

Міністерство освіти, науки, молоді і спорту України  
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

## **ДОДАТКОВІ ЗАНЯТТЯ З ВИЩОЇ МАТЕМА- ТИКИ**

**Посібник до аудиторної та самостійної роботи**  
для студентів усіх спеціальностей і усіх форм навчання

Затверджено  
на засіданні  
методичної ради  
Протокол №      від      2012

**Краматорськ 2012**

Додаткові заняття з вищої математики. Посібник до аудиторної та самостійної роботи для студентів усіх спеціальностей і усіх форм навчання / Укладачі: В.М. Астахов, Г.С. Буланов, В.О. Паламарчук, Н.С. Грудкіна. – Краматорськ: ДДМА, 2012. – 44 с.

Методичні вказівки призначені для тих студентів, які недостатньо засвоїли основний курс вищої математики і готуються до повторного екзамену (модульного контролю) самостійно або на додаткових заняттях. Вони містять детальні описи розв'язання типових завдань з вищої математики, завдання для самостійного розв'язання (з відповідями) і зразки тестових завдань.

Укладачі:

В.М. Астахов, доц.,

Г.С. Буланов, доц.,

В.О. Паламарчук, доц.,

Н.С. Грудкіна, ас. .

.

Відп. за випуск

А.М. Обухов, доц.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	
1 ТИПОВІ ПРИКЛАДИ ДЛЯ ДОДАТКОВИХ ЗАВДАНЬ .....	
1.1 Аналітична геометрія... ..	
1.1.1 Побудова графіків функцій.....	
1.1.2 Пряма лінія на площині.....	
1.1.3 Спільне розташування прямої та площини.....	
1.2 Елементи лінійної алгебри та теорії матриць .....	
1.3 Границі .....	
1.4 Похідна та її застосування .....	
1.5 Функції багатьох змінних .....	
1.6 Невизначені та визначені інтеграли.....	
1.7 Диференціальні рівняння .....	
1.8 Кратні інтеграли. Теорія поля .....	
1.9 Ряди .....	
2 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ .....	
3 ЗРАЗКИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ .....	
3.1 Тести за увесь курс вищої математики.....	
3.2 Тести з окремих модулів вищої математики.....	
3.3 Тести для оцінки знань після додаткових занять.....	

## ВСТУП

Як відомо, болонська система, до якої в останні роки активно приєднується українська вища освіта, має за основу кредитно-модульну організацію навчального процесу. Така організація приводить до запровадження нових форм і методів поточного і підсумкового контролю, а це, у свою чергу, вимагає значного посилення ролі самостійної роботи студента.

Цей посібник створено для тих студентів, які недостатньо засвоїли основний курс вищої математики і готуються до повторного екзамену (модульного контролю) самостійно або на додаткових заняттях. З курсу вищої математики для технічних і економічних спеціальностей було виділено базову частину, якій і буде приділятися основна увага.

Посібник складається з трьох частин, кожна з яких має кілька розділів, та індивідуальних завдань.

Перша частина містить детальні описи розв'язання типових завдань з ретельними коментарями. Вона побудована не за модульним принципом, а поділена на окремі теми. Це пов'язано з тим, що для різних спеціальностей зміст модулів може бути різним.

Друга частина складається з завдань для самостійного розв'язання, і тому містить крім завдань на усі теми, ще й відповіді, або короткі вказівки щодо розв'язання задачі.

Третя частина складається зі зразків тестових завдань.

Автори посібника поставили перед собою такі задачі:

- не замінюючи курсу лекцій або підручника, познайомити студента з основними задачами, які можна назвати базовими для кожної з розглянутих тем;
- детально розібрати велику кількість типових прикладів, застерігаючи студента від можливих помилок;
- надати студенту можливість самостійно навчитися розв'язувати аналогічні задачі, контролюючи правильність відповідей;
- окреслити коло задач, які можуть бути запропоновані у різних тестах як екзаменаційних, так і модульного контролю;
- запропонувати набір завдань, який викладачі можуть використовувати у навчальному процесі за відповідним робочим планом додаткових занять для студентів як денного, так і заочного відділень.

# 1 ТИПОВІ ПРИКЛАДИ ДЛЯ ДОДАТКОВИХ ЗАНЯТЬ

## 1.1 Аналітична геометрія

### 1.1.1 Побудова графіків функцій

В прямокутних координатах рівняння прямої на площині задають у одному з таких видів:

- Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом  $y = kx + b$ ;
- Загальне рівняння прямої  $Ax + By + C = 0$ ;
- Рівняння прямої у відрізках  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

Пряма лінія цілком визначена, якщо відомі дві точки, які їй належать. Найпростіше шукати точки перетину прямої з осями координат.

**Приклад 1.1** Побудувати графік  $x - 2y - 6 = 0$ .

При  $x=0$  знайдемо точку перетину прямої з віссю ОУ:

$$-2y = 6; \quad y = -3.$$

При  $y=0$  знайдемо точку перетину прямої з віссю ОХ:

$$x = 6.$$

Таким чином, пряма перетинає координатні вісі у точках  $(0; -3)$ ,  $(6; 0)$ . Побудуємо графік (рис. 1.1).

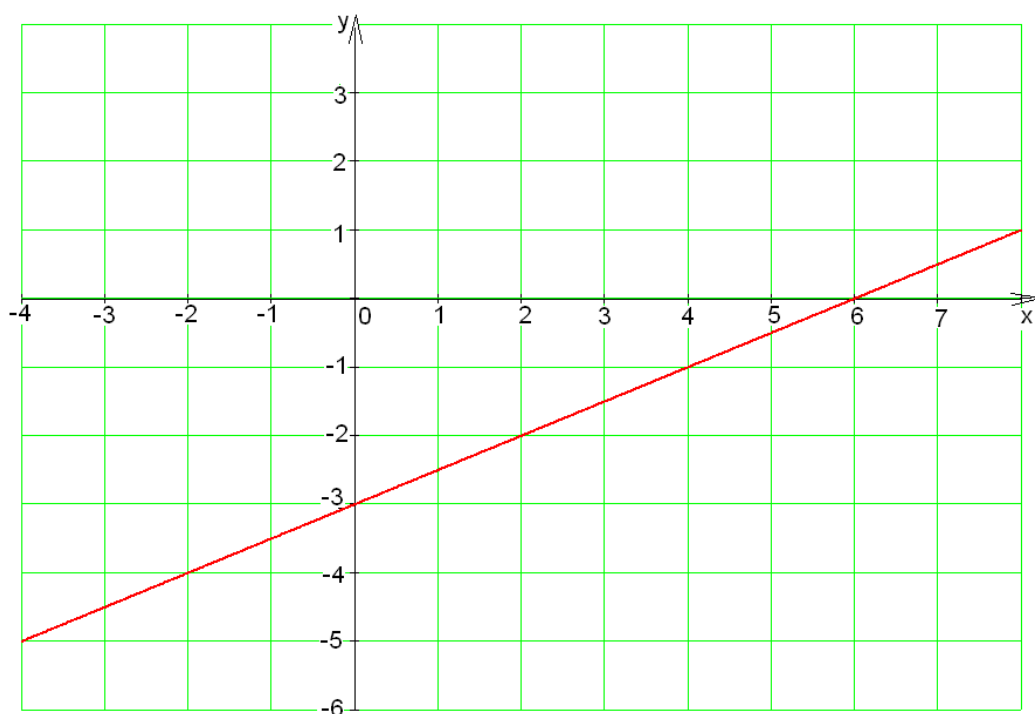


Рисунок 1.1 – Графік функції  $x - 2y - 6 = 0$

**Приклад 1.2** Побудувати графік  $\frac{y}{2} - \frac{x}{4} = 1$ .

При  $x=0$  знайдемо точку перетину прямої з віссю ОУ:

$$y = 2.$$

При  $y=0$  знайдемо точку перетину прямої з віссю ОХ:

$$x = -4.$$

Таким чином, пряма перетинає координатні вісі у точках  $(0;2)$ ,  $(-4;0)$ . Побудуємо графік (рис. 1.2).

