

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

К. В. Власенко, О. О. Чумак, І. С. Дмитренко

ВИЩА МАТЕМАТИКА (МОДУЛЬ 4):

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

**Навчальний посібник
до практичних занять і самостійної роботи**

Затверджено
на засіданні вченої ради
протокол № від 2011

Краматорськ
ДДМА
2012

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.11
В 58

Рецензенти:

Скафа О. І., доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики і методики викладання математики, Донецький національний університет;

Труш Н. І., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії та методики викладання математики, Слов'янський державний педагогічний університет.

Власенко, К. В.

В 58 Вища математика. Визначений інтеграл, застосування визначеного інтеграла: навчальний посібник до практичних занять і самостійної роботи / К. В. Власенко, О. О. Чумак, І. С. Дмитренко. – Краматорськ : ДДМА, 2012. – **с.**

ISBN XXXXX

Навчальний посібник містить набори навчальних завдань для аудиторної й домашньої самостійної роботи для студентів денної та заочної форм навчання. До кожної з тем модуля пропонуються програми корекції знань студентів, що включають: опис можливих помилок студентів; рекомендації щодо виправлення помилок (посилання на теоретичний виклад питання; приклади розв'язання аналогічних задач, вправ).

УДК 517.2(075.8)

ББК 22.11

© К. В. Власенко, О. О. Чумак,

І. С. Дмитренко, 2012

© ДДМА, 2012

ISBN XXXXXXXX

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Вправи для проведення практичних занять.....	5
1.1 Визначений інтеграл.....	5
1.1.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи.....	5
1.1.2 Індивідуальні завдання.....	6
1.2 Невласні інтеграли.....	8
1.2.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи.....	8
1.2.2 Індивідуальні завдання.....	9
1.3 Застосування визначеного інтегралу.....	13
1.3.1 Вправи до аудиторної та самостійної роботи.....	13
1.3.2 Індивідуальні завдання.....	
2 Контрольні роботи.....	41
2.1 Варіанти контрольних робіт.....	42
2.2 Підготовка до захисту контрольних робіт.....	58
Література	59
Додаток А. Показчик відповідей на питання	60

ВСТУП

Самостійне навчання передбачає активне опанування знань і свідоме користування ними: осмислене читання підручника й додаткової літератури, розкриття змісту спеціальних термінів і понять, точне їх визначення, доведення тих чи інших положень при розв'язуванні задач та під час відповідей на поставлені запитання. Навчальний посібник служить для поглибленого самостійного опрацювання курсу студентом й самоперевірки своїх знань з модуля «Визначений інтеграл».

Навчальний посібник містить завдання для самостійного засвоєння модуля. Обсяги комплектів вправ дозволяють застосовувати їх для:

- 1) проведення практичних занять (аудиторної та самостійної роботи);
- 2) формування комплектів розрахунково-графічних завдань за всіма темами розділу (індивідуальні тестові завдання);
- 3) проведення тестування для самоперевірки;
- 4) формування комплектів контрольних робіт для студентів денної форми навчання й студентів-заочників (контрольні роботи за модулем).

У посібнику до всіх контрольних (або самостійних) робіт пропонуються рекомендації щодо корекції знань студентів, які включають:

- опис можливих питань студентів, що виникають під час розв'язування задач;
- рекомендації щодо з'ясування питань (покликання на теоретичний виклад питання, на приклади правильного розв'язання аналогічних задач, вправ);
- вправи, рекомендовані студентам для усунення помилок і закріплення навичок розв'язування задач.

1 ВПРАВИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

1.1 Визначений інтеграл

Означення, умови існування, геометричний зміст, властивості. Обчислення визначених інтегралів. Формула Ньютона-Лейбніца. Методи інтегрування визначених інтегралів.

1.1.1 Вправи для аудиторної та самостійної роботи

1. Обчисліть визначені інтеграли

$$1.1. \int_1^{16} \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx.$$

$$1.3. \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln 2x}}.$$

$$1.5. \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx.$$

$$1.7. \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx.$$

$$1.9. \int_2^{14} \frac{x dx}{\sqrt{2+x}}.$$

$$1.11. \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx.$$

$$1.13. \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx.$$

$$1.15. \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}.$$

$$1.17. \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

$$1.19. \int_0^{e-2} \ln(x+2) dx.$$

$$1.21. \int_1^e \ln^2 x dx.$$

$$1.2. \int_0^{2\sqrt{2}} x \sqrt{x^2+1} dx$$

$$1.4. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}.$$

$$1.6. \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}.$$

$$1.8. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

$$1.10. \int_{\ln 5}^{\ln 14} \frac{e^x \sqrt{e^x-5}}{e^x+1} dx.$$

$$1.12. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$1.14. \int \frac{dx}{\sqrt{2}x^5 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$1.16. \int_1^3 \frac{dx}{x \sqrt{x^2+5x+1}}.$$

$$1.18. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx.$$

$$1.20. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

2. Доведіть рівності

$$2.1. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x + \operatorname{tg} x}{1 + \sin^2 x} dx = 0.$$

$$2.2. \int_{-2}^2 \frac{x \sin 3x + 1}{\ln(1 + x^4)} dx = 2 \int_0^2 \frac{x \sin 3x + 1}{\ln(1 + x^4)} dx.$$

3. Знайдіть середнє значення функції $f(x) = \sin^2 x$ на проміжку $[0; \pi]$.

Відповіді:

1.1. 12. 1.2. $\frac{26}{3}$. 1.3. $\frac{\pi}{2}$. 1.4. $\frac{2}{\sqrt{5}} \arctg \frac{1}{\sqrt{5}}$. 1.5. 1. 1.6. $\ln \frac{4}{3}$. 1.7. 3.

1.8. $2 - \frac{\pi}{2}$. 1.9. $\frac{88}{3}$. 1.10. $6 - 2\sqrt{6} \arctg \sqrt{\frac{3}{2}}$. 1.11. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2 - \sqrt{3})$. 1.12. $\frac{\pi}{16}$.

1.13. $\frac{\pi a^2}{4}$. 1.14. $\frac{1}{32} \left(\pi + \frac{7\sqrt{3}}{2} - 8 \right)$. 1.15. $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$. 1.16. $\ln \frac{7 + 2\sqrt{7}}{9}$. 1.17. $1 - 2/e$.

1.18. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$. 1.19. $2 - 2 \ln 2$. 1.20. $\frac{\pi}{36} (9 - 4\sqrt{3}) + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. 1.21. $e - 2$. 2.1. Вказівка.

Врахуйте непарність підінтегральної функції. 3. $\frac{1}{2}$.

1.1.2 Індивідуальні тестові завдання

1. Обчисліть визначені інтеграли, використовуючи заміну змінної

$$1.1. \int \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}} dx.$$

$$1.2. \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x (3 + e^{-x})}.$$

$$1.3. \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}.$$

$$1.4. \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx.$$

$$1.5. \int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}.$$

$$1.6. \int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}.$$

$$1.7. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^3 + 3} dx.$$

$$1.8. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

$$1.9. \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{x+4}}.$$

$$1.10. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$1.11. \int_{2/3}^{7/3} \frac{x dx}{\sqrt{3x+2}}.$$

$$1.12. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$$

$$1.13. \int_0^{0.5 \ln 2} \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$1.15. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x)^4}.$$

$$1.17. \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1}}.$$

$$1.19. \int_2^5 \frac{x^2 dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

$$1.21. \int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx.$$

$$1.23. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$$

$$1.25. \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}.$$

$$1.27. \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}.$$

$$1.29. \int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{4+e^x}}.$$

$$1.14. \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$$

$$1.16. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$$

$$1.18. \int_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9+x^3}}.$$

$$1.20. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{4+\sqrt{\sin x}}.$$

$$1.22. \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x \sqrt{1+e^{-2x}}}.$$

$$1.24. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

$$1.26. \int_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^{2/3}}.$$

$$1.28. \int_0^{13} \frac{(x+1) dx}{\sqrt[3]{2x+1}}.$$

$$1.30. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

1.2 Невласні інтеграли

Невласні інтеграли першого і другого роду. Означення, обчислення, ознаки збіжності.

1.2.1 Вправи для аудиторної та самостійної роботи

1. Обчисліть невластні інтеграли або доведіть їх розбіжність

$$1.1. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^6}.$$

$$1.2. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}.$$

$$1.3. \int_0^{\infty} e^{-3x} dx.$$

$$1.4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2}.$$

$$1.5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+10}.$$

$$1.6. \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$$

$$1.7. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$1.8. \int_0^{\infty} x \sin x dx.$$

$$1.9. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1.10. \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

$$1.11. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$1.12. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1.13. \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$1.14. \int_0^1 x \ln x dx.$$

2. Дослідіть збіжність інтегралів

$$2.1 \int_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^3}.$$

$$2.2 \int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx.$$

$$2.3 \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)dx}{x}.$$

$$2.4 \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$2.5 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$2.6 \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}.$$

$$2.7 \int_0^1 \frac{dx}{\sin x}.$$

$$2.8 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Відповіді:

1.1. $\frac{1}{5}$. 1.2. Розбігається. 1.3. $\frac{1}{3}$. 1.4. Розбігається. 1.5. $\frac{\pi}{3}$. 1.6. $1 - \ln 2$.

