

Робочий зошит запропоновано для студентів технічних ВНЗ як різновид навчального посібника, що може бути застосований викладачами під час лекційних і практичних занять для інтенсифікації навчальної діяльності. Достатній обсяг завдань до модуля **Елементи лінійної та векторної алгебри**, призначений для самостійної роботи студентів, допоможе засвоїти не лише навчальний предмет, а й майбутню професію.

Під час розгляду кожної теми надано пояснення про зв’язок основних понять із інженерною практикою. Для студентів, які намагаються самостійно оволодіти новим для себе поняттям, це робить його появу в навчальному курсі природнім та обумовленим логікою. Цей матеріал уможливить користування ним викладачами під час евристичної бесіди, мотивуючи необхідність вивчення теми.

Складання опорного конспекту до кожної теми може як попереджати, так і закріплювати її вивчення. Наявність у студентів робочих зошитів дає можливість лектору зосередитися на найбільш істотному матеріалі, опустити технічні деталі, залишити низку питань для самостійного опрацювання, а також вести діалог зі студентами.

Докладне опрацювання навчального матеріалу прочитаної лекції і його застосування припускає використання навчальних посібників, серед яких «Вища математика для майбутніх інженерів» [3].

Опорний конспект**Д1**є найбільш зручним засобом взаємодії студента з викладачем, бо студент під час роботи з пунктом ***Складаємо опорний конспект*** у правому стовпчику на місці пропусків у вигляді крапок заносить не лише відповіді, але і свої питання та відповіді на них викладача, будь-які його зауваження, додаткові пояснення, приклади тощо.

Перевірка готовності до практичного заняття виконується за допомогою тестових завдань******, до кожного з яких надано варіанти

відповідей.

Під час розв’язування завдань студентам надано інформаційну підтримку**Д1**. Самостійно працюючи з тестовим завданням пункту ***Перевіряємо готовність до практичного заняття***, студент має можливість звернутись до опорного конспекту. Крім того, викладач може застосувати ці завдання на початку заняття для проведення експрес-опитування й актуалізації теоретичних знань студентів.

Розв’язування типових задач теми****виконується покроково з наданням методичних рекомендацій та інформаційних підтримок до кожного з кроків. Це дає можливість обмежитися під час практичного заняття розглядом лише найбільш важливих прикладів, залишивши інші студентам на самостійне опанування.

Необхідні записи під час розв’язування задач пункту ***Учимося розв’язувати типові задачі*** виконуються студентом у зошиті так докладно, як це йому необхідно.

Для навчання математичному моделюванню студентам немає необхідності вести докладні записи: досить відзначити в робочому зошиті найбільш важливе, додаткову інформацію й покликання на джерела під час розбору професійно-орієнтованих завдань з пункту ***Учимося моделювати професійну діяльність інженера***, пов'язаних із майбутньою інженерною спеціальністю слухачів.

Кожен крок моделювання під час розв’язання професійно-орієнтованих завдань пояснюється. Після створення математичної моделі за допомогою рекомендацій та інформаційних підтримок студенту необхідно самостійно закінчити розв’язування завдання, застосовуючи знання та вміння, набуті після складання опорного конспекту, підготування до практичного заняття, розв’язування типових задач.

Самостійне розв’язування завдань студент має можливість розпочати з будь-якого рівня, поступово вдосконалюючи вміння під час практичного заняття чи домашньої роботи. Диференційований підбір завдань пункту ***Учимося самостійно розв’язувати завдання***допоможе викладачу розподілити його за рівнем складності між студентами різної підготовки. До завдань надано евристичні підказки .

У заключній частині вступної лекції чи практичного заняття викладачеві необхідно подати деякі рекомендації про те, яке програмне забезпечення повинні мати студенти на своїх комп'ютерах.

У процесі роботи з пунктом ***Учимося застосовувати CAS******(ППЗ)*** ***під час розв’язування (обчислення) … ***студенту необхідно скопіювати вміст компакт-диску (на форзаці посібника) на жорсткий диск свого комп’ютера та встановити всі педагогічні програмні засоби ***(ППЗ)*** та системи комп’ютерної алгебри ***(CAS)*** з метою отримання вмінь роботи з різними програмами, порівняння їх можливостей та обрання необхідних для використання в майбутній професійній діяльності.

Наприкінці модуля в пункті ***Готуємось до модульної контрольної роботи***  запропоновано орієнтовні завдання з різним рівнем складності, що виносяться на контрольну роботу. До кожного завдання запропоновано інформаційну підтримку.

У кінці робочого зошиту надано відповіді, до яких студент має можливість звернутись із метою перевірки правильності виконання кожного завдання модуля.

Доцільно рекомендувати студентам зберегти свій індивідуальний конспект, що вийшов із робочих зошитів з усіма нотатками, питаннями, відповідями й доповненнями, які робилися протягом усього модуля. У майбутньому робочий зошит може бути використаний не лише для підготовки до контрольних заходів, включаючи іспит, але й під час створення персональної бази знань і вмінь – особистого помічника – для подальшої навчальної й навіть професійної діяльності.



|  |  |
| --- | --- |
|  | **Як пов’язаний визначник з**  **інженерною практикою** |

***Номограмою*** називають креслення, що є особливим зображенням функціональної залежності. Номограми широко застосовують   
в інженерних розрахунках для однотипних обчислень. Основою для побудови номограми слугують функціональні шкали, що виражають залежність між функцією й аргументом. До їхнього числа відносяться номограми з вирівняними точками. Вони прості й легко читаються   
(рис. 1.1).

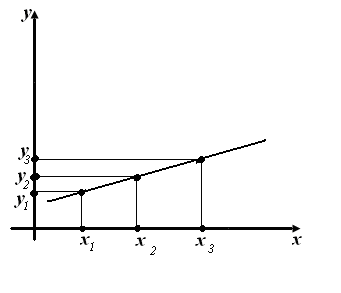


Рис. 1.1. Номограма з вирівняними точками

Номограми з вирівняними точками зображують рівняння типу:, де  — координати трьох точок, що лежать на одній прямій. У лівій частині рівняння ми бачимо вираз, що подано у вигляді ***визначника 3-го порядку***.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Д1** | **Складаємо опорний конспект** | | | | |
| ***Визначники 2-го, 3-го порядків*** | | | | | | |
| *Визначник (детермінант) другого порядку* обчислюється за формулою | | ***= …*** | | | | |
| Під час обчислення *визначника третього порядку*  перед добутками відповідних елементів ставляться знаки | |  | | | | |
| Символи  називають *елементами визначника*, причому | | перший індекс  вказує  на **…** , а другий індекс  – на **…** , на перетині яких стоїть цей елемент. | | | | |
| Якщо всі елементи  є числами, то результатом обчислення визначника є | | ***…*** | | | | |
| *Головну діагональ* визначника другого порядку  складають елементи | | **…** | | | | |
| *Головну діагональ* визначника третього порядку  складають елементи | | **…** | | | | |
| *Побічну діагональ* визначника другого порядку  складають елементи | | **…** | | | | |
| *Побічну діагональ* визначника третього порядку  складають елементи | | **…** | | | | |
| Визначник третього порядку можна обчислити за *правилом трикутника*, що подано у вигляді схеми | | Отже, за схемою обчислення визначника  =**…** | | | | |
| Під час обчислення визначника вигляду використовують формулу | | ***= …*** | | | | |
| ***Властивості визначників 2-го, 3-го порядків*** | | | | | | |
| 1. Якщо рядки визначника замінити стовпцями з тими ж номерами, то визначник не зміниться. | | | | | Отже, | |
| 2. Якщо переставити місцями два сусідні рядки (два стовпці) визначника, то його знак зміниться на протилежний. | | | | | Отже, | |
| 3. Якщо всі елементи рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює: | | | | |  | |
| 4. Визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює: | | | | |  | |
| 5. Спільний множник усіх елементів рядка (стовпця) можна винести як множник за значення визначника. | | | | | Отже, | |
| 6. Визначник, який містить два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює | | | | | ***= …*** | |
| 7. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює: | | | | |  | |
| 8. Якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те ж число  , | | | | | то значення визначника  … | |
| ***Розкладання визначника за елементами***  ***довільного рядка чи стовпця*** | | | | | | |
| Для визначника третього порядку    *мінором  елемента*  визначника називають визначник, утворений із цього визначника викресленням *i*-го рядка та *j*-го стовпця | | | | Отже, мінором елемента  є визначник | | |
| Порядок мінору | | | | на … менший від порядку цього визначника | | |
| Для визначника третього порядку  *алгебраїчним доповненням  елемента*  називають його мінор  помножений на : | | | | Отже, алгебраїчним доповненням елемента  є | | |
| *Теорема**Лапласа*. Визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення | | | | Отже, для визначника третього порядку розклад за елементами першого рядка має вигляд | | |
| *Теорема.*Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю | | | | Отже, для визначника третього порядку виконуються така рівність: | | |
| ***Визначники n-го порядку*** | | | | | | |
| *Визначником n-го порядку*    називають алгебраїчну суму всіх можливих добутків, які містять по одному елементу з кожного рядка й кожного стовпця. Знак кожного доданка дорівнює , де  – число інверсій у других індексах | | | Отже, | | | |
| За теоремою Лапласа визначник *n*-го порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення | | | Отже, розклад визначника за елементами першого рядка такий: | | | |
| Визначник *n*-го порядку, у якого під головною діагоналлю всі елементи дорівнюють нулю, є добутком елементів головної діагоналі | | | Отже, | | | |

|  |  |
| --- | --- |
| ***1.bmp*** | **Перевіряємо готовність до**  **практичного заняття** |

* 1. Задановизначник  Оберіть правильні твердження:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | немає правильної відповіді |

**Д1** Згадайте, який зміст мають індекси елементів визначника.

**1.2.** Визначник  дорівнює:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

**Д1** Скористайтесь правилом обчислення визначника ІІ порядку.

**1.3.** Визначте доданок, якого бракує у виразі для обчислення визначника



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| **–** 12 | 12 | 6 | – 6 | інша відповідь |

**Д1** Скористайтесь правилом трикутника обчислення визначника ІІІ порядку.

**1.4.** Відомо, що . Не виконуючи обчислень, укажіть визначник, який також дорівнює **–** 5.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

**Д1** Скористайтесь властивостями визначників.

**1.5.** Відомо, що . Не виконуючи обчислень, знайдіть визначник, значення якого не дорівнює **–** 5.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

**Д1** Скористайтесь властивостями визначників.

**1.6.** Відомо, що . Не виконуючи обчислень, укажіть визначник, який не дорівнює 0.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

**Д1** Скористайтесь властивостями визначників.

**1.7.** Знайдіть значення визначника.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| **–** 12 | 12 | 0 | **–** 3 | інша відповідь |

**Д1** Скористайтесь формулою  для обчислення

визначника.

**1.8.** Мінор  для визначника  дорівнює:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

**Д1** Згадайте, що називається мінором .

**1.9.** Алгебраїчне доповнення  для визначника  дорівнює:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

**Д1** Згадайте, що називається алгебраїчним доповненням .

**1.10.** Оберіть неправильне розкладання визначника.

|  |  |
| --- | --- |
| А | за елементами 1-го стовпця: |
| Б | за елементами 1-го рядка: |
| В | за елементами 2-го рядка: |
| Г | за елементами 2-го стовпця: |
| Д | за елементами 3-го рядка: |

**Д1**Скористайтесь теоремою про розкладання визначника за елементами рядка (стовпця).

|  |  |
| --- | --- |
| **1.bmp** | **Учимося розв’язувати типові задачі** |

**1.11.** Обчисліть визначник 2-го порядку .

*Хід розв'язання*.

*Крок 1.* Застосуйте для обчислення визначника другого порядку

формулу  :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 2.* Застосуйте для спрощення результату обчислення тригонометричну тотожність

:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь:.

**1.12.** Обчисліть визначник за правилом трикутника .

*Хід розв'язання*.

*Крок 1.* Застосуйте для обчислення схему правила трикутників:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 2.* Виконайте необхідні арифметичні операції над отриманими доданками:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: – 44.

**1.13.** Обчисліть визначник, використовуючи його властивості

.

*Хід розв'язання*.

*І*  *спосіб обчислення визначника*.

*Крок 1.* Скористайтесь властивістю: якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те ж число, то значення визначника не зміниться.

Від елементів *1-го* рядка відняти елементи *2-го* рядка; до елементів *2-го* рядка додати елементи *3-го* помножені на *(-3)*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 2.* Розкладіть отриманий визначник за теоремою Лапласа за елементами *1-го* стовпця.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Д1** Теорема Лапласа: визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

*ІІ спосіб обчислення визначника*.

*Крок 1.* Розкладіть визначник за теоремою Лапласа за елементами   
*1-го* рядка.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Д1** Для визначника третього порядку розклад за елементами першого рядка має вигляд: 

*Крок 2.* Обчисліть визначники *2-го* порядку, отримані під час розкладання визначника *3-го* порядку на суму множників, за формулою :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: –44.

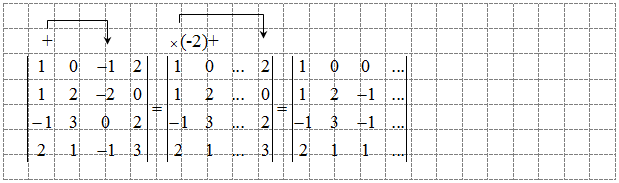
**1.14.** Обчисліть визначник *4-го* порядку:



*Хід розв'язання*.

*Крок 1.*

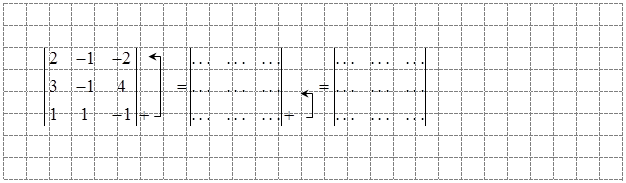
У визначнику є кілька нульових елементів, проте зручно, коли нульові елементи містяться в одному рядку чи стовпці. Зробіть, наприклад, нульовими всі елементи першого рядка, крім першого елемента. Для цього додамо до третього стовпця перший, після чого помножимо елементи першого стовпця на  і додамо їх до відповідних елементів четвертого стовпця. Дістанемо:



*Крок 2.* Тепер розкладіть отриманий визначник    
за елементами першого рядка:



*Крок 3.* За допомогою перетворень у визначнику  отримайте нулі у другому стовпці. Для цього до першого і другого рядків по черзі додайте третій рядок. Тоді:



*Крок 4.* Розкладіть утворений визначник  за елементами

другого стовпця 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: .

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Учимося моделювати**  **професійну діяльність інженера** |

**1.15.** Виконайте зображення номограми з вирівняними точками та знайдіть значення ординати однієї з її точок:

.

*Хід розв'язання*.

*Крок 1.*

|  |  |
| --- | --- |
| Д1  Рис. 1.2. Зображення номограми | Номограму з вирівняними точками зображує рівняння типу, для якого три точки з відповідними координатами  лежать на одній прямій. Для побудови зображення прямої нам достатньо координат двох точок (рис. 1.2). У лівій частині рівняння ми бачимо вираз, |

що подано у вигляді визначника 3-го порядку.

*Крок 2.*

*Переформулюйте умову на математичну.* Обчисліть визначник , застосовуючи правило трикутника.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Д1** Визначник третього порядку  можна обчислити за *правилом трикутника*.

*Крок 3.*

Отриманий вираз, який залежить від *y*, прирівняйте до нуля. Розв’яжіть лінійне рівняння та обчисліть значення *y*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: .

|  |  |
| --- | --- |
| 1.bmp | **Учимося самостійно розв’язувати завдання** |

**1.16.**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *І рівень* | | | *ІІ рівень* | | *ІІІ рівень* | |
| Обчисліть визначник *2-го* порядку | | | | | | |
| a) |  | | a) |  | a) |  |
|  |  |  |
| б) |  | | б) |  | б) |  |
|  |  |  |
| 1.bmp | | Застосовуйте формулу для розкладання визначника *2-го* порядку | | | | |

**1.17.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *І рівень* | | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Обчисліть визначник  *3-го* порядку: | | Знайдіть дійсні корені рівняння: | Доведіть рівність: |
|  | |  |  |
| 1.bmp | Обчислити визначник 3-го порядку можна різними способами:  1. Методом зведення до трикутного вигляду з послідовним застосуванням властивостей визначника.  2. Розкладанням визначника за елементами деякого рядка чи стовпця.  3. За правилом трикутників. | | |

**1.18.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Обчисліть визначник: | | |
|  |  |  |
| Зверніть увагу на те, що перший стовпець містить три нульових елементи, що спрощує розклад визначника.1.bmp | 1.bmp На першому кроці «зробіть ну­­лі» у першому стовп­ці визнач­ника, використовуючи властивість 8. | 1.bmp На першому кроці «зробіть ну­лі» в будь-якому стовп­ці (рядку), вико­рис­­товуючи властивість 8. |

**1.19.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Складіть алгебраїчні до­­повнення до елемен­тів , ,  визнач­ника | Обчисліть визначник, розклавши його за еле­ментами першого рядка | Обчисліть визначник |
| 1.bmpСкористайтесь означенням ал­гебраїчного до­повнення | 1.bmpЗробіть нульовими всі елементи пер­шого рядка, крім першого елемента | 1.bmp Скомбінуйте для обчислення зве­ден­ня визначника до трикутного виг­ляду та розклад визначника за елементами деякого рядка (стовпця) |

**1.20.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *І рівень* | | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть значення ординати однієї з то­чок номограми з вирівняними точ­ками: | | Знайдіть рівняння номограми з вирів­няними точками: | За заданими точками з відповідними координатами складіть номограму (з вико­нанням зображення), знайдіть невідому координату *х.*  Три точки з відповідними координатами лежать на одній прямій |
| 1.bmp | Переформулюйте умову на математичну: обчисліть заданий у лівій частині рівняння визначник, застосовуючи будь-який зі способів для цього | | |

|  |  |
| --- | --- |
| ***Д4*** | **Учимося застосовувати CAS** **під час обчислення визначників** |

**1.21.** Обчисліть визначник  за допомогою *CAS Derive*.

*Хід обчислення.*

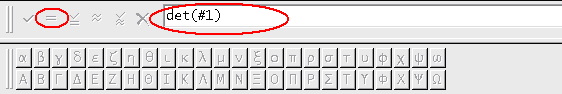
1. Відкрийте вікно *CAS*  *Derive*.

2. За допомогою опції *Autor-Matrix* уведіть визначник:

– розмір визначника у вікні Mat*rix Setup;*

– числові значення елементів рядків і стовпців у вікні *Author  matrix;*

– номер виразу, під яким записано визначник.

