КРАМАТОРСЬК

С.В. Подлєсний
В.Г. Федорченко
Д.Г. Сущенко
Ю.О. Єрфорт

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Розділ „Кінематика”

Навчальний посібник

Краматорськ 2006

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

С.В. Подлєсний,
В.Г. Федорченко,
Д.Г. Сущенко,
Ю.О. Єрфорт

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Розділ „Кінематика"

Навчальний посібник

Краматорськ 2006

ББК 22.21
УДК 531.1
Р 64

Рецензенти:

В.Б.Малєєв, д.т.н., професор, зав. кафедрою теоретичної механіки ДонНТУ

О.К.Морачковський, д.т.н., професор, зав. кафедрою теоретичної механіки Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»

В.М.Саприкін, к.т.н., процесор, зав. кафедрою теоретичної механіки та машинознавства Національного аерокосмічного університету ім.М.В.Жуковського

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
Лист № 1.4/18 Г-749 від 04.09.06г.

Подлєсний С.В., Федорченко В.Г., Сущенко Д.Г., Єрфорт Ю.О.

Р-64 Розв'язання задач з дисципліни "Теоретична механіка". Розд. "Кінематика": Навчальний посібник. – Краматорськ: ДДМА, 2006. – 200 с.
ISBN 966-379-096-2

Навчальний посібник містить стислі теоретичні відомості, приклади розв'язання задач, а також вправи для самостійної роботи студентів за основними темами у розділі „Кінематика" курсу теоретичної механіки.

Посібник розрахований як на викладачів, так і на студентів.

УДК 531.1
ББК 22.21

ISBN 966-379-096-2

ЗМІСТ

ВСТУП

У навчальному посібнику з розв'язання задач кінематики наведені приклади розв'язків за основними темами.

Стислі теоретичні дані забезпечують поєднання теорії з практичними навичками при розв'язанні задач, що сприяє, насамперед, творчому їх розумінню.

Наведені приклади розв'язків задач із застосуванням різноманітних прийомів та методик.

Показано, як одна задача може бути розв'язана різними методами, вибір кожного з яких визначається в залежності від конкретних умов задачі.

Зв'язок між різними методами розв'язання задач та обґрунтування вибору найбільш раціонального з них показаний на конкретних прикладах.

У роботі приділяється увага фізичним та математичним аналогіям, що створює передумови глибокому розумінню студентами методики розв'язання задач і кінематики і статики .

При розв'язанні задач на прикладах здійснюється зв'язок алгоритму розв'язання з математичним виразом та фізичним змістом рівняння або теореми з теоретичним обґрунтуванням, що забезпечую творчу діяльність студента при вивченні курсу теоретичної механіки.

Розглянуті розділи закінчується невеличкими задачами і контрольними завданнями для самостійних робіт, що дає змогу студенту за короткий проміжок часу отримати необхідні знання і вміння у розв'язанні різноманітних задач класичної механіки.

1 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1 Вступ до кінематики

Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних точок та їх систем з геометричної точки зору незалежно від сил, що діють на них .

Кінематику називають також геометрією руху, оскільки в ній розглядаються саме геометричні властивості руху. Вона вивчає залежності між просторово-часовими характеристиками механічного руху.

Механічні рухи, що вивчаються у кінематиці, відбуваються у просторі та в часі.

Зазначимо, що в теоретичній механіці простір, в якому відбувається рух тіла, розглядається як тривимірний, і всі розрахунки виконуються на підставі методів евклідової геометрії.

Час вважається однорідним у будь-яких системах відліку (системах координат) і не залежить від відносного руху цих систем. Час позначається буквою t і розглядається як безперервно змінна величина, що застосовується як аргумент.

У кінематиці при зміні часу розрізняють такі поняття, як проміжок часу та початковий момент часу.

Проміжком часу називають перебіг часу між двома фізичними явищами.

Моментом часу називають границю між двома суміжними проміжками часу.

Початковим моментом часу називають момент часу, з якого починається відлік.

З теорії відносності випливають інші уявлення про простір і час, які значною мірою відрізняються від уявлень класичної механіки. Разом з тим, для випадків руху тіла зі швидкостями, значно меншими за швидкість світла, тривимірний евклідів простір і універсальний час є повноцінним і досить точними абстракціями реального часу та реального простору.

Вивчаючи рух тіла, завжди слід знати, відносно якого іншого тіла, що називається **тілом відліку**, розглядається цей рух.

Сукупність тіла відліку, з яким пов'язана система координат, і годинника називають **системою відліку**. Ця система може бути як рухомою, так і умовно нерухомою.

У кінематиці не має значення, який рух здійснює вибрана система координат відносно інших тіл, що не входять у межі розв'язуваної задачі, проте завжди слід звертати увагу на те, що характер спостережного руху значною мірою залежить від вибору системи координат. Наприклад, поршень двигуна внутрішнього згорання здійснює відносно корпуса автомобіля прямолінійний коливальний рух, а відносно дороги, якою рухається автомобіль зі сталою швидкістю, - синусоїдальний.

У класичній механіці постулюється наявність системи відліку, відносно якої простір є однорідним та ізотропним, а час – однорідним.

Систему відліку називають **інерціальною,** якщо ізольована матеріальна точка у такій системі може необмежено довго знаходитись у стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху. Системи відліку, що не мають вказаних властивостей, називають **неінерціальними.** Всі системи відліку, що знаходяться у стані спокою або рухаються поступально, рівномірно і прямолінійно відносно інерціальної системи, є також інерціальними.

Рух геометричного образу тіла по відношенню до вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити його положення відносно цієї системи в довільний момент часу.

Залежність параметрів, що характеризуються положенням геометричного образу відносно системи відліку від часу визначається відповідними рівняннями, які називаються **законом руху** тіла.

Оскільки рух геометричного образу тіла буде відомим, коли буде відомим закон руху всіх його точок, вивчення руху будь-якого геометричного образу передує вивченню руху однієї його точки.

Ця логіка є основою поділу кінематики на такі розділи, як кінематика точки, кінематика твердого тіла, та кінематика сукупності твердих тіл і точок.

1.2 Три способи завдання руху точки

Основним завданням кінематики точки є вивчення залежності між довільними положеннями рухомої точки в просторі та часі. Ця залежність визначає **закон руху** точки. Закон руху точки вважається відомим, якщо можна визначити положення точки в просторі у довільний момент часу. Для визначення положення точки у просторі вибирають деяку систему відліку (систему координат). Лінія, яку описує точка під час руху, називається **траєкторією.** Якщо траєкторією точки є пряма лінія, то рух точки називається **прямолінійним**, якщо траєкторія точки крива, то – **криволінійним**.

Рух точки відносно обраної системи відліку вважається заданим, якщо відомо, яким чином можна визначити її положення в будь-який момент часу. Основними просторово-часовими (кінематичними) характеристиками руху точки є її **координата, швидкість** і **прискорення.**

Рух точки можна визначити трьома способами: векторним, координатним і натуральним.

Векторний спосіб.

Положення матеріальної точки можна визначити за допомогою радіус-вектора $\overline{r}$ (рис.1.1), тобто вектора, проведеного з почапку координат O в дану точку M .

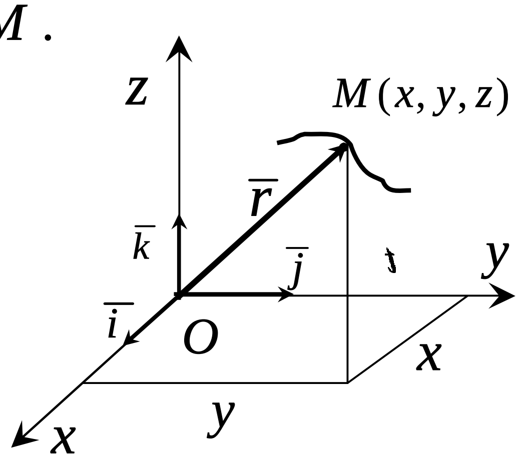


Рисунок 1.1

Одночасно з рухом точки радіус-вектор $\overline{r}$ змінюється за величиною і напрямком. Кожному моменту часу t відповідає певне значення $\overline{r}$. Отже, $\overline{r}$ є функцією від часу t, тобто

$$\bar{r} = \bar{r}\left(t\right). \tag{1}$$

Функцію (1) вважають однозначною, тому що розглянута точка у даний момент часу може знаходитись лише в одному місці простору. Крім того, функція (1) має бути безперервною функцією. У більшості задач механіки ця функція має першу та другу похідні за часом. Рівняння (1) називається **кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі.** Це рівняння є законом руху точки, а також рівнянням траєкторії точки у векторній формі.

Координатний спосіб.

Цей спосіб визначення руху точки полягає в тому, що задаються координати точки як функції часу (див.рис.1.1):

$$x = x\left(t\right),\ y = y\left(t\right),\ z = z\left(t\right). \tag{2}$$

Між векторним і координатним способами завдання руху точки існує такий зв'язок:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \tag{3}$$

де $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – орти (одиничні вектори), осей координат Ox, Oy, Oz відповідно (див.рис.1.1).

На тій самій підставі, що й функція (1), функції (2) однозначні, неперервні і мають неперервні похідні.

Рівняння (2) є також рівняннями траєкторії точки у параметричній формі. Виключивши з рівнянь (2) параметр t, одержимо рівняння траєкторії в явній формі. Зазначимо, що крім декартової системи координат можуть застосовуватись й інші – криволінійні системи координат, зокрема полярні, циліндричні, сферичні, тощо.

Якщо рух точки задано в полярних координатах (рис.1.2), то у цьому разі слід задати як функції часу координати r і j :

$$r = r\left(t\right),\ j = j\left(t\right), \tag{4}$$

де r – полярний радіус; j - кут між полярною віссю та полярним радіусом.

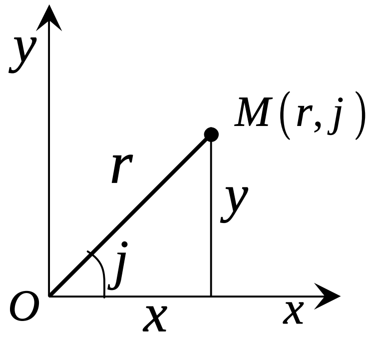


Рисунок 1.2

Виключивши параметр t з рівнянь (4) дістанемо

$$r = r(j)\,. \tag{5}$$

У тривимірному просторі застосовуються також циліндричні (рис.1.3) і сферичні (рис.1.4) координати. Рівняння руху точки у циліндричних координатах мають вигляд:

$$r = r(t),\ j = j(t),\ z = z(t)\,. \tag{6}$$

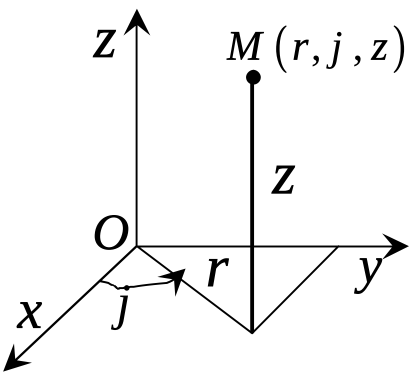


Рисунок 1.3

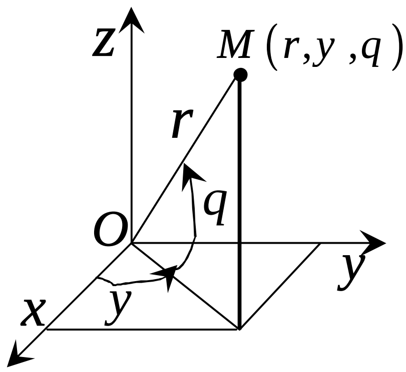


Рисунок 1.4

У сферичних координатах положення точки визначається полярним радіусом r, кутами y та q (полюсний кут), а рівняння руху точки мають вигляд

$$r = r(t),\ y = y(t),\ q = q(t)\,. \tag{7}$$

Перехід від декартових координат до полярних, циліндричних, сферичних і навпаки матимуть вигляд (рис.1.2 …1.4):

полярні

$$x = r cos j \, , \; y = r sin j \, , \; z = 0 \, ;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \, , \; tg j = \frac{y}{x} \, , \; z = 0 \, ; \qquad (8)$$

циліндричні

$$x = r cos j \, , \; y = r sin j \, , \; z = z(t) \, ;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \, , \; tg j = \frac{y}{x} \, , \; z = z(t) \, ; \qquad (9)$$

сферичні

$$x = r cos q \, cos y \, , \; y = r cos q \, sin y \, , \; z = r sin q \, ;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, , \; tg y = \frac{y}{x} \, , \; tg q = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, . \qquad (10)$$

Зазначимо, що в усіх наведених криволінійних координатах

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Натуральний спосіб

Якщо траєкторія точки відома наперед, то для визначення закону її руху у просторі достатньо задати положення точки на траєкторії. Тому одну з точок M_0 на траєкторії беруть за початок відліку дугових координат, оскільки положення рухомої точки M визначається її орієнтованою відстанню s, яка відлічується по дузі траєкторії від вибраної точки відліку (рис.1.5).

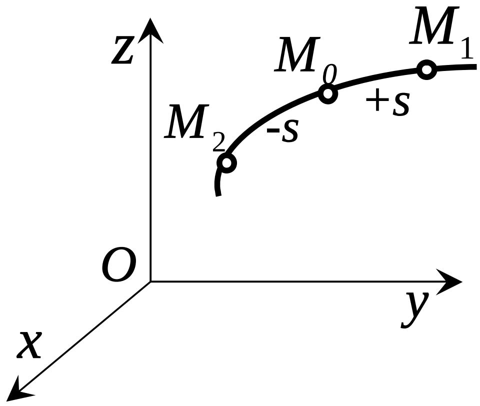


Рисунок 1.5

Отже, s є функцією часу

$$s = s(t). \tag{11}$$

Наведене рівняння (11) визначає закон руху точки по траєкторії. Функція (11) має бути однозначною, неперервною та диференційованою.

Зауважимо, що дугова координата точки s у загальному випадку відрізняється від шляху, що пройшла точка траєкторією.

1.3 Траєкторія і положення точки в прямокутній системі координат

Розглянемо визначення траєкторії і положення точки в прямокутній системі відліку за допомогою прикладів.

Приклад 1

Рух точки задано в координатній формі за допомогою рівнянь

$$x = r\cos t, \qquad y = r\sin t. \tag{12}$$

Знайти рівняння траєкторії точки в координатній формі.

Рішення

Щоб визначити рівняння траєкторії точки в координатній формі, треба з двох рівнянь руху вилучити параметр t. Піднесемо кожне з цих рівнянь до другого ступеня, і потім просумуємо їх, дістаємо рівняння траєкторії у вигляді

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Отже, траєкторією точки є коло радіуса r з центром O на початку координат. У початковий момент часу $(t = 0)$ точка перебувала в положенні M_0 (рис.1.6). Далі точка рухатиметься по колу проти руху стрілки годинника.

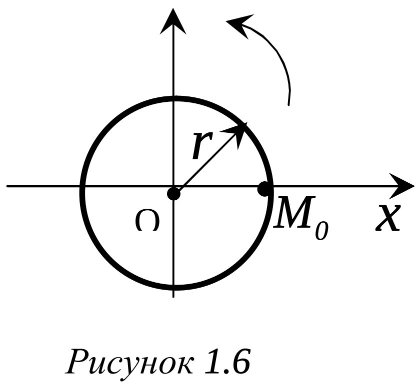


Рисунок 1.6

Якщо необхідно знайти положення точки в заданий момент часу, то в параметричні рівняння (12) необхідно підставити заданий параметр часу t і визначити координати точки x та y.

Приклад 2

Знайти рівняння руху точки M обода колеса радіуса R, що котиться зі швидкістю V_0 (швидкість центра C колеса) без ковзання по прямій рейці (рис.1.7).

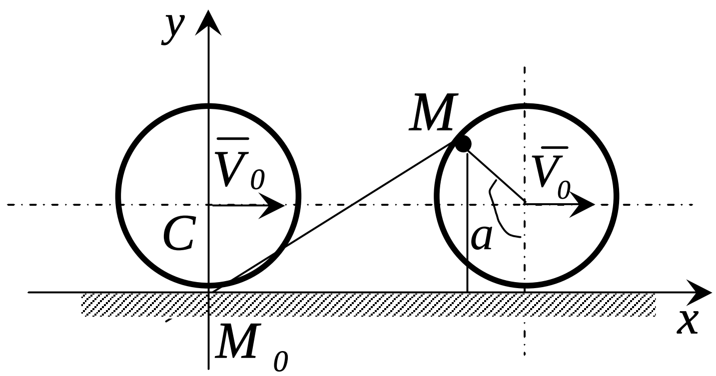


Рисунок 1.7

Рішення

Початок координат розмістимо в одному з нижніх положень точки M на рейці. З рисунка (1.7) видно, що координати точки M

$$\left.\begin{aligned} x &= Ra - R\cos\left(a - \frac{p}{2}\right) = R\left(a - \sin a\right), \\ y &= R + R\sin\left(a - \frac{p}{2}\right) = R\left(1 - \cos a\right), \end{aligned}\right] \qquad (13)$$

де a – кут повороту колеса.

При коченні колеса без ковзання зі сталою швидкістю

$$Ra = V_0 t,$$

звідки
$$a = \frac{V_0}{R} t, \qquad (14)$$

де t – час руху.

Підставимо значення (14) у вирази (13). Знайдемо

$$x = R\left(\frac{V_0}{R}t - sin\frac{V_0}{R}t\right),$$

$$y = R\left(1 - cos\frac{V_0}{R}t\right).$$

Це і є рівняння руху точки ободу колеса в координатній формі і водночас рівняння траєкторії точки M у параметричній формі. У геометрії таку криву називають циклоїдою.

Приклад 3

Кривошип OA обертається навколо точки O так, що кут $BOA = wt$ (рис.1.8). Визначити закон руху точки M шатуна AB, якщо довжина кривошипа $OA = r$, шатуна $AB = 2l$, $AM = MB$.

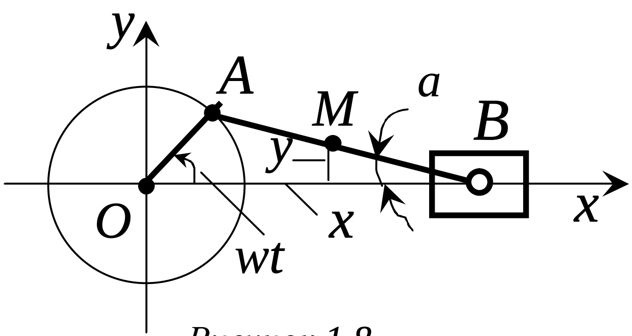


Рисунок 1.8

Рішення

Виберемо систему координат так, як показано на рис.1.8. Кут ABO позначимо a. З трикутника AOB знаходимо

$$\frac{2l}{sinwt} = \frac{OA}{sina}, sina = \frac{OA}{2l}sinwt, cosa = \sqrt{1 - \frac{OA^2}{4l^2}sin^2wt}. \tag{15}$$

Знаходимо координати точки M. З рис.1.8. видно, що будуть справедливими такі рівності:

$$\left.\begin{aligned} x &= rcoswt + lcosa, \\ y &= lsina. \end{aligned}\right] \qquad (16)$$

З урахуванням співвідношень (15) рівняння руху точки M (16) запишемо так:

$$x = rcoswt + l\sqrt{1 - \frac{r^2}{4l^2} sin^2 wt},$$

$$y = lsinwt.$$

Повзун B виконуватиме коливальний рух. Рівняння його руху має вигляд

$$x = rcoswt + 2lcosa.$$

Звідки знаходимо, що $x_{max} = r + 2l$.

Контрольні завдання для самостійної роботи

1 Задані рівняння руху точки $x = 1 + 2sin0,1t$, $y = 3t$. Визначите координату x точки в момент часу, коли її координата $y = 12\ м$.

Відповідь: $1,78 м$.

2 Задано рівняння руху точки $\bar{r} = 3t\bar{i} + 4t\bar{j}$. Визначити координату y точки в момент часу, коли $r = 5\ м$.

Відповідь: $4 м$.

3 Задані рівняння руху точки $x = 3t$, $y = t^2$. Визначити відстань точки від початку координат в момент часу $t = 2\ c$.

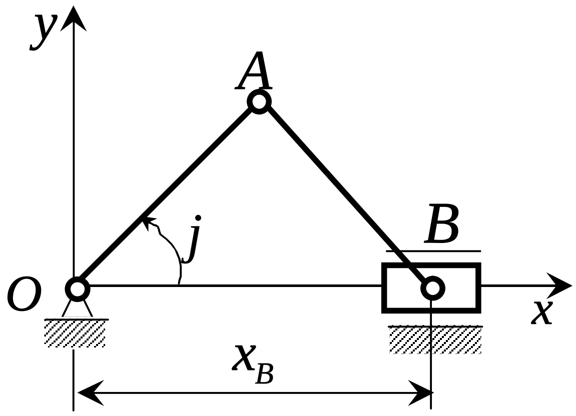
Відповідь: $7,21 м$.

4 Закони рівнянь руху точки $x = cost$, $y = 2sint$. Визначити відстань від точки до початку координат в момент часу $t = 2,5\ c$.

Відповідь: $1,44м$.

5 Положення кривошипа визначається кутом (рад.) $j = 0,2t$. Знайти координату x_B повзуна в момент часу $t = 3\ c$, якщо довжина ланок $OA = AB = 0,5м$.

Відповідь: $0,825м$.



6 Задані рівняння руху точки $x = 2t$, $y = t$. Визначити час t, коли відстань від точки до початку координат досягне $10м$.

Відповідь: $4,47\ c$.

7 Задані рівняння руху точки $x = 2t$, $y = 1 - 2sin0,1t$. Визначити найближчий момент часу, коли точка перетне вісь Ox.

Відповідь: $5,24\ c$.

8 Задані рівняння руху точки $x = sint$, $y = cost$. Визначити найближчий момент часу, коли радіус-вектор точки, проведений із початку координат, утворює кут 45^o з віссю Ox.

Відповідь: $0,785\ c$.

9 Для точки задані рівняння руху $x = 2cost$, $y = 3sint$. Визначити кут між віссю Ox і радіусом-вектором $\overline{OA}$ точки в момент часу $t = 1,5\ c$.

Відповідь: $1,52$.

10 Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити її, визначити на траєкторії початкове положення точки і напрям її руху, якщо точка рухається відповідно до рівнянь $x = 2t$, $y = 3t$.

Відповідь: $3x - 2y = 0$, $M_0(0;0)$.

1.4 Швидкість точки в прямокутній системі координат

Якщо рух точки задано координатним способом

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$,

то швидкість точки визначається за її проекціями на вісі координат.

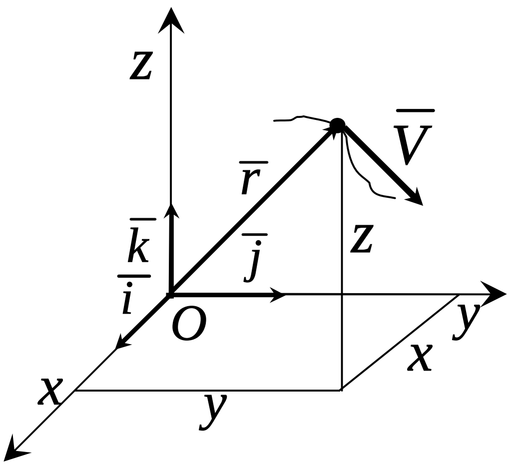


Рисунок 1.9

Дійсно, розклавши вектор швидкості і радіус-вектор за ортами координатних осей (рис.1.9), одержимо

$$\left.\begin{aligned} \bar{r} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \\ \bar{V} &= V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}, \end{aligned}\right] \quad (17)$$

де x, y, z - координати рухомої точки;

V_x, V_y, V_z - проекції швидкостей на осі координат.

За визначенням швидкості відповідно до формули

$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t} = \frac{d\overline{r}}{dt} \qquad (18)$$

маємо:

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \dot{\overline{r}} = \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k}. \qquad (19)$$

Підставивши до формули (19) значення $\overline{V}$ із формули (17), одержимо

$$V_x\overline{i} + V_y\overline{j} + V_z\overline{k} = \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k}, \qquad (20)$$

звідки

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (21)$$

Отже, проекції швидкості на вісі координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних координат точки.

Модуль швидкості

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}, \qquad (22)$$

Або

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad (23)$$

Напрямок швидкості знаходиться за напрямними косинусами

$$\cos\left(\overline{V},\overline{i}\right) = \frac{V_x}{V}, \cos\left(\overline{V},\overline{j}\right) = \frac{V_y}{V}, \cos\left(\overline{V},\overline{k}\right) = \frac{V_z}{V}. \qquad (24)$$

Наведемо приклади визначення швидкості точки в прямокутній системі координат.

Приклад 1

Задані рівняння руху точки в координатній формі

$$x = 8t - 4t^2, \quad y = 6t - 3t^2.$$

Визначити рівняння траєкторії точки і її швидкість.

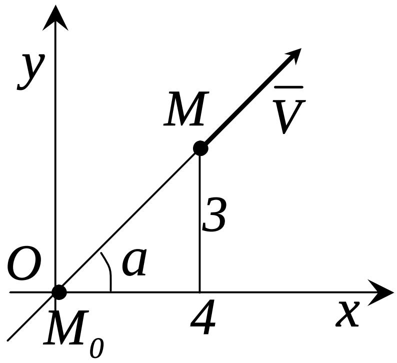


Рисунок 1.10

Рішення

Для визначення рівняння траєкторії точки потрібно з рівняння руху вилучити час t. Помноживши обидві частини першого рівняння на 3, а другого – на 4 і додавши їх почленно, отримаємо

$$3x - 4y = 0 \quad \text{або} \quad y = \frac{3}{4}x.$$

Отже, траєкторією точки є пряма лінія, яка проходить через початок координат під кутом a до осі Ox, де $tga = \frac{3}{4}$ (рис.1.10).

При $t = 0$, $x = y = 0$.

У початковий момент часу точка M знаходилася в початку координат (на рис.1.10 - M_0).

Оскільки траєкторія – пряма лінія, то швидкість буде спрямована вздовж траєкторії. Швидкість точки

$$V_x = \dot{x} = 8(1-t), V_y = \dot{y} = 6(1-t),$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 10(1-t).$$

Проекції швидкості точки при $0 < t < 1$ додатні. Отже, протягом цього проміжку часу від M_0 до M , а потім навпаки.

Приклад 2

Знайти швидкість точки M шатуна AB кривошипно-шатунного механізму (рис.1.11). Кривошип обертається навколо точки O так, що кут повороту $BOA = wt$. Довжина кривошипа $OA = r$, шатуна $AB = l$, відстань $AM = d$.

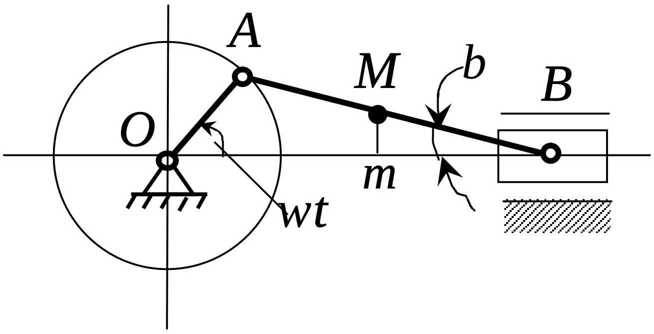


Рисунок 1.11

Рішення

Знаходимо координати точки M :

$$\left.\begin{aligned} x &= OM = rcoswt + dcosb, \\ y &= Mm = \left(l - d\right) sinb, \end{aligned}\right] \qquad (25)$$

де $\quad sinb = \dfrac{r}{l} sinwt,\ cosb = \sqrt{1 - \dfrac{r^2}{l^2} sin^2 wt}$.

Тепер рівняння руху (25) наберуть вигляду

$$\left.\begin{array}{l} x = rcoswt + d\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{l^2} sin^2 wt}, \\ y = \dfrac{r}{l}\left(l - d\right) sinwt. \end{array}\right] \qquad (26)$$

Визначимо похідні формул (26)

$$V_x = \dot{x} = -rwsinwt - \frac{dr^2}{2l^2\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{l^2}\sin^2 wt}} wsin2wt,$$

$$V_y = \dot{y} = \frac{r}{l}\left(l - d\right) wcoswt,$$

Або

$$V_x = -rw\left(sinwt + \frac{dr}{2l^2\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{l^2}\sin^2 wt}} sin2wt \right),$$

$$V_y = \frac{r}{l}\left(l - d\right) wcoswt.$$

Приклад 3

Знайти вектор швидкості точки, яка рухається по циклоїді (рис. 1.12), за законом $x = R\left(wt - sinwt\right)$, $y = R\left(1 - coswt\right)$.

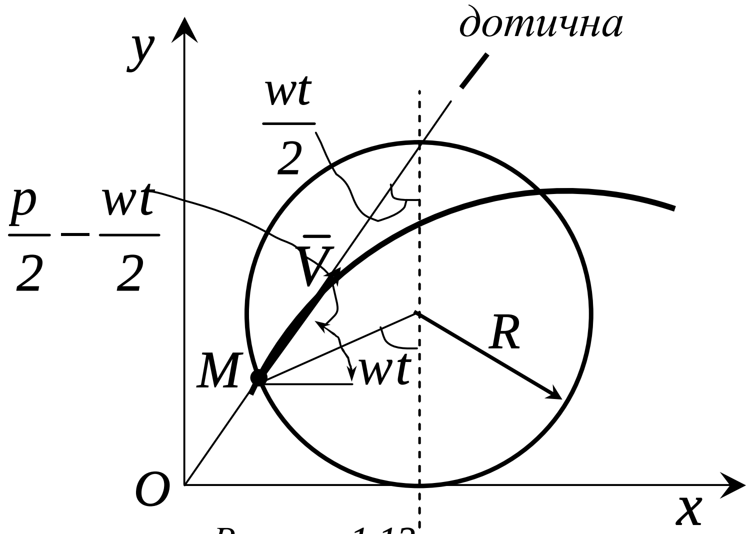


Рисунок 1.12

Рішення

Проекції вектора швидкості точки M на осі координат

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \dot{x} = Rw\left(1 - coswt\right), \\ V_y &= \dot{y} = Rwsinwt. \end{aligned}\right] \qquad (27)$$

Кут між напрямом швидкості і віссю Ox визначаємо через тангенс:

$$tg(\bar{V}, Ox) = \frac{V_y}{V_x} = \frac{sinwt}{\left(1 - coswt\right)} = ctg\,\frac{wt}{2} = tg\left(\frac{p}{2} - \frac{wt}{2}\right),$$

звідси кут $$(\bar{V}, Ox) = \frac{p}{2} - \frac{wt}{2}.$$

Вектор швидкості $\bar{V}$ спрямований до верхньої точки M твірного кола (див.рис. 1.12).

Абсолютна величина швидкості

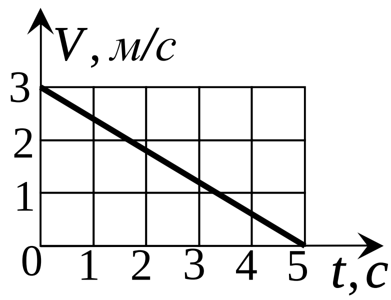
$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2} = 2Rw\left(sin\frac{wt}{2}\right).$$

Отже, V збільшується від 0 і досягає значення $2Rw$ у найвищій точці циклоїди (для цієї точки кут повороту твірного кола $wt = p$), а потім зменшується і дорівнює нулю в момент часу $t = \dfrac{2p}{w}$ в точці циклоїди на осі Ox. У наступному проміжку часу від $t = \dfrac{2p}{w}$ до $t = \dfrac{4p}{w}$ зміна швидкості повторюється.

Хоча твірне коло й котиться рівномірно, але точка обода рухається за циклоїдом нерівномірно.

Контрольні завдання для самостійної роботи

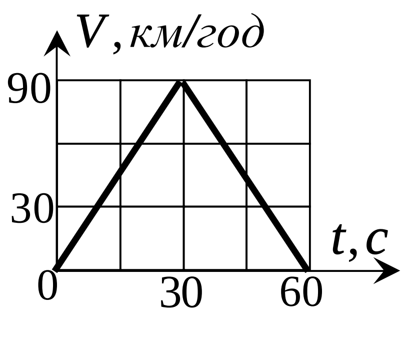
1



Заданий графік швидкості руху точки $V = f(t)$. Визначити пройдений точкою шлях в момент часу $t = 5\ c$.

Відповідь: $7{,}5м$.

2



Заданий графік швидкості точки $V = f(t)$. Визначити пройдений точкою шлях в момент часу $t = 60\ c$.

Відповідь: $750м$.

3 Задані рівняння руху точки $\overline{r} = t^2\overline{i} + 2t\overline{j} + 3\overline{k}$. Визначити модуль швидкості точки в момент часу $t = 2\ c$.

Відповідь: $4{,}47\ м/с$.

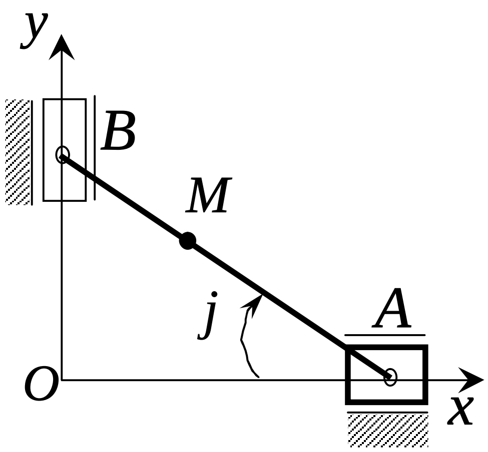
4 Задані рівняння руху точки $x = t^2$, $y = sinp\,t$, $z = cosp\,t$. Визначити модуль швидкості точки в момент часу $t = 1\,c$.

Відповідь: $3{,}72$ *м/с* .

5 Швидкість точки $\overline{V} = 2t\overline{i} + 3\overline{j}$. Визначити кут в градусах між вектором швидкості і віссю Ox в момент часу $t = 4\,c$.

Відповідь: $20{,}6^o$.

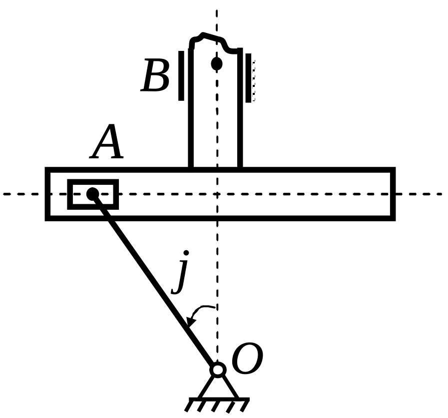
6



Стан лінійки AB визначається кутом $j = 0{,}5t$. Визначити в *см/с* проекцію швидкості точки M на ось Ox в момент часу $t = 2\,c$, якщо відстань $BM = 0{,}2$*м* .

Відповідь: $-8{,}41$*см/с* .

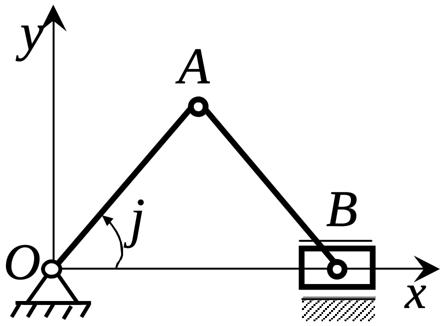
7



Визначити швидкість точки B в момент часу $t = 6\,c$, якщо відстань $OA = 1$*м* , а кут $j = 6t$.

Відповідь: $0{,}595$ *м/с* .

8



Стан кривошипа визначається кутом $j = 0{,}5t$. Визначити швидкість повзуна B в момент часу $t = 4\ c$, якщо $OA = AB = 1{,}5\text{м}$.

Відповідь: $-1{,}36\text{м/с}$.

9 Проекція швидкості точки $V_x = 2\cos p\,t$. Визначити координату x точки в момент часу $t = 1\ c$, якщо при $t_0 = 0$ координата $x_0 = 0$.

Відповідь: 0.

10 Задано рівняння руху точки $x = \sin p\,t$. Визначити швидкість в найближчій після початку руху момент часу t, коли координата $x = 0{,}5\ \text{м}$.

Відповідь: $2{,}72\ c$.

1.5 Стале і змінне прискорення в прямокутній системі координат

Якщо рух точки задано координатним способом, тобто рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

то, розклавши вектори $\bar{r}$, $\bar{V}$ та $\bar{a}$ за ортами координатних осей, маємо

$$\left.\begin{aligned} \bar{r} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \\ \bar{V} &= V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}, \\ \bar{a} &= a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \end{aligned}\right] \tag{28}$$

де a_x, a_y, a_z -- проекції прискорення на осі координат.

На підставі

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} &a = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = \frac{dV_x}{dt}\bar{i} + \frac{dV_y}{dt}\bar{j} + \frac{dV_z}{dt}\bar{k} = \\ &\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}, \end{aligned}\right] \tag{30}$$

Звідки

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \end{aligned}\right] \tag{31}$$

Отже, проекції прискорення на нерухомі осі координат дорівнюють першим похідним відповідних проекцій швидкості за часом на ті самі осі або другим похідним відповідних координат рухомої точки за часом.

Модуль прискорення та його напрямні косинуси запишемо у вигляді

$$
\left.
\begin{aligned}
a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2};
\end{aligned}
\right] \qquad (32)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
cos\left(\bar{a}, \bar{i}\right) &= \frac{a_x}{a}, \\
cos\left(\bar{a}, \bar{i}\right) &= \frac{a_y}{a}, \\
cos\left(\bar{a}, \bar{i}\right) &= \frac{a_z}{a}.
\end{aligned}
\right] \qquad (33)
$$

Із рівняння (29) можна зробити висновок, що коли третя похідна від функції $\bar{r}$ дорівнює нулю, то прискорення точки буде сталим. У протилежному випадку прискорення точки буде змінним.

Наведемо приклади визначення кінематичних характеристик точки в прямокутній системі координат.

Приклад 1

Круглий ексцентрик діаметром $2r$ обертається навколо осі O, віддаленою від геометричної осі ексцентрика на відстань, яка дорівнює $OC = a = r/3$; кут j змінюється за законом $j = \frac{p}{2}t$. Одиниці виміру j - рад, r - см, t - с. Знайти рівняння прямолінійного руху точки M стрижня MN, який рухається в вертикальних напрямляючих, як показано на рис. 1.13, а також швидкість і прискорення цієї точки в момент часу $t_1 = 3c$.

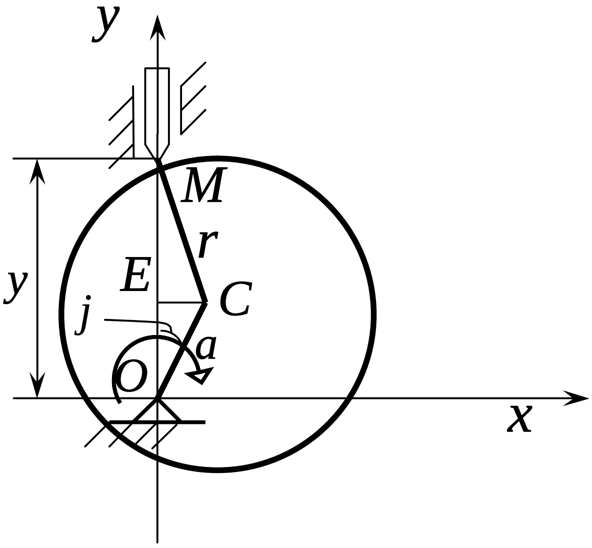


Рисунок 1.13

Рішення

Стрижень MN рухається в вертикальних напрямних, а тому точка M стрижня рухається прямолінійно за нерухомою прямою, яка проходить через точку O і спрямована вздовж стрижня MN. .Виберемо цю пряму за вісь Oy, а початок відліку в точці O і знайдемо відстань $OM = y$ як функцію часу t; для цього виразимо відрізок через кут j . Проведемо із точки C висоту CE в трикутнику MOC, маємо:

$$OM = OE + EM.$$

Але $$OE = acosj\ ,\ EC = asinj\ ,$$

$$EM = \sqrt{MC^2 - EC^2} = \sqrt{r^2 - a^2 sin^2 j}\ ,$$

а тому

$$y = OM = acosj + \sqrt{r^2 - a^2 sin^2 j}$$

Підставивши ці значення кута j і $r = 3a$ в останнє рівняння, отримуємо закон руху точки M :

$$y = a\left(cos\frac{p}{2}t + \sqrt{9 - sin^2\frac{p}{2}t} \right).$$

Швидкість і прискорення точки M знайдемо за формулами (21) і (31) відповідно.

$$V = \frac{d}{dt}\left(cos\frac{p}{2}t + \sqrt{9 - sin^2\frac{p}{2}t} \right) = -\frac{p}{2}asin\frac{p}{2}t\left(1 + \frac{cos\frac{p}{2}t}{\sqrt{9 - sin^2\frac{p}{2}t}} \right) =$$

$$= -\frac{p\,asin\frac{p}{2}t}{2\sqrt{9 - sin^2\frac{p}{2}t}}\left(cos\frac{p}{2}t + \sqrt{9 - sin^2\frac{p}{2}t} \right),$$

Або

$$V = -\frac{p}{2}\cdot\frac{sin\frac{p}{2}t}{\sqrt{9 - sin^2\frac{p}{2}t}}\,y.$$

Крім того,

$$a=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dV}{dt}=-\frac{p}{2}\left(y\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\frac{p}{2}t}{\sqrt{9-\sin^2\frac{p}{2}t}}\right)+\frac{\sin\frac{p}{2}t}{\sqrt{9-\sin^2\frac{p}{2}t}}\frac{dy}{dt}\right).$$

Оскільки

$$\frac{dy}{dt}=V \quad \text{і} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\frac{p}{2}t}{\sqrt{9-\sin^2\frac{p}{2}t}}\right)=\frac{9p\cos\frac{p}{2}t}{2\left(9-\sin^2\frac{p}{2}t\right)^{\frac{3}{2}}},$$

то

$$a=\frac{p}{2}\left(y\frac{9\cos\frac{p}{2}t}{2\left(9-\sin^2\frac{p}{2}t\right)^{\frac{3}{2}}}+V\frac{\sin\frac{p}{2}t}{\sqrt{9-\sin^2\frac{p}{2}t}}\right).$$

Таким чином,

$$a=-\frac{p^2}{4}y\frac{\left(9-\cos\frac{p}{2}t-\sin^2\frac{p}{2}t\sqrt{9-\sin^2\frac{p}{2}t}\right)}{\left(9-\sin^2\frac{p}{2}t\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

У момент $t_1=3c$

$$V_1=\frac{p}{2}a\ ^{см}/_{c},$$

$$a_1=\frac{p^2}{8\sqrt{2}}a\ см/c^2\ .$$

Оскільки $V_1 > 0$ і, $a_1 > 0$, то швидкість і прискорення точки M спрямовані від точки O, тобто за вертикаллю вгору, і точка M рухається прискорено.