1.7. $\frac{1}{2}$. 1.8. Розбігається. 1.9. $\frac{\pi}{2}$. 1.10. Розбігається. 1.11. $\frac{8}{3}$. 1.12. Розбігається.

1.13. 1. 1.14. $-\frac{1}{4}$. 2.1. Збігається. 2.2. Розбігається. 2.3. Розбігається.

2.4. Розбігається. 2.5. Збігається. 2.6. Збігається. 2.7. Розбігається. 2.8. Збігається.

1.2.2 Індивідуальні тестові завдання

1. Обчисліть невласні інтеграли першого роду або доведіть їх розбіжність

$$1.1. \int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}.$$

$$1.2. \int_1^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}.$$

$$1.3. \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}.$$

$$1.4. \int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}.$$

$$1.5. \int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$$

$$1.6. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}.$$

$$1.7. \int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}.$$

$$1.8. \int_4^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}.$$

$$1.9. \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

$$1.10. \int_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5}.$$

$$1.11. \int_{1/2}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$$

$$1.12. \int_0^{\infty} \frac{\arctg 2xdx}{4x^2+1}.$$

$$1.13. \int_0^{\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5}.$$

$$1.14. \int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}.$$

$$1.15. \int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx.$$

$$1.16. \int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}.$$

$$1.17. \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\arctg 4x}}{16x^2+1} dx$$

$$1.18. \int_0^{\infty} x \sin x dx.$$

$$1.19. \int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{x^2 - 4x}.$$

$$1.20. \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi dx}{(9x^2 + 1)\operatorname{arctg}^2 3x}$$

$$1.21. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}.$$

$$1.22. \int_{-\infty}^0 \left(\frac{x^2}{x^3 - 1} - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx.$$

$$1.23. \int_1^{\infty} \frac{dx}{(6x^2 - 5x + 1)}.$$

$$1.24. \int_0^{\infty} x e^{-3x} dx.$$

$$1.25. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x}.$$

$$1.26. \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}.$$

$$1.27. \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$1.28. \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}.$$

$$1.29. \int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}.$$

$$1.30. \int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}}$$

2. Обчисліть невластні інтеграли другого роду або доведіть їх розбіжність

$$2.1. \int_0^{1/3} \frac{e^3 + 1/x}{x^2} dx.$$

$$2.2. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}.$$

$$2.3. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 4x}}.$$

$$2.4. \int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}.$$

$$2.5. \int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x - 1)}{3x - 1} dx.$$

$$2.6. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 - x)^5}}.$$

$$2.7. \int_{1/2}^1 \frac{\ln 2}{(1 - x)\ln^2(1 - x)} dx.$$

$$2.8. \int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2 - 3x)}}{2 - 3x} dx.$$

$$2.9. \int_0^1 \frac{xdx}{1 - x^4}.$$

$$2.10. \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{(1 - \sin 3x)^5}}.$$

$$2.11. \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

$$2.12. \int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + 3x}}.$$

$$2.13. \int_0^1 \frac{e^{1 - \frac{2}{\pi} \arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$2.14. \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos 2x} dx.$$

$$2.15. \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3 - 4x}}.$$

$$2.16. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x - x^2 - 4}}.$$

$$2.17. \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$$

$$2.18. \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x + 3}}.$$

$$2.19. \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}.$$

$$2.20. \int_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}.$$

$$2.21. \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9x} dx}{\sqrt[3]{9 - x^2}}.$$

$$2.22. \int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$2.23. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1 - x^5}}.$$

$$2.24. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64 - x^6}}.$$

$$2.25. \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1 - 2x}}.$$

$$2.26. \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3 - 1)}}.$$

$$2.27. \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - 4x}}.$$

$$2.28. \int_0^4 \frac{2x dx}{\sqrt[4]{(16 - x^2)^3}}.$$

$$2.29. \int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}.$$

$$2.30. \int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x - 1)^2}.$$

1.3 Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площ плоских фігур. Площа у прямокутних декартових координатах. Обчислення площі для параметрично заданого контуру. Площа криволінійного сектора у полярних координатах.

Довжина дуги кривої. Об'єм тіла із заданим поперечним перерізом. Об'єм тіла обертання. Робота змінної сили. Координати центрів мас плоских областей та дуг кривих.

1.3.1 Вправи для аудиторної і самостійної роботи

1. Обчисліть площі фігур, обмежених кривими

1.1. $xy = 4$, $y = 1$, $y = x + 3$. **1.2.** $y = x^2 - 3x + 3$, $y = -x^2 + x + 9$.

1.3. $y^2 - 2y - 2x - 3 = 0$, $y - x + 1 = 0$.

1.4. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sin x - 2$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

1.5. $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$.

1.6. $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$ (I чверть).

1.7. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $2y = x^2$.

1.8. $y = 0$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

1.9. $\rho = 2 \sin 2\varphi$.

1.10. $\rho = 4 \cos 2\varphi$, $\rho = 2$, $(\rho \geq 2)$.

1.11. $\rho = 2 + \cos \varphi$.

1.12. $\rho = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ (правіше від променя $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

1.13. $\rho = \frac{4}{\cos(\varphi - \pi/6)}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. **1.14.** $(x^2 + y^2) = 4xy(x^2 - y^2)$.

1.15. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

1.16. $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$.

1.17. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $x = 1$ ($x \geq 1$).

1.18. $y = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $y = 1$ ($y \geq 1$).

2. Обчисліть довжини ліній

2.1. $y = \ln x$ між точками $x = \sqrt{3}$ та $x = \sqrt{8}$.

2.2. $y = \ln(1 - x^2)$ між точками $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$.

2.3. $y = \ln \sin x$ між точками $x = \frac{\pi}{3}$ та $x = \frac{\pi}{2}$.

2.4. $y = \frac{x^2}{2}$ між точками $x = 0$ та $x = 1$.

2.5. $x = 9(t - \sin t)$, $y = 9(1 - \cos t)$ (довжину однієї арки циклоїди).

$$2.6. x = 8 \sin t + 6 \cos t, y = 6 \sin t - 8 \cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$2.7. x = \frac{t^3}{3} - t, y = t^2 + 2, 0 \leq t \leq 3.$$

$$2.8. y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}.$$

$$2.9. x = a \cos^5 t, y = a \sin^5 t.$$

$$2.10. \rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$2.11. \rho = 1 + \cos \varphi.$$

$$2.12. \rho = \varphi^2, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

$$2.13. \rho = \frac{1}{\varphi}, \frac{3}{4} \leq \varphi \leq \frac{4}{3}.$$

3. Визначте об'єм тіла, обмеженого однопорожнинним гіперболоїдом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ та площинами $z = -1$ і $z = 2$.

4. Знайдіть об'єми тіл, утворених обертанням навколо осі Ox фігур, обмежених лініями

$$4.1. y = \frac{64}{16 + x^2}, 8y = x^2.$$

$$4.2. y^2 = x, y = x^2.$$

Відповіді:

$$\begin{aligned} 1.1. & 4 \ln 4 + 3/2. 1.2. 22\frac{2}{3}. 1.3. 18. 1.4. \pi. 1.5. 18. 1.6. \frac{41}{2} \arcsin \frac{9}{41} + 20 \ln 0.8. \\ 1.7. & \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}. 1.8. \sqrt{2} - 1. 1.9. \pi. 1.10. 4\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right). 1.11. 9\pi/2. 1.12. \frac{3\pi - 8}{32}. \\ 1.13. & \frac{8\sqrt{3}}{3}. 1.14. 1. 1.15. \pi\sqrt{2}. 1.16. \frac{3}{8} \pi a b. 1.17. \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. 1.18. \frac{16}{3} \pi + 5\sqrt{3}. \\ 2.1. & 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. 2.2. \ln 3 - \frac{1}{2}. 2.3. \frac{1}{2} \ln 3. 2.4. \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]. 2.5. 72. 2.6. 5\pi. \\ 2.7. & 12. 2.8. 2. 2.9. 5a \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}) \right]. 2.10. \frac{1}{8} (2\pi - 3\sqrt{3}). 2.11. 8. \\ 2.12. & \frac{1}{3} ((\pi^2 + 4)^{3/2} - 8). 2.13. \frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}. 3. 36\pi. 4.1. 16\pi(3\pi + 10)/5. 4.2. \frac{3}{10} \pi. \end{aligned}$$