3. За допомогою опції *Autor-Expression* обчисліть визначник натиснувши кнопку Д4 на панелі задач , яка знаходиться в нижній частині вікна програми.

4. Під наступним номером після номеру виразу буде отримано вираз, що відповідає умові завдання.

**1.22.** Знайдіть значення коефіцієнта *k* рівняння номограми за допомогою *CAS Mathcad*.

.

*Хід обчислення.*

1. Відкрийте вікно *CAS*  *Mathcad*.

2. За допомогою опції *Добавить-Матрицу* введіть визначник:

* розмір визначника у вікні *Вставка матрицы*;
* числові значення елементів рядків і стовпців у шаблоні, що з’явиться у вікні програми.

3. За допомогою опції *Символика–Матрицы–Определитель* обчисліть визначник.

4. Під шаблоном визначника буде отримано вираз, що відповідає умові завдання.

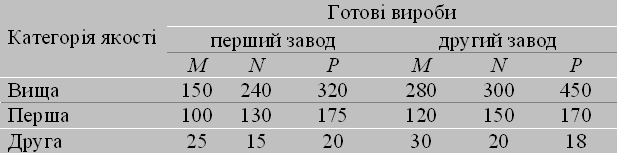


|  |  |
| --- | --- |
|  | **Як пов’язані матриці з**  **інженерною практикою** |

Два залізобетонних заводи випускають вироби *M, N, P* вищої, першої й другої категорії якості. Кількість випущених кожним заводом виробів по кожній категорії якості характеризується наступною   
таблицею 2.1.

***Таблиця 2.1.***

**Кількість випущених кожним заводом виробів**



Який загальний випуск виробів за зазначеними категоріями якості ?

Кількість виробів, випущених першим заводом, можна розглядати як елементи таблиці *А*, а другим заводом – як елементи таблиці *В*:

Таблиці, які задано в такому вигляді, називають ***матрицями***. Над матрицями можна виконувати різні дії.

Складаючи відповідні елементи заданих матриць, одержимо матрицю *С*, яка визначає загальне число виробів за зазначеними категоріями якості: 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Д1** | **Складаємо опорний конспект** | | |
| ***Матриці*** | | | | |
| Таблицю    що складається з  чисел , називають *матрицею* | | Отже, матриця, що складається з  чисел  має вигляд | | |
| Числа  – *елементи* матриці, де | | *i* вказує **…**, а  *j –*  **…** | | |
| Добуток кількості рядків на кількість стовців  називають  *розміром* матриці | | Отже, для матриці  розмір **…** | | |
| Коротко матрицю позначають так:  де ,  та записують у вигляді таблиці | |  | | |
| Матрицю  розміру  позначають | | Отже, матрицю    позначають **…** | | |
| Матрицю, в якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців, називають *квадратною* | | Отже, квадратна матриця  має вигляд | | |
| Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матрицю називають  *нульовою* | | Отже, нульова матриця  має вигляд | | |
| Квадратну матрицю називають *трикутною,* якщо всі елементи, що розташовані під (над) головною діагоналлю, дорівнюють нулю, а серед тих, що залишилися, є ненульові | | Отже, трикутна матриця  має вигляд | | |
| Квадратну матрицю, усі елементи якої, крім діагональних, дорівнюють нулю, називають *діагональною* | | Отже, діагональна матриця  має вигляд | | |
| Квадратну матрицю, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, а всі інші – нулю, називають *одиничною* | | Отже, одинична матриця розміру  має вигляд | | |
| Матрицю  називають *транспонованою* до матриці , якщо рядки матриці  є стовпцями матриці , а стовпці – рядками матриці | | Отже, до  транспонованою є | | |
| Матрицю, яка містить один стовпець, називають *вектор-стовпцем* та записують у вигляді | | Отже, вектор-стовпець розміру  записують у вигляді | | |
| Матрицю, яка містить один рядок, називають *вектор-рядком* та записують у вигляді | | Отже вектор-рядок розміру  записують у вигляді | | |
| Будь-якій квадратній матриці    можна поставити у відповідність визначник  (або ) | |  | | |
| Квадратну матрицю  називають *невиродженою*, якщо її визначник | | **…** | | |
| Якщо , то матрицю  називають | | **…** | | |
| ***Лінійні операції над матрицями***  ***та операція множення матриці на матрицю*** | | | | |
| *Сумою* матриць  і  однакових розмірів є матриця  того ж розміру, кожен елемент якої є сумою відповідних елементів матриць  і , тобто якщо | | | то | |
| *Добутком* дійсного числа  на матрицю є матриця, кожен елемент якої є добутком цього числа на відповідні елементи матриці, тобто якщо | | | то | |
| Різницю матриць  однакових розмірів визначають як суму матриці  і матриці , помноженої на : , тобто якщо | | | то | |
| Матриці  і  (тут  – *перша* матриця,  – *друга* матриця) називають  *узгодженими,* якщо кількість стовпців матриці  дорівнює кількості  рядків матриці | | | Отже, до матриці  розмірів  узгодженою може бути матриця  розміром | |
| *Добутком*  матриці  на матрицю , розміри яких  і  відповідно, для ,  називають матрицю  розміру | | | **…**, де | |
| Якщо *А* і *В* – матриці однакового  розміру, то | | | ***…*** | |
| Якщо – матриця,  – довільні  сталі, то | | | ***…*** | |
| Якщо – матриця,  – довільні  сталі, то | | | ***…*** | |
| Якщо – матриці, де *С –* матриця узгоджена з *А* і *В* , то | | | ***…*** | |
| Якщо – матриця та – транспонована до неї, то | | | ***…*** | |
| Якщо – матриці, де *С –* матриця того ж розміру, що *А* і *В* ,  то | | | ***…*** | |
| Якщо *А* і *В* – матриці однакового розміру,  – довільна стала, то | | | ***…*** | |
| Якщо *А* і *В* – узгоджені матриці,  – довільна стала, то | | | ***…*** | |
| Якщо *А, В* і *С –* узгоджені матриці ,  то | | | ***…*** | |
| Якщо *А* і *В* – матриці однакового розміру, то | | | ***…*** | |
| Якщо *А* і *В* – узгоджені матриці,  то | | | ***…*** | |
| Якщо *А* і *Е* (одинична) – узгоджені матриці, то | | | ***…*** | |
| ***Обернена матриця*** | | | | |
| Обернена матриця  існує | | тільки для кожної **…** матриці | | |
| Якщо виконуються рівності , де  – одинична матриця, того ж розміру, що й *А*, то | | матрицю  називають ***…***  до матриці | | |
| Транспонована матриця, що складається з алгебраїчних доповнень  до відповідних елементів  матриці до матриці  , має вигляд | |  | | |
| Обернену матрицю  до матриці    знаходять за формулою | |  | | |
| ***Матричні рівняння*** | | | | |
| Матричне рівняння  , де –  – невироджена матриця, а  – вектори-стовпці, може бути  записано у вигляді | | **…** | | |
| Розв’язати матричне рівняння , де *А* і *В –* відомі матриці, означає | | знайти невідому матрицю **…**, що задовольняє це матричне рівняння | | |
| Розв’язок матричного рівняння  *,* де *А* і *В –* відомі матриці, знаходять за формулою | | **…** | | |
| ***Ранг матриці*** | | | | |
| Визначник порядку , складений із елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців,  називають | | ***…*** *-*го рядку матриці | | |
| Найбільший порядок відмінного від нуля мінору матриціназивають | | ***…***матриці і позначають | | |
| Ранг нульової матриці дорівнює | | **…** | | |
| Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називають | | **…** | | |
| Ранг матриці можна знаходити так. Якщо в матриці  знайдено  відмінний від нуля мінор:  1) -го порядку, а мінори порядку вище-го дорівнюють нулю, то ранг матриці  2) -го порядку, то ранг матриці  3) -го порядку та всі мінори -го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці  4) -го порядку, то переходять до дослідження мінорів | | 1) дорівнює **… ;**  2) не менший **… ;**  3) дорівнює **… ;**  4) порядку **… .** | | |
| Ранг матриці не зміниться, якщо над нею виконати *елементарні перетворення,* а саме: | | 1. переставити місцями   **…** ;   1. помножити кожний елемент **…** ; 2. додати до елементів рядка (стовпця) **…** ; 3. викреслити **…** . | | |

|  |  |
| --- | --- |
| ***1.bmp*** | **Перевіряємо готовність до**  **практичного заняття** |

**2.1.** Елемент  суми матриць  дорівнює:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| 0 | 1 | 6 | 3 | 2 |

**Д1**Скористайтеся означенням суми двох матриць.

**2.2.** Елемент  різниці матриць  дорівнює:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| 0 | -2 | 1 | 3 | 4 |

**Д1** Скористайтеся означенням різниці двох матриць.

**2.3.** Матриця  дорівнює:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

**Д1** Скористайтеся означенням добутку матриці на число.

**2.4.** Елемент  добутку двох матриць *С=АВ* дорівнює:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| добутку від­по­відних еле­мен­тів мат­риць *А* і *В* | сумі добутків від­­повідних еле­­мен­тів 2-го стовпця мат­риці А і 3-го рядка матриці В | сумі добутків від­­повідних еле­­мен­тів 2-го рядка мат­риці А і 3-го стовп­ця матриці В | сумі добутків від­­­повідних еле­­мен­тів 2-го стовпця мат­ри­ці А і 3-го стовп­ця матриці В | сумі добутків від­­повідних еле­­мен­тів 2-го рядка мат­риці А і 3-го рядка матриці В |

**Д1** Скористайтеся означенням добутку двох матриць.

**2.5.** Елемент  добутку двох матриць  дорівнює:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

**Д1** Скористайтеся означенням добутку двох матриць.

**2.6.** Розв’язок матричного рівняння *АХ=В* знаходиться за формулою:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

**Д1** Скористайтесь формулою для розв’язку матричного рівняння *АХ=В.*

**2.7.** Для матриць , , ,  оберіть неправильне твердження:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| *А* і *D* неузгоджені | *А* і *В* узгоджені | *В* і *С* неузгоджені | *С* і *А* узгоджені | *D* і *В* узгоджені |

**Д1** Скористайтесь означенням узгоджених матриць.

**2.8**. Добутком матриць  є матриця розміром:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

***Д1***Скористайтесь означенням добутку двох матриць.

**2.9.** Добутком вектора-рядка з двох елементів на вектор-стовпець з двох елементів є:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| вектор-рядок з двох елементів | вектор-стовпець з двох елементів | матриця  розміром | число | інша відповідь |

**Д1** Скористайтесь означенням добутку двох матриць.

**2.10.** Добутком вектора-стовпця з двох елементів на вектор-рядок із двох елементів є:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| вектор-рядок із двох елементів | вектор-стовпець з двох елементів | матриця  розміром | число | інша відповідь |

**Д1** Скористайтесь означенням добутку двох матриць.

**2.11.** Одинична матриця розміру  має вигляд:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

**Д1** Скористайтесь означенням одиничної матриці.

**2.12.** Якщо , то  дорівнює:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| 0,5 | 2 | –2 | –0,5 | інша відповідь |

**Д1**Скористайтесь властивостями оберненої матриці.

**2.13.** Визначіть ранг матриці :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

**Д1** *Рангом матриці* називають найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

**2.14.** Визначіть ранг матриці :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| 1 | 2 | 3 | 4 |  |

**2.15.** Визначіть ранг матриці :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| 1 | 2 | 3 | 4 | інша відповідь |

|  |  |
| --- | --- |
| **1.bmp** | **Учимося розв’язувати типові задачі** |

**2.16.** Обчисліть значення виразу .

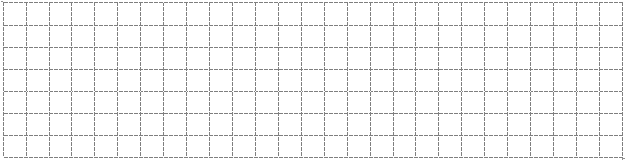
*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Виконайте множення першої матриці на 4, а другої – на 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь означенням добутку матриці на число: *добутком дійсного числа  на матрицю* є матриця, кожен елемент якої є добутком цього числа на відповідні елементи матриці.

*Крок 2.* Обчисліть різницю отриманих матриць.





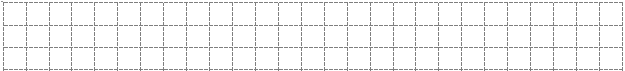
Д1 Скористайтесь правилом обчислення різниці двох матриць: *різниця двох матриць* дорівнює матриці, елементи якої дорівнюють різниці відповідних елементів матриці-зменшуваного та матриці-від’ємника.

Відповідь:

**2.17.** Обчисліть добуток матриць *АВ*, якщо   
, .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Визначте розмір матриць та з’ясуйте, чи є вони узгодженими.



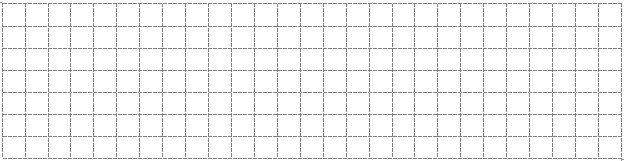
Розмірність матриці *А*: . Розмірність матриці *В*: .

Д1*Розміром* матриці називається пара чисел , де  - кількість рядків, а  - кількість стовпців матриці.

*Крок 2.* Визначте розмір матриці *АВ*: 

Д1*Добутком* матриці  на матрицю є матриця 

*Крок 3.* Обчисліть елементи матриці-добутку.



Д1 Елемент  матриці *АВ* дорівнює сумі добутків відповідних елементів -ого рядка матириці *А* та -ого стовпця матриці *В*.

*Крок 4*. Запишіть отриману матрицю *АВ*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: .

**2.18.** Знайдіть, якщо , .

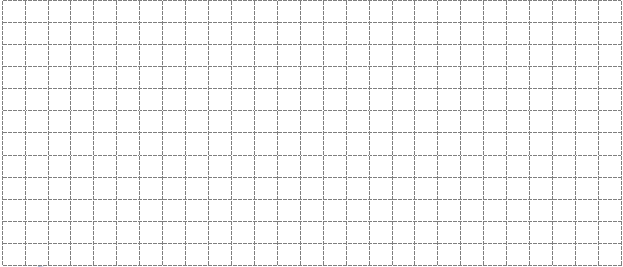
*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Складіть вираз , значення якого необхідно обчислити.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Якщо , то для будь-якої квадратної матриці *А* , де *Е* – одинична матриця того ж розміру, що й матриця *А.*

*Крок 2.* Обчисліть значення отриманого виразу за діями.



1) 

2) 

3) 

4) 

Відповідь: .

**2.19.** Знайдіть обернену матрицю до матриці  та виконайте перевірку.

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Знайдіть визначник матриці А.





Д1 Застосуйте для обчислення схему *правила трикутників*:



*Крок 2.* Оскільки , то матриця *А* – невироджена, тобто має обернену. Знайдіть алгебраїчні доповнення  до елементів матриці *А*.





Д1 *Алгебраїчним доповненням  елемента * називають його мінор **, помножений на : **.  *Мінором  елемента * визначника називають визначник, утворений із цього визначника викресленням *i*-го рядка та *j*-го стовпця.

*Крок 3*. Запишіть матрицю .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Скористайтесь формулою для знаходження оберненої матриці:



*Крок 4.* Виконайте перевірку.



Д1 Скористайтесь означенням матриці, оберненої до матриці *А*: матрицю  називають *оберненою* до матриці *А*, якщо виконуються рівності , де *Е* – одинична матриця того ж розміру, що й *А*.

Відповідь: .

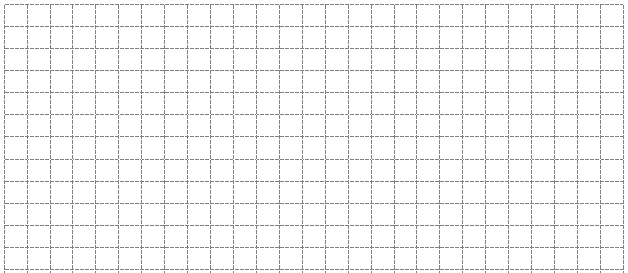
**2.20.** Розв’яжіть матричне рівняння .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Позначте , . Матричне рівняння запишеться як *ХА=В*. Виразіть із цього рівняння матрицю *Х.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 2.* Знайдіть матрицю .







Д1 Скористайтесь формулою для знаходження оберненої матриці:

.

*Крок 3.* Знайдіть матрицю *Х* за формулою .



=

Д1 Елемент  матриці *АВ* дорівнює сумі добутків відповідних елементів -ого рядка матириці *А* та -ого стовпця матриці *В*.

Відповідь: .

**2.21.** Знайдіть ранг матриці .

*Хід розв’язання.*

Виконуючи елементарні перетворення матриці, зведіть матрицю до

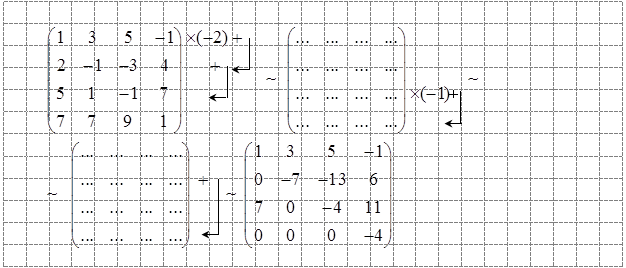
вигляду, коли всі її елементи, що стоять під головною діагоналлю дорівнюють 0.

*Крок 1.* Для цього другий рядок додайте до третього.

*Крок 2.* Перший рядок помножений на  додайте до другого.

*Крок 3.* Третій рядок, помножений на  додайте до четвертого.

*Крок 4.* Другий рядок додайте до четвертого.



*Крок 5.* Перший рядок помножте на .

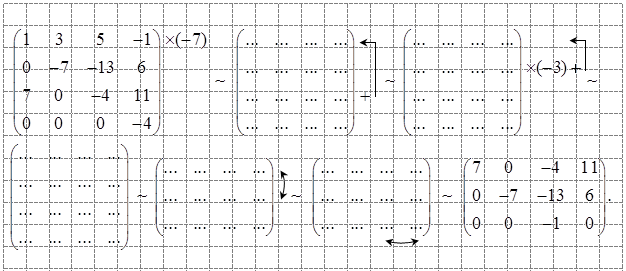
*Крок 6.* Третій рядок додайте до першого.

*Крок 7.* Другий рядок помножте на  та додайте до першого.

*Крок 8.* Викреслить нульовий рядок.

*Крок 9.* Поміняйте місцями перший та другий рядок.

*Крок 10.* Поміняйте місцями третій та четвертий стовпець.