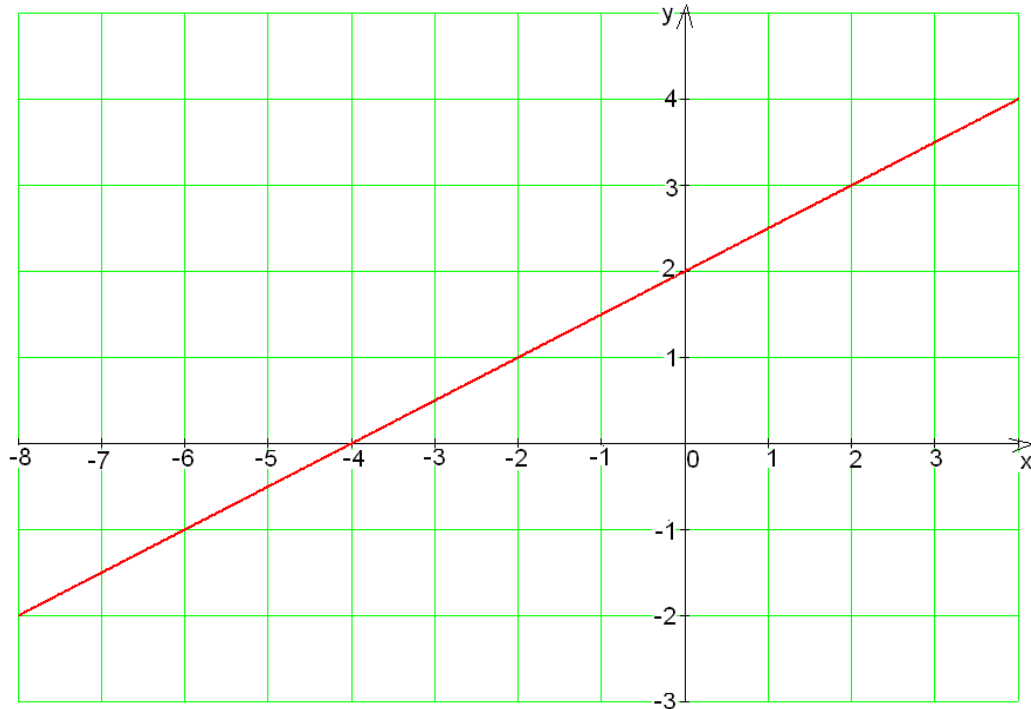


Рисунок 1.2 - Графік функції  $\frac{y}{2} - \frac{x}{4} = 1$

Рівняння  $y = ax^2 + bx + c$  визначає параболу. Вершина параболу має координати

$$x = \frac{-b}{2a}; \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a}. \quad (1.1)$$

Якщо  $a > 0$ , то гілки параболу мають напрям вгору, якщо  $a < 0$ , то донизу. Якщо рівняння має вигляд  $x = ay^2 + by + c$ , то парабола, яку воно визначає, має напрям гілок вправо – вліво. При цьому формули для обчислення координат вершини параболу записуються аналогічно попереднім.

$$y = \frac{-b}{2a}; \quad x = \frac{4ac - b^2}{4a}. \quad (1.2)$$

**Приклад 1.3** Побудувати графік  $y^2 + 2y + x = 2$  Запишемо цю формулу у вигляді  $x = -y^2 - 2y + 2$ . Це парабола, напрям гілок – вліво, координати вершини:

$$y = \frac{-b}{2a} = -1; \quad x = \frac{4ac - b^2}{4a} = 3.$$

Побудуємо графік (рис. 1.3).

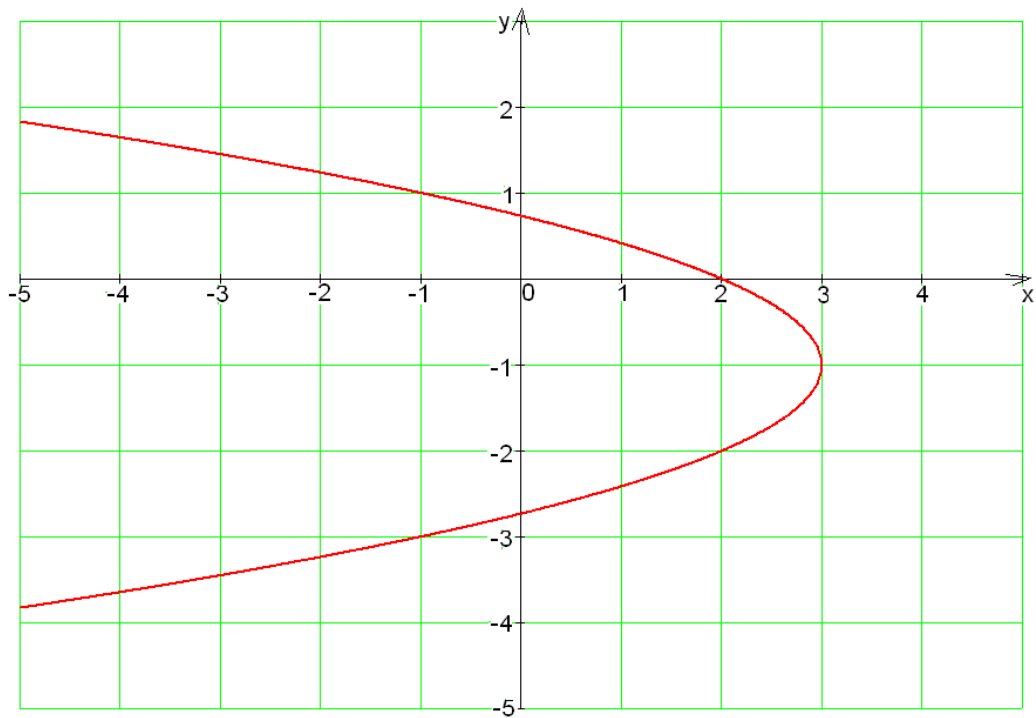


Рисунок 1.3- Графік функції  $x = -y^2 - 2y + 2$

Найпростіше рівняння еліпсу має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.3)$$

де  $a, b$  - напіввісі еліпсу.

Центром такого еліпсу є початок координат. Рівняння

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1 \quad (1.4)$$

визначає еліпс, зміщений відносно початку координат паралельним переміщенням центра у точку  $(c, d)$ .

**Приклад 1.4** Побудувати графік  $16(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 64$ .

Приведемо формулу до канонічного вигляду (1.4), для чого поділимо обидві частини виразу на 64:

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1$$

Побудуємо графік (рис. 1.4).

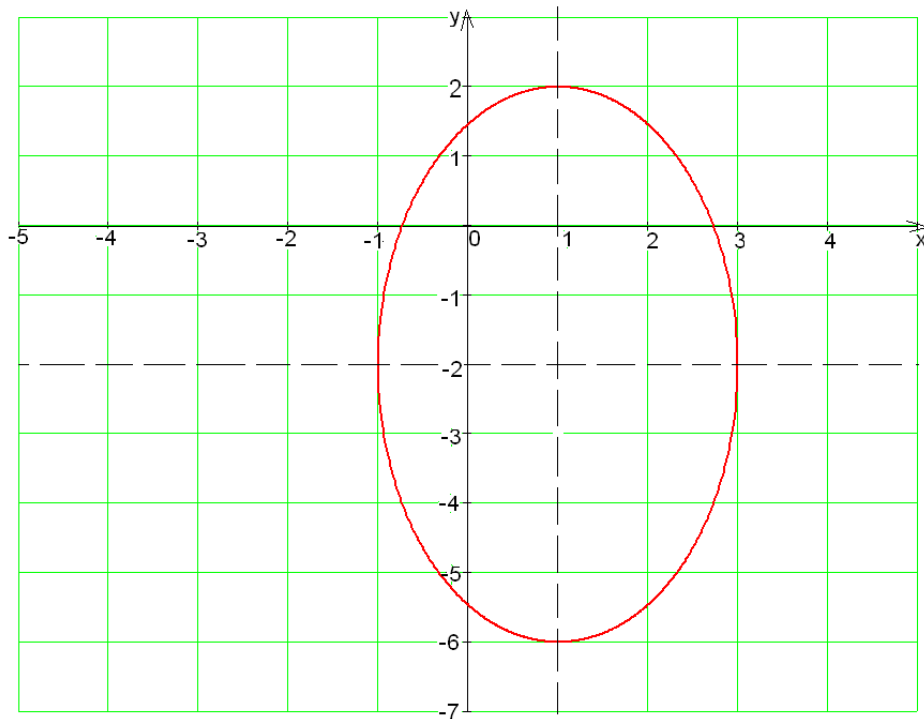


Рисунок 1.4- Графік функції  $16(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 64$ .

### 1.1.2 Пряма лінія на площині

Якщо задані точки  $A(x_1, y_1)$  і  $B(x_2, y_2)$ , то:

- вектор  $\overline{AB}$  має координати:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1). \quad (1.5)$$

- координати середини відрізка  $AB$  визначаються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (1.6)$$

- рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (1.7)$$

- рівняння прямої, яка походить через точку  $A(x_1, y_1)$  паралельно вектору  $\vec{l} = (m; n)$ :

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} \quad (1.8)$$

- рівняння прямої, яка походить через точку  $A(x_1, y_1)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (A; B)$ :



$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \quad (1.9)$$

**Приклад 1.5** Дані координати точок А,В,С. Знайти рівняння прямої, що проходить через А паралельно ВС.

А(-4;-2), В(-1;2), С(2;1).

Запишемо вектор ВС за формулою (1.5):

$$\overline{BC} = (2 - (-1); 1 - 2) = (3; -1).$$

Запишемо рівняння прямої за формулою (1.8):

$$\frac{x + 4}{3} = \frac{y + 2}{-1}$$

Або у нормальному вигляді  $x + 3y + 10 = 0$

**Приклад 1.6** Дані координати точок А,В,С. Знайти рівняння прямої, що проходить через А перпендикулярно ВС.

А(-4;-2), В(-1;2), С(2;1).