Приклад 2

За заданими рівняннями руху точки в декартових координатах знайти траєкторію, швидкість і прискорення цієї точки:

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right) = ach\left(kt\right),$$

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{kt} - e^{-kt}\right) = bsh\left(kt\right).$$

Координати x, y задані в метрах, а t в с.

Рішення

Щоб знайти траєкторію точки, вилучимо із рівнянь руху час t; із першого рівняння маємо:

$$\frac{2x}{a} = e^{kt} + e^{-kt},$$

А із другого

$$\frac{2y}{b} = e^{kt} - e^{-kt}.$$

Піднесемо ці рівняння до другого ступеня і віднімемо друге із першого, отримаємо:

$$\frac{4x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{b^2} = \left(e^{kt} + e^{-kt}\right)^2 - \left(e^{kt} - e^{-kt}\right)^2 = 4,$$

Або $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Таким чином, траєкторією є гіперболою з напівосями a і b. У початковий момент $t_0 = 0$, отже знаходимо: $x_0 = a$, $y_0 = 0$, тобто в початковий момент точка знаходиться в вершині гіперболи $A_0(a,0)$. При подальшому зростанні t координати x і y точки зростають, залишаючись позитивними.

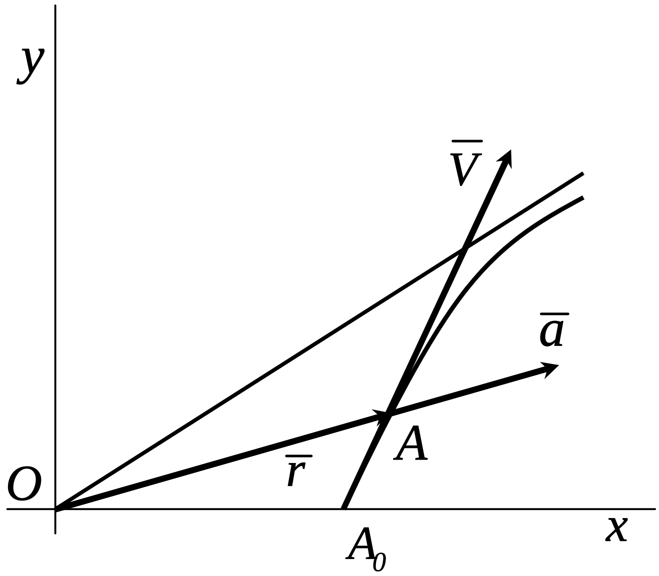


Рисунок 1.14

Отже, точка рухається правою гілкою гіперболи у напрямку, указаному на рис. 1.14. Використавши формулами (21) і (31) відповідно, знайдемо проекції швидкості і прискорення точки на координатні вісі.

$$V_x = \frac{ak}{2}\left(e^{kt} - e^{-kt}\right) = \frac{a}{b}ky,$$

$$V_y = \frac{bk}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right) = \frac{b}{a}kx,$$

$$a_x = \frac{ak^2}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right) = k^2 x,$$

$$a_y = \frac{bk^2}{2}\left(e^{kt} - e^{-kt}\right) = k^2 y.$$

Далі за формулами (22) і (32) знаходимо:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{k}{ab}\sqrt{a^4x^2 + b^4y^2},$$

$$cos\left(\overline{V}, \overline{i}\right) = \frac{V_x}{V} = \frac{a^2y}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}},$$

$$cos\left(\overline{V}, \overline{j}\right) = \frac{V_y}{V} = \frac{b^2x}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}},$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = k^2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Але $x^2 + y^2 = r^2$, а тому

$$a = k^2r$$

Крім того,

$$\overline{a} = k^2x\overline{i} + k^2y\overline{j} = k^2\left(x\overline{i} + y\overline{j}\right).$$

Так як $x\overline{i} + y\overline{j} = \overline{r}$, то

$$\overline{a} = k^2r,$$

Тобто вектор прискорення спрямований за радіус-вектором рухомої точки.

Приклад 3

За заданими рівняннями руху точки в декартових координатах знайти траєкторію, швидкість і прискорення точки.

$$x = Rsinwt,$$

$$y = R\left(1 - cos2wt\right),$$

$$z = Rsinwt.$$

Координати x, y і z задані в метрах, а t -- в сек.

Рішення

Щоб знайти рівняння траєкторії, достатньо із рівнянь руху вилучити час t. З першого і третього рівнянь маємо:

$z = x$.

Це є рівняння площини, яка проходить через вісь y і бісектрису координатного кута zOx. Далі, знаходимо з першого рівняння $sinwt$ і підставивши це значення в друге рівняння, маємо:

$$sinwt = \frac{x}{R}, \qquad \text{і} \qquad y = \frac{2}{R}x^2 .$$

Отже задані рівняння є рівняннями параболічного циліндра з твірними, паралельними вісі z, притому перетином циліндра площиною yOx є парабола

$$y = \frac{2}{R}x^2.$$

Таким чином, траєкторію точки буде лінія перетину поверхонь:

$$z = x$$

$$y = \frac{2}{R}x^2 .$$

У початковий момент $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, тобто точка знаходиться в початку координат. Координати x і z змінюються періодично у межах від $-R$ до R, а координата y - у межах від 0 до $2R$, отже точка виконує коливальний рух по дузі параболи. Визначимо проекції швидкості і прискорення на вісі x, y і z :

$$V_x = Rw\cos wt,$$
$$V_y = 2R\sin 2wt,$$
$$V_z = Rw\cos wt,$$
$$a_x = -Rw^2\sin wt,$$
$$a_y = 4Rw^2\cos 2wt,$$
$$a_z = -Rw^2\sin wt.$$

Отже,

$$\overline{V} = Rw\cos wt\overline{i} + 2Rw\sin 2wt\overline{j} + Rw\cos wt\overline{k},$$
$$\overline{a} = -Rw^2\sin wt\overline{i} + 4Rw^2\cos 2wt\,\overline{j} + Rw^2\sin wt\overline{k},$$

Або

$$\overline{V} = Rw\left(\cos wt\overline{i} + 2\sin 2wt\overline{j} + \cos wt\overline{k}\right),,$$
$$\overline{a} = Rw^2\left(-\sin wt\overline{i} + 4\cos 2wt\,\overline{j} + \sin wt\overline{k}\right).$$

Далі знаходимо модулі векторів швидкості і прискорення згідно з формулами (22) і (32):

$$\left|\overline{V}\right| = Rw\sqrt{2\left(\cos^2 wt + 2\sin^2 wt\right)} = \sqrt{2}Rw\cos wt\cdot\sqrt{1 + 8\sin^2 wt},$$

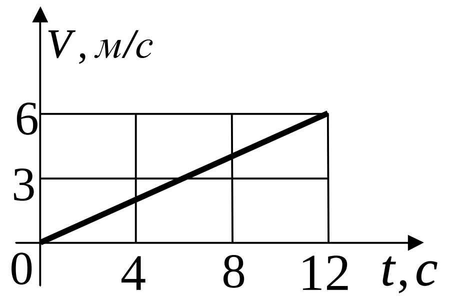
$$\left|\overline{a}\right| = Rw^2\sqrt{2\left(\sin^2 wt + 8\cos^2 wt\right)} = \sqrt{2}Rw^2\cdot\sqrt{\sin^2 wt + 8\cos^2 2wt}.$$

Контрольні завдання для самостійної роботи

1 Швидкість автомобіля рівномірно зростає на протязі $12c$ від нуля до $60\ км/год$. Визначити прискорення автомобіля.

Відповідь: $1,39\ м/с^2$.

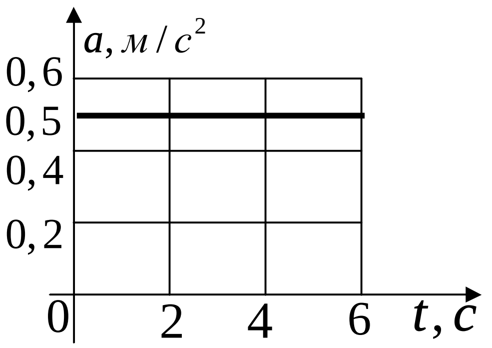
2



Задано графік швидкості $V = f(t)$ прямолінійного руху точки. Визначити прискорення точки в момент часу $t = 12\ c$

Відповідь: $0,5\ м/с^2$.

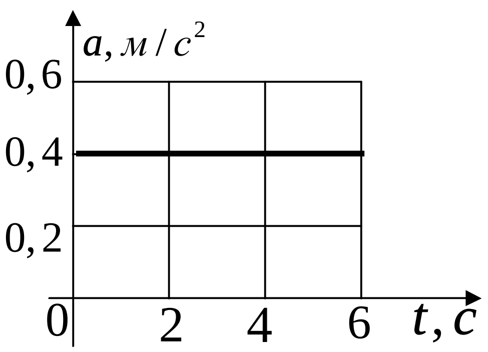
3



Точка рухається за прямою. Задано графік прискорення $a = f(t)$. Визначити швидкість точки в момент часу $t = 6\ c$, якщо при $t_0 = 0$ швидкість $V_0 = 0$.

Відповідь: $3\ м/с$.

4



Точка рухається за прямою. Задано графік прискорення $a = f(t)$. Визначити шлях, пройдений за час від $t_0 = 0$ до $t_1 = 5\ c$, якщо при $t_0 = 0$ швидкість $V_0 = 0$.

Відповідь: $5\ м$.

5 Точка рухається за прямою з прискоренням $a = 0,5\ м/с^2$. Визначити, за який час буде пройдена відстань $9м$, якщо при $t_0 = 0$ швидкість $V_0 = 0$.

Відповідь: $6\ с$.

6 Точка рухається за прямою зі сталим прискоренням $a = 0,3\ м/с^2$. Визначити початкову швидкість, якщо через $6\ с$ швидкість точки стала рівною $3\ м/с$.

Відповідь: $1,2\ м/с$.

7 Скільки секунд повинен робити двигун, який дає ракеті прискорення $3g$, щоб швидкість ракети в прямолінійному русі змінилася з 3 до $5\ км/с$?

Відповідь: $68\ с$.

8 Літак при посадці торкається до посадочної смуги з горизонтальною швидкістю $180\ км/год$. Після пробігу $1000м$ літак зупиняється. Визначити модуль середнього сповільнення літака.

Відповідь: $1,25 м/с^2$.

9 Швидкість автомобіля $90\ км/год$ визначити шлях гальмування до зупинки, якщо середнє сповільнення автомобіля дорівнює $3\ м/с^2$.

Відповідь: $104м$.

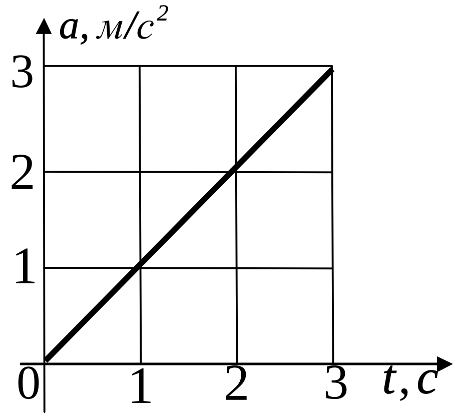
10 Точка починає рух із стану спокою і рухається за прямою зі сталим прискоренням $a = 0,2\ м/с^2$. Визначити шлях, який точка пройде за проміжок часу від $t_1 = 4\ с$ до $t_2 = 10\ с$.

Відповідь: $8,4м$.

11 Прискорення точки $\overline{a} = 0,5t\overline{i} + 0,2t^2\overline{j}$. Визначити модуль швидкості в момент часу $t = 2\,c$.

Відповідь: $1,28$ *м/с* .

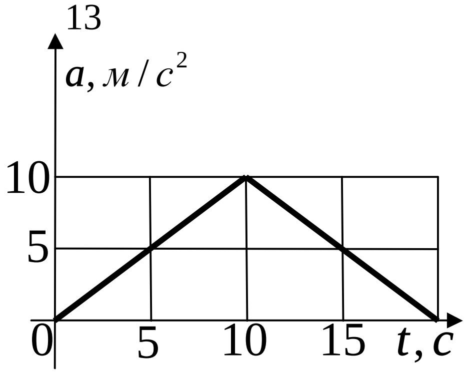
12



Задано графік прискорення $a = f\left(t\right)$ прямолінійно рухомої точки. Визначити швидкість точки в момент часу $t = 2\,c$, якщо при $t_0 = 0$ швидкість $V_0 = 0$.

Відповідь: 2 *м/с* .

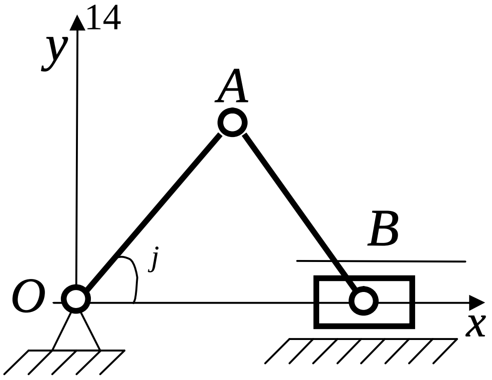
13



Задано графік прискорення $a = f\left(t\right)$ прямолінійно рухомої точки. Визначити швидкість точки в момент часу $t = 20\,c$, якщо при $t_0 = 0$ швидкість $V_0 = 0$.

Відповідь: 100 *м/с* .

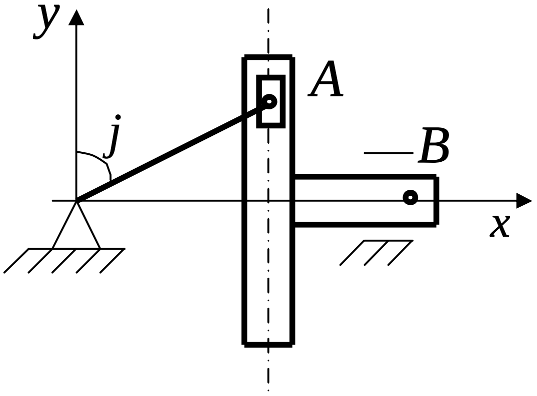
14



Визначити прискорення точки B в момент часу коли кут $j = 60^0$, якщо довжина $OA = AB = 20$*см* , а кута змінюється за законом $j = 3t$.

Відповідь: $-1,8$ *м/с*^{2} .

15



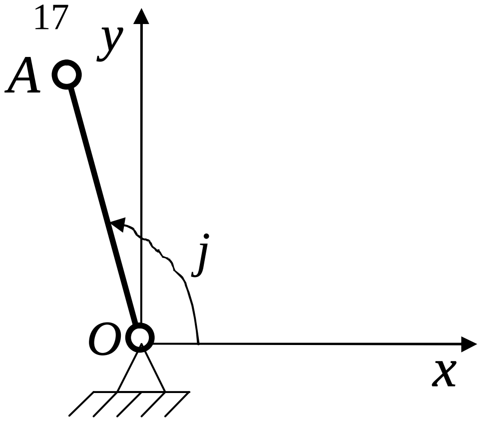
Визначити прискорення точки B в момент часу $t = 5\,с$, якщо довжина кривошипа $OA = 15см$, а закон зміни кута $j = 4t$.

Відповідь: $-2,19\ м/с^2$.

16 Швидкість точки $\overline{V} = 0,9t\overline{i} + t^2\overline{j}$. Визначити модуль прискорення точки в момент часу $t = 1,5\,с$.

Відповідь: $3,13\ м/с^2$.

17



Стан кривошипа OA визначається кутом $j = 2t$. Визначити проекцію прискорення a_x точки A в момент часу $t = 1\,с$, якщо довжина $OA = 1\,м$.

Відповідь: $1,66\ м/с^2$.

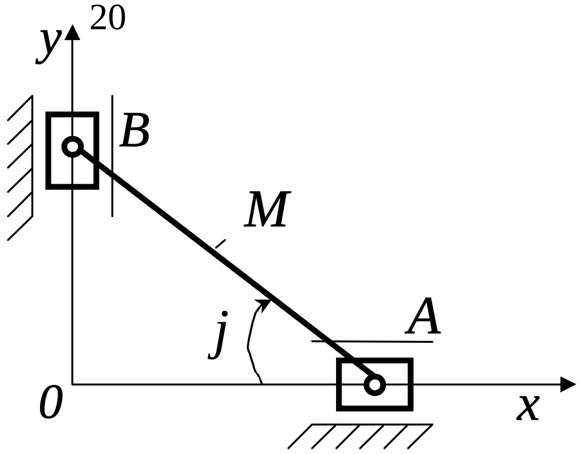
18 Задані проекції швидкості на координатні осі $V_x = 3t$, $V_y = 2t^2$, $V_z = t^3$. Визначити модуль прискорення в момент часу $t = 1\,с$.

Відповідь: $5,83\ м/с^2$.

19 Рух точки задано рівняннями $\dfrac{dx}{dt} = 0,3t^2$, $y = 0,2t^3$. Визначити прискорення в момент часу $t = 7\ с$.

Відповідь: $9,39\ м/с^2$.

20



Стан лінійки AB визначається кутом $j = 0,2t$. Визначити в $см/с^2$ проекцію прискорення точки M на вісь Oy в момент часу $t = 3\ с$, якщо відстань $AM = 50 см$.

Відповідь: $-1,13\ м/с^2$.

21 Задані рівняння руху точки $x = 0,3t^3$, $y = 2t^2$, де x і y - в $см$. Визначити, в який момент часу t прискорення точки дорівнює $7 см/с^2$.

Відповідь: $3,19\ с$.

22 Положення точки на площині визначається її радіусом-вектором $\overline{r} = 0,3t^2\overline{i} + 0,1t^3\overline{j}$. Визначити модуль прискорення точки в момент часу $t = 2\ с$.

Відповідь: $1,34\ м/с^2$.

23 Задані рівняння руху точки $x = cosp\,t$, $y = sinp\,t$. Визначити модуль прискорення в момент часу $t = 1\ с$.

Відповідь: $9,87\ м/с^2$.

24 Задане прискорення точки $\overline{a} = 2t\overline{i} + t^2\overline{j}$. Визначити кут в градусах між вектором $\overline{a}$ і віссю Ox в момент часу $t = 1\ c$.

Відповідь: $26{,}6^o$.

25 Задане рівняння траєкторії точки $x = 0{,}1y^2$. Закон руху точки в напрямку осі Oy виражається рівнянням $y = t^2$. Визначити компоненту прискорення a_x в момент часу $t = 2\ c$.

Відповідь: $4{,}8\ м/с^2$.

26 Задані рівняння руху точки $x = 0{,}01t^3$, $y = 200 - 10t$. Визначити прискорення в момент часу, коли точка перетинає вісь Ox.

Відповідь: $1{,}2\ м/с^2$.

27 Задані рівняння руху точки $x = 8 - t^2$, $y = t^2 - cost$. Визначити проекцію прискорення a_y в момент часу, коли координата $x = 0$.

Відповідь: $1{,}05\ м/с^2$.

28 Прискорення прямолінійного руху точки $a = t$. Визначити швидкість точки в момент часу $t = 3\ c$, якщо при $t_0 = 0$ швидкість $V_0 = 2\ м/с$.

Відповідь: $6{,}5\ м/с$.

29 Точка рухається прямолінійно з прискоренням $a = 0{,}2t$. Визначити момент часу t, коли швидкість точки буде дорівнювати $2\ м/с$, якщо при $t_0 = 0$ швидкість $V_0 = 0$.

Відповідь: $4{,}47\ c$.

30 Точка рухається по прямій Ox з прискоренням $a_x = 0{,}7t$. Визначити координату x, точки в момент часу $t = 5\,c$, якщо при $t_0 = 0$ швидкість $V_0 = 0$ і координата $x_0 = 0$.

Відповідь: $14{,}6$.

1.6 Рівняння руху і швидкість точки при натуральному способі завдання руху

Як уже зазначалося, рух точки є заданим у натуральній формі, якщо відомі її траєкторія та закон руху за траєкторією $s = s(t)$ (рис. 1.5)

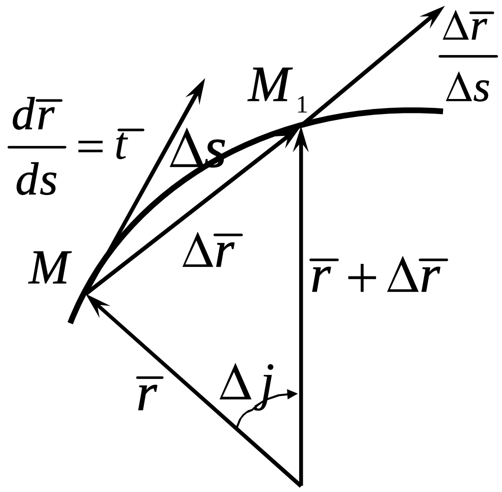


Рисунок 1.15

Кожній точці траєкторії відповідає певний радіус-вектор $\bar{r}$ (рис. 1.15), який можна розглядати як складну функцію часу

$$\bar{r} = \bar{r}(s) = \bar{r}(s(t)).$$

Тому формулу для швидкості подамо у вигляді

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}\left(s\left(t\right)\right)}{dt} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \tag{34}$$

Розглянемо вектор $\dfrac{d\bar{r}}{ds}$.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \left| \dfrac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = 1$, то модуль $\left| \dfrac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1$.

Вектор $\dfrac{d\bar{r}}{ds}$ (рис. .15) напрямлений за січною MM_1, граничне положення якої є дотичною до траєкторій досліджуваної точки.

Отже,

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}. \tag{35}$$

З урахуванням (35) одержимо наступний вираз для швидкості при натуральному способі завдання руху точки:

$$\bar{V} = \frac{ds}{dt}\bar{t} = \dot{s}\bar{t}. \tag{36}$$

Розглянемо приклади розв’язання задач в цьому розділі.

Приклад 1

Точка рухається за траєкторією згідно з рівнянням $s = 15 + 4\sin\pi t$. Знайти найближчий після початку руху момент часу t_1, при якому $s_1 = 17\ м$.

Рішення

Підставимо в рівняння руху точки, яке задано натуральним способом, s_1 і t_1.

$$s_1 = 15 + 4sinpt_1.$$

Розрахуємо це рівняння відносно невідомої t_1.

$$sinpt_1 = \frac{s_1 - 15}{4} = \frac{17 - 15}{4} = 0,5.$$

Звідси $$pt_1 = arcsin0,5.$$

Або $$t_1 = \frac{arcsin0,5}{p} = \frac{0,5224}{3,14} = 0,167.$$

$$t_1 = 0,167.$$

Приклад 2

Точка рухається за траєкторією згідно з рівнянням $s = 0,5t^2 + 4t$. Визначити, в який момент часу швидкість точки досягає 10 *м/с*.

Рішення

Візьмемо першу похідну рівняння траєкторії точки, задане натуральним способом, щоб залучити рівняння закону швидкості.

$$\dot{s} = V = t + 4.$$

Звідси $$t = V - 4 = 10 - 4 = 6$$

$$t = 6c.$$

Контрольні завдання для самостійної роботи

1 Точка рухається за заданою траєкторією зі швидкістю $V = 5\ м/с$. Визначити криволінійну координату s точки в момент часу $t = 18\ с$, якщо при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 26\ м$.

Відповідь: $116 м$.

2 Точка рухається за кривою зі швидкістю $\dot{s} = 0,5t$. Визначити її координату в момент часу $t = 10\ с$, якщо при $t_0 = 0$ координата точки $s_0 = 0$.

Відповідь: $25 м$.

3 Швидкість точки задана рівнянням $V = 0,2t$. Визначити криволінійну координату s точки в момент часу $t = 10\ с$, якщо при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 0$.

Відповідь: $10 м$.

4 Заданий закон руху точки в прямокутній системі координат: $x = 3t^2$, $y = 4t^2$. Визначити момент часу t, коли криволінійна координата точки $s = 100 м$, якщо при $t_0 = 0$ $s_0 = 0$ і точка рухається в позитивному напрямку координати s.

Відповідь: $4,69\ с$.

5 Заданий закон руху точки в прямокутній системі координат $x = 3cost$, $y = 3sint$. Визначити момент часу, коли криволінійна координата точки $s = 7 м$, якщо при $t_0 = 0$ $s_0 = 0$. Точка рухається у позитивному напрямку координати s.

Відповідь: $2{,}23\,с$.

6 Заданий закон руху в прямокутній системі координат: $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 5t$. Визначити криволінійну координату s точки в момент часу $t = 10\,с$, якщо при $t_0 = 0$ початкова координата дорівнює $14м$ і точка рухається в позитивному напрямку координати s.

Відповідь: $75{,}6с$.

1.7 Дотичне і нормальне прискорення точки. Прискорення точки при натуральному способі завдання руху

Відомо (36), що швидкість точки при натуральному способі завдання руху має вигляд

$$\bar{V} = \dot{s}\bar{\tau},$$

отже, прискорення отримаємо як:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\bar{\tau}\right) = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{dt}, \qquad (37)$$

де $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} = \dfrac{\dot{s}}{r}\bar{n}$ як похідна вектора одиничного модуля. Тому формула (37) набуває такого вигляду:

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{V^2}{r}\bar{n}, \qquad (38)$$

де $V = \dot{s}$.

Таким чином ми розділили прискорення точки за осям натурального трикутника.

Частина прискорення

$$\bar{a}_t = \dot{V}\bar{t} = \frac{dV}{dt}\bar{t} \qquad (39)$$

називається **дотичною** складовою прискорення.

Друга частина прискорення

$$\bar{a}_n = \frac{V^2}{r}\bar{n} = \frac{\dot{s}^2}{r}\bar{n} \qquad (40)$$

називається **нормальною** складовою прискорення. Вона спрямована у середину увігнутості траєкторії, тобто до центру її кривизни.

Таким чином, прискорення точки

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n. \qquad (41)$$

Із (38) отримуємо формули для проекцій на натуральні вісі.

$$\bar{a}_t = \dot{V} = \frac{dV}{dt}, a_n = \frac{V^2}{r}, a_b = 0. \qquad (42)$$

Проекція прискорення на позитивний напрямок дотичної, який співпадає з напрямком одиничного вектора $\bar{t}$, називається **дотичним прискоренням**, а на головну нормаль, спрямовану по одиничному вектору $\bar{n}$,- **нормальним прискоренням**. Проекція прискорення на бінормаль, дорівнює нулю.

Враховуючи ортогональність $\bar{a}_t$ і $\bar{a}_n$ відповідно (41) і рис. 1.16 маємо

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}\,,\ tga = \left|a_t\right| / a_n \qquad (43)$$

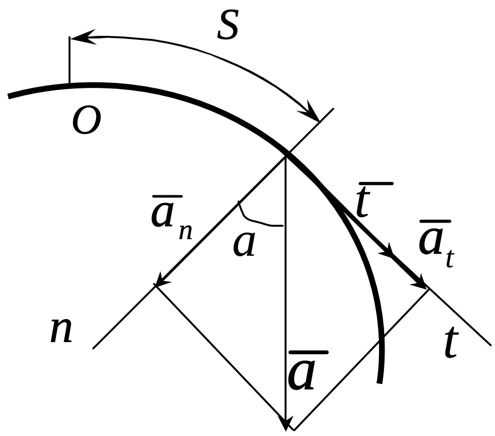


Рисунок 1.16

Якщо рух точки задано в координатній формі, то

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{V}. \qquad (43)$$

Радіус кривизни траєкторії

$$r = \frac{V^2}{a_n}, \qquad (44)$$

де $$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} \qquad (45)$$

Приклад 1

Дротяним колом радіуса r (рис. 17) рухається кільце M, вільно насаджене на стрижень OA, що обертається навколо точки O. Початкове положення стрижня OA_0. Стрижень робить половину оберту навколо точки O за T секунд, причому вважатимемо, що кут повороту пропорційний проміжку часу. Знайти швидкість і прискорення кільця M .

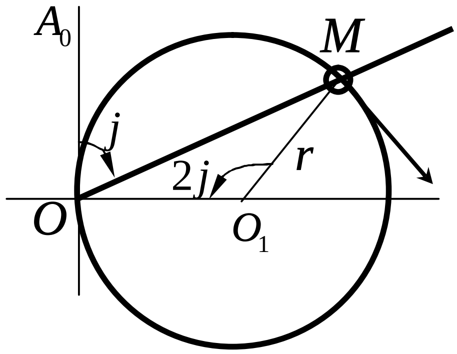


Рисунок 1.17

Рішення

Для розв’язання задачі виберемо натуральний спосіб завдання руху. Кут повороту $A_0OA = j$ стрижня як функція часу визначається так:

$$j = \frac{p}{T} t .$$

Закон руху кільця колом можна записати таким чином:

$$s = 2j\, r = \frac{2p\, r}{T} t .$$

Проекцію швидкості на дотичну знайдемо:

$$V_t = V = \frac{ds}{dt} = \frac{2p\, r}{T} = const .$$

Оскільки $V = const$, то $a_t = 0$. Отже, повне прискорення точки M

$$a = a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{4p^2 r^2}{T^2 r} = \frac{4p^2 r}{T^2} .$$

Приклад 2

Міст має форму параболи $y = -0{,}0005x^2$, причому x і y виражені в метрах. Автомобіль рухається мостом зі сталою швидкістю V=72 *км/год*.

Знайти прискорення автомобіля в найвищій точці траєкторії (рис.1.18).

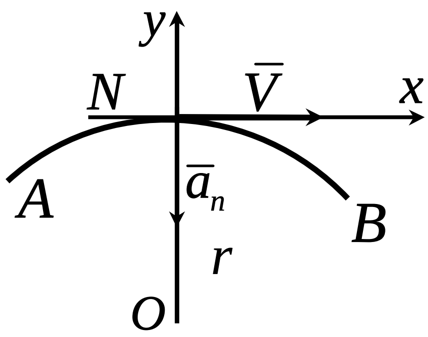


Рисунок 1.18

Рішення

Рух автомобіля, який розглядатимемо як матеріальну точку, відбувається кривою зі сталою швидкістю. Отже, дотичне прискорення дорівнює нулю, а повне прискорення нормальному: $a = a_n$. За умовою задачі $V = 20 м/с$. Треба знайти радіус кривизни траєкторії r. З диференціального числення відомо, що

$$r = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|y''\right|}.$$

З рівняння траєкторії знаходимо:

$$y' = -0{,}001x,\ y'' = -0{,}001.$$

Отже $$r = \frac{\left(1+0{,}000001x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{0{,}001}.$$

Оскільки найвище положення на траєкторії відповідає початку координат $(x=0,\ y=0)$, то в цій точці $r = 1000м$, а прискорення

$$a = \frac{V^2}{r} = \frac{400}{1000} = 0{,}4м/с^2$$

Приклад 3

Точка рухається по дузі кола радіуса $R = 30см$. Закон її руху цією дугою $s = 30sinp\,t$ (t -- в секундах, s -- в сантиметрах (рис. 1.19)). Знайти величину і напрям швидкості і повного прискорення точки в момент часу $t = 5\,c$.

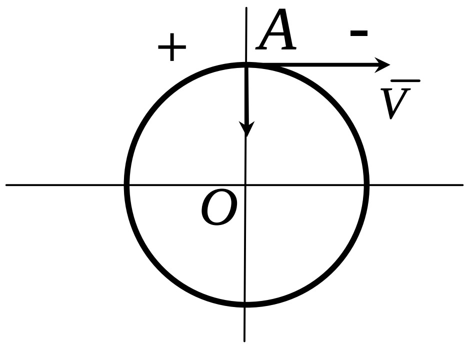


Рисунок 1.19

Рішення

Нехай точка в початковий момент часу розміщувалася на колі в положенні A. Напрям руху точки колом проти руху стрілки годинника вважаємо за додатною.

Швидкість для будь-якого моменту часу, $см/с$:

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(30sinp\,t\right) = 30p\,cosp\,t.$$

У момент часу $t = 5\,c$

$V = 30p\,\cos 5p = -30p\,см/с$

Знак «−» показує, що швидкість точки в цей момент часу спрямована проти додатного напряму руху.

Для визначення повного прискорення треба знайти дотичне й нормальне прискорення. Дотичне прискорення для будь-якого моменту часу:

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(30p\,cosp\,t\right) = -30p^2 sinp\,t.$$

У момент часу $t = 5\,c$:

$$a_t = -30p^2 sin5p = 0..$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{\left(30p\,cosp\,t\right)^2}{30} = 30p^2 cos^2 p\,t\ .$$

У момент часу $t = 5\,c$ нормальне прискорення:

$$a_n = 30p^2 cos^2 5p = 30p^2\ .$$

Нормальне прискорення напрямлене вздовж радіуса до центра кола.

Повне прискорення для будь-якого моменту часу:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}\ .$$

У момент часу $t = 5\,c$ дотичне прискорення дорівнює нулю і, отже, повне прискорення за величиною і напрямом дорівнює нормальному

$$a = a_n = 30p\,см/c^2.$$

Контрольні завдання для самостійної роботи

1 Точка рухається колом відповідно рівнянню $s = t^3 + 2t^2 + 3t$. Визначити криволінійну координату точки у момент часу, коли її дотичне прискорення $a_t = 16$ м/с^2.

Відповідь: 22.

2 Точка рухається з сталим дотичним прискоренням $a_t = 0,5 м/с^2$ Визначити криволінійну координату точки в момент часу $t = 4 с$ при $t_0 = 0$ швидкість точки $V_0 = 0$ координата $s_0 = 0$

Відповідь: 4 .

3 Дотичне прискорення точки $a_t = 0,2t$. Визначити момент часу t, коли швидкість V точки досягне $10 м/с$ якщо при $t_0 = 0$ швидкість $V_0 = 2 м/с.$

Відповідь: $8,94 с$

4 Проекція швидкості точки в час руху визначається виразами $V_x = 0,2t^2$, $V_y = 3 м/с.$ Визначити дотичне прискорення в момент часу $t = 2,5 с$

Відповідь: $0,385 м/с^2$.

5 Швидкість точки в декартових координатах задана виразом $\overline{V} = 1,5\overline{i} + 1,5t\overline{j} + 0,5t^2\overline{k}$. Визначити дотичне прискорення точки в момент часу $t = 2 с$.

Відповідь: $2,18 м/с^2$.

6 Прискорення точки в декартових координатах задано виразом $\overline{a} = 0,1t\overline{i} + 0,9\overline{j}$. Визначити дотичне прискорення точки в момент часу $t = 10\,c$ якщо при $t_0 = 0$ швидкість точки $V_0 = 0$

Відповідь: $1,27\,м/c^2$.

7 Проекції прискорення точки в час руху визначаються виразами $a_x = 0,8t\,м/c^2$, $a_y = 0,8\,м/c^2$. Знайти дотичне прискорення в момент часу $t = 2\,c$ якщо при $t_0 = 0$ швидкість точки $V_0 = 0$

Відповідь: $1,7\,м/c^2$.

8 Точка рухається з сталою швидкістю $V = 30\,см/с.$ по дузі кола радіуса $r = 2\,м$ Визначити нормальне прискорення точки в $см/c^2$.

Відповідь: $4,5\,см/c^2$.

9 Колом рухається точка відповідно рівнянню $s = 5t - 4t^2$. Визначити час t коли нормальне прискорення $a_n = 0$

Відповідь: $6,25\,c$.

10 Визначити радіус закруглення траси бобслею, якщо швидкості спуску $120\,км/год$, нормальне прискорення санок $a_n = 2g$.

Відповідь: $56,6\,м$.

11 Автомобіль рухається горизонтальною дорогою зі сталою швидкістю $V = 90\,км/год.$ Визначити радіус закруглення дороги в момент часу, коли нормальне прискорення центра автомобіля $a_n = 2,5\,м/c^2$.

Відповідь: $250м$.

12 Задано рівняння руху точки по траєкторії $s = 5t$. Визначити радіус кривизни траєкторії, коли нормальне прискорення точки $a_n = 3 м/с^2$.

Відповідь: $8{,}33 м$.

13 Електровоз рухається дугою кола радіуса $R = 300 м$. Визначити максимальну швидкість електровоза в $км/год$ при якій нормальне прискорення не перевищує $1 м/с^2$.

Відповідь: $62{,}4 км/год$.

14 Центрифуга для тренування пілотів влаштована так, що центр кабіни з людиною знаходиться на відстані $r = 5 м$ від осі обертання. Визначити швидкість центра кабіни у випадку, коли її нормальне прискорення $a_n = 5g$

Відповідь: $15{,}7 м/с$.

15 Літак летить круговою траєкторією, радіуса $10 км$. Визначити швидкість літака (*км/год*) якщо нормальне прискорення $a_n = 6{,}25 м/с^2$

Відповідь: $900 км/год$..

16. Задано рівняння руху точки за траєкторією $s = 0{,}1t^2 + 0{,}2t$. Визначити її нормальне прискорення в момент часу $t = 6\ с$. У стані, який точка займає в цей момент, радіус кривизни траєкторії $r = 0{,}6 м$

Відповідь: $3{,}27 м/с^2$.

17 Точка рухається колом, радіуса $r = 30 см$ з швидкістю $V = \ln t$. Визначити нормальне прискорення точки в момент часу $t = 12\ с$

Відповідь: $20{,}6 м/с^2$.

18 Дано рівняння руху точки по траєкторії $s = 0{,}6t^2$. Визначити нормальне прискорення точки в момент часу, коли її координата $s = 30\,м$ і радіус кривизни траєкторії $r = 15\,м$.

Відповідь: $4{,}8\,м/с^2$.

19 Колом, радіус якого $r = 7\,м$, рухається точка відповідно рівнянню $s = 0{,}3t^2$. Визначити час, коли нормальне прискорення точки $a_n = 1{,}5\,м/с^2$.

Відповідь: $5{,}4\,с$.

20 Точка рухається колом, радіус якого $r = 20\,м$, зі швидкістю $V = e^t$ Визначити момент часу, коли нормальне прискорення точки $a_n = 3\,м/с^2$.

Відповідь: $2{,}05\,с$.

21 Точка рухається колом. Визначити радіус кола, якщо в момент часу, коли швидкість $V = 10\,м/с$, вектор прискорення, рівний за модулем $12\,м/с^2$ і вектор швидкості, утворюють кут 30^o.

Відповідь: $6\,см$

22 Прискорення точки $a_n = 1\,м/с^2$.. Вектори прискорення і швидкості утворюють кут 45^o. Визначити швидкість в $км/год$, якщо радіус кривизни траєкторії $r = 300\,м$.

Відповідь: $52{,}4\,км/год$.

23 Точка рухається колом, радіус якого $r = 200\,м$, з дотичним прискоренням $2\,м/с^2$ Визначити кут в градусах між векторами швидкості

і повного прискорення точки в момент часу, коли її швидкість $V = 10\,м/с$.

Відповідь: $14{,}0^o$.

24 Точка рухається колом, радіус якого $r = 50\,м$, зі швидкістю $V = 2t$. Визначити модуль повного прискорення в момент часу $t = 5\,с$.

Відповідь: $2{,}83\,м/с^2$.

25 Задано рівняння руху точки за криволінійною траєкторією $s = 0{,}2t^2 + 0{,}3t$. Визначити повне прискорення точки в момент часу $t = 3\,с$, якщо в цей момент радіус кривизни траєкторії $r = 1{,}5\,м$

Відповідь: $1{,}55\,м/с^2$.

26 Визначити швидкість точки в момент часу, коли радіус кривизни траєкторії $r = 5\,м$ дотичне прискорення $a_t = 2\,м/с^2$, а $tg\,b = 3$, де b - кут між векторами швидкості і прискорення точки.

Відповідь: $5{,}48\,м/с$.

27 Точка рухається колом радіуса $r = 9\,м$. Визначити швидкість точки в момент часу, коли дотичне прискорення $a_t = 2\,м/с^2$, а вектор повного прискорення $\overline{a}$ утворює кут 70^o з дотичною до траєкторії.

Відповідь: $7{,}03\,м/с$.

28 Точка рухається колом радіуса $r = 200\,м$ із стану спокою із сталим дотичним прискоренням $a_t = 1\,м/с^2$. Визначити повне прискорення точки в момент часу $t = 20\,с$.

Відповідь: $2{,}24\,м/с^2$.

29 Колом радіуса $r = 1 м$ рухається точка відповідно рівнянню $s = 0,1t^3$. Визначити повне прискорення точки в момент часу $t = 2 с$

Відповідь: $1,87 \, м/с^2$.

30 Заданий закон руху точки за траєкторією $s = 0,5t^2$ Визначити кут в градусах між векторами швидкості і повного прискорення точки в момент часу $t_1 = 3 с$, коли радіус кривизни $r = 4 м$.

Відповідь: $66,0^o$.

1.8 Прямолінійні гармонічні коливання точки

Розглянемо прямолінійний рух точки, при якому її відстань x від початку координат 0 змінюється з часом за законом

$$x = A\cos kt, \tag{46}$$

де A та k - сталі величини.