*Крок 11.* Обчисліть визначник третього порядку, складений із

елементів, що стоять на перетині перших трьох рядків і стовпців останньої матриці.



Д1 Застосуйте для обчислення правило обчислення визначників, що мають трикутний вид:

.

*Крок 12.* Визначте ранг матриці.





Д1 Скористайтесь означенням рангу матриці: *рангом матриці* називають найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Відповідь: .

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Учимося моделювати**  **професійну діяльність інженера** |

**2.22.** За заданою таблицею 2.2 «Витрати-випуск НКМЗ» визначте, якими мають бути трудові ресурси та рівні випусків продукції в кожному виробничому секторі (*І-ІІІ)*, якщо припускається в наступному терміні спожити *50 тис. т* продукції металевого цеху, *70 тис.* машинта винайняти *60* робітників.

***Таблиця 2.2.***

**Витрати – випуск НКМЗ**

**

*Хід розв'язання*.

*Крок 1.* Переформулюйте умову на математичну.Проаналізуйте умову, з’ясуйте як складається й застосовується модель Леонтьєва та введіть позначання - валовий об’єм продукції,  - кінцевий продукт. Визначте елементи матриці *А* яккоефіцієнти прямих матеріальних витрат, які характеризують кількість продукту *і*, що використовується під час виробництва одиниці продукції *j*. Для цього скористаємось пропозицією про пропорційну залежність між витратами та об’ємами виробництва , де - об’єм продукції *і-*тої галузі, що споживається *j*-тою у процесі виробництва.

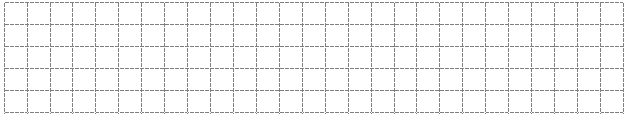
**Д1**  Для складання матриці *А* необхідно обчислити її елементи .

Тоді:





Складаємо матрицю А:



*Крок 2.*

Перевірте продуктивність матриці А.

**Д1** Економічний зміст продуктивності полягає в наступному: матриця  продуктивна, коли є такий план випуску продукції, що кожний об’єкт уможливлює вироблення деякої її кількості.

Продуктивність матриці  є необхідною й достатньою умовою існування, одиничності й невід’ємності розв’язків системи рівнянь , яке за  будь-якого  невід’ємного *Y*,     можна   записати у вигляді , де *А –* матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат,  – матриця нового кінцевого продукту, *Х* – матриця об’ємів валової продукції.

Ця теорема показує, що під час розрахунку плану за балансовою моделлю необхідно заздалегідь знати, чи є технологічна матриця *А* продуктивною.

Продуктивність матриці перевіряється в чотири етапи.

1. Значення всіх елементи головної діагоналі менше *1.*

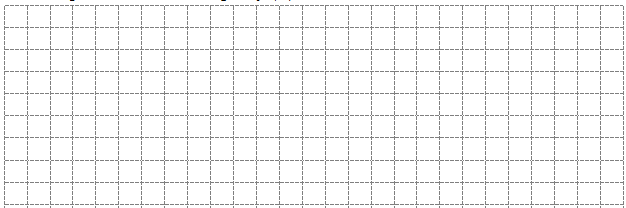


2. Добутки симетричних відповідних елементів  менші одиниці.

3. Суми елементів, що знаходяться в одному рядку менші одиниці.

4. Норма матриці, що збігається з максимальним значенням сум елементів, якізнаходяться в одному рядку менша одиниці.

Перевіряємо продуктивність матриці:



1) 

2)

3) 



4) Норма матриці  ( – модуль значення визначника):

Тобто, матриця А продуктивна, і для будь-якої матриці кінцевого продукту є матриця валових випусків *Х*, яка задовольняє матричне рівняння  Це рівняння запишемо у вигляді 

*Крок 3.* Для того, щоб розв’язати останнє рівняння, знайдіть матрицю 





**Д1** Різницю матриць  визначають як суму матриці  і матриці , помноженої на : 

*Крок 4.* Обчисліть визначник матриці .

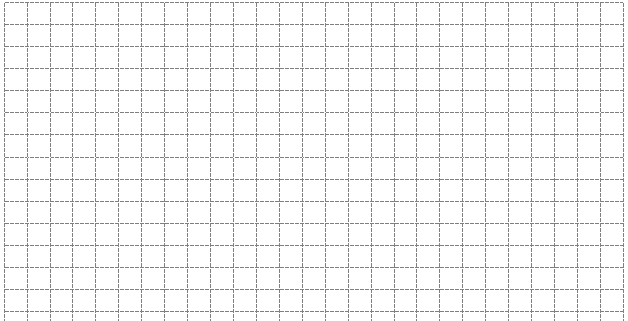




**Д1** Визначник матриці *3-го* порядку може бути обчислений за визначенням: Значення виразу



називають *визначником третього порядку*

*Крок 5.* Оскільки , розв'язок рівняння  можна знайти за формулою  Для побудови матриці  обчисліть алгебраїчні доповнення матриці .



**Д1** *Алгебраїчним доповненням  елемента * називають його мінор **, помножений на : **. *Мінором  елемента * визначника називають визначник, утворений із даного визначника викресленням *i*-го рядка та *j*-го стовпця.

*Крок 6.*

Складіть матрицю *С* із алгебраїчних доповнень , причому алгебраїчні доповнення рядків записуємо у стовпці (транспонування матриці).





**Д1**Матрицю називають *транспонованою* до матриці , якщо рядки матриці

 є стовпцями матриці , а стовпці – рядками матриці .

*Крок 7.*

Знайдіть матрицю .





**Д1** Обернену матрицю знаходять за формулою .

*Крок 8.*

Обчисліть об’єми валової продукції *Х*, помножуючи матрицю  на матрицю нового кінцевого продукту .





**Д1** *Добутком*  матриці  розміру  на матрицю  розміру  є матриця  розміру , у якої елемент  є сумою добутків елементів -го рядка матриці  на відповідні елементи -го стовпця   
матриці .

Відповідь: для задоволення нових показників попиту необхідно буде виробити десь *101 тис. т.* продукції металевого цеху, *116 тис*. машин та найняти *98* робітників.

|  |  |
| --- | --- |
| 1.bmp | **Учимося самостійно розв’язувати завдання** |

**2.23.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть матрицю *С*: | | |
| ,  . | ,  . | ,  . |
|  | 1.bmp - транспо­но­ва­на до мат­риці *А.* | 1.bmpУ цьому ви­­падку . |

**2.24.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть добутки *АВ* та *ВА*, якщо це можливо: | | |
| , . | ,  . | , . |
| 1.bmp  З’ясуйте, чи узгоджені матриці-множники та визначте розмір  матриці-добутку. | | |

**2.25.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть матрицю обернену до матриці *А* та виконайте перевірку: | | |
| . | . | . |
|  |  | 1.bmpОбчислюючи  та  під час перевір­­ки, множ­ник  краще залиши­ти перед матри­цею. |

**2.26.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Розв’яжіть матричне рівняння: | | |
|  |  | , де  , |
| 1.bmpРозбийте задачу на підзадачі: 1) знайдіть матрицю, обернену до матриці, що є першим множником у рівнянні; 2) помножте обидві частини рівняння на знайдену матрицю зліва. | | |

**2.27.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть ранг матриці: | | |
|  |  |  |
| 1.bmpПерший рядок матриці, помно­жений на (-1), додайте до дру­гого та третього | 1.bmpДодаючи пер­ший рядок, по­мно­­же­ний на відповід­ні чис­ла, до ін­ших рядків, пере­творіть матрицю так, щоб усі еле­менти першо­го стовп­ця, крім , дорівнювали нулю. | 1.bmpЗа допомогою елементарних перетворень отримайте чотири нулі в першо­му стовпці. |

**2.28.**

|  |  |
| --- | --- |
| *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Підприємство випускає продукцію двох типів (*А* і *В*) та використовує сировину двох типів (*І* і *ІІ*). Норми затрат сировини подано в таблиці:   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | ***І*** | ***ІІ*** | | ***А*** | 2 | 3 | | ***В*** | 5 | 20 |   Знайти загальні затрати сировини на виробництво 100 одиниць продукції А та 60 одиниць продукції В. | Підприємство виробляє продукцію трьох видів і використовує сировину двох типів. Норми витрат на одиницю продукції кожного виду продукції задано за допомогою матриці:  . Вартість одиниці сиро­ви­ни кожного типу задає матриця . Знайдіть загальні витрати підприємства на вироб­ництво 100 одиниць продукції першого виду, 200 одиниць продукції другого виду та 150 одиниць продукції третього виду. |
| 1.bmpПлан вироб­ництва подай­те у вигляді мат­риці , а норми витрат сиро­вини у вигляді мат­риці . Загальні затрати сиро­ви­ни визначаються як *СА*. | 1.bmpСпочатку знайдіть матрицю вартості *S* витрат на оди­ни­цю продукції (*S* =*АВ*), а потім загальну вартість витрат під­приємства (*СS*, де *С* =(100;200;150) – план вироб­ництва) |

|  |  |
| --- | --- |
| ***Д4*** | **Учимося застосовувати CAS** **для виконання операцій над матрицями** |

**2.29.** Відповідно до програми запуску доменних цехів установлено, що буде споруджено та запущено:

а) на котельно-механічному заводі () буде запущено 10 одиниць об’єктів типу *I* і 15 одиниць типу *II*;

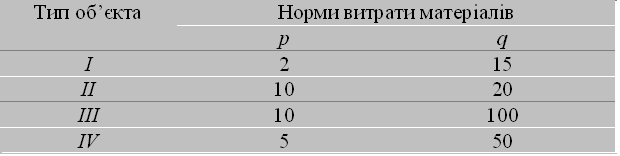
б) на Старокраматорському заводі () буде запущено 20 одиниць об’єктів типу *ІІІ*;

в) на Новокраматорському заводі () буде запущено 100 одиниць об’єктів типу *IV*.

Визначте витрати матеріалів видів *p* і *q* на кожному заводі, якщо норми витрат матеріалів (у відповідних одиницях виміру) наведено в таблиці 2.3. Операції над матрицями виконайте за допомогою *CAS Derive*.

***Таблиця 2.3.***

**Норми витрат матеріалів**



*Переформулюйте умову на математичну.* Уведіть матриці: *М* – матриця об’єктів по заводах, *А* – матриця норм витрати матеріалів по об’єктах:

  та знайдіть їх добуток для визначення витрат матеріалів видів *p* і *q* на кожному заводі.

*Хід обчислення.*

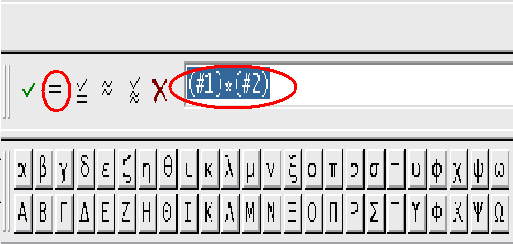
1. Відкрийте вікно *CAS*  Derive.

2. За допомогою опції *Autor-Matrix* уведіть матриці:

– розмір матриці у вікні Mat*rix Setup*;

– числові значення елементів рядків і стовпців у вікні *Author  matrix*;

– номер виразу, під яким записано матрицю (з’являється після натиснення клавіші *Enter*).

3. За допомогою опції *Autor-Expression* уведіть добуток першої та другої матриць *(#1)*\**(#2)* на панелі символів .

4. Обчисліть добуток, натиснувши кнопку Д4 .

5. Під наступним номером буде отримано матрицю, елементи якої вказують на витрати матеріалів видів *p* і *q* на кожному заводі.

**2.30.** У завданні з пункту **«Учимося моделювати професійну діяльність інженера»**замініть кроки 4-7 обчислення  для

 за допомогою відповідних правил застосуванням *CAS* *Mathcad.*

1. Відкрити вікно *CAS* Mathcad.

2. За допомогою опції *Добавить - Матрицу* введіть матрицю:

* розмір матриці у вікні *Вставка матрицы*;
* числові значення елементів рядків і стовпців у шаблоні поля програми Д1.

3. За допомогою опції *Символика-Матрицы-Обратить* знайдіть обернену матрицю.

4. Виокремте отриману матрицю та за допомогою опції *Вычислить – С плавающей запятой* знайдіть приблизні значення елементів матриці.

5. Отриману матрицю застосуйте для продовження інших обчислень.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Як пов’язані системи лінійних алгебраїчних рівнянь з інженерною практикою** | |
| Два елементи з *ЕДС* *1,6* *В* й *1,3 В* та внутрішніми опорами відповідно *1,0 Ом* і *0,5 Ом* з’єднані, як показано на рисунку 3.1. Опір *R* = *0,6 Ом*. Визначте струми у всіх вітках проводів. Опір сполучних проводів не враховувати.  Користуючись законами Кірхгофа і зважаючиу на умовно обрані напрямки струмів | | Д1.bmp  Рис. 3.1. Схема до задачі |

(*I1*– струм у першому елементі, спрямований ліворуч; *I2* – струм у другому елементі, спрямований ліворуч; *I3* – струм на ділянці з опором *R*, спрямований праворуч), одержуємо ***систему лінійних рівнянь***:

***Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)*** можуть описувати механічні, хімічні, економічні та інші процеси.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Д1** | **Складаємо опорний конспект** | | |
| ***Системи лінійних алгебраїчних рівнянь*** | | | | |
| Систему *m* рівнянь з *n* невідомими вигляду    називають системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) | | Отже, система *3-ох* рівнянь з *3-ма* невідомими має вигляд | | |
| Рівняння СЛАР містять невідомі, коефіцієнти при невідомих та вільні члени. Зазначте, які символи їм відповідають | | Тут *x1 , x2, …, xn*– **…** ;  *aij* – **…** (*i*=*1, 2, …, m, j=1, 2, …, n)*; *b1,b2, …, bn* –  **…** системи | | |
| Розв’язати систем рівнянь з *n* невідомими, означає знайти такі значення невідомих   …,  при підстановці яких | | у систему всі її рівняння  **…** | | |
| СЛАР називають *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю | | Отже, однорідна система *3-ох* рівнянь із *3-ма* невідомими має вигляд | | |
| СЛАР називають *неоднорідною*, якщо хоч один з вільних членів не дорівнює нулю | | Отже, неоднорідна система *3-ох* рівнянь із *3-ма* невідомими має вигляд | | |
| Однорідна система    завжди має *тривіальний* розв’язок | | **…** | | |
| Систему рівнянь називають *сумісною*, якщо вона має хоча б | | **…** | | |
| Систему рівнянь називають *несумісною*, якщо вона не має | | **…** | | |
| Сумісну систему називають *визначеною*, якщо вона має | | **…** | | |
| Сумісну систему називають *невизначеною*, якщо вона має | | **…** | | |
| Головною матрицею системи  називають | | матрицю | | |
| Розширеною матрицею системи  називають | | матрицю | | |
| ***Методи розв’язання СЛАР*** | | | | |
| Визначник головної матриці системи    має вигляд | | та називають  **…** | | |
| Якщо головний визначник системи  не дорівнює нулю, то систему  називають | | **…** | | |
| Якщо в головному визначнику матриці *A* перший стовпець замінено на стовпець вільних членів системи    то він має вигляд | |  | | |
| Якщов головному визначнику матриці *A* другий стовпець замінено  на стовпець вільних членів системи    то він має вигляд | |  | | |
| Якщо у головному визначнику матриці *A* третій стовпець замінений на стовпець вільних членів системи    то він має вигляд | |  | | |
| Якщо , а принаймні один із визначників, ,   то вона | | **…** | | |
| Якщо  і всі визначники  дорівнюють нулю, то система | | **…** | | |
| Якщо , то СЛАР  має *єдиний* розв’язок, який можна знайти за *формулами Крамера*: | | ,  , | | |
| У матричному вигляді систему можна записати у вигляді , де матриці | | , , | | |
| Якщо у СЛАР кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих і визначник системи , то єдиний розв’язок системи  *за матричним методом* можна знайти | |  | | |
| До елементарних перетворень *рядків* системи, під час яких система залишається рівносильною початковій, відносяться: | | 1) **…**  двох рівнянь;  2) **…** обох частин рівняння на ненульовий множник;  3) **…** до рівняння елементів іншого рівняння, помножених на одне й те ж число | | |
| У прямому ході *методу Гауса* за допомогою елементарних перетворень систему  можна звести до трапецієподібного  (чи трикутного) вигляду | | де  , , | | |
| Якщо *r* – ранг основної матриці *A* збігається з кількістю невідомих, то  одержана система  отже, і початкова система    має єдиний розв’язок, який  визначимо так: | | у звортньому ході *методу Гауса* спочатку з останнього рівняння , після цього з попереднього рівняння ; піднімаючись по системі від останнього рівняння до першого | | |
| Елементарні перетворення рівнянь системи    рівносильні перетворенню рядків | | розширеної матриці | | |
| ***Критерій сумісності СЛАР*** | | | | |
| У заданій систему вигляду    ранги головної і розширеної матриць | | | позначаються відповідно **… , …** | |
| Для того, щоб СЛАР була сумісною,  необхідно і достатньо, щоб | | | *r*(*A*)**…** *r*(*B*) , де *r*(*A*)– ранг головної матриці *A* , *r*(*B*) – ранг розширеної матриці *В* | |
| Якщо ранг головної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює  кількості невідомих, то система має | | | **…** | |
| Якщо ранг головної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від кількості невідомих,  то система має | | | **…** | |
| Якщо  для системи, то  вона | | | **…** | |
| ***Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь*** | | | | |
| Однорідна система вигляду    завжди сумісна та має розв’язок | | | **…** | |
| Для того, щоб система однорідних рівнянь мала ненульові розв’язки,  необхідно й достатньо, щоб | | | ранг її головної матриці був  **…** за кількістю невідомих, тобто | |

|  |  |
| --- | --- |
| ***1.bmp*** | **Перевіряємо готовність до**  **практичного заняття** |

**3.1.** Розв’язком системи рівнянь  є :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь означенням розв’язку СЛАР із трьома невідомими: трійка чисел  називається *розв’язком СЛАР* із трьома невідомими, якщо під час підстановки цих чисел замість невідомих усі рівняння СЛАР перетворюються в тотожності.

**3.2.** Яка з наведених СЛАР є однорідною:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь означенням однорідної СЛАР: СЛАР називають *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю.

**3.3.** Головна матриця системи має вигляд:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь означенням головної матриці системи: *головною матрицею системи*  називають матрицю її коефіцієнтів .

