Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия (ДГМА)

**Составители: А. Н. Обухов,
С. А. Колесников**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания, индивидуальные и тестовые задания

для студентов инженерно-технических специальностей

Часть 1

Утверждено
на заседании
методического совета
Протокол № от

Краматорск
ДГМА
2012

УДК 517

Высшая математика : методические указания, индивидуальные и тестовые задания для студентов инженерно-технических специальностей. Часть 1 / сост. : А. Н. Обухов, С. А. Колесников. – Краматорск : ДГМА, 2012. – 44 с.

Данные методические указания содержат в кратком виде основной теоретический материал по курсу высшей математики, изучаемый в первом триместре, для студентов технического направления. Приведены образцы решения контрольных заданий. Указана тематика и характер примеров для рейтингового тестирования модулей.

Составители: А. Н. Обухов, доц. каф. высшей математики,
С. А. Колесников, доц. каф. высшей математики,

Отв. за выпуск В.А. Паламарчук, доц. каф. высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

1 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАЗДЕЛАМ 1-ГО ТРИМЕСТРА

1.1 Аналитическая геометрия

Литература [2, гл. 2, § 1-6, гл. 3;
5, ч.1, гл. 1-4, гл. 5; § 24 – 36;
6, гл. 2; 7, ч.1, гл. 1-3, ч. 2, гл. 1-5].

Длина отрезка (расстояние между точками) определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – координаты данных точек.

Каноническое уравнение прямой в пространстве имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где точка $M(x_0,y_0,z_0)$ принадлежит прямой,
а m, n, p – координаты вектора $\bar{l}$.

Угол между прямыми находим как угол между направляющими векторами по формуле

$$\cos\left(\overline{l_1}, \overline{l_2}\right) = \frac{\overline{l_1} \cdot \overline{l_2}}{\left|\overline{l_1}\right| \cdot \left|\overline{l_2}\right|},$$

где $\overline{l_1} \cdot \overline{l_2}$ - скалярное произведение векторов;
$\left|\overline{l_1}\right| \cdot \left|\overline{l_2}\right|$ - произведение длин направляющих векторов.

Скалярное произведение векторов:

$$\bar{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right); \quad \bar{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right); \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Формула длины вектора $\bar{a}$:

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Угол между прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$
и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ -

$$\sin\varphi = \frac{\left|\bar{l} \cdot \bar{n}\right|}{\left|\bar{l}\right| \cdot \left|\bar{n}\right|},$$

где $\bar{l} = (m, n, p)$; $\bar{n} = (A, B, C)$.

Уравнение плоскости через три точки имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Площадь треугольника равна половине модуля векторного произведения векторов, выходящих из одной вершины:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Прямая на плоскости определена следующими параметрами:

а) двумя точками - $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1};$$

б) точкой $M_0(x_0,y_0)$ и вектором нормали $\overline{n}=(A,B)$:

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)=0.$$

в) точкой $M_0(x_0,y_0)$ и направляющим вектором $\overline{l}=(m,n)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

г) угловым коэффициентом k и точкой:

$$M_0(x_0,y_0); \qquad y-y_0=k\cdot(x-x_0).$$

д) отрезками, которые отсекает прямая от осей координат (a, b):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Все уравнения приводятся к виду

$Ax+By+C=0$ - общее уравнение прямой.

Условие параллельности двух прямых – $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых – $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$.

Пример 1. Даны уравнения трех прямых на плоскости: l_1, l_2, l_3. Требуется доказать, что прямые образуют прямоугольный треугольник, и найти уравнение высоты, проведенной из вершины $M_{2,3}$.

l_1: x – 2y = 2; l_2 : 8x + 4y = 36; l_3: x + y = 7.

Решение. Найдем нормальные векторы:

$$\overline{n}_1=\{1,-2\},\ \overline{n}_2=\{8,4\},\ \overline{n}_3=\{1,1\}.$$

Вычислим скалярное произведение следующих векторов:

$$\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=1\cdot 8+(-2)\cdot 4=0; \quad \overline{n}_1\cdot\overline{n}_3=1\cdot 1+(-2)\cdot 1=-1;$$

$$\overline{n}_2\cdot\overline{n}_3=8\cdot 1+4\cdot 1=12.$$

Так как $\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=0$, то прямые l_1 и l_2 перпендикулярные.

Найдем координаты вершины $M_{2,3}$.

$$\begin{cases} 8x + 4y = 36; \\ x + y = 7; \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4; \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} 36 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 8;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 8 & 36 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 20; \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{20}{4} = 5.$$

Так как высота, проведенная из вершины $M_{2,3}$ перпендикулярна к прямой l_1, то нормальный вектор этой прямой является направляющим для высоты.

$$l_h : \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{-2} \Rightarrow y = -2x + 9 .$$

Пример 2. Уравнение кривой второго порядка привести к каноническому виду, определить ее основные характеристики, сделать чертеж.

$$9x^2 + 54x + 4y^2 - 16y + 61 = 0.$$

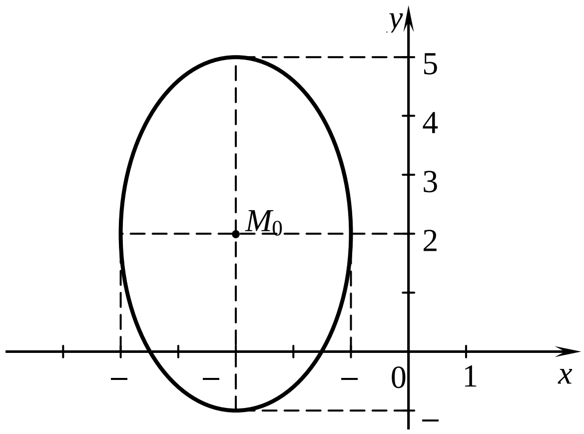
Решение. $9(x^2 + 6x) + 4(y^2 - 4y) + 61 = 0$ =>

$$9\left((x+3)^2 - 9\right) + 4\left((y-2)^2 - 4\right) + 61 = 0 \;=>$$

$9(x+3)^2 + 4(y-2)^2 - 36 = 0$ => $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$ – каноническое уравнение эллипса, центр которого находится в точке M_0 (–3, 2); полуоси равны a = 2, b = 3.

Вычислим расстояние от центра до фокусов по формуле:

$c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \pm\sqrt{5}$. Для данной кривой выполняется соотношение b > a, поэтому координаты фокусов эллипса равны: $F_1(-3,2;-\sqrt{5})$, $F_2(-3,2;+\sqrt{5})$.



1.2 Пределы. Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения

Литература: [6, гл. 2, § 1–6, §11;
2, гл. 2, § 2.1–2.3, §2.10, §3.2–3.4;
2, гл. 4, § 4.1–4.13; 6, гл. 3, §1–27;
2, гл. 4, § 4.17, 4.18; 6, гл. 5, § 3–8].

При вычислении пределов часто используют следующую таблицу эквивалентностей:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \sim a_0x^n \qquad \text{при } x \to \infty;$$

$$\sqrt[k]{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n} \sim \sqrt[k]{a_0x^n} \qquad \text{при } x \to \infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha(x) \sim \alpha(x) \\ tg\,\alpha(x) \sim \alpha(x) \\ \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x) \\ arctg\,\alpha(x) \sim \alpha(x) \end{array}\right\} \text{-следствия первого замечательного предела.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

где α(x) – бесконечно малая величина.

Следствия второго замечательного предела:

$$\left.\begin{array}{l} e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \\ a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a \\ \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x) \\ (1+\alpha(x))^m - 1 \sim m\alpha(x) \end{array}\right\} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\beta(x)}.$$

где α(x) – бесконечно малая величина; β(x) – бесконечно большая величина.

Функция y=f(x) называется непрерывной в точке x_0, если выполняется условие

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий, то x_0 называется точкой разрыва, где

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ - предел справа; $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ - предел слева.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right)^{\frac{x}{x-2}}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 + x - 3}{x + 1} \right)^{\frac{x}{x-2}} = \lim\limits_{x \to 2} \left(1 + \dfrac{x^2 + x - 3}{x + 1} - 1 \right)^{\frac{x}{x-2}} =$

$$= \lim_{x \to 2} \left(1 + \frac{x^2 - 4}{x + 1} \right)^{\frac{x}{x-2}} = \left[\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to \infty}} (1 + \alpha)^{\beta} = e^{\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to \infty}} \alpha \cdot \beta} \right] =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x + 1} \cdot \frac{x}{x - 2}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2)x}{x+1}} = e^{\frac{8}{3}}.$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1	$y = x^{\alpha}$;	$y' = \alpha\, x^{\alpha - 1}$.
2	$y = a^x$;	$y' = a^x \cdot \ln a$.
3	$y = e^x$;	$y' = e^x$;
4	$y = \log_a x$;	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
5	$y = \ln x$;	$y' = \dfrac{1}{x}$.
6	$y = \sin x$;	$y' = \cos x$.
7	$y = \cos x$;	$y' = -\sin x$.
8	$y = tgx$;	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
9	$y = ctgx$;	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
10	$y = \arcsin x$;	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
11	$y = \arccos x$;	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
12	$y = arctgx$;	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

13 $y = arcctgx$; $y' = \frac{-1}{1+x^2}$.

14 $y = shx$; $y' = chx$.

15 $y = chx$; $y' = shx$.

16 $y = thx$; $y' = \frac{1}{ch^2 x}$.

17 $y = cthx$; $y' = \frac{-1}{sh^2 x}$.

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

1 $\left(U(x) \pm V(x)\right)' = U'(x) \pm V'(x)$.

2 $\left(U(x) \cdot V(x)\right)' = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x)$.

3 $\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)' = \frac{U'(x) \cdot V(x) - U(x) \cdot V'(x)}{V^2(x)}$.

4 $f'_x\left(U(x)\right) = f'_U \cdot U'_x(x)$.

5 $\left(U(x)^{V(x)}\right)' = V(x) \cdot U^{V-1} \cdot U'(x) + U(x)^{V(x)} \cdot \ln U(x) \cdot V'(x)$.

