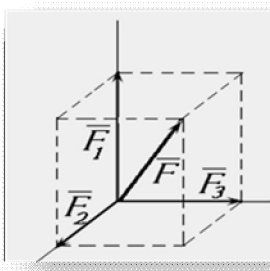
I рівень	II рівень	III рівень
Перевірити, чи є колінеарними вектори $\vec{a} = \{12; 0; 3\}$ і $\vec{b} = \{-4; 0; -1\}$. Встановити, який з них має більшу довжину.	Дано вектори $\vec{a} = \{2; 0; 3\}$ та $\vec{b} = \{-4; 0; -1\}$. Встановити, чи є колінеарними вектори $\vec{m} = 2\vec{b} - \vec{a}$ та $\vec{p} = -3\vec{a} + \vec{b}$.	Перевірити, що чотири точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$ є вершинами трапеції.




 <p>Запишіть вектор \vec{a} у вигляді: $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, та знайдіть значення λ.</p>	 <p>Розбийте задачу на підзадачі: 1) знайти координати векторів \vec{m} і \vec{p}; 2) встановити колінеарність векторів \vec{m} і \vec{p}.</p>	 <p>Переформулюйте задачу: перевірте, що серед усіх пар векторів, що можна побудувати, використовуючи точки A, B, C і D, є два колінеарних.</p>
---	---	--

4.26.

I рівень	II рівень	III рівень
Знайдіть розклад вектора $\vec{a} = \{12; 0; -3\}$ за векторами $\vec{b} = \{3; 1; -2\}$, $\vec{c} = \{1; 2; -1\}$ і $\vec{d} = \{4; -1; 2\}$	Дано вектори $\vec{a} = \{12; 0; 3\}$, $\vec{b} = \{3; 1; -2\}$, $\vec{c} = \{1; 2; -1\}$, $\vec{d} = \{4; -1; 2\}$. Знайдіть розклад вектора $\vec{m} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} + 4\vec{d}$ за векторами $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.	Знайдіть розклад вектора $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ за трьома некопланарними векторами: $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{p} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.
 <p>Переформулюйте задачу: знайти x, y, z такі, що $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} + z\vec{d}$</p>	 <p>Розбийте задачу на підзадачі: 1) знайдіть розклад вектора \vec{a} за векторами $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$; 2) виразіть вектор \vec{m} через $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.</p>	 <p>Виразіть вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ через вектори \vec{m}, \vec{n} і \vec{p}, розв'язуючи систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.</p>

4.27.

I рівень	II рівень	III рівень
Нехай $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Знайдіть напрямні косинуси цього вектора.	Вектор \vec{a} , що заданий координатами $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ складає з координатними осями Ox та Oy кути $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Обчисліть координати цього вектора, якщо $ \vec{a} = 2$.	 <p>Рис. 4.9. Розклад сили \vec{F}</p> <p>Сила $F = 26\text{H}$ розкладена за трьома взаємно перпендикулярними напрямками, як показано на рис. 4.9 ($\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$). Знайдіть кути, які утворюють складові з напрямком дії даної сили, якщо $F_1 = 13\text{H}$, $F_2 = 2\text{H}$.</p>

 <p>Знайдіть спочатку координати вектора \vec{a} за даним розкладом.</p>	 <p>Знайдіть спочатку косинуси всіх трьох кутів (α, β, γ), що утворює вектор \vec{a} з координатними осями, враховуючи, що $\cos \gamma$ може набувати двох значень.</p>	 <p>Переформулюйте задачу: модуль вектора дорівнює 26, його апліката та абсциса дорівнюють відповідно 13 і 2. Знайдіть напрямні косинуси вектора.</p>
--	--	--



Вчимося застосовувати ППЗ DG під час розв'язування задач з векторної алгебри

4.29. Для запису умови рівноваги сил, що діють у навантаженій монтажній щоглі, розробіть модель об'єкта, для якої необхідно врівноважити сили, за допомогою векторів із застосуванням ППЗ DG.

Переформулюйте умову на математичну. Сила \vec{P} , що представляє собою вагу вантажу, що піднімається щоглою, за правилом паралелограма розкладається на дві сили \vec{P}_1 та \vec{P}_2 , де \vec{P}_1 — сила, що стискає щоглу (зусилля в щоглі); \vec{P}_2 — натяг тросу (зусилля в тросі). Запишіть умову рівноваги зазначених сил у вигляді векторного рівняння. Спроектуйте векторне рівняння на осі координат та отримайте умову рівноваги в скалярній формі.

Хід моделювання.

1. Відкрийте вікно ППЗ DG.
2. За допомогою опції *Фігури-Аналітично-Вектор* побудуйте:
 - вектор \vec{OA} , для цього відзначити точку O – начало вектора, точку A – кінець вектора;
 - вектор \vec{OB} , для цього відзначити точку O – начало вектора, точку B – кінець вектора;
 - вектор \vec{AB} , для цього відзначити точку A – начало вектора, точку B – кінець вектора;
 - вектор \vec{BC} , для цього відзначити точку B – начало вектора, точку C – кінець вектора;
 - вектор \vec{CA} , для цього відзначити точку C – начало вектора, точку A – кінець вектора.

3. Вектор \overrightarrow{OA} відображує силу, що стискає щоглу (зусилля в щоглі). Вектор \overrightarrow{CA} відображує натяг тросу (зусилля в тросі).
4. За допомогою опції *Фігури-Виміряти-Виміряти кут* побудуйте $\angle AOB = \alpha$ — кут, що створено натягнутим тросом із поверхнею землі; β — кут, що створено щоглою із вертикаллю.

Буде отримано модель об'єкта, для якої необхідно врівноважити сили, за допомогою векторів.

Тема 5. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ



Як пов'язаний скалярний добуток векторів з інженерною практикою

Для характеристики сили F , що діє на тіло, застосовується величина, яка називається механічною роботою. Механічна робота — це фізична величина, що є кількісною характеристикою дії сили F на процес $\gamma(t)$ та залежить від чисельної величини, напрямку сили й від переміщення точки її прикладення.

Припустимо під дією постійної сили тіло рухається прямолінійно з положення 1 у положення 2 та проходить відстань S . Знайдіть роботу сили по переміщенню матеріальної точки вздовж вектору (рис. 5.1).

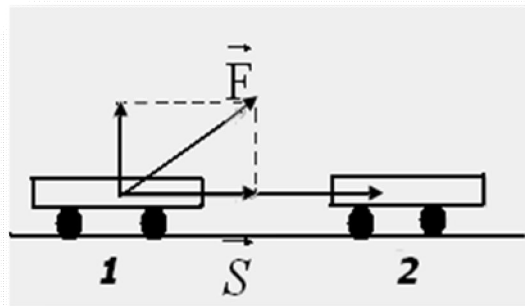
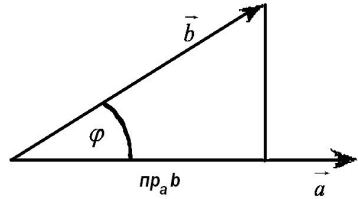


Рис. 5.1. Модель-схема характеристики дії сили на тіло, що рухається прямолінійно з положення 1 у положення 2

Поняття *скалярного добутку векторів* виникає під час обчислення такої роботи сили, що дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення.



Складаємо опорний конспект

Скалярний добуток двох векторів	
Скалярним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} називають число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, що дорівнює	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots \cdot \dots \cdot \cos \dots$
Якщо хоча б один із векторів \vec{a} чи \vec{b} нульовий, то за означенням їх скалярний добуток дорівнює	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots$
Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора.	Отже у випадку  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots$
Скалярний добуток вектора \vec{F} сили на вектор \vec{S} переміщення $\vec{F} \cdot \vec{S} =$	\dots
Властивості скалярного добутку	
До алгебраїчних властивостей скалярного добутку відносяться: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ 2) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} =$ 3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) =$	\dots \dots \dots
До геометричних властивостей і скалярного добутку відносяться: 1) якщо $\vec{a} \neq 0$ та $\vec{b} \neq 0$ та кут φ гострий, то 2)) якщо $\vec{a} \neq 0$ та $\vec{b} \neq 0$ та кут φ тупий, то 2) скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли 3) скалярний квадрат вектора дорівнює	$\vec{a} \cdot \vec{b} \dots 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} \dots 0$ $\vec{a} \dots \vec{b}$ $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \vec{a} ^2$, звідки $ \vec{a} = \dots$

Вираження скалярного добутку через координати векторів та обчислення кута між векторами	
Якщо вектори \vec{a} і \vec{b} задані своїми координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots \cdot \dots + \dots \cdot \dots + \dots \cdot \dots$
Якщо вектори \vec{a} і \vec{b} задані координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то умова перпендикулярності цих векторів	$\dots \cdot \dots + \dots \cdot \dots + \dots \cdot \dots = 0$
Якщо вектор \vec{a} заданий координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то його довжина	$ \vec{a} = \sqrt{\dots^2 + \dots^2 + \dots^2}$
Якщо вектори \vec{a} і \vec{b} задані координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то косинус кута між цими векторами обчислюється	$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} } =$ $= \frac{\dots \cdot \dots + \dots \cdot \dots + \dots \cdot \dots}{\sqrt{\dots^2 + \dots^2 + \dots^2} \sqrt{\dots^2 + \dots^2 + \dots^2}}$
Якщо вектори \vec{a} і \vec{b} задані координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то проекція вектора \vec{a} на \vec{b} обчислюється	$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\dots \cdot \dots + \dots \cdot \dots + \dots \cdot \dots}{\sqrt{\dots^2 + \dots^2 + \dots^2}}$



Перевіряємо готовність до практичного заняття

5.1. Вектор $\vec{a} = \{1; -2; 0\}$, $\vec{b} = \{0; 3; -1\}$. Знайдіть скалярний добуток цих векторів.