**3.4.** Розширена матриця системи  має вигляд:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1Розширеною матрицею системи  називається матриця



**3.5.** Систему лінійних рівнянь  можна записати у вигляді наступного матричного рівняння:

|  |  |
| --- | --- |
| А |  |
| Б |  |
| В |  |
| Г |  |
| Д |  |

Д1СЛАР  можна записати у вигляді рівняння *АХ=В*, де , , .

**3.6.** Для деякої СЛАР . Можна стверджувати, що система:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| система  несумісна | система має єди­ний розв’язок | система має три розв’язки | система має без­ліч розв’язків | система має два розв’язки |

Д1 СЛАР несумісна, якщо , а принаймні один із визначників  не дорівнює нулю; СЛАР має безліч розв’язків чи не має жодного, якщо

; СЛАР має єдиний розв’язок, якщо .

**3.7.** Для деякої СЛАР . Можна стверджувати, що:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| система  несумісна | система має єди­ний розв’язок | система має три розв’язки | система має без­ліч розв’язків | система або має без­­ліч розв’яз­ків, або несумісна |

Д1Дивись підказку до попередньої вправи 3.6.

**3.8.** Для деякої СЛАР . Можна стверджувати, що:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| система  несумісна | система має єди­ний розв’язок | система має три розв’язки | система має без­ліч розв’язків | система або має без­­ліч розв’яз­ків, або несумісна |

Д1Дивись підказку до вправи 3.6.

**3.9.** Які з наведених дій не є елементарними перетвореннями рядків розширеної матриці СЛАР:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| множення рядка на ненульовий множник | почленне дода­вання двох  ряд­ків | переставляння місцями двох рядків | почленне мно­ження двох  ряд­­ків | додавання до рядка іншого, помноженого на будь-яке число |

Д1Скористайтесь переліком елементарних перетворень рядків розширеної матриці системи СЛАР.

**3.10.** Нехай *А* – основна матриця СЛАР, а  – її розширена матриця. Відомо, що . У цьому випадку:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| СЛАР  несумісна | СЛАР має єди­ний розв’язок | СЛАР має безліч розв’язків | система або має безліч розв’язків, або несумісна | інша відповідь |

Д1Скористайтесь *теоремою Кронекера-Капеллі:* СЛАР сумісна тоді й лише тоді, коли ранг розширеної матриці дорівнює рангу основної матриці. Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці й дорівнює кількості невідомих, то СЛАР має єдиний розв’язок; якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від кількості невідомих, то система має безліч розв’язків.

**3.11.** Нехай *А* – основна матриця СЛАР з трьома невідомими. Якщо , то:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| СЛАР  несумісна | СЛАР має єди­ний розв’язок | СЛАР має безліч розв’язків | система або має безліч розв’язків, або несумісна | інша відповідь |

Д1 Скористайтесь *теоремою Кронекера-Капеллі* (дивись попередню вправу 3.10).

|  |  |
| --- | --- |
| **1.bmp** | **Учимося розв’язувати типові задачі** |

**3.12.** Розв’яжіть систему рівнянь матричним способом:



*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Випишіть матрицю системи *А*, матрицю-стовпець невідомих *Х* та матрицю-стовпець із вільних членів *В*.

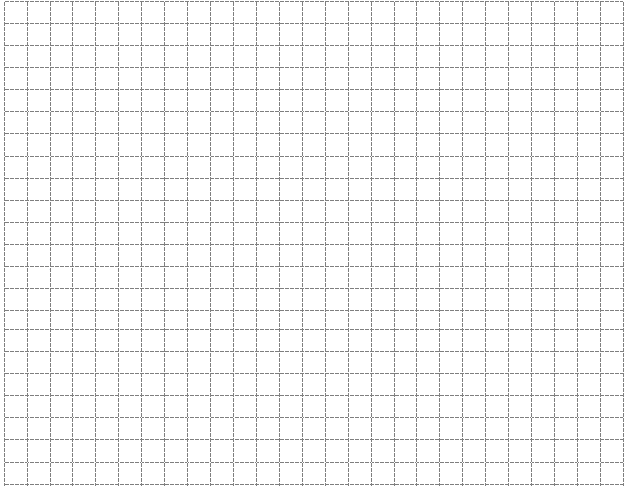
*А= Х= В=*

*Крок 2.* Запишіть подану систему у вигляді матричного рівняння та виразіть із цього рівняння матрицю *Х.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Для розв’язання матричного рівняння *АХ=В* необхідно його обидві частини помножити на  зліва та скористатись тим, що .

*Крок 3.* Знайдіть матрицю .







 =

= =

= =

=

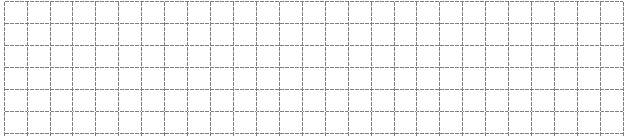


Д1Скористайтесь формулою для знаходження матриці, оберненої до *А*:

,

де  - алгебраїчні доповнення до елементів матриці *А.*

*Крок 4.* Знайдіть *Х* за формулою .

 =

Д1 Елемент  матриці *АВ* дорівнює сумі добутків відповідних елементів -ого рядка матириці *А* та -ого стовпця матриці *В*.

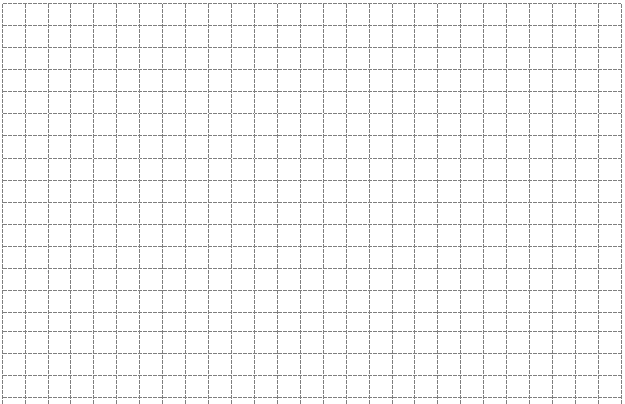
Д1Для раціонального обчислення використовуйте властивість множення матриці на число: .

Відповідь: (1;-1;2).

**3.13.** Розв’яжіть систему  за формулами Крамера.

*Хід розв’язання*.

*Крок 1.* Обчисліть визначник системи  та допоміжні визначники .







Д1 Застосуйте для обчислення визначників схему *правила   
трикутників*:



*Крок 2.* Знайдіть значення .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Використовуйте формули Крамера: , , 

Відповідь: (1;-1;2).

**3.14.** Розв’яжіть систему за формулами Крамера: 

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Обчисліть визначник системи  та зробіть висновок щодо розв’язків системи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Якщо визначник , то СЛАР або не має розв’язків, або має безліч розв’язків.

*Крок 2.* Обчисліть допоміжні визначники системи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 3.* Eраховуючи, що , а , зробіть висновок про розв’язки системи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

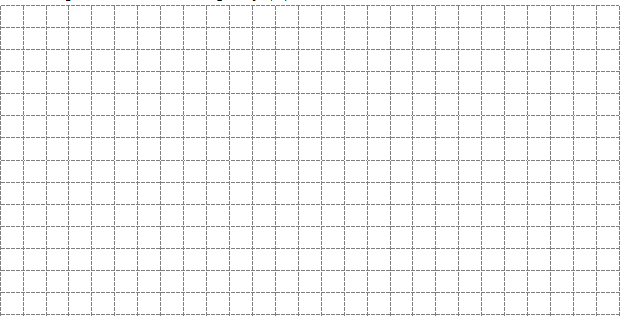
Д1 СЛАР несумісна, якщо , а принаймні один sз визначників  не дорівнює нулю.

Відповідь: система не має розв’язків.

**3.15.** Розв’яжіть систему за формулами Крамера: 

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Обчисліть визначник системи  та допоміжні визначники .







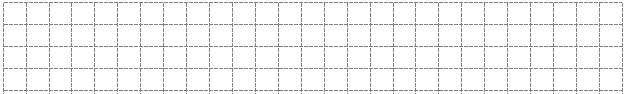




Д1 Елементами визначника системи  є коефіцієнти при невідомих. Визначники  отримують із визначника  через заміну відповідно його першого, другого та третього стовпців на стовпець вільних членів (дивись розв’язання попередньої задачі).

*Крок 2.* Оскільки , то , ,

де – головна матриця системи. Обчисліть ранг матриць *А* і . Для цього обчисліть мінор другого порядку  матриці *А*.

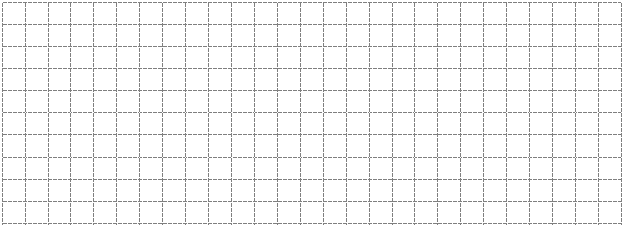
Отже,  

Д1Рангом матриці називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора.

*Крок 3*. Оскільки  (3 – число невідомих), то система має безліч розв’язків. Можна побачити, що третє рівняння є сумою перших двох, тому це рівняння можна відкинути й отримаємо систему двох лінійних рівнянь із трьома невідомими:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 4*. Залишіть у лівій частині рівнянь лише доданки, що містять *х* та *у*: . Розв’яжіть отриману систему за формулами Крамера, вважаючи змінну  параметром.









*Крок 5.* Знайдіть *х* та *у*.

Д1Застосуйте формули Крамера: , де  - головний, а  - допоміжні визначники системи.

*Крок 6.* Якщо , то отримаємо безліч розв’язків. Запишіть ці розв’язки:



  , де .

Відповідь:, де .

**3.16.** Розв’яжіть систему рівнянь методом Гаусса



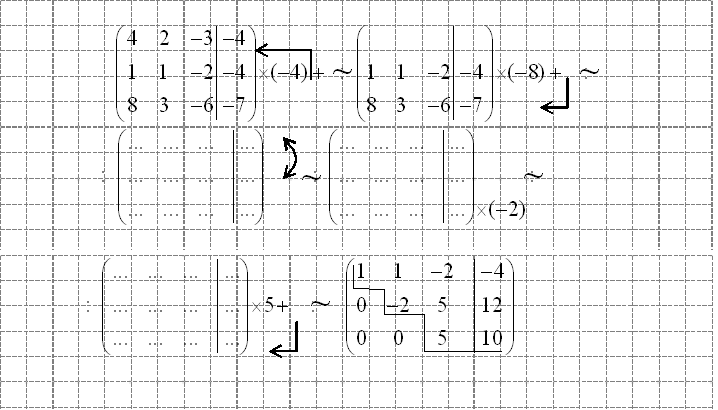
*Хід розв’язання.*

*Крок 1. З*апишіть розширену матрицю системи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1*Розширеною матрицею* системи  називається матриця 

*Крок 2*. Прямий хід. Зведіть отриману матрицю до трикутного вигляду.



*Крок 3*. Знайдіть ранги основної та розширеної матриці системи.



Д1*Рангом матриці* називають найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

*Крок 4*. Порівняйте   та кількість невідомих . Зробіть висновок щодо кількості розв’язків системи.



  .

Д1Скористайтеь *теоремою Кронекера-Капеллі*: якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці q дорівнює кількості невідомих, то СЛАР має єдиний розв’язок.

*Крок 5.* Зворотний хід. Запишіть рівняння, яким відповідають рядки отриманої матриці (починаючи з останнього).

Звідси знайдіть **.

Відповідь: (1;-1;2).

**3.17.** Розв’яжіть систему  методом Гаусcа.

*Хід розв’язання.*

*Крок 1. З*апишіть розширену матрицю системи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 2*. Прямий хід. Зведіть отриману матрицю до трикутного вигляду.

 **~** **~**

 **~** .

*(викресліть один з одна­кових рядків)*

*Крок 3*. Знайдіть ранги основної та розширеної матриці системи.

Д1*Рангом матриці* називають найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

*Крок 4*. Порівняйте   та кількість невідомих . Зробіть висновок щодо кількості розв’язків системи.

Д1 Скористайтеь *теоремою Кронекера-Капеллі*: якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і меншbq за кількість невідомих, то СЛАР має безліч розв’язків.

*Крок 5.* Зворотний хід. Запишіть рівняння, яким відповідають рядки отриманої матриці (починаючи з останнього).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 6.* Виразіть невідомі та через .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 7.* Якщо , то отримаємо безліч розв’язків. Запишіть їх:



  , де .

Відповідь:, де .

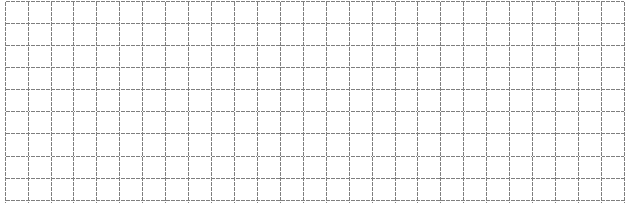
**3.18.** Розв’яжіть систему методом Гаусcа.

*Хід розв’язання.*

*Крок 1. З*апишіть розширену матрицю системи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 2*. Прямий хід. Зведіть отриману матрицю до трикутного вигляду.

 **~****~**

 **~** .

*Крок 3*. Знайдіть ранги основної та розширеної матриці системи.

Д1*Рангом матриці* називають найбільший порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці.

*Крок 4*. Порівняйте  . Зробіть висновок щодо кількості розв’язків системи.

Д1 Скористайтеь *теоремою Кронекера-Капеллі*: СЛАР сумісна тоді q лише тоді, коли ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці.

Відповідь: система несумісна.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Учимося моделювати**  **професійну діяльність інженера** |

|  |  |
| --- | --- |
| **3.19.** Задана електрична схема (рис.3.2). Відомо, що , , , , . Розрахуйте, якої сили струм проходить через кожен з елементів цього ланцюга. | Д1  Рис. 3.2. Електрична схема до завдання |

*Хід розв'язання*.

*Крок 1.* Послідовне застосування правил Кірхгофа до всіх вузлів і контурів у складній електротехнічній мережі дозволяє скласти повну систему лінійних рівнянь для визначення сил струму на кожній із ділянок.

Скористайтеся правилами Кірхгофа.

**Д1**Правило 1. У кожній точці розгалуження провідників алгебраїчна сума струмів  дорівнює нулю.

**Д1**Правило 2. Для будь-якого замкненого контуру провідників сума електрорушійних сил  дорівнює сумі добутків сил струмів на кожній ділянці контуру на опір ділянки , враховуючи внутрішній опір джерел струму .

Довільно позначимо на схемі (рис.3.3) стрілками напрями струмів на кожній ділянці й один напрям обходу, потім виокремимо замкнені контури й обійдемо їх за обраним напрямом. Якщо стрілка, яка вказує напрям струму, спрямована проти обходу, то відповідний добуток струму на опір береться зі знаком «-». Якщо під час обходу переходять від від’ємного полюса джерела струму до додатного, то  записується з додатним знаком, якщо навпаки, то – з від’ємним.

*Крок 2.* Складіть систему лінійних рівнянь для визначення сил струму на кожній із ділянок відповідно до схеми (рис.3.3).

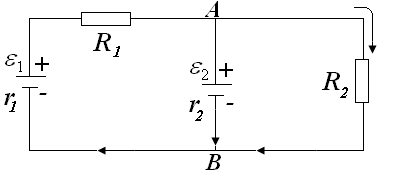


Рис.3.3. Електрична схема з позначанням напрямів струмів

і напряму обходу

Проаналізуємо схему.Маємо три струми:  – отже, система також буде мати три рівняння:

1) для вузла *В*: ;

2) для контуру *І*:;

3) для контуру *ІІ*:.

Отримайте математичну модель цієї задачі – систему лінійних алгебраїчних рівнянь.



*Крок 3.* Розв’яжіть систему лінійних рівнянь та знайдіть силу струму.

**Д1**Для системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь із трьома невідомими



уведіть наступні позначення:

Визначник , який складається з коефіцієнтів при невідомих системи, називається головним визначником цієї системи. Якщо то система має єдиний розв'язок, який визначається формулами Крамера

.

Обчисліть визначники .

**Д1**Для обчислення визначників скористайтесь теоремою*Лапласа*.

Визначник  дорівнює сумі добутків елементів другого рядка на їх алгебраїчні доповнення:



=

Визначник  дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення:



=

Визначник  дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення:



=

Визначник  дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення:

 =

Обчисліть значення.

.

Якщо сила струму отримана від’ємною, то це означає, що напрям стуму на цій ділянці обрано неправильно, хоча це не впливає на правильність результату, адже значення сили стуму береться за модулем.

Відповідь: .

|  |  |
| --- | --- |
| 1.bmp | **Учимося самостійно розв’язувати завдання** |

**3.20.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Розв’яжіть систему матричним способом: | | |
|  |  |  |
|  |  | 1.bmpПеренесіть додан­ки, що містять невідомі, у ліву частину рівнянь, а вільні члени – у праву. |

**3.21.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Розв’яжіть систему за формулами Крамера: | | |
|  |  |  |
|  | 1.bmpПеренесіть додан­ки, що містять невідомі, у ліву частину рів­нянь, а вільні чле­ни – у праву. | Перенесіть доданки, що містять невідомі, у ліву частину рів­нянь, а вільні члени – у праву.1.bmp |

**3.22.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Розв’яжіть систему методом Гаусса: | | |
|  |  |  |
|  | 1.bmpПерепишіть дру­ге рівняння системи у вигляді: | 1.bmpПеренесіть до­дан­ки, що міс­тять невідомі, у ліву час­тину рів­нянь, а віль­ні члени – у праву. |

**3.23.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | | *ІІІ рівень* |
| Розв’яжіть систему рівнянь: | | | |
|  |  |  | |
| Застосуйте метод Гаусса1.bmp або метод Крамера. | Застосуйте метод Гаусса. Виразіть невідомі  через .1.bmp | 1.bmpЗастосуйте метод Гаусса. Друге рів­нян­ня перепишіть у вигляді: | |

**3.24.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Розв’яжіть систему однорідних рівнянь: | | |
|  |  |  |
| Застосуйте  метод Гаусса або метод Крамера.1.bmp | 1.bmpЗастосуйте метод Гаусса або метод Крамера. | 1.bmpЗастосуйте метод Гаусса. |

**3.25.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть зна­чення , за яких система має єдиний розв’язок: | Доведіть, що сис­тема має єдиний розв’язок, та роз­в’яжіть її за фор­мулами Крамера. | Довести, що якщо система рівнянь  сумісна, то |
| 1.bmpПереформулюйте задачу: за яких  визначник системи не дорівнює нулю. | 1.bmpПереформулюйте задачу: довести, що визначник системи не дорівнює нулю за будь-яких . | 1.bmpПерепишіть сис­тему у вигляді: |

**3.26.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *ІІ рівень* | | *ІІІ рівень* |
| Цех випускає продукцію трьох найменувань і використовує на її виготовлення два типи сировини. У таблиці наведено витрати кожного типу сировини на виробництво одиниці кожного найменування та запаси цієї сировини.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Пр.  Сир. | І | ІІ | ІІІ | запаси  сировини | | 1-й вид | 2 | 3 | 1 | 21 | | 2-й  вид | 1 | 0 | 2 | 15 |   Яку кількість продукції можна виготовити з цієї сировини? | | Два елементи з *ЕДС 1,6 В* й *1,3 В* та внутрішнім опором відповідно *1,0* й *0,5 Ом* з’єднані, як показано на рисунку. Опір *R* = *0,6 Ом*. Знайдіть струм в усіх гілках. Опір з’єднуючих проводів не враховувати. |
| Оберіть ефективний зручний запис подання даних. Представте дані задачі на схемі, користуючись законами Кірхгофа і враховуючи напрями струмів, що обрані умовно: I1 – стум у першому елементі, спрямовано ліворуч; I2 – стум у другому елементі, спрямовано праворуч; I3 – стум на ділянці з опором R, спрямовано праворуч.1.bmp |
| 1.bmpОберіть ефективну систему позначень (*х* – кількість одиниць продукції першого найменування, *у* – другого, *z* – третього) та складіть систему лінійних рівнянь, що моделює виробничу ситуацію. | |
| ***Д4*** | **Учимося застосовувати CAS** **під час розв’язування СЛАР** | |

**3.27.** Джерела струму з електрорушійними силами *Е*1 і *Е2* включено в ланцюг, як показано на рисунку 3.4. Знайдіть силу струму на всіх ділянках ланцюга, якщо *Е1 = 2,1В, Е2 = 1,9 В, R1 = 45 Ом, R2 = 10 Ом, R3 = 10 Ом*. Внутрішнім опором елементів зневажити.