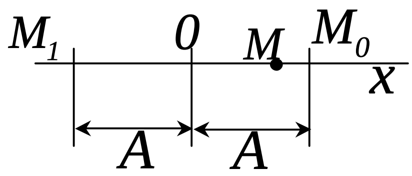


Рисунок 1.20

Точка M (рис.1.20.) виконує при цьому русі коливання між положеннями $M_0\left(+A\right)$ і $M_1\left(-A\right)$. Коливання, які здійснюються за законом (46), відіграють велику роль в техніці. Вони називаються простими **гармонічними коливаннями**. Величина A дорівнює найбільшому відхиленню точки від центра коливань 0, називається **амплітудою** коливань.

Легко бачити, що, починаючи рух в момент $t = 0$ із положення M_0, точка знову прийде в це положення в момент часу t_1 для якого

$$\cos kt_1 = 1,\ \text{тобто}\ kt_1 = 2p.$$

Проміжок часу

$$T = t_1 = 2p/k,$$

при якому точка виконує одне повне коливання, називається **періодом** коливань.

Взявши похідні від x за t знайдемо значення швидкості і прискорення точки:

$$V = V_x = -Ak\sin kt, a = a_x = -Ak^2\cos kt \qquad (47)$$

У цьому русі і швидкість, і прискорення точки змінюються з часом за гармонічним законом. За знаками V і a легко перевірити, що коли точка рухається до центру коливань, її рух - прискорений, а коли від центра коливань - сповільнений.

Аналогічні коливання відбуваються і при законі

$$x = A\sin kt,$$

тільки рух в цьому випадку починається із центра 0.

Гармонічні коливання за законом $s = A\cos kt$ або $s = A\sin kt$ точка може здійснювати, рухаючись вздовж довільної кривої. Усе сказане про характер руху при цьому зберігається з тією лиш різницею, що остання із формул (47) буде визначати дотичне прискорення точки; крім нього точка буде мати ще нормальне прискорення

$$a_n = \frac{V^2}{r}.$$

Розглянемо такі коливання точки на прикладі.

Приклад

При невеличких кутах відхилення вантаж маятника (рис.1.21.) рухається колом радіуса l за законом $s = A\sin kt$

Початок відліку в точці 0, A і K - сталі величини.

Знайти швидкість, дотичне і нормальне прискорення вантажу і ті положення, в яких ці величини звертаються в нуль.

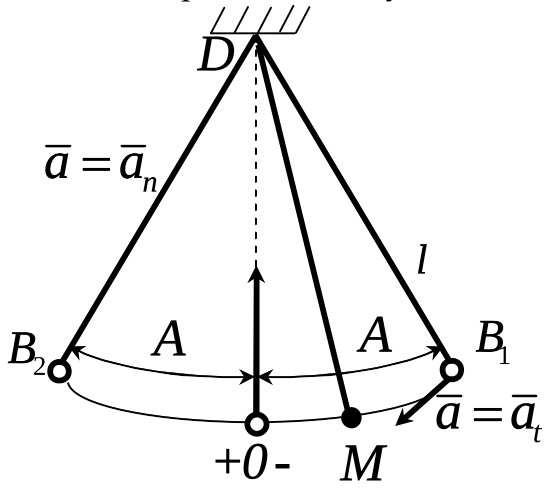


Рисунок 1.21

Рішення

Користуючись відповідними формулами, знаходимо:

$$V = \dot{s} = Ak\cos kt, a_t = \dot{V} = -Ak^2 \sin kt,$$

$$a_n = V^2/l = \left(A^2k^2/l\right)\cos^2 kt.$$

Із закону руху виходить, що вантаж здійснює вздовж траєкторії гармонічні коливання з дуговою амплітудою A.

У крайніх положеннях (в точках B_1 і B_2) $\sin t = \pm 1,$ отже $\cos kt = 0.$ Тому в точках B_1 і B_2 швидкість і нормальне прискорення дорівнюють нулю; дотичне ж прискорення має тут найбільше за модулем значення $a_{t\,\max} = Ak^2$.

Коли вантаж прибуває в початок відліку 0, то $s = 0$, отже, $\sin t = 0,$ а $\cos kt = 1$. У цьому положенні $a_t = 0,$, а V і a_n мають максимальне значення:

$$V_{max} = AK, a_{n\,max} = A^2K^2/l.$$

Із даного приклада видно, що при криволінійному нерівномірному русі в окремих точках траєкторії a_t або a_n можуть обертатися в нулі. При цьому $a_t = 0$ в тих точках, де V має максимум або мінімум, а $a_n = 0$ в тих точках, де $V_0 = 0$ (як в даному випадку) або де $r = \infty$ (точка перегину траєкторії).

1.9 Завдання руху точки в полярних координатах

Коли точка рухається весь час в одній і тій же площині, її положення можна визначити **полярними координатами** r і j (рис.1.22.).

Під час руху точки ці координати змінюються. Отже, закон руху точки в полярних координатах буде задаватися рівняннями:

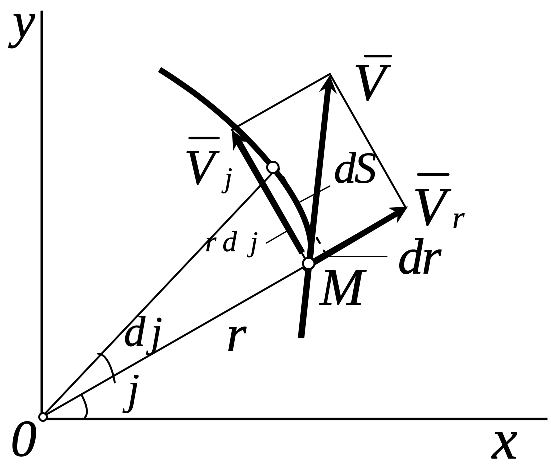


Рисунок 1.22

$$r = f_1(t), \quad j = f_2(t) \tag{48}$$

Швидкість точки чисельно рівна ds/dt, тобто відношенню елементарного переміщення ds до проміжку часу dt.

У даному випадку переміщення ds геометрично складається із радіального переміщення, чисельно рівного dr, і поперечного переміщення, перпендикулярного радіусу OM і чисельно рівного $rd\varphi$. Отже, сама швидкість V буде геометрично складатись із радіальної швидкості V_r і поперечної швидкості V_φ, чисельно рівних:

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \quad V_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}. \tag{49}$$

Так як $\bar{V}_r$ і $\bar{V}_\varphi$ взаємно перпендикулярні, то за модулем

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} \tag{50}$$

Формули (49) і (50) визначають швидкість точки в полярних координатах при плоскому р.

Рівняння (50) можна ще отримати через r і φ. Декартові координати точки (рис.1.22.) у вигляді

$$y = r\sin\varphi \qquad x = r\cos\varphi .$$

Тоді

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi ,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi ,$$

і $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$.

Так само, порахувавши другі похідні $\ddot{x}$ і $\ddot{y}$, можна за формулою

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

знайти вираз для прискорення точки в полярних координатах

$$a = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)^2} , \tag{51}$$

де $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$ (52)

Розглянемо приклад розв’язання задач в полярній системі координат

Приклад

Рух точки задано в полярних координатах рівняннями

$$r = l\left(1 + \cos\omega t\right), \quad \varphi = \omega t,$$

де l і ω - сталі величини. Визначити рівняння траєкторії, швидкість і прискорення точки в полярних координатах для моменту часу t і моменту часу $t = 0$.

Рішення

Вилучимо із рівнянь руху параметр t, отримаємо наступні рівняння траєкторії в полярних координатах:

$$r = l\left(1 + \cos\varphi\right)$$

Це є рівняння координати рис.1.23.

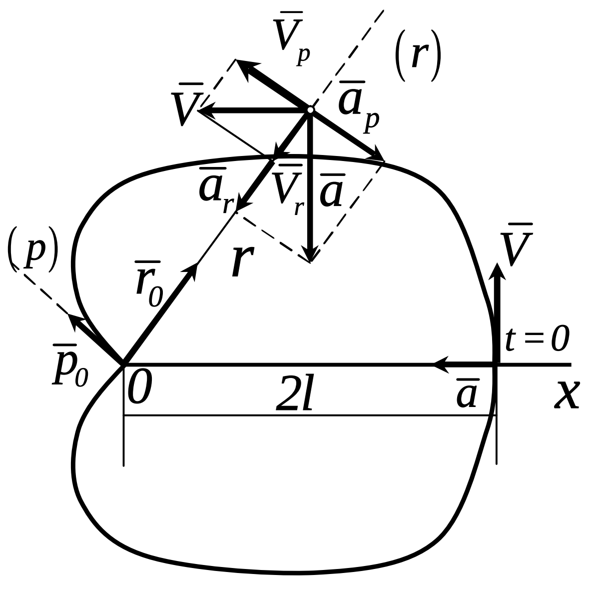


Рисунок 1.23

Проекції швидкості і прискорення на полярні вісі визначаємо за формулами (49) і (52):

$$V_r = \dot{r} = -lw\sin wt,$$

$$V_p = r\dot{\varphi} = lw\left(1+\cos wt\right),$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_p^2 =} lw\sqrt{2\left(1+\cos wt\right)} = 2lw\cos\left(wt/2\right).$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -lw^2\left(1+2\cos wt\right),$$

$$a_p = r\ddot{\varphi} - 2\dot{r}\dot{\varphi} = -2lw^2\sin wt,$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2} = lw^2\sqrt{\left(1+2\cos wt\right)^2 + 4\sin^2 wt} =$$

$$= lw^2\sqrt{5+4\cos wt}.$$

Для моменту часу $t = 0$ із цих формул отримаємо:

$$V_r = 0, V_p = 2lw, V = \left|V_p\right| = 2lw,$$

$$a_r = -3lw^2, a_p = 0, a = \left|a_r\right| = 3lw^2.$$

Вектори швидкості і прискорення для моментів часу t і $t = 0$ зображені на рис.1.23.

Контрольні завдання для самостійної роботи

1 Визначити модуль швидкості, якщо, його вектор у цей момент часу утворює кут 45^o з полярним радіусом, а радіальна швидкість $\dot{r} = 2$ *м/с*

Відповідь: $2{,}83$ *м/с* .

2 Трансверсальна швидкість точки дорівнює 3 *м/с* . Визначити радіальну швидкість, якщо вектор повної швидкості утворює кут 30^o з полярним радіусом.

Відповідь: $5{,}20$ *м/с* .

3 Визначити трансверальну швидкість точки, якщо повна швидкість дорівнює $20\ м/с$, а радіальна швидкість дорівнює $10\ м/с$.

Відповідь: $17{,}3\ м/с$.

4 Задані рівняння руху точки в полярних координатах $j = t, r = t^2$. Визначити полярний радіус точки в момент часу, коли кут $j = 180^o$.

Відповідь: $9{,}87$.

5 Завдані рівняння руху точки в полярних координатах $j = 2sint, r = t^2$. Визначити полярний кут j в момент часу, полярний радіус $r = 4м$.

Відповідь: $1{,}82$.

6 Завдані рівняння руху точки в полярних координатах $j = 0{,}5t^2, r = 0{,}5t$. Визначити трансверальну швидкість точки $см/с$ в момент часу t_1, коли полярний радіус $r = 2м$.

Відповідь: $8 см/с$.

7 Задані рівняння руху точки в полярних координатах $j = t^2, r = 0{,}5t^2$. Визначити радіальну швидкість точки в момент часу, коли полярний кут $j = 2{,}25рад$

Відповідь: $1{,}5м/с$.

8 Задані рівняння руху точки в полярних координатах $j = 2t, r = t^2$. Визначити модуль швидкості точки в момент часу $t = 2\ c$.

Відповідь: $8{,}94м/с$.

9 Точка рухається в площині. Рівняння полярного кута $j = 0{,}3t$. Визначити полярний радіус r в момент часу, коли полярний кут досягне $3рад$, якщо $dr/dt = 0{,}4м/с$ При $t = 0$ радіус $r_0 = 0$.

Відповідь: 4

10 Точка рухається в площині. Задано рівняння полярного радіуса $r = sinp\,t$. Визначити полярний кут j в момент часу, коли $r = 1м$ якщо $dj/dt = 0{,}4рад/с$. При $t_0 = 0$ кут $j_0 = 0$

Відповідь: $0{,}2рад$

2 ПРОСТИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА: ПОСТУПАЛЬНИЙ І ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ

2.1 Поступальний рух твердого тіла

При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії.

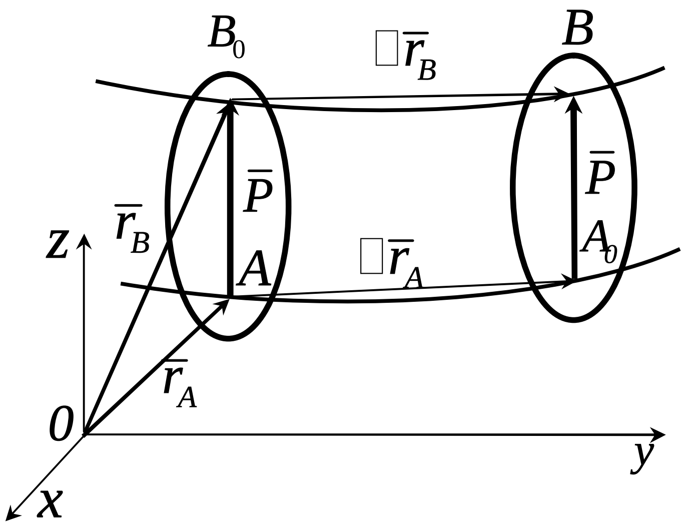


Рисунок 2.1

Дійсно, розглянемо в твердому тілі пряму A_0B_0 (рис.2.1.). Положення точки A_0 визначає радіусом-вектором $\overline{r_A}$, положення точки B_0 - радіусом-вектором $\overline{r}_B$, $\overline{A_0B_0} = \overline{p}$. Між $\overline{r}_B$, $\overline{r}_A$ та $\overline{p}$ існує залежність

$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{p}\,. \tag{2.1}$$

При русі тіла $\overline{r}_A$ та $\overline{r}_B$ змінюються у часі, тобто $\overline{r}_A = \overline{r}_A(t)$, $\overline{r}_B = \overline{r}_B(t)$. Вектор $\overline{r}$ залишається сталим. Тоді

$$\Delta\overline{r}_B = \Delta\overline{r}_A, \tag{2.2}$$

отже траєкторію точки A можна одержувати паралельним переносом траєкторії точки B.

Прикладом такого руху може бути механізм, що складається з кривошипів O_1A і O_2B однакової довжини, насаджених на вали O_1 та O_2 (рис. 2.2) і з'єднаних спарником AB, довжина якого дорівнює відстані O_1O_2. Очевидно, що при всіх положеннях механізму залишається паралелограмом. Отже, спарник AB залишається паралельним прямій O_1O_2, і його рух є поступальним.

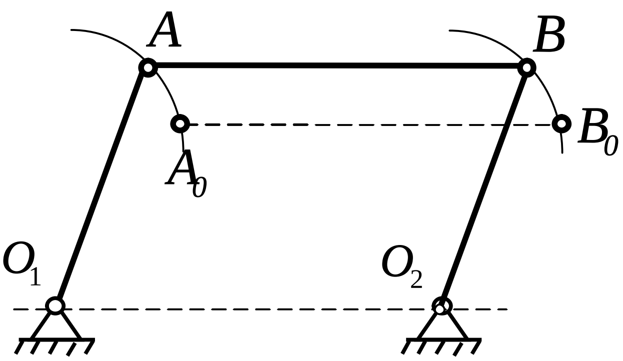


Рисунок 2.2

Продиференціювавши за часом рівняння (2.1), одержимо

$$\frac{d\overline{r}_B}{dt} = \frac{d\overline{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{p}}{dt}. \tag{2.3}$$

Оскільки $\overline{p} = const$ то із (2.3) маємо

$$\frac{d\overline{r_A}}{dt} = \frac{d\overline{r_B}}{dt} \text{ або } \overline{V_A} = \overline{V_B}. \tag{2.4}$$

Диференцюємо ще раз (2.4) за часом, отримуємо

$$\frac{d\overline{V}_B}{dt} = \frac{d\overline{V}_A}{dt} \text{ або } \overline{a}_B = \overline{a}_A. \tag{2.5}$$

Поступальним називається такий рух тіла, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно сама собі, а всі точки рухаються з однаковими швидкостями та прискореннями.

Тому вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до вивчення руху будь-якої його точки.

2.2 Обертальний рух твердого тіла. Кутові швидкість і прискорення

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому пряма, що проходить через які-небудь дві точки під час руху тіла залишається нерухомою.

Вісь, що проходить через нерухомі точки називається віссю обертання.

Припустимо, що нерухомими точками є точки A і B, через які проходить ось обертання z (рис.2.3.).

Для визначення положення обертаючогося тіла оберемо нерухому площину I і площину II, врізану в саме тіло і яка обертається разом з ним.

Тоді положення тіла в любий момент часу визначатиметься взятим з відповідним знаком кутом j між площинами I і II (рис.2.3.), цей кут називається кутом оберту тіла.

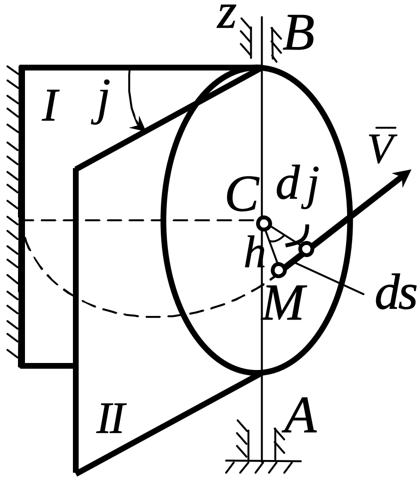


Рисунок 2.3

Таким чином, щоб визначити положенням тіла в довільний момент часу, необхідно знати залежність кута j від часу t, тобто

$$j = (t). \tag{2.6}$$

Рівняння (2.6) задає закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є кутова швидкість w і кутове прискорення e.

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло обенулося на кут $\Delta j = j_1 - j$, то чисельно середня кутова швидкість тіла за цей проміжок часу буде

$$w_{cp} = \Delta j / \Delta t$$

У межах при $\Delta t \to 0$ знайдемо

$$w = \frac{dj}{dx} \text{ або } w = j\&. \tag{2.7}$$

Таким чином, числове значення кутової швидкості тіла в заданий момент часу дорівнює перший похідній від кута оберту по часу.

Знак w визначає напрямок оберту тіла.

Кутове прискорення характеризує зміну з течією часу кутової швидкості тіла. Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість тіла змінюється на величину $\Delta w = w_1 - w$, то числове значення середнього кутового прискорення тіла за цей проміжок часу буде

$$e_{cp} = \Delta w / \Delta t.$$

У межах при $\Delta t \to 0$ знайдемо, що

$$e = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2 j}{dt^2} \text{ або } e = \dot{w} = \ddot{j} \, . \qquad (2.8)$$

Таким чином, числове значення кутового прискорення тіла в заданий момент часу дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута оберту тіла від часу.

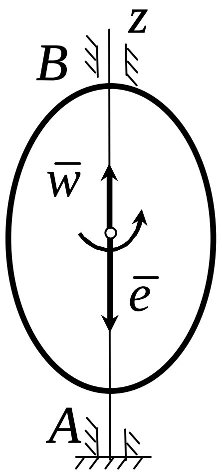


Рисунок 2.4

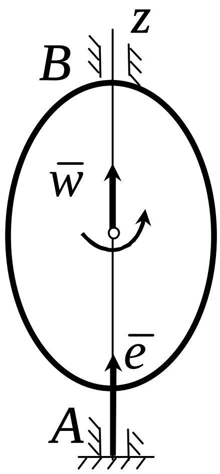


Рисунок 2.5

Кутова швидкість тіла і кутове прискорення можна зображати векторами $\bar{w}$ і $\bar{e}$. Вектор $\bar{w}$ спрямований вздовж осі обертання z (рис 2.4, 2.5) в той бік, звідки обертання видно проти годинникової стрілки.

Напрямок $\bar{e}$ співпадає з напрямком $\bar{w}$, коли тіло обертається прискорено (рис 2.5) і протилежно $\bar{w}$ при сповільненому обертанні.

Якщо кутова швидкість тіла залишається увесь час руху сталою $(w = const)$, то обертання тіла називається **рівномірним**. Тоді із формули (2.7) маємо

$$dj = w dt.$$

Враховуючи, що в початковій момент часу $t = 0$ кут $j = j_0$, після інтегрування лівої частини від j_0 до j, а правої від 0 до t, отримаємо остаточно

$$j = j_0 + wt \quad . \qquad (2.9)$$

Із рівняння (2.9) випливає, що при рівномірному обертанні, коли $j_0 = 0$,

$$j = wt \text{ і } w = \frac{j}{t} \quad . \qquad (2.10)$$

У техніці швидкість рівномірного обертання часто визначають кількістю обертів за хвилину. Знайдемо залежність між $об/хв$ та радіанною мірою кутової швидкості.

При одному оберті тіло повернеться на кут $2p$, а при n обертах на $2pn$. Цей оберт виконується за час $t = 60c$.

Із рівняння (2.10) тоді випливає, що

$$w = pn/30 \approx 0{,}1n \quad . \qquad (2.11)$$

Якщо кутове прискорення тіла весь час руху є сталим $(e = const)$, то обертання називається **рівномірним.**

Знайдемо закон рівнозмінного обертання, враховуючи, що в початковий момент часу $t = 0$, кут $j = j_0$, а кутова швидкість $w = w_0$ (w_0 - початкова кутова швидкість) із формули (2.8) маємо

$$dw = e\,dt.$$

Інтегруючи ліву частину в межах від w_0 до w, а праву – в межах від 0 до t, знайдемо

$$w = w_0 + et. \qquad (2.12)$$

Представимо вираз (2.12) у вигляді $\dfrac{dj}{dt} = w_0 + et$ або $dj = w_0 dt + etdt.$

Вдруге інтегруючи, знайдемо закон рівномірного обертання

$$j = j_0 + wt + et^2/2. \qquad (2.13)$$

Якщо числові значення w і e мають однакові знаки, обертання буде рівноприскореним, а якщо різні - рівносповільненим.

Встановиши характеристики руху всього тіла в цілому, перейдемо до вивчення руху окремих його точок.

2.3 Обертальний рух твердого тіла. Швидкість і прискорення точок тіла. Перетворення поступального і обертального рухів тіла в механізмах

1 **Швидкість точок тіла**. Розглянемо будь-яку точку M твердого тіла, яка знаходиться на відстані h від осі обертання (*рис.*2.3). При обертанні тіла точка M буде відкреслювати коло радіуса h, площина якого перпендикулярна до вісі обертання, а центр C лежить на самій осі. Якщо за час dt здійснюється елементарний оберт на кут dj, то точка M при цьому здійснює вздовж своєї траєкторії елементарне переміщення

$$ds = hdj .$$

Тоді числове значення швидкості точки буде дорівнювати співвідношенню ds до dt, тобто

$$V = \frac{ds}{dt} = h\frac{dj}{dt}$$

або

$$V = hw\,.\qquad(2.14)$$

Швидкість V на відзнаку від кутової швидкості називають іноді **лінійною** або круговою швидкістю точки M.

Таким чином, числове значення швидкості точки твердого тіла, що обертається, рівна доданого кутової швидкості тіла на відстань від точки осі обертання.

Спрямована швидкість за дотичною до кола, що є траєкторією точки або перпендикулярно площині, що проходить через вісь обертання і точку M. Так як для всіх точок тіла w має у даний час одне і теж значення, то із формули (2.14) випливає, що швидкості точок тіла, що обертається, пропорційні їх відстаням від осі обертання. Поле швидкостей точок тіла має вигляд, показаний на рис.2.6.

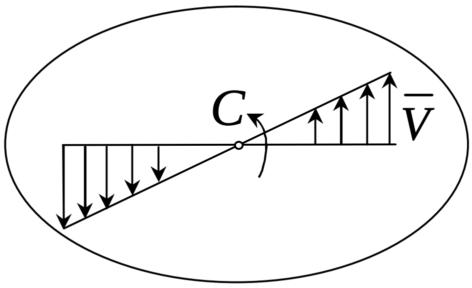


Рисунок 2.6

2 **Прискорення точок тіла**. Для знаходження прискорення точки M використаймо формулу

$$a_t = \frac{dV}{dt},\, a_n = \frac{V^2}{r}$$

або у іншому вигляді:

$$a_t = e\,h,\; a_n = w^2 h\,.\qquad(2.15)$$

Дотична складова $\bar{a}_t$ напрямлена за дотичною до траєкторії (у напрямку обертання при прискореному обертанні тіла і в зворотному напрямку при сповільненому).

Нормальна складова $\overline{a}_n$ завжди спрямована за радіусом MC до осі обертання (рис.2.7) .

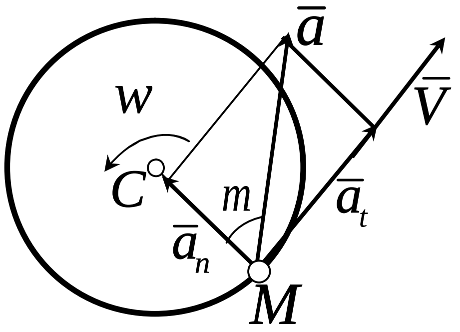


Рисунок 2.7

Повне прискорення точки M буде:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \text{ або } a = h\sqrt{e^2 + w^4} \; . \qquad (2.16)$$

Відхилення вектора повного прискорення від радіуса кола, яке є траєкторією точки позначається кутом m , який визначається за формулою

$$tg m = \frac{e}{w^2}. \qquad (2.17)$$

Оскільки w і e мають у даний момент часу для всіх точок тіла одне і теж значення, то із формул (2.16) і (2.17) випливатиме, що прискорення всіх точок тіла пропорційні їх відстаням від осі обертання і утворюють у даний момент часу один і той самий кут m з радіусами кіл, що ними описуються. Поле прискорень точок твердого тіла, що обертається, має вигляд, показаний на рис.2.8.

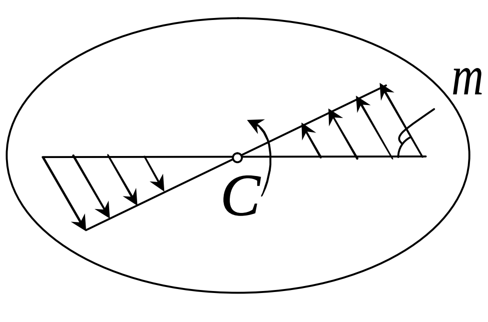


Рисунок 2.8

Формули (2.14)-(2.17) дають змогу визначити швидкість і прискорення довільної точки тіла, якщо відомий закон обертання тіла і відстань від даної точки до вісі обертання за цими ж формулами можна, знаючи рух однієї точки тіла, знайти рух будь-якої іншої точки, а також характеристики руху всього тіла в цілому.

3 Вектори швидкості і прискорення точок тіла. Щоб знайти вираз безпосередньо для векторів $\overline{V}$ і $\overline{a}$, проведемо із довільної точки 0 осі AB радіус вектор $\overline{r}$ точки M (рис.2.9).

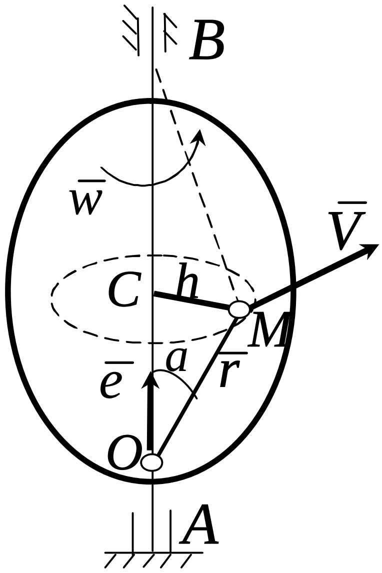


Рисунок 2.9

Тоді

$$h = rsina$$

і за формулою (2.14)

$$\left|V\right| = \left|w\right| h = \left|w\right| rsina\text{, або } \left|V\right| = \left|\overline{w}\times\overline{r}\right|.$$

Таким чином, модуль векторного добутку $\overline{w}\times\overline{r}$ дорівнює модулю швидкості точки M. Напрямок векторів $\overline{w}\times\overline{r}$ і $\overline{V}$ теж співпадають, бо вони перпендикулярні площині OMB і розмірності їх однакові. Отже,

$$\overline{V} = \overline{w} \times \overline{r} \tag{2.18}$$

тобто, вектор швидкості дудь-якої точки тіла під час його обертання дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла на радіус-вектор цієї точки.

Формулу (2.18) називають формулою Ейлера. Візьмемо від обох частин рівняння (2.18) похідні за часом, отримаємо

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \left(\frac{dw}{dt} \times \overline{r} \right) + \left(\overline{w} \times \frac{d\overline{r}}{dt} \right)$$

або

$$\overline{a} = \left(\overline{e} \times \overline{r} \right) + \left(\overline{w} \times \overline{V} \right) \tag{2.19}$$

Формула (2.19) визначає вектор прискорення довільної точки тіла, що обертається.

Вектор $\overline{e} \times \overline{r}$ спрямований, як і вектор $\overline{w} \times \overline{r}$, тобто за дотичною до траєкторії точки M, причому

$$\left| \overline{e} \times \overline{r} \right| = e r sin a = e h.$$

Вектор $\overline{w} \times \overline{V}$ спрямований вздовж MC, тобто за нормаллю до траєкторії точки M, а

$$\left| \overline{w} \times \overline{V} \right| = wV sin 90^o = w^2 h,$$

оскільки $V = wh.$

Враховуючи всі ці результати, а також формули (2.15), матимемо

$$\bar{e} \times \bar{r} = \bar{a}_t, \quad \bar{w} \times \bar{V} = \bar{a}_n.$$

Розглянемо приклади розв’язання задач за темами прості рухи твердого тіла.

Приклад 1

Визначити швидкість і прискорення довільної точки поршня (рис.2.10), з’єднаного з кривошипно-шатунним механізмом за допомогою повзуна A, якщо відомо, що закон руху повзуна $x = 20cosp\,t$, де t вимірюється в секундах, x - в сантиметрах.

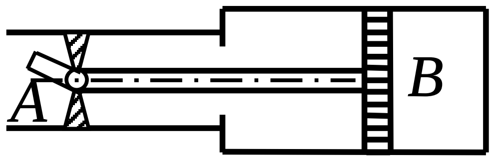


Рисунок 2.10

Рішення

Рух поршня разом зі штоком AB - поступальний. Повзун A з’єднаний зі штоком, отже, якщо будуть визначені швидкість і прискорення точки A, то цим самим будуть визначені швидкість і прискорення будь-якої точки поршня.

Отже

$$V_A = \dot{x} = -20p\,sinp\,t,$$

$$a_A = \frac{dV_A}{dt} = -20p^2 cosp\,t.$$

Приклад 2

Точка A шківа рухається зі швидкістю $V_A = 1\ м/с$, а точка B – зі швидкістю $V_B = 0{,}2\ м/с$, $AB = 0{,}4м$ (рис.2.11). Визначити кутову швидкість шківа і прискорення точки B.

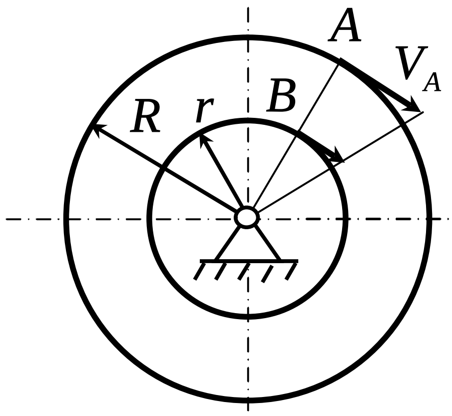


Рисунок 2.11

Рішення

Оскільки точка A і B лежать на одному радіусі, то їх швидкості перпендикулярні до цього радіуса:

$$V_A = Rw\ ,\ V_B = (R - AB)w\ .$$

отже
$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{R}{R - AB},$$

звідки
$$R = \frac{V_A \cdot AB}{V_A - V_B} = 50\,см.$$

Обчислимо кутову швидкість шківа, знаючи швидкість точки A і радіус R:

$$w = \frac{V_A}{R} = 2c^{-1}.$$

Оскільки кутова швидкість шківа стала, то точка B має тільки нормальне прискорення. Отже, прискорення точки B

$$a_B = OB \cdot 10^2 = 0{,}4м/c^2.$$

Приклад 3

Ручка OA лебідки обертається рівноприскоренно з кутовим прискоренням $e = p c^{-2}$.. Кількість зубців шестерень лебідки $Z_1 = 8$, $Z_2 = 32$, $Z_3 = 12$, $Z_4 = 36$, а радіус барабана $r_5 = 0{,}4\ м$. Визначити швидкість і прискорення тягаря, а також висоту підйому тягаря через $0{,}5 хв$ після початку руху (рис. 2.12).

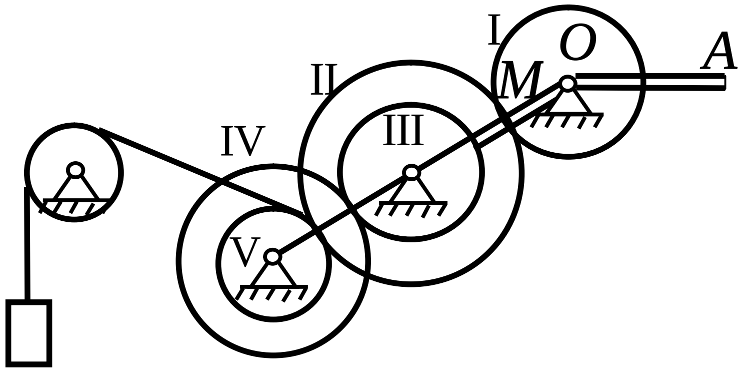


Рисунок 2.12

Рішення

Позначимо радіуси шестерень відповідно R_1, R_2, R_3, R_4, маємо $R_1 : R_2 : R_3 : R_4 = Z_1 : Z_2 : Z_3 : Z_4$. Швидкість точки M, яка належить обом шестерням I і II, за модулем

$$V_M = R_1 w_1 = R_2 w_2$$

звідки
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{Z_2}{Z_1}.$$

Отже, кутові швидкості обернено пропорційні радіусам або кількості зубців:

$$w_2 = \frac{R_1}{R_2} w_1 = \frac{Z_1}{Z_2} w_1.$$

Аналогічно матимемо

$$w_4 = \frac{Z_3}{Z_4} w_3 = \frac{Z_3}{Z_4} w_2 = \frac{Z_3 Z_1}{Z_4 Z_2} w_1 .$$

Диференціюючи останню тотожність, отримуємо

$$e_4 = \frac{dw_4}{dt} = \frac{Z_3 Z_1}{Z_4 Z_2} \frac{dw_1}{dt}$$

або $$e_4 = \frac{Z_3 Z_1}{Z_4 Z_2} e_1 = \frac{p}{12} c^{-2} .$$

Шестерні IV і V мають такі самі кутову швидкість і кутове прискорення, бо вони насаджені на спільну вісь.

Кутова швидкість барабана IV,

$$w_4 = w_5 = e_5 t = \frac{p}{12} \cdot 30 = \frac{5}{2} p \, c^{-1} .$$

Його кут повороту

$$j_4 = j_5 = \frac{1}{2} e_5 t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{12} \cdot 30^2 = \frac{75}{2} p \;\; ðàä.$$

Помноживши кут повороту барабана на R_5, отримаємо висоту підйому тягаря:

$$h_{t=30c} = R_5 \cdot j_5 = 0{,}4 \cdot \frac{75}{2} p = 47{,}1 м.$$

Оскільки тягар рухається прямолінійно, то його швидкість і прискорення

$$V = \frac{dh}{dt} = R_5 \frac{dj_5}{dt} = R_5 w_5 ,$$

$$a = \frac{dV}{dt} = R_5 \frac{dw_5}{dt} = R_5 e_5 .$$

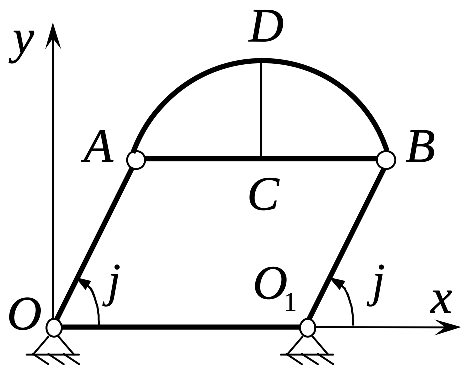
Підставивши числові значення, отримаємо

$$V_{t=30c} = 3{,}54 м/с.,\ a_{t=30c} = 0{,}1 м/с^2..$$

Контрольні завдання для самостійної роботи

ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ТІЛА

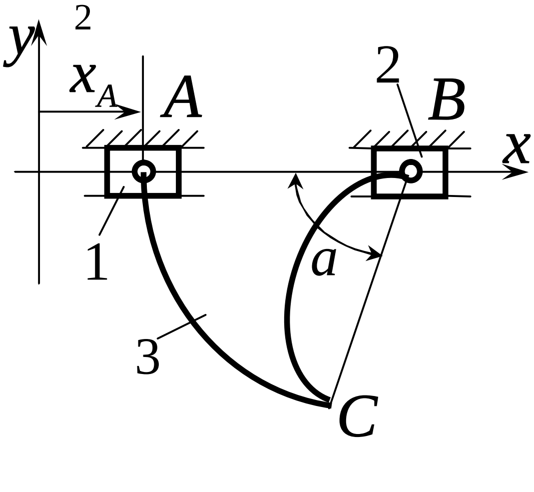
1



При обертанні кривошипа $OA = O_1B = 0{,}16\ м$ кут j вимірюється за законом $j = pt$. Визначити радіус кривизни траєкторії точки D напівкута ABD при $t = 2\ с$, якщо $AB = 0{,}25\ м$.

Відповідь: $0{,}16 м$

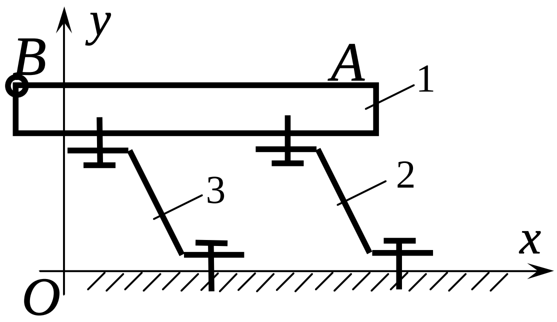
2



До повзунів 1 і 2, які переміщуються вздовж осі Ox за загальною напрямною, прикріплено тіло 3. Точка A рухається за законом $x_A = 0{,}1t^2$. При $t = 10\ с$ визначити швидкість точки C, якщо відстані $AB = BC = 0{,}3\ м$ і кут $a = 75^o$.

Відповідь: $2\ м/с$.

3



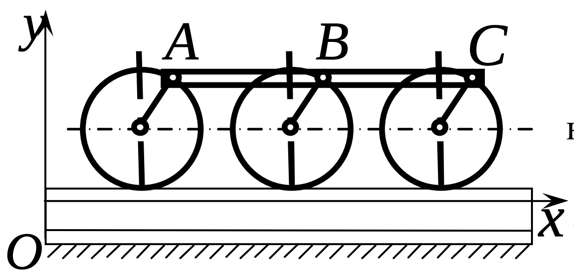
Вибролоток 1, закріплений на двох пружинах 2 і 3, здійснює поступальний рух за законом

$x_A = 0{,}16\sin 50p\,t$

$y_A = 0{,}12\sin 50p\,t$, де x_A і y_A - в см. Визначити швидкість в $см/с$ точки B вибролотка в момент часу $t = 1\,с$, якщо $AB = 100\,см$.

Відповідь: $31{,}4\,см/с$.

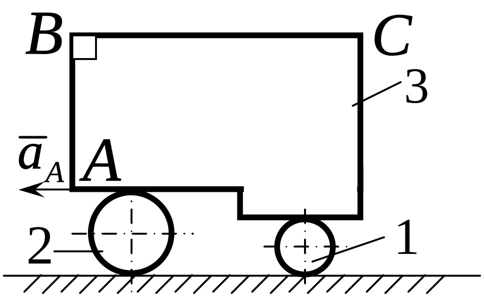
4



На прямолінійній ділянці шляху центр B спарника тепловоза рухається за законом $x_B = 15t - 0{,}25\cos 30t$, $y_B = 0{,}5 - 0{,}25\sin 30t$. У момент часу (с) $t = p$ визначити швидкість точки C спарника, якщо $BC = 1{,}5\,м$.

Відповідь: $16{,}8\,м/с$.

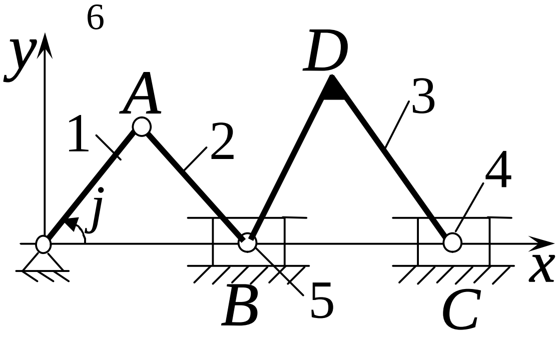
5



Тіло 3 установлено на двох циліндричних катках 1 і 2, здійснює поступальний рух. Чому дорівнює прискорення точки C, якщо прискорення точки A дорівнює $2\,м/с^2$, причому $BC = 2AB = 1\,м$

Відповідь: $2\,м/с^2$.

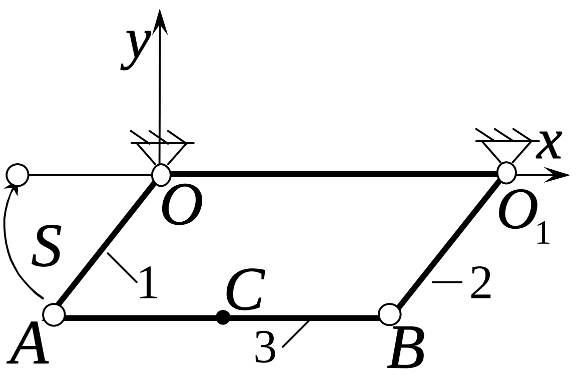
6



При обертанні кривошипа 1 шатуном 2 повзуни 4; 5 і трикутна пластинка 3 починають рухатися. У момент часу $t = 0{,}5\ c$ визначити прискорення точки D, якщо $OA = AB = 0{,}2\ м$, $BC = CD = BD = 0{,}26\ м$, кут $j = pt$.