А	Б	В	Г
$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \{0; -6; 0\}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \{1; 1; -1\}$



Скористайтесь формулою для обчислення скалярного добутку векторів, які задано своїми координатами: якщо, $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

5.2. Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ і α – кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , то:

А	Б	В	Г
α – гострий	α – тупий	α – прямий	інша відповідь



Скористайтесь геометричними властивостями скалярного добутку: якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, то кут між цими векторами тупий, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, то – гострий.

5.3. Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ і α – кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , то:

А	Б	В	Г
α – гострий	α – тупий	α – прямий	інша відповідь



Скористайтесь геометричними властивостями скалярного добутку (див. попереднє питання).

5.4. Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, \vec{a} і \vec{b} – ненульові вектори та α – кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , то:

А	Б	В	Г
α – гострий	α – тупий	α – прямий	інша відповідь



Скористайтесь ознакою перпендикулярності векторів: ненульові вектори перпендикулярні тоді і лише тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

5.5. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, в цьому випадку:

А	Б	В	Г
$\vec{a} \cdot \vec{a} = 2$	$\vec{a} \cdot \vec{a} = \pm 2$	$\vec{a} \cdot \vec{a} = 4$	$\vec{a} \cdot \vec{a} = \pm 4$



Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

5.6. Оберіть невірну рівність з наведених:

А	Б	В	Г
$\vec{a} \cdot (3\vec{b}) = 3(\vec{b} \cdot \vec{a})$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{b} \cdot \vec{a}$	$3(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b}$	$2\vec{a} - 3\vec{a} = -\vec{a}$



Використовуйте властивості скалярного добутку.

5.7. Відомо, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 8$. Знайдіть проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} .

А	Б	В	Г
$np_{\vec{b}}\vec{a} = -\frac{3}{2}$	$np_{\vec{b}}\vec{a} = -6$	$np_{\vec{a}}\vec{b} = -\frac{3}{2}$	$np_{\vec{a}}\vec{b} = -6$



Проекція вектора \vec{a} на вектор \vec{b} обчислюється за формулою $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

5.8. Відомо, що $|\vec{a}| = 12$, $np_{\vec{a}}\vec{b} = -4$, $np_{\vec{b}}\vec{a} = -6$. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

А	Б	В	Г
$\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -48$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -36$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$



Скористайтесь геометричним змістом скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку модуля одного вектора на проекцію іншого на нього.

5.9. Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = -11$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 8$, α - кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , то:

А	Б	В	Г
$\cos \alpha = \frac{11}{16}$	$\sin \alpha = -\frac{11}{16}$	$\cos \alpha = -\frac{11}{16}$	$\alpha = -\frac{11}{16}$



Скористайтесь означенням скалярного добутку векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$, де α - кут між векторами \vec{a} і \vec{b} .



Вчимося розв'язувати типові задачі

5.10. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Знайдіть \vec{a}^2 і $(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 2$, а $|\vec{b}| = 3$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть скалярний квадрат \vec{a}^2 .



Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Крок 2. Спростіть вираз $(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.



Скористайтесь властивостями скалярного добутку векторів:

- | | |
|--|--|
| 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; | 3) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$; |
| 2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$; | 4) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$. |

Тобто, перетворення з виразами, що містять скалярний добуток векторів, можна виконувати за правилами алгебри.

Крок 3. В отриманому виразі розпишіть скалярні квадрати і скалярні добутки векторів та обчисліть значення отриманого виразу.

$$3\vec{a}^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 3 \cdot \dots + 5 \cdot \dots - 2 \cdot \dots =$$



Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Скалярний добуток векторів обчислюється за формулою: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$, де α - кут між векторами \vec{a} і \vec{b} .

Відповідь: $\vec{a}^2 = 4$; $(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = -21$.

5.11. Дано вершини трикутника ABC : $A(2; 2; -4)$, $B(2; -1; -1)$, $C(3; -1; -2)$. Знайдіть зовнішній кут трикутника при вершині B .

Хід розв'язання.

Крок 1. Побудуйте ΔABC та його зовнішній кут β при вершині B .



Зовнішнім кутом трикутника ABC при вершині A називають кут суміжний з внутрішнім кутом A даного трикутника.

Крок 2. Спочатку необхідно знайти внутрішній $\angle ABC$. Це кут, який утворюють вектори \overrightarrow{BA} і \overrightarrow{BC} . Знайдіть координати цих векторів.

$$\overrightarrow{BA} =$$

$$\overrightarrow{BC} =$$

Крок 3. Знайдемо скалярний добуток $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $|\overrightarrow{BA}|$ і $|\overrightarrow{BC}|$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} =$$

$$|\overrightarrow{BA}| =$$

$$|\overrightarrow{BC}| =$$



Скористайтесь формулою для обчислення скалярного добутку векторів, які задано своїми координатами: якщо, $\overrightarrow{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overrightarrow{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ то $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

Скористайтесь формулою для знаходження модуля вектора $\overrightarrow{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$: $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Крок 4. Знайдіть $\angle ABC$ - кут між векторами \overrightarrow{BA} і \overrightarrow{BC} .

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} =$$

$$\text{Звідси } \angle ABC = \arccos \frac{1}{2} =$$



Виразіть косинус кута між векторами з формули для скалярного добутку векторів: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cos \alpha$, де α - кут між векторами \overrightarrow{a} і \overrightarrow{b} .

Крок 5. Знайдіть кут β , що є суміжним з $\angle ABC$.

Відповідь: 120° .

5.12. При якому значенні m вектори $\vec{a} = m\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = m\vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ є перпендикулярними?

Хід розв'язання.

Крок 1. Запишіть координати векторів \vec{a} і \vec{b} .

$\vec{a} =$	$\vec{b} =$
-------------	-------------



Скористайтесь тим, що векторну рівність $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ у символічній формі записують так $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

Крок 2. Запишіть умову перпендикулярності ненульових векторів.



Скористайтесь ознакою перпендикулярності векторів: ненульові вектори перпендикулярні тоді і лише тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Крок 3. Розпишіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} через їхні координати та розв'яжіть отримане рівняння відносно m .



Якщо, $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

Відповідь: $m = 4$, $m = -2$.

5.13. Дано вектори $\vec{a} = \{1; -3; 4\}$, $\vec{b} = \{3; -4; 2\}$ і $\vec{c} = \{-1; 1; 4\}$. Обчисліть $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{c}} \vec{b}$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть вектор $\vec{a} + \vec{c}$.



Якщо вектори задано своїми координатами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ тоді $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$.

Крок 2. Знайдіть $|\vec{a} + \vec{c}|$.



Скористайтесь формулою для знаходження модуля вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$:
 $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Крок 3. Знайдіть $\vec{b}(\vec{a} + \vec{c})$.



Якщо, $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

Крок 4. Знайдіть $pr_{\vec{a} + \vec{c}} \vec{b}$.



Проекція вектора \vec{a} на вектор \vec{b} обчислюється за формулою $pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{17}}$.



Вчимося моделювати професійну діяльність інженера

5.14. Знайдіть величину роботи результуючої сил $\vec{F}_1 (3; 2; -1)$ $\vec{F}_2 (2; -1; -3)$, $\vec{F}_3 (-4; 1; 3)$, прикладеної до точки $A(2; 3; -1)$ відносно точки $O (-4; 1; 2)$ та на який кут прикладене результуючу силу до вектору шляху.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть координати вектора результуючої сил.



Робота результуючої сили дорівнює сумі робіт складових сил.
При додаванні векторів їхні відповідні координати додають.

Знайдіть суму складових сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow \vec{F} = \dots$$

Крок 2. Знайдіть координати вектора \vec{OA} .



Якщо відомі координати початку $O(x_o, y_o, z_o)$ та кінця $A(x_a, y_a, z_a)$ вектора \vec{OA} , то його координати знаходять за формулою $\vec{OA} = (x_a - x_o, y_a - y_o, z_a - z_o)$.

$$\vec{OA} = \dots$$

Крок 3. Обчисліть скалярний добуток $A = \vec{F} \cdot \vec{OA}$ та знайдіть роботу результуючої сили.



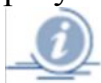
Для векторів \vec{a} і \vec{b} , заданих своїми координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ їх скалярний добуток обчислюється за формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.



Робота сили дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення $A = \vec{F} \cdot \vec{OA}$.

$$A = \dots = \text{од. роботи}$$

Крок 4. Знайдіть градусну міру кута, на який прикладене результуючу силу до вектору шляху.



Косинус кута між векторами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ обчислюється за формулою:

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

$$\cos(\angle \vec{F}; \vec{OA}) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{OA}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{OA}|} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\sqrt{\dots} \cdot \sqrt{\dots}} \approx \dots$$

$$\angle(\vec{F}; \vec{OA}) \approx \arccos \dots \approx \dots$$

Відповідь: величина роботи результируючої сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , прикладеної до точки A відносно точки O , $A = 13$ од. роботи; кут, на який прикладено результируючу сил до вектору шляху $\angle(\vec{F}; \vec{OA}) \approx 45^\circ 2'$.






