ВВЕДЕНИЕ

Данная курсовая работа даёт возможность более детально изучить теоретические вопросы механики сплошных сред. Широко используемые элементы векторного анализа и тезисного исчисления позволяют усвоить наиболее важные соотношения. Индексные обозначения значительно сократили и упростили запись формул.

Первая часть курсовой работы посвящена теории напряжений, напряжённому состоянию в точке.

Вторая часть посвящена вопросам деформированного состояния в точке, а также способами представления движения сплошной среды и определения перемещений, и т. д.

Последовательность решения материала основывается на принципе постепенного введения новых понятий, опирающихся на уже известные, ранее введённые.

Задание для курсовой работы

Таблица 1 – **Часть 1.** Варианты заданий для контрольных работ

№ варианта	Тензор напряжений						Матрица направляющих косинусов									Направляющие	
	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	σ_{12}	σ_{23}	σ_{31}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{31}	α_{32}	α_{33}	n_1	n_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1,26,51,76	10	15	8	4	7	9	-1	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,3	-0,6
2,27,52,77	12	16	10	5	9	11	-1	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,6	-0,3
3,28,53,78	3	8	7	10	15	19	-1	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,4	-0,8
4,29,54,79	9	6	3	12	5	7	-1	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,8	0,4
5,30,55,80	18	12	10	7	8	4	-1	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,33	-0,75
6,31,56,81	21	7	3	9	6	3	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,75	-0,33
7,32,57,82	24	14	18	11	12	6	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,5	-0,25
8,33,58,83	13	10	5	2	1	3	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,25	-0,5
9,34,59,84	11	16	17	3	7	12	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,8	-0,2
10,35,60,85	14	9	3	8	5	2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,2	-0,8
11,36,61,86	6	3	2	9	8	7	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0,7	-0,45

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
12,37,62,87	12	16	8	14	9	6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0,45	-0,7
13,38,63,88	15	12	10	18	4	5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0,8	-0,6
14,39,64,89	17	8	14	9	5	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0,6	-0,8
15,40,65,90	2	10	15	21	11	18	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0,55	-0,4
16,41,66,91	19	7	6	13	21	4	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	0,4	-0,55
17,42,67,92	10	8	2	5	14	25	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	0,65	-0,5
18,43,68,93	9	5	2	11	7	14	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	0,5	-0,65
19,44,69,94	16	7	10	3	9	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	0,44	-0,63
20,45,70,95	1	3	8	4	9	11	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0	0,63	-0,44
21,46,71,96	3	12	5	18	13	4	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0	0,75	-0,15
22,47,72,97	10	5	15	10	11	7	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0	0,15	-0,75
23,48,73,98	3	14	25	5	7	8	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0	0,8	-0,35
24,49,74,99	7	6	1	4	10	6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0	0,35	-0,8
25,50,75, 100	4	1	6	7	2	10	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0	0,2	-0,3