6 $\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{x}(\mathrm{t}); \\ \mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{t}); \end{cases}$ $y'_x = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$,

где $\dot{y}(t) = y'(t)$; $\dot{x}(t) = x'(t)$.

Пример 4. Найти производную функции $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{(\arcsin x)'\sqrt{1-x^2} - \arcsin x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} - \arcsin x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(1-x^2\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Ответ: $y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Пример 5. Найти производную функции $y=(\mathrm{sh}x)^{\mathrm{tg}x}$.

Решение.

$$y'=\left((\mathrm{shx})^{\mathrm{tgx}}\right)'=\mathrm{tgx}\cdot(\mathrm{shx})^{\mathrm{tgx}-1}\cdot(\mathrm{shx})'+(\mathrm{shx})^{\mathrm{tgx}}\cdot\ln\mathrm{shx}\cdot(\mathrm{tgx})'=$$

$$=\mathrm{chxtgx}(\mathrm{shx})^{\mathrm{tgx}-1}+(\mathrm{shx})^{\mathrm{tgx}}\cdot\ln\mathrm{shx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=(\mathrm{shx})^{\mathrm{tgx}}\left(\mathrm{cthx}\cdot\mathrm{tgx}+\frac{\ln\mathrm{shx}}{\cos^2 x}\right).$$

Ответ: $y'=(\mathrm{sh}x)^{\mathrm{tg}x}\left(\mathrm{cth}x\cdot\mathrm{tg}x+\dfrac{\ln\mathrm{sh}x}{\cos^2 x}\right)$.

Пример 6. Найти производную функции заданной в параметрической форме.

$$\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2}; \\ y=t-\sin t. \end{cases}$$

Решение. Найдем соответствующие производные:

$$\dot{x}(t)=x'(t)=\left(\cos\frac{t}{2}\right)'_t=-\sin\frac{t}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)'=-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2};$$

$$\dot{x}(t)=-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2};$$

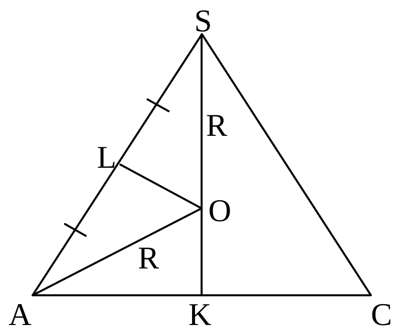
$$\dot{y}(t)=y'(t)=(t-\sin t)'_t=1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Тогда $y'_x=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{2\sin^2\frac{t}{2}}{-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}}=-4\sin\dfrac{t}{2}$.

Ответ: $\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2}; \\ y'_x=-4\sin\dfrac{t}{2}. \end{cases}$

Пример 7. В каком отношении находятся наибольший объем правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в шар, к объему этого шара?

Решение. Пусть радиус шара равен R.



Рассмотрим осевое сечение нашей фигуры плоскостью, проходящей через высоту пирамиды SK и одну из диагоналей основания AC.

Обозначим: AC = a и SK = h.

Тогда $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot SK$.

Известно, что $S_{осн} = \frac{1}{2} AC^2$, т.е. $Socн = \frac{a^2}{2}$ и

$$V = \frac{1}{6} a^2 h \qquad (1)$$

Установим связь между параметрами a и h. Из подобия треугольников $\Delta ASK \sim \Delta OSL \Rightarrow$ запишем: $\frac{AS}{SK} = \frac{SO}{AS}$. Так как центром окружности, описанной около треугольника, является точка O, которая лежит на пересечении срединных перпендикуляров сторон треугольника, то $LS = \frac{1}{2} AS$, $AK = \frac{1}{2} AC$. Учитывая, что SO = R, $AS = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$, будем иметь: $SO \cdot SK = \frac{1}{2} AS^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(h^2 + \frac{a^2}{4}) = Rh \Rightarrow a^2 = 4(2Rh - h^2)$. Подставляя выражение a в (1) получим зависимость объема пирамиды от ее высоты:

$V = \frac{2}{3}(2Rh^2 - h^3)$, ОДЗ $\Rightarrow 0 < h < 2R$.

Исследуем эту функцию на экстремум. Найдем V'(h):

$V'(h) = \frac{2}{3}(4Rh - 3h^2)$.

Согласно необходимому условию экстремума $V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}(4Rh - 3h^2) = 0$ найдем критические точки: $h_1 = 0 \notin$ ОДЗ. и $h_2 = \frac{4}{3} R \in$ ОДЗ. Найдем: $V''(h) = \frac{2}{3}(4R - 6h)$, вычислим $V''(\frac{4}{3}R) = -\frac{8}{3} R < 0$.

Следовательно, при $V''(h) = \frac{2}{3}(4R - 6h)$, вычислим $V''(\frac{4}{3}R) = -\frac{8}{3}R<0$ объем вписанной четырехугольной пирамиды максимальный и равен: $V_{max} = V(\frac{4}{3}R) = \frac{64}{81}R^3$.

Вычислим $\frac{V_{max}}{V_Ш}$. Учитывая, что $V_Ш = \frac{4}{3}\pi R^3$, получим: $\frac{V_{max}}{V_Ш} = \frac{16}{27\pi}$.

Ответ: $\frac{16}{27\pi}$.

1.3 Матрицы. Функции нескольких переменных. Квадратичные формы

Литература [1, ч. 1, гл. 4, § 2; гл. 5, § 4;
6, § 15 - 21; 6, гл. 8, § 1, 2, 3, 4;
2, гл. 8, § 1, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 14, 16;
1, ч. 1, гл. 5, § 7; 4, § 22 - 26].

Прямоугольная квадратная таблица, составленная из h n элементов a_{ij} некоторого множества, называется матрицей порядка n и записывается в виде:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}.$$

Минором элемента a_{ij} является определитель M_{ij}, получаемый из матрицы A вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j.

Если определитель Δ, составленный из элементов матрицы, отличен от нуля, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}. При этом справедливы равенства:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица порядка n,

$$E = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 1 \end{Bmatrix}$$

Известно, что матрица A^{-1} единственная, и она определяется формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{Bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Bmatrix},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i \bullet j} M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Рассмотрим матрицу-столбец X и столбец B:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

и запишем систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме:

$$A \cdot X = B.$$

Решение этой системы имеет вид: $X = A^{-1} \cdot B$.

Вектор X называется собственным для матрицы A, если выполняется равенство $A \cdot X = \lambda \cdot X$, где λ - её собственное число. Для нахождения собственных чисел матрицы A необходимо найти корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Собственный вектор X находится как решение системы уравнений, которая в матричной форме имеет вид

$$(A - \lambda E)X = 0.$$

При отыскании собственных векторов следует иметь в виду, что они определяются с точностью до произвольного множителя. Таким образом, фактически определяется собственная прямая, остающаяся неизменной при данном линейном преобразовании с помощью матрицы A.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ДВУХ ПРЕМЕННЫХ.

Если дифференцируемая функция f(x, y) имеет в точке (x0,y0) экстремум, то:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial y} = 0.$$

Далее введём обозначения:

$$M_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}; \quad M_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}.$$

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Если функция z = f(x, y) имеет в окрестности точки (x_0, y_0) первые и вторые непрерывные частные производные, то в точке (x_0, y_0), в которой $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ имеет место экстремум, если $M_2(x_0, y_0) > 0$, причём максимум, если $M_1(x_0, y_0) < 0$ и минимум, если $M_1(x_0, y_0) > 0$. Если же $M_2 < 0$, то функция экстремума не имеет.

При отыскании наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области следует найти все внутренние точки, где функция может иметь экстремум. Затем нужно исследовать функцию на границе области и найти точки, где функция может принимать наибольшее и наименьшее значения. Для получения ответа сравнить числовые значения функции во всех найденных точках.

ГРАДИЕНТ. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Рассмотрим функцию трёх переменных U=f(x, y, z), которая имеет частные производные первого порядка. Тогда вектор $\overline{grad\ u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ называют градиентом функции, он задаёт направление возрастания функции U (x, y, z) с наибольшей скоростью.

Производная по направлению вектора $\bar{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\overline{\mathrm{grad}\ \ u} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|}.$$

Пример 8. Найти производную функции U= $z \cdot e^{-x \cdot y}$ в точке $M_0(0,1,1)$ по направлению вектора $\bar{a} = (-2,2,1)$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot e^{-x \cdot y} \cdot (-y) = -yze^{-x \cdot y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot e^{-x \cdot y} \cdot (-x) = -xze^{-x \cdot y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = e^{-x \cdot y},$$

и вычислим $\overline{gradu}\,\Big|_{M_0} = (-1,0,1)$.

Тогда $\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{-1 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{3} = 1$.

Однородный многочлен второй степени относительно переменных x, y: $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{21}xy + a_{22}y^2$ называется квадратичной формой от этих переменных.

Если положить $a_{12}=a_{21}$, то квадратичной форме можно подставить в соответствие квадратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы X, Y матрицы A определяют на плоскости два собственных направления x', y'. При этом, если λ_1, λ_2 собственные числа, то квадратичная форма в базисе собственных векторов X, Y записывается в каноническом виде:

$$F = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 .$$

Рассмотрим квадратичную форму трёх переменных:

$$F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

где $a_{11}=a_{21}$, $a_{23}=a_{32}$, $a_{13}=a_{31}$. В базисе собственных векторов X, Y и Z эта квадратичная форма имеет вид:

$$F = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 .$$

Приведение квадратичной формы к каноническому виду используют для приведения к каноническому виду уравнений линий и поверхностей второго порядка.

2 ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И ТЕСТИРОВАНИЯ ПО РАЗДЕЛАМ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

2.1 Аналитическая геометрия

Задание 1. Даны уравнения трех прямых на плоскости l_1, l_2, l_3.

Требуется:

а) найти точки пересечения прямых: $M_{1,2}$, $M_{1,3}$, $M_{2,3}$;

б) доказать, что полученный треугольник прямоугольный;

в) найти угол при вершине $M_{1,3}$;

г) найти уравнение медианы, проведенной из вершины $M_{1,2}$ и расстояние от этой прямой до вершины $M_{2,3}$;

д) найти уравнение высоты, проведенной из вершины $M_{1,2}$;

Варианты заданий

1 l_1: $2x – y = 6$;
l_2: $4x + 8y = –8$;
l_3: $x + 6y = –2$.