Запишемо вектор ВС за формулою (1.5):

$$\overline{BC} = (2 - (-1); 1 - 2) = (3; -1).$$

Запишемо рівняння прямої за формулою (1.9):

$$3(x + 4) - 1(y + 2) = 0.$$

Або після спрощень  $3x - y + 10 = 0$ .

**Приклад 1.7** Дані координати точок А,В,С. Знайти рівняння медіани АМ трикутника АВС.

А(-5;-1), В(0;3), С(-2;5).

Як відомо, медіана ділить протилежну сторону трикутника навпіл. Тому точка М буде серединою сторони ВС. Знайдемо її координати за формулою (1.6):

$$x = \frac{0-2}{2} = -1; \quad y = \frac{3+5}{2} = 4.$$

Запишемо рівняння прямої АМ за формулою (1.7):

$$\frac{x + 5}{-1 + 5} = \frac{y + 1}{4 + 1}$$

Після спрощень рівняння прийме вигляд  $5x - 4y + 21 = 0$

### **1.1.3 Спільне розташування прямої та площини**

- загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1.10)$$

- рівняння площини, яка проходить через точку  $M(x_0; y_0; z_0)$  і перпендикулярно до нормального вектора  $\vec{n} = \{A, B, C\}$  :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1.11)$$

- канонічне рівняння прямої у просторі:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}, \quad (1.12)$$

де  $M(x_0; y_0; z_0)$  - точка на прямій,

$\vec{S} = \{p; q; r\}$  - напрямний вектор прямої .

- параметричне рівняння прямої  $L$  в просторі:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases}, \quad (1.13)$$

де  $M(x_0; y_0; z_0)$  - точка на прямій,  $\vec{S} = \{p; q; r\}$  - напрямний вектор прямої,  $\lambda$  - параметр,  $-\infty < \lambda < \infty$  .

**Приклад 1.8.** Знайти точку перетину прямої та площини.

$$\frac{x}{1} = \frac{y + 3}{1} = \frac{z - 5}{-2}, \quad 2x + y - 4z + 1 = 0.$$

Запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді за зразком формули 1.13:

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = -3 + \lambda, \\ z = 5 - 2\lambda. \end{cases} \quad (11.14)$$

Підставимо ці функції з формули (11.14) у рівняння площини:

$$2\lambda + \lambda - 3 + 8\lambda - 20 + 1 = 0;$$

$$11\lambda = 22;$$

$$\lambda = 2.$$

Повернемось до формули (11.14), підставимо у неї знайдене значення  $\lambda$ :

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -3 + 2 = -1, \\ z = 5 - 2 \cdot 2 = 1. \end{cases}$$

Координати точки перетину прямої та площини:  $x=2$ ,  $y=-1$ ,  $z=1$ .  
Відповідь: т.М(2;-1;1).

## 1.2 Елементи лінійної алгебри та теорії матриць

**Приклад 1.9.** Знайти суму матриць

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \text{ та } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Приклад 1.10** Обчислити матрицю  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Запишемо добуток матриць:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 7 \cdot 1 & 3 \cdot (-3) + 7 \cdot 5 \\ 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 26 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Приклад 1.11** Знайти обернену матрицю та зробити перевірку

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Знайдемо визначник цієї матриці:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 8 = -16.$$

Визначник не дорівнює нулю, обернена матриця існує.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці:

$$A_{11} = -4; \quad A_{12} = 4; \quad A_{21} = 2; \quad A_{22} = 2.$$

Складемо матрицю алгебраїчних доповнень:

$$A_{\Delta} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Транспонуємо матрицю алгебраїчних доповнень:

$$A_{\Delta}^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Поділимо  $A_{\Delta}^T$  на визначник матриці. Це і буде обернена матриця.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{\Delta}^T = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Перевірка.  $A \cdot A^{-1} = E$ , тобто одиничній матриці.

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -8 - 8 & 4 - 4 \\ 16 - 16 & -8 - 8 \end{pmatrix} = E,$$

Задача розв'язана.

Розглянемо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \quad (1.15)$$

Розв'язком системи (3.1) назвемо таку пару чисел  $(x, y)$ , що перетворює кожне з рівнянь (1.15) у тотожність.

Розв'яжемо систему за методом Крамера.

Впровадимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (1.16)$$

а також допоміжні визначники:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

Якщо визначник системи  $\Delta \neq 0$ , то отримаємо єдиний розв'язок системи (1.15)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (1.18)$$

Якщо визначник системи  $\Delta = 0$ , то система або несумісна, якщо хоча б один з визначників  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  не дорівнює нулю, або має нескінченно багато розв'язків, якщо усі три визначника  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  дорівнюють нулю.

**Приклад 1.12** Розв'язати систему за методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x + 5y = -8, \\ x + 3y = -5. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1 \neq 0.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -2.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Розв'яжемо систему за матричним методом. Позначимо:  
Матриця системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Матриця невідомих:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Матриця правих частин:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Якщо визначник системи не дорівнює нулю, то матриця системи  $A$  має обернену матрицю  $A^{-1}$ . Знайти обернену матрицю можна за **прикладом 1.11**. Якщо відома обернена матриця  $A^{-1}$ , то матрицю невідомих шукають за формулою:

$$X = A^{-1}B. \quad (1.22)$$

**Приклад 1.13** Розв'язати систему за матричним методом.

$$\begin{cases} 2x + 5y = -8, \\ x + 3y = -5. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1 \neq 0.$$

Обернена матриця існує. Знайдемо її. За прикладом 1.11 побудуємо матрицю алгебраїчних доповнень, транспонуємо її і поділимо на визначник матриці  $A$ .

Запишемо матрицю системи, матрицю невідомих і матрицю правих частин:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці:

$$A_{11} = 3; \quad A_{12} = -1; \quad A_{21} = -5; \quad A_{22} = 2.$$

Складемо матрицю алгебраїчних доповнень:

$$A_{\text{д}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю алгебраїчних доповнень:

$$A_{\Delta}^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Поділимо  $A_{\Delta}^T$  на визначник матриці. Це і буде обернена матриця.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{\Delta}^T = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

За формулою (1.22):

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-8) - 5 \cdot (-5) \\ -1 \cdot (-8) + 2 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка. Підставимо отриманий результат  $x=1$ ,  $y=-2$  у рівняння системи:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 5(-2) = -8, \\ 1 + 3(-2) = -5. \end{cases}$$

Задача розв'язана.

### 1.3 Границі

Перша стандартна границя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1.23)$$

Друга стандартна границя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e. \quad (1.24)$$

**Перше правило** обчислення границь:

- підставити у вираз граничне значення  $x$ . Якщо отримане скінченне число, границя знайдена.

**Друге правило** обчислення границь:

У виразі під знаком границі можна виконувати будь-які спрощення, що не суперечать правилам алгебри

**Третє правило** обчислення границь:

У виразі під знаком границі замість будь-якої функції можна підставляти еквівалентну їй іншу функцію.

Наведемо основні еквівалентності, які є наслідками першої та другої стандартних границь:

1  $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$  – власне перша стандартна границя, та її наслідки:

2  $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$  ;

3  $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$  ;

4  $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$  ;

наслідки другої стандартної границі:

5  $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$  ;

6  $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$  ;

7  $(1 + \alpha(x))^n - 1 \sim \alpha(x)n$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$  ;

8  $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ ,  $\alpha(x) \rightarrow 0$ .

при  $x \rightarrow \infty$ :  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_n \sim a_0 x^n$ .

**Приклад 1.14** Знайти границю:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 2x}{\operatorname{arctg}(4x - 8)}$$

Розв'язання.

Скористаємось еквівалентністю 4 :

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg}(4x - 8) \sim 4x - 8, \quad x \rightarrow 2 \\ 4x - 8 = -2 \cdot (4 - 2x), \quad x \rightarrow 2 \end{array} \right|.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 2x}{\operatorname{arctg}(4x - 8)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 2x}{-2(4 - 2x)} = -\frac{1}{2}.$$

**Приклад 1.15** Знайти границю:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 - e^{-7x}}$$

Розв'язання.

Скористаємось еквівалентністю 5 :



$$\left| e^{-7x} - 1 \sim -7x, x \rightarrow 0 \right|.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 - e^{-7x}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{7x} = \frac{2}{7}.$$

**Приклад 1.16** Знайти границю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{x} \right)^{\beta x}.$$

Розв'язання. Скористаємось другою стандартною границею:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{x} \right)^{\beta x} = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{\alpha}{x} \right)^{\frac{x}{\alpha}} \right)^{\beta} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{x} \right)^{\frac{x}{\alpha}} \right)^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}.$$

Розглянемо границю функції:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

у випадку, коли  $x \rightarrow \infty$ . У цьому випадку для пошуку границі використовують третю властивість нескінченно великих функцій. У загальному випадку її можна записати у вигляді:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } n = m. \\ 0, & \text{якщо } n < m \end{cases}$$

**Приклад 1.17** Знайти границю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{4x^5 + x^2 - x - 1}.$$

Розв'язання.