Часть 2

Таблица 2 – Варианты заданий для контрольных работ

№ варианта	X_1	X_2	X_3
1,26,51,76	$\eta_1 t^3 + 2t^2$	$2\eta_2 t^3$	$\eta_3 t^4$
2,27,52,77	$2\eta_1 + 5t^3$	$\eta_2 t^5$	$\eta_3 t^5+3t$
3,28,53,78	$3\eta_1 t$	$5\eta_2 t+3t^2$	$\eta_3 t^5$
4,29,54,79	$4\eta_1 t^3 + t^2$	$3\eta_2 t^3+5t$	$\eta_3 t^2$
5,30,55,80	$5\eta_1 t^3 - 2t^2$	$4\eta_2 t^3$	$6\eta_3 t+t^3$
6,31,56,81	$6\eta_1 t^4$	$3\eta_2 t^2+t^2$	$2\eta_3 t^3$
7,32,57,82	$7\eta_1 t^3 - 2t$	$\eta_2 t^5-3t$	$4\eta_3+t^5$
8,33,58,83	$8\eta_1 t^3 + t^4$	$4\eta_2 t^2$	$3\eta_3 t^3$
9,34,59,84	$9\eta_1 t^4+t^3$	$\eta_2 t^2$	$5\eta_3 t^2+4t$
10,35,60,85	$\eta_1 t^4+t^2$	$2\eta_2 t+t^4$	$3\eta_3 t^5$
11,36,61,86	$\eta_1 t^4+t^5$	$2\eta_2 t^3+3t^4$	$4\eta_3 t^2$
12,37,62,87	$\eta_1 t^4$	$5\eta_2 t^3-t^4$	$7\eta_3 t-t^3$
13,38,63,88	$3\eta_1 t^3+t^3$	$\eta_2 t^2+3t^3$	$6\eta_3 t$
14,39,64,89	$4\eta_1 t+3t^6$	$3\eta_2 t^3$	$9\eta_3 t^2-t^2$
15,40,65,90	$5\eta_1+t^2$	$6\eta_2 t^2-t^3$	$\eta_3 t+2t$
16,41,66,91	$7\eta_1 t-t^2$	$4\eta_2 t-3t$	$2\eta_3 t-t$
17,42,67,92	$8\eta_1 t^3-3t$	$\eta_2 t^4$	$\eta_3 t^3-2t$
18,43,68,93	$3\eta_1 t^3+3t^3$	$\eta_2 t^2-2t$	$\eta_3 t^3+t^3$
19,44,69,94	$\eta_1 t^5-2t^4$	η_2-4t^3	$\eta_3 t^4-8t$
20,45,70,95	$\eta_1 t^2+5t$	$\eta_2 t^3-3t$	$\eta_3 t-6t^2$
21,46,71,96	$3\eta_1 t^5-5t^2$	$4\eta_2 t^2-4t$	$\eta_3 t^2+5t$
22,47,72,97	$4\eta_1 t^3+6t^2$	$\eta_2 t$	$\eta_3 t^5$
23,48,73,98	$\eta_1 t^5-t^3$	$\eta_2 t^3-t^2$	$\eta_3 t-2t$
24,49,74,99	$6\eta_1 t^2+3t^3$	$\eta_2 t^2+2t^2$	$\eta_3 t^3+3t^3$
25,50,75,100	$7\eta_1 t-t$	$\eta_2 t^2-2t$	$\eta_3 t^5+t^4$

ЗАДАНИЕ №1

1.1 Компоненты тензора напряжений $\left[\sigma'_{ij}\right]$ в новой декартовой системе координат заданных таблицей направляющих косинусов $\left[\alpha_{ij}\right]$ можно вычислить двумя способами:

а)
$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\sigma_{kl}, \qquad (1)$$

где α_{ik}, α_{jl} - компоненты матриц направляющих косинусов;

σ_{kl} - компоненты исходного тензора напряжений.

б)
$$\left[\sigma'_{ij}\right] = \left[\alpha_{ij}\right]\left[\sigma_{ij}\right]\left[\alpha_{ij}\right]^T, \qquad (2)$$

где α_{ij} - матрица направляющих косинусов;

σ_{ij} - исходный тензор напряжений.

Пример расчёта.

а) $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 4 \\ 0 & 4 & 30 \end{pmatrix}$; $\qquad \alpha_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

$$\sigma'_{11\left(\substack{i=1 \\ j=1 \\ k,l=1..3}\right)} = \alpha_{11}\alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_{12} + \alpha_{11}\alpha_{13}\sigma_{13} + \alpha_{12}\alpha_{11}\sigma_{21} + \alpha_{12}\alpha_{12}\sigma_{22} +$$

$$+ \alpha_{12}\alpha_{13}\sigma_{23} + \alpha_{13}\alpha_{11}\sigma_{31} + \alpha_{13}\alpha_{12}\sigma_{32} + \alpha_{13}\alpha_{13}\sigma_{33} = (-1)*(-1)*10 + (-1)*0*1 +$$

$$+ (-1)*0*0 + \frac{\sqrt{3}}{2}*(-1)*1 + 0*0*20 + 0*0*4 + 0*(-1)*0 +$$

$$+ 0*0*4 + 0*0*30 =$$

б) $$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 4 \\ 0 & 4 & 30 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^T =$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 4 \\ 0 & 4 & 30 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -10 & -1 & 0 \\ 0{,}866 & 19{,}321 & 18{,}46 \\ 0{,}5 & 6{,}536 & -23{,}981 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -10 & -0{,}866 & -0{,}5 \\ -0{,}866 & 26 & -6{,}33 \\ -0{,}5 & -6{,}33 & 24 \end{pmatrix} МПа.$$