2 l_1: $3x + y = 2$;
l_2: $2x – 6y = 8$;
l_3: $5x + y = –8$.

3 l_1: $4x + 3y = 5$;
l_2: $3x – 4y = –15$;
l_3: $x + 5y = –5$.

4 l_1: $5x – y = 9$;
l_2: $x + 5y = 7$;
l_3: $4x + 2y = –8$.

5 l_1: $8x – y = 7$;
l_2: $4x + 2y = 6$;
l_3: $x + 3y = –1$.

6 l_1: $6x + y = 12$;
l_2: $– x + 6y = 35$;
l_3: $8x + y = –35$.

7 l_1: $x + 4y = 14$;
l_2: $4x – y = 5$;
l_3: $3x + 2y = 1$.

8 l_1: $5x + y = 11$;
l_2: $x – 5y = –3$;
l_3: $x + y = 5$.

9 l_1: 6x – y = 10;
l_2: x + 6y = 14;
l_3: x – y = 7.

10 l_1: 7x – y = 5;
l_2: x + 7y = 15;
l_3: x + 3y = 11.

11 l_1: 3x – y = 7;
l_2: x + 3y = 9;
l_3: x + y = 7.

12 l_1: 4x + y = 9;
l_2: 2x – 8y = –4;
l_3: x + y = 8.

13 l_1: 2x + 4y = 6;
l_2: 6x – 3y = 3;
l_3: x + y = 5.

14 l_1: 10x – y = 9;
l_2: x + 10y = 11;
l_3: x + y = –7.

15 l_1: 4x – 3y = 5;
l_2: 3x + 4y = 10;
l_3: x + y = 2.

16 l_1: 3x – y = 8;
l_2: x + 3y = 6;
l_3: x + 2y = 8.

17 l_1: 6x – y = 11;
l_2: – x + 6y = 4;
l_3: x + y = 10;

18 l_1: 4x + 4y = 12;
l_2: – x + y = 1;
l_3: 2x – y = 5;

19 l_1: x + 8y = 10.
l_2: – 8x + y = –15;
l_3: x + y = –6.

20 l_1: 5x + 2y = 12.
l_2: – 2x + 5y = 1;
l_3: x + 2y = –5.

21 l_1: x + 10y = 14;
l_2: – 10x + y = –39;
l_3: x + y = –6.

22 l_1: 5x – 2y = 12;
l_2: 2x + 6y = –1;
l_3: x + 4y = 1.

23 l_1: 12x + y = 10;
l_2: – x + 12y = –23;
l_3: x + y = 10.

24 l_1: 8x + y = 10;
l_2: x – 8y = –15;
l_3: x + y = –6.

25 l_1: 3x + 5y = 11;
l_2: – 5x + 3y = –7;
l_3: x + y = 11.

Задание 2. Даны координаты вершин треугольника:
$A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$.
Требуется:

а) найти вектор $\overline{A_2A_1}$;
б) найти длину стороны A_1A_2;
в) найти координаты середины стороны A_2A_3;
г) записать уравнение медианы, проведенной из вершины A_1;
д) вычислить площадь треугольника;
е) проверить перпендикулярность сторон A_1A_2 и A_1A_3.

Варианты заданий

1 $A_1(1,3)$, $A_2(-2,5)$, $A_3(7,9)$.
2 $A_1(3,1)$, $A_2(5,-2)$, $A_3(9,7)$.
3 $A_1(2,5)$, A_2 (3,7), $A_3(5,9)$.
4 $A_1(5,2)$, $A_2(7,3)$, $A_3(9,5)$.

5 $A_1(-2,4)$, $A_2(3,2)$, $A_3(5,7)$.
6 $A_1(4,-2)$, $A_2(2,3)$, $A_3(7,5)$.
7 $A_1(0,4)$, $A_2(5,1)$, $A_3(7,2)$.
8 $A_1(4,0)$, $A_2(1,5)$, $A_3(2,7)$.
9 $A_1(3,0)$, $A_2(5,4)$, $A_3(-1,2)$.
10 $A_1(0,2)$, $A_2(4,0)$, $A_3(6,4)$.
11 $A_1(1,1)$, $A_2(5,7)$, $A_3(3,3)$.
12 $A_1(0,-2)$, $A_2(5,0)$, $A_3(-3,-4)$.
13 $A_1(-1,-1)$, $A_2(6,4)$, $A_3(2,-1)$.
14 $A_1(8,-2)$, $A_2(-2,4)$, $A_3(0,6)$.
15 $A_1(9,1)$, $A_2(7,3)$, $A_3(5,7)$.
16 $A_1(-2,-3)$, $A_2(-4,7)$, $A_3(0,5)$.
17 $A_1(-5,0)$, $A_2(3,0)$, $A_3(7,4)$.
18 $A_1(1,1)$, $A_2(5,5)$, $A_3(7,3)$.
19 $A_1(-1,1)$, $A_2(3,-7)$, $A_3(5,1)$.
20 $A_1(2,9)$, $A_2(6,-1)$, $A_3(0,5)$.
22 $A_1(-2,0)$, $A_2(4,-6)$, $A_3(8,-2)$.
21 $A_1(5,0)$, $A_2(-1,6)$, $A_3(7,-2)$.
23 $A_1(0,2)$, $A_2(8,4)$, $A_3(6,0)$.
24 $A_1(3,-1)$, $A_2(-5,1)$, $A_3(7,-3)$.
25 $A_1(4,7)$, $A_2(0,-3)$, $A_3(8,-5)$.

Задание 3. Определить тип кривой второго порядка и построить её.
Варианты заданий

1 а) $y-x^2+6x=0$; б) $x^2+y^2+12y+4x+36=0$.
2 а) $y+x^2-8x=0$; б) $-x^2+2x-y^2+4y+4=0$.
3 а) $3y^2-2x+6=0$; б) $x^2-6x+y^2+2y+9=0$.
4 а) $3x^2+2y-6=0$; б) $x^2+6x+y^2+4y+9=0$.
5 а) $x^2-9y^2-9=0$; б) $x^2+6y-9=0$.
6 а) $16x^2-y^2-16=0$; б) $6x+y^2-9=0$.
7 а) $x^2-4x-4y^2=0$; б) $-4x+5y^2+10y=0$.
8 а) $4x^2+25y^2-100=0$; б) $3x^2-6x+8y=0$.
9 а) $x^2+4y^2-16=0$; б) $8y^2-8y+5x=0$.
10 а) $y-x^2+8x=0$; б) $x^2-2x+y^2+4y+1=0$.
11 а) $4x^2-9y-9=0$; б) $x^2-4x-y^2+2y-1=0$.
12 а) $y^2+9x=0$; б) $x^2-8x+y^2+4y+4=0$.
13 а) $y^2-8y-x=0$; б) $x^2-10x+y^2+6y+25=0$.

14 а) $x^2-4y-4=0$; б) $x^2+4x+y^2+6y+9=0$.
15 а) $9x^2+y^2-81=0$; б) $3x^2+6x-y=0$.
16 а) $4y^2+x^2-16=0$; б) $2y^2-4y+5x=0$.
17 а) $y^2-x^2+9=0$; б) $-2x^2+4x-3y^2+6y-6=0$.
18 а) $4x^2+y^2-16=0$; б) $y^2-x^2+4x=0$.
19 а) $y^2+x^2-8x=0$; б) $x^2-4x-y^2+6y-9=0$.
20 а) $16x^2+y^2-16=0$; б) $x^2+6x+9+y^2-4y=0$.
21 а) $x^2-2y^2+4=0$; б) $x^2-2x+y^2+6y+1=0$.
22 а) $2y^2+x^2-4=0$; б) $x^2+8x+y^2-4y+16=0$.
23 а) $x^2+9y^2-81=0$; б) $x^2-4x+y^2+8y+16=0$.
24 а) $x^2+y^2-4x=0$; б) $x^2+12x+4y^2=0$.
25 а) $y^2-2x+4=0$; б) $x^2+6x-y^2-4y-4=0$.

Задание 4. Уравнение кривой второго порядка привести к каноническому виду, определить ее характеристики, сделать чертеж.

Варианты заданий

1 $5x^2 + 9y^2 – 30x + 18y + 9 = 0$.
2 $16x^2 + 25y^2 + 32x – 100y – 284 = 0$.
3 $4x^2 + 3y^2 – 8x + 12y – 32 = 0$.
4 $9x^2 – 18x + 4y^2 + 8y – 23 = 0$.
5 $4x^2 – 8x + 16y^2 – 32y – 44 = 0$.
6 $4x^2 – 8x + 16y^2 – 64y + 4 = 0$.
7 $9x^2 – 18x + 16y^2 + 32y – 119 = 0$.
8 $25x^2 – 100x + 9y^2 – 18y – 116 = 0$.
9 $9x^2 – 18x + 25y^2 – 50y – 191 = 0$.
10 $9x^2 + 36x + 4y^2 – 24y + 36 = 0$.
11 $16x^2 + 64x + y^2 + 6y + 57 = 0$.
12 $x^2 + 6x + 16y^2 + 64y + 57 = 0$.
13 $9x^2 – 18x + 16y^2 + 32y – 119 = 0$.
14 $25x^2 + 50x + y^2 + 2y + 1 = 0$.
15 $x^2 – 4x + 25y^2 – 50y - 71 = 0$.
16 $4x^2 + 8x – 12 = y$.
17 $3x^2 + 6x – 9 = y$.
18 $4y^2 + 8y – 12 = x$.
19 $3y^2 + 6y – 9 = x$.
20 $5y^2 – 10y – 15 = x$.
21 $5x^2 – 10x – 15 = y$.
22 $y^2 + 10y + 25 = x$.
23 $x^2 + 6x + 9 = y$.
24 $y^2 + 2y + 11 = x$.
25 $x^2 + 4x + 5 = y$.

Задание 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$. Необходимо:

а) записать уравнение прямой $A_1 A_2$;

б) записать уравнение плоскости $A_1 A_2 A_3$;

в) вычислить угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1 A_2 A_3$;

г) записать уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$;

д) вычислить объем пирамиды.