Використаємо наведену узагальнену формулу  $n = m = 5$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{4x^5 + x^2 - x - 1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \frac{3}{4}.$$

Пряма  $x = a$  називається вертикальною асимптотою кривої  $y = f(x)$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm \infty$ .

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді:

$$y = kx + b$$

$$\text{де } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ та } b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

Якщо хоча б однієї з границь не існує або є нескінченною величиною, то крива похилої асимптоти не має.

**Приклад 1.18** Знайти асимптоти кривої:

$$y = \frac{2x - 9}{x + 3}.$$

1) Знаходимо вертикальні асимптоти.

Знайдемо точку розриву.

$$x + 3 = 0, \quad x = -3.$$

Дослідимо поведінку функції в околі цієї точки:

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{2x-9}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{-15}{0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{2x-9}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{-15}{-0} = \infty$$

Маємо вертикальну асимптоту  $x = -3$ .

2) Знаходимо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x-9}{x(x+3)} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (y - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left( \frac{2x-9}{x+3} - 0 \cdot x \right) = 2$$

Маємо похилу асимптоту, яка насправді є горизонтальною  $y = 2$ .

Побудуємо графік (рис.1.5).

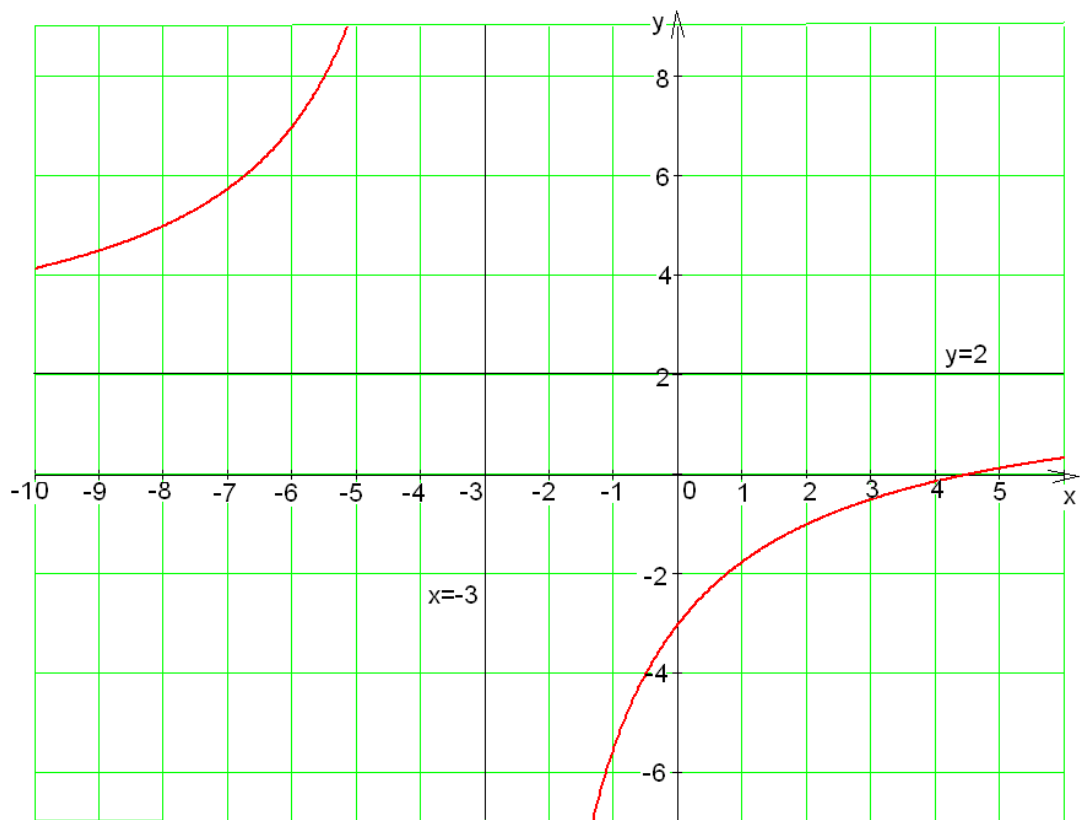


Рисунок 1.5 - Функція  $y = (2x - 9)/(x - 3)$  та її асимптоти  $x = -3$  та  $y = 2$ .

#### 1.4 Похідна та її застосування

Таблиця похідних

1	$y = x^{\alpha};$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}.$
2	$y = a^x;$	$y' = a^x \cdot \ln a.$
3	$y = e^x;$	$y' = e^x;$
4	$y = \log_a x;$	$y' = \frac{1}{x \ln a}.$
5	$y = \ln x;$	$y' = \frac{1}{x}.$
6.	$y = \sin x;$	$y' = \cos x.$
7	$y = \cos x;$	$y' = -\sin x.$

$$\begin{array}{ll}
8 & y = \operatorname{tg} x; \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \\
9 & y = \operatorname{ctg} x; \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \\
10 & y = \arcsin x; \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \\
11 & y = \arccos x; \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \\
12 & y = \operatorname{arctg} x; \quad y' = \frac{1}{1+x^2}. \\
13 & y = \operatorname{arcctg} x; \quad y' = \frac{-1}{1+x^2}.
\end{array}$$

Основні правила обчислення похідної

$$\begin{array}{l}
1 \quad (U(x) \pm V(x))' = U'(x) \pm V'(x). \\
2 \quad (U(x) \cdot V(x))' = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x). \\
3 \quad \left( \frac{U(x)}{V(x)} \right)' = \frac{U'(x) \cdot V(x) - U(x) \cdot V'(x)}{V^2(x)}. \\
4 \quad f'_x(U(x)) = f'_U \cdot U'_x(x).
\end{array}$$

**Приклад 1.19** Знайти похідну функції:

$$y = (5 - 6x)\cos 3x.$$

За формулою 2:

$$y' = (5 - 6x)' \cos 3x + (5 - 6x)(\cos 3x)' = -6 \cos 3x - 3(5 - 6x) \sin 3x.$$

**Приклад 1.20** Знайти похідну функції:

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

За формулою 3

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \right)' = \frac{(\arcsin x)' \sqrt{1-x^2} - \arcsin x (\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} - \arcsin x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}. \end{aligned}$$

**Приклад 1.21** Обчислити похідну функції у заданій точці:

$$y = 3x^5 + \frac{8}{x^2} \quad x_0 = -2.$$

$$y' = 3 \cdot 5 \cdot x^4 + 8 \cdot (-2)x^{-3} = 15x^4 - \frac{16}{x^3}.$$

При  $x_0 = -2$ :

$$y'(-2) = 15(-2)^4 - \frac{16}{(-2)^3} = 240 + 2 = 242.$$

**Приклад 1.22** Розв'язати рівняння  $y'=0$  для функції

$$y = 8 + 4x^3 - 39x^2 - 90x.$$

Знайдемо похідну і прирівняємо до нуля.

$$y' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 - 39 \cdot 2 \cdot x - 90.$$

$$12x^2 - 78x - 90 = 6(2x^2 - 13x - 15) = 0.$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 15/2.$$

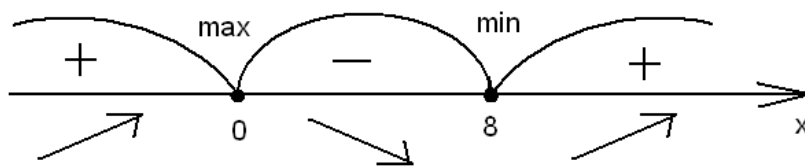
**Приклад 1.23** Знайти екстремуми функції  $y = 10 - 12x^2 + x^3$ .

Знайдемо похідну і прирівняємо до нуля

$$y' = -24x + 3x^2 = 0.$$

$$3x(-8 + x) = 0. \quad x = 0, \quad x = 8.$$

Проілюструємо отриманий результат на схемі:



Знайдемо значення функції у точках екстремумів

$$y_{min} = y(8) = -246; \quad y_{max} = y(0) = 10$$

**Приклад 1.24** Знайти рівняння дотичної до лінії

$$y = -1 - 4x^2 - 3x^3 \text{ у точці } x_0 = -1.$$

Запишемо рівняння дотичної у загальному вигляді:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0).$$

Знайдемо :

- Значення функції у точці :

$$y(x_0) = -1 - 4(-1)^2 - 3(-1)^3 = -2.$$

- Похідну функції:

$$y' = -8x - 9x^2.$$

- Значення похідної функції у точці  $x_0 = -1$ :

$$y'(x_0) = -8(-1) - 9(-1)^2 = -1.$$

Запишемо рівняння дотичної з урахуванням отриманих числових значень:

$$y + 2 = -1(x + 1).$$

Або після спрощень:  $x + y + 3 = 0$ .