1.2 Напряжение на площадке, нормаль которой задана направляющими косинусами.

Полный вектор напряжений рассчитывается по исходному тензору напряжений σ_{ij} и направляющими косинусами n_1, n_2.

Полный вектор напряжений вычисляется

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + \sigma_{n3}^2}$$

где $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$ - проекции полного вектора напряжений не соответствующие оси координат:

$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j$.

Нормальный вектор напряжений вычисляется по следующей формуле:

$\sigma_{nn} = \sigma_{n1} n_1 + \sigma_{n2} n_2 + \sigma_{n3} n_3$.

Проекцию вектора σ_{nn} на соответствующую ось координат находим из выражения

$\sigma_{nn_i} = \sigma_{nn} n_i$

Касательную компоненту $\sigma_{n\tau}$ для той же площадки с нормалью $\vec{n}$ определяем из равенства

$\sigma_{n\tau}^2 + \sigma_{n\tau}^2 = \sigma_n^2$

Проекции вектора $\sigma_{n\tau}$ на соответствующие оси определяются по формуле:

$\sigma_{n\tau i} = \sigma_{ni} - \sigma_{nni}$.

Пример решения.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ Мпа,} \quad \begin{matrix} n_1 = 0{,}8, \\ n_2 = -0{,}25. \end{matrix}$$

$n_3 = \sqrt{1 - 0{,}8^2 - 0{,}25^2} = 0{,}55.$

Проверка:$0{,}8^2 + (-0{,}25^2) + 0{,}55^2 = 1$;

$\sigma_{n1} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 7 * 0{,}8 + 3 * (-0{,}25) + 5 * 0{,}55 = 5{,}6 - 0{,}75 + 2{,}75 = 7{,}6$ МПа.

$\sigma_{n2} = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 = 3 * 0{,}8 + 4 * (-0{,}25) + 4 * 0{,}55 = 2{,}4 - 1 + 2{,}2 = 3{,}6$ МПа.

$\sigma_{n3} = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 = 5*0{,}8 + 4*(-0{,}25) + 4*0{,}55 = 4 - 1 + 2{,}2 = 5{,}2$ МПа.

$\sigma_n = \sqrt{7{,}6^2 + 3{,}6^2 + 5{,}2^2} = 9{,}89$ МПа.

$\sigma_{nn} = 7{,}6*0{,}8 + 3{,}6*(-0{,}25) + 5{,}2*0{,}55 = 8{,}04 МПа$

$\sigma_{nn1} = \sigma_{nn} * n_1 = 8{,}04*0{,}8 = 6{,}4 МПа$

$\sigma_{nn2} = \sigma_{nn} * n_2 = 8{,}04*(-0{,}25) = -2{,}01 МПа$

$\sigma_{nn3} = \sigma_{nn} * n_3 = 8{,}04*0{,}55 = 4{,}42 МПа$

1.3 Инварианты тензора напряжений находятся по формулам:

$I_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$

$I_2(\sigma) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right)$

$I_3(\sigma) = \det[\sigma_{ij}]$.

На основе инвариантов составляется характеристическое уравнение

$\sigma_3 - I_1(\sigma)\sigma^2 + I_2(\sigma)\sigma - I_3(\sigma) = 0;$

Главные напряжения находятся из характеристического уравнения и упорядочиваются следующим образом:

$\sigma_1 \rangle \sigma_2 \rangle \sigma_3.$

Тензор напряжений можно разложить на девиатор и шаровой тензор по формуле:

$\sigma_{ij} = Д(\sigma) + \sigma^0 = \widetilde{\sigma}_{ij} + \delta_{ij}\sigma_0,$

где $Д(\sigma), \widetilde{\sigma}_{ij}$ - девиатор напряжений;

δ_{ij} - символ Кронекера;

σ_0 - среднее или гидростатическое напряжение.