Варианты заданий

Вар.	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(4, 1, 4)	(-3, -1, -4)	(4, -5, 1)	(-6, 2, -6)
2	(-6, 1, -2)	(-8, 1, -3)	(-2, 3, -2)	(12, 2, 8)
3	(1, 3, 2)	(-2, 13, 4)	(4, -13, -3)	(6, -14, -2)
4	(6, 4, 2)	(10, -1, -3)	(12, -2, -3)	(-8, 8, -2)
5	(4, 4, 13)	(3, 4, 11)	(-1, -1, -7)	(-4, 8, 2)
6	(-4, 2, -2)	(-6, 3, -2)	(-18, 4, 3)	(-16, 2, 2)
7	(1, 4, -8)	(2, -3, 4)	(2, -4, 6)	(-4, 2, 8)
8	(3, 1, -5)	(-1, -2, 9)	(4, 4, -13)	(4, 6, -14)
9	(-4, 6, -1)	(1, -8, 1)	(-2, 2, -1)	(-4, 4, -2)
10	(-1, 6, -4)	(-3, 0, 1)	(-3, -4, -1)	(2, 28, 8)
11	(3, 4, -2)	(-11, -2, -3)	(-5, 1, -3)	(-26, -6, -6)
12	(1, 1, 2)	(1, 3, -6)	(-1, 1, 2)	(2, -6, 12)
13	(-3, 2, -3)	(-2, 2, -1)	(4, -4, -1)	(-4, 2, -6)
14	(-4, 14, -4)	(4, -14, 2)	(-3, 12, -4)	(-2, -16, 8)
15	(0, 2, -1)	(6, -1, -1)	(-14, 4, 4)	(28, -6, -6)
16	(3, -4, -2)	(-1, -3, 4)	(-2, 1, -2)	(-4, 8, -16)
17	(3, 4, 11)	(3, -4, 5)	(1, -2, 5)	(4, 2, -6)
18	(-3, -2, 4)	(-7, 3, 1)	(-9, 3, 2)	(-6, 6, -2)
19	(-1, 6, 1)	(2, -4, -1)	(-3, 16, 4)	(4, -12, -4)
20	(-5, 4, 1)	(-9, 4, -1)	(3, 1, 2)	(22, -6, 4)
21	(7, 4, -1)	(-7, -4, -2)	(-9, -1, 2)	(10, 4, -4)
22	(-3, -3, -3)	(2, -3, 2)	(-4, -5, -3)	(8, 18, -4)
23	(4, -8, 1)	(-3, 2, -1)	(2, -2, 2)	(6, -28, -6)
24	(-3, 2, 14)	(2, -3, 6)	(2, -1, 2)	(8, 2, 4)
25	(3, -2, -2)	(4, -4, -4)	(-1, -3, -12)	(-6, 6, -8)

2.2 Пределы. Дифференциальное исчисление и его приложения

Задание 6. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.
Варианты заданий

1 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+6}{5+6n-7n^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-x^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{3x-13}{2x-5}\right)^{\frac{x+3}{x-8}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x-x^2}$.

2 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n-2}{6n^3-3n+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+5x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4x-7}{3x-5}\right)^{\frac{x+2}{x-2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x+2x^2}$.

3 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+6}{5n-7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+11x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{2x-5}\right)^{\frac{1}{3-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(3x-x^2)}{x}$.

4 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-16}{x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-2}{x}\right)^{\frac{1}{x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(3x^2-x)}{4x}$.

5 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^{\frac{x^2-3x}{x-4}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 3x}{2x+x^2}$.

6 а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x-2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin(3x^2-x)}$.

7 а) $\lim\limits_{x\to -9}\dfrac{x^2-81}{x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x-2}{x-2}\right)^{\frac{x+4}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2}{\sin 3x}$;

8 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+196x^2}-\sqrt{x+4x^2}}{2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}(6x-x^2-4)^{\frac{1}{x^2-9x+20}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+x^2}{tg 6x}$.

9 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-8n+2}{3n-9n^3+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2-8x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-8x+8}{x+1}\right)^{\frac{2}{x-1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-x^2}{arctg 6x}$.

10 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2-2n+6}{3n-7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x+3}}{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+x^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{x^2+3x}{x+8}\right)^{\frac{3}{4+x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\arcsin(x^2-x)}$.

11 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-8n+2}{3n-9n^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+4-x^2}{1-x^2}\right)^{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-3x}{\arcsin x}$.

12 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-2n+6}{3n^2-7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{3x^2+2x^4}-\sqrt{12x}}{\sqrt[3]{3x^2+5x-1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+x+1)^{\frac{-2}{x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{tg(6x^2-x)}$.

13 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+9x^3}-\sqrt{4x^2-3x}}{x\sqrt{x+7}}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+4x+1}{x-1}\right)^{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{arctg(x+3x^2)}$;

14 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+10}{3n^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2x^2}{arctg\,2x}$.

15 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-9x+5}{6x^2+5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+x}-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-8x+16\right)^{\frac{1}{x^2-5x+6}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x+\pi)}{x-x^2}$.

16 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3+3n+10}{3n^2+2n+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-7x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{2x^2-4}\right)^{\frac{5-3x}{2+x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x+4x^2}$.

17 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+5}{6x^3-5x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-8x^3}}{x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -4}\left(x^2+9x+21\right)^{\frac{x+6}{x+4}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x+5x^2}$.

18 а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{6x^2-x}}{x-4\sqrt{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\left(x^2-8\right)^{\frac{1}{2(x+3)}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x^2+3x)}{6x}$.

19 а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^4+2x^3}-x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x}{4-3x}\right)^{\frac{2x-1}{x^2+x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x-x^2)}{-5x}$.

20 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-8}{9x^3+2x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+3\right)^2-\left(x^2-6\right)^2}{\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4+6x^3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-13}{x-5}\right)^{\frac{x^2+3}{x-8}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x^2+2x)}{x}$.

21 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+9x-12}{x^2-5x+25}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+9x^2}-\sqrt{x^3+x^2}}{\sqrt{x+3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6-3x+x^2}{x^2-2x}\right)^{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg(x^2-x)}{4x}$.

22 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12n^3-8n-10}{3n^2-2n+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x^2+10x+7}{x-1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg(-x)}{4x-x^2}$.

23 а) $\lim\limits_{x\to 12}\frac{x^2-144}{x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x+8x^2}{\sqrt{x^2+x^4}-x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x+4-x^2}{x-2}\right)^{\frac{4}{x-3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(3x^2-x)}{4x}$.

24 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-8}{x^3+10x-24}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x-2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)^{\frac{x^2+3}{x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{4x^2+2x}$.

25 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-8x+12}{x^2+x+47}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2+x}{x^2}\right)^{\frac{3x+1}{x-2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\arcsin(3x^2-x)}$.

Задание 7. Найти производные данных функций:

1 а) $y=3x^2-x$; б) $y=\ln(x+3)$;

в) $y=\sin\sqrt{3}+\frac{1}{3}\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$; г) $y=x^{\sin x}$.

2 а) $y=2x+1$; б) $y=\sin(2x+1)$;

в) $y=\cos\ln 2-\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$; г) $y=x^{2x}5^x$;

3 а) $y=\frac{1}{x+3}$; б) $y=3\sin 2x$;

в) $y=tg\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$; г) $y=x^{e^{\cos x}}$.

4 а) $y=\frac{x-1}{x}$; б) $y=5\cos 2x$;

в) $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$; г) $y=x^{e^{ctgx}}$.

5 а) $y=3x^2+1$; б) $y=\cos(2x+1)$;

в) $y=\frac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$; г) $y=(\sin\sqrt{x})^{e^{\frac{1}{x}}}$.

6 а) $y=2x^3-x+3$; б) $y=3\sin 5x$;

в) $y=\frac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$; г) $y=x^{3^x}2^x$.

7 а) $y=x^2-9x+2$; б) $y=2\cos 3x$;

в) $y=\frac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$; г) $y=(x^2+1)^{\cos x}$.

8 а) $y=\frac{1}{x+3}$; б) $y=\ln 5x$;

в) $y=\cos\operatorname{ctg}2-\frac{1}{16}\frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$; г) $y=(\sin x)^{\frac{5x}{2}}$.

9 а) $y=\frac{4}{x-1}$; б) $y=3\sin 5x$;

в) $y=\operatorname{ctg}\cos 2+\frac{1}{6}\frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$; г) $y=(x^4+5)^{ctgx}$.

10 а) $y=\frac{x-1}{x+3}$; б) $y=x^2-5x+10$;

в) $y=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}2}-\frac{1}{20}\frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$; г) $y=(x^3+4)^{tgx}$.

11 а) $y=\frac{1}{(x-1)^3}$; б) $y=\sin(3x+1)$;

в) $y=\frac{1}{3}\cos tg\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$; г) $y=(x^2-1)^{sh\ x}$.

12 а) $y=\frac{1}{x^2}$; б) $y=3\sin(5x-1)$;

в) $y=\ln\sin\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$; г) $y=x^{\sin x^3}$.

13 а) $y=x^3+5x$; б) $y=\cos(2x+3)$;

в) $y=8\sin\operatorname{ctg}3+\frac{1}{5}\frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$; г) $y=(x^8+1)^{th\ x}$.