Відповідь: 0.

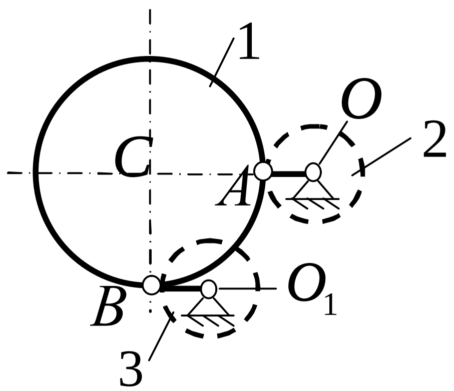
7



На двох кривошипах 1 і 2 однакової довжини $OA = O_1B = 0{,}2\ м$ закріплено Стрижень 3, виконуючий рух в площині Oxy. Точка A рухається за законом $s = 0{,}2pt$. Визначити прискорення середньої точки C стрижня при $t = 0$, якщо $AB = 0{,}36\ м$.

Відповідь: $1{,}97\ м/с$.

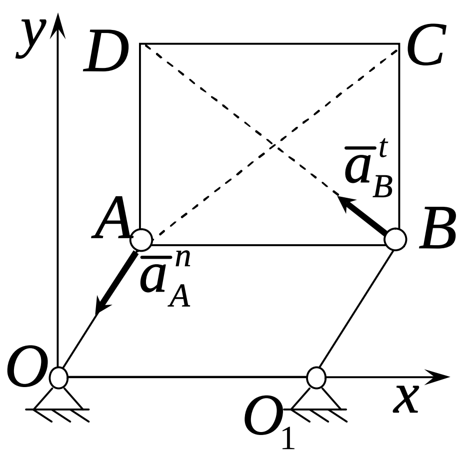
8



Круглий стіл 1 поступально рухатися за допомогою кривошипів 2 і 3. Визначити швидкість центра C стола, якщо відомо, що нормальне прискорення точки A кривошипа $a_n = 5\ м/с^2$, а довжина кривошипа $OA = O_1B = 0{,}2\ м$.

Відповідь: $1\ м/с$.

9



Квадратна пластина $ABCD$ здійснює поступальний рух в площині Oxy. Визначити прискорення точки C, якщо відомо, що нормальне прискорення точки A $a_A^n = 4$ $м/с^2$, а дотичне прискорення точки B $a_B^t = 3$ $м/с^2$.

Відповідь: $5 м/с^2$.

ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА
КУТОВА ШВИДКІСТЬ І КУТОВЕ ПРИСКОРЕННЯ

1 При рівномірному обертанні маховик виконує 4 обороти за секунду. За скільки секунд маховик повернеться на кут $j = 24p$.

Відповідь: 3 $с$.

2 Кутова швидкість тіла змінюється відповідно закону $w = -8t$. Визначити кут оберту тіла в момент $t = 3$ $с$, якщо при $t_0 = 0$ кут оберту $j_0 = 5$ $рад$.

Відповідь: -31 $рад$.

3 Ротор електродвигуна почав обертатися рівноприскорено, зробив за перші 5 $с$ 100 оборотів. Визначити кутове прискорення ротора.

Відповідь: $50{,}3 с^{-1}$.

4 Частота обертання маховика за час $t_1 = 10$ $с$ зменшилася в 3 рази і стала дорівнювати $30 об/хв$. Визначити кутове прискорення вала, якщо він обертається рівносповільнено.

Відповідь: $-0{,}628 с^{-1}$.

5 Кутова швидкість маховика змінюється відповідно до закону $w = p\left(6t - t^3\right)$. Визначити час $t > 0$ зупинки маховика.

Відповідь: $6\ c$.

6 Тіло обертається навколо нерухомої осі відповідно до закону $j = t^3 + 2$. Визначити кутову швидкість тіла в момент часу, коли кут оберту $j = 10\ рад$.

Відповідь: $12\ c^{-1}$.

7 Тіло обертається навколо нерухомої осі відповідно до закону $j = 4 + 2t^3$. Визначити кутове прискорення тіла в момент часу, коли кутова швидкість $w = 6\ рад/c$.

Відповідь: $12\ c^{-2}$.

8 Кутова швидкість тіла змінюється відповідно до закону $w = 2 - 8t^2$. Визначити час t зупинки тіла.

Відповідь: $0{,}5\ c$.

9 Кутове прискорення тіла змінюється відповідно до закону $e = 2t$. Визначити кутову швидкість тіла в момент часу $t = 4\ c$, якщо при $t_0 = 0$, кутова швидкість дорівнює нулю.

Відповідь: $16\ c^{-1}$.

10 Кутове прискорення тіла змінюється відповідно до закону $e = 3t^2$. Визначити кутову швидкість тіла в момент часу $t = 2\ c$, якщо при $t_0 = 0$, кутова швидкість $w_0 = 2\ рад/c$.

Відповідь: $10\ рад/c$.

11 Тіло обертається навколо нерухомої осі, здійснює коливальний рух відповідно до закону $\varphi = \sin 0{,}5\pi t$. Визначити кутове прискорення тіла в момент часу $t = 1\,c$.

Відповідь: $-2{,}47\ c^{-2}$.

12 Тіло, обертаючись навколо нерухомої вісі, здійснює коливальний рух відповідно до закону $\varphi = 0{,}5\pi \sin 2\pi t$. Визначити кутову швидкість тіла в момент часу $t = 0{,}125\ c$.

Відповідь: $6{,}98\ рад/с$.

13 Деталь обертається навколо нерухомої осі відповідно до закону $\varphi = 2\pi \cos \pi t^2$. Визначити кут φ обороту деталі в момент часу $t = 2\,c$.

Відповідь: $6{,}28\ рад$.

14 При запуску ротор електродвигуна обертається відповідно до закону $\varphi = \pi t + \pi e^{-t}$. Визначити кутову швидкість ротора в момент часу $t = 2\,c$.

Відповідь: $2{,}72\ рад/с$.

15 При обертанні ротора кутова швидкість змінюється відповідно до закону $\omega = 6\pi\left(4t + e^{-0{,}01t} \sin \pi t\right)$. Визначити кутове прискорення при $t = 100\ c$.

Відповідь: $97{,}2\ c^{-2}$.

ШВИДКІСТЬ І ПРИСКОРЕННЯ ТОЧОК ТІЛА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

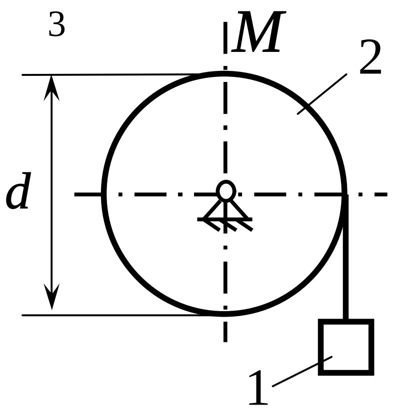
1 Тіло обертається навколо нерухомої осі відповідно до закону $j = t^2$. Визначити швидкість точки тіла на відстані $r = 0{,}5\ м$ від осі обертання в момент часу, коли кут обороту $j = 25\ рад$.

Відповідь: $5\ рад/с$.

2 Тіло обертається рівнозмінно з кутовим прискоренням $e = 5\ рад/с^2$. Визначити швидкість точки на відстані $r = 0{,}2\ м$ від осі обертання в момент часу $t = 2\ с$, якщо при $t_0 = 0$ кутова швидкість $w_0 = 0$.

Відповідь: $2\ рад/с$.

3



Вантаж 1 підіймається за допомогою лебідки 2, якай обертається відповідно до закону $j = 5 + 2t^2$. Визначити швидкість точки барабана в момент часу $t = 2\ с$ якщо діаметр $d = 0{,}6\ м$.

Відповідь: $1{,}8\ рад/с$.

4 Кутова швидкість балансира механічних часів змінюється за законом $w = p\, sin4p\, t$. Визначити швидкість точки балансиру на відстані $h = 6\ мм$ від осі оберту в момент часу $t = 0{,}125\ с$.

Відповідь: $1{,}88\ рад/с$.

5 Швидкість точки тіла на відстані $r = 0{,}2\ м$ від осі обертання змінюється за законом $V = 4t^2$. Визначити кутове прискорення даного тіла в момент часу $t = 2\ c$.

Відповідь: $80\ рад/c^2$.

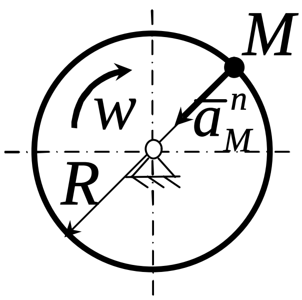
6 Маховик обертається зі сталою частотою обертання, рівною $90\ об/хв$. Визначити прискорення точки маховика на відстані $0{,}043м$ від осі обертання.

Відповідь: $3{,}82\ рад/c^2$.

7 Тіло обертається навколо нерухомої осі відповідно до закону $j = 2t^2$. Визначити нормальне прискорення точки тіла на відстані $r = 0{,}2\ м$ від осі обертання в момент часу $t = 2\ c$.

Відповідь: $12{,}8\ м/c^2$.

8



Нормальне прискорення точки M диска, який обертається навколо нерухомої осі, дорівнює $6{,}4\ м/c^2$. Визначити кутову швидкість w цього диска, якщо його радіус $R = 0{,}4\ м$.

Відповідь: $4\ рад/c$.

9 Тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $j = 2t^3$. В момент часу $t = 2\ c$ визначити дотичне прискорення точки тіла на відстані від осі обертання $r = 0{,}2\ м$.

Відповідь: $4{,}8\ м/c^2$.

10 Кутова швидкість тіла змінюється за законом $w = 2t^3$. Визначити дотичне прискорення точки цього тіла на відстані $r = 0{,}2\ м$ від осі обертання в момент часу $7{,}9\,м/с^2$ $t = 2\ с$.

Відповідь: $2{,}4\,м/с^2$.

11 У даний момент часу ротор електродвигуна обертається з кутовою швидкістю $w = 3p$ і кутовим прискоренням $e = p$. Визначити прискорення точки ротора на відстані $0{,}04\,м$ від осі обертання.

Відповідь: $0{,}36p\ м/с^2$.

12 Тіло обертається відповідно до закону $j = 1 + 4t$. Визначити прискорення точки тіла на відстані $r = 0{,}2\,м$ від осі обертання .

Відповідь: $1{,}6\,м/с^2$.

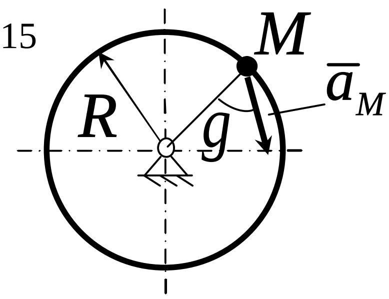
13 Кутова швидкість тіла змінюється за законом $j = 1 + t$. Визначити прискорення точки цього тіла на відстані $r = 1\ м$ від осі обертання в момент часу $t = 1\ с$.

Відповідь: $1\,м/с^2$.

14 Махове колесо в заданий момент часу обертається з кутовим прискоренням $e = 20p$, а його точка на відстані від осі обертання $5\ см$ має прискорення $a = 8p\ м/с$. Визначити нормальне прискорення указаної точки.

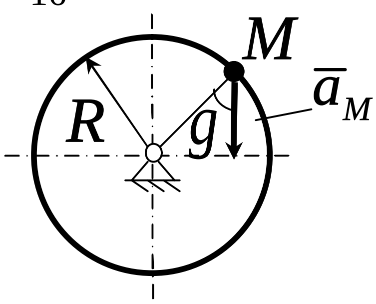
Відповідь: $7{,}9\,м/с^2$.

15



Прискорення точки M диска, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює $4\,м/с^2$. Визначити кутову швидкість цього диска, якщо його радіус $R = 0{,}5\ м$ а кут $g = 60^o$.

Відповідь: 2.



Прискорення точки M диска, який обертається навколо нерухомої осі, дорівнює $4\ м/с^2$. Визначити кутове прискорення цього диска, якщо його радіус $R = 0{,}4\ м$ а кут $g = 30^o$.

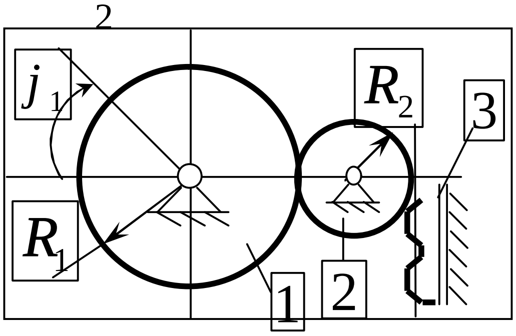
Відповідь: 5.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОСТУПАЛЬНОГО І ОБЕРТАЛЬНОГО РУХІВ ТІЛА В МЕХАНІЗМАХ

1 При русі клина горизонтальними напрямними зі швидкістю $1\ м/с$ другий клин переміщується в вертикальному напрямку зі швидкістю $1\ м/с$. Визначити кут в градусах скосу клинів.

Відповідь: 45^o.

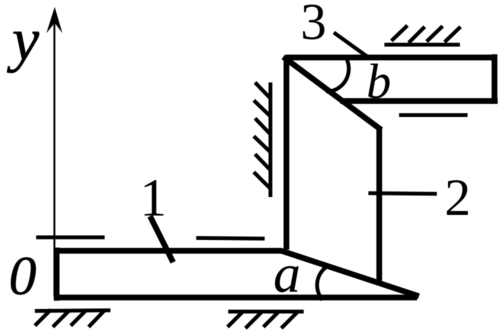
2



Зубчасте колесо 1 обертається відповідно до закону $j_1 = 4t^2$. Визначити прискорення рейки 3, якщо радіуси зубчастих коліс $R_1 = 0{,}8\ м$, $R_2 = 0{,}4\ м$.

Відповідь: $6{,}4$.

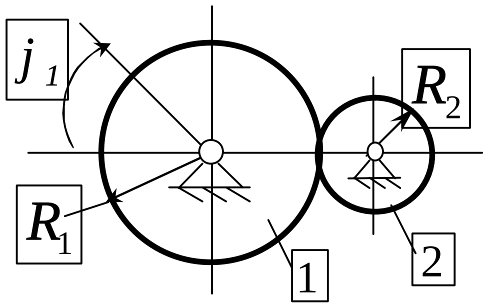
3



Клини 1 і 3 переміщується за паралельними горизонтальними напрямними, а проміжний клин 2 - за вертикальними напрямними. Визначити переміщення клина 3, якщо переміщення клина 1 дорівнює $0{,}12м$, а кут $a = 30^o$ і $b = 60^o$.

Відповідь: *0,04м* .

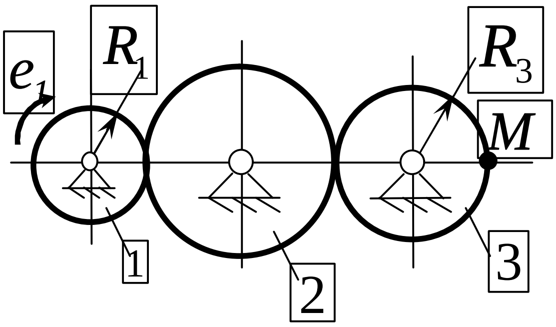
4



Колесо 1 обертається за законом $j_1 = 20t$. Визначити число обертів, здійснених колесом 2 за час $t = 3{,}14\ с$, якщо радіуси коліс $R_1 = 0{,}8\ м$, $R_2 = 0{,}5\ м$.

Відповідь: *16* .

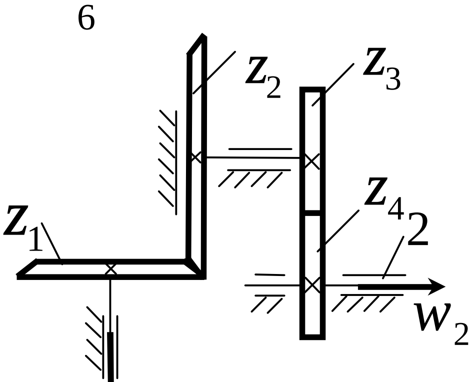
5



Зубчате колесо 1 обертається рівнозмінно з кутовим прискоренням $e_1 = 4\ рад/с^2$. Визначити швидкість точки M в момент часу $t = 2с$, якщо радіуси зубчатих коліс $R_1 = 0{,}4\ м$, $R_3 = 0{,}5\ м$. Рух починається із стану спокою.

Відповідь: *3,2* .

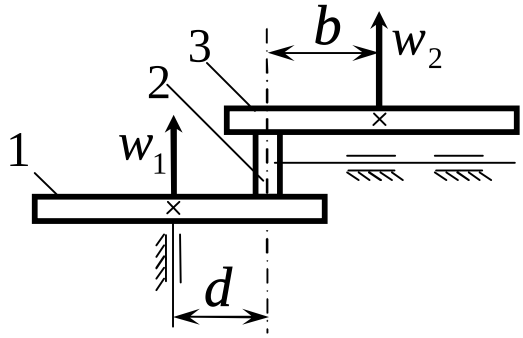
6



Редуктор складається із конічної і циліндричної зубчатих передач з кількістю зубців коліс $Z_1 = 18$, $Z_2 = 26$, $Z_3 = 28$ і $Z_4 = 40$. Вал 1 обертається з кутовою швидкістю $w_1 = 20\left(t + e^{-t}\right)$. При $t = 10\ c$ знайти кутову швидкість вала 2.

Відповідь: *96,9* .

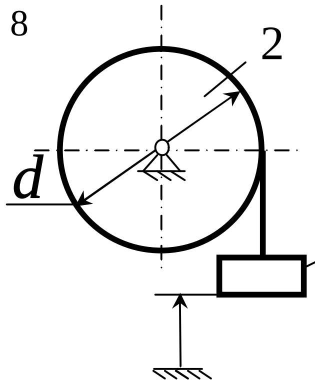
7



Варіатор складається із ведучого диска 1 ролика 2 і веденого диска 3. Кутові швидкості дисків $w_1 = 10\,рад/с$, $w_2 = 5\,рад/с$,. Знайти співвідношення відстаней b/d.

Відповідь: 2.

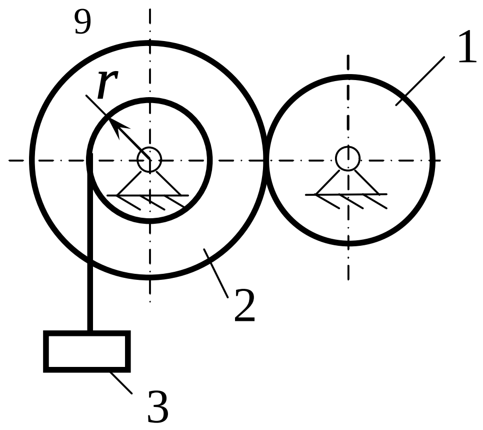
8



Вантаж 1 підіймається за допомогою лебідки 2. Закон руху вантажу має вигляд: $s = 7 + 5t^2$, де s - в см. Визначити кутову швидкість барабана в момент часу $t = 3\,с$, якщо його діаметр $d = 50\,см$.

Відповідь: $1{,}2$.

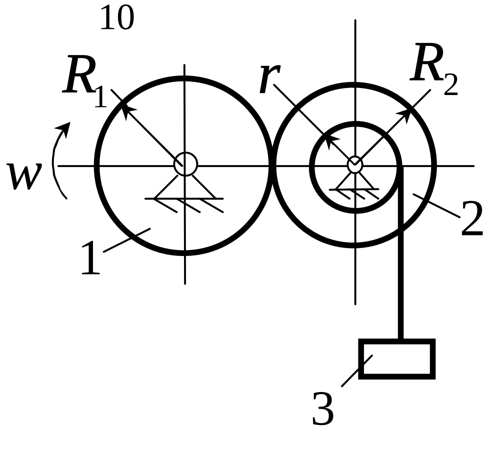
9



Якою повинна бути частота обертання n_1 ($об/хв$) шестерні 1, щоб тіло рухалось зі сталою швидкістю $V = 90\,см/с$, якщо числа зубців шестерень $Z_1 = 26$, $Z_2 = 78$ і радіус барабана $r = 10\,см$.

Відповідь: 258.

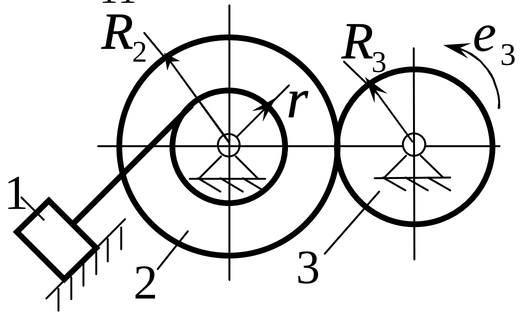
10



Кутова швидкість зубчастого колеса 1 змінюється за законом $w_1 = 2t^2$. Визначити прискорення вантажу 3 в момент часу $t = 2\,с$, якщо радіуси шестерень $R_1 = 1\,м$, $R_2 = 0{,}8\,м$ і радіус барабана $r = 0{,}4\,м$.

Відповідь: 4.

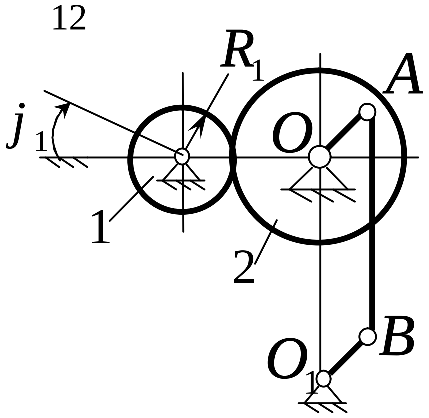
11



Зубчате колесо 3 обертається рівнозмінно з кутовим прискоренням $e_3 = 8 рад/с^2$. Визначити шлях, пройдений вантажем 1 за проміжок часу $t = 3\,с$, якщо радіуси $R_2 = 0{,}8\,м$, $R_3 = 0{,}6\,м$, $r = 0{,}4\,м$. Вантаж 1 з початку руху знаходився в спокою.

Відповідь: $10{,}8\,м$.

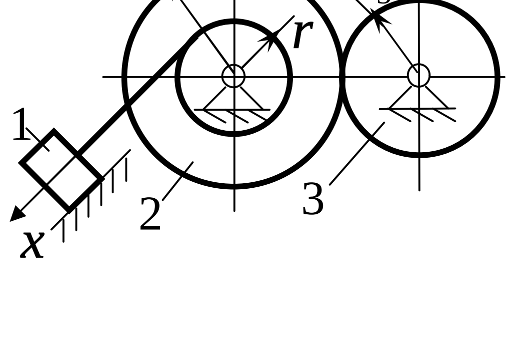
12



Зубчате колесо 1 обертається відповідно до закону $j_1 = 2t^3$. Визначити швидкість точки в момент часу $t = 2\,с$, якщо радіуси коліс $R_1 = 0{,}3\,м$, $R_2 = 0{,}9\,м$, довжина кривошипа $O_1B = OA = 0{,}6\,м$, відстань $OO_1 = AB$.

Відповідь: $4{,}8\,м/с$.

13



Тіло 1 рухається за законом $x = 4t^2 + 4t - 3(см)$. Визначити кутову швидкість колеса 3 в момент часу $t = 2\,с$, якщо радіуси колес $R_2 = 0{,}4\,м$, $R_3 = 0{,}8\,м$, $r_2 = 0{,}2\,м$.

Відповідь: $0{,}5\,c^{-1}$.

3 СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

3.1 Плоскопаралельний рух

Плоскопаралельним (або плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому всі його точки переміщуються паралельно будь-якій фіксованій площині (рис.3.1) .

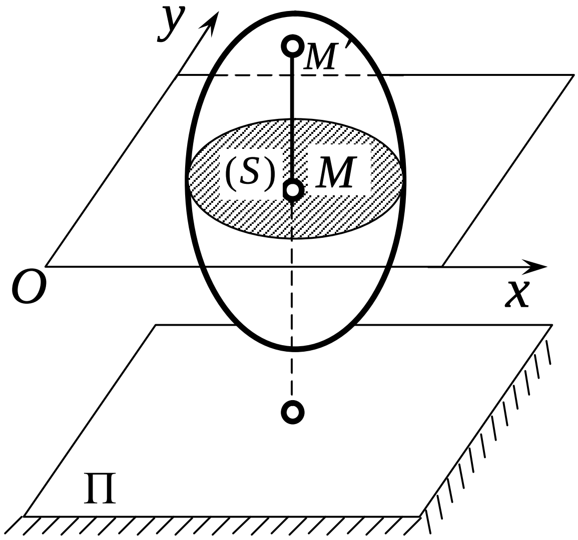


Рисунок 3.1

Плоский рух здійснюють багато частин механізмів і машин, наприклад колесо, яке котиться по поверхні, шатун в кривошипно-повзунному механізмі та інші. Частковим випадком плоскопаралельного руху є обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Розглянемо перетин S тіла якою-небудь площиною Oxy, паралельною площині Π (рис.3.1). При плоскопаралельному рухові всі точки тіла, що лежать на прямій MM', перпендикулярні перетину S, тобто, площині Π, рухаються тотожньо.

Таким чином дістаємо висновку, що для вивчення руху всього тіла достатньо вивчити, як рухається в площині Oxy перетин S цього тіла або деяка плоска фігура S. Тому в подальшому замість плоского руху тіла будемо розглядати рух плоскої фігури S в її площині, тобто в площині Oxy. При цьому всі результати, які будуть отримані для точок плоскої фігури, справедливі і для точок S твердого тіла.

3.1.1 Рівняння руху плоскої фігури

Положення фігури s в площині Oxy визначається положенням якого-небудь проведеного на цій фігурі відрізка AB (рис.3.2). У свою чергу положення відрізка AB можна визначити, знаючи координати x_A, y_A точки A і кут j, який відрізок AB утворює з віссю x.

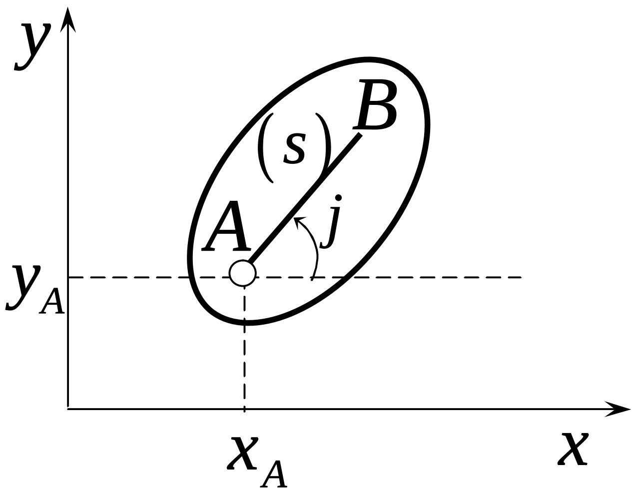


Рисунок 3.2

Точку A, обрану для визначення положення фігури s, будемо далі називати **полюсом**. Під час руху фігури величини x_A, y_A і j будуть змінюватись. Щоб визначити закон руху, тобто положення фігури в площині Oxy в довідьий момент часу, необхідно знати залежності

$$x_A = f_1(t),\ y_A = f_2(t),\ j = f_3(t). \tag{3.1}$$

Рівняння (3.1), які визначають закон здійснюємого руху, називають **рівняннями руху плоскої фігури** в її площині, вони ж є рівняннями **плоскопаралельного руху твердого тіла**.

Перші два рівняння (3.1) визначають той рух, який фігура здійснювала б при $j = const$. Це очевидно, буде поступальний рух, при якому всі точки фігури рухаються так само, як полюс A. Третє рівняння визначає рух, який фігура здійснювала б при $x_A = const$ і $y_A = const$, тобто коли полюс A нерухомий. Це буде обертання фігури навколо полюса A. Звідси можна зробити висновок, що в загальному випадку рух плоскої фігури в її площині можна розглядати як складений із поступального руху, при якому всі точки фігури рухаються так само, як полюс A, і із обертального руху навколо цього полюса.

Основними кінематичними характеристиками такого руху будуть швидкість і прискорення поступального руху, рівні швидкості і прискоренню полюса $\bar{V}_{пост} = \bar{V}_A$, $\bar{a}_{пост} = \bar{a}_A$, а також кутова швидкість w і кутове прискорення e обертального руху навколо полюса. Значення цих характеристик в дудь-який момент часу t можна знайти, скориставшись рівнянням (3.1). При вивченні руху можна в якості полюса обирати будь-яку точку фігури.

Розглянемо приклад розрахунку траєкторії точок плоскої фігури і визначення стану її точок в заданий момент часу на прикладі.

Приклад

Повзуни A і B, до яких прикріплена лінійка еліпсографа (рис.3.3), переміщуються за взаємно перпендикулярними напрямними. Відстань $AB = l$. Визначити траєкторію точки M лінійки.

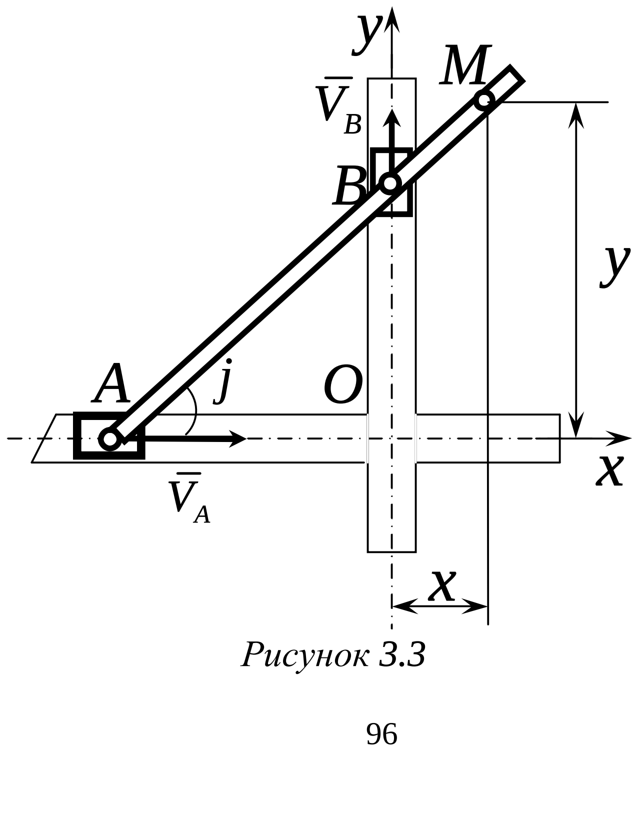


Рисунок 3.3

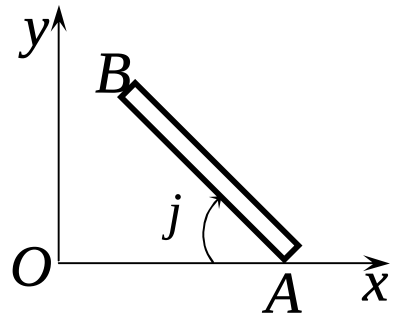
Рішення

Взявши за полюс точку A, будемо визначати положення точки B на лінійці відрізком $AB = b$. Положення самої лінійки задається кутом j. Тоді для координати x і y точки M отримаємо $x = (b - l)cosj$, $y = bsinj$. Виключивши параметр j, знаходимо, що траєкторією точки буде еліпс $\frac{x^2}{(b-l)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ з півосями $a = |b - l|$ і b, і з центром в точці O.

Змінюючи за допомогою відповідних гвинтів відстані l і b можна викреслити олівцем еліпс руху точки M з будь-якими заданими півосями, не більшими за розмір лінійки. Звідси і назва механізму -еліпсограф.

Контрольні завдання для самостійної роботи

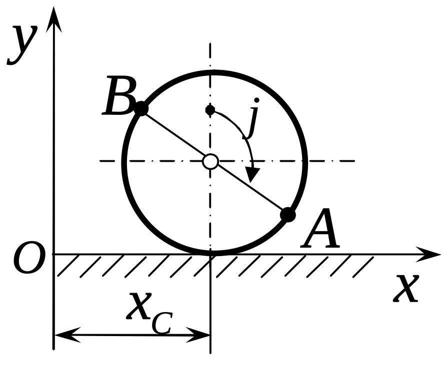
1



Стрижень AB рухається за законом $x_A = 2 + t^2$, $y_A = 0$, $j = 0,25pt$. Визначити абсцису точки B в момент часу $t_1 = 1c$, довжина $AB = 3\ м$.

Відповідь: $0,879\ м$.

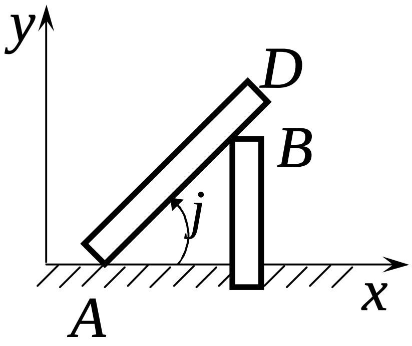
2



Центр колеса, яке котиться прямолінійною ділянкою шляху, рухається за законом $x_C = 0,3t^2$, $y_C = 0,15\ м$. Визначити в момент часу $t_1 = 1c$ ординату точки B, якщо в початку руху пряма AB співпадала с віссю Oy.

Відповідь: $0,212\ м$.

3



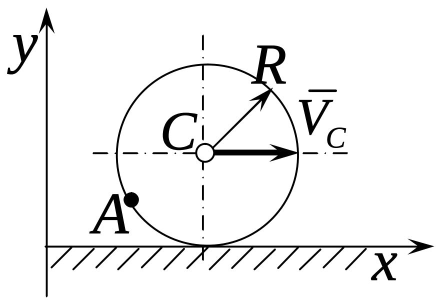
Рух балки AD описується рівняннями $x_A = t^2$, $y_A = 0$,

$$\varphi = \arcsin\left(2 \Big/ \left(4 + \left(3{,}5 - t^2 \right)^2 \right)^{0{,}5} \right).$$

Визначити абсцису точки A в стані балки, коли кут $\varphi = 38^o$.

Відповідь: $0{,}940\ м$.

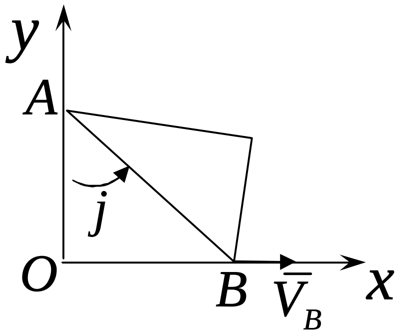
4



Завдяки удару колесо $R = 0{,}2\ м$ котиться зі сталою швидкістю центра $V_C = 0{,}1\ м/с$. Визначити абсцису точки A в момент часу $t_1 = 1\,с$, якщо в момент $t_0 = 0$ точка A знаходилась в початку координат.

Відповідь: $4{,}11 \cdot 10^{-3}\ м$.

5



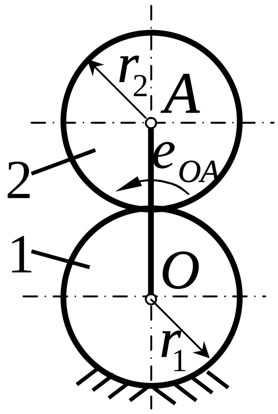
Вершини A і B трикутника під час руху знаходяться відповідно на осях Ox і Oy. Визначити кут φ в момент часу $t_1 = 2\,с$, якщо вершина B із стану $x_B(0) = 2\,м$ почала рухатись зі сталою швидкістю $V_B = 0{,}5\ м/с$, довжина $AB = 4\ м$.

Відповідь: $0{,}846$.

6 Колесо радіуса $R = 10\,см$ котиться прямолінійною ділянкою шляху зі сталим прискоренням центра колеса $a_C = 2p\ см/с$. Визначити скільки обертів здійснило колесо на момент часу $t_1 = 10\,с$, якщо швидкість $V_C(0) = 0$.

Відповідь: 500.

7



Кривошип OA почав рівномірно обертатись із стану спокою з кутовим прискоренням $e_{OA} = 0{,}1p$. Визначити, скільки обертів виконає шестерня 2 за $10\,с$. Радіуси шестерень $r_1 = r_2 = 10\,см$.

Відповідь: 5.

3.1.2 Швидкість точок плоскої фігури

Залежність між швидкостями точок плоскої фігури встановлюється наступною теоремою: швидкість довільної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюсу та обертальної швидкості цієї точки навколо полюсу.

Точку O, швидкість якої $\overline{V}_O$, оберемо полюсом. Визначимо швидкість будь-якою іншої точки плоскої фігури.

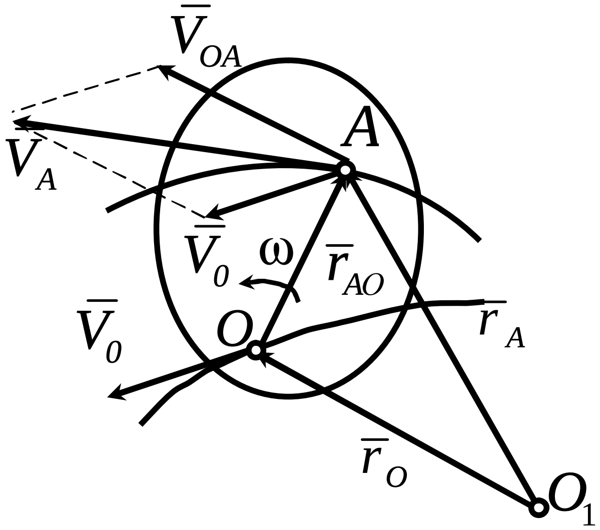


Рисунок 3.4

Для цього (рис. 3.4) проведемо із нерухомої точки площини O_1 до точок O і A радіус-вектори $\overline{r}_O$ і $\overline{r}_A$. Проведемо також радіус-вектор точки A $\overline{r}_{AO}$ із полюса O. Оскільки цей радіус-вектор з'єднує дві точки плоскої фігури, то за весь час руху він обертається навколо полюса з кутовою швидкістю плоскої фігури w, не змінюючись за модулем. Під час руху між радіус-векторами зберігається залежність:

$$\overline{r}_A = \overline{r}_O + \overline{r}_{AO},$$

де модуль $r_{AO} = const$.

Визначимо звідси швидкість точки A:

$$\overline{V}_A = \frac{d\,\overline{r}_A}{dt} = \frac{d\,\overline{r}_O}{dt} + \frac{d\overline{r}_{AO}}{dt},$$

де $\dfrac{d\,\overline{r_O}}{dt} = \overline{V}_O$ - швидкість полюса O.

Оскільки під час руху плоскої фігури модуль радіус-вектора $\overline{r}_{OA}$ залишається незмінним, а напрямок його при обертанні фігури змінюється, то похідна $\dfrac{d\overline{r}_{AO}}{dt}$ є обертальною швидкістю точки A навколо полюса O, яку позначимо $\overline{V}_{AO}$:

$$\frac{d\overline{r}_{OA}}{dt} = \overline{V}_{AO}.$$

Обертальну швидкість $\overline{V}_{AO}$ можна зобразити у вигляді векторного добутку вектора кутової швидкості плоскої фігури $\overline{w}$ на радіус-вектор $\overline{r}_{OA}$:

$$\overline{V}_{OA} = \overline{w} \times \overline{r}_{AO}.$$

Обертальна швидкість $\overline{V}_{OA}$ напрямлена перпендикулярно до відрізку OA, в сторону обертання фігури, і має модуль

$$V_{AO} = OA \cdot w.$$

Після підстановки отримуємо

$$\overline{V}_A = \overline{V}_O + \overline{V}_{AO} \tag{3.1}$$

або

$$\overline{V}_A = \overline{V}_O + \overline{w} \times \overline{r}_{AO}. \tag{3.2}$$

Швидкість точки A зображується діагоналлю паралелограма, відбудованого при точці A на швидкості полюса O (рис. 3.4).

Висновок 1. Проекції швидкостей точок плоскої фігури на вісь, що проходить через ці точки, рівні.

Вважатимемо, що в заданий момент часу відома швидкість $\bar{V}_A$ точки A плоскої фігури, напрям її обертання і модуль кутової швидкості фігури w (рис. 3.5).

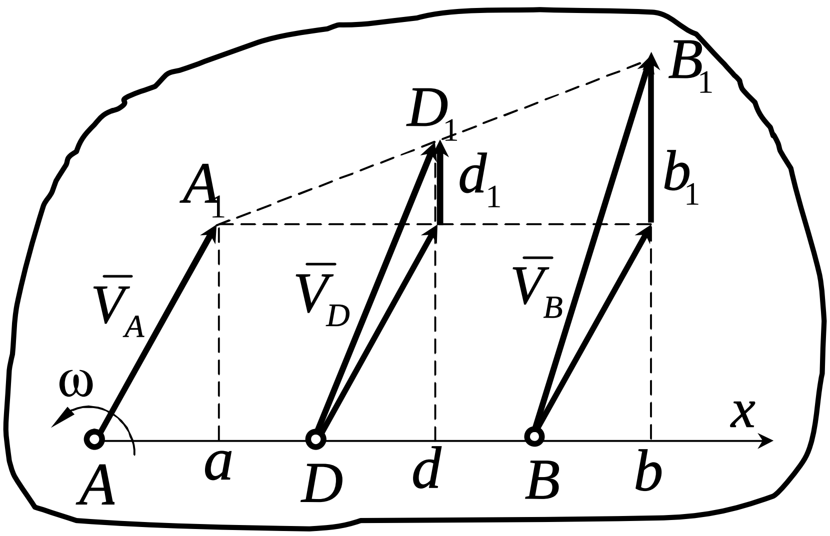


Рисунок 3.5

Оберемо точку A в якості полюса, визначимо швидкості точок B і D плоскої фігури, лежачих на одній прямій з точкою A:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \quad \bar{V}_D = \bar{V}_A + \bar{V}_{DA},$$

причому обертальні швидкості цих точок навколо полюса A $\bar{V}_{BA} = \overline{b_1 B_1}$ і $\bar{V}_{DA} = \overline{d_1 D_1}$, напрямлені перпендикулярно до відрізків AB і AD в сторону оберту фігури.