*Переформулюйте умову на математичну.* Складіть систему лінійних рівнянь за допомогою законів Кірхгофа (позначимо силу струму на

відповідних ділянках ланцюга за ):

|  |  |
| --- | --- |
| Розв’яжіть отриману СЛАР за допомогою *CAS Derive*.    *Хід обчислення.*  1. Відкрийте вікно *CAS*  *Derive*.  2. За допомогою опції *Solve-System* ввести систему лінійних алгебраїчних рівнянь: | Д1.bmp  Рис. 3.4. Схема до завдання |

– порядок системи  у вікні *Solve Sistem Setup*;

– рівняння системи у вікні *Solve 3 equation(s)*;

– тип змінної, натиснувши правою клавішею мишки на вікні *Solution Variables*;

– номер виразу, під яким записано СЛАР (з’являється після натиснення клавіші *Enter*).

3. За допомогою опції *Symplify-Basic* розв’яжіть задану систему. Під наступним номером буде отримано розв’язки СЛАР, що визначають силу струму на всіх ділянках ланцюга.

Розв’яжіть отриману СЛАР за допомогою *CAS* *Mathcad*.

1. Відкрийте вікно *CAS* *Mathcad*.

2. За допомогою слова *Given*, що вживається як математичний термін, уведіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь у полі програми:

|  |  |
| --- | --- |
| – запис символів виконуйте за допомогою вкладки, що отримується з використанням опції *Вид – Панели инструментов – Вычисление* та виноситься на панель інструментів; |  |

– для запису десяткових дробів уживайте точку, наприклад *2.1*;

– перехід на наступний рядок для запису рівнянь відбувається натисненням клавіші *Enter*.

3. За допомогою опції *Добавить – Функции – Все – Find* введіть *Find* *(x, y, z)* таотримайте результат після введення символу «=» .

Буде отримано розв’язки СЛАР, що визначають силу струму на всіх ділянках ланцюга.



|  |  |
| --- | --- |
|  | **Як пов’язані вектори з інженерною практикою** |

Механізм – сукупність рухливих матеріальних тіл, одне з яких закріплене, а всі інші роблять цілком певні рухи, щодо нерухомого матеріального тіла. Ланки – матеріальні тіла, з яких складається механізм.

Монтажна щогла є найпростішим механізмом для підйому вантажів та виготовляється з металу. Щоглу встановлюють на опорній подушці. Її стійкість досягається натягом сталевого тросу чи умовою замкненості механізму.

Під час проектування механізму його ланки, зазвичай, позначають векторами. Їхня сума визначає умову замкненості механізму.

***Вектори*** допомагають записати умову замкненості до схеми, вказаного на рисунку 4.1, підйомного механізму в ненавантаженому стані.

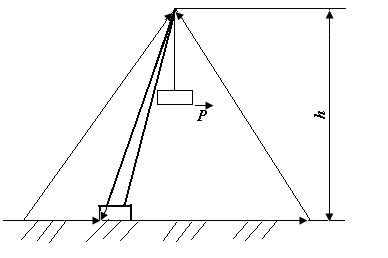


Рис. 4.1. Зображення схеми монтажної щогли

Під час моделювання зображення монтажної щогли ми позначаємо її ланки ***векторами***.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Д1** | **Складаємо опорний конспект** | |
| ***Вектор*** | | |
| Векторна величина на відміну від скалярної задається не лише своїм  чисельним значенням, а й | | **…** |
| Геометрично вектор це *напрямлений відрізок* , який позначається  або  та зображується | | Д1  де точка  - **…** вектора, а - його **…** |
| Відстань між початком вектора і його кінцем позначають  або  та називають | | **…** |
| Вектори  і    називають *колінеарними,* якщо | | вони лежать на одній чи на  **…** прямих |
| Вектори  і  Д1  називають *рівними*, якщо | | вони **…** , мають однакові **…** й однакові **…** |
| Два вектори  Д1  називають *протилежними,* якщо | | вони **…** , мають однакові **…**  і протилежні **…** |
| Вектор називають *нуль-вектором*,  якщо його | | **…**  і **…** збігаються |
| Вектор називають *одиничним*, якщо  його | | **…** дорівнює одиниці |
| Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора ,  називають | | **…**вектора  і позначають |
| *Кутом між двома векторами* і , зведеними до спільного початку, називають найменший кут, на який треба повернути вектор навколо спільного початку, щоб його напрям збігався з напрямом вектора | | Отже кут між векторами і будується  Д1абоД1 |
| Якщо три вектори лежать в одній  або паралельних площинах, | | то вони називаються **…** |
| ***Лінійні операції над векторами*** | | |
| *Сумою* векторів і за *правилом трикутника*  Д1  називають вектор , | | який з’єднує **…** вектора з **…** вектора за умови **…** |
| *Сумою* векторів і  за *правилом паралелограма*  *Д1*  називають вектор , | | який є **…** паралелограма, що побудовано на **…** за умови **…** |
| *Різницею* векторів і  Д1  називають вектор , | | який у сумі з вектором **…** складає вектор **…** |
| *Добутком* вектора на скаляр  називають вектор  такий,  що  і напрям | | якого збігається з напрямом вектора , якщо **…** , або він має напрям протилежний до напряму вектора , якщо **…** . |
| Властивості лінійних операцій над векторами: | | **…**  **…**  **…**  **…**  **…**  **…**  **…** |
| ***Проекція вектора на вісь*** | | |
| *Проекцією вектора на вісь* називають число, яке дорівнює  Д3 | | **…** , якщо вісь  і вектор  однаково напрямлені або  **…** , якщо вісь  і вектор  протилежно напрямлені |
| Властивості проекцій.  1. Проекція суми кількох векторів на ту ж вісь дорівнює сумі їх  проекцій на цю вісь, тобто  2. При множенні вектора на число  його проекція також помножиться на це число, тобто | | **…** |
| ***Лінійна залежність і незалежність векторів, базис*** | | |
| Вектори називають *лінійно залежними,* якщо є такі числа  не всі рівні нулю, що лінійна комбінація | | **…** |
| Вектори називають *лінійно незалежними,* якщо рівність  виконується лише за умови, коли | | усі числа  дорівнюють **…** |
| Будь-який упорядкований набір *n* дійсних чисел  позначають  або  і називають точкою *n* – вимірного координатного простору, що позначається | | **…** |
| Сукупність лінійно незалежних векторів називають базисом координатного простору , якщо для кожного вектора існують такі дійсні числа , що виконується | | рівність |
| Довільну упорядковану пару не колінеарних векторів координатного простору  називають | | **…** |
| Якщо вектор  має координати  і  у цьому базисі координатної площини  векторів  і ,  Д1 то | |  |
| Довільну упорядковану трійку не компланарних векторів координатного простору називають | | **…** |
| Якщо вектори  і  – базис у координатному просторі  і вектор  має координати  у цьому базисі, то вектор  розкладається за  базисом, тобто | |  |
| ***Прямокутна декартова система координат*** | | |
| Точку *О* й упорядковану трійку не компланарних базисних векторів називають декартовою системою координат у просторі, де | | точка *О* – **…** , а осі, які проходять через початок координат у напрямі базисних векторів, називають **…** |
| *Ортнормованим базисом* називають упорядковану трійку векторів | | одиничних  та  попарно перпендикулярних |
| Прямокутною декартовою системою координат (ПДСК) у просторі називають декартову систему координат, базис якої ортонормований | | Отже, доповнене зображення  Д1  позначають , де  - вісь **…** ,  - вісь **… ,**  - вісь **…** |
| ***Координати точки*** | | |
| Довільній точці трьохвимірного простору  можна поставити у відповідність у ПДСК вектор , де *О* – початок координат та який називають *радіус-вектором* точки | | Отже, на рисунку радіус-вектор точки  має вигляд  Д1 |
| Координати  радіус вектора  називають координатами точки  і пишуть | |  |
| Якщо відомі координати початку  та кінця  вектора  , то його координати  знаходять за формулою | |  |
| *Довжину вектора* (або відстань між точкамиі ) записують та обчислюють за формулою | |  |
| ***Розкладання вектора за ортонормованим базисом*** | | |
| Вектор  має координати  в ортонормованому базисі  Д1  та розкладається за базисом | |  |
| Розклад довільного вектора  за ортонормованим базисом  має вигляд  З1 | |  |
| ***Довжина вектора та напрямні косинуси*** | | |
| Довжину (модуль) вектора  обчислюють за формулою | |  |
| З1Косинуси , ,  кутів , який вектор утворює з коорди­натними вісями, на­зиваються *напрям­ними косинусами* век­тора ; вони визначають напрям вектора  в системі  та обчислюються за формулами | |  |
| ***Дії над векторами, заданими координатами*** | | |
| Якщо вектори  задані координатами, тобто  то | |  |
| Якщо вектор заданий координатами, тобто  то | |  |
| Вектори  і  є рівними тоді й лише тоді, коли | | одночасно |
| ***Умова колінеарності векторів, заданих координатами*** | | |
| Координати колінеарних векторів  і  пропорційні | |  |
| ***Ділення відрізка в заданому відношенні*** | | |
| Координати точки , яка ділить відрізок , де  і  навпіл, знаходять за  формулами | |  |
| Координати точки , яка ділить відрізок , де  і , у відношенні , тобто , знаходять за  формулами | |  |

|  |  |
| --- | --- |
| ***1.bmp*** | **Перевіряємо готовність до**  **практичного заняття** |

4.1. Як позначається сума векторів .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | не можна дати однозначну відповідь |

Д1За «правилом трикутника» додавання векторів .

4.2. Як позначається різниця векторів .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  | не можна дати однозначну відповідь | інша відповідь |

|  |  |
| --- | --- |
| Д1Скористайтесь означенням різниці векторів: . Згадайте поняття вектора протилежного даному: вектор  є протилежним до вектора  та позначається .  4.3. На рис. 4.2.  паралелепіпед. Оберіть трійку компланарних векторів. | Д1.bmp  Рис. 4.2. Паралелепіпед |

|  |  |
| --- | --- |
| А |  |
| Б |  |
| В |  |
| Г |  |
| Д | немає правильної відповіді |

Д1Скористайтеся означенням компланарних векторів: вектори називають *компланарними,* якщо вони лежать в одній чи паралельних площинах.

4.4. За даними, наведеними на рис. 4.2, виразіть вектор .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1Скористайтесь правилом паралелограма додавання векторів та правилом віднімання векторів (рис. 4.3 – 4.4)

|  |  |
| --- | --- |
| Д1.bmp | Д1.bmp |
| Рис. 4.3. Правило паралелограма додавання векторів | Рис. 4.4. Правило віднімання векторів |

4.5. Вкажіть за рис. 4.2 вектор, який не є колінеарним вектору .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь означенням колінеарних векторів: вектори називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

4.6. Вкажіть вектор, однаково спрямований із вектором .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь означенням добутку вектора на скаляр: добутком вектора  на скаляр  називають вектор , що  і напрям збігається з напрямом вектора , якщо , або він має напрям протилежний до напряму , якщо .

**4.7.** Знайдіть модуль вектора , якщо .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| 15 | 75 | -75 | -15 |  |

Д1 Скористайтесь означенням добутку вектора на скаляр (див. попереднє завдання).

**4.8.** Які з наведених значень можуть бути напрямними косинусами деякого вектора?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша  відповідь |

Д1Скористайтесь тим, що напрямні косинуси  задовольняють рівність .

4.9. Кут між векторами  і  дорівнює . Знайдіть кут між векторами  і .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1Скористайтесь означенням добутку вектора на скаляр (див. завдання 4.6).

**4.10.** Модуль вектора  дорівнює:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  | 14 | інша відповідь |

Д1Скористайтесь формулою для знаходження модуля вектора : .

**4.11.** Якщо , то його проекція на вісь *Оу* дорівнює:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  | 2 | -2 | 1 |

Д1Скористайтесь означенням координат вектора: проекції вектора на вісі *Ох*, *Оу* та *Oz* називають координатами вектора.

4.12. Якщо , то його розклад за декартовим ортонормованим базисом має вигляд:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1Скористайтесь тим, що векторну рівність  у символічній формі записують так .

**4.13.** Якщо  і , то координати вектора :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1Скористайтесь тим, що в разі, коли відомі координати початку  та кінця  вектора , то його координати знаходять за формулою .

4.14. Обчисліть , якщо  і .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  | 7 | інша відповідь |

Д1 Якщо вектори задано своїми координатами ,  тоді

.

4.15. Які з векторів , ,  і  є колінеарними?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| і | і | і | і | і |

Д1Скористайтесь умовою колінеарності: вектори колінеарні, якщо їхні відповідні координати пропорційні.

|  |  |
| --- | --- |
| **1.bmp** | **Учимося розв’язувати типові задачі** |

4.16. Точка *М* лежить на стороні *АВ* трикутника *АВС* і поділяє її у відношенні 2:3, якщо рахувати від точки *А*. Знайдіть координати, модуль вектора  та кути, які він утворює з координатними осями, якщо , , .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Знайдіть координати точки *М*, що поділяє відрізок *АВ* у відношенні *АМ:МВ=2:3*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Якщо ,  і точка *М* поділяє відрізок *АВ* у відношенні *АМ:МВ*=, то координати точки знаходять за формулами:

, , 

Отже, отримали .

*Крок 2.* Знайдіть координати вектора .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Скористайтесь тим, що в разі, коли відомо координати початку

 та кінця  вектора , то його координати знаходять за формулою .

Тобто, .

*Крок 3.* Знайдіть .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь формулою для знаходження модуля вектора : .

*Крок 4.* Обчисліть напрямні косинуси вектора .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Напрямні косинуси вектора  обчислюються за формулами:

, , .

*Крок 5.* Обчисліть кути  і , що утворює  з осями *Ох*, *Оу* та *Oz* відповідно.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: , , , .

**4.17.** Вектори  і  утворюють кут . Знайдіть  та , якщо  і .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1*. Зобразіть вектори  і  так, щоб вони мали спільний початок, та побудуйте їхню суму та різницю.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь правилом паралелограма додавання векторів та правилом віднімання векторів (рис. 4.5 – 4.6)

|  |  |
| --- | --- |
| Д1.bmp | Д1.bmp |
| Рис. 4.5. Правило паралелограма додавання векторів | Рис. 4.6. Правило віднімання векторів |

*Крок 2.* Знайдіть сторони, кути та діагоналі паралелограма .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь для знаходження сторони трикутника теоремою косинусів:  (де  – дві інші сторони,  – кут між ними).

*Крок 3.* Знайдіть  і .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь означенням модуля вектора: модуль вектора – відстань між його початком та кінцем (тобто довжина відрізка, яким зображено вектор).

Відповідь: , .

4.18. Дано два вектори  і . Знайдіть проекції на координатні осі вектора .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Знайдіть координати вектора .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь правилами множення вектора на скаляр та додавання векторів, що задані своїми координатами: якщо , , то , .

*Крок 2.* Знайдіть проекції , ,  вектора  на координатні осі.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь означенням координат вектора: проекції вектора на осі координат називаються координатами вектора.

Відповідь: 0, , .

4.19. З’ясуйте, при яких значеннях  і  вектори  і  колінеарні.

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Запишіть умову колінеарності векторів.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Вектори колінеарні тоді й лише тоді, коли їхні координати пропорційні.

*Крок 2.* Знайдіть з отриманих рівностей  і .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: , .

4.20. З’ясуйте, який вид має чотирикутник , якщо відомо координати його вершин , , , .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Знайдіть координати векторів :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Скористайтесь тим, що в разі, коли відомо координати початку  та кінця  вектора , то його координати знаходять за формулою .

*Крок 2.* Оскільки  і , то вони є рівними. Зробіть висновок щодо взаємного розташування та довжин відрізків  і .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь ознакою рівності векторів: вектори рівні тоді й лише тоді, коли їхні відповідні координати рівні.

*Крок 3.* Оскільки протилежні сторони чотирикутника паралельні та рівні між собою, то він є паралелограмом.

*Крок 4.* Знайдіть довжини діагоналей паралелограма  і  та з’ясуйте чи є паралелограм  прямокутником.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь ознакою прямокутника: якщо діагоналі паралелограма рівні, то він є прямокутником.

Тобто,  – прямокутник.

*Крок 5*. Знайдіть довжину сторони *ВС*. Зясуйте, чи є прямокутник  квадратом.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь ознакою квадрата: якщо в прямокутнику дві суміжні сторони рівні, то він є квадратом.

Відповідь:  – прямокутник.

4.21. Дано вектори , , . Знайдіть розклад вектора  за векторами  і .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Запишіть розклад вектора  за векторами  і  у загальному вигляді.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1*Розкладом вектора*  за базисом , , …,  називають рівність , де  ­– деякі числа.