14 а) $y=5x^2-x+1;$ б) $y=5\cos 3x;$

в) $y=\dfrac{\cos ctg3\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x};$ г) $y=(\cos 2x)^{\ln\frac{\cos 2x}{4}}.$

15 а) $y=4x+5;$ б) $y=10\ln 2x;$

в) $y=\dfrac{\cos tg\frac{1}{3}\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x};$ г) $y=(5-2x)^{ch\frac{x}{2}}.$

16 а) $y=x^2-2x+7;$ б) $y=2\cos 4x,$

в) $y=\dfrac{\sin tg7\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x};$ г) $y=(x\sin x)^{x\sin x}.$

17 а) $y=\dfrac{x}{x+1};$ б) $y=\ln(3x+1);$

в) $y=\dfrac{ctg\sin 3\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x};$ г) $y=(\cos 5x)^{e^{-x}}.$

18 а) $y=\dfrac{1}{x-2};$ б) $y=2\ln 7x;$

в) $y=\dfrac{\sqrt[5]{ctg2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x};$ г) $y=\left(tg\dfrac{1}{x}\right)^{\ln(3-2x)}.$

19 а) $y=\dfrac{5}{x+4};$ б) $y=5\cos 3x;$

в) $y=\dfrac{tg\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x};$ г) $y=(ctg3x)^{2x}.$

20 а) $y=\dfrac{x+2}{x};$ б) $y=2\sin 5x;$

в) $y=ctg5-\dfrac{1}{40}\dfrac{\cos^2 20x}{\sin 40x};$ г) $y=\left(\dfrac{2-3x}{4}\right)^{\arcsin x}.$

21 а) $y=3x^2+x-1;$ б) $y=\cos\dfrac{x}{2};$

в) $y=\sqrt{tg4}+\dfrac{\sin^2 21x}{21\cos 42x};$ г) $y=\ln^{3x}(3-5x)$

22 а) $y=x^3+2x+3;$ б) $y=\ln(5x+1);$

в) $y=\cos\ln 13-\dfrac{1}{44}\dfrac{\cos^2 22x}{\sin 44x};$ г) $y=(\sin(1-2x))^{\ln\sqrt{x}}.$

23	а) $y=\dfrac{1}{3x+2}$;	б) $y=5\sin\dfrac{x}{2}$;
	в) $y=ctg\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{48}\dfrac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$;	г) $y=(\arcsin(3-x))^{4x}$
24	а) $y=\dfrac{1}{x^3}$;	б) $y=5\ln(3x+2)$;
	в) $y=\sin\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$;	г) $y=(\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$.
25	а) $y=5x+2$;	б) $y=2\cos\dfrac{x}{2}$;
	в) $y=\sin\sqrt[3]{tg2}-\dfrac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$;	г) $y=(arctgx)^{\ln(arctgx)}$.

Задание 8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций. Вычислить значение $\dfrac{dy}{dx}$ в точке t_0.

Варианты заданий

1	$x=\sin 2t$;	$y=2\cos 2t$	$t_0=\frac{\pi}{8}$
2	$x=3\cos 3t$	$y=\sin 3t$	$t_0=\frac{\pi}{12}$
3	$x=\sin 4t$	$y=4\cos 4t$	$t_0=\frac{\pi}{16}$
4	$x=2\cos 2t$	$y=\sin 2t$	$t_0=\frac{\pi}{8}$
5	$x=2\sin 6t$	$y=3\cos 6t$	$t_0=\frac{\pi}{24}$
6	$x=4\cos 4t$	$y=\sin 4t$	$t_0=\frac{\pi}{16}$
7	$x=\sin 5t$	$y=5\cos 5t$	$t_0=\frac{\pi}{20}$
8	$x=2\cos 8t$	$y=4\sin 8t$	$t_0=\frac{\pi}{32}$
9	$x=6\sin 6t$	$y=\cos 6t$	$t_0=\frac{\pi}{24}$
10	$x=2\cos 14t$	$y=7\sin 14t$	$t_0=\frac{\pi}{56}$
11	$x=4\sin 12t$;	$y=3\cos 12t$	$t_0=\frac{\pi}{48}$
12	$x=5\cos 5t$	$y=\sin 5t$	$t_0=\frac{\pi}{20}$
13	$x=2\sin 10t$	$y=5\cos 10t$	$t_0=\frac{\pi}{40}$
14	$x=\cos 6t$	$y=6\sin 6t$	$t_0=\frac{\pi}{24}$
15	$x=8\sin 8t$	$y=\cos 8t$	$t_0=\frac{\pi}{32}$

16	$x = 6\cos 12t$	$y = 2\sin 12t$	$t_0 = \frac{\pi}{48}$
17	$x = 3\sin 12t$;	$y = 4\cos 12t$	$t_0 = \frac{\pi}{48}$
18	$x = 2\cos 16t$	$y = 8\sin 16t$	$t_0 = \frac{\pi}{64}$
19	$x = 7\sin 14t$	$y = 2\cos 14t$	$t_0 = \frac{\pi}{56}$
20	$x = 5\cos 15t$	$y = 3\sin 15t$	$t_0 = \frac{\pi}{60}$
21	$x = \sin 9t$	$y = 9\cos 9t$	$t_0 = \frac{\pi}{36}$
22	$x = 2\cos 12t$	$y = 6\sin 12t$	$t_0 = \frac{\pi}{48}$
23	$x = 4\sin 4t$;	$y = \cos 4t$	$t_0 = \frac{\pi}{16}$
24	$x = 8\cos 16t$	$y = 2\sin 16t$	$t_0 = \frac{\pi}{64}$
25	$x = 3\sin t$	$y = \cos 3t$	$t_0 = \frac{\pi}{12}$

Задание 9. Приложение дифференцирования.

Записать уравнения касательной и нормали к линии заданной уравнением y = f(x) в точке x_0. Построить графики функции, касательной и нормали на одном чертеже.

Варианты заданий

1	$y = \frac{3x-4}{3-x}$, $x_0 = 1$	2	$y = \frac{3x-2}{3-x}$, $x_0 = 1$.
3	$y = \frac{2x+1}{2-x}$, $x_0 = 1$.	4	$y = \frac{3x-4}{3-x}$, $x_0 = 0$.
5	$y = \frac{x-4}{1+x}$, $x_0 = 1$.	6	$y = \frac{3x+1}{2-x}$, $x_0 = 0$.
7	$y = \frac{x-4}{3-x}$, $x_0 = -1$.	8	$y = \frac{2x-4}{1-x}$, $x_0 = 0$.
9	$y = \frac{x+2}{x-5}$, $x_0 = 1$.	10	$y = \frac{3x-4}{3-x}$, $x_0 = -1$.
11	$y = \frac{x+3}{2-x}$, $x_0 = 1$.	12	$y = \frac{3x-2}{3-x}$, $x_0 = 1$.
13	$y = \frac{2x+1}{2-x}$, $x_0 = 1$.	14	$y = \frac{x-4}{5-x}$, $x_0 = 0$.
15	$y = \frac{x-4}{1+x}$, $x_0 = 1$.	16	$y = \frac{3x+1}{2+x}$, $x_0 = 0$.

17 $y=\frac{x-4}{7-x}$, $x_0=1$.

18 $y=\frac{8x+2}{6-x}$, $x_0=1$.

19 $y=\frac{2x+5}{6-x}$, $x_0=1$.

20 $y=\frac{2x-4}{4-x}$, $x_0=0$.

21 $y=\frac{2x-4}{1+x}$, $x_0=1$.

22 $y=\frac{3x+5}{2-x}$, $x_0=0$.

23 $y=\frac{7x-4}{3-x}$, $x_0=1$.

24 $y=\frac{7x-2}{3+x}$, $x_0=1$.

25 $y=\frac{5x+1}{2-x}$, $x_0=-1$.

Задание 10. Задачи прикладного характера.

Варианты заданий

1 Из круга радиуса R необходимо вырезать сектор, при сворачивании которого получается воронка (коническая) наибольшего объема. Найти этот объем.

2 Полотняный шатер объемом V_0 имеет форму прямого кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к его радиусу основания, чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

3 На параболе $y=x^2+2x$ найти точку, наименее удаленную от прямой $y=x-3$. Вычислить это расстояние.

4 В каком отношении находятся наименьшая площадь равнобедренного треугольника, описанного около круга, к площади этого круга?

5 Найти наибольший объем конуса при заданной длине L его образующей.

6 В полукруг вписан прямоугольник с наибольшей площадью. В каком отношении находятся площади полукруга и прямоугольника?

7 Из проволоки длиной L нужно сделать модель призмы, в основании которой лежит правильный треугольник. Какова должна быть сторона основания призмы, чтобы ее боковая поверхность была наибольшей?

8 Найти наибольший объем конуса, вписанного в шар радиуса R.

9 В каком отношении находятся наименьший объем конуса, описанный около шара, к объему шара?

10 В каком отношении находятся наибольшая площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг, к площади этого круга?

11 В эллипс с полуосями a и b вписан прямоугольник наибольшей площади. Найти в каком отношении находятся их площади, если известно, что площадь ограниченная эллипсом S = πab.

12 Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки данного объема V_0 . Каковы должна быть размеры ведра, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество жести?

13 При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка вместимости V_0 будет иметь наименьшую полную поверхность?

14 Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен Р. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

15 Требуется изготовить открытый цилиндрический бак объема V_0. Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равно р1, а стенок – р2 грн. Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для его изготовления были наименьшими?

16 – 20 При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+k}$ –ю часть курса, а забывает αt-ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

16.$k=\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{2}{49}$.

17. $k=\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{2}{121}$.

18. $k = 1$, $\alpha = \frac{1}{25}$.

19. $k = 1$, $\alpha = \frac{1}{36}$.

20. $k = 2$, $\alpha = \frac{1}{18}$.

21 – 25 Тело массой m_0=3000 кг падает с высоты Н(м) и теряет массу(сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности k=100кг/с. Считая, что начальная скорость V_0=0, ускорение g=10м/с^2, и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.

21 Н = 500м.
22 Н = 1280м.
23 Н = 1805м.
24 Н = 845м.
25 Н = 2000м.

Задание 11. Для функции $y = f(x)$ необходимо:

1) найти критические точки;

2) найти интервалы монотонности функции;

3) схематически построить график функции.

Варианты заданий

1. а) $y=5+3x-x^3$; б) $y=4x^2-x^4$.

2. а) $y=x^3-6x^2+9x+3$; б) $y=\frac{x^4}{4}-8x$.

3. а) $y=(x-1)^2(4-x)$; б) $y=-x^4+8x^2-16$.

4. а) $y=x(x+3)^2$; б) $y=2x^4-4x^2$.

5. а) $y=(x-1)^3-3(x-1)$.; б) $y=18x^2+8x^3-3x^4$.

6. а) $y=x^2(x-2)^2$; б) $y=\frac{x^4}{4}-x^3$.