## 1.5 Функції багатьох змінних

Обчислення частинних похідних функції багатьох змінних виконується за тими ж правилами, за якими обчислюються похідні функції однієї змінної. При цьому, при обчисленні частинної похідної треба вважати сталими величинами (константами) усі змінні, крім тієї, по якій обчислюється частинна похідна.

**Приклад 1.25** Знайти частинні похідні функції

$$z = -9x^2y^3 - 4x^4 + 2y^3.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -18xy^2 - 16x^3.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -27x^2y^2 + 6y^2$$

**Приклад 1.26** Знайти частинні похідні функції  $z = (4y^4 - 5)e^{3yx}$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3y(4y^4 - 5)e^{-3yx}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 16y^3e^{-3yx} - 3x(4y^4 - 5)e^{-3yx}.$$

**Приклад 1.27** Знайти частинні похідні функції  $z = \frac{7x^2}{y^5}$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{14x}{y^5}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{7x^2(-5e^4)}{y^{10}} = -\frac{35x^2}{y^6}$$

**Приклад 1.28** Знайти стаціонарні точки функції

$$z = 3x^2 - xy + y^2 + 8x + 6y.$$

Цю задачу можна сформулювати по-іншому:

**Приклад 1.29** Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases}$  для функції  
 $z = 3x^2 - xy + y^2 + 8x + 6y.$

Розв'язання задач 1.27 та 1.28:

Знайдемо частинні похідні:

$$\begin{aligned} z'_x &= 6x - y + 8, \\ z'_y &= -x + 2y + 6. \end{aligned}$$

Прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 6x - y = -8 \\ -x + 2y = -6 \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему двох рівнянь з двома невідомими (див приклади 1.12, 1.13).

Відповідь:  $x = -2, y = -4.$

## 1.6 Невизначені та визначені інтеграли

*Таблиця невизначених інтегралів*

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$7. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$9. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$10. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$$



$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad 16. \int \frac{\varphi'(x) dx}{\varphi(x)} = \ln |\varphi(x)| + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$18. \int \frac{\varphi'(x) dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = 2\sqrt{\varphi(x)} + C.$$

Правила інтегрування.

$$1 \text{ Якщо } a = \text{const, тоді } \int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$

$$2 \int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

$$3 \text{ Якщо } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ тоді:}$$

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

**Приклад 1.30** Знайти інтеграл  $\int \frac{dx}{1 + (5 - 2x)^2}.$

Скористаємось формулою 11 та властивістю 3:

$$\int \frac{dx}{1 + (5 - 2x)^2} = -\frac{1}{2} \arctg(5 - 2x) + C.$$

**Приклад 1.31** Знайти інтеграл  $\int \left(5 - 10 \sin \frac{11}{6} x\right) dx.$

Скористаємось формулою 3 та властивостями 1,2,3:

$$\int \left(5 - 10 \sin \frac{11}{6} x\right) dx = 5x + 10 \cdot \frac{6}{11} \cos \frac{11}{6} x + C.$$

**Приклад 1.32** Знайти інтеграл  $\int (5 - 2x)^5 dx.$

Скористаємось формулою 1 та властивістю 3.

$$\int (5 - 2x)^5 dx = -\frac{1}{2} \frac{(5 - 2x)^6}{6} + C$$

**Приклад 1.33** Обчислити інтеграл  $\int_{-4}^{-2} \frac{10 dx}{x^3}.$

$$\int_{-4}^{-2} \frac{10dx}{x^5} = 10 \int_{-4}^{-2} x^{-5} dx = 10 \frac{x^{-5+1}}{-5+1} \Big|_{-4}^{-2} = 10 \cdot \left( \frac{-1}{8} - \left( \frac{-1}{32} \right) \right) = \frac{-15}{16}$$

**Приклад 1.34** Знайти площу фігури  $y = 5 - x$ ;  $y = 0$ ;  $x = 3$ ;  $x = 4$ .

Побудуємо цю фігуру у системі координат (рис. 1.6):

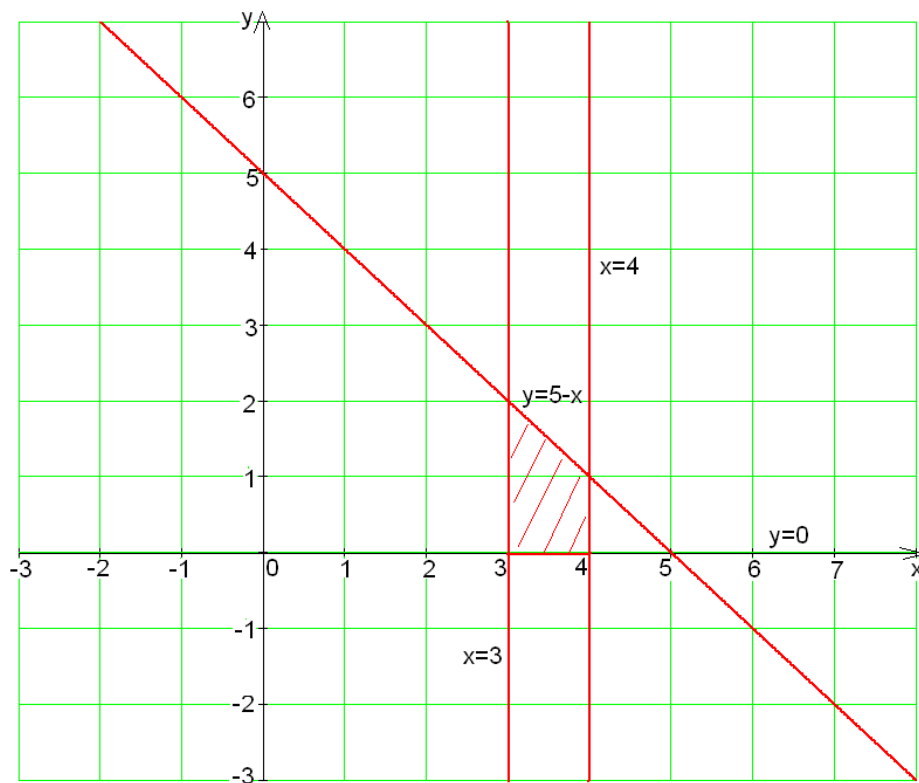


Рисунок.1.6 – Графік області інтегрування.

Знайдемо межі інтегрування  $x = 3$ ;  $x = 4$ .

Запишемо визначений інтеграл:

$$S = \int_3^4 (5 - x) dx = \left( 5x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_3^4 = \left( 5 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} \right) - \left( 5 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} \right) = \frac{3}{2} \text{ (кв. од.)}$$

**Приклад 1.35** Обчислити середнє значення функції на інтервалі  $[0; 2]$

$$y = -3x^2 + 5x + 5x^3.$$

$$y_c = \frac{1}{2-0} \int_0^2 (-3x^2 + 5x + 5x^3) dx = \frac{1}{2} \left( -3 \frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^2}{2} + 5 \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 11$$

## 1.7 Диференціальні рівняння

Розглянемо диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо воно може бути представлено у вигляді:

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

Кожну частину цього рівняння інтегрують окремо. Так отримують загальний розв'язок рівняння. Термін «розв'язати задачу Коші» означає: за початковою умовою знайти константу інтегрування. Константу інтегрування знаходять підстановкою початкової умови у загальний розв'язок рівняння.

**Приклад 1.36** Розв'язати задачу Коші:  $y' = 1 - 6x$ ,  $y(2) = 0$ .

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 6x; \quad dy = (1 - 6x)dx.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int dy = \int (1 - 6x)dx;$$

$$y = x - 3x^2 + C.$$

Отримали загальний розв'язок. Підставимо початкові умови  $x = 2; y = 0$ .

$$0 = 2 - 3 \cdot 2^2 + C = -10 + C; \quad C = 10.$$

Частинний розв'язок (розв'язок задачі Коші):

$$y = x - 3x^2 + 10.$$

**Приклад 1.37** Розв'язати задачу Коші:  $(3x - 2)y' = (6y - 11)$   $y(0) = 2$ .

Це рівняння з відокремлюваними змінними.  $(3x - 2)dy = (6y - 11)dx$

$$\frac{dy}{(6y - 11)} = \frac{dx}{(3x - 2)}$$

Проінтегруємо  $\int \frac{dy}{(6y - 11)} = \int \frac{dx}{(3x - 2)}$ , отримаємо:

$$\frac{1}{6} \ln(6y - 11) = \frac{1}{3} \ln(3x - 2) + \ln C$$

Скористаємось відомими властивостями логарифмів

$$\sqrt[6]{(6y - 11)} = \tilde{N} \sqrt[3]{(3x - 2)}$$

піднесемо у шостий степінь. Позначимо  $C^6 = C^*$

$$6y - 11 = C^* (3x - 2)^2.$$

Підставимо початкові умови  $x = 0, y = 2$ .  $1 = 4\tilde{N}^*$ ,  $\tilde{N}^* = \frac{1}{4}$ .

Остаточно отримаємо розв'язок задачі Коші:  $y = \frac{1}{24}(3x - 2)^2 + \frac{11}{6}$ .