1.3.2. Індивідуальні тестові завдання

1. Обчисліть площі фігур, обмежених кривими

$$1.1. y = x^2 - 2x - 1, 2y = 3x - 2.$$

$$1.2. 4y = x^2, 2y = 6 - x^2.$$

$$1.3. x = y^2 - 2y, x = -y^2 + 2y + 6.$$

$$1.4. y = x \sqrt{4 - x}, y = 0.$$

$$1.5. y = x^2 - 6x + 6, y = -x^2 + 2x.$$

$$1.6. x = y^2 - 2, y = -x.$$

$$1.7. y = x^2 + 4x + 2, y = 2 + x.$$

$$1.8. x = y^2 - 2y - 2, y = -x.$$

$$1.9. x = y^2 + 2y - 2, y = -2 - x.$$

$$1.10. y = x \operatorname{arctg} x, 0 \leq x \leq 1.$$

- 1.11. $y = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. 1.12. $y = x^2 + 5x$, $y = 7 - x$.
- 1.13. $x = y^2 - 2y - 1$, $y = 1 - x$. 1.14. $y = 3x - 4$, $y = -x^2$.
- 1.15. $x = y^2 + 2y - 1$, $y = -1 - x$. 1.16. $y^2 = 4 - x$, $x = y^2 - 2y$.
- 1.17. $y = x \operatorname{tg}^2 x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. 1.18. $y = x^2 + 6x$, $y = -x^2$.
- 1.19. $y = \cos^3 x \sin 2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. 1.20. $y = x \cos^2 x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 1.21. $y = x \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$. 1.22. $y = x \sin^2 x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
- 1.23. $y = \sin^4 x \sin 2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$. 1.24. $y = x^2 - 4x + 2$, $y = 2 - x$.
- 1.25. $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$. 1.26. $x = y^2 + 2y + 3$, $x = 8 - 2y$.
- 1.27. $y = 2x^2 - 12x + 16$, $y = x^2 - 5x + 4$. 1.28. $y = x^2 + 8x + 7$, $y = -x^2 - 2x - 5$.
- 1.29. $y = x \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 3$. 1.30. $x = 2y^2 - 8y + 6$, $x = -y^2 - 3y$.

2. Обчисліть площі фігур, межі яких задані у полярній системі координат

- 2.1. $\rho = 1 + \cos \varphi$, $\rho = 1$, $(\rho \geq 1)$. 2.2. $\rho = 2 + \cos \varphi$.
- 2.3. $\rho = 1 + \cos \varphi$, $\rho = \frac{3}{2}$, $(\rho \leq \frac{3}{2})$. 2.4. $\rho = 2 - \sin \varphi$.
- 2.5. $\rho = 1 + \sin \varphi$, $\rho = \frac{1}{2}$, $(\rho \geq \frac{1}{2})$. 2.6. $\rho = 3 - \cos \varphi$.
- 2.7. $\rho = 1 + \sin \varphi$, $\rho = 1$, $(\rho \leq 1)$. 2.8. $\rho = 2 + \cos 2\varphi$.
- 2.9. $\rho = 1 - \cos \varphi$, $\rho = 1$, $(\rho \geq 1)$. 2.10. $\rho = 3 + \sin 2\varphi$.
- 2.11. $\rho = 1 - \sin \varphi$, $\rho = \frac{3}{2}$, $(\rho \geq \frac{3}{2})$. 2.12. $\rho = 1 + 2 \cos \varphi$.
- 2.13. $\rho = 2 \cos 2\varphi$, $\rho = 1$, $(\rho \geq 1)$. 2.14. $\rho = 1 + 2 \sin \varphi$.
- 2.15. $\rho = 4 \sin 2\varphi$, $\rho = 2$, $(\rho \geq 2)$. 2.16. $\rho = \cos \varphi + \sin \varphi$.
- 2.17. $\rho = 6 \cos 3\varphi$, $\rho = 3\sqrt{3}$, $(\rho \geq 3\sqrt{3})$. 2.18. $\rho = \cos \varphi - \sin \varphi$.
- 2.19. $\rho = 2 \sin 3\varphi$, $\rho = \sqrt{3}$, $(\rho \geq \sqrt{3})$. 2.20. $\rho = \cos^2 \varphi$.
- 2.21. $\rho = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi$. 2.22. $\rho = \sin^2 \varphi$.
- 2.23. $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi$, $\rho = \sin \varphi$. 2.24. $\rho = 3 + 2 \cos 2\varphi$.
- 2.25. $\rho = \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 2.26. $\rho = \cos^2 2\varphi$.
- 2.27. $\rho = 1 + \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. 2.28. $\rho = \cos \frac{\varphi}{2}$.
- 2.29. $\rho = 4 \sin 2\varphi$, $\rho = 2\sqrt{3}$, $(\rho \geq 2\sqrt{3})$. 2.30. $\rho = 2 - \cos 2\varphi$.

3. Обчисліть площі фігур, межі яких задані параметрично

- 3.1. $x = 4\sqrt{2} \cos^3 t$, $y = 2\sqrt{2} \sin^3 t$, $x = 2$, $(x \geq 2)$.

- 3.2.** $x = 16 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, x = 2, (x \geq 2).$
3.3. $x = 2 \cos t, y = 6 \sin t, y = 3, (y \geq 3).$
3.4. $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), y = 3, (y \geq 3, 0 \leq x \leq 4\pi).$
3.5. $x = 16 \cos^3 t, y = \sin^3 t, x = 2, x = 6\sqrt{3}, (2 \leq x \leq 6\sqrt{3}).$
3.6. $x = 6 \cos t, y = 2 \sin t, y = 1, y = \sqrt{3}, (1 \leq y \leq \sqrt{3}).$
3.7. $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), y = 3, (y \geq 3, 0 \leq x \leq 6\pi).$
3.8. $x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, y = \sqrt{2} \sin^3 t, x = 4, (x \leq 4).$
3.9. $x = 2\sqrt{2} \cos t, y = 3\sqrt{2} \sin t, y = 3, (y \geq 3).$
3.10. $x = 6(t - \sin t), y = 6(1 - \cos t), y = 3, y = 9, (3 \leq y \leq 9, 0 \leq x \leq 2\pi).$
3.11. $x = 32 \cos^3 t, y = \sin^3 t, x = 4, (x \geq 4).$
3.12. $x = 3 \cos t, y = 8 \sin t, y = 4, (y \geq 4).$
3.13. $x = 6(t - \sin t), y = 6(1 - \cos t), y = 0, y = 6, (0 \leq y \leq 6, 0 \leq x \leq 2\pi).$
3.14. $x = 8 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t, x = 3\sqrt{3}, (x \geq 3\sqrt{3}).$
3.15. $x = 6 \cos t, y = 4 \sin t, y = 2\sqrt{3}, (y \geq 2\sqrt{3}).$
3.16. $x = 10(t - \sin t), y = 10(1 - \cos t), y = 15, (y \geq 15, 0 \leq x \leq 6\pi).$
3.17. $x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, y = \sqrt{2} \sin^3 t, x = -1, (x \leq -1).$
3.18. $x = \sqrt{2} \cos t, y = 4\sqrt{2} \sin t, y = -4, (y \leq -4).$
3.19. $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, x = 1, (x \geq 1, 0 \leq y \leq 2\pi).$
3.20. $x = 9 \cos t, y = 4 \sin t, y = 2, (y \geq 2).$
3.21. $x = 8(t - \sin t), y = 8(1 - \cos t), y = 12, (y \geq 12, 0 \leq x \leq 6\pi).$
3.22. $x = 24 \sin^3 t, y = 2 \cos^3 t, x = 9\sqrt{3}, (x \geq 9\sqrt{3}).$
3.23. $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), y = 2, y = 3, (2 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 4\pi).$
3.24. $x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, y = \sqrt{2} \sin^3 t, x = -2, (x \geq -2).$
3.25. $x = 2\sqrt{2} \cos t, y = 5\sqrt{2} \sin t, y = -5, (y \geq -5).$
3.26. $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t), y = 6, (y \geq 6, 0 \leq x \leq 4\pi).$
3.27. $x = 8 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, x = -1, (x \leq -1).$
3.28. $x = 2 \cos t, y = 3 \sin t, x = -1, x = 1, (-1 \leq x \leq 1).$
3.29. $x = 8(t - \sin t), y = 8(1 - \cos t), y = 4, y = 12, (4 \leq y \leq 12, 0 \leq x \leq 2\pi).$
3.30. $x = 4 \cos^3 t, y = 8 \sin^3 t, y = 1, y = 3\sqrt{3}, (1 \leq y \leq 3\sqrt{3}).$

4. Знайдіть довжину ліній, заданих явними рівняннями.