Касательные напряжения $\tau_{окт}$ и нормальные $\sigma_{окт}$ на октаэдрической площадке находятся по формуле:

$$\sigma_{окт} = \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3};$$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Интенсивность касательных напряжений τ_i и эквивалентное напряжение $\sigma_{экв}$ вычисляется из выражений

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2};$$

$$\sigma_{экв} = \sqrt{3} * \tau_i.$$

Угол вида напряжённого состояния ψ_σ в точке сплошной среды находят по формуле:

$$\sin\psi_\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_{экв}}.$$

Параметр Надаи – Лоде вычислим по следующим выражениям

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

$$\mu_\sigma = \sqrt{3}tg\left(\psi_\sigma - 30^0\right).$$

Пример выполнения:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$ - исходный тензор, МПа.

$I_1(\sigma) = 7 + 4 + 4 = 15,$

$$I_2(\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 22,$$

$$\det[\sigma_{ij}] = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -16.$$

$\sigma^3 - 15\sigma^2 + 22\sigma + 16 = 0.$

Первый корень извлечённого уравнения равен 2,2812.

Выполним деление:

$$\begin{array}{l|l} \sigma^3 - 15\sigma^2 + 22\sigma + 16 & \sigma - 2{,}2812 \\ \cline{2-2} \underline{\sigma^3 - 2{,}2812} & \sigma^2 - 12{,}719\sigma - 7{,}015 \\ \quad -12{,}719\sigma^2 + 22\sigma & \\ - & \\ \quad \underline{-12{,}719\sigma^2 + 29{,}015} & \\ \qquad\qquad -7{,}015\sigma + 16 & \\ \qquad\qquad - & \\ \qquad\qquad \underline{-7{,}015\sigma + 16} & \\ \qquad\qquad\qquad 0. & \end{array}$$

$\sigma^2 - 12{,}719\sigma - 7{,}015 = 0;$

$D = 12{,}719^2 - 4 * (-7{,}015) = 189{,}833;$

$$\sigma_{\max,\min} = \frac{12{,}719 \pm \sqrt{189{,}833}}{2};$$

$\sigma_{\max} = 13{,}249; \sigma_{nin} = -0{,}53.$

$\sigma_1 = 13{,}249 МПа; \sigma_2 = 2{,}28 МПа; \sigma_3 = -0{,}53 МПа.$

Проверим правильность нахождения главных напряжений

$I_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 13{,}249 + 2{,}28 - 0{,}53 \approx 15;$

$I_2(\sigma) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 = 13{,}24 * 2{,}28 + 2{,}28 * (-0{,}53) + 13{,}249 * (-0{,}53) \approx 22;$

$I_3(\sigma) = \sigma_1 * \sigma_2 * \sigma_3 = 13{,}249 * 2{,}28 * (-0{,}53) \approx -16/$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{15}{3} = 5.$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$\sigma_{окт} = \sigma_0 = 5.$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(13{,}25 - 2{,}28)^2 + (2{,}28 + 0{,}53)^2 + (-0{,}53 - 13{,}25)^2} = \frac{17{,}028}{3} = 5{,}07 МПа$$

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(13{,}25 - 2{,}28)^2 + (2{,}28 + 0{,}53)^2 + (-0{,}53 - 13{,}25)^2} = \frac{17{,}028}{\sqrt{6}} = 6{,}95 МПа$$

$$\sigma_{экв} = \sqrt{3} * 9,95 = 12,041 МПа$$

$$\sin\psi_{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{2,28 + 0,53}{12,041} \Rightarrow \psi_{\sigma} = 12^{0}$$

$$\mu_{\sigma} = \frac{2 * 2,28 - 13,25 + 0,53}{13,25 - 0,53} =$$

1.4 Построение диаграммы Мора с соответствующей точкой на наклонной площади п. 1.2. Для построения точки на диаграмме Мора нужно вычислить соответствующие размеры, указанные на рисунке 1.