Розглянемо однорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо рівняння:

$$y'' + p y' + q y = 0.$$

Якщо функції  $y_1(x)$  та  $y_2(x)$  є лінійно незалежними розв'язками даного рівняння, то його загальний розв'язок має такий вигляд:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де  $C_1, C_2$  – довільні константи.

Будемо шукати розв'язок рівняння у вигляді  $y = e^{\lambda x}$ . Після знаходження похідних і підстановки їх у рівняння отримаємо алгебраїчне рівняння, яке називають характеристичним рівнянням відповідного диференціального:

$$\lambda^2 + p \lambda + q = 0.$$

Числа  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  називають характеристичними числами.

Випадок 1.  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – дійсні різні числа. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

**Приклад 1.38** Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Характеристичне рівняння:  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ .

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = 1 \pm 2.$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1.$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Випадок 2.  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$$

**Приклад 1.39** Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 12y' + 36y = 0.$$

Характеристичне рівняння:  $\lambda^2 + 12\lambda + 36 = 0$ . або  $(\lambda + 6)^2 = 0$ .  
 $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = -6$ .

$$y = C_1 e^{-6x} + C_2 x e^{-6x}.$$

**Приклад 1.40** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' + 10y' + 25y = 6.$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння. Його розв'язок  $y_{zn}$  складається з суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння  $y_{zo}$  та частинного розв'язку неоднорідного  $y_{чн}$ .

$$y_{zn} = y_{zo} + y_{чн}.$$

а) Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння  $y_{zo}$ :  $y'' + 10y' + 25y = 0$ .

Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ . Корені характеристичного рівняння  $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -5$ . Тоді

$$y_{zo} = (C_1 + C_2 x)e^{-5x}.$$

б) Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного  $y_{чн}$  у вигляді, який відповідає правій частині неоднорідного рівняння.

$$y_{чн} = A, \quad \text{тоді} \quad y' = y'' = 0. \quad \text{Тут } A - \text{невідомо константа.}$$

Знайдемо її, підставивши ці значення у рівняння.

$$25A = 6, \quad A = \frac{6}{25}.$$

$$\text{Остаточно отримаємо } y_{зн} = y_{zo} + y_{чн} = y_{zo} = (C_1 + C_2 x)e^{-5x} + \frac{6}{25}$$

## 1.8 Кратні інтеграли. Теорія поля.

**Приклад 1.41** Знайти площу фігури за допомогою подвійного інтеграла, зобразити фігуру у системі координат.

$$D: \quad \begin{array}{ll} -x-2y-9=0; & x=-3, \\ x-y+2=0; & x=-1. \end{array}$$

Побудуємо графік (рис. 1.7).

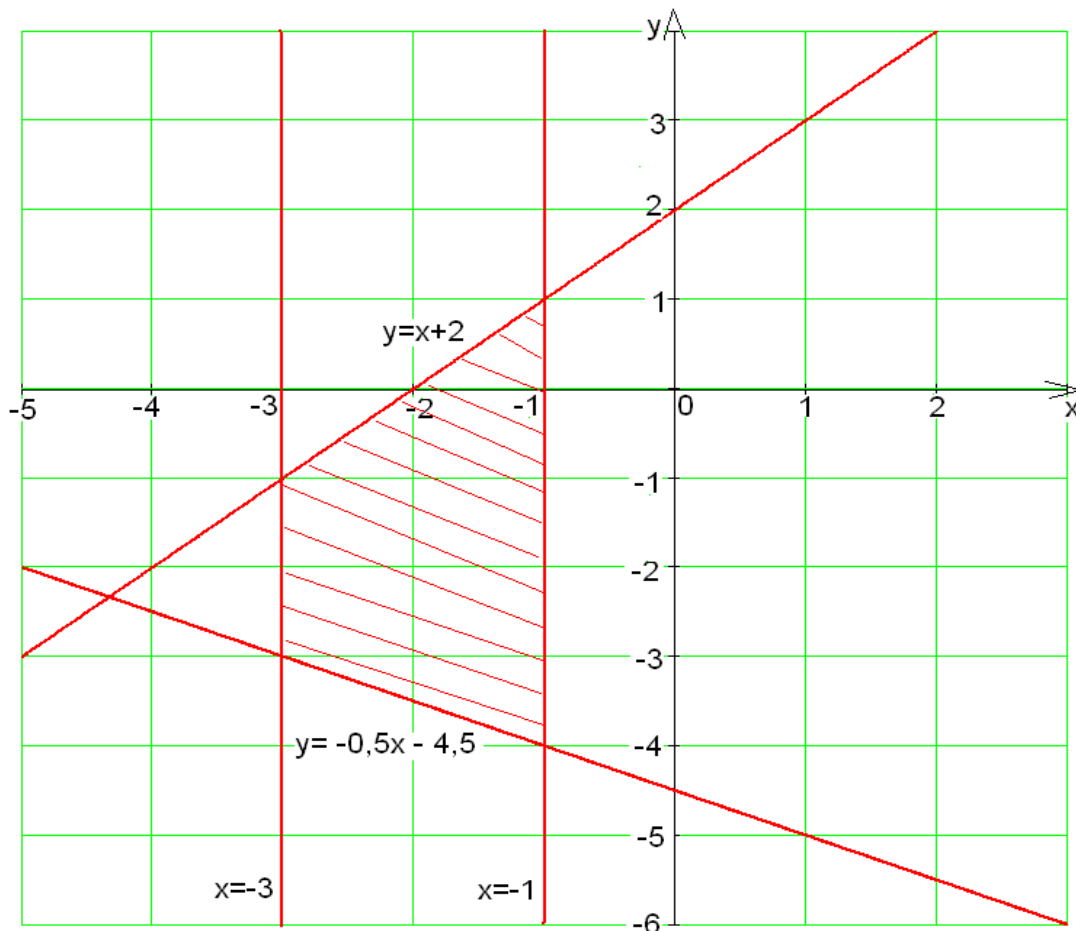


Рисунок 1.7 – Графік області інтегрування

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-3}^{-1} dx \int_{\frac{-x-9}{2}}^{x+2} dy = \int_{-3}^{-1} (x+2 + \frac{x}{2} + \frac{9}{2}) dx =$$

$$= \left( \frac{3}{4} x^2 + \frac{13}{2} x \right) \Big|_{-3}^{-1} = 7 \text{ (кв. од.)}$$

**Приклад 1.42** Обчислити  $\iint_D (2y+3)ds$ ,  $D: 0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 1$ .

$$\iint_D (2y+3)ds = \int_{-1}^1 dy \int_0^2 (2y+3)dx = \int_{-1}^1 (2yx+3x) \Big|_{x=0}^{x=2} dy = \int_{-1}^1 (4y+6)dy = (2y^2+6y) \Big|_{-1}^1 = 12$$

**Приклад 1.43** Обчислити роботу векторного поля

$$X = 3x + 5y, Y = 2x - 2y \text{ на шляху } L: y = x - 3, x_{\text{ліній}} = -1, \tilde{o}_{\text{ліній}} = 0.$$

З рівняння лінії можна бачити, що  $dy = dx$ . Тоді підставимо рівняння лінії  $y = x - 3$  у вирази для  $X(x,y)$  та  $Y(x,y)$  і замість криволінійного інтегралу запишемо визначений інтеграл:

$$\int_L Xdx + Ydy = \int_{-1}^0 (3\tilde{o} + 5(\tilde{o} - 3))dx + (2x - 2(x - 3))dx = \int_{-1}^0 (8x - 9)dx = -13$$

**Приклад 1.44** Знайти градієнт скалярного поля  $U = \frac{9x^3}{y} + 2y^5 + \frac{3}{x^3}$ .

Відомо, що  $\overline{grad} U = (U'_x, U'_y)$ . Знайдемо відповідні частинні похідні (див. приклади 1.25-1.27).

$$U'_x = \frac{27x^2}{y} - \frac{9}{x^4}; \quad U'_y = \frac{-9x^3}{y^2} + 10y^4.$$

$$\text{Тоді } \overline{grad} U = \left( \frac{27x^2}{y} - \frac{9}{x^4}; \quad \frac{-9x^3}{y^2} + 10y^4 \right).$$

## 1.9 Ряди

**Приклад 1.45** Знайти знаменник геометричної прогресії «q». Обчислити суму ряду, якщо він збігається.

$$5 - \frac{15}{4} + \frac{45}{16} - \frac{135}{64} + \dots$$

Це геометрична прогресія. Знайдемо її знаменник:

$q = \frac{a_1}{a_0} = \frac{-15/4}{5} = -\frac{3}{4}$ . Враховуючи, що  $|q| = \frac{3}{4} < 1$ , ряд збіжний. Тоді його сума дорівнює:

$$S = \frac{a_0}{1-q} = \frac{5}{1+\frac{3}{4}} = \frac{20}{7}.$$

**Приклад 1.46** Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4 - 16n^3 - 5n}{4n^5 - 9n^3 + 4n^2}$$

Необхідна ознака збіжності ряду має такий вигляд:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , де  $a_n$  - загальний член ряду. Перевіримо її виконання для досліджуваного ряду.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 16n^3 - 5n}{4n^5 - 9n^3 + 4n^2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4}{4n^5} = 0$$

Висновок: досліджуваний ряд є збіжним.