*Крок 2*. Підставте координати векторів , і  в отриману рівність. Спростіть праву частину рівності.

Д1Для зручності записуйте вектори як вектор-стовпці.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 3.* Складіть, виходячи з отриманої рівності векторів, систему алгебраїчних рівнянь.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь ознакою рівності векторів: вектори рівні тоді й лише тоді, коли їхні відповідні координати рівні.

*Крок 4*. Розв’яжіть систему рівнянь.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь методом Крамера.

Отже, .

Відповідь: .

|  |  |
| --- | --- |
|  | ***Учимося моделювати***  ***професійну діяльність інженера*** |

4.22. До схеми монтажної щогли (рис. 4.7) записати умову замкненості у ненавантаженому стані.

*Хід розв'язання*.

*Крок 1.* Проаналізуйте умову задачі та переформулюйте її «мовою векторів».

|  |  |
| --- | --- |
| **Д1**Монтажна щогла є найпростішим механізмом для підйому вантажів та виготовляється з металу. Проектуючи механізм, позначимо його ланки векторами. Їхня сума визначає умову замкненості механізму. Для зображення ланок щогли векторами скористайтесь означенням вектора та правилом трикутника для побудови суми векторів. | Д1  Рис. 4.7. Зображення схеми монтажної щогли |

Зобразимо модель монтажної щогли й позначимо її ланки векторами на рисунку 4.8.

АВ на схемі зображує щоглу – ; ОА та АС утворюють натягнутий трос – ; ****** — кут, що створено натягнутим тро­сом із поверхнею землі;  — кут, що створено щоглою із вертикаллю.

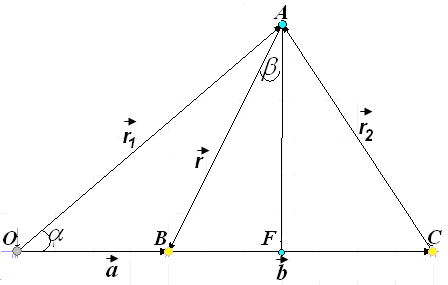
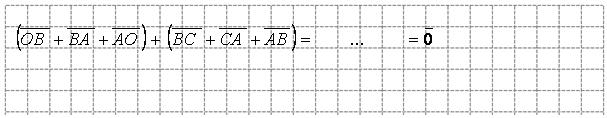


Рис. 4.8. Векторна схема монтажної щогли

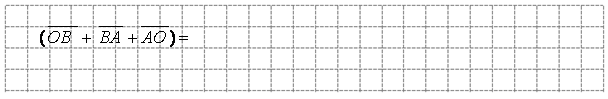
*Крок 2.* Запишіть умову замкненості для повної схеми щогли, що є об’єднанням двох схем із контурами ОВАО та ВСАВ.

**Д1**Оскільки векторна схема монтажної щогли є об’єднанням двох схем із контурами ОВАО та ВСАВ, то умова замкненості для повної схеми щогли запишеться у вигляді суми умов замкненості для кожної з частин окремо. У векторній формі цей запис має вигляд. Підставте введені позначання векторів.



*Крок 3.* Спростіть умову замкненості, використовуючи правила суми векторів.

**Д1**Оскільки за правилом суми векторів , то  а це означає, що умова замкненості виразиться векторним рівнянням:



*Крок 4.* Спроектуйте рівняння на осі координат.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | У нашому випадку:  1) збігається з осью проектування, тому ; |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 2) ; |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 3) перпендикулярний осі проектування, тому ; |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 4) . |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь означенням проекції вектора ** на вісь *.* Проекцію вектора ** на вісь ** обчислюють за формулою , де  - кут між напрямом осі ** і напрямом вектора .



Проекція суми кількох векторів на ту ж вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь, тобто:



Одержимо умову замкненості в скалярній формі (замість векторів  у рівняння  підставте їх проекції на осі):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: умова замкненості механізму монтажної щогли

|  |  |
| --- | --- |
| 1.bmp | **Учимося самостійно розв’язувати завдання** |

**4.23.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| У паралелограмі  *О* – точка перетину діагоналей, , . Ви­разіть через вектори  і  вектор . | Точка *М* – середина ребра  куба . Ви­разіть вектор  через вектори , , . | Точка *М* не лежить в площині трикут­ника *АВС*. Виразіть вектор  через вектори ,, якщо *К* – середина відрізка *ВС*. |
| 1.bmpСкористайтесь тим, що | 1.bmpВектор  виразіть через век­тори  і . | 1.bmpЗдійснить пере­хід у площину: знай­діть коорди­нати век­­торів  і . |

**4.24.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть  та його модуль, якщо , . | Знайдіть  та його  мо­дуль, якщо ,. | Знайдіть  та його  модуль, якщо |
|  | 1.bmpСпростіть ви­раз, яким визна­чається вектор . | Спростіть ви­раз, яким визна­чається вектор  та пере­­йдіть від розкладу вектора за ортами до його координат.1.bmp |

**4.25.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Перевірити, чи є коліне­арними век­тори  і . Уста­новити, який із них має більшу дов­жину. | Дано вектори  та . Уста­но­вити, чи є колі­неарними вектори  та . | Перевірити, що чотири точки  , ,  є вершинами трапеції. |
| 1.bmpЗапишіть вектор  у вигляді: , та знай­діть значен­ня . | 1.bmpРозбийте за­да­чу на під­задачі:  1) знай­ти коор­ди­нати векторів  і ; 2) установити колі­не­­арність векторів  і . | 1.bmpПереформулюй­те задачу: перевірте, що серед усіх пар векторів, що мож­на побудувати, викорис­товуючи точки *А, В, С* і *D*, є два колінеарних. |

**4.26.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть розклад вектора   за векторами  ,  і | Дано вектори  , ,  ,.  Знайдіть розклад век­то­ра  за векторами . | Знайдіть розклад вектора  за трьома неком­пла­нар­ними векторами:  ,  і . |
| 1.bmpПереформу­люйте зада­чу: знайти  такі, що | 1.bmpРозбийте задачу на підзадачі:  1) знайдіть роз­клад вектора  за век­то­рами ; 2) виразіть вектор  через . | 1.bmpВиразіть векто­ри  через векто­ри  і , розв’я­­зуючи сис­те­му трьох лінійних рів­нянь із трьома неві­до­мими. |

**4.27.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | | *ІІІ рівень* | |
| Нехай . Знайдіть напрямні косинуси цього вектора. | Вектор , що заданий координатами складає з координатними осями *Ох* та *Оу* кути , . Обчисліть коорди­на­ти цього вектора, якщо . | | Д1.bmp  Рис. 4.9. Розклад сили  Сила  роз­кладена за трьо­­ма взаємно перпен­ди­ку­лярними на­прям­ками, як пока­зано на рис. 4.9 (). Знай­діть кути, які утворюють складові з на­прям­ком дії цієї сили, якщо , . | |
| 1.bmpЗнайдіть спо­чатку коор­ди­нати вектора  за цим роз­кла­­­дом. | 1.bmpЗнайдіть спо­чатку косинуси всіх трьох кутів (), що ут­ворює вектор  з коор­ди­натними осями, ура­ховуючи, що  може набувати двох значень. | | 1.bmpПереформулю­йте задачу: модуль вектора дорівнює 26, його апліката та абсциса дорівнюють відповідно 13 і 2. Знайдіть напрямні косинуси вектора. | |
| ***Д4*** | | **Учимося застосовувати ППЗ *DG* під час розв’язування задач із векторної алгебри** | |

**4.29.** Для запису умови рівноваги сил, що діють у навантаженій монтажній щоглі, розробіть модель об’єкта, для якої необхідно врівноважити сили, за допомогою векторів із застосуванням *ППЗ**DG.*

*Переформулюйте умову на математичну.* Сила , що являє собою вагу вантажу, який піднімається щоглою, за правилом паралелограма розкладається на дві силита , де  — сила, що стискає щоглу (зусилля в щоглі);  — натяг тросу (зусилля в тросі). Запишіть умову рівноваги зазначених сил у вигляді векторного рівняння. Спроектуйте векторне рівняння на осі координат та отримайте умову рівноваги в скалярній формі.

*Хід моделювання.*

1. Відкрийте вікно *ППЗ DG*.

2. За допомогою опції *Фігури-Аналітично-Вектор* побудуйте:

– вектор , для цього відзначити точку *О* – начало вектора, точку *А* – кінець вектора;

– вектор , для цього відзначити точку *О* – начало вектора, точку *В* – кінець вектора;

– вектор , для цього відзначити точку *А* – начало вектора, точку *В* – кінець вектора;

– вектор , для цього відзначити точку *В* – начало вектора, точку *С* – кінець вектора;

– вектор , для цього відзначити точку *С* – начало вектора, точку *А* – кінець вектора.

3. Вектор  відображає силу, що стискає щоглу (зусилля в щоглі). Вектор  відображає натяг тросу (зусилля в тросі).

4. За допомогою опції *Фігури-Виміряти-Виміряти кут* побудуйте  — кут, щостворено натягнутим тро­сом із поверхнею землі;  — кут, що створено щоглою із вертикаллю.

Буде отримано модель об’єкта, для якої необхідно врівноважити сили, за допомогою векторів.



|  |  |
| --- | --- |
|  | **Як пов’язаний скалярний добуток векторів з інженерною практикою** |

Для характеристики сили *F*, що діє на тіло, застосовують величину, яка називається механічною роботою. Механічна робота — це [фізична величина](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0), що є кількісною характеристикою дії [сили](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%BB%D0%B0) *F* на процес *γ(t)* та залежить від чисельної величини, напрямку сили й від переміщення точки її прикладення.

Припустимо під дією постійної сили тіло рухається прямолінійно з положення *1* у положення *2* та проходить відстань *S.* Знайдіть роботу сили з переміщення матеріальної точки вздовж вектора (рис. 5.1).

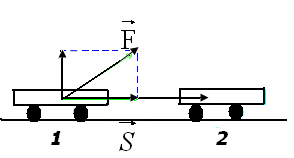
**

Рис. 5.1. Модель-схема характеристики дії сили на тіло,   
що рухається прямолінійно з положення *1* у положення *2*

Поняття ***скалярного добутку векторів*** виникає під час обчислення такої роботи сили, що дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Д1** | **Складаємо опорний конспект** | | |
| ***Скалярний добуток двох векторів*** | | | | |
| *Скалярним добутком* двох векторів  і  називають число , що  дорівнює | | |  | |
| Якщо хоча б один із векторів  чи  нульовий, то за означенням їх  скалярний добуток дорівнює | | | **…** | |
| Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора. | | | Отже, у випадку  Д10  **…** | |
| Скалярний добуток вектора сили на вектор переміщення | | | **…** | |
| ***Властивості скалярного добутку*** | | | | |
| До *алгебраїчних властивостей скалярного добутку* відносяться:  1)  2)  3) | | | **…**  **…**  **…** | |
| До *геометричних властивостей і скалярного добутку* відносяться:  1) якщо  та  та  кут  гострий, то  2) ) якщо  та  та  кут  тупий, то  2) скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли  3) скалярний квадрат вектора  дорівнює | | | , звідки | |
| ***Вираження скалярного добутку через координати векторів та обчислення кута між векторами*** | | | | |
| Якщо вектори  і  задані своїми координатами  , , то | | |  | |
| Якщо вектори  і  задані координатами ,  , то умова перпендикулярності цих векторів | | |  | |
| Якщо вектор  заданий координатами ,  то його довжина | | |  | |
| Якщо вектори  і  задані координатами ,  , то косинус кута між цими векторами обчислють | | |  | |
| Якщо вектори  і  задані координатами ,  , то проекцію вектора  на  обчислють | | |  | |
| ***1.bmp*** | | **Перевіряємо готовність до**  **практичного заняття** | | |

**5.1.** Вектор , . Знайдіть скалярний добуток цих векторів.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1 Скористайтесь формулою для обчислення скалярного добутку векторів, які зада­но своїми координатами: якщо, ,  то 

**5.2.** Якщо  і  – кут між векторами  і , то:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| – гострий | – тупий | – прямий | – кут ІІ або ІІІ чвертей | інша відповідь |

Д1Скористайтесь геометричними властивостями скалярного добутку: якщо , то кут між цими векторами тупий, якщо  , то – гострий.

**5.3.** Якщо  і  – кут між векторами  і , то:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| – гострий | – тупий | – прямий | – кут І або ІV чвертей | інша відповідь |

Д1 Скористайтесь геометричними властивостями скалярного добутку (див. попереднє питання).

**5.4.** Якщо ,  і  – ненульові вектори та  – кут між векторами  
  і , то:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| – гострий | – тупий | – прямий |  | інша відповідь |

Д1 Скористайтесь ознакою перпендикулярності векторів: ненульові вектори перпендикулярні тоді й лише тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

**5.5.** Відомо, що , у цьому випадку:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1 Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто .

**5.6.** Оберіть невірну рівність із наведених:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1Використовуйте властивості скалярного добутку.

**5.7.** Відомо, що , , . Знайдіть проекцію вектора  на вектор .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1Проекція вектора  на вектор  обчислюється за формулою .

5.8. Відомо, що , , . Знайдіть .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1Скористайтесь геометричним змістом скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку модуля одного вектора на проекцію іншого на нього.

**5.9.** Якщо , , ,  - кут між векторами  і , то:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь означенням скалярного добутку векторів: , де  - кут між векторами  і .

|  |  |
| --- | --- |
| **1.bmp** | **Учимося розв’язувати типові задачі** |

**5.10.** Вектори  і  утворюють кут . Знайдіть  і , якщо , а .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Знайдіть скалярний квадрат .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто .

*Крок 2.* Спростіть вираз .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь властивостями скалярного добутку векторів:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) ; | 3) ; |
| 2) ; | 4) . |

Тобто, перетворення з виразами, що містять скалярний добуток векторів, можна виконувати за правилами алгебри.

*Крок 3.* В отриманому виразі розпишіть скалярні квадрати і скалярні добутки векторів та обчисліть значення отриманого виразу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто .

Скалярний добуток векторів обчислюється за формулою: , де  - кут між векторами  і .

Відповідь: ; .

**5.11.** Дано вершини трикутника *АВС*: , , . Знайдіть зовнішній кут трикутника при вершині *В*.

*Хід розв’язання.*

*Крок 1*. Побудуйте  та його зовнішній кут  при вершині *В*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Зовнішнім кутом трикутника *АВС* при вершині *А* називають кут суміжний з внутрішнім кутом *А* цього трикутника.

*Крок 2.* Спочатку необхідно знайти внутрішній . Це кут, який утворюють вектори  і . Знайдіть координати цих векторів.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 3.* Знайдіть скалярний добуток ,  і .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь формулою для обчислення скалярного добутку векторів, які задано своїми координатами: якщо, , то  .

Скористайтесь формулою для знаходження модуля вектора : .

*Крок 4.* Знайдіть  – кут між векторами  і .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Виразіть косинус кута між векторами з формули для скаляного добутку векторів: , де  - кут між векторами і .

*Крок 5.* Знайдіть кут , що є суміжним з .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: .

**5.12.** При якому значенні  вектори  і  є перпендикулярними?

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Запишіть координати векторів  і .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Скористайтесь тим, що векторну рівність  у символічній формі записують так .

*Крок 2.* Запишіть умову перпендикулярності ненульвих векторів.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Скористайтесь ознакою перпендикулярності векторів: ненульові вектори перпендикулярні тоді й лише тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

*Крок 3.* Розпишіть скалярний добуток векторів  і  через їхні координати та розв’яжіть отримане рівняння відносно .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Якщо , , то .

Відповідь: , .

**5.13.** Дано вектори ,  і . Обчисліть .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Знайдіть вектор .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Якщо вектори задано своїми координатами , , тоді .

*Крок 2.* Знайдіть .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Скористайтесь формулою для знаходження модуля вектора : .

*Крок 3.* Знайдіть .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Якщо , , то  .

*Крок 4.* Знайдіть .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Проекція вектора  на вектор  обчислюється за формулою .

Відповідь: .

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Учимося моделювати**  **професійну діяльність інженера** |

**5.14.** Знайдіть величину роботи результуючої сил  , , прикладеної до точки  щодо точки , та на який кут прикладено результуючу силу до вектору шляху.

*Хід розв'язання*.

*Крок 1.* Знайдіть координати вектора результуючої сил (суму складових сил):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Д1**Робота результуючої сили дорівнює сумі робіт складових сил. При додаванні векторів їхні відповідні координати додають.

*Крок 2.* Знайдіть координати вектора .

**Д1**Якщо відомі координати початку  та кінця  вектора , то його координати знаходять за формулою 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 3.* Обчисліть скалярний добуток та знайдіть роботу результуючої сили.

**Д1**Для векторів  і , заданих своїми координатами , , їх скалярний добуток обчислюється за формулою  .

**Д1**Робота сили дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 4.* Знайдіть градусну міру кута, на який прикладено результуючу силу до вектору шляху.