Проведемо вісь x через точки A, D і B і спроектуємо швидкості цих точок на вісь x. Тоді

$$V_{Bx} = V_{Ax} + V_{BAx}, \quad V_{Dx} = V_{Ax} + V_{DAx},$$

але $V_{BAx} = 0$ і $V_{DAx} = 0$, так як вектори V_{BA} і V_{DA} перпендикулярні да осі x. Тому

$$V_{Bx} = V_{Ax}\,;\; Bb = Aa\,,$$

$$V_{Dx} = V_{Ax}\,;\; Dd = Aa\,,$$

або

$$Aa = Bb = Dd\,.$$

Тобто проекції швидкостей всіх точок відрізка AB на вісь x, направлені вздовж цього відрізка, рівні поміж собою.

3.1.3 Миттєвий центр швидкостей

Висновок 2. У загальному випадку для плоскої фігури існує така точка, швидкість якої дорівнює нулю. Така точка називається миттєвим центром швидкостей і швидкості всіх точок розподіляються відносно неї як при простому обертанні.

Припустимо, що плоска фігура має дві точки A і B, швидкість яких відома (рис. 3.6). Відповідно до висновку 1 відрізки на прямій AB :

$$Aa = Bb\,.$$

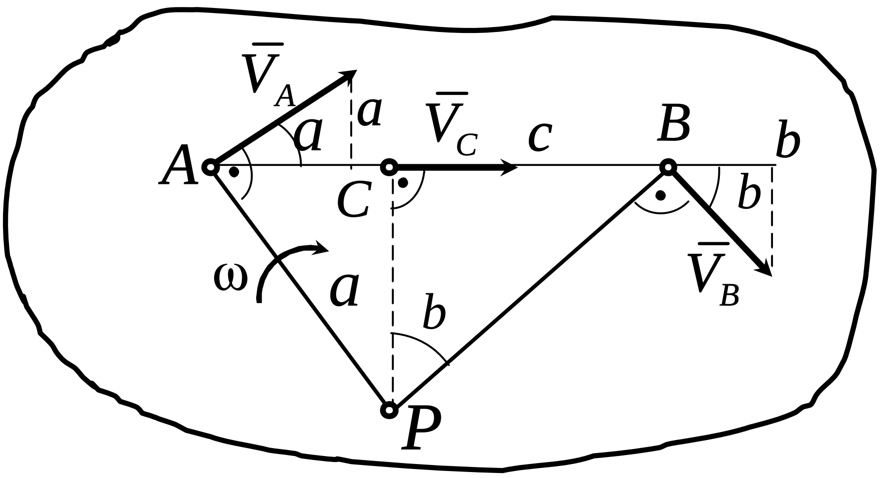


Рисунок 3.6

Проведемо перпендикуляри до векторів швидкостей точок A і B ($\bar{V}_A$ і $\bar{V}_B$). Отримана точка перепеRетину цих перпендикулярів - P і є миттєвим центром швидкостей, оскільки вона задовольняє висновку 1, бо

$$Aa = V_A cosa \text{ ,} \quad Bb = V_B cosb \text{ .}$$

Тоді
$$V_A cosa = V_B cosb \text{ ,}$$

де

$$V_A = wAP \text{ ,} \quad V_B = wBP \text{ .}$$

Підставимо ці значення в попереднє рівняння:

$$wAPcosa = wBPcosb \text{ ,}$$

або
$$wAPcosa = wBPcosb = wCP \text{ .}$$

Точка P є миттєвим центром швидкостей, отже і швидкість точки C:

$$V_c = wCP$$

відповідає умові

$$Aa = Bb = Cc \text{ ,}$$

тобто виконується висновок 1.

Наведені висновки спрощують визначення швидкостей точок, або кутові швидкості плоского руху тіла.

При знаходженні миттевого центру швидкостей (МЦШ) може виникнути ситуація, коли перпендикуляри до швидкостей точок співпадають. У такому випадку необхідно провести додаткову побудову. Наведемо такі приклади на рис. 3.7 і рис 3.8.

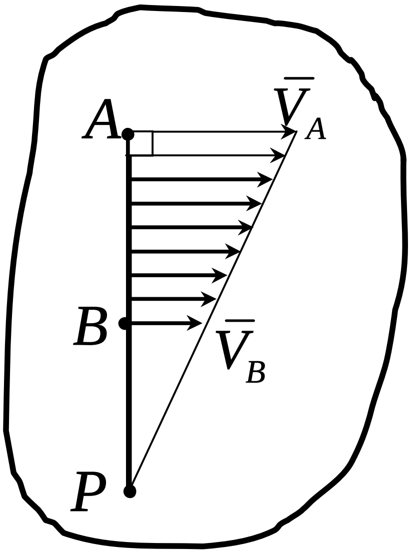


Рисунок 3.7

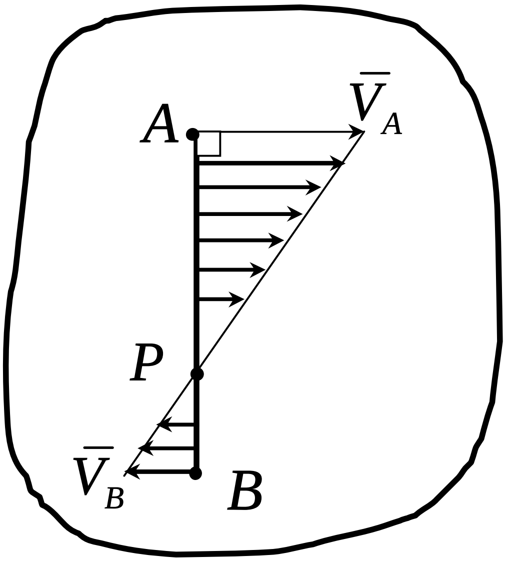


Рисунок 3.8

Випадок, при якому швидкості як вектори паралельні між собою і перпендикуляри, проведені до них, не перетинаються, залишаються паралельними один одному (рис. 3.9), називається миттевим поступальним рухом. Це означає, що в даний момент часу всі точки тіла мають однакові за модулем і напрямком швидкості. Кутова швидкість $w = 0$, оскільки МЦШ знаходиться у нескінченності і $w = \dfrac{V_A}{\infty} = \dfrac{V_B}{\infty} = ... = 0$.

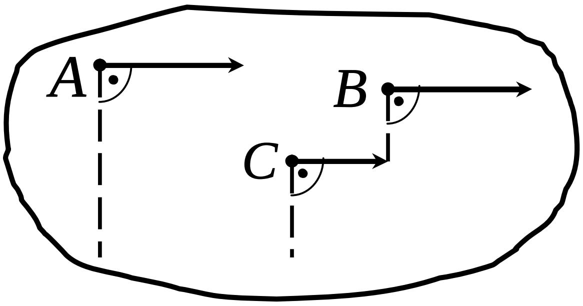


Рисунок 3.9

Проте, хоч при звичайному поступальному русі не тільки швидкості, а й прискорення є однаковими, при миттевому поступальному русі прискорення у загальному вигляді відрізняються.

3.1.4 Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Наведемо приклади розв’язку задач для визначення швидкостей при плоскому русі тіла.

Приклад 1

Колесо радіусом R (рис. 3.10) котиться прямою лінією, маючи в данний момент часу швидкість центра $\bar{V}_O$ і кутову швидкість w. Визначити у цей момент часу швидкості точок M, P і N, розташованих на кінцях вертикального і горизонтального діаметрів.

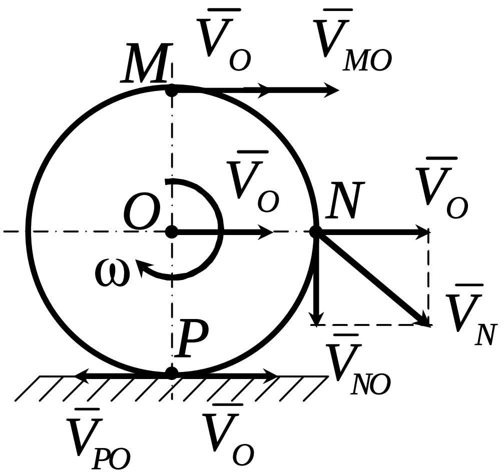


Рисунок 3.10

Рішення

Для точки M швидкості $\bar{V}_{MO}$ і $\bar{V}_O$ мають однаковий напрямок. Отже,

$$V_M = V_O + V_{MO},$$

де
$$V_{MO} = w \cdot OM = wR.$$

Для точки P швидкості $\bar{V}_{PO}$ і $\bar{V}_O$ протилежні за напрямком, тому

$$V_P = V_O - V_{PO},$$

причому $$V_{PO} = w \cdot OP = wR.$$

При коченні колеса прямою лінією без ковзання швидкість точки P дорівнює нулю і, таким чином, в цьому випадку швидкість центра $\bar{V}_O$ і кутова швидкість w пов'язані співвідношенням

$$V_O = V_{PO} = wR.$$

У тому випадку, коли колесо котиться без ковзання, точка P, що дотинається поверхні кочення, є миттєвим центром швидкостей.

$$w = \frac{V_{PO}}{OP} = \frac{V_O}{R}.$$

У точці N швидкості $\bar{V}_{NO}$ і $\bar{V}_O$ взаємно перпендикулярні. Отже,

$$V_N = \sqrt{V_O^2 + V_{MO}^2},$$

де $$V_{NO} = w \cdot ON = wR.$$

Відмітимо, що при коченні колеса прямою лінією без ковзання швидкості точок обода колеса не спрямовані за дотичною до ободу, за виключенням верхньої точки M. В цьому випадку точка P, як було сказано раніше, є миттєвим центром швидкостей. Тому напрями всіх точок тіла зручно розраховувати через точку P, тобто миттєвий центр швидкостей. Цей випадок розглянемо в наступному прикладі.

Приклад 2

Колесо радіусом R (рис. 3.11) котиться без ковзання по прямій рейці, швидкість центра колеса $V_C = 2 м/с$. Знайти швидкості точок $B, D, E.$

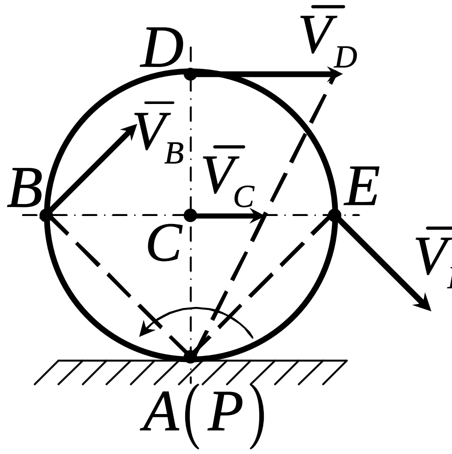


Рисунок 3.11

Рішення

Візьмемо миттєвий центр швидкостей P (співпадає з точкою A) за полюс. Тоді швидкості всіх точок визначаються як обертальні швидкості навколо МЦШ. Модулі швидкостей всіх точок знайдемо із пропорційності швидкостей точок їх відстанням до МЦШ.

$$V_D = V_C \frac{PD}{PC} = V_C \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

Оскільки $$PB = PE = R\sqrt{2},$$

то

$$V_B = V_C \frac{PB}{PC} = V_C \cdot \sqrt{2} = 2{,}82 \text{ м/с},$$

$$V_E = V_C \frac{PE}{PC} = V_C \cdot \sqrt{2} = 2{,}82 \text{ м/с}.$$

Знайдені швидкості точок спрямовані перпендикулярно відповідним відрізкам в бік обертання колеса (рис. 3.11).

Аналогічне розподілення швидкостей має місце при коченні колеса без ковзання будь-якою поверхнею.

Приклад 3

Кривошип OC обертається навколо осі O з кутовою швидкістю $w_{OC} = 5c^{-1}$ і викликає рух рухомої шестерні радіуса $r_2 = 8\,см$, насаджену вільно на його кінці C (рис 3.12). Рухома шестерня котиться без ковзання по внутрішній нерухомій шестерні радіусом $r_1 = 24\,см$. Визначити модулі і напрямки швидкостей точок A, B, D і E рухомої шестерні, якщо $BE \perp AD$, а також її кутову швидкість.

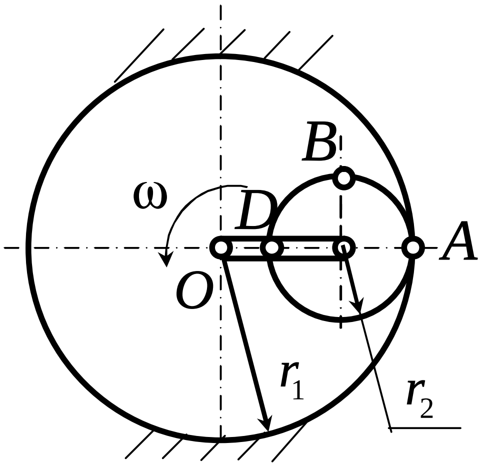


Рисунок 3.12

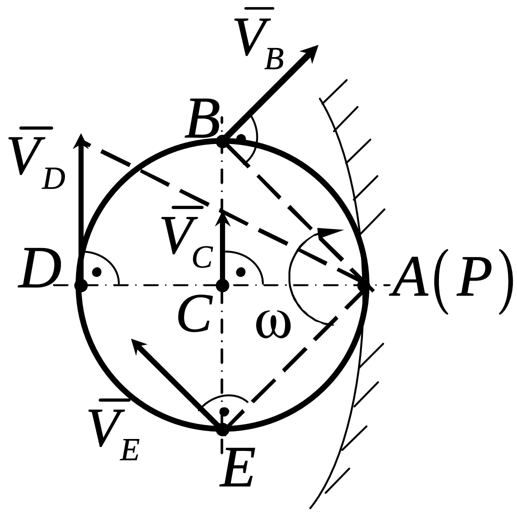


Рисунок 3.13

Рішення

Друга шестерня котиться внутрішньою поверхнею нерухомої шестерні без ковзання і тому миттєвий центр швидкостей другої шестерні знаходиться в точці їх дотику. Тому $V_A = 0$ (рис. 3.13).

Знаючи кутову швидкість кривошипа OC, визначимо швидкість центра другої шестерні за модулем і напрямком ($V_C \perp OC$):

$$V_C = OC \cdot w_{OC} = \left(r_1 - r_2\right) w_{OC} = 16 \cdot 5 = 80\,см/с\,.$$

З’єднавши точки B і E з миттєвим центром швидкостей, знаходимо

$$PB = PE = r_2\sqrt{2}\ .$$

Знаючи швидкість центра другої шестерні $V_C = 80\,см/с$ і відстані від точок B, D і E до МЦШ, визначимо їх швидкості:

$$V_B = V_C\,\frac{PB}{PC} = V_C\sqrt{2} = 113{,}12\ см/с\ ,$$

$$V_D = V_C\,\frac{PD}{PC} = V_C \cdot 2 = 160\ см/с\ ,$$

$$V_E = V_C\,\frac{PE}{PC} = V_C\sqrt{2} = 113{,}12\ см/с\ .$$

Знайдені швидкості точок спрямовані перпендикулярно до відповідних відрізків PB, PD, PE в бік обертання шестерні навколо МЦШ.

Наприклад

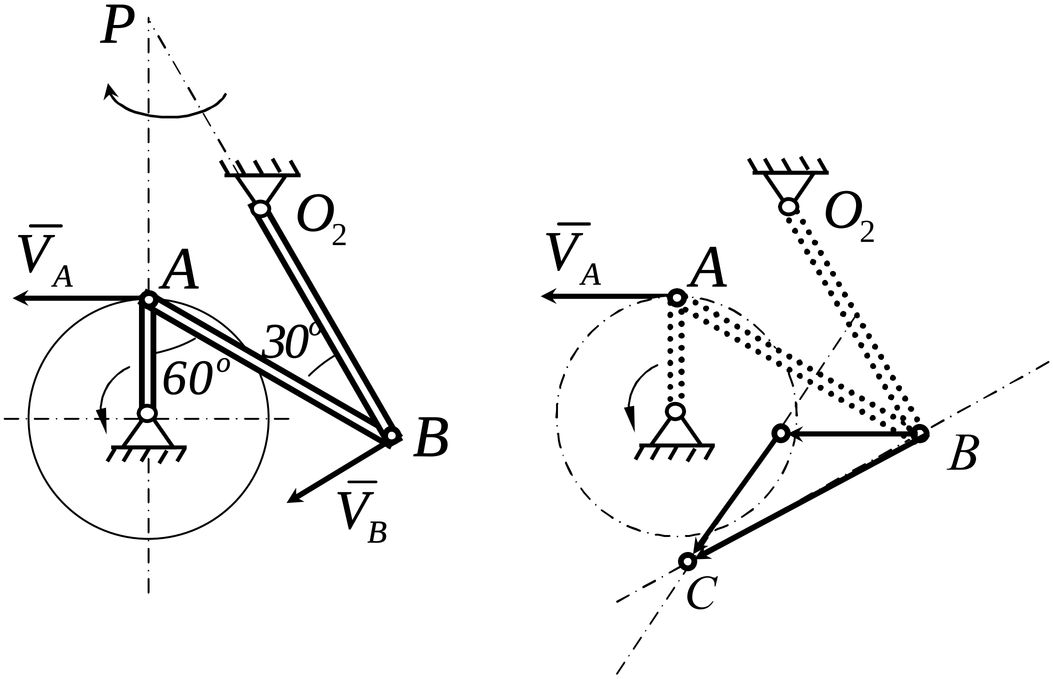
$$V_C = PC \cdot w\ ,$$

звідси визначаємо кутову швидкість другої шестерні:

$$w = \frac{V_C}{PC} = \frac{V_C}{r_2} = \frac{80}{8} = 10\,c^{-1}\ .$$

Приклад 4

Кривошип $O_1A = 20\,см$ здійснює $120\,об/хв$ і за допомогою ланки $AB = 100\,см$ викликає рух стрижня $O_2B = 60\,см$, закріплений шарнірно в точці O_2. Визначити кутову швидкість стрижня AB і кутову швидкість стрижня O_2B в момент, коли кривошип O_1A займе вертикальне положення, якщо відомо, що в цей момент ланка AB утворює з вертикаллю $\angle O_1AB = 60^o$ і $\angle ABO_2 = 30^o$ (рис. 3.14).



а **б**

Рисунок 3.14

Рішення

1-й спосіб. Даний механізм складається з трьох частин: кривошипа O_1A, який обертається навколо вісі O_1 з кутовою швидкістю

$$w = \frac{p\,n}{30} = 4p\ c^{-1}.$$

стрижня O_2B, що обертається навколо вісі O_2 та стрижня AB, що рухається у площині рисунка.

Знайдемо швидкість точки A. Вектор $\bar{V}_A$ перпендикулярний до радіуса обертання O_1A і за модулем дорівнює

$$V_A = wO_1A = 4p\,20 = 80p\ см/с\ .$$

Далі розглянемо точку B. Вона належить ланці O_2B, яка обертається навколо нерухомої точки O_2, отже швидкість точки B перпендикулярна до O_2B. Приймаючи точку A за полюс, за теоремою про додавання швидкостей при плоскому русі, маємо:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}\ ,$$

притому

$$\bar{V}_{BA} \perp \overline{AB} \text{ і } \bar{V}_{BA} = w_1 AB\ .$$

На підставі цієї векторної рівності будуємо трикутник швидкостей. Для цього в точці B будуємо вектор $\overline{BA_1} = \bar{V}_A$ і пряму, перпендикулярну до O_2B, а із точки A_1 - пряму, перпендикулярну до AB, до їх взаємного перетину в точці C. Тоді $\bar{V}_B = \overline{BC}$, $\bar{V}_{BA} = \overline{A_1C}$, причому $\angle A_1BC = \angle BCA_1 = 30^o$.

Отже,

$$V_{BA} = V_A = 80\ см/с$$

$$V_B = 2V_A cos30^o = V_A\sqrt{3} = 80p\sqrt{3}\ см/с\ .$$

Тепер, знаючи швидкості V_B і V_{BA}, знаходимо кутові швидкості w_1 і w_2 стрижнів AB і a_2B:

$$w_2 = \frac{V_B}{O_2B} = \frac{80p\sqrt{3}}{60} = \frac{4p\sqrt{3}}{3}c^{-1},$$

$$w_1 = \frac{V_{AB}}{AB} = \frac{80p}{100} = 0{,}8p\ c^{-1}.$$

Якщо в даній задачі не було б необхідності знаходити кутову швидкість ланки AB, то швидкість точки B простіше було б знайти за теоремою про проекції швидкостей точок A і B на пряму AB. Цією теоремою зручно користуватись в тих випадках, коли задані напрямлення швидкостей двох точок фігури і модуль однієї є цих швидкостей.

2-й спосіб. Знаходимо миттєвий центр P ланки AB як точку перетинання прямих O_1A і O_2B, перпендикулярних до швидкостей $\bar{V}_A$ і $\bar{V}_B$. Так як швидкості точок ланки AB пропорційні їх відстаням від МЦШ цієї ланки, то

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{PA}{PB},$$

звідси

$$V_B = V_A\frac{PB}{PA}.$$

Із трикутника ABP маємо:

$$\frac{PB}{PA}=\frac{sin120^o}{sin30^o}=\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 1}=\sqrt{3}.$$

Отже,

$$V_B = V_A\sqrt{3}.$$

$$w_2 = \frac{V_B}{O_2B}=\frac{V_A\sqrt{3}}{O_2B}=\frac{40\sqrt{3}}{3}c^{-1}.$$

Кутову швидкість ланки AB знайдемо за формулою

$$w_1 = \frac{V_A}{AP}=\frac{V_A}{AB}=\frac{80p}{100}=0,8p\ c^{-1}.$$

Швидкості точок плоского механізму можна також визначати графічно за допомогою **плану швидкостей**. З цією метою для пошуку швидкості точки B (рис. 3.14) записуються відповідно до теореми про складання швидкостей при плоскому рухові тіла два векторних рівняння для точки (в даному випадку це точка B), відносно якої звісні швидкості сусідніх точок або із умов задачі (як у даному випадку швидкості точок A і O_2 задані умовою задачі), або із умов попередньої відбудови плану швидкостей. Попередньо перед відбудовою плану швидкостей обирається масштаб швидкостей (m_V - $\frac{см/с}{см}$, або $\frac{мм/с}{см}$).

Звернемось до рис. 3.14 і запишемо векторні рівняння для пошуку швидкості точки $B\left(\bar{V}_B\right)$ на плані швидкостей:

$$\bar{V}_B=\bar{V}_A+\bar{V}_{BA},$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_{O_2} + \bar{V}_{BO_2} \,.$$

З першого рівняння в масштабі з любої точки (на рис. 3.15 позначена O) відкладається вектор швидкості точки A, швидкість якої відома як за модулем, так і за напрямком із умов задачі.

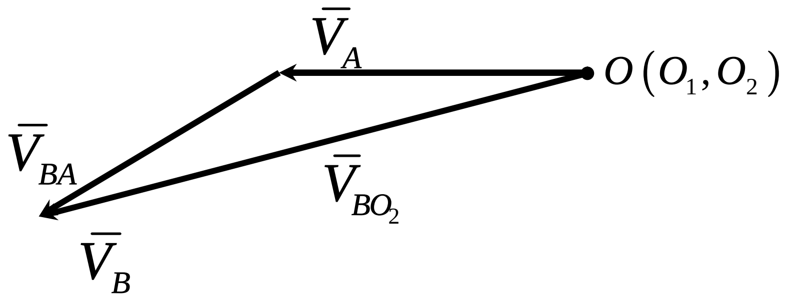


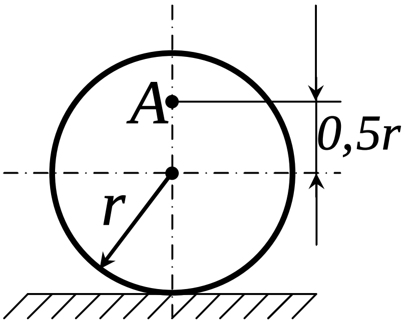
Рисунок 3.15

До кінця вектора $\bar{V}_A$ додається відповідно до першого рівняння $\bar{V}_{BA}$, який звісний поки лише за напрямом ($\bar{V}_{BA} \perp BA$).

Переходимо до другого векторного рівняння. У цьому рівнянні $\bar{V}_{O_2} = 0$, бо точка O_2 нерухома з умови задачі. Точки O_2 і O_1 знаходяться в точці O, яка з'являється початком відліку. Тоді до вектора $\bar{V}_{O_2}$, що знаходиться в точці O, додаємо прямую, за якою напрямлений вектор $\bar{V}_{BO_2}$, тобто перпендикулярно BO_2. Перетинання двох прямих $\bar{V}_{BA}$ і $\bar{V}_{BO_2}$ позначає шукану точку $B\left(\bar{V}_B\right)$ на плані швидкостей.

Контрольні завдання для самостійної роботи

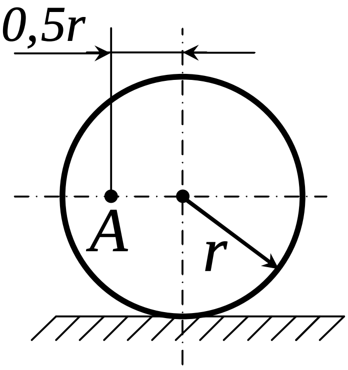
1



Визначити кутову швидкість колеса, якщо точка A має швидкість $V_A = 10\ м/с$, а радіус колеса $r = 0{,}2\ м$.

Відповідь: $33{,}3\ c^{-1}$.

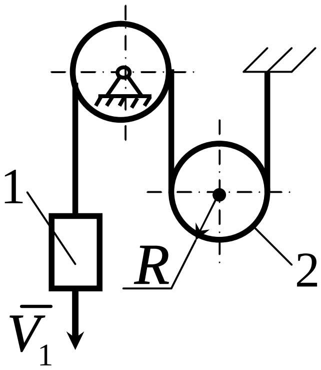
2



Визначити кутову швидкість колеса, якщо точка A має швидкість $V_A = 2\ м/с$, а радіус колеса $r = 1\ м$.

Відповідь: $1{,}79\ c^{-1}$.

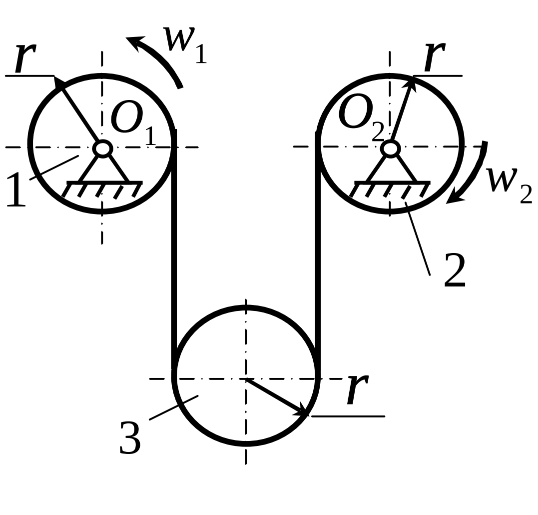
3



Швидкість вантажу 1 $V = 0{,}5\ м/с$. Визначити кутову швидкість рухомого блока 2, якщо його радіус $R = 0{,}1\ м$.

Відповідь: $2{,}5\ c^{-1}$.

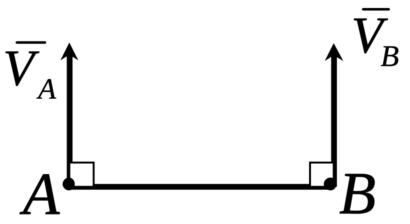
4



Блоки 1 і 2 обертаються навколо нерухомих осів O_1 і O_2 з кутовими швидкостями $w_1 = 4 рад/с$ і $w_2 = 8 рад/с$. Визначити кутову швидкість рухомого блока 3. Радіуси блоків однакові $r = 10\ см$.

Відповідь: $2 рад/с$.

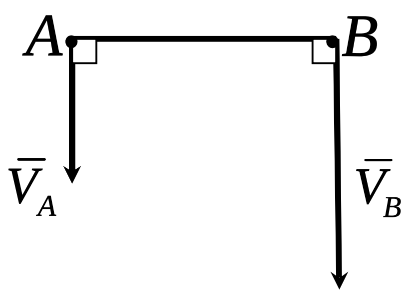
5



Стрижень AB довжиною $60\,см$ рухається в площині рисунка. У деякий момент часу точки A і B стрижня мають швидкості $V_A = V_B = 0{,}5\ м/с$. Визначити модуль миттєвої швидкості стрижня.

Відповідь: 0.

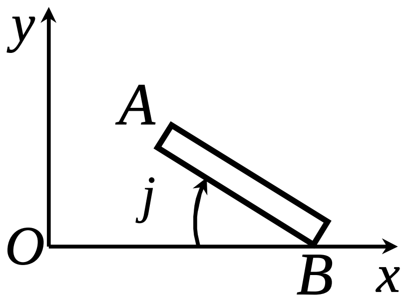
6



Стрижень AB довжиною $80\,см$ рухається в площині рисунка. В деякий момент часу точки A і B стрижня мають швидкості $V_A = 0{,}2\ м/с$, $V_B = 0{,}6\ м/с$. Визначити кутову швидкість стрижня.

Відповідь: $0{,}5$.

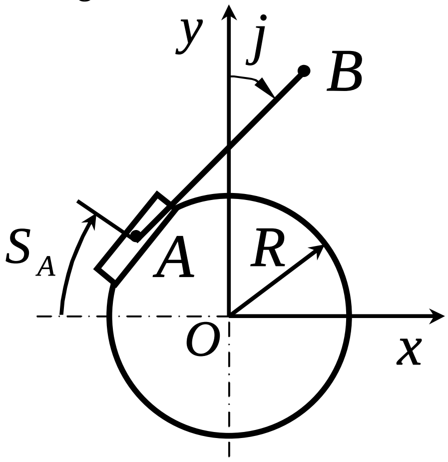
7



Стрижень AB довжиною $2\ м$ рухається в площині рисунка Oxy відповідно до рівняння $y_B = 0$, $x_B = 4cos0{,}5pt$, $j = 0{,}5pt$. Визначити в момент часу $t_1 = 0{,}5\ с$ проекцію вектора швидкості точки A на вісь Ox.

Відповідь: $-2{,}22\ м/с$.

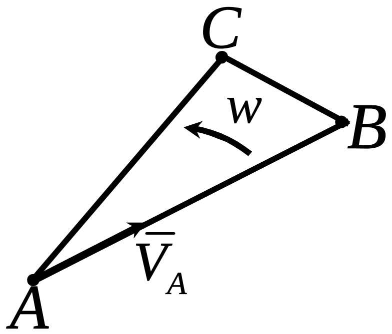
8



Точка стрижня AB переміщується колом радіуса $R = 1\,м$ відповідно до закону $1{,}05t$. Одночасно стрижень обертається відповідно до закону $j = t$. У момент часу $t_1 = 1\,с$ визначити проекцію швидкості точки B на вісь Oy, якщо довжина $AB = 1\,м$.

Відповідь: $-0{,}319\ м/с$.

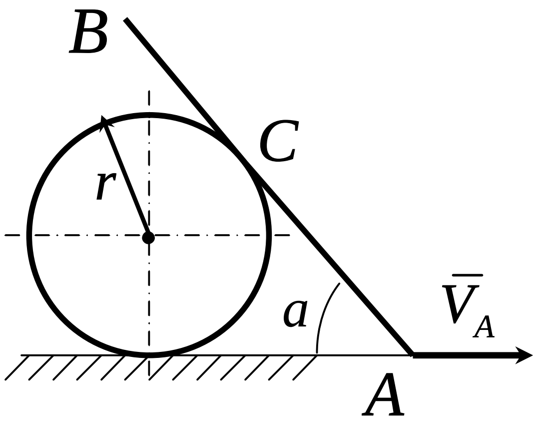
9



Швидкість точки A плоскої фігури ABC $V_A = 2\ м/с$, кутова швидкість фігури $w = 2рад/с$, відстань $AB = 1{,}5\ м$. Визначити швидкість точки B.

Відповідь: $3{,}61\ м/с$.

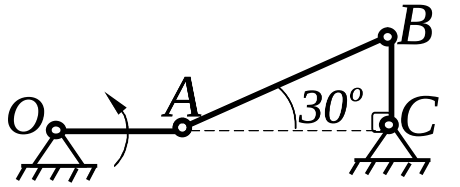
10



Стрижень AB рухається в вертикальній площині так, що його кінець A сковзає по горизонтальній прямій зі швидкістю $V_A = 0{,}2\ м/с$, а в точці C сковзає по диску радіуса r. Визначити швидкість точки C стрижня в стані, коли кут $a = 45^o$.

Відповідь: $0{,}141\ м/с$.

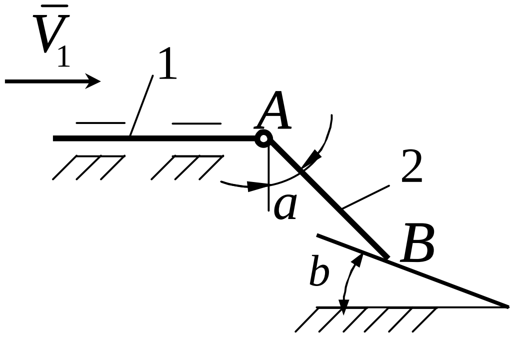
11



Для заданого положення триланника визначити швидкість точки B, якщо точка A має швидкість $1\ м/с$.

Відповідь: $0{,}577\ м/с$.

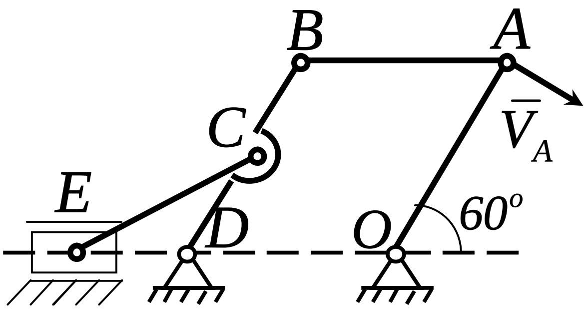
12



Стрижень 1 в точці A шарнірно з'єднаний зі стрижнем 2, який в точці B ковзає по похилій площині. Визначити швидкість точки B стрижня 2 в положенні, коли кути $a = b = 30^o$ і швидкість V_1 стрижня 1 дорівнює $0{,}6\ м/с$.

Відповідь: $0{,}346\ м/с$.

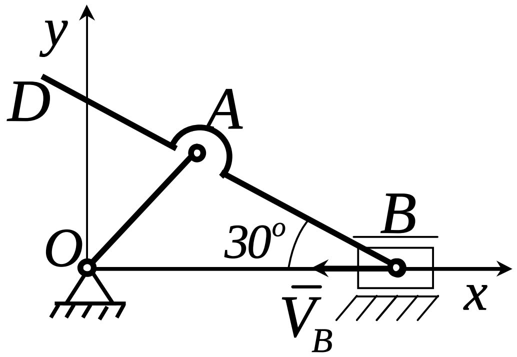
13.



До шарнірного паралелограму $OABD$ в точці C шарнірно приєднаний шатун CE. Для заданого положення механізму визначити швидкість точки E повзуна, якщо довжина $OA = BD = 20\,см$, $BC = 0{,}5BD$ і швидкість точки A дорівнює $0{,}4\ м/с$.

Відповідь: $0{,}115\ м/с$.

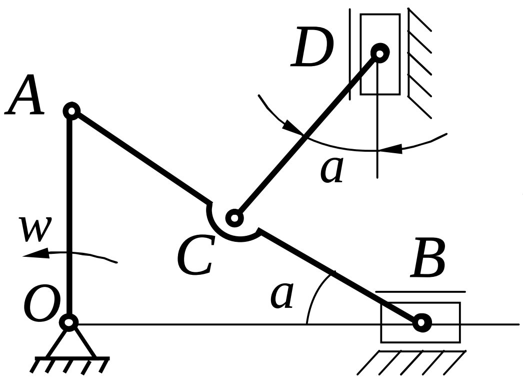
14



Для заданого положення механізму визначити миттєву кутову швидкість шатуна AB, якщо точка B має швидкість $V_B = 0{,}4$ *м/с*, довжина шатуна $BD = 0{,}5$ *м*, а вектор швидкості точки D на вісь Ox має проекцію $V_{Dx} = 0{,}2$ *м/с*.

Відповідь: *2,4* .

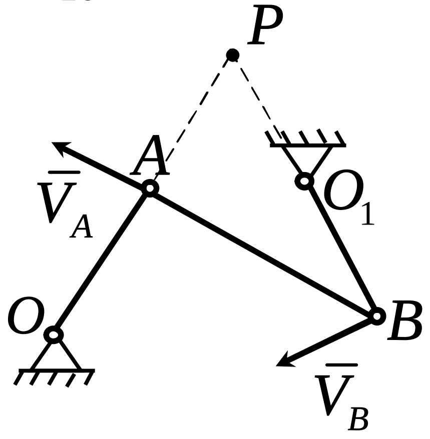
15



Кривошип OA довжиною *0,2м* обертається рівномірно з кутовою швидкістю $w = 8c^{-1}$. До шатуна AB в точці C шарнірно прикріплений шатун CD. Для заданого положення механізму визначити швидкість точки D повзуна, якщо кут $a = 20^o$.

Відповідь: *0,582 м/с* .

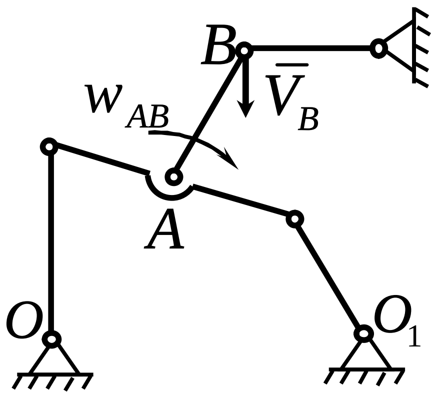
16



У заданому положенні механізму точка P є миттєвим центром швидкостей ланки AB. Визначити відстань BP, якщо швидкість точок A і B дорівнює відповідно $V_A = 10$ *м/с*, $V_B = 15$ *м/с*, а відстань $AP = 60$ *см*.

Відповідь: *0,9* .

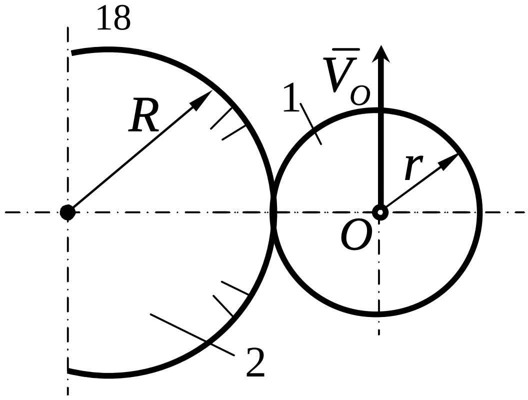
17



У даний момент часу швидкість точки B рівна $20\ м/с$, а кутова швидкість ланки AB дорівнює $10\ рад/с$. Визначити відстань від точки B до кутового центра швидкостей ланки AB.

Відповідь: $2\ м$.

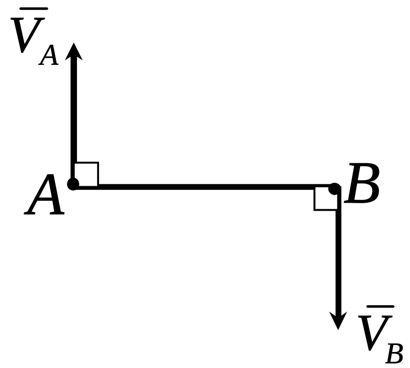
18



Циліндр радіуса $r = 13\,см$ котиться по нерухомому циліндру 2 радіуса $R = 20\,см$. Визначити відстань від центра O до його миттєвого центра швидкостей.

Відповідь: $0{,}13\ см$.

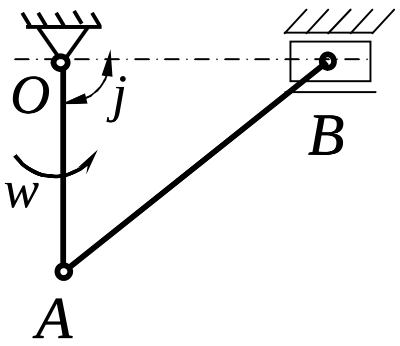
19



Стрижень AB довжиною $60\,см$ рухається в площині рисунка. У деякий момент часу точки A і B стрижня мають швидкості $V_A = 4\ м/с$, $V_B = 2\ м/с$. Визначити відстань від миттєвого центра швидкостей до точки A.

Відповідь: $0{,}4\ м$.

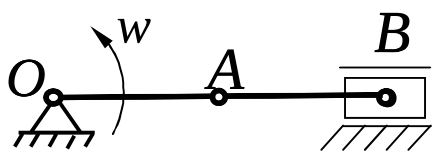
20



Кривошип OA механізму, обертаючись рівномірно, утворює в даний момент часу з напрямком OB кут $j = 90^o$. Визначити відстань від миттєвого центра швидкостей шатуна AB до повзуна B.

Відповідь: ∞.