**Приклад 1.47** Знайти суму ряду з точністю  $\varepsilon = 0,09$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}.$$

Цей ряд є рядом з чергуванням знаків. Сума таких рядів, якщо відкинути усі члени, починаючи з  $a_n$ , буде дорівнювати сумі усіх попередніх членів з точністю, яка не перевищує  $a_n$ .

$$S = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \dots$$

Легко бачити, що  $\frac{1}{14} \approx 0,07 < \varepsilon$ , тому усі наступні члени ряду можуть бути відкинуті, що забезпечить точність обчислень  $\varepsilon = 0,09$ .



$$S = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{11} = \frac{88 - 55 + 40}{440} = \frac{73}{440}.$$

## 2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Побудувати графік  $y^2 - 2y - x = 1$

2. Побудувати графік  $16(x+2)^2 + 9(y-3)^2 = 144$

3. Дані координати точок А,В,С. А(-2;4), В(-1;-2), С(5;4),

а) Знайти рівняння прямої, що проходить через А паралельно ВС.

Відповідь:  $y = x + 6$ .

б) Знайти рівняння прямої, що проходить через А перпендикулярно ВС.

Відповідь:  $y = -x + 2$ .

в) Знайти рівняння медіани АМ трикутника АВС.

Відповідь:  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ .

4. Знайти точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}; \quad x + y - 2z - 6 = 0.$$

Відповідь:  $x = 2, y = 2, z = -1$ .

5. Знайти обернену матрицю та зробити перевірку:  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ .

Відповідь:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$

6. Розв'язати систему рівнянь за матричним методом:  $\begin{cases} 2x + y = 5; \\ 4x + 5y = -7. \end{cases}$

Відповідь:  $x = \frac{16}{3}, y = \frac{-17}{3}$ .

7. Розв'язати систему рівнянь за методом Крамера: 
$$\begin{cases} -2x + y = -7; \\ 7x - 4y = 25. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = 3, y = -1$ .

8. Обчислити матрицю  $C = BA$ :  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \hat{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Відповідь:  $\hat{A}\hat{A} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ .

9. Знайти границю:  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sin(2x+8)}{5x+20}$ .

Відповідь:  $\frac{2}{5}$ .

10. Знайти границю:  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\operatorname{tg}(3x+12)}{6x+24}$ .

Відповідь:  $\frac{1}{2}$ .

11. Знайти границю:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg}(4x-4)}{3-3x}$ .

Відповідь:  $\frac{-4}{3}$ .

12. Знайти границю:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{e^{8x} - 1}$ .

Відповідь:  $\frac{7}{8}$ .

13. Знайти границю:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{5x}}{3x}$ .

Відповідь:  $\frac{-5}{3}$ .

14. Знайти границю:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{8x}\right)^{-5x}$ .

Відповідь:  $e^{\frac{5}{8}}$ .

15. Знайти асимптоти та накреслити графік функції  $y = \frac{2x-9}{x-3}$ .

Підказка: вертикальна асимптота  $x = 3$ ;  
горизонтальна асимптота  $y = 2$ .

16. Знайти похідну функції:  $y = \frac{2x-2}{7-3x}$ .

Відповідь:  $y' = \frac{8}{(7-3x)^2}$ .

17. Знайти похідну функції:  $y = \frac{x^3}{6-3x}$ .

Відповідь:  $y' = \frac{6x^2(3-x)}{(6-3x)^2}$ .

18. Знайти похідну функції:  $y = \frac{6x-9}{x^5}$ .

Відповідь:  $y' = \frac{45-24x}{x^6}$ .

19. Знайти похідну функції:  $y = x^2 \ln 7x$ .

Відповідь:  $y' = 2x \ln 7x + x$ .

20. Знайти похідну функції:  $y = (10x-11)\cos 3x$ .

Відповідь:  $y' = 10\cos 3x - 3(10x-11)\sin 3x$ .

21. Знайти похідну функції:  $y = (5-6x)e^{8x}$ .

Відповідь:  $y' = e^{8x}(34-48x)$ .

22. Знайти похідну функції:  $y = x\sqrt{6-5x}$ .

Відповідь:  $\sigma' = \frac{12-15\sigma}{2\sqrt{6-5\sigma}}$ .

23. Розв'язати рівняння  $y' = 0$  для функції  $y = 5 - 6x^2 - x^3 - 48x$ .

Відповідь: дійсних розв'язків немає.

24. Знайти рівняння дотичної  $y = 2 - 3x - 2x^2$ ,  $x_0 = -1$ .

Відповідь:  $y = x + 4$ .

25. Знайти екстремуми функції  $y = x^3 - 12x^2 + 8$ .

Відповідь:  $y_{\max} = y(0) = 8$ ;  $y_{\min} = y(8) = -248$ .

26. Обчислити похідну функції у заданій точці:  $y = 5x^6 + \frac{12}{x^3}$   $x_0 = -1$ .

Відповідь:  $y'(-1) = -66$ .

27. Знайти частинні похідні функції  $z = -6x^3y^2 + 4x^5 - 3y^3$ .

Відповідь:  $z'_x = -18x^2y^2 + 20x^4$ ,  $z'_y = -12x^3y - 9y^2$ .

28. Знайти частинні похідні функції  $z = (6y - 2)\sin(y^2x^3)$ .

Відповідь:  $z'_x = 3x^2y^2(6y - 2)\cos(y^2x^3)$ ,  $z'_y = 6\sin(y^2x^3) + 2(6y - 2)x^3y\cos(y^2x^3)$ .

29. Знайти частинні похідні функції  $z = x^3\ln(3y - 2x)$ .

Відповідь:  $z'_x = 3x^2\ln(3y - 2x) - \frac{2x^3}{3y - 2x}$ ,  $z'_y = \frac{3x^3}{3y - 2x}$ .

30. Знайти частинні похідні функції  $z = 3x\sqrt{3y - 2x}$ .

Відповідь:  $z'_x = 3\sqrt{3y - 2x} - \frac{3x}{\sqrt{3y - 2x}}$ ,  $z'_y = \frac{9x}{2\sqrt{3y - 2x}}$ .

31. Знайти стаціонарні точки функції  $z = -2xy - 2x + 3y^2 + 16y$ .

Відповідь:  $x = 5$ ;  $y = -1$ .

32. Знайти інтеграл:  $\int (10 - 7e^{-6x}) dx$ .

Відповідь:  $10x + \frac{7}{6}e^{-6x} + C$

33. Знайти інтеграл:  $\int \left(5 - 10\sin\frac{11}{6}x\right) dx$ .

Відповідь:  $5x + \frac{60}{11}\cos\frac{11}{6}x + C$

34. Знайти інтеграл:  $\int \left(7 - 14\sin\frac{8}{3}x\right) dx$ .

Відповідь:  $7x - \frac{21}{4}\sin\frac{8}{3}x + C$

35. Знайти інтеграл:  $\int \frac{dx}{7 - 4x}$ .

Відповідь:  $-\frac{1}{4}\ln|7 - 4x| + C$

36. Знайти площу фігури:  $y = 11 - 2x$ ;  $y = 0$ ;  $x = 3$ ;  $x = 4$ .

Відповідь: 4 кв. од.

37. Обчислити середнє значення фактору  $\Pi$  на інтервалі:

$$\Pi = 4 - 6t^2 + t^3, \quad t \in [0;3]$$

$$\text{Відповідь: } \Pi_{\text{сер}} = -\frac{29}{4}.$$

38. Розв'язати задачу Коші:  $y' = 6e^{-2x} - 5x$ ;  $y(0) = 4$ .

$$\text{Відповідь: } y = -3e^{-2x} - \frac{5x^2}{2} + 7.$$

39. Розв'язати задачу Коші:  $y' = 3 - 9\sin 3x$ ;  $y(0) = 2$ .

$$\text{Відповідь: } y = 3x + 3\cos 3x - 1.$$

40. Розв'язати диференціальне рівняння:  $y'' + 9y' + 14y = 0$ .

$$\text{Відповідь: } y = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{-2x}.$$

41. Розв'язати диференціальне рівняння:  $y'' - 16y = 0$ .

$$\text{Відповідь: } y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{4x}.$$

42. Розв'язати диференціальне рівняння:  $y'' + 5y' = 0$ .

$$\text{Відповідь: } y = C_1 e^{-5x} + C_2.$$

43. Розв'язати диференціальне рівняння:  $3y'' - 11y' + 6y = 0$ .

$$\text{Відповідь: } y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{\frac{2}{3}x}.$$

44. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - 3y' - 10y = 2.$$

$$\text{Відповідь: } y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{5}.$$

45. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - 4y' + y = -3x + 13.$$

$$\text{Відповідь: } y = -3x + 1.$$

46. Розв'язати задачу Коші:  $(3x+1)y' = (6y-5); \phi(0) = 1.$

$$\text{Відповідь: } y = \frac{1}{6}(3x+1)^2 + \frac{5}{6}.$$

47. Знайти площу фігури за допомогою подвійного інтеграла, зобразити фігуру в системі координат.

$$D: y - x + 3 = 0; \quad y - 2x + 7 = 0; \quad y = -3; \quad y = -1;$$

$$\text{Відповідь: } 3 \text{ кв.од.}$$

48. Обчислити  $\iint_D (3x+4)ds$ ,  $D: -3 \leq x \leq 0; \quad -1 \leq y \leq 2.$

$$\text{Відповідь: } -\frac{9}{2}.$$

49. Обчислити роботу векторного поля:

$$X = 2x + y, \quad Y = 2x + 2y, \quad L: y = 2x - 4, \quad x_{\text{нач}} = -2, \quad x_{\text{кон}} = -1.$$

$$\text{Відповідь: } -44.$$

50. Знайти градієнт скалярного поля:  $U = \frac{5\phi^5}{\phi^2} - 3\phi^5 - \frac{2}{\phi^2}.$

$$\text{Відповідь: } \overline{\text{grad}} U = \left( -\frac{10\phi^5}{\phi^3} - 15\phi^4; \quad \frac{25\phi^4}{\phi^2} + \frac{4}{\phi^3} \right).$$

51. Знайти знаменник геометричної прогресії «q». Обчислити суму ряду, якщо він збігається.

$$5 + \frac{15}{4} + \frac{45}{16} + \frac{135}{64} + \dots$$

$$\text{Відповідь: } q = \frac{3}{4}; \quad S = 20.$$

52. Знайти знаменник геометричної прогресії «q». Обчислити суму ряду, якщо він збігається.

$$5 - \frac{20}{3} + \frac{80}{9} - \frac{320}{27} + \dots$$

Відповідь:  $|q| = \frac{4}{3} > 1$ ; ряд розбіжний.

53. Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^4 - n^3 - 12n}{8n + 2n^4 + 9}.$$

Відповідь: не виконується.

54. Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^5 - 12n^3 - n^4}{8n + 2n^4 + 9}.$$

Відповідь: не виконується

55. Знайти суму ряду з точністю  $\varepsilon = 0,09$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n + 4}$ .

Відповідь:  $-\frac{1}{24}$

56. Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^5 + 2n^3 - 2n^4}{8n^6 + 2n^4 + 9}.$$

Відповідь: виконується

### З ВРАЗКИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Наведемо приклади тестових завдань для контролю знань за усім курсом вищої математики або за окремими модулями, або групами модулів. Нагадаємо, що засвоєння наведеного вище матеріалу і, відповідно, розв'язання наведених нижче тестів є мінімальною умовою отримання позитивної оцінки, тобто оцінки «задовільно», або 55 балів за стобальною шкалою.

#### 3.1 Тести за увесь курс вищої математики.

Вони містять у собі завдання з різних розділів усього курсу.

## Тест 1

Побудувати графік.  
*Построить график.*

$$16(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 64$$

Знайти похідну функції.  
*Найти производную функции.*

$$y = (3x - 11) \sin 7x$$

Знайти площу фігури за допомогою інтеграла, зобразити фігуру в системі координат. *Найти площадь фигуры с помощью интеграла, изобразить фигуру в системе координат.*

$$y = 6 - x, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 0$$

Розв'язати задачу Коші.  
*Решить задачу Коши.*

$$(2x - 6) y' = 4y - 3, \quad y(0) = 1.$$

Обчислити.  
*Вычислить.*

$$\iint_D (3y - 5) dS, \quad D: -3 \leq x \leq 0, \quad -3 \leq y \leq -1.$$

## Тест 2

1. Розв'язати систему за методом Крамера.  
*Решить систему методом Крамера.*

$$\begin{cases} x - 3y = -5, \\ 2x - 5y = -9. \end{cases}$$

2. Знайти стаціонарні точки функції.  
*Найти стационарные точки функции.*

$$z = 3x^2 + xy - 3y^2 + 11x - 8y.$$

3. Знайти інтеграл.  
*Найти интеграл.*

$$\int (2x - 6)^5 dx.$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння.  
*Решить дифференциальное уравнение.*

$$3y'' - 8y' + 4y = 0.$$

5. Знайти градієнт скалярного поля.  
*Найти градиент скалярного поля.*

$$U = \frac{5y^4}{x^2} - 2x^2 + \frac{3}{y^3}.$$



### 3.2 Тести з окремих модулів вищої математики

Тест з модулю «Границя та похідна».

1 Знайти границю <i>Найти предел</i>	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{5x}.$
2 Знайти похідну функції <i>Найти производную функции</i>	$y = (10x - 11)\cos 3x.$
3. Знайти границю <i>Найти предел</i>	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{4x^5 + x^2 - x - 1}$
4. Розв'язати рівняння $y' = 0$ для функції <i>Решить уравнение <math>y' = 0</math> для функции</i>	$y = -6x^2 + x^3 - 48x.$
5. Знайти рівняння дотичної <i>Найти уравнение касательной</i>	$y = 5 - 3x + 2x^2, \quad x_0 = -1.$

Тест з модулю «Інтегральне числення».

1. Обчислити середнє значення функції $y = 3 - 6x^2 + x^3$ на інтервалі $[0; 2]$ . <i>Вычислить среднее значение функции <math>y = 3 - 6x^2 + x^3</math> на интервале <math>[0; 2]</math>.</i>	
2. Обчислити інтеграл. <i>Вычислить интеграл.</i>	$\int_2^3 \frac{6dx}{x^2}.$
3. Знайти інтеграл. <i>Найти интеграл.</i>	$\int (2x - 5)^3 dx.$
4. Знайти площу фігури за допомогою інтеграла, зобразити фігуру в системі координат. <i>Найти площадь фигуры с помощью интеграла, изобразить фигуру в системе координат.</i>	$D: \begin{cases} x - 2y - 3 = 0, & x = -1, \\ x - y + 1 = 0, & x = 1. \end{cases}$
5. Знайти інтеграл. <i>Найти интеграл.</i>	$\int (7 - 14e^{-8x}) dx.$

Тест з модулю «Диференціальні рівняння».

1. Розв'язати задачу Коші  $(2x - 5)y' = 4y - 7, \quad y(0) = 2.$

*Решить задачу Коши*

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - 3y' = 4e^{2x} \dots$$

*Найти общее решение дифференциального уравнения*

3. Розв'язати задачу Коші

$$y' = -6 \cos 3x, \quad y(0) = 0 \dots$$

*Решить задачу Коши*

4. . Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 12y' + 36y = \dots$$

*Найти общее решение дифференциального уравнения*

### 3.3 Тести для оцінки знань після додаткових занять

Тест з повторного курсу для технічних спеціальностей (II триместр).

1. Обчислити середнє значення фактору П на інтервалі.

*Вычислить среднее значение функции на интервале.*

$$\ddot{I} = -t^3 + 3t^2 + 1 - 2t, \quad t \in [0;3]$$

2. Зобразити фігуру, обмежену графіками функцій у системі координат та знайти її площу за допомогою інтеграла.

*Изобразить фигуру, ограниченную графиками кривых в системе координат и найти её площадь с помощью интеграла.*

$$y = x^2 - 5x - 5, \quad x - y = 0.$$

3. Знайти інтеграл.

*Найти интеграл.*

$$\int \frac{2dx}{5-9x}.$$

4. Розв'язати диференціальне рівняння. Знайти задачу Коші.

*Решить дифференциальное уравнение. Найти задачу Коши.*

$$(4x - 3)y' = 9y - 1, \quad y(0) = 1.$$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

*Найти общее решение дифференциального уравнения.*

$$y'' + 10y' + 41y = 4.$$

Тест з повторного курсу для економічних спеціальностей (І триместр).

1. Знайти асимптоти та накреслити графік функції.  
*Найти асимптоты и начертить график функции.*

$$y = -\frac{x+4}{x+1}.$$

2. Розв'язати рівняння  $y' = 0$  для функції.  
*Решить уравнение  $y' = 0$  для функции.*

$$y = 1 - x^3 - 15x^2 - 72x.$$

3. Знайти обернену матрицю та зробити перевірку.  
*Найти обратную матрицу и сделать проверку.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

# **ДОДАТКОВІ ЗАНЯТТЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

**Посібник до аудиторної та самостійної роботи**  
для студентів усіх спеціальностей і усіх форм навчання

Укладачі: В.М. Астахов, доц.,  
Г.С. Буланов, доц.,  
В.О. Паламарчук, доц.  
. Н.С. Грудкіна, ас.

Редактор	Ініціали Прізвище
Комп'ютерна верстка	О. П. Ордіна

(Позиція за планом видань). Підп. до друку . Формат 60 x 84/16.  
Папір офсетний. Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк.  
Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник  
«Донбаська державна машинобудівна академія»  
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру  
серія ДК №1633 від 24.12.03.