Вчимося самостійно розв'язувати завдання

5.15.




I рівень	II рівень	III рівень
Обчисліть значення виразу: $(5\vec{a} - 3\vec{b})(4\vec{b} + \vec{a})$, якщо $\vec{a} = \{3; -4; 2\}$, $\vec{b} = \{-5; 1; -3\}$	Обчисліть значення виразу: $(5\vec{a} - 3\vec{b})(4\vec{b} + \vec{a})$, якщо $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -2(2\vec{i} + 3\vec{j}) + 5(\vec{j} - \vec{k})$	Обчисліть значення виразу: $(5\vec{a} - 3\vec{b})(4\vec{b} + \vec{a})$, якщо $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$, \vec{m} і \vec{n} - взаємно перпендикулярні вектори, $ \vec{m} = 2$, $ \vec{n} = 3$.
 Спочатку спростіть даний вираз.	 Спростіть даний вираз та знайдіть координати векторів \vec{a} і \vec{b} .	 Спочатку спростіть даний вираз.

5.16.




I рівень	II рівень	III рівень
Знайдіть вектор $\vec{a} = \{6; k^2; -5\}$ та його модуль, якщо він перпендикулярний вектору $\vec{b} = \{-1; 4; 2\}$.	Знайдіть вектор \vec{x} , якщо відомо, що його ордината дорівнює 1 і він перпендикулярний векторам $\vec{a} = \{-4; 5; 2\}$ і $\vec{b} = \{6; -6; 0\}$	Знайдіть вектор \vec{x} , якщо відомо, що він перпендикулярний осі Oz , $ \vec{x} = 5$ і $\vec{x} \cdot \vec{a} = 10$, де $\vec{a} = \{-2; 1; 4\}$

 <p>Складіть за даними задачі рівняння.</p>	 <p>Уведіть позначення $\bar{x} = \{x; 0; z\}$, та складіть систему рівнянь використовуючи дані задачі.</p>	 <p>Переформулюйте умову «вектор \bar{x} перпендикулярний осі Oz» наступним чином: вектор \bar{x} перпендикулярний напрямному вектору осі Oz $\bar{k} = \{0; 0; 1\}$.</p>
--	---	---




5.17.

<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Знайдіть кут між діагоналями чотирикутника $ABCD$, якщо $A(6; 7; 8)$, $B(8; 2; 6)$, $C(4; 3; 2)$, $D(2; 8; 4)$.	Знайдіть кут між медіанами AM та BK трикутника ABC , якщо: $A(2; 2; -4)$, $B(2; -1; -1)$, $C(3; -1; -2)$.	У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AA_1 = 10$, $AD = 8$, $AB = 6$, K – середина AA_1 , M – середина DD_1 . Знайдіть кут між прямими DK та $B_1 M$.
 <p>Переформулюйте задачу: знайдіть кут між векторами \overline{BD} і \overline{AC}.</p>	 <p>Переформулюйте задачу: знайдіть кут між векторами \overline{BK} і \overline{AM}.</p>	 <p>Введіть декартову систему координат, і переформулюйте задачу: знайти кут між векторами \overline{DK} і $\overline{B_1 M}$.</p>

5.18.

<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Знайдіть проекцію вектора $\bar{b} = \{-5; 1; -3\}$ на вектор $\bar{a} = -\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$.	Нехай $A(2; 2; -4)$, $B(2; -1; -1)$, $C(3; -1; -2)$, $D(3; 1; 5)$. Знайдіть проекцію \overline{AB} на $\overline{CD} + \overline{DB}$.	Сила $\bar{F} = \{1; -2; 3\}$ розкладена за трьома напрямками, один з яких задано вектором $\bar{a} = \{2; 2; 1\}$. Знайдіть складову сили \bar{F} у напрямку вектора \bar{a} .
 <p>Розбийте задачу на підзадачі: знайти координати \bar{a}; знайти зазначену проекцію.</p>	 <p>Розбийте задачу на підзадачі: знайти координати \overline{AB} і $\overline{CD} + \overline{DB}$; знайти зазначену проекцію.</p>	 <p>Переформулюйте задачу: знайдіть проекцію сили \bar{F} на вектор \bar{a}.</p>

5.19.

I рівень	II рівень	III рівень
Знайдіть роботу сили $\vec{F} = \{1; -2; 3\}$ з прямолінійного переміщення тіла з точки $A(6; 7; 8)$ в точку $B(8; 2; 6)$.	Знайдіть роботу сили $F = 10\text{ Н}$ з прямолінійного переміщення з положення $A(6; 7; 8)$ у положення $B(8; 2; 6)$, якщо напрямок дії сили утворює з напрямком переміщення кут $\frac{\pi}{3}$.	Робота рівнодіючої сил $\vec{F}_1 = \{1; 0; -3\}$, $\vec{F}_2 = \{-1; 2; 3\}$, $\vec{F}_3 = \{1; 4; 1\}$ з переміщення тіла вздовж осі Oz дорівнює 7 Дж . На яку відстань змістилася точка.
 Переформулюйте задачу: знайдіть роботу сили \vec{F} по переміщенню тіла на вектор \vec{AB} .	 Переформулюйте задачу: знайдіть скалярний добуток векторів \vec{F} і \vec{AB} .	 Переформулюйте задачу: скалярний добуток вектора рівнодіючої та вектора колінеарного вектору $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$ дорівнює 7. Знайдіть модуль останнього.



Вчимося застосовувати ППЗ під час обчислення кутів між векторами

5. 20. Координати сили, що діє на точку: $F_x = 3\text{ Н}$, $F_y = 4\text{ Н}$, $F_z = 5\text{ Н}$.

Координати переміщення точки $S_x = 7\text{ м}$, $S_y = 1\text{ м}$, $S_z = 3\text{ м}$.

Обчислити роботу сили \vec{F} , що діє на точку й кут φ між вектором сили \vec{F} й вектором переміщення \vec{S} із застосуванням ППЗ *Gran3D*.

Переформулюйте умову на математичну. Знайдіть кут між векторами $\vec{F} = \{3; 4; 5\}$ й $\vec{S} = \{7; 1; 3\}$ та скалярний добуток цих векторів.

Хід обчислення.

1. Відкрийте вікно ППЗ *Gran3D*.
2. За допомогою опції *Об'єкт-Створити-Точка* побудуйте у полі програми точки $S(7; 1; 3)$, $F(3; 4; 5)$.
3. За допомогою опції *Обчислення-Кут-За трьома точками* введіть послідовно точки $S(7; 1; 3)$, $O(0; 0; 0)$, $F(3; 4; 5)$ активізуючи їх координати курсором по команді «виберіть ...точку». У правому нижньому куті звіту з'явиться значення кута.

4. За допомогою опції *Обчислення-Значення виразу* введіть числовий вираз $7 \times 3 + 1 \times 4 + 3 \times 5$ та отримайте результат обчислень у цьому ж вікні.

Тема 6. ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ



Як пов'язані векторний та мішаний добуток з інженерною практикою

Припустимо до тіла (точка A) прикладене силу $\vec{F} = \vec{AB}$ та задано точку O — як деяку точку простору (рис. 6.1.). Знайдіть момент сили \vec{F} відносно точки O . Момент сили M відносно точки, в якій закріплене тіло, характеризує здатність сили обертати тіло навколо цієї точки, відносно якої він береться. При обертовому русі силовий вплив характеризується моментом сили, а не силою.

Моментом сили відносно точки O називають вектор \vec{M} , який проходить через точку O і задовольняє такі умови: перпендикулярний площині, що проходить через точки O, A і B ; чисельно дорівнює добутку сили на плече; утворює праву трійку з векторами \vec{OA} і \vec{AB} .

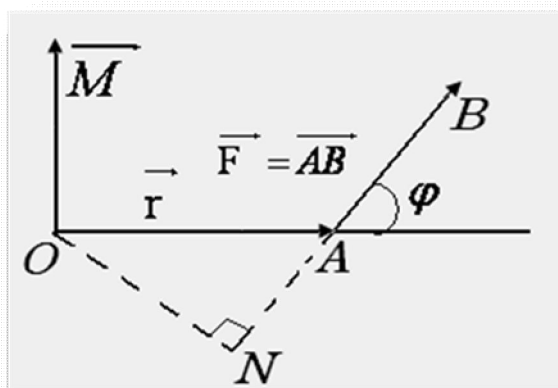


Рис. 6.1. Модель-схема моменту сили \vec{F} відносно точки O

Поняття **векторного добутку** векторів виникає під час обчислення такого моменту сили, що дорівнює векторному добутку вектора сили на вектор переміщення, отже, $\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$.