**Д1**Косинус кута між векторами ,  обчислюється за формулою:

.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ; |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: величина роботи результуючої сил , , , прикладеної до точки  щодо точки , ; кут, на який прикладено результуючу сил до вектору шляху, .

|  |  |
| --- | --- |
| 1.bmp | **Учимося самостійно розв’язувати завдання** |

**5.15.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Обчисліть значення виразу: , якщо , | Обчисліть значення виразу: , якщо , | Обчисліть значення виразу: , якщо , ,  і  - взаємно перпен­ди­ку­ляр­ні вектори, . |
| 1.bmpСпочатку спростіть цей вираз. | 1.bmpСпростіть цей ви­раз та знайдіть коор­ди­нати век­торів  і . | 1.bmp Спочатку спрос­­­тіть цей ви­раз. |

**5.16**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть вектор  та йо­го модуль, якщо він перпендикуляр­ний вектору . | Знайдіть вектор , якщо відомо, що його ордината дорівнює 1 і він перпендикулярний векторам  і | Знайдіть вектор , якщо відомо, що він перпендикулярний осі *Оz*,  і , де |
| 1.bmpСкладіть за даними задачі рівняння. | 1.bmpУведіть позна­чен­ня  та скла­діть сис­тему рів­нянь, викорис­то­ву­ю­чи дані задачі. | 1.bmpПереформулюй­те умову «вектор  перпендику­лярний осі *Оz*» так: вектор  перпен­дику­лярний напрямному вектору осі *Оz* . |

**5.17.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть кут між діагона­лями чоти­ри­кут­ника , як­що , , , . | Знайдіть кут між медіанами *АМ* та *ВК* трикутника *АВС*, якщо:  , , . | У прямокутному паралелепіпеді  ,,,  сере­ди­на , середи­на  Знайдіть кут між прямими  та . |
| Переформулюйте задачу: знайдіть кут між векторами  і .1.bmp | 1.bmpПереформулюйте задачу: знайдіть кут між векторами  і . | 1.bmpУведіть декар­тову систему координат і переформулюй­те задачу: знайти кут між векторами  і . |

**5.18.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть проекцію вектора  на вектор . | Нехай , , , . Знайдіть  про­­екцію  на . | Сила  роз­кладена за трьо­ма нап­рям­ками, один з яких за­дано векто­ром . Знай­діть складову сили  у напрямку вектора . |
| Розбийте зада­чу на підзадачі: знайти коорди­нати ; знайти зазна­чену проекцію.1.bmp | 1.bmpРозбийте зада­чу на підзадачі: знайти коорди­нати  і ; знайти зазна­чену проекцію. | 1.bmpПереформулюй­те задачу: знай­діть проекцію сили  на вектор . |

**5.19.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть роботу  си­ли  з прямолінійного пе­реміщення тіла з точки  у точку . | Знайдіть роботу сили  з прямо­лінійного пе­ре­міщення з точки  у точку , якщо нап­рямок дії сили ут­ворює з напрям­ком перемі­щення кут . | Робота рівнодіючої сил ,,  з пере­міщен­ня тіла вздовж вісі *Оz* дорівнює 7*Дж*. На яку відстань змістилася точка? |
| Переформу­люй­­те задачу: знай­діть робо­­ту си­ли  по пере­мі­щенню тіла на вектор 1.bmp. | 1.bmpПереформулюй­­те задачу: знай­діть ска­­лярний добу­ток векто­рів  і . | Переформулюй­­те задачу:1.bmp скаляр­ний добуток век­тора рівнодію­чої та вектора колінеа­рно­го век­тору до­рів­­нює 7. Знайдіть модуль остан­нього. |

|  |  |
| --- | --- |
| ***Д4*** | **Учимося застосовувати ППЗ під час обчислення кутів між векторами** |

**5. 20.** Координати сили, що діє на точку, – , , . Координати переміщення точки , , . Обчислити роботу сили , що діє на точку, й кут  між вектором сили  й вектором переміщення  із застосуванням *ППЗ* *Gran3D*.

*Переформулюйте умову на математичну.* Знайдіть кут між векторами  й  та скалярний добуток цих векторів.

*Хід обчислення.*

1. Відкрийте вікно *ППЗ Gran3D*.

2. За допомогою опції *Об’єкт-Створити-Точка* побудуйте в полі програми точки *S* *(7; 1; 3), F(3; 4; 5)*.

3. За допомогою опції *Обчислення-Кут-За трьома точками* введіть послідовно точки *S(7; 1; 3), О(0; 0; 0), F(3; 4; 5)*, активізуючи їх координати курсором по команді «виберіть … точку». У правому нижньому куті звіту з’явиться значення кута.

4. За допомогою опції *Обчислення-Значення виразу*  введіть числовий вираз  та отримайте результат обчислень у цьому ж вікні.

****

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Як пов’язані векторний та мішаний добутки з інженерною практикою** |

Припустимо, до тіла (точка *А*) прикладено силу  та задано точку *О* – як деяку точку простору (рис. 6.1.). Знайдіть момент сили щодо точки О.Момент сили *M* щодо точки, у якій закріплено тіло, характеризує здатність сили обертати тіло навколо цієї точки, відносно якої він береться.При обертовому русі силовий вплив характеризується моментом сили, а не силою.

Моментом сили щодо точки *О* називають вектор , який проходить через точку *О* й задовольняє такі умови: перпендикулярний площині, що проходить через точки *О*, *А* і *В*; чисельно дорівнює добутку сили на плече; утворює праву трійку з векторами  і .

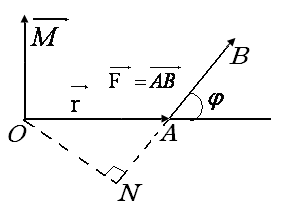


Рис. 6.1. Модель-схема моменту сили  щодо точки *О*

Поняття ***векторного добутку*** векторів виникає під час обчислення такого моменту сили, що дорівнює векторному добутку вектора сили на вектор переміщення, отже, .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Д1** | **Складаємо опорний конспект** | |
| ***Векторний добуток векторів*** | | | |
| У результаті *векторного добутку* вектора  на вектор , на відміну від скалярного добутку, завжди буде отримано | | **…** | |
| Модуль вектора , отриманого у результаті *векторного добутку* вектора  на вектор , обчислюють за формулою | | , де  кут  - кут між векторами  і | |
| Щодо кожного з векторів  і  вектор , що є векторним добутком, розташований завжди | | **…** | |
| Вектори ,  і , що отриманий у результаті векторного добутку вектора  на вектор , утворюють *праву трійку.* Тобто якщо дивитися з кінця результуючого вектора , то най­коротший поворот від першого вектора  до другого вектора  здійснюється | | **…** | |
| За геометричним змістом модуль  векторного добутку дорівнює | | **…** , побудованого на прикладених до спільного початку векторах  і | |
| До алгебраїчних властивостей векторного добутку відносяться: | |  | |
| Два ненульові вектори  і  колінеарні тоді й лише тоді, коли векторний добуток цих векторів дорівнює | | **…** , тобто | |
| Якщо відомі координати вершин трикутника *АВС*, то його площу  доцільно шукати за формулою | |  | |
| ***Обчислення векторного добутку двох векторів, заданих координатами*** | | | |
| Якщо вектори ,  задані своїми координатами, тоді векторний добуток знаходять за формулою | |  | |
| ***Момент сили щодо точки*** | | | |
| Моментом сили , прикладеної в точці *А* щодо точки *О* позначають вектор  та  обчислюють за формулою | | , модуль якого чисельно дорівнює | |
| ***Лінійна швидкість обертання*** | | | |
| Швидкість  точки *М* твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю  навколо нерухомої осі та , де *О* – деяку нерухому точку осі визначають за  формулою Ейлера | |  | |
| ***Мішаний добуток векторів*** | | | |
| Мішаним (векторно-скалярним) добутком трьох векторів ,  і  називають число , рівне | | **…**  вектора  на вектор : | |
| Якщо в мішаному добутку поміняти місцями будь-які два множники, то мішаний добуток | | **…** , наприклад: | |
| При циклічному переставленні  множників мішаний добуток | | **…**  , тобто | |
| У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків  можна | | **…** , тобто | |
| За геометричним змістом модуль мішаного добутку  чисельно  дорівнює | | **…** , побудованого на прикладених до спільного початку векторах ,  і  тобто | |
| Об’єм піраміди, побудованої на векторах ,  і , дорівнює | | … частини … , тобто | |
| Вектори ,  і  компланарні тоді  і лише тоді, коли | |  | |
| ***Обчислення мішаного добутку трьох векторів, що задані координатами*** | | | |
| Якщо вектори ,  і  задано своїми координатами, то мішаний добуток цих векторів дорівнює | |  | |
| Якщо вектори ,  і  задано своїми координатами, компланарні,  то | |  | |

|  |  |
| --- | --- |
| ***1.bmp*** | **Перевіряємо готовність до**  **практичного заняття** |

**6.1.** Відомо, що , , а кут між векторами  і  дорівнює . Оберіть правильне твердження:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1Векторним добутком двох векторів  і  називають вектор , який задовольняє трьом умовам: 1) ; 2) вектори  і  утворюють праву трійку векторів; 3) , де  - кут між векторами  і .

**6.2.** Якщо , то можна стверджувати, що:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| і  не є перпендику­лярними | і  не є колінеарними | і  утворюють гострий кут | і  утворюють тупий кут | інша відповідь |

Д1Скористайтесь умовою колінеарності векторів: вектори  і  колінеарні тоді й лише тоді, коли .

**6.3.** Якщо , то:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1Скористайтесь різними умовами колінеарностей векторів:

1) вектори  і  колінеарні тоді й лише тоді, коли ;

2) вектори  і  колінеарні тоді й лише тоді, коли .

**6.4.** Спростіть вираз .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1Використовуйте властивості векторного добутку векторів: 1) ;   
2) .

**6.5.** У паралелограмі  , а . Площа цього паралелограма обчислюється за формулою:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1Геометричний зміст векторного добутку: модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на прикладених до спільного початку векторах.

**6.6.** Який із виразів не може бути правою частиною рівності …

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  |  |

Д1Мішаним добутком векторів ,  і  називається число, що дорівнює *******.* У мішаному добутку знаки векторного та скалярного добутків можна міняти місцями: *.*

6.7. Відомо, що . Оберіть правильне твердження:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
| і  утворюють праву трійку векторів | і  утворюють ліву трійку векторів | і  компланарні | і  колінеарні | інша відповідь |

Д1Якщо , то вектори  і **** утворюють праву трійку векторів, якщо , то – ліву трійку, якщо , то вектори  і **** компланарні.

6.8. Нехай **** – паралелепіпед. Об’єм цього паралелепіпеда може бути обчислений за формулою:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1Скористайтесь геометричним змістом мішаного добутку векторів: модуль мішаного добутку  дорівнює обєму паралелепіпеда, побудованого на прикладених до спільного початку векторах  і ****.

**6.9.** Нехай  – трикутна призма. Об’єм цієї призми може бути обчислений за формулою:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1 Скористайтесь геометричним змістом мішаного добутку векторів: модуль мішаного добутку  дорівнює обєму паралелепіпеда, побудованого на прикладених до спільного початку векторах  і ****.

**6.10.** Нехай **** – піраміда. За якою формулою можна обчислити її об’єм?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1Обєм піраміди, побудованої на векторах  і , дорівнює  об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих же векторах.

**6.11.** Задано вектори  і . Чому дорівнює їх векторний добуток ?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  | 16 | інша відповідь |

Д1Якщо вектори  і  задано своїми координатами, то їхній векторний добуток обчислюється за формулою:



**6.12.** Задано вектори ,  і . Їхній мішаний добуток може бути обчислений так:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | Б | В | Г | Д |
|  |  |  |  | інша відповідь |

Д1 Якщо вектори ,  і  задано своїми координатами, то їхній мішаний добуток обчислюється за формулою:

****.

|  |  |
| --- | --- |
| **1.bmp** | **Учимося розв’язувати типові задачі** |

**6.13.** Відомо, що ,  і . Знайдіть синус кута  між векторами  і .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Знайдіть .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь формулою для обчислення косинуса кута між векторами: .

*Крок 2.* Обчисліть .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь основною тригонометричною тотожністю: .

Відповідь: .

**6.14.** Знайдіть векторний добуток , якщо , , де , .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Знайдіть координати векторів  і .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Якщо вектори задано своїми координатами , , тоді , а .

*Крок 2.* Отже,  і . Знайдіть .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Якщо вектори  і  задано своїми координатами, то їхній векторний добуток обчислюється за формулою:



Д1Для обчислення визначника скористайтесь теоремою*Лапласа*.

*Крок 3.* Отже, . Знайдіть координати вектора .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1 Скористайтесь тим, що векторну рівність  у символічній формі записують так: .

Відповідь: .

**6.15.** Знайдіть площу паралелограма, побудованого на векторах  і , якщо , , а кут  між векторами  і  дорівнює .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Спростіть вираз .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Д1Скористайтесь властивостями векторного добутку векторів: 1) ;  
2) ; 3) .

*Крок 2.* Отже, . Знайдіть .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Скористайтесь тим, що .

Для обчислення  використовуйте формулу: , де  - кут між векторами  і .

*Крок 3.* Отже, площа паралелограма, побудованого на векторах  і  дорівнює:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Скористайтесь геометричним змістом векторного добутку векторів: модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на прикладених до спільного початку векторах.

Відповідь: 30.

**6.16.** Знайдіть вектор , якщо ,  і  та відомо, що , , .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Знайдіть .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

 Якщо вектори  і  задано своїми координатами, то їхній векторний добуток обчислюється за формулою:

.

*Крок 2.* Визначте взаємне розміщення векторів  і ,  і  та  і 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | , |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | . |  |  |  |  |  |  |  |  |

Векторним добутком двох векторів  і  називають вектор , який задовольняє трьом умовам: 1) ; 2) вектори  і  утворюють праву трійку векторів; 3) , де  - кут між векторами  і .

*Крок 3.* Оскільки , то . Виразіть координати вектора .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Якщо вектор задано своїми координатами , тоді .

*Крок 4.* За умовою . Запишіть цю рівність через координати векторів  і  та знайдіть .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

 Якщо, ,  то  .

*Крок 5.* Оскільки , то 

Відповідь: .

**6.17.** З’ясувати орієнтацію трійки векторів ,  і .

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Знайдіть мішаний добуток векторів .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

 Якщо вектори ,  і  задано своїми координатами, то їхній мішаний добуток обчислюється за формулою:

****

*Крок 2.* З’ясуйте орієнтацію трійки векторів .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

 Якщо , то вектори  і **** утворюють праву трійку векторів, якщо , то – ліву трійку.

Відповідь:  утворюють ліву трійку.

**6.18.** Чи належать точки , ,  і  одній площині.

*Хід розв’язання.*

*Крок 1.* Знайдіть координати векторів і .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Якщо відомі координати початку  та кінця  вектора  , то його координати знаходять за формулою .

*Крок 2.* Знайдіть мішаний добуток .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

 Якщо вектори ,  і  задано своїми координатами, то їхній мішаний добуток обчислюється за формулою:



*Крок 3.* Визначте, чи є вектори  і  компланарними.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Скористайтесь ознакою компланарності векторів: вектори ,  і  компланарні тоді й лише тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

*Крок 4.* Оскільки вектори  і  не є компланарними, то точки  і  не лежать в одній площині.

Відповідь: не лежать в одній площині.

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Учимося моделювати**  **професійну діяльність інженера** |

**6.19.** Знайдіть величину моменту результуючої сил , , , прикладеної до точки  щодо точки .

*Хід розв'язання*.

*Крок 1.* Знайдіть координати вектора результуючої сил.

**Д1**Робота результуючої сили дорівнює сумі робіт складових сил. При додаванні векторів їхні відповідні координати додають.

Знайдіть суму складових сил:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 2.* Знайдіть координати вектора .

**Д1**Якщо відомо координати початку  та кінця  вектора , то його координати знаходять за формулою 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 3.* Знайдіть вектор моменту результуючої сили.

**Д1**Момент сили дорівнює векторному добутку вектора сили на вектор переміщення , де

.

Обчисліть визначник .

**Д1**Скористайтесь для обчислення визначника правилом трикутника.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 4.* Знайдіть величину моменту результуючої сил .

**Д1**Довжину (модуль) вектора  обчислюють за формулою .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Отже, , де |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: величина моменту результуючої сил , , , прикладеної до точки  щодо точки ,  *од. моменту.*

**6.20.** Обчисліть площу грані *АВС* і об’єм піраміди, вершинами якої є точки , , , .

*Хід розв'язання*.

*Крок 1.* Знайдіть координати векторів ,  і , на яких побудовано піраміду.

**Д1**Якщо відомі координати початку  та кінця  вектора  , то його координати знаходять за формулою 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 2.* Знайдіть площу грані *АВС.*

**Д1**Якщо відомі координати вершин трикутника *АВС*, то його площу доцільно шукати за формулою

.

**Д1**Якщо вектори ,  задані своїми координатами, то векторний добуток знаходять за формулою

.

**Д1**Для обчислення визначника скористайтесь теоремою*Лапласа*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Знайдіть модуль векторного добутку.

**Д1**Довжину (модуль) вектора  обчислюють за формулою  .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Крок 3.* Знайдіть об’єм піраміди, побудованої на векторах ,  і .

**Д1**Об’єм піраміди, побудованої на векторах ,  і , дорівнює *1/6* частини об’єму паралелепіпеда, тобто .

Отже, об’єм піраміди  дорівнює *1/6* частини об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах ,  і .

**Д1**Для обчислення визначника третього порядку скористайтесь правилом трикутника.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Відповідь: кв. од., куб. од.

|  |  |
| --- | --- |
| 1.bmp | **Учимося самостійно розв’язувати  завдання** |

**6.21.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Дано трикутник , де ,  і . Знайдіть площу три­кутника . | Дано трикутник , де ,  і . Знайдіть довжину його висоти . | У паралелограмі  відомі коор­динати трьох вер­шин: ,  і . Знайдіть дов­жину його висоти . |
| 1.bmpПереформулюй­те задачу: знай­діть . | 1.bmpЗастосуйте ме­тод площ: об­чис­літь пло­щу двома спосо­­ба­ми: 1) через век­торний добу­ток век­то­рів; 2) через сторону та ви­соту, проведену до цієї сторони. | 1.bmpВиділяйте під­задачі: 1) знайти координати вер­шини ; 2) обчислити площу пара­лелограма; 3) обчислити висоту через площу. |

**6.22.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| З’ясувати, чи є компланарними век­то­ри ,    і . | Чи утворюють вектори ,  і  базис. | При яких значеннях параметру  вектори , і  ком­пла­нарні. |
| Переформулюй­те задачу1.bmp: чи дорів­нює нулю мішаний добу­ток векторів ,  і . | 1.bmpПереформулюй­те задачу: чи ком­планарні век­тори   і . | 1.bmpПереформулюй­те задачу: при яких значеннях  . |

**6.23.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть , якщо , , а кут між ни­ми дорів­нює . | Знайдіть , якщо , , а | Знайдіть , якщо , , а кут між ними дорів­нює . |
| 1.bmpВиділяйте під­задачі:  1) спрос­тіть вираз ;  2) знайдіть модуль отриманого вектора. | 1.bmpПереформулюй­те задачу: , , а кут між ними дорівнює . Знайдіть | 1.bmpПереформулюй­те запитання задачі:  знайдіть |

**6.24.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть будь-який вектор, перпенди­кулярний векторам і | Знайдіть одиничний вектор, перпенди­кулярний векторам і | Знайдіть одиничний вектор  такий, що перпенди­кулярний векторам  і , та вектори  і  утворюють праву трійку векторів. |
| 1.bmp За допомогою відомих вам операцій над векторами утво­­ріть вектор, який був би перпенди­куляр­ним кож­ному з векторів і . | 1.bmpПереформулюй­те задачу: знай­діть одиничний вектор, коліне­ар­ний век­тор­ному до­бутку век­торів  і . | 1.bmpПереформулюй­те задачу: знай­діть одиничний вектор, одна­ково напрям­лений з векторним до­бутком векторів  і . |

**6.25.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть момент сили , прикладе­ної до точки  щодо початку коор­динат. | Знайдіть момент та напрямні косинуси сили , прикладе­ної до точки  щодо точки . | Знайдіть момент та на­прямні косинуси рівно­діючої сил і , прикладених до точки  щодо точки . |
| 1.bmpПереформулюйте задачу: знай­діть век­торний добу­ток векто­рів . | 1.bmpПереформулюй­те задачу: знай­діть век­торний добу­ток векто­рів  та його напрямні косинуси. | 1.bmpВиділяйте підза­да­чі: 1) знай­ти рівно­­­діючу сил і ; 2) знайдіть момент та напрямні косинуси рівнодіючої. |

**6.26.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *І рівень* | *ІІ рівень* | *ІІІ рівень* |
| Знайдіть об’єм пірамі­ди з вершинами в точ­ках , ,  і . | Знайдіть об’єм парале­лепіпеда, побудованого  на векторах  ,  ,  де  і  – взаємно перпендикулярні орти. | Знайдіть висоту парале­лепіпеда, побудованого на векторах  ,  ,  якщо за основу взято паралелограм, побудо­ваний на векторах  і  а  і  – взаємно перпендикулярні орти. |
| 1.bmpПереформулюйте задачу: знайдіть об’єм тетраедра, що побудований на векторах  і . | Оберіть декартову систему коорди­нат таким чином, щоб ,  і .1.bmp | 1.bmpОберіть декартову систему коорди­нат таким чином, щоб ,  і |

|  |  |
| --- | --- |
| ***Д4*** | **Учимося застосовувати CAS під час обчислення моменту сили відносно точки та об’єму піраміди** |

**6.27.** Силу  прикладено до точки *А (-1;1;5*). Знайдіть величину та напрям моменту цієї сили щодо точки *О (0;-1;2)* .