$$R_1 = \sqrt{(0,5(\sigma_2 - \sigma_3))^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) * n_1^2};$$

$$R_2 = \sqrt{(0,5(\sigma_3 - \sigma_1))^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) * n_2^2};$$

$$R_3 = \sqrt{(0,5(\sigma_1 - \sigma_2))^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) * n_3^2};$$

где

$$n_1^2 = \frac{\sigma_{n\tau}^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_2)(\sigma_{nn} - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)};$$

$$n_2^2 = \frac{\sigma_{n\tau}^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_3)(\sigma_{nn} - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)};$$

$$n_3^2 = \frac{\sigma_{n\tau}^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_1)(\sigma_{nn} - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)};$$

$$n_1^2 = \frac{5,75^2 + (8,04 - 2,28)(8,04 + 0,53)}{(13,25 - 2,28)(13,25 - 0,53)} = 0,546;$$

$$n_2^2 = \frac{5,75^2 + (8,04 - 13,25)(8,04 + 0,53)}{(2,28 - 13,25)(2,28 + 0,53)} = 0,374;$$

$$n_3^2 = \frac{5,75^2 + (8,04 - 13,25)(8,04 - 2,28)}{(-0,53 - 13,25)(-0,53 - 2,28)} = 0,08;$$

Проверка

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow$$

$$0,546 + 0,374 + 0,08 \approx 1$$

$$R_1 = \sqrt{(0,5(2,28 + 0,53))^2 + (13,25 - 2,28)^2 (13,25 + 0,53)^2 * 0,546} = 9,2 МПа;$$

$$R_2 = \sqrt{(0,5(-0,53 - 2,28))^2 + (2,28 + 0,53)^2 (2,28 - 13,25)^2 * 0,374} = 5,9 МПа;$$

$$R_3 = \sqrt{(0,5(13,25 - 2,28))^2 + (-0,53 - 13,25)^2 (-0,53 - 2,28)^2 * 0,08} = 5,75 МПа.$$

ЗАДАНИЕ №2

2.1 Доказательство перехода от переменных Лагранжа к переменным Эйлера производятся вычисления Якобиана

$$I = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \right| \neq 0;$$

Пример выполнения.

Задано движение сплошной среды в переменных Лагранжа:

$x_1 = 5\eta_1 t + t^3;$

$x_2 = 4\eta_2 t^2;$

$x_3 = 3\eta_3 t^4 + t^3.$

Вычислим

$$I = \left|\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j}\right| = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_3} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_2}\left(4\eta_2 t^2\right) = 4t^2;$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_3}\left(3\eta_3 t^4 + t^3\right) = 3t^4;$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1}\left(5\eta_1 t + t^3\right) = 5t.$$

$$\det\begin{pmatrix} 5t & 0 & 0 \\ 0 & 4t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3t^4 \end{pmatrix} = 5t\begin{vmatrix} 4t^2 & 0 \\ 0 & 3t^4 \end{vmatrix} = 5t\left(12t^6 - 0\right) = 60t^7 \neq 0.$$

Переход возможен.

2.2 Нахождение компонент перемещения поля скоростей в Лагранжевой форме.

Компоненты перемещения в Лагранжевой форме находятся по формуле:

$U_i = \eta_i - x_i.$

Поле скоростей деформации в Лагранжевой форме можно найти следующим образом:

$$\vartheta_i = \frac{dU_i}{dt}.$$

Пример выполнения.