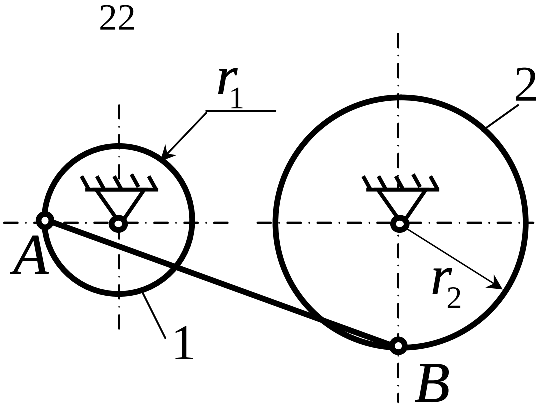
21



Кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю w. Визначити відстань від точки A до миттєвого центра швидкостей шатуна AB, якщо довжина кривошипа $OA = 8\,см$, а довжина шатуна $AB = 16\,см$.

Відповідь: $0{,}16\ м$.

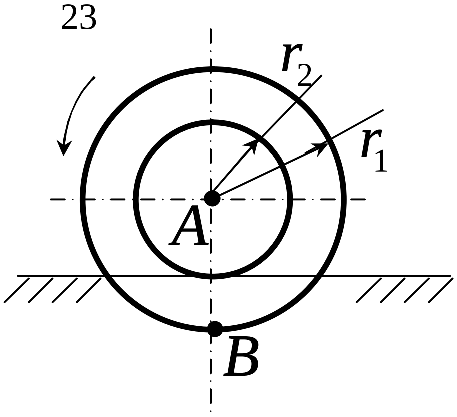
22



Шківи 1 та 2 шарнірно з’єднані штангою AB. Для положення, показаного на рисунку, визначити відстань від точки B до миттєвого центра швидкостей штанги, якщо $r_1 = 0{,}2\ м$, $r_2 = 0{,}5\ м$.

Відповідь: $0{,}5$.

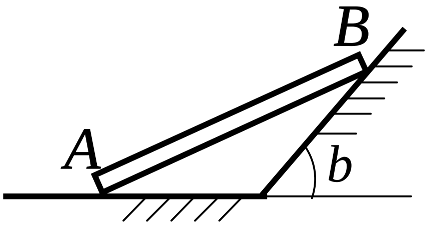
23



Швидкість центра A ступінчатого колеса $V_A = 2\ м/с$, радіуси $r_1 = 0,6\ м$, $r_2 = 0,5\ м$. Визначити швидкість точки B.

Відповідь: $0,4\ м/с$.

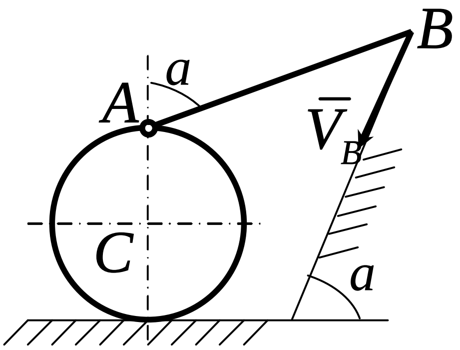
24



Брус AB ковзає, спираючись кінцями на горизонтальну і нахилену площини. При якому значенні в градусах кута між брусом і горизонтальною площиною модулі швидкостей його кінців будуть однаковими, якщо кут $b = 60^o$.

Відповідь: 30^o.

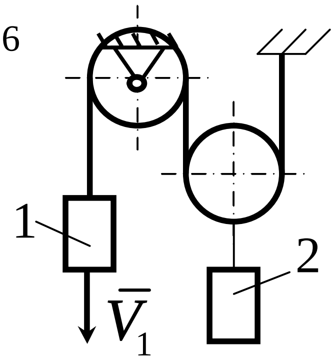
25



Кінець B стрижня AB ковзає зі швидкістю $V_B = 1\ м/с$ по нахиленій площині. Другий кінець A шарнірно з’єднаний з роликом, який котиться без ковзання. Визначити швидкість центра C ролика, якщо кут $a = 60^o$.

Відповідь: $0,5\ м/с$.

26

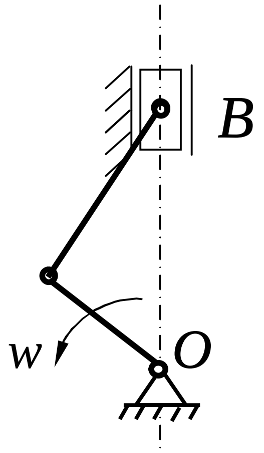


Швидкість вантажу 1 $V_B = 0,5\ м/с$.

Визначити швидкість вантажу 2.

Відповідь: $0,25\ м/с$.

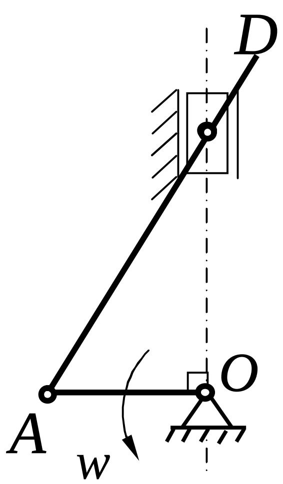
27



Частота обертання колінчатого вала двигуна $4200\ об/хв$. Визначити швидкість руху поршня B, якщо в даний момент часу миттєвий центр швидкостей шатуна AB знаходиться на відстанях $AP = 0{,}18\ м$, $BP = 0{,}10\ м$. Довжина кривошипа $OA = 0{,}04\ м$.

Відповідь: $9{,}77\ м/с$.

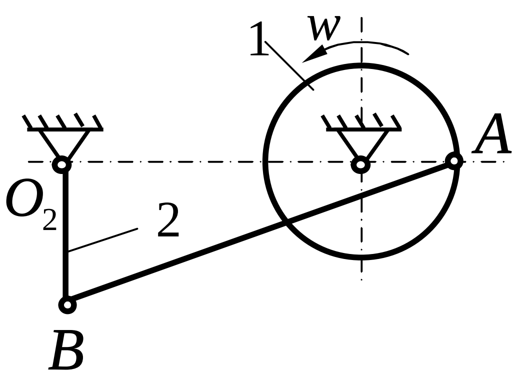
28



Визначити кутову швидкість кривошипа OA кривошипно-повзунного механізму в указаному положенні, якщо швидкість точки D шатуна $V_D = 1\ м/с$, довжина кривошипа $OA = 0{,}1\ м$.

Відповідь: $10\ с^{-1}$.

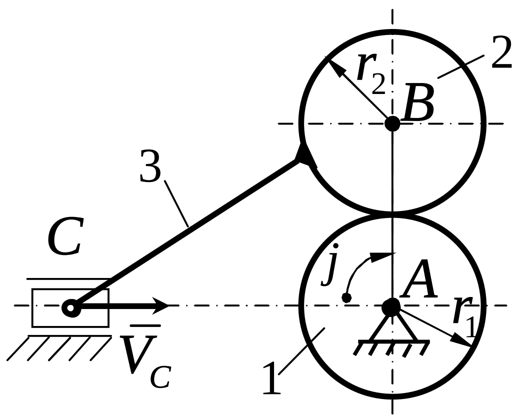
29



У механізмі шків 1 радіуса $r = 0{,}1\ м$ шарнірно з'єднаний зі стрижнем 2 довжиною $0{,}25\ м$ за допомогою штанги AB. Для даного положення механізму визначити кутову швидкість штанги, якщо частота обертання шківа 1 дорівнює $120\ об/хв$, а відстань $O_1O_2 = 0{,}45\ м$.

Відповідь: $2{,}28\ с^{-1}$.

30



На вісь A незалежно одна від другої насаджені шестерня 1 і кривошип AB довжиною $30\ см$. На осі B кривошипа установлена шестерня 2 радіуса $r_2 = 15\ см$, до якої прикріплене шатун 3. Визначити кутову швидкість шестерні 1, коли кут $j = 90^o$ і швидкість V_C точки C повзуна дорівнює $0{,}3\ м/с$.

Відповідь: $2\,c^{-1}$.

3.1.5 Прискорення точок тіла, при плоскому русі

Використаємо теорему про додаванняі швидкостей точок плоскої фігури. На підставі (3.2) маємо

$$\overline{V}_A = \overline{V}_O + \overline{w} \times \overline{r}_{OA}.$$

Прискорення точки A знайдемо як векторну похідну за часом від швидкості цієї точки

$$\overline{a}_A = \frac{d\overline{V}_A}{dt} = \frac{d\overline{V}_O}{dt} + \frac{d\overline{w}}{dt} \times \overline{r}_{OA} + \overline{w} \times \frac{d\overline{r}_{OA}}{dt}.$$

Так як

$$\frac{d\overline{w}}{dt} = \overline{e}$$

і

$$\frac{d\overline{r}_{OA}}{dt}=\overline{V}_{OA}=\overline{w}\times\overline{r}_{OA}$$

маємо

$$\overline{a}_A=\overline{a}_O+\overline{e}\times\overline{r}_{OA}+\overline{w}\times\overline{V}_{OA}.$$

Тут $\overline{e}\times\overline{r}_{OA}=\overline{a}_{OA}^t$ - дотичне прискорення точки A в обертальному рухові навколо полюса O;

$\overline{w}\times\overline{V}_{OA}=\overline{a}_{OA}^n$ - нормальне прискорення точки A в обертанні навколо полюса O.

Тому

$$\overline{a}_A=\overline{a}_O+\overline{a}_{OA}^t+\overline{a}_{OA}^n \tag{3.3}$$

Якщо прискорення точки O не задано безпосередньо і вона рухається за криволінійною траєкторією, то прискорення полюса (в даному випадку точки O) раскладається на дві складові. Тобто

$$\overline{a}_O=\overline{a}_O^t+\overline{a}_O^n.$$

Тоді рівняння (3.3) має вигляд:

$$\overline{a}_A=\overline{a}_O^t+\overline{a}_O^n+\overline{a}_{OA}^t+\overline{a}_{OA}^n. \tag{3.4}$$

У формулі (3.3)

$$a_{OA}^t=OA\cdot e,$$

$$a_{OA}^n=OA\cdot w^2.$$

Оскільки $a_{OA}^t\perp a_{OA}^n$, то їх сума дорівнює

$$a_{OA} = \sqrt{\left(a_{OA}^{t}\right)^{2} + \left(a_{OA}^{n}\right)^{2}} = OA\sqrt{e^{2} + w^{4}}, \tag{3.5}$$

а також кут b

$$tg\,b = \frac{a_{OA}^{t}}{a_{OA}^{n}} = \frac{e}{w^{2}}. \tag{3.6}$$

Розглянемо приклади розв'язання задач за допомогою теореми про додавання прискорень (рис. 3.3, 3.4) при плоскому русі тіла.

Приклад 1. Кривошип $OA = 10\,см$ нецентрального кривошипно-шатунного механізму обертається навколо нерухомої осі O з кутовою швидкістю $w_0 = 2\,c^{-1}$ і кутовим прискоренням $e_0 = 4\,c^{-2}$ і викликає рух шатуна $AB = 550\,см$, з'єднаний з ним шарнірно в точці A. Повзун B переміщується за нахиленими напрямними mn. Визначити прискорення повзуна B і кутове прискорення шатуна AB в той момент, коли $\angle ABn = 60^o$ і $AB \perp OA$ (рис. 3.16).

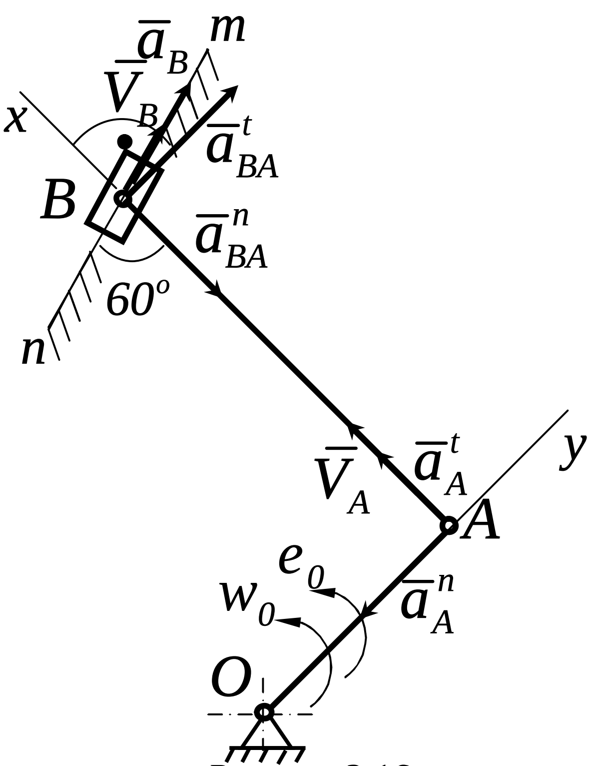


Рисунок 3.16

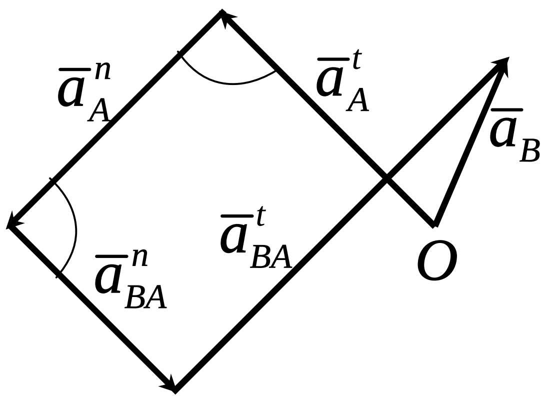


Рисунок 3.17

Рішення

Оскільки рух кривошипа OA задано, то можна знайти швидкість і прискорення точки A. Вектор $\overline{V_A}$ перпендикулярний до OA і за модулем дорівнює

$$V_A = w_0 \cdot OA = 2 \cdot 10 = 20см/с\,.$$

Вектор прискорення $\overline{a}_A$ складається із дотичного прискорення $\overline{a}_A^t$, спрямованого вздовж AB, і нормального прискорення $\overline{a}_A^n$, спрямованого вздовж кривошипа OA від A до O, тобто

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^t + \overline{a}_A^n,$$

притому

$$a_A^n = w_0^2 \cdot OA = 4 \cdot 10 = 40см/с^2,$$

$$a_A^t = e_0 \cdot OA = 4 \cdot 10 = 40см/с^2.$$

Повзун B рухається поступально і прямолінійно, отже вектори $\overline{V}_B$ і $\overline{a}_B$ спрямованого за прямою mn. З іншого боку точка B належить шатуна AB, який рухається в площині рисунка. Оберемо в цьому русі точку A за полюс, за формулами (3.2) і (3.4) маємо:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}\,,$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^t + \overline{a}_A^n + \overline{a}_{BA}^t + \overline{a}_{BA}^n\,.$$

На основі першого рівняння, що висловлює теорему про додавання швидкостей, складемо трикутник швидкостей, в якому

$$\overline{Ba} = \overline{V}_A,\ \overline{ab} = \overline{V}_{BA},\ \overline{Bb} = \overline{V}_B\ .$$

Із цього трикутника маємо:

$$V_{BA} = V_A tg60^o = V_A\sqrt{3} = 20\sqrt{3} = 34{,}6см/с\ .$$

Отже

$$a^n_{BA} = \frac{V^2_{BA}}{AB} = \frac{1200}{50} = 24см/с^2\ .$$

Тепер у рівнянні (3.4) про складання прискорень є два невідомих вектори: $\overline{a}_B$ і $\overline{a}^t_{BA}$. Проектуємо його на напрямок AB (вісь x, рис. 3.16), для того щоб виключити невідому $\overline{a}^t_{BA}$, бо вона перпендикулярна напрямку осі x і напрямку прямої AB. Тоді отримаємо:

$$a_B cos60^o = a^t_A - a^n_{BA}\ ,$$

звідси

$$a_B = \frac{a^t_A - a^n_{BA}}{cos60^o} = \frac{40-24}{0{,}3} = 32\,см/с^2.$$

Для визначення кутового прискорення шатуна AB проектуємо теж саме рівняння на напрямок, перпендикулярний прямій AB (на рис. 3.16 помічено віссю y).

$$a_B sin60^o = -a^n_A + a^t_{BA}\ ,$$

і остаточно

$$a^t_{BA} = a^n_A + a_B sin60^o = 40 + 32\cdot 0{,}86 = 67{,}52\,см/с^2\ .$$

Кутове прискорення шатуна AB

$$e_{BA} = \frac{a_{BA}^t}{BA} = \frac{67{,}52}{550} = 0{,}122\ c^{-2}.$$

Для визначення w_{AB}, а також і $\overline{a}_{BA}^n$ можна було скористатися теоремою про проекції швидкостей на пряму AB, а ще краще поняття миттєвого центра швидкостей .

У складних механічних системах, які мають багато точок іноді використовують відбудову плану прискорень.

Для відбудови плану прискорень необхідно записати два рівняння відповідно до теореми про додавання швидкостей, обираючи полюсами ті точки, швидкості яких вже відомі. Визначимо в цій задачі швидкість точки B за допомогою плану прискорень. Для точки B існує полюс A, прискорення якого визначається умовою задачі, а також пряма mn, яка є нерухомою.

Векторні рівняння мають вигляд:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^t + \overline{a}_A^n + \overline{a}_{BA}^t + \overline{a}_{BA}^n.$$

Перед відбудовою плану оберемо масштаб прискорень. У даній задачі обрано масштаб прискорень $m_a = 10\, см/с^2 / 1 см$. У довільній послідовності відкладаємо в масштабі вектори з правих частин обох рівнянь (рис. 3.17).

Приклад 2

У механізмі, зображеному на рис. 3.18, кривошип $OA = 25\, см$ обертається зі сталою швидкістю $w = 2\, c^{-1}$ в площині рисунка навколо нерухомої точки O і при допомозі стрижня AB викликає рух кривошипа BC, який обертається в тій же площині навколо нерухомої точки C. Визначити швидкість і прискорення точки B в той момент, коли кривошип OA горизонтальний, $\angle OAB = 60^o$, $\angle ABC = 30^o$, якщо $AB = BC = 50\,см$.

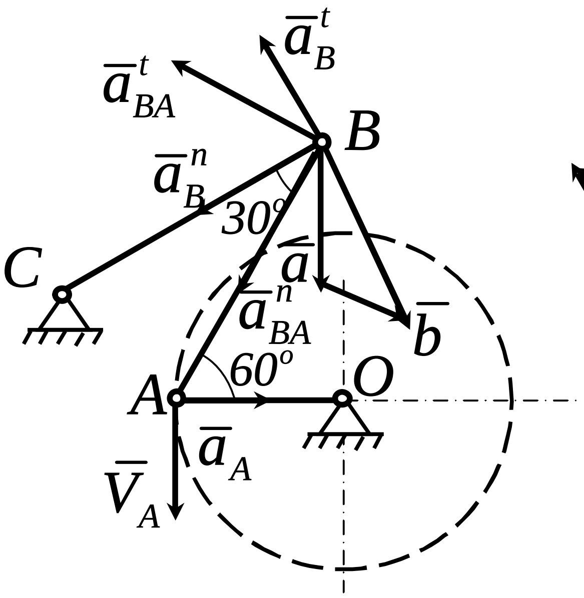


Рисунок 3.18

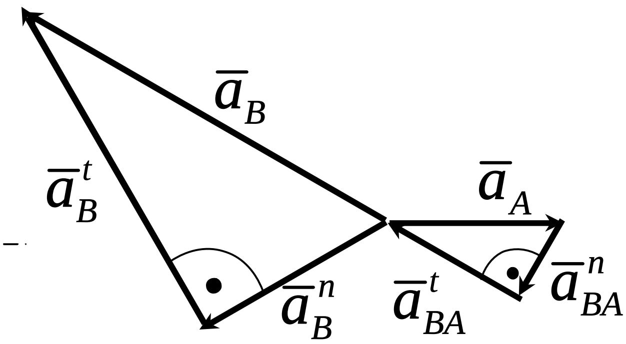


Рисунок 3.19

Рішення

Знайдемо спочатку швидкість точки A - $\overline{V}_A$ і прискорення $\overline{a}_A$ точки A ланки OA, рух якої заданий. Вектор $\overline{V}_A$ перпендикулярний до OA і за модулем дорівнює $V_A = w \cdot OA = 2 \cdot 25 = 50 см/с$. Оскільки кривошип OA обертається рівномірно, то прискорення $\overline{a}_A$ спрямоване вздовж OA і притому

$$a_A = w^2 \cdot OA = 4 \cdot 25 = 100 см/с^2.$$

Точка B належить ланці BC, яка обертається навколо нерухомої точки C, отже траєкторією точки B є дуга кола з центром в точці C і радіусом CB. Тому $\overline{V}_B$ і $\overline{a}_B^t$ спрямовані за однією прямою, перпендикулярною до BC, а вектор $\overline{a}_B^n$ спрямований вздовж BC і за модулем дорівнює $a_B^n = V_B^2 / BC$. Крім того,

$$\overline{a}_B = \overline{a}_B^t + \overline{a}_B^n .$$

З іншого боку, точка належить ланці BC, візьмемо точку A полюсом плоского руху і за формулами-теоремами про додавання швидкостей і прискорень

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA} ,$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^t + \overline{a}_{BA}^n ,$$

де вектори $\overline{V}_{BA}$ і $\overline{a}_{BA}^t$ мають однаковий напрямок – за прямою, перпендикулярною до AB, а вектор a_{BA}^n спрямуємо вздовж BA, притому

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{AB} .$$

До того, як перейти до визначення прискорень, слід знайти $\overline{V}_B$ і $\overline{V}_{BA}$. Для цього відбудуємо відповідно теоремі про додавння швидкостей трикутник швидкостей точки B. Тоді

$$\overline{Ba} = \overline{V}_A,\ \overline{ab} = \overline{V}_{BA},\ \overline{Bb} = \overline{V}_B ,$$

притому

$$\angle Bba = \angle ABC = 30^o,$$

$$\angle aBb = 90^o - \angle CBO = 30^o.$$

звідки $$Ba = ab,$$

тобто

$$V_{BA} = V_A = 50 см/с,$$

$$V_B = Bb = 2Ba \cdot cos30^o = V_A\sqrt{3} = 50\sqrt{3}\ см/с.$$

Отже

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{BC} = \frac{3V_A^2}{BC} = 150\ см/с^2,$$

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{AB} = 50\ см/с^2.$$

Численне значення векторів $\overline{a}_B^t$, $\overline{a}_B$, $\overline{a}_{BA}^t$ отримаєм методом проекцій. Для цього запишемо векторне рівняння для точки B, яка належить ланці CB:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_B^t + \overline{a}_B^n,$$

а потім запишемо векторне рівняння для точки B, яка належить ланці AB:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^t + \overline{a}_{BA}^n.$$

Прирівняємо праві частини обох рівнянь. Тоді

$$\overline{a}_B^t + \overline{a}_B^n = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^t + \overline{a}_{BA}^n.$$

Спроектуємо це рівняння на прямі BA і BC, отримаємо:

$$a_B^t cos60^o - a_B^n cos30^o = a_A cos60^o - a_{BA}^n \ ,$$

$$a_B^n = a_A cos30^o + a_{BA}^n cos30^o + a_{BA}^t cos60^o \ .$$

Таким чином маємо:

$$a_B^t = a_A - 2a_{BA}^n + a_B^n\sqrt{3} = 150\sqrt{3}\, см/с^2 \ ,$$

$$a_{BA}^t = \sqrt{3}a_A - 2a_B^n + a_{BA}^n\sqrt{3} = \left(300 + 50\sqrt{3}\right) см/с^2 \ ,$$

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^t\right)^2 + \left(a_B^n\right)^2} = 300\, см/с^2.$$

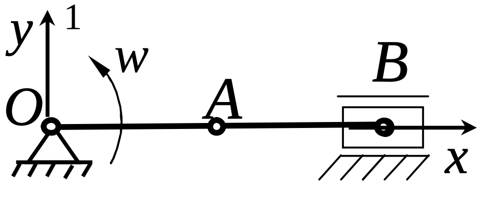
На рис. 3.19 показаний план прискорень, відбудований за допомогою двох векторних рівнянь відповідно теоремі про додавання прискорень при плоскому русі тіла.

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^t + \overline{a}_{BA}^n \ ,$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}_C + \overline{a}_{BC}^t + \overline{a}_{BC}^n \ .$$

Оскільки $\overline{a}_C = 0$, вектори $\overline{a}_{BC}^n$ і $\overline{a}_{BC}^t$ позначені як $\overline{a}_B^n$ і $\overline{a}_B^t$.

Приклади задач для самостійної роботи

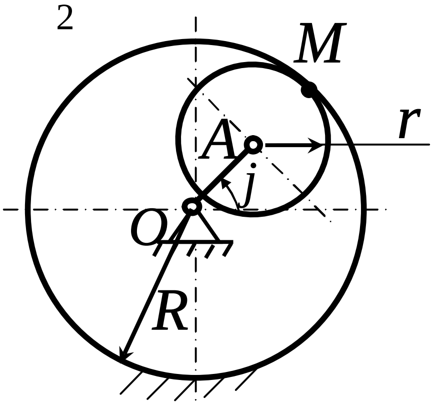


Кривошип OA рівномірно обертається з кутовою швидкістю $w = 10 рад/с$. Визначити кутове прискорення шатуна

AB, якщо в даний момент часу механізм займає положення, показане на рисунку.

Відповідь: 0.

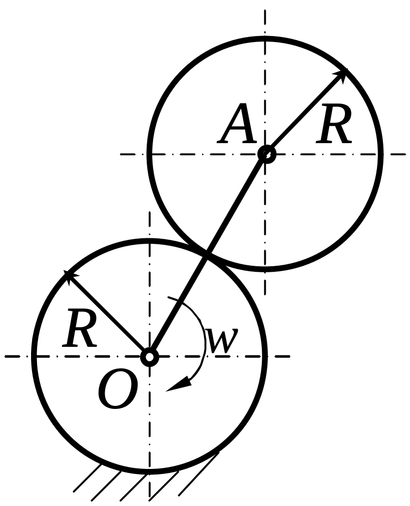
2



Кривошип OA обертається відповідно до закону $j = 0{,}5t$. Визначити прискорення точки M рухомого колеса, якщо радіус $R = 2r = 0{,}2\ м$.

Відповідь: $0{,}05$.

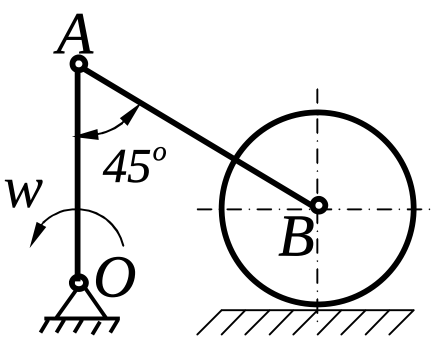
3



Кривошип планетарного механізму обертається зі сталою кутовою швидкістю $w = 1\ c^{-1}$. Визначити прискорення точки, яка є миттєвим центром швидкостей рухомого колеса, якщо радіус $R = 0{,}1\ м$.

Відповідь: $0{,}2$.

4

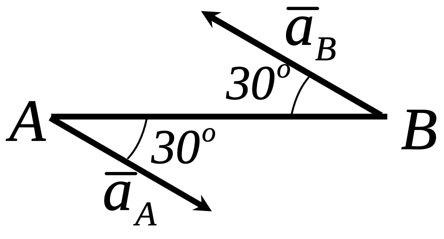


Визначити кутове прискорення шатуна AB кривошипно-повзунного механізму в данному стані, якщо кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю $w = 10 рад/с$, а довжини ланок $OA = 0{,}3\ м$, $AB = 0{,}45\ м$.

Відповідь: $94{,}3$.

А

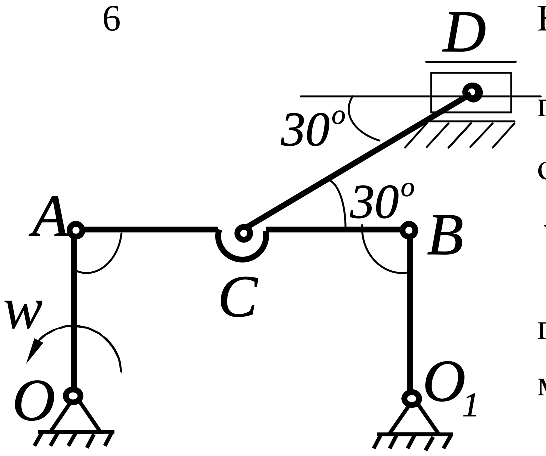
5



Стрижень довжиною $AB = 40\,см$ рухається в площині рисунка. У деякий момент часу точки A і B стрижня мають прискорення $a_A = 2\ м/с^2$, $a_B = 6\ м/с^2$. Визначити кутове прискорення стрижня.

Відповідь: $10 с^{-2}$.

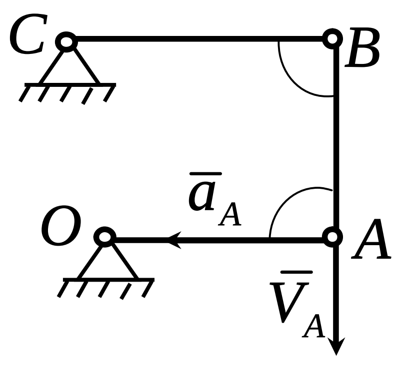
6



Кривошип OA шарнірного паралелограма $OABO_1$ рівномірно обертається з кутовою швидкістю $w = 4 рад/с$. Визначити кутове прискорення шатуна CD у даному стані механізму, якщо довжина ланок $OA = 20\,см$, $CD = 30\,см$.

Відповідь: $12{,}3\,с^{-2}$.

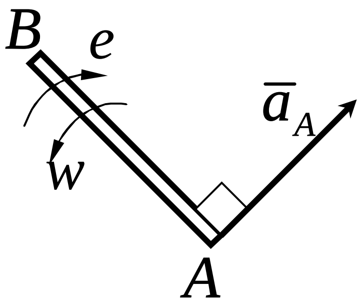
7



В указаному на рисунку положенні шарнірного чотириланника швидкість і прискорення точки A кривошипа OA рівні $V_A = 2\ м/с$, $a_A = 40\ м/с^2$. Визначити кутове прискорення ланки BC, якщо довжини ланок $AB = BC = 0{,}5\ м$.

Відповідь: 0.

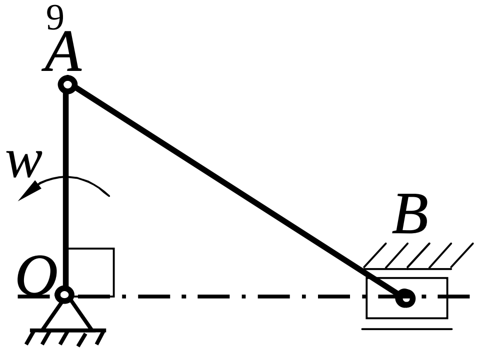
8



Стрижень AB рухається в площині. Прискорення точки A в даний момент часу $a_A = 1\ м/с^2$, кутова швидкість $w = 1 рад/с$, кутове прискорення $e = 2 рад/с^2$. Визначити кутове прискорення точки B стрижня, якщо довжина $AB = 1\ м$.

Відповідь: $5\ c^{-2}$.

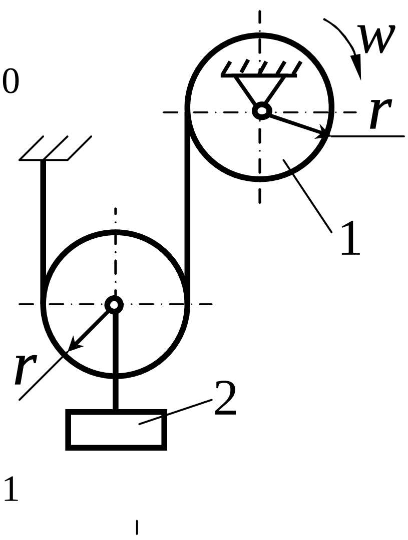
9



Визначити прискорення повзуна B кривошипно-повзунного механізму, якщо кутова швидкість кривошипа $w = 1 рад/с = const$. Довжини ланок $OA = 0{,}3\ м$, $AB = 0{,}5\ м$.

Відповідь: $0{,}225\ м/с^2$.

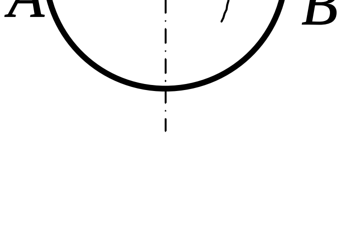
10



Барабан 1 обертається за законом $j = 0{,}1t^2$. Визначити прискорення вантажу 2, якщо радіус $r = 0{,}2\ м$.

Відповідь: $0{,}02\ м/с^2$

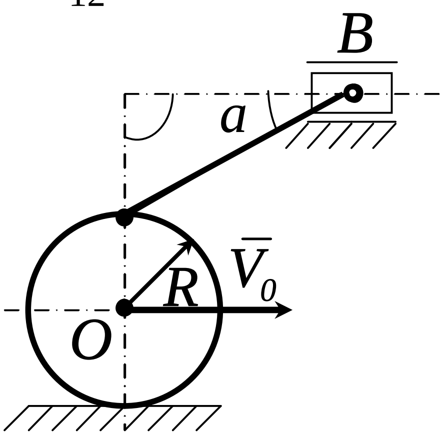
11



Тіло рухається в плоскопаралельно. Знайти прискорення точки B, якщо прискорення точки A $3\ м/с^2$, кутова швидкість $w = 1 рад/с$, кутове прискорення $e = 0$, відстань $AB = 0{,}5\ м$.

Відповідь: $2{,}5\ м/с^2$.

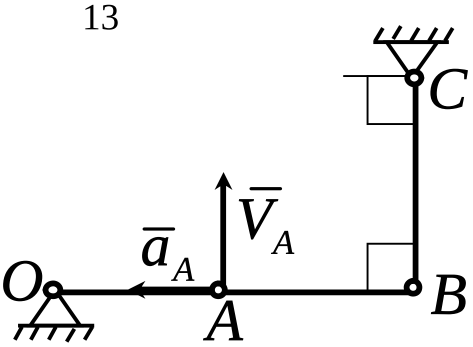
12



Для даного положення механізму визначити прискорення повзуна B, якщо колесо радіуса $R = 50\,см$ котиться з сталою швидкістю його центра $V_0 = 5\ м/с$, кут $a = 30^o$.

Відповідь: $28{,}9\ м/с^2$.

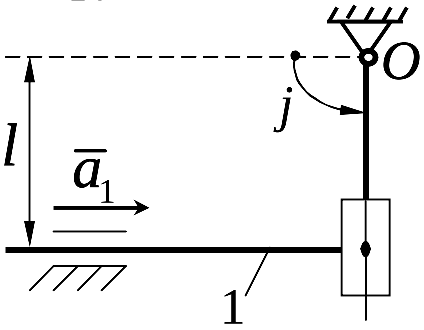
13



В указаному на рисунку положенні шарнірного чотириланника швидкість і прискорення точки A кривошипа OA рівні: $V_A = 2\ м/с$, $a_A = 20\ м/с^2$. Визначити прискорення точки B шатуна, якщо довжини $AB = BC = 0{,}8\ м$.

Відповідь: $25\ м/с^2$.

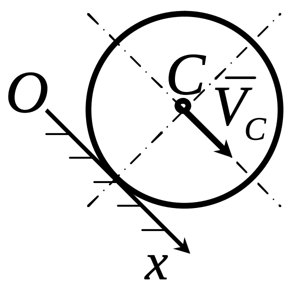
14



Стрижень 1 кулісного механізму рухається з сталим прискоренням $a_1 = 2\ м/с^2$. Визначити кутове прискорення куліси 2 в даному положенні механізму, якщо кут $j = 90^o$ і відстань $l = 0{,}5\ м$.

Відповідь: $4\ с^{-2}$.

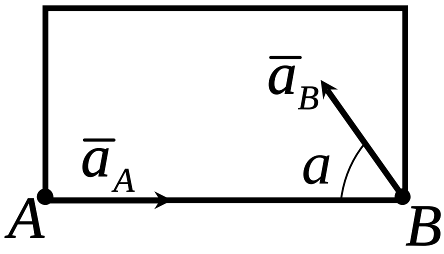
15



Швидкість центра C колеса, яке котиться без ковзання, стала. Який кут в градусах з віссю Ox складає вектор прискорення миттєвого центру швидкостей.

Відповідь: 90^{o}

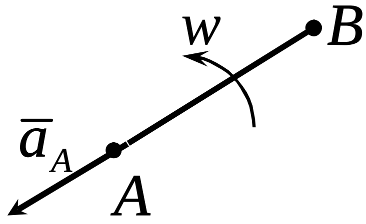
16



Тіло рухається плоскопаралельно. Знайти його кутову швидкість, якщо прискорення точки A дорівнює $1\ м/с^2$, прискорення точки B рівно $6\ м/с^2$, відстань $AB = 1\,м$, кут $a = 60^o$.

Відповідь: $2\,с^{-1}$.

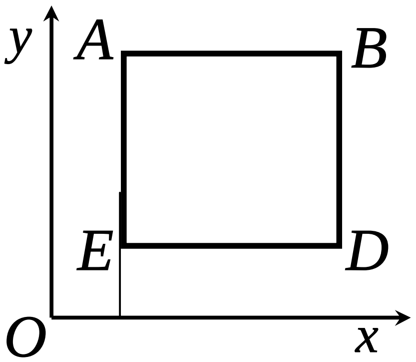
17



Стрижень AB довжиною $2\,м$ знаходиться у плоскопаралельному русі. Знайти прискорення точки B, якщо прискорення точки A дорівнює $1\ м/с^2$, кутова швидкість стрижня $w = 1 рад/с$, кутове прискорення $e = 0$.

Відповідь: $3\ м/с^2$.

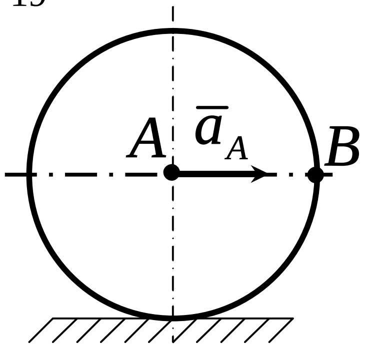
18



Квадратна пластина $ABDE$ рухається в площині Oxy. Визначити кутове прискорення пластини в указаному стані, якщо довжина $AB = 0{,}5\,м$, а проекції прискорення точок A і B на вісь Oy відповідно дорівнюють $a_{Ay} = 3\ м/с^2$, $a_{By} = 6\ м/с^2$.

Відповідь: $4\,с^{-2}$.

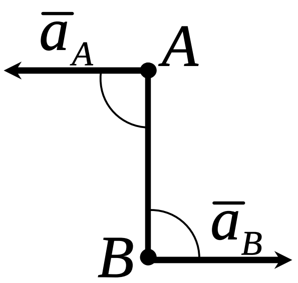
19



Колесо котиться без ковзання. Визначити прискорення точки B колеса в той момент, коли швидкість точки A дорівнює нулю, а прискорення $a_A = 2\ м/с^2$.

Відповідь: $2{,}83\ м/с^2$.

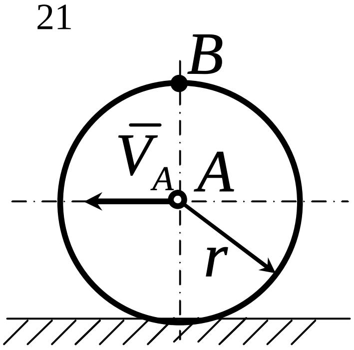
20



Стрижень AB довжиною $50\,см$ рухається в площині малюнку. У деякий момент часу точки A і B стрижня мають прискорення $a_A = 2\ м/с^2$, $a_B = 3\ м/с^2$. Визначити кутове прискорення стрижня .

Відповідь: $10\,с^{-2}$.

21



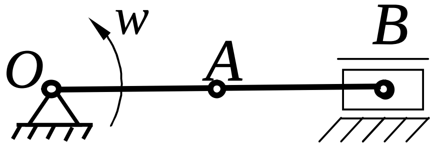
Колесо радіуса $r = 0{,}1\,м$ котиться без ковзання. Визначити прискорення точки B, якщо центр A колеса переміщується з сталою швидкістю $V_A = 2\ м/с$.

Відповідь: $40\ м/с^2$.

22 Колесо радіуса $0{,}4\ м$ котиться без ковзання по прямолінійній рейці вправо. Швидкість центра C колеса в певний момент $1\ м/с$, прискорення $2\ м/с^2$. Визначити прискорення точки M горизонтального радіуса колеса, якщо $CM = 0{,}2\,м$ і точка M розміщена в цей момент справа від центра.

Відповідь: $1{,}25\ м/с^2$.

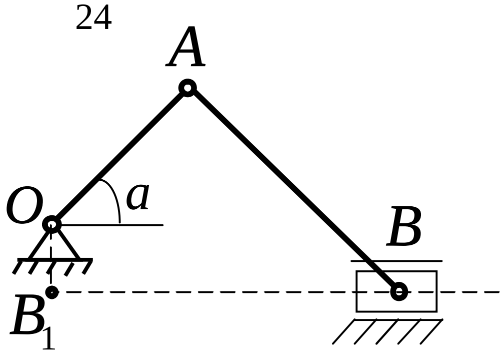
23



Кривошип OA довжиною $10\,см$ обертається навколо нерухомої осі O із сталою кутовою швидкістю $4p\ c^{-2}$. Він викликає рух шатуна AB довжиною $40\,см$. Визначити прискорення повзуна B в момент, коли він займе крайнє праве положення.

Відповідь: $200p^{2}\ c^{-2}$.

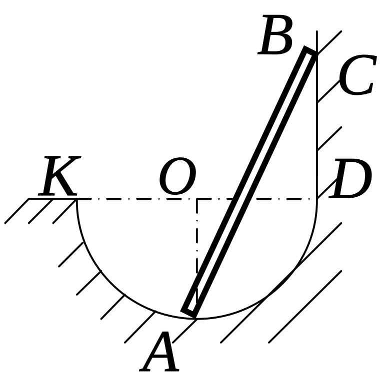
24



Кутова швидкість кривошипа OA стала і дорівнює $5рад/с$, $OA = 15\,см$, $AB = 25\,см$, $OB_1 = 5\sqrt{2}\,см$. Визначити кутове прискорення шатуна AB в момент, коли $a = 45^o$.