- 4.1.** $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, x \in [0; 1].$ **4.2.** $y = \ln \frac{2}{x}, x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}].$
4.3. $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2 \ln x), x \in [1; 2].$ **4.4.** $y = \ln x, x \in [\sqrt{3}; \sqrt{15}].$
4.5. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, x \in [1; 2].$ **4.6.** $y = 2 + \operatorname{ch} x, x \in [0; 1].$
4.7. $y = e^x - 1, x \in [\ln \sqrt{8}; \ln \sqrt{15}].$ **4.8.** $y = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}, x \in [0; 2].$
4.9. $y = \ln \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right].$ **4.10.** $y = 3 - \operatorname{ch} x, x \in [0; 1].$

- 4.11. $y = 1 + \ln \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. 4.12. $y = \arcsin e^{-x}$, $x \in [0; 1]$.
- 4.13. $y = \frac{\ln \sin 2x}{2}$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. 4.14. $y = \ln \frac{7}{x}$, $x \in [\sqrt{15}; \sqrt{24}]$.
- 4.15. $y = \ln(1 - x^2)$, $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$. 4.16. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$, $x \in [3; 4]$.
- 4.17. $y = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x^3}}{3}$, $x \in [0; 4]$. 4.18. $y = \ln(x^2 - 1)$, $x \in [3; 4]$.
- 4.19. $y = -\ln \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$. 4.20. $y = \frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{x^2}$, $x \in [1; 2]$.
- 4.21. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \left[0; \frac{15}{16}\right]$. 4.22. $y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$.
- 4.23. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$. 4.24. $y = \frac{1}{8}x + \frac{\sin 2x}{16} - \operatorname{tg} x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
- 4.25. $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 2$, $x \in \left[1; \frac{9}{16}\right]$.
- 4.26. $y = 1 - \arccos x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \left[1; \frac{9}{16}\right]$.
- 4.27. $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \left[0; \frac{8}{9}\right]$. 4.28. $y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{\ln \ln x}{4}$, $x \in [e; e^2]$.
- 4.29. $y = 4 \arccos x + \sqrt{x - x^2} + 2$, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. 4.30. $y = 3 - e^x$, $x \in [\ln \sqrt{15}; \ln \sqrt{24}]$.

5. Знайдіть довжину ліній, заданих параметричними рівняннями

- 5.1. $x = e^t (\cos t + \sin t)$, $y = e^t (\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- 5.2. $x = 2 (\cos t + t \sin t)$, $y = 2 (\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- 5.3. $x = 2 (2 \cos t - \cos 2t)$, $y = 4 (2 \sin t - \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
- 5.4. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.
- 5.5. $x = \sqrt{1 + t^2}$, $y = \frac{1}{2}t\sqrt{1 + t^2} - \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1 + t^2})$, $0 \leq t \leq 1$.
- 5.6. $x = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} \ln t - \frac{4}{9}\sqrt{t^3}$, $y = t \ln t - t$, $1 \leq t \leq 3$.
- 5.7. $x = 2 \cos t - \cos 2t$, $y = 2 \sin t - \sin 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- 5.8. $x = \ln(1 + \sin t) - \ln \cos t$, $y = \ln(1 - \cos t) - \ln \sin t$, $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.
- 5.9. $x = t e^t (\sin t - \cos t) + e^t \cos t$, $y = t e^t (\cos t + \sin t) - e^t \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- 5.10. $x = (1 - 2t^2) \cos 2t + 2t \sin 2t$, $y = (2t^2 - 1) \sin 2t + 2t \cos 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- 5.11. $x = 5(t - \sin t)$, $y = 5(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
- 5.12. $x = 2t - \sin 2t$, $y = 2 \sin^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$.
- 5.13. $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $y = \ln(1 + t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.
- 5.14. $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

5.15. $x = e^t \sin(t + \frac{\pi}{4}), y = e^t \cos(t + \frac{\pi}{4}), 0 \leq t \leq \pi$.

5.16. $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), \pi \leq t \leq 3\pi$.

5.17. $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

5.18. $x = 6 \cos^3 t, y = 6 \sin^3 t, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

5.19. $x = e^t \cos(t - \frac{\pi}{4}), y = e^t \sin 2t, 0 \leq t \leq \pi$.

5.20. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t, \pi \leq 2\pi$.

5.21. $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

5.22. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, 0 \leq t \leq \pi$.

5.23. $x = 2(\cos t + t \sin t), y = 2(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq \pi$.

5.24. $x = t \cos t, y = t \sin t, 0 \leq t \leq \pi$.

5.25. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \frac{\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$.

5.26. $x = \ln(1 + \sin 2t) - \ln \cos 2t, y = \ln \operatorname{tg} t, \frac{\pi}{8} \leq t \leq \frac{\pi}{6}$.

5.27. $x = t \cos t, y = t \sin t, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

5.28. $x = 7(t - \sin t), y = 7(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 4\pi$.

5.29. $x = 2t - \sin 2t, y = 2 \cos^2 t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

5.30. $x = 8 \sin^3 t, y = 8 \cos^3 t, 0 \leq t \leq \pi$.

6. Обчислити силу, з якою вода тисне на плотину, якщо переріз плоти-
нини має форму рівнобічної трапеції (рис.1). Питома вага води $1 \frac{\text{т}}{\text{м}^3}$

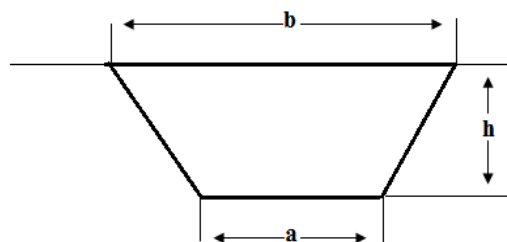


Рисунок 1

6.1. $a = 4,4 \text{ м}, b = 6,6 \text{ м}, h = 3 \text{ м}.$

6.2. $a = 5,1 \text{ м}, b = 7,8 \text{ м}, h = 3 \text{ м}.$

6.3. $a = 5,7 \text{ м}, b = 9,0 \text{ м}, h = 4 \text{ м}.$

6.4. $a = 6,3 \text{ м}, b = 10,2 \text{ м}, h = 4 \text{ м}.$

6.5. $a = 6,9 \text{ м}, b = 11,4 \text{ м}, h = 5 \text{ м}.$

6.6. $a = 4,1 \text{ м}, b = 5,6 \text{ м}, h = 3 \text{ м}.$

- 6.7.** $a = 6,1 \text{ м}, \quad b = 7,5 \text{ м}, \quad h = 4 \text{ м}.$
6.8. $a = 6,7 \text{ м}, \quad b = 8,0 \text{ м}, \quad h = 5 \text{ м}.$
6.9. $a = 5,3 \text{ м}, \quad b = 9,2 \text{ м}, \quad h = 4 \text{ м}.$
6.10. $a = 5,9 \text{ м}, \quad b = 10,4 \text{ м}, \quad h = 5 \text{ м}.$
6.11. $a = 5,2 \text{ м}, \quad b = 7,9 \text{ м}, \quad h = 4 \text{ м}.$
6.12. $a = 5,8 \text{ м}, \quad b = 9,2 \text{ м}, \quad h = 5 \text{ м}.$
6.13. $a = 6,5 \text{ м}, \quad b = 10,4 \text{ м}, \quad h = 5 \text{ м}.$
6.14. $a = 6,6 \text{ м}, \quad b = 10,4 \text{ м}, \quad h = 6 \text{ м}.$
6.15. $a = 5,5 \text{ м}, \quad b = 7,9 \text{ м}, \quad h = 4 \text{ м}.$
6.16. $a = 5,8 \text{ м}, \quad b = 10,0 \text{ м}, \quad h = 4 \text{ м}.$
6.17. $a = 6,5 \text{ м}, \quad b = 10,2 \text{ м}, \quad h = 5 \text{ м}.$
6.18. $a = 7,0 \text{ м}, \quad b = 12,4 \text{ м}, \quad h = 6 \text{ м}.$
6.19. $a = 6,1 \text{ м}, \quad b = 8,8 \text{ м}, \quad h = 4 \text{ м}.$
6.20. $a = 5,9 \text{ м}, \quad b = 9,5 \text{ м}, \quad h = 4 \text{ м}.$
6.21. $a = 6,6 \text{ м}, \quad b = 10,5 \text{ м}, \quad h = 5 \text{ м}.$
6.22. $a = 7,3 \text{ м}, \quad b = 11,6 \text{ м}, \quad h = 5 \text{ м}.$
6.23. $a = 5,9 \text{ м}, \quad b = 7,9 \text{ м}, \quad h = 3 \text{ м}.$
6.24. $a = 6,7 \text{ м}, \quad b = 12,0 \text{ м}, \quad h = 5 \text{ м}.$
6.25. $a = 8,3 \text{ м}, \quad b = 12,5 \text{ м}, \quad h = 5 \text{ м}.$

2 КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

2.1 Варіанти контрольних робіт

Варіант 1

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_0^1 e^x dx; \quad \int_0^1 x dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_1^4 (x^2 + x - 5) dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = \cos x, \quad \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_0^1 x^3 dx; \quad \text{б) } \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 2x - 8}; \quad \text{в) } \int_0^1 x 4^x dx; \quad \text{г) } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+5}}.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 1) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx; \quad \text{г) } \int_0^1 \ln x dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y = 4 - x^2, y = 0; \quad \text{б) } y = x^2 \sqrt{9 - x^2}, y = 0, x \in [0; 3]; \quad \text{в) } \rho = 1 - \sin \varphi.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } y = e^x, x = 0, y = 0, x = 1, \text{ навколо вісі } OX; \\ \text{б) } x^2 - y^2 = 4, y = \pm 2, \text{ навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$x = 3t - t^3, y = 3t^2.$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 5, \quad V(t) = 2t^2 + t - 3.$$

10. Розв'яжіть задачу

Стискання x гвинтової пружини пропорційне прикладеній силі. Обчисліть роботу при стисканні пружини на 0,06 м, якщо для стискання її на 0,01 м потрібна сила 20 Н.