7. а) $y=2-3x+x^3$; б) $y=3x^4-8x^3+6x^2$.

8. а) $y=9x^2(1-x)$; б) $y=1+4x^3-3x^4$.

9. а) $y=\frac{1}{4}x^4-x^3$; б) $y=x^3-3x^2+2$

10. а) $y=\frac{1}{2}(x^3-3x^2+12)$; б) $y=x^4-4x^2+5$.

11. а) $y=3x^2-x^3-4$; б) $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x+1$.

12. а) $y=x^3+3x^2$; б) $y=\frac{x^4}{4}-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{4}$.

13. а) $y=x^3-3x^2$; б) $y=x^4-4x^3$.

14. а) $y=3x^5-5x^4$; б) $y=x^3-3x+5$.

15. а) $y=3x^4-4x^3+1$; б) $y=2x^3-6x+3$.

16. а) $y=\frac{1}{5}x^5-x^4+x^3$; б) $y=-x^3+3x$.

17. а) $y=x^2(3-x^2)$; б) $y=x^3-5x^2+3x+1$.

18. а) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$; б) $y=x^4-4x^2+4$.

19. а) $y=(x+1)^2(x-2)$; б) $y=-\frac{2}{3}x^3+2x-1\frac{1}{3}$.

20. а) $y=2x^2-x^4$; б) $y=8x^3-6x$.

21. а) $y=x(x-3)^2$; б) $y=x^4-8x^2+16$.

22. а) $y=\frac{3}{2}x^3-4x^2$; б) $y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-3x^2$.

23. а) $y=x^3+3x^2+2$; б) $y=2x^4-3x^2+1$.

24. а) $y=\frac{1}{4}x^3-3x$; б) $y=x^3+1{,}5x^4$.

25. а) $y=2+3x^2-x^3$; б) $y=x^4-3x^2$.

Задание 12. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и, используя результаты исследования, построить график функции.

Варианты заданий

1 а) $y=\frac{x^3+4}{x^2}$; б) $y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$.

2 а) $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$; б) $y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$.

3 а) $y=\frac{2}{x^2+2x}$; б). $y = 3\ln\frac{x}{x-3}-1$

4 а) $y=\frac{4x^2}{3+x^2}$; б) $y=(3-x)\,e^{x-2}$.

5 а) $y=\frac{12x}{9+x^2}$; б) $y=\frac{e^{2-x}}{2-x}$.

6 а) $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$; б) $y=\ln\frac{x}{x+2}+1$.

7 а) $y=\frac{4-x^3}{x^2}$; б) $y=(x-2)e^{3-x}$.

8 а) $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$; б) $y=\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

9 а) $y=\frac{2x^3+1}{x^2}$; б) $y=3-3\ln\frac{x}{x+4}$.

10 а) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$; б) $y=-(2x+1)e^{2(x+1)}$.

11 а) $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$; б) $y=\frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$.

12 а) $y=(1+\frac{1}{x})^2$; б) $y=\ln\frac{x}{x-2}-2$.

13 а) $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$; б) $y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$.

14 а) $y=\frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$; б) $y=\frac{e^{3-x}}{3-x}$.

15 а) $y=\frac{-8x}{x^2+4}$; б) $y=2\ln\frac{x}{x+1}-1$.

16 а) $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$; б) $y=(4-x)e^{x-3}$.

17 а) $y=\frac{2x^4+1}{x^3}$; б) $y=-\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$.

18 а) $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$; б) $y=2\ln\frac{x+3}{x}+3$.

19 а) $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$;　　б) $y=(2x-1)e^{2(1-x)}$.

20 а) $y=\dfrac{1-2x^2}{x^2}$;　　б) $y=-\dfrac{e^{-(x+2)}}{x+2}$.

21 а) $y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$;　　б) $y=2\ln\dfrac{x}{x-4}-3$.

22 а) $y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$;　　б) $y=-(x+1)e^{2(x+2)}$.

23 а) $y=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$;　　б) $y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3}$.

24 а) $y=\dfrac{1}{x^4-1}$;　　б) $y=\ln\dfrac{x}{x+5}-1$.

25 а) $y=-\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$;　　б) $y=-(2x+3)e^{2(x+2)}$.

2.3 Матрицы. Функции многих переменных

Задание 13. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = в_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = в_2. \end{cases}$$

Необходимо:
а) записать матрицу системы, свободных членов и неизвестных;
б) записать систему в матричной форме;
в) вычислить определитель системы;
г) найти обратную матрицу системы;
д) найти решение системы матричным способом;
е) найти собственные числа и собственные векторы матрицы системы.

Варианты заданий
1 $a_{11}=1$; $a_{12}=2$; $a_{21}=4$; $a_{22}=3$; $в_1=5$; $в_2=10$.
2 $a_{11}=5$; $a_{12}=4$; $a_{21}=2$; $a_{22}=3$; $в_1=3$; $в_2=4$.
3 $a_{11}=5$; $a_{12}=6$; $a_{21}=8$; $a_{22}=7$; $в_1=13$; $в_2=13$.
4 $a_{11}=-1$; $a_{12}=-2$; $a_{21}=-4$; $a_{22}=-3$; $в_1=5$; $в_2=10$.
5 $a_{11}=-2$; $a_{12}=-3$; $a_{21}=-5$; $a_{22}=-4$; $в_1=-13$; $в_2=-15$.
6 $a_{11}=7$; $a_{12}=8$; $a_{21}=10$; $a_{22}=9$; $в_1=-1$; $в_2=1$.
7 $a_{11}=-7$; $a_{12}=-6$; $a_{21}=-4$; $a_{22}=-5$; $в_1=-8$; $в_2=-3$.
8 $a_{11}=1$; $a_{12}=-1$; $a_{21}=-5$; $a_{22}=-3$; $в_1=-9$; $в_2=-19$.
9 $a_{11}=1$; $a_{12}=3$; $a_{21}=7$; $a_{22}=5$; $в_1=4$; $в_2=12$.
10 $a_{11}=-3$; $a_{12}=-4$; $a_{21}=-7$; $a_{22}=-6$; $в_1=-3$; $в_2=-7$.
11 $a_{11}=4$; $a_{12}=5$; $a_{21}=7$; $a_{22}=6$; $в_1=13$; $в_2=20$.

12. $a_{11} = 5$; $a_{12} = 7$; $a_{21} = 11$; $a_{22} = 9$; $в_1 =$ -12; $в_2 =$-20.
13 $a_{11} =$-4; $a_{12} =$ -5; $a_{21} =$-7; $a_{22} =$-6; $в_1 =$ -18; $в_2 =$-26 .
14 $a_{11} = 8$; $a_{12} = 7$; $a_{21} = 5$; $a_{22} = 6$; $в_1 = 15$; $в_2 = 11$.
15 $a_{11} = 9$; $a_{12} = 8$; $a_{21} = 6$; $a_{22} = 7$; $в_1 = 1$; $в_2 =$ -1.
16 $a_{11} = 8$; $a_{12} = 9$; $a_{21} = 11$; $a_{22} = 10$; $в_1 =$ -46; $в_2 =$-49.
17 $a_{11} = 10$; $a_{12} = 9$; $a_{21} = 7$; $a_{22} = 8$; $в_1 = 39$; $в_2 = 29$.
18 $a_{11} = 10$; $a_{12} = 11$; $a_{21} = 13$; $a_{22} = 12$; $в_1 = 1$; $в_2 =$ -1.
19 $a_{11} =$-9; $a_{12} =$-10; $a_{21} =$-12; $a_{22} =$-11; $в_1 = 8$; $в_2 = 13$.
20 $a_{11} = 9$; $a_{12} = 7$; $a_{21} = 3$; $a_{22} = 5$; $в_1 = 18$; $в_2 = 6$.
21 $a_{11} =$-9 ; $a_{12} =$ -11 ; $a_{21} =$ -15 ; $a_{22} =$-13; $в_1 = 7$; $в_2 = 17$.
22 $a_{11} = 11$; $a_{12} = 12$; $a_{21} = 14$; $a_{22} = 13$; $в_1 =$ -2; $в_2 = 2$.
23 $a_{11} = 11$; $a_{12} = 10$; $a_{21} = 8$; $a_{22} = 9$; $в_1 =$-8; $в_2 =$-11.
24 $a_{11} = 12$; $a_{12} = 11$; $a_{21} = 9$; $a_{22} = 10$; $в_1 =$ -20; $в_2 =$ -22.
25 $a_{11} =$-12; $a_{12} =$-13; $a_{21} =$-15; $a_{22} =$-14; $в_1 = 41$; $в_2 = 40$.

Задание 14. Найти производную функции $U(x, y, z)$ в точке М по направлению вектора $\bar{a}$. (Вариант 1 –14).

1 $U = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}$; $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$; $M(1,1,1)$.

2 $U = x + \ln\left(z^2 + y^2\right)$; $\bar{a} = -2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$; $M(2,1,1)$.

3 $U = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$; $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{k}$; $M(1,5,-2)$.

4 $U = y\ln\left(1 + x^2\right) - arctgz$; $\bar{a} = z\bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k}$; $M(0,1,1)$.

5 $U = x(\ln y - arctgz)$; $\bar{a} = 8\bar{i} + 4\bar{j} + 8\bar{k}$; $M(1,1,0)$.

6 $U = \ln\left(3 - x^2\right) + xy^2 z$; $\bar{a} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$; $M(1,3,2)$.

7 $U = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$; $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$; $M(\pi/2, 3\pi/2, 3)$.

8 $U = x^2 y^2 z^2 - \ln(z - 1)$; $\bar{a} = 5\bar{i} - 6\bar{j} + 2\sqrt{5}\,\bar{k}$; $M(1,1,2)$.

9 $U = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$; $\bar{a} = \bar{j} - \bar{k}$; $M(1,-3,4)$.

10 $U = \dfrac{\sqrt{x}}{y} - \dfrac{yz}{x + \sqrt{y}}$; $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{k}$; $M(4,1,-2)$.

$U=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$; $\quad$ $U=2\sqrt{x+y}+y\ arctgz$;

11 $\bar{a}=-2\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$; $\quad$ 12 $\bar{a}=4\bar{i}-3\bar{k}$;

$M(1,2,-1)$. $\quad$ $M(3,-2,1)$.