Відповідь: $6\,c^{-2}$.

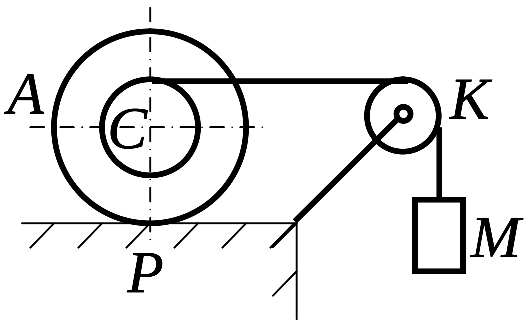
25



Кінець A стрижня AB довжиною $15\,см$ рухається із сталою швидкістю $10\,см/с$ колом радіуса $5\,см$. Кінець B переміщається за прямою CD, перпендикулярною до діаметра KD. Визначити прискорення кінця B в момент, коли радіус OA паралельний CD.

Відповідь: $12{,}05\ м/с^2$.

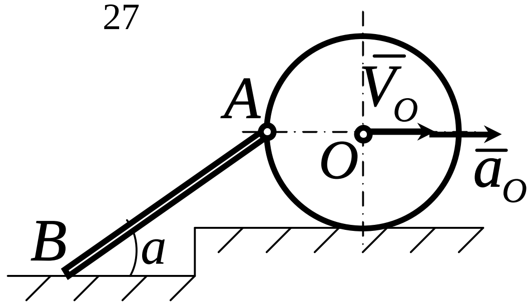
26



Два циліндри жорстко скріплені між собою і мають спільну вісь симетрії. Радіус одного $15\,см$, радіус другого $5\,см$. Через блок K перекинута нитка, намотана на циліндр. До кінця нитки прикріплений вантаж M , прискорення якого $10\,см/с^2$, а швидкість $40\,см/с$. Визначити кутове прискорення циліндрів в заданий момент, якщо циліндр більшого радіуса котиться без ковзання.

Відповідь: $0{,}5\,с^{-2}$.

27

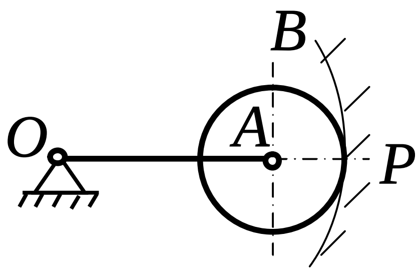


Стрижень AB довжиною $20\,см$ шарнірно прикріплений до обода диска радіуса $8\,см$, який котиться без ковзання вздовж прямолінійної ділянки шляху. Прискорення центра диска $18\,см/с^2$.

Визначити прискорення кінця B стрижня в момент, коли кут $a = 45^o$, а швидкість центра O диска дорівнює $12\,см/с$.

Відповідь: $74{,}4\,см/с^2$.

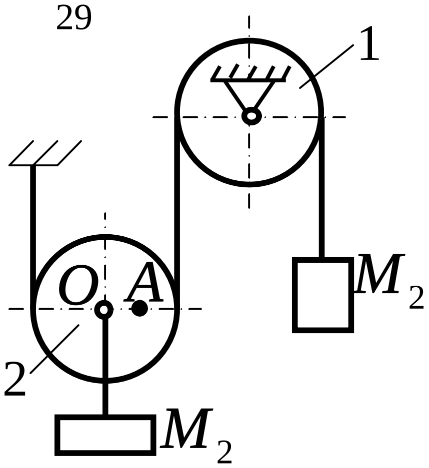
28



Зубчате колесо A радіуса $5\,см$ має внутрішнє зчеплення з нерухомим зубчатим колесом B радіуса $30\,см$. Кутове прискорення кривошипа OA дорівнює $0{,}8\,с^{-2}$, а його кутова швидкість у цей момент $0{,}4\,c^{-1}$. Визначити прискорення миттєвого центра швидкостей P колеса A.

Відповідь: $24\,см/с^2$.

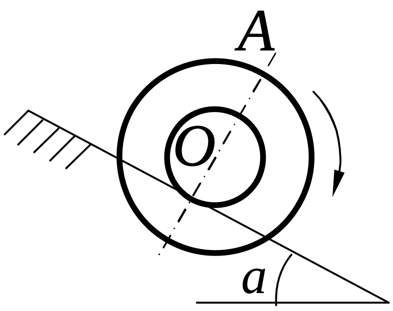
29



Вантаж M_1 рухається вниз з прискоренням $20\,см/с^2$, маючи швидкість у цей момент $10\,см/с$. Визначити прискорення точки A блока 2, якщо $OA = R/2$, де $R = 2{,}5\,см$ – радіус блока 2.

Відповідь: $5\sqrt{10}\,см/с^2$.

30



До торця вала радіуса $0{,}3\,м$ прикріплено диск, радіус якого дорівнює $0{,}5\,м$. Осі вала і диска збігаються. Вал котиться без ковзання вздовж похилої площини. Прискорення осі O вала дорівнює $1{,}2\,м/с^2$, а її швидкість у цей момент дорівнює $0{,}9\,м/с$. Визначити прискорення точки A на діаметрі, перпендикулярному до похилої площини.

Відповідь: $5{,}52\,м/с^2$.

3.1.6 Миттєвий центр прискорень

Коли тіло рухається плоскопаралельно, в кожний момент часу є така точка Q, прискорення якої дорівнює нулю. Ця точка називається **миттєвим центром прискорень**. Визначення положення центра Q, якщо відомі прискорення $\overline{a_A}$ точки A плоскої фігури і величини w і e, проводимо таким шляхом:

1 Знаходимо значення кута m із формули

$$tg m = \frac{e}{w^2} . \qquad (3.7)$$

2 Від точки A під кутом m до вектора $\overline{a}_A$ проводимо пряму AE (рис. 3.20).

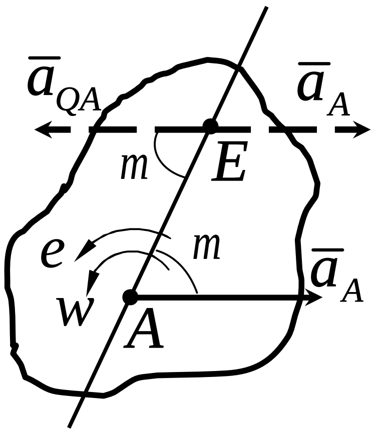


Рисунок 3.20

При цьому пряма AE повинна бути відхилена від $\overline{a}_A$ в напрямку обертання фігури, якщо обертання є прискореним, і проти обертання, якщо воно сповільнене, тобто в той бік, куди спрямоване кутове прискорення e. Відкладаємо вздовж лінії AE відрізок AQ, рівний

$$AQ = a_A \Big/ \sqrt{e^2 + w^4} . \qquad (3.8)$$

Прискорення точок плоскої фігури визначається в даний момент часу так, як би рух фігури був обертальним навколо миттєвого центра прискорень Q. При цьому, як випливає із (3.8),

$$a_M / MQ = a_A / AQ = \mathbf{K} = \sqrt{e^2 + w^4}\ , \qquad (3.9)$$

тобто прискорення точок плоскої фігури пропорційні їх відстаням від миттєвого центра прискорень.

Розглянемо використання поняття миттєвого центра швидкостей на прикладах.

Приклад 1

Колесо котиться по прямолінійній рейці так, що швидкість $\overline{V}_C$ його центра C стала. Визначити прискорення точки M обода колеса (рис. 3.21).

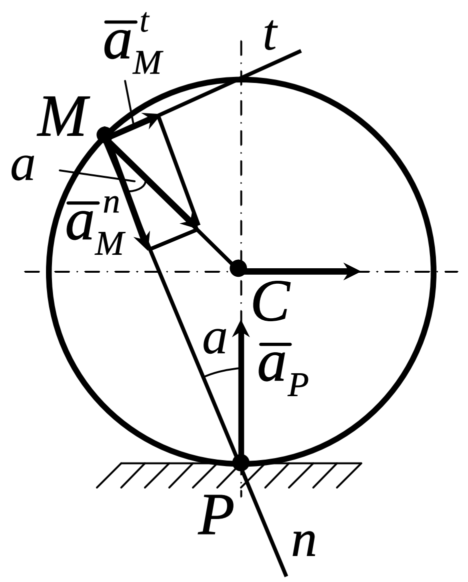


Рисунок 3.21

Рішення

Згідно з умовою задачі $\bar{V}_C = const$, отже $\bar{a}_C = 0$ і точка C є миттєвим центром прискорень. Миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці P. Отже, для колеса

$$w = V_C / PC = V_C / R = const,\ e = dw/dt = 0,$$
$$tgm = e / w^2 = 0,\ m = 0.$$

У результаті за формулою (3.8) знаходимо

$$a_M = MC \cdot w^2 = V_C^2 / R.$$

Таким чином, прискорення любої точки M обода колеса (в тому числі і точки P) дорівнює V_C^2 / R і має напрямок до центра C колеса, бо кут $m = 0$.

Приклад 2

Кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю w_{OA} (рис. 3.22). Знайти прискорення повзуна B і кутове прискорення шатуна AB в той момент часу, коли $\angle BOA = 90^o$, якщо $OA = r$, $AB = l$.

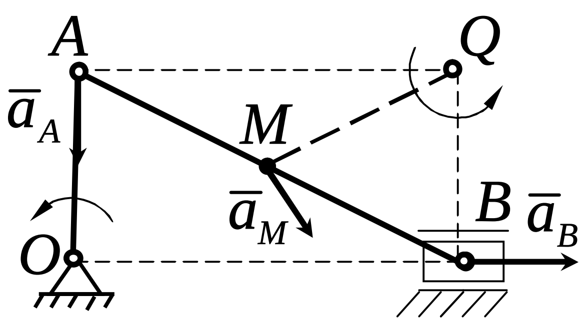


Рисунок 3.22

Рішення

У момент часу, що розглядається, швидкості всіх точок шатуна AB дорівнюють $\bar{V}_A$ (миттєвий поступальний рух). Миттєвий центр швидкостей знаходиться в нескінченності і $w_{AB} = 0$. Тоді

$$tg m = \frac{e_{AB}}{w_{AB}^2} = \infty \text{ і } m = 90^o .$$

$e_{AB} \neq 0$, бо інакше малоб місце $\bar{a}_{AB} = 0$ і $\bar{a}_B = \bar{a}_A$, що неможливо, оскільки ці два вектори взаємно перпендикулярні.

Прискорення точки A

$$a_A = a_A^n = r \cdot w_{OA}^2$$

і спрямоване вздовж OB. Із рисунка 3.22 видно, що прискорення точки M тіла похилене під кутом m до лінії MQ. У даному випадку $m = 90^o$, отже, лінії AQ і BQ повинні бути перпендикулярні $\bar{a}_A$ і $\bar{a}_B$. Склавши тепер пропорцію

$$\bar{a}_B / BQ = \bar{a}_A / AQ ,$$

де

$$BQ = r, \quad AQ = \sqrt{l^2 - r^2},$$

отримаємо

$$a_B = \frac{r^2}{\sqrt{l^2 - r^2}} \cdot w_{OA}^2, .$$

Прискорення $\overline{a}_M$ будь=якої точки M шатуна AB буде перпендикулярно MQ ($m = 90^o$). Модуль $\overline{a}_M$ знаходиться із відповідної пропорції.

Кутове прискорення шатуна знайдемо із рівності $a_B = BQ \cdot e_{AB}$. Отже,

$$e_{AB} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{r^2}{\sqrt{l^2 - r^2}} \cdot w_{OA}^2.$$

Контрольні завдання для самостійної роботи

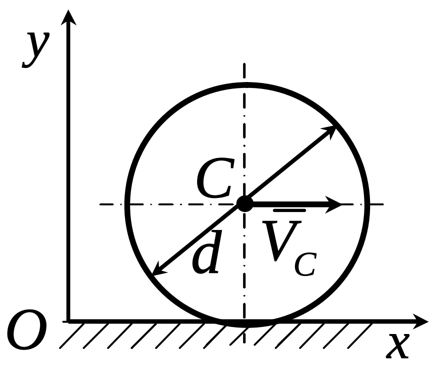
1 Тіло рухається в площині відповідно рівнянням

$x_B = 2cos0{,}5pt$, $y_B = 0$, $j = 0{,}5pt$.

Визначити в момент часу $t_1 = 0{,}5\,c$ відстань від точки B до миттєвого центра прискорень.

Відповідь: $1{,}41$.

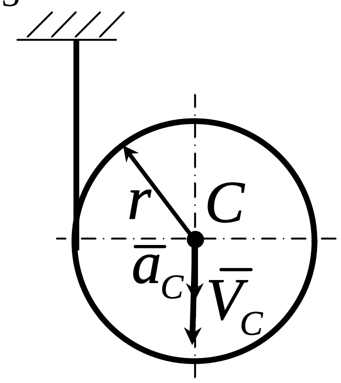
2



Колесо діаметра $d = 90\,см$ котиться без ковзання так, що його точка C переміщується за законом $x_C = 20t$. Визначити відстань між миттєвим центром швидкостей і миттєвим центром прискорень.

Відповідь: $0{,}45$.

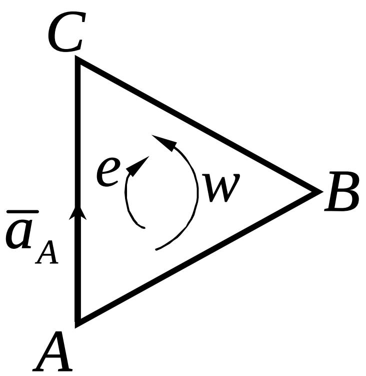
3



Центр циліндра, на який намотана нитка, рухається за вертикаллю з прискоренням $a_C = 6{,}6\ м/с^2$. Швидкість V_C в даний момент часу рівна $0{,}66\ м/с$. Визначити відстань від центра C до миттєвого центра прискорень, якщо радіус $R = 0{,}066\ м$.

Відповідь: $0{,}047$.

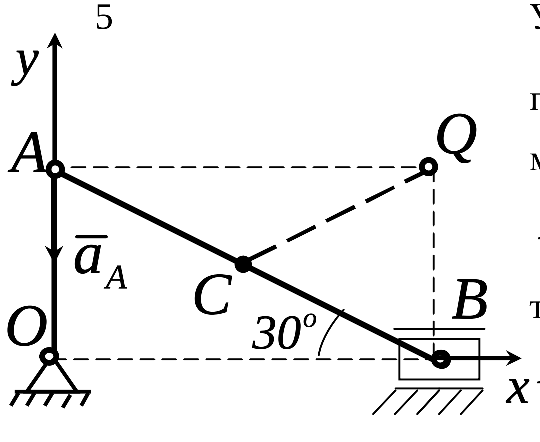
4



Трикутник ABC здійснює плоскопаралельний рух. Визначити відстань від вершини A до миттєвого центра прискорень, якщо прискорення $a_A = 10\ м/с^2$, кутова швидкість в даний момент $w = 2\,с^{-1}$ і кутове прискорення $e = 3\,с^{-2}$.

Відповідь: 2.

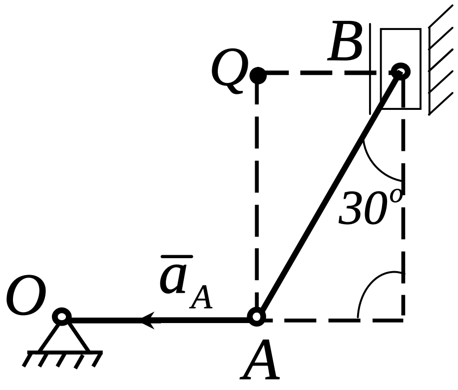
5



У даному положенні кривошипно-повзунного механізму точка Q є миттєвим центром прискорень шатуна AB. Визначити прискорення середньої точки C шатуна, якщо його довжина $AB = 0{,}6\ м$, а прискорення $a_A = 10\ м/с^2$.

Відповідь: $5{,}77$.

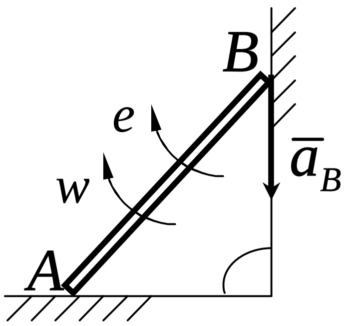
6



У даний момент часу вневісний кривошипно-повзунний механізм займає положення, показане на рисунку. Визначити кутове прискорення шатуна AB, якщо точка Q з'являється його миттєвим центром швидкостей, довжина $AB = 0,6\ м$, прискорення $a_A = 10\ м/с^2$.

Відповідь: $19,2\ с^{-2}$.

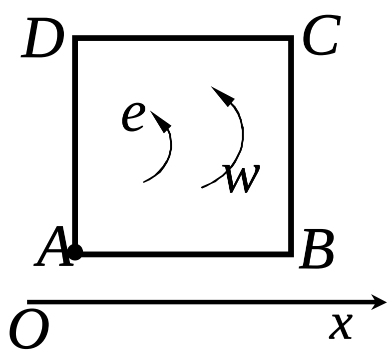
7



Кінець A балки ковзає вздовж підлоги, а кінець B - вздовж стіни. У даний момент часу балка має кутову швидкість $w = 0,6\ с^{-1}$ і кутове прискорення $e = 0,36\ с^{-2}$. Визначити в радіанах кут між вектором прискорення $\bar{a}_B$ і відрізком, з'єднуючим точку B з миттєвим центром прискорень.

Відповідь: $0,785$.

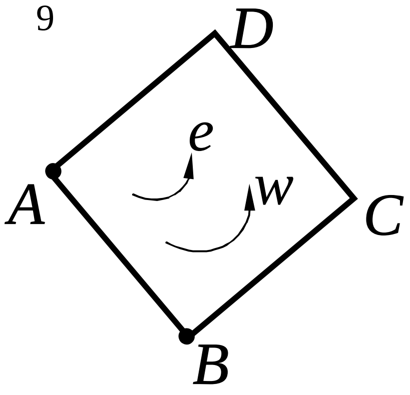
8



Квадрат $ABCD$ здійснює плоскопаралельний рух і в даний момент часу має миттєвий центр прискорень в точці A, кутову швидкість $w = 1 с^{-1}$ і кутове прискорення $e = 1 с^{-2}$. Який кут в градусах з віссю Ox складає вектор прискорення точки C?

Відповідь: 180^o.

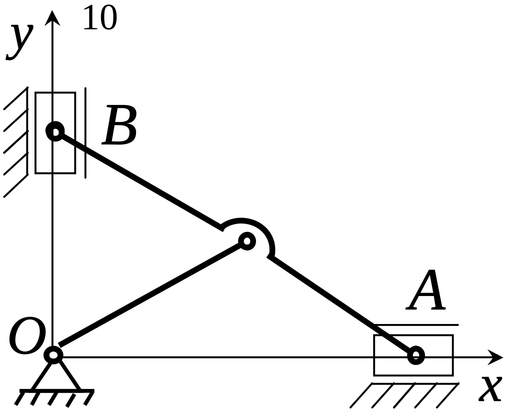
9



Квадрат $ABCD$ зі стороною $0{,}1\ м$, здійснює плоскопаралельний рух і в даний момент часу має миттєвий центр прискорень в точці A, кутову швидкість $w = 2\,c^{-1}$ і кутове прискорення $e = 2\,c^{-2}$. Визначити модуль прискорення точки B.

Відповідь: $0{,}5$.

10



Визначити прискорення повзуна B еліпсографа, якщо в даний момент часу прискорення повзуна A дорівнює $4\ м/с^2$ і відстань від повзунів A і B до миттєвого центра прискорень відповідно рівні: $AQ = 33\,см$ і $BQ = 53\,см$.

Відповідь: $6{,}42$.

3.2 Додавання поступальних рухів

Нехай відносний рух твердого тіла 2 відносно тіла 1 буде поступальним зі швидкістю $\bar{V}_2$, а рух тіла 1, тобто рух рухомої системи координат $Oxyz$ щодо нерухомої $O_1x_1y_1z_1$ буде також поступальним зі швидкістю $\bar{V}_1$ (рис. 3.23).

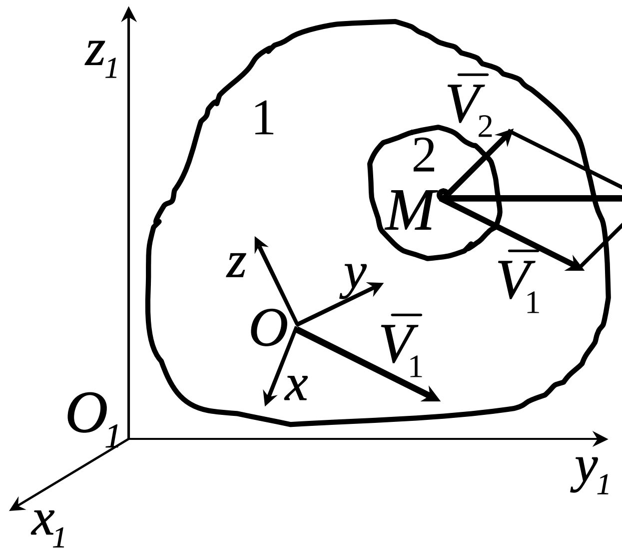


Рисунок 3.23

Тоді абсолютна швидкість точки M тіла 2 за теоремою про додавання швидкостей буде

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 . \tag{3.10}$$

Оскільки швидкості всіх точок тіла рівні між собою в кожний момент часу, то і швидкості всіх точок після складання поступальних рухів теж будуть однаковими. Одержану рівність можна узагальнити на випадок складання кількох миттєвих поступальних рухів. Більше того, якщо поступальний рух здійснюється на скінченому проміжку часу, то так само просто вирішується питання прискорень.

Оскільки при поступальному русі на скінченому проміжку часу $[0,t_1]$ $\bar{w} = 0$, $\bar{e} = 0$, то дістанемо

$$\bar{V} = \sum_i \bar{V}_i, \quad \bar{a} = \sum_i \bar{a}_i \ . \tag{3.11}$$

Результати (3.11) можна виразити такою теоремою:

при додаванні поступальних рухів твердого тіла утворюється результуючий поступальний рух зі швидкістю і прискоренням, що дорівнює векторній сумі швидкостей і прискорень складових рухів.

3.3 Додавання обертань навколо паралельних осів

Розглянемо три випадки обертань твердого тіла навколо паралельних осів.

1 Обертання співнаправлені.

Зобразимо перетин S тіла площиною, перпендикулярною осям (рис. 3.24). Сліди вісей в перетині S позначимо буквами A і B .

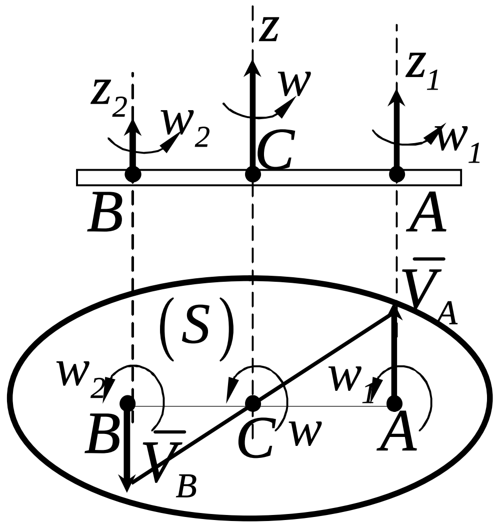


Рисунок 3.24

Легко побачити, що точка A, яка лежить на вісі z_1, отримує швидкість тільки від обертання навколо осі z_2, отже

$$V_A = w_2 \cdot AB.$$

Точно так $$V_B = w_1 \cdot AB.$$

При цьому вектори $\bar{V}_A$ і $\bar{V}_B$ паралельні між собою і перпендикулярні AB, а також мають протилежні напрямки. Тоді точка C є миттєвим центром швидкостей ($V_C = 0$), а отже, вісь z, паралельна осям z_1 і z_2, і буде **миттєвою віссю обертання тіла.**

Для визначення кутової швидкості w абсолютного обертання тіла навколо осі z і положення самої осі, тобто точки C, використаємо рівність

$$w = V_B / BC = V_A / AC,$$

отже

$$w = (V_A + V_B) / AB.$$

Підставивши в ці рівняння $V_A = w_2 \cdot AB$, $V_B = w_1 \cdot AB$ знайдемо кінцево

$$w = w_1 + w_2, \tag{3.12}$$

$$w_1 / BC = w_2 / AC = w / AB. \tag{3.13}$$

2 Обертання протилежні

Покажемо перетин S тіла (рис. 3.25) і допустимо для визначеності, що $w_1 > w_2$. Тоді, як і в попередньому випадку, знайдемо, що швидкості точок A і B будуть численно рівні: $V_A = w_2 \cdot AB$, $V_B = w_1 \cdot AB$.

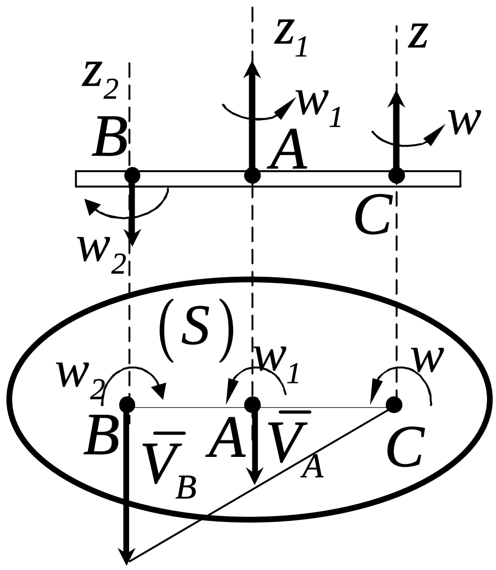


Рисунок 3.25

При цьому $\bar{V}_A$ і $\bar{V}_B$ паралельні між собою і мають однаковий напрямок. Тоді миттєва вісь обертання проходить через точку C, притому

$$w = V_B / BC = V_A / AC$$

і
$$w = (V_A - V_B) / AB \; .$$

Останній результат теж виходить із властивостей пропорції.

Підставивши в ці рівняння значення V_A і V_B, отримаємо кінцево

$$w = w_1 - w_2 \,, \tag{3.14}$$

$$w_1 / BC = w_2 / AC = w / AB \; . \tag{3.15}$$

3 Пара обертаннь**.**

Розглянемо окремий випадок, коли обертання навколо паралельних осів спрямовані протилежно (рис. 3.26), але дорівнюють одне одному за модулем ($w_1 = w_2$).

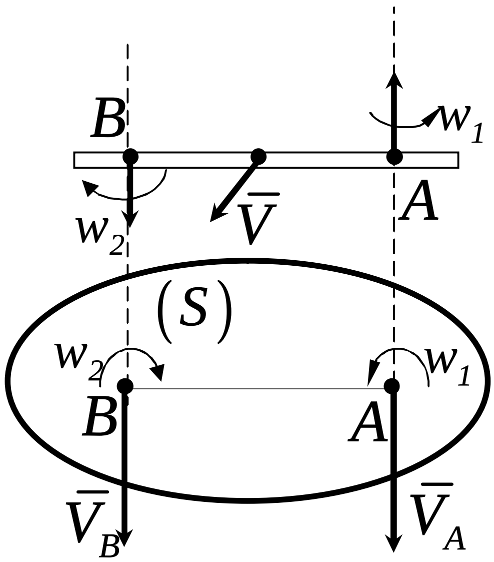


Рисунок 3.26

Така сукупність обертань називається **парою обертань**, а вектори $\bar{w}_1$ і $\bar{w}_2$ утворюють **пару кутових швидкостей**. У цьому випадку отримуємо, що $V_A = w_2 \cdot AB$ і $V_B = w_1 \cdot AB$, тобто $V_A = V_B$. Тоді миттєвий центр швидкостей знаходиться в нескінченності і всі точки тіла в даний момент мають однакові швидкості

$$V = w_1 \cdot AB .$$

Отже, результуючий рух тіла буде поступальним, (або миттєво поступальним) рухом зі швидкістю, яка чисельно дорівнює $w_1 \cdot AB$ і напрямленою перпендикулярно площині, що проходить через вектори $\bar{w}_1$ і $\bar{w}_2$. Напрямок вектора $\bar{V}$ визначається, як в статиці визначався напрямок векторного моменту пари сил.

Прикладом такого руху є поступальний рух педалі відносно рами велосипеда.

Розглянемо приклади розв’язання задач на складання обертальних рухів.

Приклад 1

Кривошип OA епіциклічного механізму рівномірно обертається з кутовою швидкістю w_0, протилежною обертанню годинникової стрілки, і рухає колесо 2. Радіуси коліс r_1 і r_2. Визначити абсолютну кутову швидкість w_2 колеса 2 і його відносну кутову швидкість w_r у відношенні до кривошипа OA (рис. 3.27).

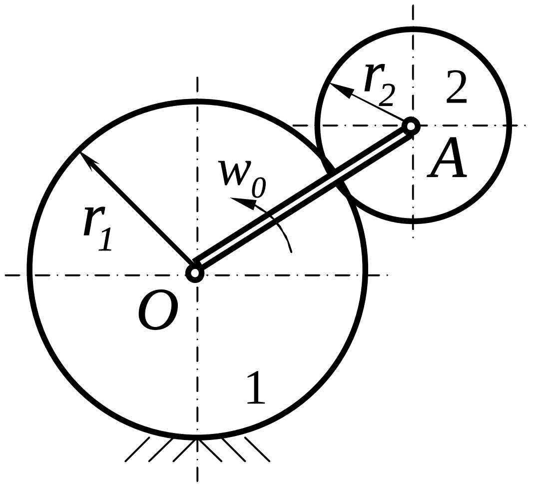


Рисунок 3.27

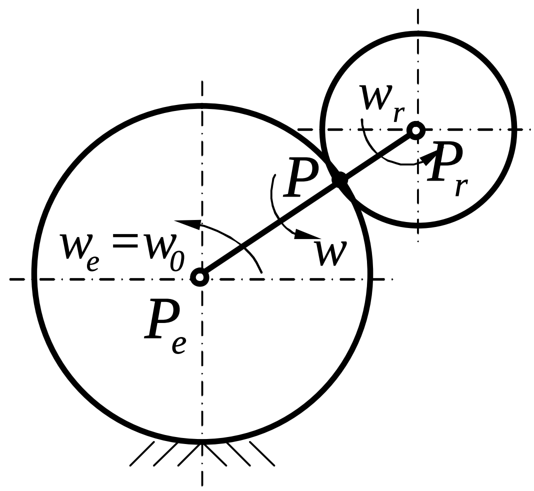


Рисунок 3.28

Рішення

Абсолютний рух колеса 2 є обертанням навколо миттєвої вісі, яка проходить через миттєвий центр швидкостей колеса – точку P дотику коліс (рис. 3.28). Це обертання можна розкласти на два складових обертання: переносне обертання разом з кривошипом з кутовою швидкістю $w_e = w_o$ навколо вісі $O(P_e)$ і відносне обертання у відношенні до кривошипа навколо осі, яка проходить через вісь колеса $A(P_r)$ з кутовою швидкістю w_r. Оскільки миттєвий центр швидкостей P абсолютного обертання колеса 2 знаходиться між миттєвими центрами P_e і P_r переносного і відносного обертань, то абсолютне обертання спрямоване в бік складових обертань, тобто проти обертання стрілки годинника, а модуль абсолютної кутової швидкості дорівнює сумі модулів відносної і переносної кутових швидкостей.

$$w = w_e + w_r \ .$$

Визначимо w_r , користуючись відомим співвідношеннями (3.13)

$$\frac{w_r}{w_e} = \frac{P_eP}{P_rP} = \frac{r_1}{r_2}, \quad w_r = w_e \frac{r_1}{r_2} = w_0 \frac{r_1}{r_2} \ .$$

Визначивши w_r , знайдемо модуль абсолютної кутової швидкості колеса 2

$$w_2 = w_e + w_r = w_0 + w_0 \frac{r_1}{r_2} ,$$

Отже,

$$w_2 = w_0 \frac{r_1 + r_2}{r_2} \ .$$

Приклад 2

Визначити відносну кутову швидкість відомого колеса 2 передачі у відношенні до ведучого колеса 1 і абсолютну кутову швидкість колеса 2, якщо відомі радіуси коліс r_1 і r_2 і кутова швидкість ведучого колеса w_1 (рис. 3.29).

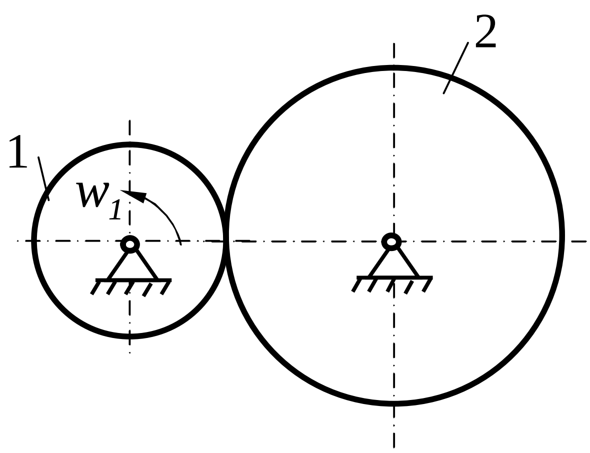


Рисунок 3.29

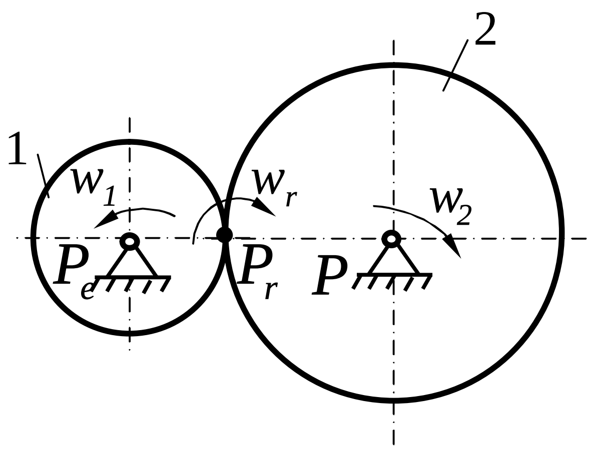


Рисунок 3.30

Рішення

Розкладемо абсолютне обертання колеса 2 навколо його центра (рис. 3.30) на переносне обертання разом з колесом 1 навколо його центра P_e з кутовою швидкістю $w_e = w_1$ і відносне обертання у відношенню до колеса 1 з кутовою швидкістю w_r. Миттєвим центром відносного обертання P_r буде точка дотику коліс. Ця точка колеса 2 не рухається у відношенню до колеса 1. Якщо рухатися разом з колесом 1, то можна побачити рух колеса 2 як кочення по колесу 1, тобто як обертання навколо P_r. За розміщенням точок P_e, P_r, P показуємо напрямок відносного і абсолютного обертань колеса 2 і визначаємо їх кутові швидкості:

$$\frac{w_r}{w_e} = \frac{P_e P}{P_r P}; \quad \frac{w_r}{w_1} = \frac{r_1 + r_2}{r_2}; \quad w_r = w_1 \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

$$w_2 = w_r - w_e = w_1 \frac{r_1 + r_2}{r_2} - w_1 = w_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

3.4 Додавання обертань навколо осей, що перетинаються. Сферичний рух тіла

Припустимо, відносний рух тіла - обертання з кутовою швидкістю w_1 навколо осі z_1, закріпленої на кривошипі 2 (рис. 3.31), а переносний - обертання кривошипа з кутовою швидкістю w_2 навколо осі z_2, яка з віссю z_1 перетинається в точці O. Схематично такий випадок додавання обертань навколо осів, що перетинаються, показаний на рис. 3.32.

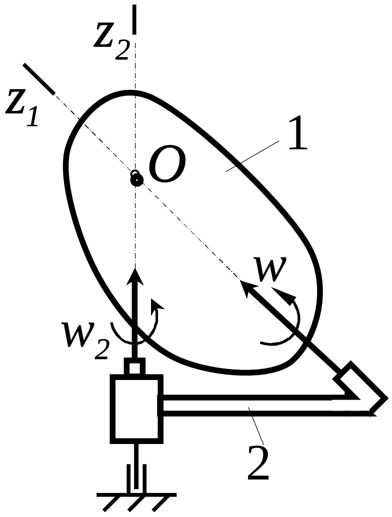


Рисунок 3.31

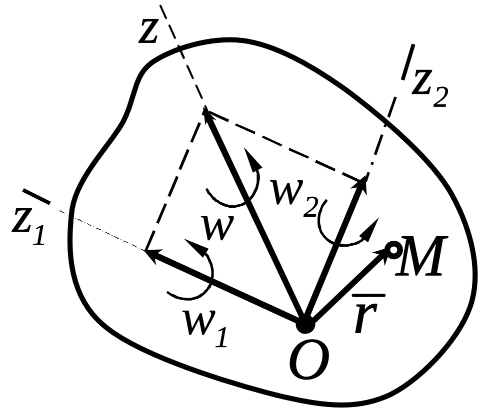


Рисунок 3.32

Очевидно, що в такому випадку швидкість точки O, як такої, що належить одночасно двом осям, буде дорівнювати нулю і результуючий рух тіла буде рухом навколо нерухомої точки O.Тоді тіло має в даний момент часу кутову швидкість w, що спрямована за миттєвою віссю обертання, яка проходить через точку O.

Щоб визначити значення w, знайдемо швидкість довільної точки M тіла, радіус-вектор якої $\overline{r} = OM$. У відносному русі (обертання навколо осі z_1) точка M матиме швидкість

$$\overline{V}_r = \overline{w}_1 \times \overline{r} \ .$$

У переносному русі (обертання навколо осі z_2)

$$\overline{V}_e = \overline{w}_2 \times \overline{r} \ .$$

Тоді абсолютна швидкість точки M

$$\overline{V} = \overline{V}_r + \overline{V}_e = \left(\overline{w}_1 + \overline{w}_2\right) \times \overline{r} \ .$$

Через те, що результуючий рух тіла виявився миттєвим обертальним з деякою кутовою швидкістю $\overline{w}$, то повинно бути

$$\bar{V} = \bar{w} \times \bar{r}\ .$$

Оскільки точка M – довільна точка тіла, отримані рівності повинні виконуватися при будь-якому $\bar{r}$, що можливо лише тоді, коли

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2\ . \tag{3.16}$$

Якщо тіло бере участь в миттєвих обертаннях навколо декількох осів, що перетинаються в точці O, то послідовно використовуючи формулу (3.16), знайдемо, що результуючий рух буде миттєвим обертальним навколо вісі, яка проходить через точку O, з кутовою швидкістю

$$\bar{w} = \sum_i \bar{w}_i\ . \tag{3.17}$$

Використання отриманих результатів розглянемо на прикладі.

Приклад 1

Конус 2 оббігає нерухомий конус 1 за хвилину 15 разів. Визначити кутову швидкість і його кутове прискорення.

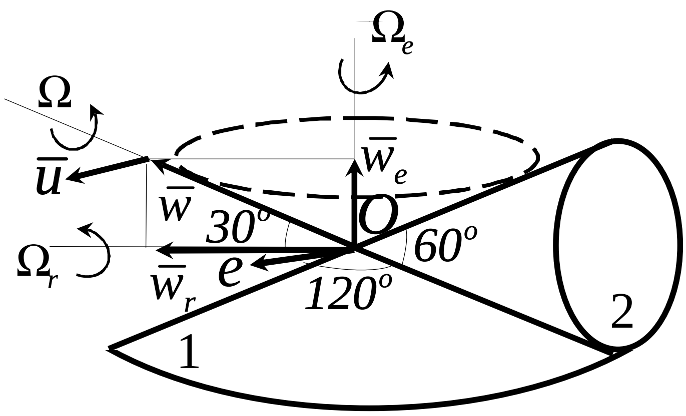


Рисунок 3.33

Рішення

Подамо абсолютне обертання конуса 2 навколо миттєвої осі Ω (рис. 3.33) складеним із відносного обертання навколо осі Ω_r і переносного обертання разом з цією віссю навколо осі нерухомого конуса Ω_e.

Модуль кутової швидкості переносного обертання

$$w_e = \frac{2p \cdot 15}{60} = 0,5p = 1,57c^{-1}.$$

Виходячі з напрямку переносного обертання (проти обертання стрілки годинника, якщо спостерігаємо з гори), відкладемо вектор $\overline{w}_e$ і відбудуємо паралелограм кутових швидкостей. Із паралелограма знаходимо модулі кутових швидкостей абсолютного і відносного обертання конуса 2:

$$w = \frac{w_e}{sin30^o} = \frac{0,5p}{0,5} = p = 3,14\,c^{-1},$$

$$w_r = w_e ctg30^o = 0,5p\sqrt{3} = 2,72\,c^{-1}.$$

Рух конуса 2 є сферичним, бо його вершина O залишається нерухомою. Для визначення кутового прискорення конуса $\overline{e}$ слід будувати годограф кутової швидкості $\overline{w}$ і визначити лінійну швидкість $\overline{u}$ кінця вектора $\overline{w}$.

Годографом $\overline{w}$ буде коло, паралельне обертанню w_e і відносного обертання w_r конуса 2, визначимо модуль обертальної швидкості $\overline{u}$:

$$u = w_e w_r = 0,5p \cdot 0,5p\sqrt{3} = 0,25p^2\sqrt{3} = 4,23\,c^{-2},$$

$$e = u, \quad e = u = 0{,}25p^{2}\sqrt{3} = 4{,}23\,c^{-2}\,.$$

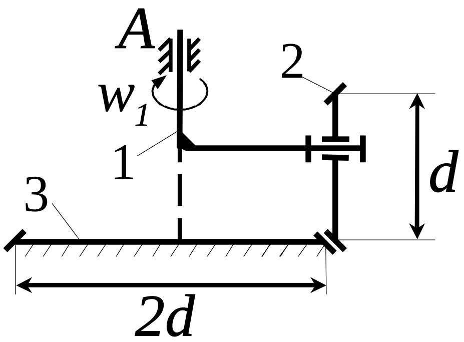
Вектор $\overline{e}$ перпендикулярний до площини паралелограма кутових швидкостей.