Варіант 2

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_1^2 (x^2 + 1) dx; \quad \int_1^2 x dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = \sin x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}; \quad \text{б) } \int_{\frac{3}{4}}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}; \quad \text{в) } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; \quad \text{г) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x}; \quad \text{б) } \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx; \quad \text{г) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y = 4, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0; \quad \text{б) } y = x^2 \sqrt{4-x^2}, \quad y = 0, \quad x \in [0; 2]; \\ \text{в) } \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad \text{навколо вісі } OX;$$

$$б) \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \text{ навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$y = 1 - \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 3, \quad V(t) = 3t^2 + 2t - 1.$$

10. Розв'яжіть задачу

Обчисліть роботу, яку необхідно витратити, щоб викачати воду із резервуара конічної форми з вершиною, оберненою вниз (радіус основи R , висота H).

Варіант 3

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_1^2 e^x dx; \quad \int_1^2 (x-1) dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_0^{\pi} \sin x dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = 3x^2 + x, \quad x \in [0; 2].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$а) \int_0^1 2^x dx; \quad б) \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}; \quad в) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx; \quad г) \int_1^5 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x+1}}.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$а) \int_0^{\infty} \frac{dx}{9+x^2}; \quad б) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}; \quad в) \int_{-2}^2 \frac{dx}{x}; \quad г) \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$а) y^2 = 2x + 4, \quad x = 0; \quad б) x = y^2(y-1), \quad x = 0; \quad в) \rho = 1 - \sin \varphi.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

а) $y^2 = x, x = 1$, навколо вісі OX ;

б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ навколо вісі OY .

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$y = 1 - \ln \sin x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right].$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 4, \quad V(t) = 3t^2 - 5t + 2.$$

10. Розв'яжіть задачу

Обчисліть силу тиску води на вертикальний прямокутний шлюз з основою a і висотою h (рівень води співпадає з верхнім обрізом шлюзу).

Варіант 4

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_0^1 (x^2 + 1) dx; \quad \int_0^1 \frac{1}{2} x dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_0^{\pi} \cos x dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = 2^x, \quad x \in [0; 2].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_2^3 (1 + 2x + 3x^2) dx; \quad \text{б) } \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} x^{-2} \sin \frac{1}{x} dx; \quad \text{в) } \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx; \quad \text{г) } \int_0^3 \frac{dx}{2 + \sqrt{x+1}}.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} (x+3) dx; \quad \text{б) } \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx; \quad \text{в) } \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4}; \quad \text{г) } \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2 - 4x}}.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініям та зробіть рисунок

а) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$; б) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ в) $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$.

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

а) $y = x^2$, $y = x$, навколо вісі OX ;

б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, навколо вісі OY .

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$x = 6t^2$, $y = 2t(3 - t^2)$.

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$t = 5$, $V(t) = 2t^2 - t + 5$.

10. Розв'яжіть задачу

Котел має форму параболоїда обертання глибиною h і радіусом основи r . Знайдіть роботу, яку необхідно витратити на викачування води з цього котла.

Варіант 5

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$\int_4^{12} x^2 dx$; $\int_4^{12} (x-3) dx$.

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$\int_1^3 2^x dx$.

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$y = x^2 + 3$, $x \in [0; 3]$.

4. Обчисліть інтеграли

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; б) $\int_3^8 \frac{dx}{x^2 + 6x + 34}$; в) $\int_0^1 x 6^x dx$; г) $\int_1^2 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$.

5. Дослідіть невласні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а)} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + x - 1) dx; \quad \text{б)} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^3 - 1}; \quad \text{в)} \int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 1}; \quad \text{г)} \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}}.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а)} y = \ln x, \quad x = e, \quad y = 0; \quad \text{б)} y = 3 \sin x, \quad y = \sin x, \quad x \in [0; \pi];$$

$$\text{в)} \rho = 3(1 + \sin \varphi).$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а)} x = y^2, \quad y = x, \quad \text{навколо вісі } OX;$$

$$\text{б)} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \text{навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$\rho = 2(1 + \cos \varphi), \quad \varphi \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 4, \quad V(t) = 3t^2 + 2t - 1.$$

10. Розв'яжіть задачу

Знайдіть силу тиску рідини щільності ρ на вертикальний півкруг, діаметр якого $2R$ знаходиться на розділі серед рідини-повітря.

Варіант 6

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_1^e \ln x dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = x^2 + x - 3, \quad [0; 2].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а)} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}; \quad \text{б)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}; \quad \text{в)} \int_0^1 x 10^x dx; \quad \text{г)} \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_0^{\infty} e^{-x} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 2x + 2)^{-1} dx; \quad \text{в) } \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}; \quad \text{г) } \int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y = x^3, y = 8, x = 0; \quad \text{б) } y = (x-2)^3, y = 4x-8, \quad \text{в) } \rho = 2(1 + \sin \varphi).$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } x = 4 \cos t; y = \sin t, \text{ навколо вісі } OX;$$

$$\text{б) } y^2 = 4 - x, x = 0, \text{ навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \left[0; \frac{7}{9}\right].$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 5, V(t) = 2t^2 - t + 3.$$

10. Розв'яжіть задачу

Стискання гвинтової пружини x пропорційне прикладеній силі. Обчисліть роботу при стисканні пружини на 0,04 м, якщо сила 10 Н стискає її на 0,01 м.

Варіант 7

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = 3x^2 + 2x - 1, [1; 3].$$

4. Обчисліть інтеграли

а) $\int_0^1 e^x dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \sin 2x dx$; в) $\int_1^2 x 5^x dx$; г) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$; б) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$; в) $\int_{-5}^5 \frac{dx}{x+5}$; г) $\int_1^2 x(x-1)^{-\frac{1}{2}} dx$.

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

а) $y = \sin x$, $y = 0$, $x \in [0; \pi]$; б) $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $y = 1$, ($y \geq 1$);
в) $\rho = 5 \sin \varphi$.

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

а) $x^2 = y$, $y = 2x$, навколо вісі OX ;
б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = \pm 2$, навколо вісі OY .

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$\rho = 5(1 - \cos \varphi), \varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}; 0\right].$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 4, V(t) = 9t\sqrt{t} + 1.$$

10. Розв'яжіть задачу

Циліндрична цистерна радіусом основи R і висотою H заповнена водою. Обчисліть роботу, яку необхідно витратити, щоб викачати воду із цистерни.

Варіант 8

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_1^2 x dx; \quad \int_1^2 e^{3x} dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx .$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = 3x^2 + x - 1, [0; 2].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а)} \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx; \quad \text{б)} \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{e^x + 1}; \quad \text{в)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx; \quad \text{г)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+4} dx .$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а)} \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1} dx; \quad \text{б)} \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx; \quad \text{в)} \int_0^{\frac{1}{5}} (5x-1)^{-1} dx; \quad \text{г)} \int_0^2 x(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx .$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а)} xy = 6, \quad x + y = 7; \quad \text{б)} y = \sqrt{e^x - 1}, \quad x = 0, \quad y = \ln 2;$$

$$\text{в)} \rho = \cos \varphi, \quad \rho = \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} .$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а)} y = e^x, \quad y = e^{2x}, \quad x = 1, \quad \text{навколо вісі } OX;$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad \text{навколо вісі } OY .$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$x = 6t - 2t^3, \quad y = 6t^2 .$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 3, \quad V(t) = 6t^2 - \sqrt{t} .$$

10. Розв'яжіть задачу

Обчисліть силу тиску води на плотину, яка має форму рівнобічної трапеції з основами a і $b(a > b)$ і висотою h .

Варіант 9

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = x^2 + x - 1, \quad x \in [0; 1].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx; \quad \text{б) } \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 3x \, dx; \quad \text{г) } \int_0^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \, dx.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dx; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \, dx}{3+e^{-x}}; \quad \text{в) } \int_1^5 \frac{dx}{x-5}; \quad \text{г) } \int_2^3 \frac{x \, dx}{\sqrt{x-2}}.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y = x, \quad y = 2x, \quad x = 3; \quad \text{б) } x = 8 \cos^3 t, \quad y = 8 \sin^3 t; \quad \text{в) } \rho = 4 \cos \varphi.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } y = 2^x, \quad y = 2^{3x}, \quad x = 1, \text{ навколо вісі } OX;$$

$$\text{б) } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, \quad y = \pm 2, \text{ навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 4, \quad V(t) = 5t^2 - 2t.$$

10. Розв'яжіть задачу

Котел має форму півкулі радіуса R , наповнений доверху водою. Яку роботу необхідно зробити, щоб викачати воду з цього котла?