Складаємо опорний конспект

Векторний добуток векторів	
У результаті <i>векторного добутку</i> вектора \vec{a} на вектор \vec{b} , на відміну від скалярного добутку, завжди буде отримано	...
Модуль вектора \vec{c} , отриманого у результаті <i>векторного добутку</i> вектора \vec{a} на вектор \vec{b} , обчислюють за формулою	$ \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin \phi,$ де кут ϕ - кут між векторами \vec{a} і \vec{b}
По відношенню до кожного з векторів \vec{a} і \vec{b} вектор \vec{c} , що є векторним добутком, розташований завжди	...
Вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} , що отриманий у результаті векторного добутку вектора \vec{a} на вектор \vec{b} , утворюють <i>праву трійку</i> . Тобто якщо дивитися з кінця результуючого вектора \vec{c} , то найкоротший поворот від першого вектора \vec{a} до другого вектора \vec{b} здійснюється	
За геометричним змістом модуль векторного добутку дорівнює	 ... , побудованого на прикладених до спільного початку векторах \vec{a} і \vec{b}
До алгебраїчних властивостей векторного добутку відносяться:	$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} &= \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) &= \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \end{aligned}$

Два ненульові вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні тоді і тільки тоді, коли векторний добуток цих векторів дорівнює	\dots , тобто $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \dots$
Якщо відомі координати вершин трикутника ABC , то його площу доцільно шукати за формулою	$S_{\triangle ABC} = \dots \cdot \left \vec{a} \times \vec{b} \right $
Обчислення векторного добутку двох векторів, заданих координатами	
Якщо вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ задані своїми координатами, тоді векторний добуток знаходять за формулою	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
Момент сили відносно точки	
Моментом сили $\vec{F} = \overline{AB}$ прикладеної у точці A відносно точки O позначають вектор \vec{M} та обчислюють за формулою	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, модуль якого чисельно дорівнює $ \vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F} \cdot \sin(\angle \vec{r}, \vec{F})$
Лінійна швидкість обертання	
Швидкість \vec{v} точки M твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі та $\vec{r} = \overline{OM}$, де O – деяка нерухома точка осі визначається за формулою Ейлера	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
Мішаний добуток векторів	
Мішаним (векторно-скалярним) добутком трьох векторів \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} називають число $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$, рівне	\dots вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор \vec{c} : $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \dots$
Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток	\dots , наприклад: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \dots \vec{c} \vec{b} \vec{a}$

При циклічному переставлянні множників мішаний добуток	$\overline{a} \overline{b} \overline{c} \dots \overline{b} \overline{c} \overline{a} \dots \overline{c} \overline{a} \overline{b}$, тобто
У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутоків можна	$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \dots \cdot (\overline{\dots} \times \overline{\dots}) = (\overline{\dots} \times \overline{\dots}) \cdot \overline{\dots}$, тобто
За геометричним змістом модуль мішаного добутку $\overline{a} \overline{b} \overline{c}$ чисельно дорівнює	\dots , побудованого на прикладених до спільного початку векторах \overline{a} , \overline{b} і \overline{c} тобто $V = \dots$
Об'єм піраміди, побудованої на векторах \overline{a} , \overline{b} і \overline{c} , дорівнює	\dots частини \dots , тобто $V_{\text{піраміди}} = \dots$
Вектори \overline{a} , \overline{b} і \overline{c} компланарні тоді і тільки тоді, коли	$\overline{a} \overline{b} \overline{c} = \dots$
Обчислення мішаного добутку трьох векторів, що задані координатами	
Якщо вектори $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$ і $\overline{c} = (c_x, c_y, c_z)$ задано своїми координатами, то мішаний добуток цих векторів дорівнює	$\overline{a} \overline{b} \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
Якщо вектори $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$ і $\overline{c} = (c_x, c_y, c_z)$ задано своїми координатами, компланарні, то	$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$



Перевіряємо готовність до практичного заняття

6.1. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, а кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

Оберіть правильне твердження:

А	Б	В	Г
$\vec{a} \times \vec{b} = 3\sqrt{3}$	$\vec{a} \times \vec{b} = 3$	$ \vec{a} \times \vec{b} = 3$	$ \vec{a} \times \vec{b} = 3\sqrt{3}$



Векторним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} називають вектор \vec{c} , який задовольняє трьом умовам: 1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$; 2) вектори \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} утворюють праву трійку векторів; 3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$, де α - кут між векторами \vec{a} і \vec{b} .

6.2. Якщо $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3}$, то можна стверджувати, що:

А	Б	В	Г
\vec{a} і \vec{b} не є перпендикулярними	\vec{a} і \vec{b} не є колінеарними	\vec{a} і \vec{b} утворюють гострий кут	\vec{a} і \vec{b} утворюють тупий кут



Скористайтесь умовою колінеарності векторів: вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні тоді і лише тоді, коли $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

6.3. Якщо $\vec{a} = -3\vec{b}$, то:

А	Б	В	Г
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$\vec{a} \times \vec{b} = 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$	$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$



Скористайтесь різними умовами колінеарностей векторів:

- 1) вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні тоді і лише тоді, коли $\vec{a} = \lambda \vec{b}$;
- 2) вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні тоді і лише тоді, коли $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

6.4. Спростіть вираз $2\vec{p} \times \vec{q} - \vec{q} \times \vec{p} + \vec{p} \times \vec{p}$.

А	Б	В	Г
$3\vec{p} \times \vec{q}$	$\vec{p} \times \vec{q}$	$\vec{p} \times \vec{q} + \vec{p}^2$	$3\vec{p} \times \vec{q} + \vec{p}^2$



Використовуйте властивості векторного добутку векторів: 1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;
2) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

6.5. У паралелограмі $ABCD$ $\overline{AB} = \vec{a}$, а $\overline{BC} = \vec{b}$. Площа цього паралелограма обчислюється за формулою:

А	Б	В	Г
$\vec{a} \times \vec{b}$	$ \vec{a} \cdot \vec{b} $	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$ \vec{a} \times \vec{b} $



Геометричний зміст векторного добутку: модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на прикладених до спільного початку векторах.

6.6. Який з виразів не може бути правою частиною рівності $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \dots$

А	Б	В	Г
$\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$	$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$	$(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$



Мішаним добутком векторів \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} називається число, що дорівнює $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. У мішаному добутку знаки векторного та скалярного добутків можна міняти місцями: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

6.7. Відомо, що $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -4$. Оберіть правильне твердження:

А	Б	В	Г
\vec{a}, \vec{b} і \vec{c} утворюють праву трійку векторів	\vec{a}, \vec{b} і \vec{c} утворюють ліву трійку векторів	\vec{a}, \vec{b} і \vec{c} компланарні	інша відповідь



Якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} > 0$, то вектори \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} утворюють праву трійку векторів, якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} < 0$, то – ліву трійку, якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$, то вектори \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} компланарні.

6.8. Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ паралелепіпед. Об'єм цього паралелепіпеду може бути обчислений за формулою:

А	Б	В	Г
$ \overline{AB} \times \overline{AD} $	$ \overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AA_1} $	$ \overline{AB} \overline{AD} \overline{AA_1} $	інша відповідь



Скористайтесь геометричним змістом мішаного добутку векторів: модуль мішаного добутку $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеду, побудованого на прикладених до спільного початку векторах \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} .

6.9. Нехай $ABCA_1 B_1 C_1$ - призма. Об'єм цієї призми може бути обчислений за формулою:

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2} \overline{AB} \overline{AC} \overline{AA_1} $	$\frac{1}{3} \overline{AB} \overline{AC} \overline{AA_1} $	$\frac{1}{6} \overline{AB} \overline{AC} \overline{AA_1} $	інша відповідь



Скористайтесь геометричним змістом мішаного добутку векторів: модуль мішаного добутку $\overline{a} \overline{b} \overline{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на прикладених до спільного початку векторах \overline{a} , \overline{b} і \overline{c} .

6.10. A_1ABC - піраміда. За якою формулою можна обчислити її об'єм?

А	Б	В	Г
$ \overline{AB} \overline{AC} \overline{AA_1} $	$\frac{1}{3} \overline{AB} \overline{AC} \overline{AA_1} $	$\frac{1}{6} \overline{AB} \overline{AC} \overline{AA_1} $	інша відповідь



Об'єм піраміди побудованої на векторах \overline{a} , \overline{b} і \overline{c} дорівнює $\frac{1}{6}$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих самих векторах.

6.11. Задано вектори $\overline{a} = \{-1; 2; 3\}$ і $\overline{b} = \{0; 4; 5\}$. Чому дорівнює їх векторний добуток $\overline{a} \times \overline{b}$?

А	Б	В	Г
$\overline{a} = \{0; 8; -15\}$	$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	інша відповідь



Якщо вектори $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ задано своїми координатами, то їхній векторний добуток обчислюється за формулою:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

6.12. Задано вектори $\overline{a} = \{-1; 2; 3\}$, $\overline{b} = \{0; 4; 5\}$ і $\overline{c} = \{1; 1; 2\}$. Їхній мішаний добуток може бути обчислений наступним чином:

А	Б	В	Г
$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	інша відповідь



Якщо вектори $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ і $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$ задано своїми координатами, то їхній мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$



Вчимося розв'язувати типові задачі

6.13. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$ і $\vec{a} \cdot \vec{b} = 24$. Знайдіть синус кута φ між векторами \vec{a} і \vec{b} .

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть $\cos \varphi$.



Скористайтесь формулою для обчислення косинуса кута між векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Крок 2. Обчисліть $\sin \varphi$.



Скористайтесь основною тригонометричною тотожністю: $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

Відповідь: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.14. Знайдіть векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = -2\vec{m} + \vec{n}$, де $\vec{m} = \{-1; 0; 3\}$, $\vec{n} = \{1; 1; 2\}$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть координати векторів \vec{a} і \vec{b} .

$$\bar{a} =$$

$$\bar{b} =$$



Якщо вектори задано своїми координатами $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ тоді $\bar{a} \pm \bar{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$, а $\lambda \bar{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$.