$U=xy-\frac{x}{y}$; $\quad$ $U=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$;

13 $\bar{a}=5\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$; $\quad$ 14 $\bar{a}=-2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$;

$M(-4,3,-1)$. $\quad$ $M(1,-3,4)$.

Задание 14. Найти угол между градиентами функций $U(x,y,z)$ и $V(x,y,z)$ в точке М. (Вариант15 – 25).

Варианты заданий

15 $V=\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$; $\quad U=\frac{yz^2}{x^2}$; $\quad M\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

16 $V=\frac{4\sqrt{6}}{x}-\frac{\sqrt{6}}{9y}+\frac{3}{z}$; $\quad U=x^2yz^3$; $\quad M\left(2,\frac{1}{3},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$..

17 $V=9\sqrt{2}x^3-\frac{y^3}{2\sqrt{2}}-\frac{4z^3}{\sqrt{3}}$; $\quad U=\frac{z^3}{xy^2}$; $\quad M\left(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

18 $V=\frac{3}{x}+\frac{4}{y}-\frac{1}{\sqrt{6}\,z}$; $\quad U=\frac{z}{x^3y^2}$; $\quad M\left(1,2,\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$..

19 $V=\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$; $\quad U=\frac{x^2}{yz^2}$; $\quad M\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$..

20 $V=3\sqrt{2}x^2-\frac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2$; $\quad U=\frac{z^2}{xy^2}$; $\quad M\left(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$..

21 $V=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3$; $\quad U=\frac{xz^2}{y}$; $\quad M\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},1\right)$..

22 $V=\frac{\sqrt{6}}{2x}-\frac{\sqrt{6}}{2y}+\frac{2}{3z}$; $\quad U=\frac{yz^2}{x}$; $\quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$..

23 $V=3\sqrt{2}x^2-\frac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2$; $\quad U=\frac{xy^2}{z^2}$; $\quad M\left(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$..

24 $V=\frac{3}{x}+\frac{4}{y}-\frac{1}{\sqrt{6}z}$; $\quad U=\frac{x^3y^2}{z}$; $\quad M\left(1,2,\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$..

25 $V=-\frac{4\sqrt{2}}{x}-\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}z}$; $\quad U=\frac{1}{x^2yz}$; $\quad M\left(2,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$..

Задание 15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $Z=Z(x,y)$ в области D. ограниченной заданными линиями.

Варианты заданий

1 $Z=3x+y-xy$, $\quad D: y=x, y=4, x=0$.

2 $Z=xy-x-2y$, $\quad D: x=3, y=x, y=0$

3 $Z=x^2+2xy-4x+8y$, $\quad D: x=0, x=1, y=0, y=2$.

4 $Z=5x^2-3xy+y^2$, $D: x=0, x=1, y=0, y=1.$

5 $Z=x^2+2xy-y^2-4x$, $D: x-y+1=0, x=3, y=0.$

6 $Z=x^2+y^2-2x-2y+8$, $D: x=0, y=0, x+y-1=0.$

7 $Z=2x^3-xy^2+y^2$, $D: x=0, x=1, y=0, y=6.$

8 $Z=3x+6y-x^2-xy-y^2$, $D: x=0, x=1, y=0, y=1.$

9 $Z=x^2-2y^2+xy-6x-1$, $D: x=0, y=0, x+y=3.$

10 $Z=x^2+2xy-2y$, $D: y=0, y=x^2-4.$

11 $Z=xy-2x-y$, $D: x=0, x=3, y=0, y=4.$

12 $Z=\frac{1}{2}x^2-xy$, $D: y=8, y=2x^2.$

13 $Z=3x^2+3y^2-2x-2y+2$, $D: x=0, y=0, x+y=1.$

14 $Z=2x^2-3y^2+1$, $D: y=\sqrt{9-\frac{9}{4}x^2}, y=0.$

15 $Z=x^2-2xy-y^2+4x+1$, $D: x=-3, y=0, x+y=-1.$

16 $Z=2x^2-3y^2+6x$, $D: x-y=0; x=2; y=0.$

17 $Z=-2x^2-2y^2+4x+4y$, $D: x=0; y=0; x+y=2.$

18 $Z=\frac{1}{2}x^2+y^2-4xy+3$, $D: x=0; y=2; x=y.$

19 $Z=2x-3xy-x^2+\frac{1}{2}y^2$, $D: x-y=-1; y=0; x=2.$

20 $Z=x^2-x+3y+4$, $D: x+y=1; x=-1; y=0.$

21 $Z=3x-4y^2+2y+6$, $D: x+y=1; y=2; x=1.$

22 $Z=2x+3y-x^2-3y^2+2$, $D: x-y=2; y=2; x=-2.$

23 $Z=6-x^2+4x-\frac{1}{2}y+y$, $D: y=-1; x+y=2; x=1.$

24 $Z=4+x^2-y^2+2x-3y$, $D: y=-2; x+y=-1; x=3.$

25 $Z=3x^2+5y^2-6x-4xy$, $D: y=-3; x=3; x=y.$

26 $Z=5x^2+\frac{1}{2}y^2-5xy+4y$, $D: y=3; x=-2; x-2y=2.$

Задание 16. Для функции двух переменных необходимо:
а) найти критические точки;
б) найти $Z''_{xx}, Z''_{yy}, Z''_{xy}$;
в) вычислить $D=Z''_{xx}Z''_{yy}-\left(Z''_{xy}\right)^2$;
г) найти экстремальные значения функции.
Варианты заданий

1 $Z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y.$ 2 $Z=x^3+8y^3-6xy+5.$

3 $Z=1+15x-2x^2-xy+2y^2.$ 4 $Z=1+6x-x^2-xy-y^2.$

5 $Z=x^3+y^2-6xy-39x+18y.$ 6 $Z=2x^3+2y^3-6xy+5.$

7 $Z=3x^3+3y^3-9xy+10.$ 8 $Z=x^2+xy+y^2+x-y+1.$

9 $Z=4(x-y)-x^2-y^2.$ 10 $Z=xy(6-x-y).$

11 $Z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$ 12 $Z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

13 $Z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$ 14 $Z = x^3 + y^3 - 3xy.$

15 $Z = x^2 + 3y^2 + 4x + 8y - 2xy + 6$. 16 $Z = -4x - x^2 + 3xy - y^2 + y + 3$.

17 $Z = x^2 - 6x - y^2 + 12y - 4xy + 2$. 18 $Z = 6x - 5x^2 + 4xy - y^2 - 2y + 4$.

19 $Z = 8y - y^2 + 5x + 3x^2 - 4xy + 6$. 20 $Z = 5y^2 - 8y + 3x^2 - 6xy + 25$.

21 $Z = 4y^2 - 8y + 3x^2 - 4x - 4xy - 9$. 22 $Z = 5y^2 + 6y - 3x^2 - 4x + 5xy - 7$.

23 $Z = 4x^2 + 6x + 2y^2 - 2y + 2xy - 5$. 24 $Z = 3x^2 - 5x + 2y^2 + 10y - 7xy - 6$.

25 $Z = 7x - 4x^2 + 3y - 2y^2 + xy - 8$. 26 $Z = 2x^2 - 8x + 3y^2 + 10y - 4xy - 2$.

Задание 17. Для функции двух переменных $Z = f(x, y)$

а) найти область определения функции;

б) найти Z'_x и Z'_y;

в) записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x; y)$ в точке M_0.

Варианты заданий

1 $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}, M_0(1, \sqrt{3}, 3)$. 2 $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}, M_0(1,1,2)$.

3 $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}, M_0(\sqrt{3}, 0, 2)$. 4 $z = \sqrt{15 - 4x^2 - 2y^2}, M_0(1,1,3)$.

5 $z = \sqrt{12 - 2x^2 - y^2}, M_0(1,1,3)$. 6 $z = \sqrt{12 - x^2 - 2y^2}, M_0(1,1,3)$.

7 $z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, M_0(1,1,4)$. 8 $z = \sqrt{18 - 4x^2 - y^2}, M_0(2,1,1)$.

9 $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}, M_0(1, -\sqrt{3}, 3)$. 10 $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}, M_0(1, -1, 2)$.

11 $z = \sqrt{12 - 2x^2 - y^2}, M_0(1, -1, 3)$. 12 $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, M_0(4,0,3)$.

13 $z = \sqrt{25 - 4x^2 - y^2}, M_0(2,0,3)$. 14 $z = \sqrt{30 - 2x^2 - y^2}, M_0(1, \sqrt{3}, 5)$.

15 $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}, M_0(-1, \sqrt{3}, 3)$. 16 $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}, M_0(-1,1,2)$.

17 $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}, M_0(-\sqrt{3}, 0, 2)$. 18 $z = \sqrt{10 - 4x^2 - 2y^2}, M_0(-1, -1, 2)$.

19 $z = \sqrt{12 - 2x^2 - y^2}, M_0(-1,1,3)$. 20 $z = \sqrt{12 - x^2 - 2y^2}, M_0(-1, -1, 3)$.

21 $z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, M_0(-1,1,4)$. 22 $z = \sqrt{18 - 4x^2 - y^2}, M_0(-2, -1, 1)$.

23 $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, M_0(-4,0,3)$. 24 $z = \sqrt{25 - 4x^2 - y^2}, M_0(-2,0,3)$.

25 $z = \sqrt{30 - 2x^2 - y^2}, M_0(-1, -\sqrt{3}, 5)$.

3 РЕКОМЕНДАЦИИ СОСТАВЛЕНИЯ ТЕСТОВ

3.1 Аналитическая геометрия

Тест 1

1 Даны уравнения прямых: l_1: $2x - y = 6$; l_2: $4x + 8y = -8$. Построить их и найти точку пересечения.

2 Даны координаты вершин треугольника $A_1(3,1)$, $A_2(5,-2)$, $A_3(9,7)$. Найти длину стороны A_1A_2.

3 Определить тип кривой и построить её: $3x^2 + 2y - 6 = 0$.