Варіант 10

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_0^1 e^x dx; \quad \int_0^1 \sin x dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_1^3 (x^3 + x - 2) dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = (3x + 1)^{-1}, \quad x \in [0; 2].$$

4. Обчисліть вказані інтеграли

$$\text{а)} \int_1^2 \frac{dx}{x}; \quad \text{б)} \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx; \quad \text{в)} \int_1^2 x 3^x dx; \quad \text{г)} \int_1^4 \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} dx.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а)} \int_{-\infty}^{\infty} (x+1) dx; \quad \text{б)} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; \quad \text{в)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{г)} \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а)} y = x, \quad y = 3x, \quad x = 2; \quad \text{б)} x = 9 \cos t, \quad y = 4 \sin t, \quad y = 2, \quad y \geq 2; \\ \text{в)} \rho = 3(1 - \cos \varphi).$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а)} y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3, \text{ навколо вісі } OX; \\ \text{б)} x = (y - 2)^3, \quad x = 4y - 8, \text{ навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$x = 3t^2, \quad y = t(3 - t^2).$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 5, \quad V(t) = 3t^2 \sqrt{t} + 8.$$

10. Розв'яжіть задачу

Обчисліть площу фігури, що утворена параболою $y = x^2 + 2$, дотичною до неї в точці $M(1,3)$ та віссю ординат.

Варіант 11

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_0^1 \cos x \, dx; \quad \int_0^1 e^x \, dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = x^3 - x + 1, \quad x \in [1; 3].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{б) } \int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2+4x+13}; \quad \text{в) } \int_1^2 \frac{\ln x}{x^4} dx; \quad \text{г) } \int_1^2 \frac{x \, dx}{\sqrt{5x-1}}.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_0^{\infty} (x^3-1) dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} (e^{3x}-1) dx; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{1}{3}} (3x-1)^{-1} dx; \quad \text{г) } \int_0^{\frac{1}{2}} (x \ln^2 x)^{-1} dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y = -x^2 + 1, \quad y = 0; \quad \text{б) } x = (y-2)^3, \quad x = 4y-8; \quad \text{в) } \rho = \sin \varphi.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } xy = 5, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad \text{навколо вісі } OX;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \quad \text{навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$\rho = 6(1 + \sin \varphi), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0.$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 6, \quad V(t) = 5t^2 + 3.$$

10. Розв'яжіть задачу

Стискання гвинтової пружини пропорційне прикладеній силі. Обчисліть роботу при стисканні пружини на $0,1$ м, якщо для стискання її на $0,02$ м потрібна сила 70 Н.

Варіант 12

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_0^1 (x+1) dx; \quad \int_0^1 x^2 dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_1^3 e^{3x} dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = x^2 + x - 5, \quad x \in [2; 4].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx; \quad \text{в) } \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx; \quad \text{г) } \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1}}.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_0^{\infty} x^5 dx; \quad \text{б) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 5x^2}; \quad \text{в) } \int_0^2 (2x-4)^{-1} dx; \quad \text{г) } \int_1^2 (x \ln^5 x)^{-1} dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y = -x^2 + 3, \quad x = 0, \quad y = 0; \quad \text{б) } y = x \sqrt{9-x^2}, \quad y = 0, \quad x \in [0; 3];$$

$$\text{в) } \rho = 2 \sin \varphi.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } y = e^{2x}, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad \text{навколо вісі } OX;$$

$$\text{б) } y = x^2, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad \text{навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$\rho = 3(1 + \sin \varphi), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right].$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 7, \quad V(t) = 3t^2 + 2t.$$

10. Розв'яжіть задачу

Котел має форму параболоїда обертання, глибина його 1 м, радіус основи 2 м. Знайдіть роботу, яку необхідно витратити на викачування води з цього котла.

Варіант 13

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_1^3 x dx; \quad \int_1^3 x^2 dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_0^2 (x^2 - 2x) dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = 5^x, \quad [0; 2].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_{-2}^1 (1 + x - 3x^2) dx; \quad \text{б) } \int_{-\frac{1}{2}}^1 (8 + 2x - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx; \quad \text{в) } \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx; \quad \text{г) } \int_1^9 x(2x + 7)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \sqrt{x} dx; \quad \text{б) } \int_3^{\infty} x^2 (x^2 - 4)^{-1} dx; \quad \text{в) } \int_0^5 (x - 5)^{-1} dx; \quad \text{г) } \int_0^{\frac{3}{2}} (x^2 - 3x + 2)^{-1} dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y = x, \quad x = 2, \quad y = 0; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad \text{в) } \rho = 4 \cos \varphi.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

а) $y = 3^x$, $y = 3^{2x}$, $x = 1$, навколо вісі OX ;

б) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$, $y = \pm 1$, навколо вісі OY .

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$\rho = 4(1 - \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 10, \quad V(t) = 5t^2 + 2t + 3.$$

10. Розв'яжіть задачу

Обчисліть площу фігури, обмеженою кривою $y = e^x$, дотичною до неї в точці $M(0, 1)$ та прямою $x = 1$.

Варіант 14

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (значення якого інтеграла більше)

$$\int_2^3 x dx; \quad \int_2^3 (x^2 + 1) dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_0^1 e^{x+3} dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = \cos x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}; \quad \text{б) } \int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10}; \quad \text{в) } \int_0^1 x \cdot 7^x dx; \quad \text{г) } \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4x+5}}.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_{-\infty}^0 (x^2 + x - 1) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^3 + 1}; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{dx}{x}; \quad \text{г) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями зробіть рисунок

а) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 1$; б) $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$; в) $\rho = 2 \cos \varphi$.

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

а) $y = -x^2 + 1$, $y = 0$, навколо вісі OX ;

б) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ навколо вісі OY .

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leq x \leq 3$.

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$t = 5$, $V(t) = t^3 - t$.

10. Розв'яжіть задачу

Обчисліть роботу звикачування води із резервуару конусної форми з вершиною, оберненою вниз (радіус основи резервуара R , висота H).

Варіант 15

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$\int_1^2 x dx$; $\int_1^2 x \sin x dx$.

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$\int_{-1}^1 2^{x^2} dx$.

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$y = \sin 2x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Обчисліть інтеграли

а) $\int_1^6 \left(x - \frac{6}{x}\right) dx$; б) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$; в) $\int_0^1 x 5^x dx$; г) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 5} dx$.

5. Дослідіть невласні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

а) $\int_0^\infty (x^2 + 1) dx$; б) $\int_8^\infty \frac{dx}{x \ln x}$; в) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x + 2}$; г) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} dx$.

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

а) $y = 2^x$, $y = 2^{2x}$, $x = 1$; б) $y = (x + 1)^2$, $y = x + 1$; в) $\rho = 3 \cos \varphi$.

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

а) $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, навколо вісі OX ;

б) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \pm 3$, навколо вісі OY .

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$x = 3t(3 - t^2)$, $y = 9t^2$.

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$t = 5$, $V(t) = 4 \sin 2t + t^2$.

10. Розв'яжіть задачу

Обчисліть площу фігури, обмеженої кривою $y = \frac{1}{x}$, дотичною до неї в точці $M(1,1)$ та прямою $x = 3$.

Варіант 16

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$\int_0^1 (2x + 1) dx$; $\int_0^1 (2x^2 + 1) dx$.

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$\int_{-1}^1 (5x^2 + 1) dx$.

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$y = \cos 3x$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$.

4. Обчисліть інтеграли

а) $\int_0^1 (1 + x^2) dx$; б) $\int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$; г) $\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + 2} dx$.

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а)} \int_{-\infty}^{\infty} x dx; \quad \text{б)} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x)^3}; \quad \text{в)} \int_0^1 \frac{dx}{2x-1}; \quad \text{г)} \int_0^{\frac{1}{2}} (x \ln^2 x)^{-1} dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а)} y = \cos x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{б)} y = x 2^x, x = 1, y = 0;$$

$$\text{в)} \rho = 1 - \cos \varphi, \rho \geq 1.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а)} y = x^2, y = 2x^2, x = 1, \text{ навколо вісі } OX;$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = \sqrt{2} \sin t, \end{cases} \text{ навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}.$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 4, V(t) = 5t\sqrt{t} - 3t + 2.$$

10. Розв'яжіть задачу

Стискання гвинтової пружини x пропорційне прикладеній силі. Обчисліть роботу при стисканні пружини на 0,12 м, якщо сила 60 Н стискає її на 0,02 м.

Варіант 17

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_1^2 x^2 dx; \quad \int_1^2 x \sin \frac{x}{3} dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_{-1}^1 3^{x^2} dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = \sin 2x, x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right].$$

4. Обчисліть інтеграли

а) $\int_1^3 (5 - 2x + x^2) dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$; г) $\int_1^4 \sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)^{-1} dx$.

5. Дослідіть невласні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

а) $\int_{-\infty}^0 (x + 3) dx$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$; в) $\int_0^2 \frac{dx}{x - 2}$; г) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

а) $y = x^2$, $y^2 = 4 - x^2$; б) $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases}$ в) $\rho \geq 1 - \cos \varphi$, $\rho = 1$.

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

а) $y = \cos x$, $x = 0$, $y = 0$, навколо вісі OX ;

б) $x = \sqrt{4 - y^2}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, навколо вісі OY .

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$x = 9t^2$, $y = 3(3t - t^3)$.

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$t = 5$, $V(t) = 4t^2 \sqrt{t^3} + 3t$.

10. Розв'яжіть задачу

Обчисліть роботу з утворення терикону, який має форму конусу із параметрами R (радіус основи) та H (висота), із матеріалу щільності ρ .