Крок 2. Отже, $\bar{a} = \{-4; -3; -3\}$ і $\bar{b} = \{3; 1; -4\}$. Знайдіть $\bar{a} \times \bar{b}$.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = (-1) \dots \bar{i} \dots + (-1) \dots \bar{j} \dots + (-1) \dots \bar{k} \dots =$$



Якщо вектори $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ задано своїми координатами, то їхній векторний добуток обчислюється за формулою:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



Для обчислення визначника скористайтесь теоремою Лапласа.

Крок 3. Отже $\bar{a} \times \bar{b} = 15\bar{i} - 25\bar{j} + 5\bar{k}$. Знайдіть координати вектора $\bar{a} \times \bar{b}$.



Скористайтесь тим, що векторну рівність $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$ у символічній формі записують так $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

Відповідь: $\{15; -25; 5\}$.

6.15. Знайдіть площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{p} = 2\bar{a} + \bar{b}$ і $\bar{q} = 3\bar{b} - 4\bar{a}$, якщо $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, а кут φ між векторами \bar{a} і \bar{b} дорівнює $\pi/6$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Спростіть вираз $\overline{p} \times \overline{q}$.

$$\overline{p} \times \overline{q} = (2\overline{a} + \overline{b})(3\overline{b} - 4\overline{a}) =$$



Скористайтесь властивостями векторного добутку векторів: 1) $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$; 2) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$; 3) $\overline{a} \times (\lambda \overline{b}) = \lambda \overline{a} \times \overline{b}$.

Крок 2. Отже, $\overline{p} \times \overline{q} = 10\overline{a} \times \overline{b}$. Знайдіть $|\overline{p} \times \overline{q}|$.



Скористайтесь тим, що $|\lambda \overline{a}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$.



Для обчислення $|\overline{a} \times \overline{b}|$ використовуйте формулу: $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin \varphi$, де φ - кут між векторами \overline{a} і \overline{b} .

Крок 3. Отже, площа паралелограма, побудованого на векторах \overline{p} і \overline{q} дорівнює:



Скористайтесь геометричним змістом векторного добутку векторів: модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на прикладених до спільного початку векторах.

Відповідь: 30.

6.16. Знайдіть вектор \overline{a} , якщо $\overline{a} \perp \overline{b}$, $\overline{a} \perp \overline{c}$ і $\overline{a} \cdot \overline{m} = -2$ та відомо, що $\overline{b} = \{1; 0; -2\}$, $\overline{c} = \{2; 1; 1\}$, $\overline{m} = \{1; 1; 1\}$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть $\overline{a}' = \overline{b} \times \overline{c}$.



Якщо вектори $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ задано своїми координатами, то їхній векторний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Крок 2. Визначить взаємне розміщення векторів \vec{a}' і \vec{b} , \vec{a}' і \vec{c} та \vec{a}' і \vec{a} .

$$\vec{a}' \dots \vec{b}, \quad \vec{a}' \dots \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}' \dots \vec{a}.$$



Векторним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} називають вектор \vec{c} , який задовольняє трьом умовам: 1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$; 2) вектори \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} утворюють праву трійку векторів; 3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$, де α - кут між векторами \vec{a} і \vec{b} .

Крок 3. Оскільки $\vec{a}' \perp \vec{a}$, то $\vec{a} = \lambda \vec{a}'$. Виразіть координати вектора \vec{a} .



Якщо вектор задано своїми координатами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, тоді $\lambda \vec{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$.

Крок 4. За умовою $\vec{a} \cdot \vec{m} = -2$. Запишіть цю рівність через координати векторів $\vec{a} = \{2\lambda; -5\lambda; \lambda\}$ і $\vec{m} = \{1; 1; 1\}$ та знайдіть λ .



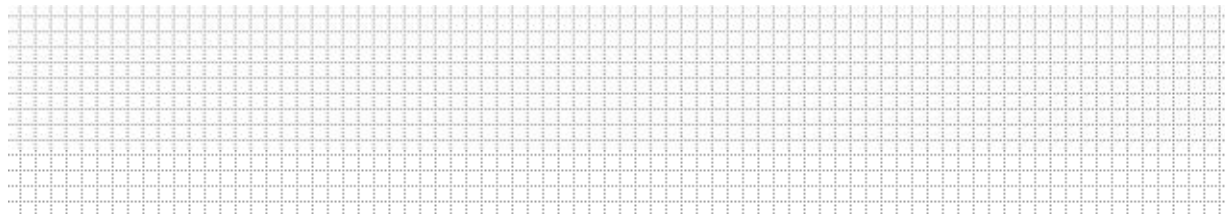
Якщо, $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

Крок 5. Оскільки $\lambda = 1$, то $\vec{a} = \{2; -5; 1\}$
Відповідь: $\vec{a} = \{2; -5; 1\}$.

6.17. З'ясувати орієнтацію трійки векторів $\vec{a} = \{2; -5; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; 1; 2\}$ і $\vec{c} = \{3; -4; 0\}$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



Якщо вектори $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ і $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$ задано своїми координатами, то їхній мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Крок 2. З'ясуйте орієнтацію трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



Якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} > 0$, то вектори \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} утворюють праву трійку векторів, якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} < 0$, то – ліву трійку.

Відповідь: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють ліву трійку.

6.18. Чи належать точки $A(2; -1; -3)$, $B(-4; 1; -2)$, $C(0; -6; 3)$ і $D(-12; -2; 5)$ одній площині.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть координати векторів \vec{AB}, \vec{AC} і \vec{AD} .



Якщо відомі координати початку $A(x_1; y_1; z_1)$ та кінця $B(x_2; y_2; z_2)$ вектора \vec{AB} , то його координати знаходять за формулою $\vec{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Крок 2. Знайдіть мішаний добуток $\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}$.



Якщо вектори $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ і $\overline{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$ задано своїми координатами, то їхній мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Крок 3. Визначить, чи є вектори \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} компланарними.



Скористайтесь ознакою компланарності векторів: вектори \overline{a} , \overline{b} і \overline{c} компланарні тоді і лише тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

Крок 4. Оскільки вектори \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} не є компланарними, тому точки A , B , C і D не лежать в одній площині.

Відповідь: не лежать в одній площині.



Вчимося моделювати професійну діяльність інженера

6.19. Знайдіть величину моменту результуючої сил $\overline{F}_1(3; 2; -1)$, $\overline{F}_2(2; -1; -3)$, $\overline{F}_3(-4; 1; 3)$, прикладеної до точки $A(4; 5; -1)$ відносно точки $O(-3; 1; 1)$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть координати вектора результуючої сил.



Робота результуючої сили дорівнює сумі робіт складових сил. При додаванні векторів їхні відповідні координати додають.

Знайдіть суму складових сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow \vec{F} = \dots$$

Крок 2. Знайдіть координати вектора \overrightarrow{OA} .



Якщо відомі координати початку $O(x_o, y_o, z_o)$ та кінця $A(x_a, y_a, z_a)$ вектора \overrightarrow{OA} , то його координати знаходять за формулою $\overrightarrow{OA} = (x_a - x_o, y_a - y_o, z_a - z_o)$.

$$\overrightarrow{OA} = \dots$$

Крок 3. Знайдіть вектор моменту результуючої сили.



Момент сили дорівнює векторному добутку вектора сили на вектор переміщення $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$, де

$$\overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{\overrightarrow{OA}} & y_{\overrightarrow{OA}} & z_{\overrightarrow{OA}} \\ x_{\vec{F}} & y_{\vec{F}} & z_{\vec{F}} \end{vmatrix}.$$

Обчисліть визначник $\overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$



Скористайтесь для обчислення визначника правилом трикутника.

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \dots = \dots$$

Крок 4. Знайдіть величину моменту результуючої сил $|\vec{M}|$.



Довжину (модуль) вектора \vec{a} обчислюють за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Отже, $|\vec{M}| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$, де $\vec{M} = (0; -5; -10) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{M}| = \sqrt{\dots} = \dots \approx \dots$ од. моменту

Відповідь: величина моменту результуючої сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , прикладеної до точки A відносно точки O , $|\vec{M}| \approx 11,1803$ од. моменту.

6.20. Обчислити площу грані ABC і об'єм піраміди, вершинами якої є точки $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$.

Хід розв'язання.

Крок 1. Знайдіть координати векторів \vec{AB} , \vec{AC} і \vec{AD} , на яких побудована піраміда.



Якщо відомі координати початку $A(x_1, y_1, z_1)$ та кінця $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора \vec{AB} , то його координати знаходять за формулою $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

$\vec{AB} = \dots$

$\vec{AC} = \dots$

$\vec{AD} = \dots$

Крок 2. Знайдіть площу грані ABC .



Якщо відомі координати вершин трикутника ABC , то його площу доцільно шукати за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$



Якщо вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ задані своїми координатами, то векторний добуток знаходять за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$



Для обчислення визначника скористайтесь теоремою Лапласа.

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \dots = \dots$$

Знайдіть модуль векторного добутку.



Довжину (модуль) вектора \vec{a} обчислюють за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \dots = \dots \text{ кв. од.}$$

Крок 3. Знайдіть об'єм піраміди, побудованої на векторах \vec{AB} , \vec{AC} і \vec{AD} .



Об'єм піраміди, побудованої на векторах \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} , дорівнює 1/6 частини об'єму паралелепіпеда, тобто $V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$.