4 Даны координаты вершин треугольника: $A_1(6, 4, 2)$, $A_2(10, -1, -3)$, $A_3(12, -2, -3)$. Найти вектор $\overline{A_1A_2}$ и уравнение прямой A_1A_2.

5 Даны координаты вершин пирамиды: $A_1(6, 4, 2)$, $A_2(10, -1, -3)$, $A_3(12, -2, -3)$, $A_4(-8, 8, -2)$. Найти ее объем.

Тест 2

1 Даны уравнения прямых: l_1: $2x - y = 6$; l_2: $x + 2y = -2$. Построить их и доказать аналитически перпендикулярность.

2 Даны координаты вершин треугольника $A_1(3,1)$, $A_2(5,-2)$, $A_3(9,7)$. Найти уравнение прямой A_2A_3.

3 Определить тип кривой и построить её: $4x^2 + 9y^2 = 36$.

4 Даны координаты вершин треугольника: $A_1(6, 4, 2)$, $A_2(10, -1, -3)$, $A_3(12, -2, -3)$. Найти угол при вершине A_1.

5 Найти расстояние от точки $M_0(2, 0, 4)$ до плоскости $2x + 2y + z - 14 = 0$.

Тест 3

1 Даны уравнения прямых: l_1: $2x - y = 6$; l_2: $3x + 2y = 9$. Построить прямую l_1 и найти точки пересечения прямых l_1 и l_2 с координатными осями.

2 Даны координаты вершин треугольника: $A_1(3,1)$, $A_2(5,-2)$, $A_3(9,7)$. Найти угол при вершине A_1.

3 Определить тип кривой и построить её: $4x^2 - 9y^2 = 36$.

4 Даны координаты вершин треугольника: $A_1(6, 4, 2)$, $A_2(10, -1, -3)$, $A_3(12, -2, -3)$. Написать уравнение плоскости которой он принадлежит.

5 Написать уравнение прямой через точку $M_0(2, 0, 4)$ перпендикулярно плоскости $2x + 2y + z - 14 = 0$.

Тест 4

1 Даны уравнения прямых: l_1: $2x - y = 6$; l_2: $-4x + 2y = 9$. Найти точку пересечения прямых и доказать их перпендикулярность.

2 Даны координаты вершин треугольника: $A_1(3,1)$, $A_2(5,-2)$, $A_3(9,7)$. Найти уравнение медианы, проведенной из вершины A_1.

3 Определить тип кривой и построить её: $4x^2 - 9y^2 = 36$.

4 Даны координаты вершин треугольника: $A_1(6, 4, 2)$, $A_2(10, -1, -3)$, $A_3(12, -2, -3)$. Написать уравнение плоскости, которой он принадлежит.

5 Написать уравнение прямой через точку $M_0(2, 0, 4)$ перпендикулярно плоскости $2x + 2y + z - 14 = 0$.

Тест 5

1 Даны точки: $A_1(3,1)$, $A_2(5,-2)$. Найти $\overline{A_2A_1}$ и $\left|\overline{A_2A_1}\right|$.

2 Даны координаты вершин треугольника: $A_1(3,1)$, $A_2(5,-2)$, $A_3(9,7)$. Найти уравнение высоты проведенной из вершины A_1.

3 Определить тип кривой и построить её: $4x^2 + 4y^2 = 16$.

4. Даны координаты вершин треугольника: $A_1(6, 4, 2)$, $A_2(10, -1, -3)$,

$A_3(12, -2, -3)$. Написать уравнение плоскости которой он принадлежит.

5 Написать уравнение прямой через точку $M_0(2, 0, 4)$ перпендикулярно плоскости $2x + 2y + z - 14 = 0$.

3.2 Пределы. Дифференциальное исчисление и его приложения

Тест 6

1 Найти предел $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2 - 4n + 6}{5 + 6n - 7n^2}$.

2 Вычислить производную функции $y = x^2 - 4x + \cos 3x - 5$.

3. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{4 - 3x}{x - 1}$ в точке $x_0 = 2$.

4 Найти интервалы монотонности функции $y = x^2(x-2)^2$.

5 Сумма двух положительных чисел $a + b = 10$. Найти наибольшую величину их произведения.

Тест 7

1 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(x^2-x)}{4x}$.

2 Вычислить производную функции $y=\sqrt{x}\cdot\cos 4x$.

3 Написать уравнение нормали к графику функции $y=\dfrac{4-3x}{x}$ в точке $x_0=1$.

4 Найти точки экстремума $y=x^2(x-2)^2$.

5 Точка движется по закону $S=\dfrac{3}{4}t^2-3t+3$. Найти момент времени t, когда скорость равна нулю и S - путь, пройденный точкой к этому времени.

Тест 8

1 Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-13}{x-5}\right)^{\frac{x^2+3}{x-8}}$.

2 Вычислить $\dfrac{dy}{dx}$ в точке t_0.

$x=e^{2t}$, $y=\cos t$, $t_0=0$.

3 Найти под каким углом кривая $y=x^2-\dfrac{3}{2}x$ пересекает ось OX в точке $x_0=1$.

4 Найти критические точки $y=x^2(x-2)^2$.

5 Точка движется по закону $S=\dfrac{3}{4}t^2-3t+3$. Найти путь, пройденный точкой к моменту остановки.

Тест 9

1 Найти предел $\lim\limits_{n\to 12}\dfrac{x^2-144}{x-12}$.

2 Вычислить $\dfrac{dy}{dx}$ в точке x_0.

$y=\cos^2 x$, $x_0=\pi$.

3 Найти тангенс угла наклона касательной графика функции $y=x^2-\dfrac{3}{2}x$ в точке $x_0=3$.

4. Найти точки перегиба $y=x^4-8x^2+16$.

5 Точка движется по закону $S=\dfrac{3}{4}t^2-3t+3$. Найти её ускорение.

Тест 10

1 Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x-2}\right)$.

2 Вычислить производную:

$f(x)=\cos(2x+1)$.

3 Составить уравнение касательной к графику функции в точке t_0.

$x=3t,\ y=6t-t^2,\ t_0=2$.

4 Найти интервалы выпуклости и вогнутости $y=\frac{1}{4}x^4-x^3$.

5 Задана скорость движения точки $V=t\cdot e^t$. Найти её ускорение.

3.3 Матрицы. Функции многих переменных

Тест 11

1 Дана система линейных уравнений $\begin{cases}x-2y=3;\\2x+y=1.\end{cases}$

Записать матрицу системы, свободных членов и неизвестных.

2 Для матрицы $A=\begin{pmatrix}2&0&-4\\1&3&-2\\0&-6&0\end{pmatrix}$ найти M_{12}, $A_{12.}$

3 Для функции двух переменных $z=\sqrt{49-x^2-y^2}$ найти область определения функции.

4 Для функции двух переменных $z=x^2+y^2-6x-9y+xy+5$ найти критические точки.

5 Вычислить $\overline{grad\ \mathrm{U}}$: $U=\ln\left(3-x^2\right)+xy^2z$.

Тест 12

1 Дана система линейных уравнений $\begin{cases}x-2y=3;\\2x+y=1.\end{cases}$

Записать систему в матричной форме.

2 Для матрицы $A=\begin{pmatrix}2&0&-4\\1&3&-2\\0&-6&0\end{pmatrix}$ найти M_{22}, $A_{22.}$

3 Для функции двух переменных $z=\sqrt{49-x^2-y^2}$ найти z'_x, z'_y.

4 Для функции двух переменных $z=x^2+y^2-6x-9y+xy+5$ найти частные производные второго порядка.

5 Вычислить $\overline{grad\ \mathrm{U}}$ в точке M_0:

$U=\ln\left(3-x^2\right)+xy^2z, \qquad M_0(1.3.2)$

Тест 13

1 Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x-2y=3; \\ 2x+y=1. \end{cases}$

Найти решение системы.

2 Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ вычислить определитель.

3 Для функции двух переменных $z=\sqrt{49-x^2-y^2}$ найти z'_x в точке $M_0(1,\,6)$.

4 Для функции двух переменных $z=x^2+y^2-6x-9y+xy+5$ найти Z''_{yy}.

5 Вычислить $\left|\overline{grad\ \mathrm{U}}\right|$ в точке M_0.

$U=\ln\left(3-x^2\right)+xy^2z, \qquad M_0(1.3.2)$

Тест 14

1 Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x-2y=3; \\ 2x+y=1. \end{cases}$

Найти обратную матрицу системы.

2 Для матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ найти $2A-B.$

3 Для функции двух переменных $z=\sqrt{49-x^2-y^2}$ найти z'_y.

4 Для функции двух переменных $z=x^2+y^2-6x-9y+xy+5.$ найти Z''_{xy}

5. Вычислить $\overline{grad\ U}$ в точке M_0:

$U=\ln\left(3-x^2\right)+xy^2z, \qquad M_0(1.3.2).$

Тест 15

1 Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x-2y=3; \\ 2x+y=1. \end{cases}$

Записать решение системы в матричной форме.

2 Для матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B.$

3 Для функции двух переменных $z=\sqrt{49-x^2-y^2}$ найти z'_y в точке $M_0(1,\,6)$.

4 Для функции двух переменных $z=x^2+y^2-6x-9y+xy+5$ вычислить $D=Z''_{xx}Z''_{yy}-\left(Z''_{xy}\right)^2$

5 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $Z=3x+y-xy$ в области $D: y=x, y=4, x=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М. : Наука, 1980. – с,

2 Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М. : Наука, 1988. – с.

3 Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М. : Наука, 1989. – с.

4 П. Е. Данко, А. Г Попов, Т. Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М. : Высшая школа, 1980. – Ч. I, II.

5 Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. – М. : ФН, 1963. – с.

6 Пискунов М. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М. : Наука, 1970–1985. – т. 1, 2.

7 Привалов И. И. Аналитическая геометрия. – М. : Наука, 1964. – с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки індивідуальні та тестові завдання

для студентів інженерно-технічних спеціальностей

Частина 1

(*Російською мовою*)

Укладачі: А. Н. Обухов,
С. А. Колесников

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання О. С. Орда

Формат 60 x 84/16. Ум. друк. арк.
Обл.-вид. арк. Тираж пр. Зам. №

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК №1633 від 24.12.2003