Варіант 18

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$\int_0^1 (x + 2) dx$; $\int_0^1 (2 + x \sin 4x) dx$.

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$\int_0^1 5^x dx$.

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = \cos 3x, \quad x \in [0; \pi].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_{-1}^2 (x^3 + 1) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \arccos x dx; \quad \text{г) } \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x} + 2}.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_0^{\infty} (2x - 1) dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}; \quad \text{в) } \int_0^5 \frac{dx}{x - 3}; \quad \text{г) } \int_1^9 \sqrt{x} (\sqrt{x} - 3)^{-1} dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } xy = 3, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0; \quad \text{б) } y = x5^x, \quad x = 1, \quad y = 0; \quad \text{в) } \rho = 2(1 + \cos \varphi), \quad \rho \geq 2.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } y = \sin x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{навколо вісі } OX; \\ \text{б) } \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \quad \text{навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$\rho = 1 - \sin \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0.$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 4,5, \quad V(t) = \frac{t - 1}{t + 1}.$$

10. Розв'яжіть задачу

Обчисліть роботу з утворення терикону, який має форму усіченого конусу із параметрами r та R (радіуси основ) та H (висота), із матеріалу щільності ρ .

Варіант 19

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_2^4 e^x dx; \quad \int_2^4 e^{5x} dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_{-1}^1 (3x^2 - 6x) dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = \sin 2x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \, dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}; \quad \text{в) } \int_0^1 \arcsin x \, dx; \quad \text{г) } \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_0^{\infty} (3x+1) dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) dx}{x^2+4x+8}; \quad \text{в) } \int_0^3 \frac{dx}{x-1}; \quad \text{г) } \int_0^1 x \ln 2x \, dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y^2 = x+1, \quad x=0; \quad \text{б) } y=4-x^2, \quad y=x^2-2x; \quad \text{в) } \rho=1+\cos \varphi, \quad \rho \geq 1.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } y = \operatorname{tg} x, \quad y=0, \quad x = \frac{\pi}{4}, \text{ навколо вісі } OX;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \text{ навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$y = \ln x, \quad \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{12}{5}.$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t=3, \quad V(t) = 5 \sin \pi t + t^2.$$

10. Розв'яжіть задачу

Обчисліть площу фігури, обмеженої кривою $y = \frac{1}{x}$, дотичною до неї в точці $M(1,1)$, прямою $x=3$ та віссю OX .

Варіант 20

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + \cos x) dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + \cos^2 x) dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два числа між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_{-1}^1 (4x^2 - 1) dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = \cos x, \quad x \in [0; \pi].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{8 - 2x - x^2}; \quad \text{в) } \int_1^e \ln x \, dx; \quad \text{г) } \int_4^9 (\sqrt{x} + 1)^{-1} dx.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_0^{\infty} (x+3)^{-1} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx; \quad \text{в) } \int_0^2 (2x+1)^{-1} dx; \quad \text{г) } \int_0^2 (x^2 - 4x + 3)^{-1} dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y^2 = x, \quad y^2 = 2x, \quad x = 1; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \quad \text{в) } 2(1 + \cos \varphi) \leq \rho \leq 4.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } y = x, \quad y = 4x, \quad x = 2, \text{ навколо вісі } OX;$$

$$\text{б) } xy = 6, \quad y = 1, \quad y = 6, \quad x = 0, \text{ навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad y = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 7, \quad V(t) = t^3 \sqrt{t} + t^2.$$

10. Розв'яжіть задачу

Ємність, що має форму циліндра із радіусом основи R та висотою H , знизу завершена півкулою з тим же радіусом та заповнена водою. Знайдіть роботу із викачування води із цієї ємності.

Варіант 21

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_1^2 x^2 dx; \quad \int_1^2 x \sin \frac{x}{2} dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_{-1}^1 (3x^2 + 2) dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = 2^x, \quad x \in [0; 2].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{2x+4}; \quad \text{б) } \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}; \quad \text{в) } \int_0^1 x 3^x dx; \quad \text{г) } \int_0^R \sqrt{R^2-x^2} dx.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_0^{\infty} (x^3 \sqrt{x} + 1) dx; \quad \text{б) } \int_1^{\infty} x \sin x dx; \quad \text{в) } \int_{-3}^0 \frac{dx}{x+3}; \quad \text{г) } \int_0^2 (x^2 - 4x + 3)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad x = 1; \quad \text{б) } x = \sqrt{4-y^2}, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0; \\ \text{в) } 1 + \cos \varphi \leq \rho \leq 3.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } y = 2 \cos x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \text{навколо вісі } OX; \\ \text{б) } x = 2\sqrt{y}, \quad y = 4, \quad x = 0, \quad \text{навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$x = t^2, \quad y = \frac{t}{3}(t^2 - 3).$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 2, \quad V(t) = 3t \cos \pi t + t^3.$$

10. Розв'яжіть задачу

Знайдіть силу тиску води на вертикальну заслінку, що має форму ромба зі стороною a та висотою h розташовану так, що одна сторона знаходиться на поверхні води, а інша паралельна поверхні.

Варіант 22

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_{-2}^{-1} 2^x dx; \quad \int_{-2}^{-1} 2^{3x} dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_{-1}^1 (4x^2 + 3) dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = \sin 3x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\ln 2} (e^x + 1)^{-1} e^{\frac{x}{2}} dx; \quad \text{в) } \int_1^2 x 3^x dx; \quad \text{г) } \int_2^7 (x + 2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_{-\infty}^0 e^x dx; \quad \text{б) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}; \quad \text{в) } \int_{-2}^0 (x+2)^{-1} dx; \quad \text{г) } \int_0^1 x^2 \ln x dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y = 5 - x^2, \quad y = 0, \quad x = 0; \quad \text{б) } xy = 6, \quad y = 1, \quad y = 6, \quad x = 0;$$

$$\text{в) } \rho = 2 \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } y = 3 \cos x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad \text{навколо вісі } OX;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} \quad \text{навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$y = \ln \sin x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right].$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 4, \quad V(t) = 3 \sin 2t + 5t.$$

10. Розв'яжіть задачу

Ресора прогинається під навантаженням у 1,5 т на 1 см. Яку роботу необхідно витратити для деформування ресори на 3 см? (Сила деформування пропорційна величині деформації).

Варіант 23

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \, dt.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 7) dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = e^{3x}, \quad x \in [0; 2].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \, dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x \, dx}{8 + 2x - x^2}; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx; \quad \text{г) } \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}.$$

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} x^2 \, dx; \quad \text{б) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}; \quad \text{в) } \int_0^2 \frac{dx}{x-1}; \quad \text{г) } \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } xy = 1, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0; \quad \text{б) } y = x^2, \quad y^2 - x = 0;$$

$$\text{в) } \rho = 3 \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } y = -x^2 + 1, \quad y = 0, \quad \text{навколо вісі } OX;$$

$$б) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \text{ навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$y = \ln(1 - x^2), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 6, \quad V(t) = 5 \cos 2t - t^3.$$

10. Розв'яжіть задачу

Знайдіть роботу з побудови циліндру радіусом основи R та висотою H із сировини щільності ρ , що має властивість затвердіння на повітрі.

Варіант 24

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \, dx.$$

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$$\int_0^8 (3x^2 + 3) \, dx.$$

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$$y = \cos 2x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

4. Обчисліть інтеграли

$$а) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx; \quad б) \int_{-2}^1 \frac{(x+1) \, dx}{x^2 + 4x + 13}; \quad в) \int_0^1 x e^{-x} \, dx; \quad г) \int_1^5 \sqrt{x-1} \, dx.$$

5. Дослідіть невласні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$а) \int_0^{\infty} x^3 \sqrt{x} \, dx; \quad б) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}; \quad в) \int_1^2 \frac{dx}{1-x}; \quad г) \int_0^9 \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3}.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

а) $y = x^{-1}$, $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$; б) $x = 4 - (y - 1)^2$, $x = y^2 - 4y + 3$;

в) $\rho = \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

а) $y = 2 \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, навколо вісі OX ;

б) $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases}$ навколо вісі OY .

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$y = \ln \cos x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right]$.

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$t = 3$, $V(t) = \sin^2 t + t^3$.

10. Розв'яжіть задачу

Обчисліть силу тиску на поплавок у вигляді пластинки, що має форму правильного трикутника зі стороною a , зануреного у воду вертикально до половини так, що основа знаходиться на повітрі паралельно рівню води.

Варіант 25

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\cos x} dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу

$\int_{-1}^2 (x^2 - 10x + 2) dx$.

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі

$y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$.

4. Обчисліть інтеграли

а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$; б) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{5 - 4x - x^2}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; г) $\int_0^3 \sqrt{1+x} dx$.