Отже, об'єм піраміди V_{ABCD} дорівнює 1/6 частини об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах \vec{AB} , \vec{AC} і \vec{AD} .



Для обчислення визначника третього порядку скористайтесь правилом трикутника.




$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \left(\dots \right) = \dots$$

$$\text{Відповідь: } S_{\triangle ABC} = \frac{3}{2} \sqrt{59} \text{ кв. од.}, V_{ABCD} = 3 \text{ куб. од.}$$






Вчимося самостійно розв'язувати завдання

6.21.




<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Дано трикутник ABC , де $A(-1;0;2)$, $B(2;-1;1)$ і $C(1;1;-1)$. Знайдіть площу трикутника ABC .	Дано трикутник ABC , де $A(-1;0;2)$, $B(2;-1;1)$ і $C(1;1;-1)$. Знайдіть довжину його висоти AH .	У паралелограмі $ABCD$ відомі координати трьох вершин: $A(-1;0;2)$, $B(2;-1;1)$ і $C(1;1;-1)$. Знайдіть довжину його висоти BH .
 Переформулюйте задачу: знайдіть $\frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AC} $.	 Застосуйте метод площ: обчисліть площу двома способами: 1) через векторний добуток векторів; 2) через сторону та висоту, проведену до цієї сторони.	 Виділяйте підзадачі: 1) знайти координати вершини D ; 2) обчисліть площу паралелограма; 3) обчисліть висоту через площу.

6.22.




<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
З'ясувати, чи є компланарними вектори $\overline{a} = \{1;1;2\}$, $\overline{b} = \{0;2;-1\}$ і $\overline{c} = \{2;-1;0\}$.	Чи утворюють вектори $\overline{a} = \{1;1;2\}$, $\overline{b} = \{0;2;-1\}$ і $\overline{c} = \{2;-1;0\}$ базис.	При яких значеннях параметру λ вектори $\overline{a} = \{3;\lambda;-4\}$, $\overline{b} = \{2;-1;3\}$ і $\overline{c} = \{\lambda + 10;1;1\}$ компланарні.
 Переформулюйте задачу: чи дорівнює нулю мішаний добуток векторів \overline{a} , \overline{b} і \overline{c} .	 Переформулюйте задачу: чи компланарні вектори \overline{a} , \overline{b} і \overline{c} .	 Переформулюйте задачу: при яких значеннях λ $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = 0$.

6.23.




<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Знайдіть $ (\overline{a} - \overline{b}) \times (\overline{a} + \overline{b}) $, якщо $ \overline{a} = 3$, $ \overline{b} = 4$, а кут між ними дорівнює $\pi/6$.	Знайдіть $ (\overline{a} - \overline{b}) \times (\overline{a} + \overline{b}) $, якщо $ \overline{a} = 3$, $ \overline{b} = 4$, а $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$	Знайдіть $ (\overline{a} - \overline{b}) \times (\overline{a} + \overline{b}) ^2$, якщо $ \overline{a} = 3$, $ \overline{b} = 4$, а кут між ними дорівнює $5\pi/6$.

 <p>Виділяйте під-задачі: 1) спростіть вираз $(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b})$; 2) знайдіть модуль отриманого вектора.</p>	 <p>Переформулюйте задачу: $\bar{a} = 3$, $\bar{b} = 4$, а кут між ними дорівнює $\pi/2$. Знайдіть $(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b})$</p>	 <p>Переформулюйте запитання задачі: знайдіть $(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b}) ^2$</p>
---	--	--




6.24.

<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Знайдіть будь-який вектор, перпендикулярний векторам $\bar{a} = \{2; 0; -3\}$ і $\bar{b} = \{1; 1; 2\}$.	Знайдіть одиничний вектор, перпендикулярний векторам $\bar{a} = \{2; 0; -3\}$ і $\bar{b} = \{1; 1; 2\}$.	Знайдіть одиничний вектор \bar{c} , такий, що перпендикулярний векторам $\bar{a} = \{2; 0; -3\}$ і $\bar{b} = \{1; 1; 2\}$, та вектори \bar{a} , \bar{b} і \bar{c} утворюють праву трійку векторів.
 <p>За допомогою відомих вам операцій над векторами утворіть вектор, який був би перпендикулярним кожному з векторів \bar{a} і \bar{b}.</p>	 <p>Переформулюйте задачу: знайдіть одиничний вектор, колінеарний векторному добутку векторів \bar{a} і \bar{b}.</p>	 <p>Переформулюйте задачу: знайдіть одиничний вектор, однаково напрямлений з векторним добутком векторів \bar{a} і \bar{b}.</p>

6.25.

<i>I рівень</i>	<i>II рівень</i>	<i>III рівень</i>
Знайдіть момент сили $\bar{F} = \{2; -4; 5\}$, прикладеної до точки $A(1; 0; -2)$ відносно початку координат.	Знайдіть момент та напрямні косинуси сили $\bar{F} = \{2; -4; 5\}$, прикладеної до точки $K(-1; 1; 2)$ відносно точки $M(3; 4; -2)$.	Знайдіть момент та напрямні косинуси рівнодіючої сил $\bar{F} = \{2; -4; 5\}$ і $\bar{N} = \{1; -1; 2\}$, прикладених до точки $K(-1; 1; 2)$ відносно точки $M(3; 4; -2)$.
 <p>Переформулюйте задачу: знайдіть векторний добуток векторів $\overrightarrow{OA} \times \bar{F}$.</p>	 <p>Переформулюйте задачу: знайдіть векторний добуток векторів $\overrightarrow{MK} \times \bar{F}$ та його напрямні косинуси.</p>	 <p>Виділяйте підзадачі: 1) знайти рівнодіючу сил \bar{F} і \bar{N}; 2) знайдіть момент та напрямні косинуси рівнодіючої.</p>

6.26.

I рівень	II рівень	III рівень
Знайдіть об'єм піраміди з вершинами в точках $A(-1;0;2)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;1;-1)$ і $D(0;0;-5)$.	Знайдіть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, де \vec{p}, \vec{q} і \vec{r} - взаємно перпендикулярні орти.	Знайдіть висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на векторах \vec{a} і \vec{b} , а \vec{p}, \vec{q} і \vec{r} - взаємно перпендикулярні орти.
 Переформулюйте задачу: знайдіть об'єм тетраедра, що побудований на векторах \vec{DA}, \vec{DB} і \vec{DC} .	 Оберіть декартову систему координат таким чином, щоб $\vec{i} = \vec{p}$, $\vec{j} = \vec{q}$ і $\vec{k} = \vec{r}$.	 Оберіть декартову систему координат таким чином, щоб $\vec{i} = \vec{p}$, $\vec{j} = \vec{q}$ і $\vec{k} = \vec{r}$.



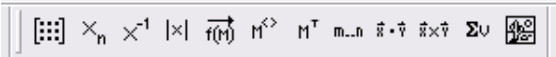
Вчимося застосовувати CAS під час обчислення моменту сили відносно точки та об'єму піраміди

6.27. Силу $\vec{F} = \{5; 4; -1\}$ прикладене до точки $A(-1;1;5)$. Знайдіть величину та напрям моменту цієї сили відносно точки $O(0;-1;2)$.

Переформулюйте умову на математичну. Знайдіть абсолютну величину векторного добутку векторів $\vec{F} = \{5; 4; -1\}$ та $\vec{OA} = \{-1; 2; 3\}$ за допомогою *CAS Mathcad*.

Хід обчислення.

- Відкрийте вікно *CAS Mathcad*.
- За допомогою опції Вид – Панелі інструментов – Матрицы та Вид – Панелі інструментов – Вычисление винесіть на панель інструментів

вкладки  та .

- Введіть координати векторів \vec{F} та \vec{OM} :

- у полі програми ввести ім'я векторів, знак присвоювання та клацніть на панелі по символу матриці;
- вкажіть у вікні вводу число рядків і стовпців та введіть у помічених позиціях координати векторів.

4. Обчисліть абсолютну величину векторного добутку $|\vec{M}| = |\vec{OA} \times \vec{F}|$:

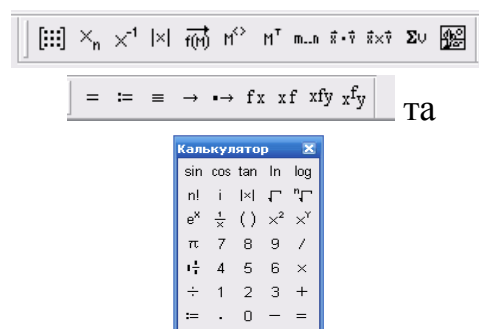
- клацніть на панелі по символу абсолютна величина, введіть векторний добуток, введіть у позиціях шаблону імена множників;
- натиснувши клавішу *Space* виокремте вираз рамкою й введіть з клавіатури знак рівності.

Після знака рівності буде отримано числове значення, що визначає абсолютне значення моменту сили відносно точки.

6.28. Дано піраміду з вершинами в точках $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ і $C(1; 2; 4)$. Знайдіть об'єм піраміди за допомогою *CAS Mathcad*.

Хід обчислення.

1. Відкрийте вікно *CAS Mathcad*.
2. За допомогою опції Вид – Панелі інструментов – Матриці та Вид – Панелі інструментов – Вычисление винесіть на панель інструментів вкладки:



3. Введіть координати векторів \vec{AB} , \vec{AC} і \vec{AD} :

- введіть ім'я векторів a , b , c , знак присвоювання та клацніть на панелі по символу матриці;
- вкажіть у вікні *Вставка матриці* число рядків і стовпців та введіть у помічених позиціях шаблону координати векторів.