*Переформулюйте умову на математичну.* Знайдіть абсолютну величину векторного добутку векторів  та  за допомогою *CAS* *Mathcad.*

*Хід обчислення.*

1. Відкрийте вікно *CAS*  *Mathcad.*

2. За допомогою опції *Вид – Панели инструментов – Матрицы* та *Вид – Панели инструментов – Вычисление* винесіть на панель інструментів вкладки  та .

3. Введіть координати векторів  та  :

– у полі програми введіть ім’я векторів, знак присвоювання та клацніть на панелі по символу матриці;

– вкажіть у вікні вводу число рядків і стовпців та введіть у помічених позиціях координати векторів.

4. Обчисліть абсолютну величину векторного добутку :

– клацніть на панелі по символу абсолютної величини, введіть векторний добуток, введіть у позиціях шаблону імена множників;

– натиснувши клавішу *Space,* виокремте вираз рамкою і введіть із клавіатури знак рівності.

Після знака рівності буде отримано числове значення, що визначає абсолютне значення моменту сили щодо точки.

**6.28.** Дано піраміду з вершинами в точках *О (0; 0; 0), А (5; 2;0), В (2; 5; 0)* і *С (1; 2; 4).* Знайдіть об’єм піраміди за допомогою *CAS* *Mathcad.*

*Хід обчислення.*

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Відкрийте вікно *CAS* *Mathcad.*  2. За допомогою опції *Вид – Панели инструментов – Матрицы та Вид – Панели инструментов – Вычисление* винесіть на панель інструментів вкладки: | ,  та |

3. Введіть координати векторів ,  і  :

– введіть ім’я векторів , знак присвоювання та клацніть на панелі по символу матриці;

– вкажіть у вікні *Вставка матрицы* число рядків і стовпців та введіть у помічених позиціях шаблону координати векторів.

4. Обчисліть об’єм піраміди  :

– введіть з клавіатури *V*, знак присвоювання,клацніть на панелі по символу абсолютної величини та введіть відношення: у чисельнику з клавіатури або з панелі *Вставка функции* функцію *augment (a, b, c)* , у знаменнику – *6* ;

– введіть із клавіатури *V* та знак рівності.

Після знака рівності буде отримано числове значення об’єму піраміди.

|  |  |
| --- | --- |
| Д3 | **Готуємось до контрольної роботи** |

**1.** Розв’яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:



**Д1** Під час застосування матричного методу скористайтесь наявним алгоритмом знаходження матриці, оберненої для заданої.

**2.** Перевірте на колінеарність вектори і , побудовані за векторами  та  : , , , .

**Д1** Скористайтесь відповідними правилами для обчислення добутку вектора на число та суми й різниці векторів. Колінеарність векторів перевірте за допомогою наявної ознаки.

**3.** Знайдіть косинус кута між векторами  та , якщо:   

**Д1** Скористайтесь наявними правилами для обчислення координат вектора, скалярного добутку векторів, заданих своїми координатами, й обчислення довжини вектора. Косинус кута між векторами обчисліть за допомогою наявної формули.

**4.** Перевірте компланарність векторів ,  та :  , .

**Д1** Компланарність векторів перевірте за допомогою наявної ознаки. Для обчислення отриманого визначника скористайтесь правилом трикутника.

**5\***. Знайдіть розкладання вектора  за векторами : , , , .

**Д1**Переконайтесь, що вектори, ,  утворюють базис. Складіть комбінацію , за якою складіть систему трьох рівнянь із невідомими . Для розв’язання системи застосуйте метод Крамера. Підставте отримані значення  у комбінацію .

**6\***. Обчисліть площу паралелограма, побудованого за векторами  та  :

 кут між векторами  і дорівнює .

**Д1** Скористайтесь геометричним змістом векторного добутку та формулою для обчислення модуля векторного добутка.

**7\*.** Сила  прикладена до точки *А(3;4;-2).* Визначте величину та напрям моменту цієї сили щодо початку координат.

**Д1** Скористайтесь фізичним змістом векторного добутку та формулой обчислення модуля векторного добутка двох векторів, заданих координатами.

|  |  |
| --- | --- |
| **8\*\*.** Елементи ланок, схема яких зображена на рисунку 7.1, має наступні значення: *Е1* = 1,5 В,  *Е2*=1,6 В, *R1* =10 Ом, *R2* =20 Ом. Опір вольтметра *Rv*= 20 Ом. Знайдіть струм в усіх гілках. Опір з’єднуючих проводів та джерел напруги не враховувати.  **Д1** Представте дані задачі на схемі, користуючись законами Кірхгофа й враховуючи напрями струмів, що обрані умовно, отримайте систему лінійних рівнянь. Для розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь | l1.bmp Рис. 7.1. Схема до  задачі 8 |

скористайтесь наявним алгоритмом методом Гаусса.

**9\*\*.** Знайдіть лінійну швидкість обертання точок вовчка, що лежать на колі великого діаметра, рівного *20*, якщо вектор  прикладений у центрі великого кола.

**Д1** Скористайтесь формулою Ейлера для обчислення швидкості  точки *М* твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю  навколо нерухомої осі (механічний зміст векторного добутку). Для знаходження вектора лінійної швидкості обертання застосовуйте формулу обчислення векторного добутку двох векторів, заданих координатами.

**10\*\*.** Обчисліть об’єм тетраедра з вершинами в точках *A*1, *A*2, *A*3, *A*4 та його висоту, яка опущена з вершини *A*4 на грань *A*1*A*2*A*3:  

**Д1** Для розв’язування завданння скористайтесь геометричним змістоммішаного добутку векторів. Для обчислення значення об’єму застосовуйте формулу мішаного добутку для трьох векторів, що задані координатами.

****

**ВІДПОВІДІ**

**до тестових завдань підрозділу «Перевіряємо готовність до практичного заняття»**

**Тема 1.**

**1.1.** В. **1.2.** Б. **1.3.** Б. **1.4.** Б. **1.5.** Д. **1.6.** Г. **1.7.** А. **1.8**. Д. **1.9.** А. **1.10.** В.

**Тема 2.**

**2.1.** Б. **2.2.** Б. **2.3.** В. **2.4.** В. **2.5.** А. **2.6.** В. **2.7.** Г. **2.8.** А. **2.9.** Г. **2.10.** В. **2.11.** В. **2.12.** А. **2.13.** Г. **2.14.** Б. **2.15.** В.

**Тема 3.**

**3.1.** Б. **3.2.** Б. **3.3.** Б. **3.4.** А. **3.5.** Г. **3.6.** Б. **3.7.** А. **3.8.** Д. **3.9.** Г. **3.10.** А. **3.11**. Д.

**Тема 4.**

**4.1.**Б. **4.2.** А. **4.3.** Б. **4.4.** В. **4.5.** Г. **4.6.** Г. **4.7.** Б. **4.8.** А. **4.9.** А. **4.10.** В. **4.11.** Г. **4.12.** В. **4.13.** Б. **4.14.** Б. **4.15.** Г.

**Тема 5.**

**5.1.** А. **5.2.** Б. **5.3.** А. **5.4.** В. **5.5.** В. **5.6.** Б. **5.7.** А. **5.8.** Б. **5.9.** В.

**Тема 6.**

**6.1.** Г. **6.2.** Б. **6.3.** Г. **6.4.** А. **6.5.** Г. **6.6.**А. **6.7.** Б. **6.8.** В. **6.9.** А. **6.10.** В. **6.11.** В. **6.12.** А.

**ВІДПОВІДІ**

**до завдань підрозділу «Учимося самостійно розв’язувати завдання»**

**Тема 1.**

**1.16. (І) а)** 121; **б)** 41; **(ІІ)** **а)** 0,6; **б) ; (ІІІ) а) ; б) . 1.17. (І)** -5;   
**(ІІ)** 0;  **. 1.18. (І)** -11; **(ІІ)** -118; **(ІІІ)** -26. **1.19. (І)**   **(ІІ)** -21; **(ІІІ)** 12. **1.20. (І)** ; **(ІІ) **; **(ІІІ)** ****.

**Тема 2.**

**2.23. (І)** ; **(ІІ) **; **(ІІІ) **.

**2.24. (І)** ;  не існує; **(ІІ)** ; ;   
**(ІІІ)** **;. 2.25. (І)** ; **(ІІ)** ****;

**(ІІІ) **. **2.26. (І)** ; **(ІІ)** ; **(ІІІ)** **.  
2.27. (І)** 3; **(ІІ)** 2; **(ІІІ)** 4**. 2.28. (ІІ)** витрати сировини першого і другого типів визначаються відповідно як елементи матриці ; **(ІІІ)** 2800.

**Тема 3.**

**3.20. (І)** (1;-1); **(ІІ)** (2;-2; 3); **(ІІІ)** . **3.21. (І)** (1;1;7); **(ІІ)** (8;4;2);   
**(ІІІ)** , де . **3.22.** **(І)** (-8;-4;-13); **(ІІ)** ; **(ІІІ)** (1;1;1).   
**3.23. (І)** немає розв’язків; **(ІІ)** , де ;   
**(ІІІ)** , де . **3.24. (І)** (0;0;0); **(ІІ)** , де ;   
**(ІІІ)** , де . **3.25. (І)** ; **(ІІ)** .   
**3.26. (ІІ)** Продукції І виду можна виготовити  одиниць, продукції ІІ виду - одиниць, продукції третього виду -  одиниць, де ; **(ІІІ)** 0,7А – сила струму на першому елементі, 0,8А – сила струму на другому елементі, 1,5А – сила струму на ділянці з опором *R*.

**Тема 4.**

**4.23. (І)** ; **(ІІ)** ; **(ІІІ)** . **4.24. (І)** , ; **(ІІ)** , ; **(ІІІ)** , . **4.25. (І)** вектори  і  колінеарні, довжина вектора  у три рази більша за довжину вектора ; **(ІІ)** не колінеарні. **4.26. (І)** ; **(ІІ)** ;   
**(ІІІ)** . **4.27. (І)** , , ;   
**(ІІ)** ; **(ІІІ)** складові  утворюють з напрямком сили  кути ,  і  відповідно.

**Тема 5.**

**5.15. (І)** -700; **(ІІ)** -629; **(ІІІ)** -693. **5.16.** **(І)** , ; **(ІІ)** ;   
**(ІІІ)**  або . **5.17. (І)** ; **(ІІ)** ; **(ІІІ)** .  
**5.18. (І)** 0; **(ІІ)** ; **(ІІІ)** . **5.19. (І)** 6; **(ІІ)** ; **(ІІІ)** 7.

**Тема 6.**

**6.21. (І)** ; **(ІІ)** ; **(ІІІ)** . **6.22. (І)** некомпланарні; **(ІІ)** так; **(ІІІ)** при , . **6.23. (І)** 12; **(ІІ)** 24; **(ІІІ)** 144. **6.24. (І)**  чи будь який колінеарний йому вектор; **(ІІ)** , ;   
**(ІІІ)** . **6.25. (І)** ; **(ІІ)** ;   
**(ІІІ)**  , . **6.26. (І)** ; **(ІІ)** 25; **(ІІІ)** .

**ВІДПОВІДІ**

**до завдань підрозділу «Готуємось до контрольної роботи»**

**1.** (-1; 2; 3). **2.** неколінеарні. **3.** -1. **4.** некомпланарні. **5.** .   
**6.** 3. **7.** . **8.** *I1* = 0,115 А; *I2* = 0,098 А; *I3* = 0,018 А   
**9.**.**10.** .

****

1. *Бугров Я. С.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 224 с.
2. *Буйвол В. М.* Елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної гео­метрії / В.М.Буйвол. — К.: КМУЦА, 1996. — 200с.
3. *Власенко К. В.* Вища математика для майбутніх інженерів: Навчальний посібник / К.В. Власенко; за ред. проф. О.І. Скафи. – Донецьк : Ноулідж, 2010. – 429 с.
4. *Гриньов Б. В.* Векторна алгебра: Підручник для вищих технічних навчальних закладів / Б.В. Гриньов, І.К. Кириченко; за ред. О.М. Литвина. – Харків : Гімназія, 2008. – 164 с.
5. *Дубовик В. П.* Вища математика: Навчальний посібник / В.П.Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
6. *Дюженкова Л. І.* Вища математика: приклади і задачі. Посібник / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін. – К. : Видавничий центр Академія, 2002. – 624 с.
7. *Жильцов О.Б.* Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навчальний посібник / О.Б. Жильцов, Г.М.Торбін. – К. : МАУП, 2002. – 408 с.
8. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. 1 часть / И.А. Каплан. – 3-е изд., стереотипное. – Харьков : Изд-во ХГУ им. А.М. Горького, 1972. – 412 с.
9. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Т. Письменный. — 2-е изд., испр. — М: Айрис-пресс, 2004. — 288 с.
10. *Рябушко А.П.* Индивидуальные задания по высшей математике: Учебное пособие. В 4 ч. Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.П. Рябушко и др.; под общ. ред. А.П. Рябушко. – 3-е изд., испр. – Минск: Высшая школа, 2007. – 304 с.
11. *Холькин А.М.* Высшая математика. Часть 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебное пособие. – Мариуполь : ПГТУ, 2009. – 176 с.

****

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Вступ** ………………………………………………………………………. | | 3 |
| **Тема 1. Визначники** ………………………………………………………. | | 6 |
|  | Як пов'язаний визначник з інженерною практикою ……………... | 6 |
|  | Складаємо опорний конспект ……………………………………… | 7 |
|  | Перевіряємо готовність до практичного заняття ………………… | 11 |
|  | Учимося розв’язувати типові задачі ………………………………. | 14 |
|  | Учимося моделювати професійну діяльність інженера ………….. | 18 |
|  | Учимося самостійно розв’язувати завдання ……………………… | 19 |
|  | Учимося застосовувати CAS під час обчислення визначників ….. | 21 |
| **Тема 2. Матриці** …………………………………………………………… | | 22 |
|  | Як пов'язані матриці з інженерною практикою …………………... | 22 |
|  | Складаємо опорний конспект ……………………………………… | 23 |
|  | Перевіряємо готовність до практичного заняття ………………… | 29 |
|  | Учимося розв’язувати типові задачі ………………………………. | 32 |
|  | Учимося моделювати професійну діяльність інженера ………….. | 39 |
|  | Учимося самостійно розв’язувати завдання ……………………… | 44 |
|  | Учимося застосовувати CAS для виконання дій з матрицями …... | 46 |
| **Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь** ……………………….. | | 48 |
|  | Як пов'язані системи лінійних алгебраїчних рівнянь з інженерною практикою …………………………………………….. | 48 |
|  | Складаємо опорний конспект ……………………………………… | 49 |
|  | Перевіряємо готовність до практичного заняття …………………. | 54 |
|  | Учимося розв’язувати типові задачі ………………………………. | 58 |
|  | Учимося моделювати професійну діяльність інженера ………….. | 68 |
|  | Учимося самостійно розв’язувати завдання ……………………… | 71 |
|  | Учимося застосовувати CAS під час розв’язання СЛАР ………… | 73 |
| **Тема 4. Вектори** …………………………………………………………... | | 75 |
|  | Як пов'язані вектори з інженерною практикою …………………... | 75 |
|  | Складаємо опорний конспект ……………………………………… | 75 |
|  | Перевіряємо готовність до практичного заняття …………………. | 82 |
|  | Учимося розв’язувати типові задачі ………………………………. | 85 |
|  | Учимося моделювати професійну діяльність інженера ………….. | 92 |
|  | Учимося самостійно розв’язувати завдання ……………………… | 94 |
|  | Учимося застосовувати ППЗ DG під час розв’язання задач векторної алгебри …………………………………………………... | 96 |
| **Тема 5. Скалярний добуток двох векторів** ……………………………… | | 97 |
|  | Як пов'язаний скалярний добуток векторів з інженерною практикою …………………………………………………………… | 97 |
|  | Складаємо опорний конспект ……………………………………… | 98 |
|  | Перевіряємо готовність до практичного заняття …………………. | 100 |
|  | Учимося розв’язувати типові задачі ………………………………. | 102 |
|  | Учимося моделювати професійну діяльність інженера ………….. | 106 |
|  | Учимося самостійно розв’язувати завдання ……………………… | 108 |
|  | Учимося застосовувати ППЗ під час обчислення кутів між векторами ……………………………………………………………. | 110 |
| **Тема 6. Векторний та мішаний добутки векторів** ………………………. | | 111 |
|  | Як пов'язані векторний та мішаний добутки з інженерною практикою …………………………………………………………… | 111 |
|  | Складаємо опорний конспект ……………………………………… | 112 |
|  | Перевіряємо готовність до практичного заняття …………………. | 115 |
|  | Учимося розв’язувати типові задачі ………………………………. | 118 |
|  | Учимося моделювати професійну діяльність інженера ………….. | 124 |
|  | Учимося самостійно розв’язувати завдання ……………………… | 127 |
|  | Учимося застосовувати CAS під час обчислення моменту сили щодо точки та об’єму піраміди …............................................... | 129 |
| **Готуємось до контрольної роботи** ……………………………………… | | 131 |
| **Відповіді** …………………………………………………………………... | | 133 |
| **Рекомендована література** ………………………………………………. | | 136 |