Движение задано в переменных Лагранжа

$x_1 = \eta_1 t^3 - 2t^2;$

$x_2 = 3\eta_2 t - 4t;$

$x_3 = 5\eta_3 t^4.$

Находим компоненты перемещения

$U_1 = \eta_1 - \eta_1 t^3 - 2t^2;$

$U_2 = \eta_2 - 3\eta_2 t - 4t;$

$U_3 = \eta_3 - 5\eta_3 t^4.$

Компоненты скоростей следующие

$$\vartheta_1 = \frac{d}{dt}(\eta_1 - \eta_1 t^3 - 2t^2) = -3\eta_1 t^2 - 4t;$$

$$\vartheta_2 = \frac{d}{dt}(\eta_2 - 3\eta_2 t - 4t) = -3\eta_2 - 4;$$

$$\vartheta_3 = \frac{d}{dt}(\eta_3 - 5\eta_3 t^4) = -20\eta_3 t^3.$$

Определение материального градиента деформаций и перемещений, они определяются по формулам:

$$\vec{x}\nabla_\eta = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j}\right);$$

$$\vec{U}\nabla = \left(\frac{\partial U_i}{\partial \eta_j}\right).$$

Пример выполнения.

$$\vec{x}\nabla_\eta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & 5t^4 \end{pmatrix};$$

$$\vec{U}\nabla_\eta = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial U_1}{\partial \eta_2} & \frac{\partial U_1}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial U_2}{\partial \eta_2} & \frac{\partial U_2}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial \eta_1} & \frac{\partial U_3}{\partial \eta_2} & \frac{\partial U_3}{\partial \eta_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3t & 0 \\ 0 & 0 & 1-5t^4 \end{pmatrix}.$$

2.4 Определение бесконечно малых и конечных деформаций по Лагранжу выполняет по следующим выражением:

$$l_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial \eta_j} + \frac{\partial U_j}{\partial \eta_i}\right);$$

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial \eta_j} + \frac{\partial U_j}{\partial \eta_i} - \frac{\partial U_k}{\partial \eta_j} + \frac{\partial U_k}{\partial \eta_i}\right);$$

Пример выполнения.

$$l_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial \eta_1} = \frac{\partial}{\partial \eta_1}(\eta_1 - \eta_1 t^3 - 2t^2) = 1 - t^3;$$

$$L_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \eta_2} + \frac{\partial U_2}{\partial \eta_2} - \frac{\partial U_1}{\partial \eta_2} * \frac{\partial U_1}{\partial \eta_2} - \frac{\partial U_2}{\partial \eta_2} * \frac{\partial U_2}{\partial \eta_2} - \frac{\partial U_3}{\partial \eta_2} * \frac{\partial U_3}{\partial \eta_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 3t + 1 - 3t - 0 - (1-3t) * (1-3t) - 0\right) = \frac{1}{2}\left(2 * (1-3t) - (1-3t)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - 6t - 1 + 6t - 9t^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 9t^2\right).$$

2.5 Определение тензора линейного поворота

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial \eta_j} - \frac{\partial U_j}{\partial \eta_i}\right);$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_3}{\partial \eta_3} - \frac{\partial U_3}{\partial \eta_3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 5t^4 - 1 - 5t^4\right) = 0.$$

Определение интенсивности деформаций сдвига выполнять по формуле:

$$l_i = \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(l_{11} - l_{22}\right)^2 + \left(l_{22} - l_{33}\right)^2 + \left(l_{33} - l_{11}\right)^2 + 6 * \left(l_{12}^2 + l_{23}^2 + l_{31}^2\right)};$$

ПОДГОТОВКА К СДАЧЕ ЭКЗАМЕНА

Необходимым условием допуска к экзамену являются выполнение и защита курсовой работы.

Защита курсовой работы по курсу «Механика деформирования твердого тела» проводится в письменной форме. Задача выполняется письменно, а теоретический вопрос опрашивается устно.

Решение задач и ответ на теоретический вопрос оценивается по 100 бальной системе. Максимальное число баллов за решение задач - 25, за ответы на теоретические вопросы - 75 баллов. В зависимости от набранного суммарного количества баллов выставляется оценка по следующей шкале:

90…100 баллов – отлично;
75…89 баллов – хорошо;
55…74 баллов – удовлетворительно;
менее 55 баллов – неудовлетворительно.