4. Обчислити об'єм піраміди $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{abc}|$:

- введіть з клавіатури V , знак присвоювання, клацніть на панелі по символу абсолютна величина та введіть відношення: у чисельнику з клавіатури або з панелі *Вставка функції* функцію *augment* (a , b , c), у знаменнику – 6 ;
- введіть з клавіатури V та знак рівності.

Після знака рівності буде отримано числове значення об'єму піраміди.



Готуємось до контрольної роботи

1. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -3, \\ 3x + 2y - z = -2, \\ x + 2y - 2z = -3. \end{cases}$$



Під час застосування матричного методу скористайтесь існуючим алгоритмом знаходження матриці оберненої для заданої.

2. Перевірте на колінеарність вектори \vec{c}_1 і \vec{c}_2 , побудовані за векторами \vec{a} та \vec{b} : $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (3, 0, -1)$, $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}$.



Скористайтесь існуючими правилами для обчислення добутку вектора на число та суми й різниці векторів. Колінеарність векторів перевірте за допомогою існуючої ознаки.

3. Знайдіть косинус кута між векторами \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} , якщо: $A(1, -2, 3)$, $B(0, -1, 2)$, $C(3, -4, 5)$.



Скористайтесь існуючими правилами для обчислення координат вектора, скалярного добутку векторів, заданих своїми координатами й обчислення довжини вектора. Косинус кута між векторами обчисліть за допомогою існуючої формули.

4. Перевірте компланарність векторів \vec{a} , \vec{b} та \vec{c} : $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (-1, 0, -1)$, $\vec{c} = (2, 2, 2)$



Компланарність векторів перевірте за допомогою існуючої ознаки. Для обчислення отриманого визначника скористайтесь правилом трикутника.

5*. Знайдіть розкладання вектора \vec{x} за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$: $\vec{x} = (-2, 4, 7)$, $\vec{p} = (0, 1, 2)$, $\vec{q} = (1, 0, 1)$, $\vec{r} = (-1, 2, 4)$.



Переконайтесь, що вектори \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} утворюють базис. Складіть комбінацію $\vec{x} = \alpha \vec{p} + \beta \vec{q} + \gamma \vec{r}$, за якою складіть систему трьох рівнянь з невідомими α, β, γ . Для розв'язання системи застосуйте метод Крамера. Підставте отримані значення α, β, γ у комбінацію $\vec{x} = \alpha \vec{p} + \beta \vec{q} + \gamma \vec{r}$.

6*. Обчисліть площу паралелограму, побудованого за векторами \vec{a} та \vec{b} :
 $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, кут між векторами \vec{p} і \vec{q} дорівнює $\pi/6$.



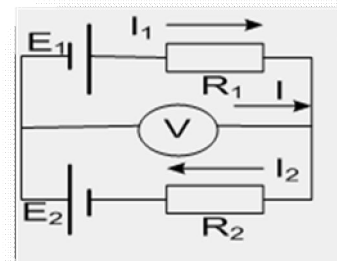
Скористайтесь геометричним змістом векторного добутку та формулою для обчислення модуля векторного добутку.

7*. Сила $\vec{F}(2; -1; 2)$ прикладена до точки $A(3; 4; -2)$. Визначити величину та напрям моменту цієї сили відносно початку координат.



Скористайтесь фізичним змістом векторного добутку та формулою обчислення модуля векторного добутку двох векторів, заданих координатами.

8**. Елементи ланок, схема яких зображена на рисунку 6.2, має наступні значення: $E_1 = 1,5$ В, $E_2 = 1,6$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом. Опір вольтметра $R_v = 20$ Ом. Знайдіть струм в усіх гілках. Опір з'єднуючих проводів та джерел напруги не враховувати.



Представте дані задачі на схемі, користуючись законами Кірхгофа й враховуючи напрями струмів, що обрані умовно, отримайте систему лінійних рівнянь. Для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь скористайтесь існуючим алгоритмом методом Гауса.

Рис. 6.2. Схема до задачі 8

9**. Знайдіть лінійну швидкість обертання точок вовчка, що лежать на колі великого діаметра, рівного 20 , якщо вектор $\vec{\omega} = \{-3; 2; 4\}$ прикладений у центрі великого кола.



Скористайтесь формулою Ейлера для обчислення швидкості \vec{v} точки M твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі (механічний зміст векторного добутку). Для знаходження вектора лінійної швидкості обертання застосовуйте формулу обчислення векторного добутку двох векторів, заданих координатами.

10**. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$: $A_1(1, 3, 6)$, $A_2(2, 2, 1)$, $A_3(-1, 0, 1)$, $A_4(-4, 6, -3)$.



Для розв'язування завдання скористайтесь геометричним змістом мішаного добутку векторів. Для обчислення значення об'єму застосовуйте формулу мішаного добутку для трьох векторів, що задані координатами.

ВІДПОВІДІ

ВІДПОВІДІ

до тестових завдань підрозділу «Перевіряємо готовність до практичного заняття»

Розділ 1.

1.1. А. 1.2. В. 1.3. Б. 1.4. Б. 1.5. В. 1.6. В. 1.7. А. 1.8. В. 1.9. Б. 1.10. В.

Розділ 2.

2.1. В. 2.2. Б. 2.3. В. 2.4. В. 2.5. А. 2.6. В. 2.7. Г. 2.8. А. 2.9. Г. 2.10. В. 2.11. В.
2.12. А. 2.13. Б. 2.14. Б. 2.15. В.

Розділ 3.

3.1. В. 3.2. Б. 3.3. Б. 3.4. А. 3.5. Г. 3.6. Б. 3.7. А. 3.8. Г. 3.9. Г. 3.10. А. 3.11. Г.

Розділ 4.

4.1.Б. 4.2. А. 4.3. Б. 4.4. В. 4.5. Г. 4.6. Г. 4.7. Б. 4.8. А. 4.9. А. 4.10. В. 4.11. Г.
4.12. Б. 4.13. В. 4.14. Б. 4.15. Г.

Розділ 5.

5.1. А. 5.2. Б. 5.3. А. 5.4. В. 5.5. В. 5.6. Б. 5.7. А. 5.8. Б. 5.9. В.

Розділ 6.

6.1. Г. 6.2. Б. 6.3. В. 6.4. А. 6.5. Г. 6.6. А. 6.7. Б. 6.8. В. 6.9. А. 6.10. В. 6.11. В.
6.12. А.

ВІДПОВІДІ

до завдань підрозділу «Вчимося самостійно розв'язувати завдання»

Розділ 1.

1.16. (I) а) 121; б) 41; (II) а) 0,6; б) $12t - 2t^3$; (III) а) $\frac{5}{3}$; б) $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. 1.17. (I) -5;
(II) 0; $\frac{5 \pm \sqrt{97}}{2}$. 1.18. (I) -11; (II) -118; (III) -26. 1.19. (I) $A_{11} = -558$; $A_{12} = -729$;

$A_{13} = -23$; (II) -21; (III) 12. 1.20. (I) $y = -7$; (II) $y = x + 2$; (III) $\begin{vmatrix} X & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0, x = 2$.

Розділ 2.

2.23. (I) $\begin{pmatrix} 20 & 7 & -1 \\ -8 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; (II) $\begin{pmatrix} 22 & 3 \\ 9 & 8 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$; (III) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -3 & 2 & 10 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

$$2.24. \text{ (I) } AB = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix}; BA \text{ не існує; (II) } AB = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(III) } AB = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -3 \\ 20 & 0 & -10 & 15 \end{pmatrix}; BA = (39). \quad 2.25. \text{ (I) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \text{ (II) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(III) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{7}{16} \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{8} & -\frac{5}{16} \end{pmatrix}. \quad 2.26. \text{ (I) } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{ (II) } (3 \ 1 \ 1); \text{ (III) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.27. (I) 3; (II) 2; (III) 4. 2.28. (II) витрати сировини першого і другого типів визначаються відповідно як елементи матриці $\begin{pmatrix} 500 & 1500 \end{pmatrix}$; (III) 2800.

Розділ 3.

$$3.20. \text{ (I) } (1; -1); \text{ (II) } (2; -2; 3); \text{ (III) } \left(\frac{53}{4}; \frac{33}{4}; \frac{29}{2} \right). \quad 3.21. \text{ (I) } (1; 1; 7); \text{ (II) } (8; 4; 2);$$

$$\text{(III) } \left(\frac{6t+1}{3}; \frac{3t+1}{3}; t \right), \text{ де } t \in R. \quad 3.22. \text{ (I) } (-8; -4; -13); \text{ (II) } \left(-\frac{150}{67}; -\frac{329}{67}; -\frac{84}{67} \right); \text{ (III) } (1; 1; 1).$$

$$3.23. \text{ (I) } \text{ немає розв'язків; (II) } \left(\frac{-13t+40}{7}; \frac{11t-29}{7}; t \right), \text{ де } t \in R;$$

$$\text{(III) } (5v-8u-1; 5v-13u-3; u; v), \text{ де } u, v \in R. \quad 3.24. \text{ (I) } (0; 0; 0); \text{ (II) } \left(\frac{-4t}{3}; \frac{-2t}{3}; t \right), \text{ де } t \in R;$$

$$\text{(III) } (2v-41u; v; 15u; u), \text{ де } u, v \in R. \quad 3.25. \text{ (I) } a \neq -1; \text{ (II) } \left(\frac{a+b}{2}; \frac{b+c}{2}; \frac{a+c}{2} \right).$$

3.26. (II) Продукції I виду можна виготовити $15-2t$ одиниць, продукції II виду - $2+3t$ одиниць, продукції третього виду - t одиниць, де $t \in \overline{0; 7}$; (III) 0,7А – сила струму на першому елементі, 0,8А – сила струму на другому елементі, 1,5А – сила струму на ділянці з опором R .