5. Дослідіть невласні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

$$\text{а) } \int_0^{\infty} x \sqrt[5]{x} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{dx}{x \sqrt[3]{x}}; \quad \text{г) } \int_{-1}^0 (x+1) \ln(x+1) dx.$$

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

$$\text{а) } y = x, \quad y = 5x^{-1}, \quad x = 3; \quad \text{б) } y = \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0, \quad x = \ln 2;$$

$$\text{в) } \rho = 2 \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням вказаних ліній. Зробіть рисунок

$$\text{а) } y = \sin x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}, \text{ навколо вісі } OX;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} \text{ навколо вісі } OY.$$

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу

$$x = \cos t + t \sin t, \quad y = \sin t - t \cos t, \quad t \in [0; \pi].$$

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с)

$$t = 1, \quad V(t) = t \sin t^2 + 2t.$$

10. Розв'яжіть задачу

Знайдіть масу стрижня довжиною 10 см, якщо лінійна щільність змінюється за законом $\mu = 6 + 0,3x$, де μ - лінійна щільність, кг/м, x - відстань від довільної точки стрижня до одного із його кінців, м.

2.2 Підготовка до захисту контрольних робіт

1. Не обчислюючи інтеграли порівняйте їх (вказати, значення якого інтеграла більше) [6, Т. I, гл. XI, §3].

2. Оцініть інтеграл зверху та знизу, тобто вкажіть два цілих числа, між якими знаходиться значення інтегралу [1, Ч. I, гл. X, § 1], [6, Т. I, гл. XI, §3].

3. Знайдіть середнє інтегральне значення функції на замкненому інтервалі [3, Ч. III, пр. з. 12(III)], [6, Т. I, гл. XI, §3].

4. Обчисліть інтеграли

$$\text{а) } [1, \text{ Ч. I, гл. X, § 1}], [6, \text{ Т. I, гл. XI, §3}];$$

$$\text{б) } [2, \text{ гл. 8, п. 2}];$$

$$\text{в) } [3, \text{ Ч. III, пр. з. 12(II)}];$$

г)[3, Ч. III, пр. з. 12(I)].

5. Дослідіть невластні інтеграли на збіжність та у випадку збіжності вкажіть їх значення

а) [3, Ч. III, пр. з. 13 (I)];

б) [3, Ч. III, пр. з. 13 (I)];

в) [3, Ч. III, пр. з. 13 (II)];

г) [3, Ч. III, пр. з. 13 (II)].

6. Знайдіть площу фігури, що обмежена вказаними лініями та зробіть рисунок

а) [1, Ч. I, гл.X, § 3],[3, Ч. III, пр. з. 15];

б) [1, Ч. I, гл.X, § 3], [3, Ч. III, пр. з. 15];

в) [3, Ч. III, пр. з. 15].

7. Знайдіть об'єм тіла, отриманого обертанням [1, Ч. I, гл.X, § 5], [2, гл. 8, п.8.12], [3, Ч. III, пр. з. 16].

8. Знайдіть довжину лінії або її частини, що відповідає вказаному інтервалу змінення аргументу [2, гл. 8, п.8.8], [3, Ч. III, пр. з. 16], [6, Т. I, гл.XII, §3].

9. Знайдіть шлях, що проходить матеріальна точка за вказаний час t (с) від початку руху при заданому виразі для швидкості $V(t)$ (м/с) [3, Ч. III, пр. з. 11].

10. Розв'яжіть задачу[3, Ч. III, пр. з. 11].

ЛІТЕРАТУРА

1. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие для вузов: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: ОНИКС – 21 век; Мир и Образование, 2002. – Ч. 1.
2. **Зими́на, О. В.** Высшая математика :решебник / О. В. Зими́на, А. И. Кириллов, Т. А. Сальникова. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 368 с.
3. **Каплан, И. А.** Практические занятия по высшей математике / И. А. Каплан. – Харьков :Харьковскийгосударственный университет, 1967.– 948 с.
4. **Мышкис, А. Д.** Лекции по высшей математике / А.Д.Мышкис; под ред. Н.В.Воскресенской. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 640 с.
5. **Овчинников, П. П.** Вища математика :підручник : у 2 ч. / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М.Михайленко. – 2-е вид. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.
6. **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для вузов. В 2 т. Т. I / Н. С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2002. – 416с.

ДОДАТОК А
ПОКАЖЧИК ВІДПОВІДЕЙ НА ПИТАННЯ (табл. А.1)

Таблиця А.1

№ п/п	Питання	Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов. В 2 т. Т.І. – М. :Интеграл-Пресс, 2002.	Данко П. Е. Попов А. Г. Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. І. - М.: ОНИКС – 21 век; Мир и Образование, 2002.	Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике– Харьков: Харьковский государственный университет, 1967 – 948 с
1	2	3	4	5
1.	Як порівнювати визначені інтеграли	Т. І, гл. ХІ, § 3, с. 351	Ч. І, гл.Х, §1, с. 243	
2.	Як оцінювати визначені інтеграли		Ч. І, гл.Х, §1, с. 245	
3.	Як знаходити середнє значення функції на заданому відрізьку	Т. І, гл. ХІ, § 3, с. 354		Ч. ІІІ, пр. з. №12 (ІІІ), с. 753
4.	Як обчислити визначений інтеграл за допомогою таблиці первісних	Т. І, гл. ХІ, § 4, с. 355	Ч. І, гл.Х, §1, с. 243	
5.	Як обчислити визначений інтеграл за допомогою заміни змінної	Т. І, гл. ХІ, § 5, с. 360	Ч. І, гл.Х, §1, с. 243	Ч. ІІІ, пр. з. №12 (І), с. 744

Продовження таблиці А. 1

1	2	3	4	5
7.	Як обчислити визначений інтеграл за допомогою інтегрування частинами	Т. I, гл. XI, § 6, с. 361	Ч. I, гл.X, §1, с. 243	Ч. III, пр. з. №12 (II), с. 752
8.	Як дослідити на збіжність невласний інтеграл 1 роду	Т. I, гл. XI, § 7, с. 363	Ч. I, гл.X, §2, с. 247	Ч. III, пр. з. №13, с. 757
9.	Як дослідити на збіжність невласний інтеграл 2 роду	Т. I, гл. XI, § 7, с. 363	Ч. I, гл.X, §2, с. 247	Ч. III, пр. з. №13, с. 757
10.	Як знаходити площу фігури в декартовій системі координат	Т. I, гл. XII, § 1, с. 386	Ч. I, гл.X, §3, с. 251	Ч. III, пр. з. №15, с. 777
11.	Як знаходити площу фігури в полярній системі координат	Т. I, гл. XII, § 2, с. 388	Ч. I, гл.X, §3, с. 251	Ч. III, пр. з. №15, с. 786
12.	Як знаходити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, що задана в декартовій системі координат, навколо вісі OX чи OY за допомогою визначеного інтегралу	Т. I, гл. XII, § 5, с. 396	Ч. I, гл.X, §5, с. 255	Ч. III, пр. з. №16, с. 805

Продовження таблиці А. 1

1	2	3	4	5
13.	Як знаходити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, що задана параметрично, навколо вісі OX чи OY за допомогою визначеного інтегралу	Т. I, гл. XII, § 5, с. 396	Ч. I, гл. X, § 5, с. 255	Ч. III, пр. з. №16, с. 809
14.	Як знаходити довжину лінії, що задана в декартовій системі координат, за допомогою визначеного інтегралу	Т. I, гл. XII, § 3, с. 390	Ч. I, гл. X, § 4, с. 254	Ч. III, пр. з. №16, с. 792
15.	Як знаходити довжину лінії, що задана в полярній системі координат, за допомогою визначеного інтегралу	Т. I, гл. XII, § 3, с. 393	Ч. I, гл. X, § 4, с. 254	Ч. III, пр. з. №16, с. 792
16.	Як знаходити довжину лінії, що задана параметрично, за допомогою визначеного інтегралу	Т. I, гл. XII, § 3, с. 392	Ч. I, гл. X, § 4, с. 254	Ч. III, пр. з. №16, с. 792

Продовження таблиці А. 1

1	2	3	4	5
17.	Як знаходити шлях матеріальної точки за вказаний час t і при заданій швидкості $V(t)$			Ч. III, пр. з. №11, с. 743
18.	Як застосувати геометричний зміст визначеного інтегралу до розв'язання прикладних задач			
19.	Як обчислити силу тиску рідини на вертикальну пластину		Ч. I, гл.X, §9, с. 262	Ч. III, пр. з. №11, с. 737
20.	Як знаходити роботу, що необхідна для викачування рідини із резервуару		Ч. I, гл.X, §9, с. 262	
21.	Як знаходити роботу, що необхідна для стискання гвинтової пружини	Т. I, гл. XII, § 7, с. 399		Ч. III, пр. з. №11, с. 729

Навчальне видання

**ВЛАСЕНКО Катерина Володимирівна,
ЧУМАК Олена Олександрівна,
ДМИТРЕНКО Ірина Сергіївна**

ВИЩА МАТЕМАТИКА (МОДУЛЬ 4):

**ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ,
ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА**

**Навчальний посібник
до практичних занять і самостійної роботи**

Редагування

Комп'ютерна верстка

О. С. Орда

/2012. Формат 60 x 84/16. Ум. друк. арк.

Обл.-вид. арк. . Тираж пр. Зам. № .

Видавець і виготівник

Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
ДК №1633 від 24.12.2003.