Розділ 4.

$$4.23. \text{ (I) } -\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b}); \text{ (II) } \bar{a} + \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}; \text{ (III) } \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{c}) - \bar{a}. \quad 4.24. \text{ (I) } \bar{c} = \{72; 0; 18\}, |\bar{c}| = 18\sqrt{17};$$

$$\text{(II) } \bar{c} = \{92; 0; 13\}, |\bar{c}| = 4\sqrt{529}; \text{ (III) } \bar{c} = \{36; -4; -52\}, |\bar{c}| = 4\sqrt{251}. \quad 4.25. \text{ (I) вектори } \bar{a} \text{ і } \bar{b}$$

колінеарні, довжина вектора \bar{a} у три рази більша за довжину вектора \bar{b} ; (II) не колінеарні.

$$4.26. \text{ (I) } \bar{a} = 3\bar{b} - \bar{c} + \bar{d}; \text{ (II) } \bar{m} = 6\bar{b} - 2\bar{c} + 5\bar{d};$$

$$\text{(III) } \bar{s} = \frac{2}{5}\bar{m} + \frac{3}{5}\bar{n} + \frac{3}{5}\bar{p}. \quad 4.27. \text{ (I) } \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{14}}, \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{14}};$$

(II) $\bar{a} = \{1; -1; \pm\sqrt{2}\}$; (III) складові $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ утворюють з напрямком сили \bar{F} кути 60° , $\arccos \frac{1}{13}$ і $\arccos \frac{\sqrt{503}}{26}$ відповідно.

Розділ 5.

5.15. (I) -700; (II) -629; (III) -693. 5.16. (I) $\bar{a} = \{6; 1; -5\}$, $|\bar{a}| = \sqrt{62}$; (II) $\bar{x} = \{1; 1; -0,5\}$; (III) $\bar{x} = \{-3; 4; 0\}$ або $\bar{x} = \{-5; 0; 0\}$. 5.17. (I) 90° ; (II) $\arccos \frac{23}{2\sqrt{1147}}$; (III) $\arccos \frac{\sqrt{89}}{5\sqrt{5}}$. 5.18. (I) 0; (II) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; (III) $\frac{1}{3}$. 5.19. (I) 6; (II) $5\sqrt{33}$; (III) 7.

Розділ 6.

6.21. (I) $\frac{\sqrt{42}}{2}$; (II) $\frac{\sqrt{42}}{3}$; (III) $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{29}}$. 6.22. (I) некомпланарні; (II) так; (III) при $\lambda \neq -10$, $\lambda \neq 2$. 6.23. (I) 12; (II) 24; (III) 144. 6.24. (I) $\bar{c} = \{3; -7; 2\}$ або будь який колінеарний йому вектор; (II) $\bar{e}_1 = \left\{ \frac{3}{\sqrt{62}}; -\frac{7}{\sqrt{62}}; \frac{2}{\sqrt{62}} \right\}$, $\bar{e}_2 = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{62}}; \frac{7}{\sqrt{62}}; -\frac{2}{\sqrt{62}} \right\}$; (III) $\bar{e} = \left\{ \frac{3}{\sqrt{62}}; -\frac{7}{\sqrt{62}}; \frac{2}{\sqrt{62}} \right\}$. 6.25. (I) $\bar{M} = \{-8; -9; -4\}$; (II) $\bar{M} = \{1; 28; 32\}$; (III) $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{83}}$, $\cos \beta = -\frac{5}{\sqrt{83}}$, $\cos \gamma = \frac{7}{\sqrt{83}}$, $\bar{M} = \{-1; 40; 29\}$. 6.26. (I) $\frac{31}{6}$; (II) 25; (III) $\frac{25}{\sqrt{138}}$.

ВІДПОВІДІ

до завдань підрозділу «Готуємось до контрольної роботи»

1. (-1; 2; 3). 2. неколінеарні. 3. -1. 4. некомпланарні. 5. $\bar{x} = 2\bar{p} - \bar{q} + \bar{r}$. 6. 3. 7. $\bar{M} = \{6; -10; -11\}$. 8. $I_1 = 0,115$ А; $I_2 = 0,098$ А; $I_3 = 0,018$ А. 9. $\bar{v} = 10 \cdot [(2 \cdot \cos \gamma - 4 \cdot \cos \beta) \cdot i + (3 \cdot \cos \gamma + 4 \cdot \cos \alpha) \cdot j - (3 \cdot \cos \beta - 2 \cdot \cos \alpha) \cdot k]$. 10. $V = \frac{70}{3}$, $H = 2\sqrt{14}$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

.....

1. Бугров Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 224 с.
2. Буйвол В. М. Елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії / В.М.Буйвол. — К.: КМУЦА, 1996. — 200с.
3. Власенко К. В. Вища математика для майбутніх інженерів: Навчальний посібник / К.В. Власенко; за ред. проф. О.І. Скафи. – Донецьк : Ноулідж, 2010. – 429 с.
4. Гриньов Б. В. Векторна алгебра: Підручник для вищих технічних навчальних закладів / Б.В. Гриньов, І.К. Кириченко; за ред. О.М. Литвина. – Харків : Гімназія, 2008. – 164 с.
5. Дубовик В. П. Вища математика: Навчальний посібник / В.П.Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
6. Дюженкова Л. І. Вища математика: приклади і задачі. Посібник / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін. – К. : Видавничий центр Академія, 2002. – 624 с.
7. Жильцов О.Б. Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навчальний посібник / О.Б. Жильцов, Г.М.Торбін. – К. : МАУП, 2002. – 408 с.
8. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. 1 часть / И.А. Каплан. – 3-е изд., стереотипное. – Харьков : Изд-во ХГУ им. А.М. Горького, 1972. – 412 с.
9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Т. Письменный. — 2-е изд., испр. — М: Айрис-пресс, 2004. — 288 с.
- 10.Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Учебное пособие. В 4 ч. Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.П. Рябушко и др.; под общ. ред. А.П. Рябушко. – 3-е изд., испр. – Минск: Высшая школа, 2007. – 304 с.
- 11.Холькин А.М. Высшая математика. Часть 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебное пособие. – Мариуполь : ПГТУ, 2009. – 176 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
Тема 1. Визначники	6
Як пов'язаний визначник з інженерною практикою	6
Складаємо опорний конспект	7
Перевіряємо готовність до практичного заняття	11
Вчимося розв'язувати типові задачі	14
Вчимося моделювати професійну діяльність інженера	18
Вчимося самостійно розв'язувати завдання	19
Вчимося застосовувати CAS під час обчислення визначників	21
Тема 2. Матриці	22
Як пов'язані матриці з інженерною практикою	22
Складаємо опорний конспект	23
Перевіряємо готовність до практичного заняття	29
Вчимося розв'язувати типові задачі	32
Вчимося моделювати професійну діяльність інженера	39
Вчимося самостійно розв'язувати завдання	44
Вчимося застосовувати CAS для виконання дій з матрицями	46
Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	48
Як пов'язані системи лінійних алгебраїчних рівнянь з інженерною практикою	48
Складаємо опорний конспект	49
Перевіряємо готовність до практичного заняття	54
Вчимося розв'язувати типові задачі	58
Вчимося моделювати професійну діяльність інженера	67
Вчимося самостійно розв'язувати завдання	70
Вчимося застосовувати CAS під час розв'язання СЛАР	73
Тема 4. Вектори	74
Як пов'язані вектори з інженерною практикою	74
Складаємо опорний конспект	75
Перевіряємо готовність до практичного заняття	81
Вчимося розв'язувати типові задачі	85
Вчимося моделювати професійну діяльність інженера	91
Вчимося самостійно розв'язувати завдання	94
Вчимося застосовувати ППЗ DG під час розв'язання задач векторної алгебри	96
Тема 5. Скалярний добуток двох векторів	97
Як пов'язаний скалярний добуток векторів з інженерною практикою	97
Складаємо опорний конспект	98

Перевіряємо готовність до практичного заняття	99
Вчимося розв'язувати типові задачі	101
Вчимося моделювати професійну діяльність інженера	105
Вчимося самостійно розв'язувати завдання	107
Вчимося застосовувати ППЗ під час обчислення кутів між векторами	109
Тема 6. Векторний та мішаний добутки векторів	110
Як пов'язані векторний та мішаний добутки з інженерною практикою	110
Складаємо опорний конспект	111
Перевіряємо готовність до практичного заняття	114
Вчимося розв'язувати типові задачі	117
Вчимося моделювати професійну діяльність інженера	122
Вчимося самостійно розв'язувати завдання	126
Вчимося застосовувати CAS під час обчислення моменту сили відносно точки та об'єму піраміди	128
Готуємось до контрольної роботи	130
Відповіді	132
Рекомендована література	135