Приклади задач для самостійної роботи

1 Тіло одночасно бере участь у двох обертальних рухах з кутовими швидкостями $w_1 = 2\overline{i} + 5\overline{j}$ і $w_2 = 4\overline{i} + 3\overline{j}$. Визначити модуль абсолютної кутової швидкості тіла.

Відповідь: 10.

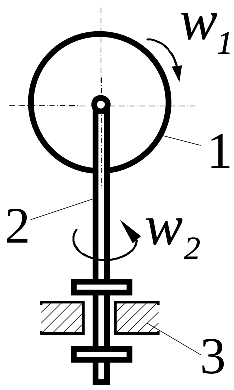
2



На зігнутій осі 1, яка обертається в шарнірі A з кутовою швидкістю $w_1 = 6\ рад/с$, вільно обертається конічне зубчате колесо 2. Останнє знаходиться в зачепленні з нерухомим зубчатим колесом 3. Визначити модуль абсолютної кутової швидкості колеса 2.

Відповідь: $13{,}4$.

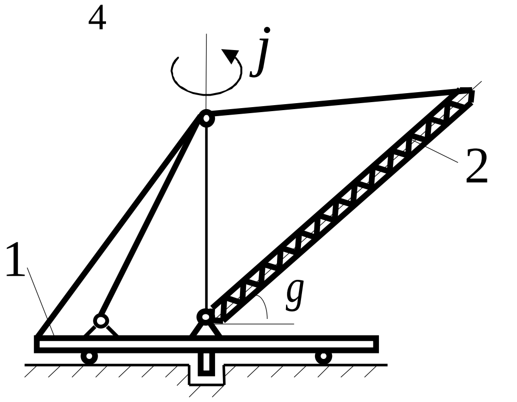
3



Колесо 1 обертається в державці 2 з частотою обертання $300\ об/хв$. Кутова швидкість обертання державки в підшипнику 3 дорівнює $w_2 = 10\ рад/с$. Визначити модуль абсолютної кутової швидкості колеса.

Відповідь: $33{,}3$.

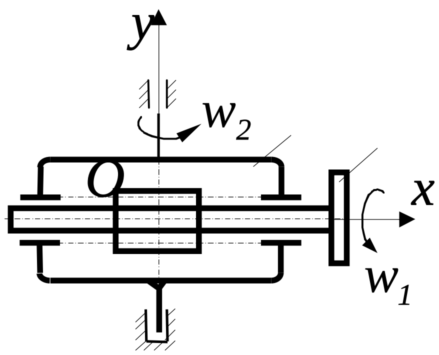
4



Підлога 1 підйомного крана обертається відповідно до рівняння $j = 0,2t$. Кутова швидкість підйому стріли 2 дорівнює $\frac{dg}{dt} = 0,3\ {}^{1}\!/\!{}_{c}$. Визначити модуль абсолютної кутової швидкості стріли.

Відповідь: $0,361$

5



Вал 2 обертається з кутовою швидкістю $w_1 = 2\ рад/с$ відносно корпуса 1. Визначити косинус кута між вектором абсолютної кутової швидкості вала віссю x, якщо корпус 1 обертається з кутовою швидкістю $w_2 = 4\ рад/с$.

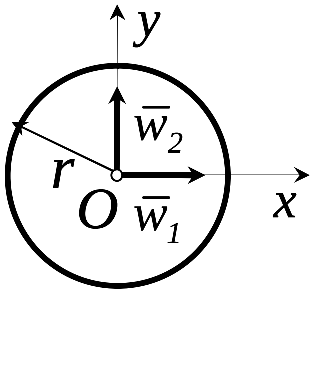
Відповідь: $0,447$.

6

Сферична оболонка радіуса $r = 0,5\ м$ бере участь одночасно в двох обертальних рухах з кутовими швидкостями $w_1 = 2\ рад/с$ і $w_2 = 4\ рад/с$. Визначити модуль швидкості точки M оболонки у зображеному стані.

Відповідь: $2,5$.

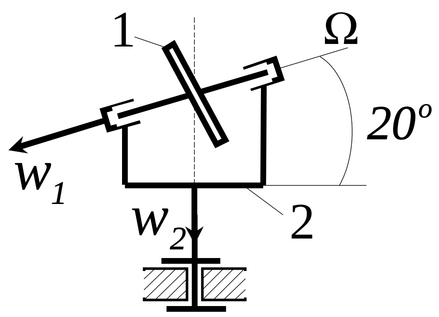
7



Колесо радіуса $r = 0,5\ м$ бере участь одночасно в двох обертальних рухах зі швидкостями $w_1 = w_2 = 2\ рад/с$. Визначити модуль швидкості тієї точки колеса, для якої цей модуль має максимальне значення.

Відповідь: $1,41$.

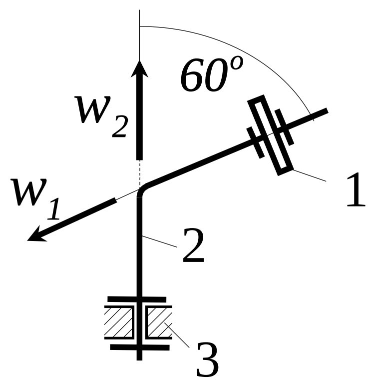
8



Колесо 1 обертається навколо вісі Ω, яка в свою чергу обертається навколо вертикальної вісі. Кутова швидкість $w_1 = 20\ ^1\!/_c$, $w_2 = 10\ ^1\!/_c$. Визначити модуль абсолютної кутової швидкості колеса 1.

Відповідь: $25{,}2$.

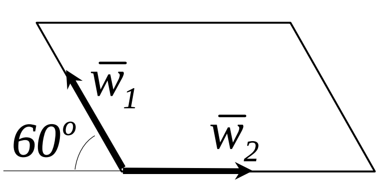
9



Колесо 1 обертається на зігнутій вісі 2 з кутовою швидкістю $w_1 = 4\ ^1\!/_c$. Швидкість обертання осі 2 в підшипнику 3 дорівнює $w_2 = 4\ ^1\!/_c$. Визначити модуль абсолютної кутової швидкості колеса.

Відповідь: 4.

10



Пластина бере участь в двох обертальних рухах з кутовими швидкостями $w_1 = 2\ ^1\!/_c$ і $w_2 = 4\ ^1\!/_c$. Який кут в утворює вектор абсолютної кутової швидкості з вектором $\overline{w}_2$?

Відповідь: 30^o.

4 СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

Якщо об’єкт здійснює водночас не один, а декілька рухів, то такий рух об’єкта називається складеним або складним.

Раніше були розглянуті складні рухи твердого тіла, тобто додавання поступальних рухів, поступального і обертального, а також додавання обертальних рухів навколо осів, які перетинаються (сферичний рух тіла).

Додавання рухів твердого тіла зводилося до загального руху твердого тіла, який називається **абсолютним рухом**; складовими цього руху є **переносний рух** та **відносний рух** тіла.

Детальніше розглянемо складний рух на прикладі складного руху однієї точки, яка може рухатись сама по собі, або може здійснювати складний рух.

При розгляді складного руху точки в загальному випадку необхідно розглянути змінення векторів з течією часу по відношенню до систем відліку, які рухаються одна відносно іншої.

Нерухомою системою відліку вважається система, рух якої відносно інших систем відліку не розглядається.

4.1 Абсолютна і відносна похідні від вектора. Формула Бура

Введемо позначення похідних від вектора при зміненні його відносно різних систем відліку, які рухаються одна відносно іншої.

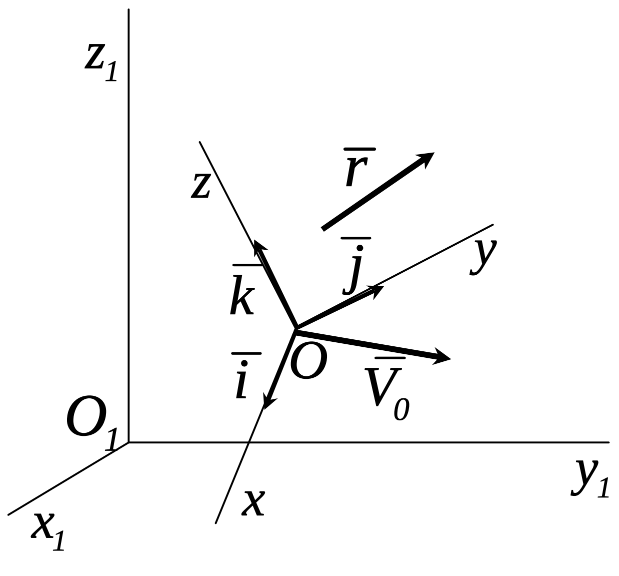


Рисунок 4.1

Для будь-якого вектора $\bar{r}(t)$ (рис. 4.1), його похідну за часом у відношенні до нерухомої системи відліку називають **повною** або **абсолютною** похідною і позначають $\frac{d\bar{r}}{dt}$. Похідну за часом при врахуванні зміни вектора $\bar{r}$ відносно рухомої системи відліку називають **відносною** або **локальною** похідною і позначають $\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}$.

Установимо залежність між відносною та абсолютною похідними за часом вектора $\bar{r}$ і величинами, що характеризують рух рухомої системи відліку відносно нерухомої. Для цього розкладемо вектор $\bar{r}$ на складові, паралельні осям рухомої системи координат.

$$\bar{r} = r_x\bar{i} + r_y\bar{j} + r_z\bar{k}\,. \tag{4.1}$$

Підрахуємо повну похідну за часом від вектора $\bar{r}$, використовуючи (4.1). Отримаємо:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\bar{i} + \frac{dr_y}{dt}\bar{j} + \frac{dr_z}{dt}\bar{k} + r_x\frac{d\bar{i}}{dt} + r_y\frac{d\bar{j}}{dt} + r_z\frac{d\bar{k}}{dt}\,. \tag{4.2}$$

Перші три доданки враховують змінення вектора $\bar{r}$ при незмінних $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ і тому складають відносну похідну, тобто

$$\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\bar{i} + \frac{dr_y}{dt}\bar{j} + \frac{dr_z}{dt}\bar{k}\,. \tag{4.3}$$

Похідні за часом від одиничних векторів визначаються за формулами Пуассона:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{w} \times \bar{i}, \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{w} \times \bar{j}, \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{w} \times \bar{k}. \tag{4.4}$$

Підставимо значення похідних (4.3), (4.4) в (4.2) і винесемо $\bar{w}$ за дужки, отримаємо

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + \bar{w} \times \left(r_x \bar{i} + r_y \bar{j} + r_z \bar{k} \right).$$

або, з урахуванням (4.1)

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + \bar{w} \times \bar{r}. \tag{4.5}$$

Отримана формула (4.5) називається **формулою Бура**.

4.2 Додавання швидкостей точки

Якщо $O_1x_1y_1z_1$ – нерухома система осів координат, $Oxyz$ – рухома (рис. 4.5), то, як відомо, **абсолютним** рухом точки називають її рух відносно нерухомої системи осів координат, а **відносним** – її рух відносно рухомої.

Переносним рухом точки називають її рух разом з рухомою системою осів координат відносно нерухомих. Відносні швидкість і прискорення позначають $\bar{V}_r$ і $\bar{a}_r$,

переносні – $\bar{V}_e$ і $\bar{a}_e$,

абсолютні – $\bar{V}$ і $\bar{a}$.

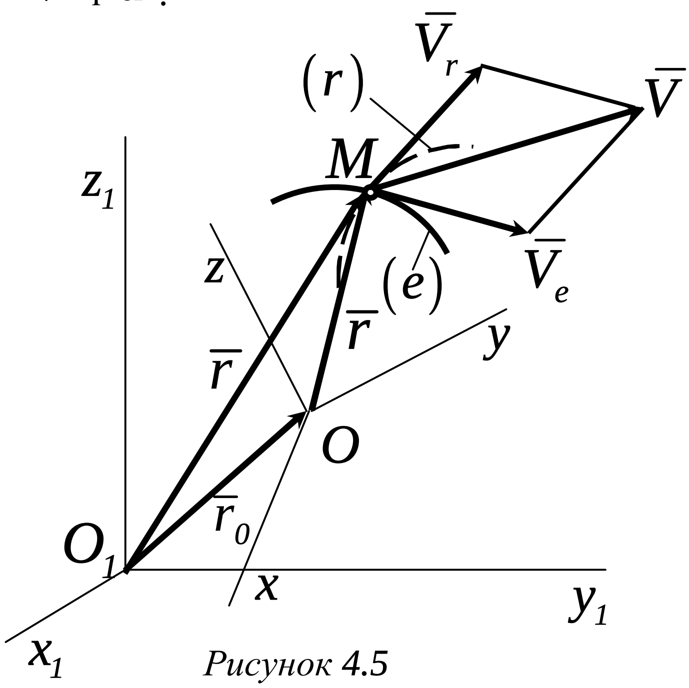


Рисунок 4.5

Отримаємо теорему додавання швидкостей для довільного моменту часу

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r} \,. \tag{4.6}$$

Знайдемо похідну за часом від (4.6). Отримаємо

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} \,. \tag{4.7}$$

За визначенням:

$\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}$ – абсолютна швидкість точки M ,

$\dfrac{d\bar{r}_0}{dt} = \bar{V}_0$ – абсолютна швидкість точки O.

Для обчислення $\dfrac{d\bar{r}}{dt}$ скористаємось формулою Бура (4.5). Похідна $\dfrac{d\bar{r}}{dt} = V_r$ – відносна швидкість точки M , а w – кутова швидкість обертання рухомої системи відліку. Таким чином, із (4.7) отримуємо

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{w} \times \bar{r} + \bar{V}_r\,, \tag{4.8}$$

де $\bar{V}_0 + \bar{w} \times \bar{r} = \bar{V}_e$ – переносна швидкість точки M. Із (4.8) отримуємо теорему додавання швидкостей точки:

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r\,. \tag{4.9}$$

4.3 Додавання прискореннь точки

Абсолютне прискорення точки визначимо обчисленням повної похідної за часом від абсолютної швидкості (4.8). Маємо

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{V}_0 + \bar{w} \times \bar{r} + \bar{V}_r\right) = \frac{d\bar{V}_0}{dt} + \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{r} + \bar{w} \times \frac{d\bar{r}}{dt} + \frac{d\bar{V}_r}{dt}\,.$$

Для повних похідних від векторів $\bar{r}$ і $\bar{V}_r$ застосовуємо формулу Бура. Отримаємо

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + \bar{w} \times \bar{r}\,, \qquad \frac{d\bar{V}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{V}_r}{dt} + \bar{w} \times \bar{r}\,.$$

Враховуючи, що

$$\frac{d\bar{V}_0}{dt} = \bar{a}_0, \quad \frac{d\bar{w}}{dt} = \bar{e}\,, \quad \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = \bar{V}_r, \quad \frac{\tilde{d}\bar{V}_r}{dt} = \bar{a}_r,$$

Отримаєм для абсолютного прискорення

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{e} \times \bar{r} + \bar{w} \times \left(\bar{w} \times \bar{r}\right) + \bar{a}_r + 2\left(\bar{w} \times \bar{V}_r\right). \tag{4.10}$$

У формулі (4.10) перші три доданки складають прискорення точки твердого тіла в загальному випадку його руху разом з рухомою системою осів координат відносно нерухомої, $\overline{a}_0$ – прискорення точки O, $\overline{e}\times\overline{r}$ і $\overline{w}\times\left(\overline{w}\times\overline{r}\right)$ – відповідно обертальне (дотичне) і нормальне прискорення точки M , як би вона рухалась тільки разом з рухомою системою осів координат, не маючи в данний момент часу відносного руху. Після цього (4.10) набуває вигляду

$$\overline{a}=\overline{a}_e+\overline{a}_r+\overline{a}_k\,.$$

У тому випадку, коли переносний і відносний рухи точки мають криволінійні траєкторії, то

$$\overline{a}_e=\overline{a}_e^n+\overline{a}_e^t \text{ і } \overline{a}_r=\overline{a}_r^n+\overline{a}_r^t$$

Тоді рівняння (4.11) буде мати вигляд

$$\overline{a}=\overline{a}_e^n+\overline{a}_e^t+\overline{a}_r^n+\overline{a}_r^t+\overline{a}_k\,. \tag{4.12}$$

У рівняннях (4.11) і (4.12) прискорення $\overline{a}_k$ називається **прискоренням Коріоліса**. Воно визначається формулою

$$\overline{a}_k=2\left(\overline{w}\times\overline{V}_r\right). \tag{4.13}$$

Співвідношення (4.11) і (4.12) формулюють теорему додавання прискорень точки, або кінематичну теорему Коріоліса.

4.4 Прискорення Коріоліса

Розглянемо прискорення Коріоліса і його властивості. Воно визначається формулою (4.13). Модуль прискорення Коріоліса визначається відповідно формулі (4.13) виразом

$$\bar{a}_k = 2w_e \cdot V_r \cdot sin\left(\bar{w}_e, \bar{V}\right) \tag{4.14}$$

Для спрямування прискорення Коріоліса використаємо правило векторного добутку, згідно з яким вектор, що дорівнює векторному добутку двох інших векторів, перпендикулярний площині, в якій знаходяться ці два вектори, і спрямований так, що з його кінця оберт від першого векора додутку до другого через менший з кутів, видно проти ходу годинникової стрілки.

Пояснимо це правило векторного добутку на конкретних прикладах для визначення напрямку прискорення Коріоліса.

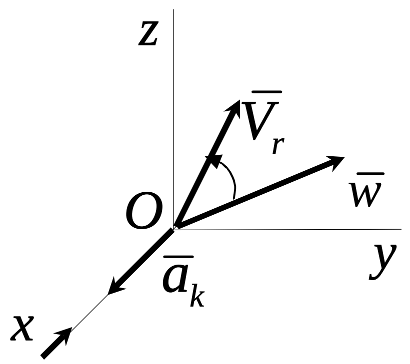


Рисунок 4.6

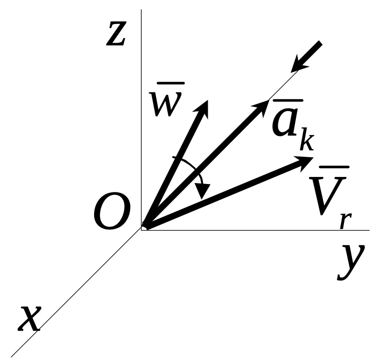


Рисунок 4.7

На рисунках 4.6 і 4.7 вектори $\bar{w}$ і $\bar{V}_r$ розташовані в площині Oyz. Тому прискорення Коріоліса, яке перпендикулярне цій площині, спрямовано вздовж осі x. На рис. 4.6 коротший оберт вектора $\bar{w}$ до сумісності з вектором $\bar{V}_r$ спостерігається проти ходу годинникової стрілки з додатнього напрямку вісі x. Тому вектор $\bar{a}_k$ має напрямок, що збігається з напрямком вісі, а на рис. 4.7 навпаки.

Розглянемо випадки, коли прискорення Коріоліса дорівнює нулю, які випливають із рівняння (4.14):

1 Якщо $w_e = 0$, тобто переносний рух є поступальним.

2 Якщо $V_r = 0$, тобто в ті моменти часу, коли змінюється напрямок відносного руху.

3 Якщо $\sin\left(\overline{w}_e, \overline{V}_r\right) = 0$, тобто коли швидкість відносного руху $\overline{V}_r$ паралельна кутовій швидкості переносного обертання .

Наведемо приклади використання теорем про додавання швидкостей і прискореннь при розв'язанні задач.

Приклад 1

Точка M рухається вздовж прямої OA зі швидкістю $\overline{V}_r$, а сама пряма обертається в площині Ox_1y_1 навколо центра O з кутовою швидкістю w. Визначити швидкість точки M відносно осів Ox_1y_1 у залежності від відстані $OM = r$ (рис. 4.8).

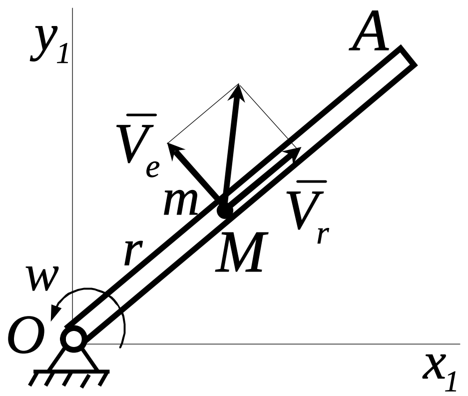


Рисунок 4.8

Рішення

Розглянемо рух точки M як складний, який складається із відносного руху вздовж прямої OA і руху разом з цією прямої. Тоді швидкість $\bar{V}_r$, що спрямована вздовж OA, буде відносною швидкістю точки. Обертальний рух прямої OA навколо центра O для точки M є переносним рухом, а швидкість цієї точки m прямої OA, з якою в даний момент часу співпадає точка M, буде її переносною швидкістю $\bar{V}_e$. Ця точка прямої рухається колом радіуса $Om = r$, отже за модулем швидкість $V_e = wr$ і перпендикулярна Om. Побудуємо на векторах $\bar{V}_r$ і $\bar{V}_e$ паралелограм, знаходимо абсолютну швидкість $\bar{V}$ точки M за відношенням до осів Ox_1y_1. Оскільки $\bar{V}_r$ і $\bar{V}_e$ взаємно перпендикулярні, то за модулем

$$V = \sqrt{V_r^2 + w^2 r^2}\ .$$

Приклад 2

У кривошипно-повзунному механізмі (рис. 4.9) кривошип OA довжиною r обертається з кутовою швидкістю w. Довжина шатуна AB дорівнює l. При даному куті j визначити швидкість повзуна відносно кривошипа OA. Знайти також абсолютну швидкість повзуна.

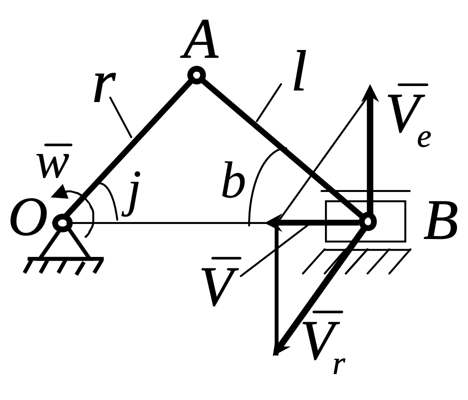


Рисунок 4.9

Рішення

Повзун рухається поступально і його швидкість дорівнює швидкості точки B, яка одночасно належить шатуна AB. Отже, розв'зання задачі зводиться до визначення швидкості точки B шатуна.

Рух шатуна AB у відношенні до кривошипа OA являє собою обертання навколо шарніра A. Точка B при цьому обертанні описує коло радіуса AB. Отже, швидкість $\bar{V}_r$ точки B у відношенні до кривошипа спрямована перпендикулярно AB. Зауважимо ще, що абсолютна швидкість $\bar{V}$ точки B спрямована вздовж BO.

Переносним для точки B є рух кривошипа OA. Уявимо собі, що з кривошипом жорстко зв'язаний трикутник OAB, який обертається разом з кривошипом навколо осі O з кутовою швидкістю w. Тоді швидкість точки B трикутника OAB, яка співпадає в даний момент часу з точкою B шатуна AB, буде переносною швидкістю $\bar{V}_e$ точки B шатуна. Ця точка трикутника рухається колом радіуса OB. Отже, швидкість $\bar{V}_e$ має напрямок, перпендикулярний до OB і чисельно дорівнює $V_e = w \cdot AB$. Оскільки

$$AB = l \cdot cosb + r \cdot cosj ,$$

то

$$V_e = w\left(l \cdot cosb + r \cdot cosj\right).$$

Відбудуємо із векторів $\bar{V}_r$, $\bar{V}_e$ і $\bar{V}$ відповідний паралелограм.

Із нього видно, що

$$V_r = V_e / cosb$$

або

$$V_r = w\left(l + r\,cosj\,/cosb\,\right).$$

Виключимо кут b із отриманого рівняння. Із трикутника OAB знаходимо, що

$$lsinb = rsinj\ .$$

Тоді $cosb = \sqrt{1 - \left(r^2/l^2\right)sin^2 j}$ і остаточно значення відносної швидкості

$$V_r = wl\left(1 + \frac{rcosj}{\sqrt{l^2 - r^2 sin^2 j}}\right).$$

Для визначення абсолютної швидкості $\bar{V}$ точки B звернемося знову до паралелограму швидкостей. Із нього

$$V = V_r \cdot sinb\ .$$

Ураховуючи, що

$$sinb = \left(rsinj\ \right)/l$$

для $\bar{V}$ отримаємо те саме значення, яке іншим шляхом було знайдене при розгляді плоского руху шатуна AB.

У окремрму випадку, коли $r = l$, отримуємо $V_r = 2wl$, $V = 2wlsinj$.

Приклад 3

Клин рухається прямолінійно горизонтальною площиною з прискоренням $\bar{a}_1$ і переміщує вздовж вертикальних напрямних стрижень DE (рис. 4.10). Визначити прискорення стрижня, якщо кут клина дорівнює a .

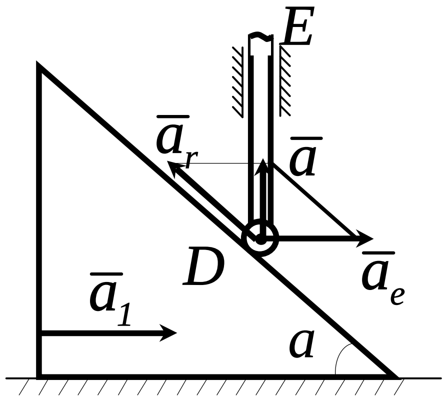


Рисунок 4.10

Рішення

Абсолютне прискорення $\bar{a}$ точки D стрижня направлене вертикально вгору. Його можна розглядати як таке, що складається із відносного прискорення $\bar{a}_r$, спрямованого вздовж похиленої площини клина, і переносного прискорення $\bar{a}_e$, яке дорівнює прискоренню клина $\bar{a}_1$, оскільки переносний рух є поступальним рухом клина. Побудуємо за допомогою теореми про додавання прискорень паралелограм. Ураховуючи, що $\bar{a}_1 = \bar{a}_e$, знайдемо

$$a = a_e tga \ .$$

Величина a визначає прискорення стрижня DE .

Приклад 4

Куліса OA обертається зі сталою відносною швидкістю w навколо осі O (рис. 4.11). По прорізі куліси ковзає повзун B зі сталою відносною швидкістю U. Визначити абсолютне прискорення повзуна в залежності від відстані x до осі O.

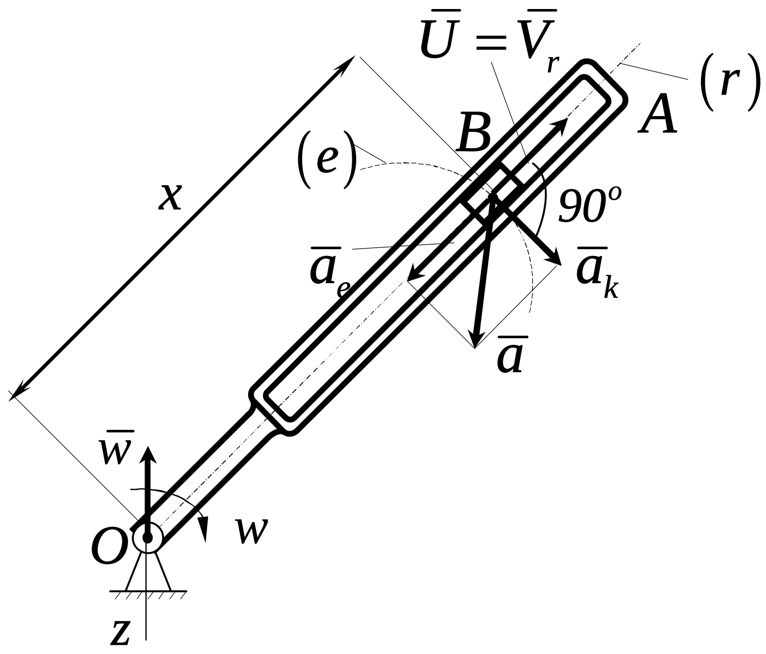


Рисунок 4.11

Рішення

Відповідно умовам задачі відносний рух повзуна по прорізі куліси рівномірний і прямолінійний, а тому $a_r = 0$.

Рух куліси OA буде для повзуна B переносним. Отже, переносне прискорення повзуна дорівнює прискоренню тієї точки куліси, з якою в даний момент часу співпадає повзун. Ця точка куліси рухається колом радіуса $OB = x$ і $w = const$, Отже вектор $\overline{a}_e = \overline{a}_e^n$ і спрямований вздовж BO, а модуль

$$a_e = w^2 x.$$

Прискорення Коріоліса

$$a_k = 2wU,$$

бо рух є плоским. Обернемо вектор $\overline{w}$ навколо точки B за коротшим напрямком до сумісності з вектором відносної швидкості $\overline{V}_r\left(\overline{U}\right)$, знаходимо напрямок $\overline{a}_k$. Відповідно до теореми Коріоліса

$$\overline{a} = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k .$$

У даному випадку $a_r = 0$,а $\overline{a}_k$ перпендикулярне $\overline{a}_e$. Отже,

$$\overline{a} = \sqrt{a_e^2 + a_k^2} = w\sqrt{w^2x^2 + 4U^2} .$$

Приклад 5

Ексцентрик, який являє собою диск радіуса R, обертається зі сталою кутовою швидкістю w навколо осі O, яка проходить через край диска (рис. 4.12). Ободом диска зі сталою відносною швидкістю $U\left(V_r\right)$ ковзає штифт M , починаючий свій рух із точки A. Визначити абсолютне прискорення штифта у довільний момент часу t. Напрямки рухів і траєкторії їх показані на рисунку 4.12.

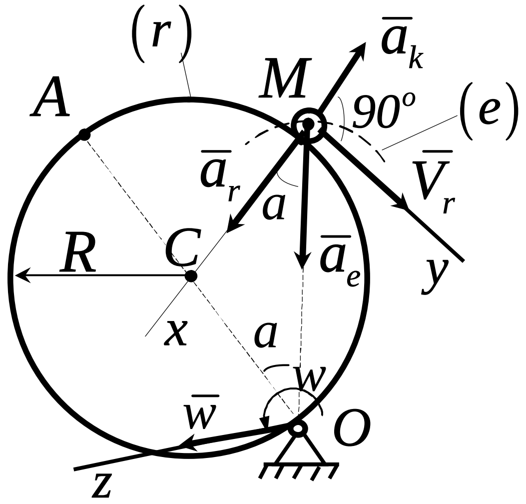


Рисунок 4.12

Рішення

У момент часу t штифт знаходиться в точці A на відстані $S = AM = Ut$. Отже, в цей момент часу

$$\angle AOM = a,$$

де $a = \dfrac{S}{2R} = \dfrac{U}{2R}t$,

так як кут a дорівнює половині центрального кута ACM.

Рахуємо рух штифта M ободом диска відносним рухом (r). Він здійснюється колом радіуса R. Так як $V_r = U = const$, то

$$a_r^t = \dot{U} = 0, \qquad a_r^n = \frac{U}{R}.$$

Направлений вектор $\overline{a}_r = \overline{a}_r^n$ за радіусом MC.

Рух диска буде для штифта M переносним рухом (e). Отже, переносне прискорення штифта дорівнює прискоренню тієї точки диска, з якою в даний момент часу співпадає штифт. Ця точка диска рухається колом радіуса $OM = 2Rcosa$. Так як для диска $w = const$, то $e = 0$ і

$$a_e^t = OM \cdot e = 0, \; a_e^n = OM \cdot w^2 = 2Rw^2cosa.$$

Проходить вектор $\overline{a}_e = \overline{a}_e^n$ вздовж лінії MO.

Оскільки рух здійснюється в одній площині і в даному випадку

$$a_k = 2wU,$$

Через те, що кут між векторами $\overline{w}$ і $\overline{U}\left(\overline{V}_r\right)$ складає 90^o, а $\sin\left(\overline{w}_e,\overline{V}_r\right)=\sin 90^0=1$.

Напрямок $\overline{a}_k$ отримуємо, обертаючи вектор $\overline{w}$ за коротшим напрямком до сумісності з вектором $\overline{V}_r\left(\overline{U}\right)$ навколо точки M. У даному випадку це кут 90^o, бо вектор відносної швидкості $\overline{V}_r\left(\overline{U}\right)$ розташований в площині рисунку, а вектор $\overline{w}$ напрямлений по осі z, яка перпендикулярна площині рисунку.

Абсолютне прискорення штифта M визначається рівнянням

$$\overline{a}=\overline{a}_r+\overline{a}_e+\overline{a}_k .$$

Для визначення модуля $\overline{a}$ спроектуемо обидві частини цього рівняння на обрані вісі координат x і y (рис. 4.12). Отримаємо

$$a_x=a_r+a_e cosa-a_k ,$$

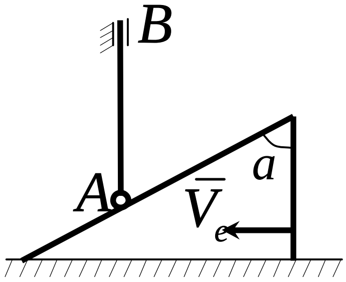
$$a_y=a_e sina .$$

Тоді

$$a=\sqrt{\left(a_r+a_e cosa-a_k\right)^2+a_e^2 sin^2 a} ,$$

де усі значення a, a_r, a_e, a_k були вже визначенні раніше.

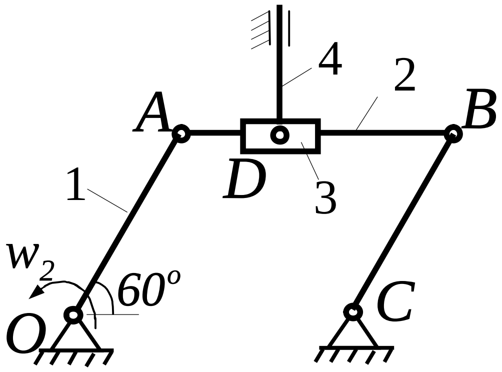
1



По грані призми, яка рухається з швидкістю $\bar{V}_e$, рухається кінець стрижня AB. При якому куті a в градусах абсолютна швидкість точки A буде дорівнювати швидкості призми $\bar{V}_e$?

Відповідь: 45^o.

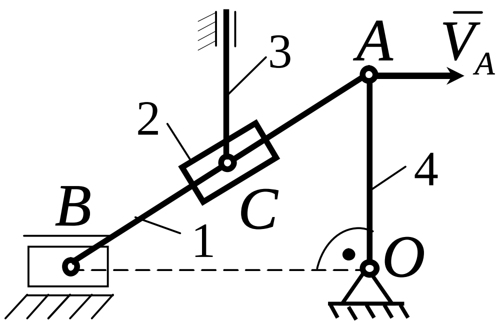
2



Поверхнею шатуна 2 шарнірного паралелограма $OABC$ ковзає втулка 3. У точці D втулки шарнірно закріплений стрижень 4. Для даного положення механізму визначити швидкість стрижня 4, якщо швидкість точки A кривошипа 1 дорівнює $2\ м/с$.

Відповідь: $1,0$

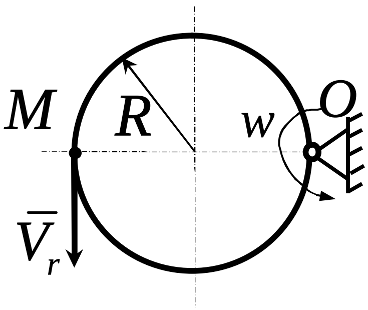
3



На шатун 1 кривошипно-повзунного механізму надіта втулка 2. У точці C втулки шарнірно закріплений стрижень 3. Для даного положення механізму визначити швидкість стрижня 3, якщо довжина $CA = 0,5AB$ і швидкість точки C кривошипа 4 дорівнює $V_A = 3\ м/с$.

Відповідь: $1,73$.

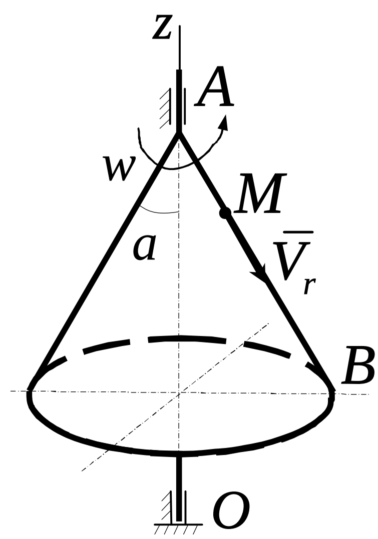
4



Точка M рухається по ободу диска, радіус якого $R = 0{,}06\ м$, зі швидкістю $V_r = 0{,}04\ м/с$. Визначити абсолютну швидкість точки M в указаному положенні, якщо закон обертання диска $\varphi = t$.

Відповідь: $0{,}16$

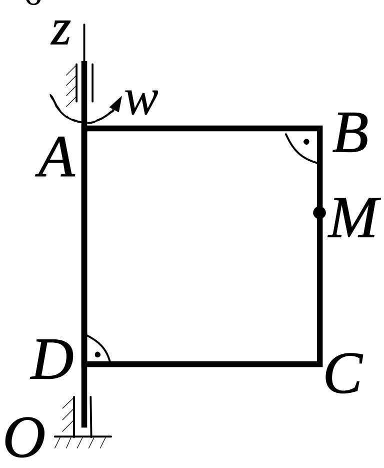
5



Конус обертається навколо вісі Oz з кутовою швидкістю $\omega = 3\,с^{-1}$. По його стороні AB зі сталою швидкістю $V_r = 4\ м/с$ рухається точка M у напрямку від A до AB. Визначити модуль абсолютної швидкості цієї точки в положенні, коли відстань $AM = 2\ м$, якщо кут $\alpha = 30^o$.

Відповідь: 5.

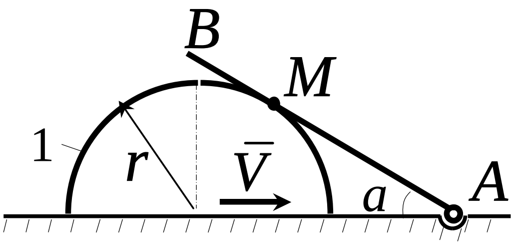
6



Пластина $ABCD$ обертається навколо осі Oz з кутової швидкістю $\omega = 4t$. По її стороні BC в напрямку від B до C рухається точка M зі сталою швидкістю $9\ м/с$. Визначити модуль абсолютної швидкості точки M в момент часу $t = 3\,с$, якщо довжина $AB = 1\,м$.

Відповідь: 15.

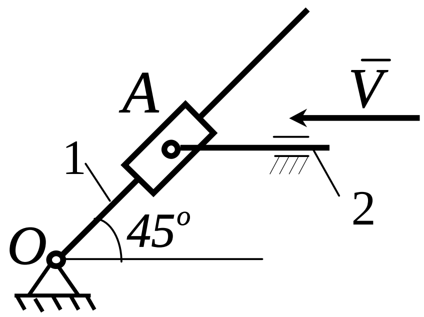
7



Тіло 1, яке має форму напівциліндра, ковзає горизонтальною площиною зі швидкістю $V = 0{,}2\ м/с$, обертає шарнірно закріплений в точці A стрижень AB. Визначити відносну швидкість точки дотику M, якщо кут $a = 30^o$.

Відповідь: $0{,}173$.

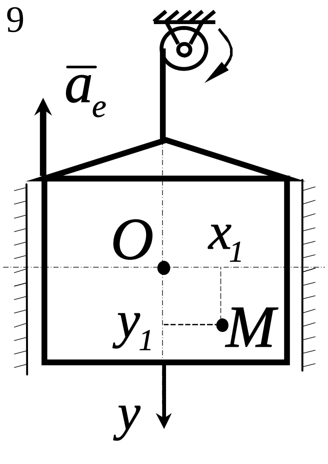
8



Стрижень 2 кулісного механізму рухається зі швидкістю $V = 1\ м/с$. Для указаного положення механізму визначити кутову швидкість куліси 1, якщо відстань $OA = 1\ м$.

Відповідь: $0{,}707$

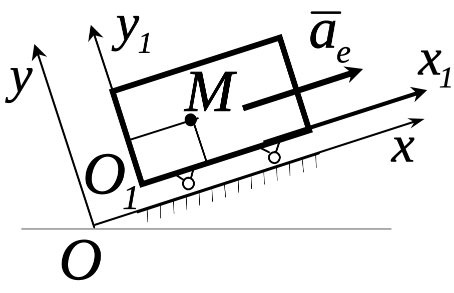
9



Кабіна ліфта підіймається зі сталим прискоренням $a_e = 5\ м/с^2$. У кабіні у площині рисунку рухається точка M за законом $x_1 = 0{,}5t^2$, $y_1 = 0{,}3t^2$. Визначити абсолютне прискорення точки M.

Відповідь: $4{,}51$.

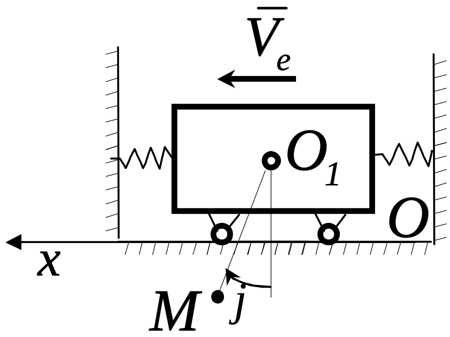
10



Тягарець рухається по нахиленій площині з прискоренням $a_e = 2\ м/с^2$. По вантажку в площині рисунка рухається точка M відповідно до рівнянь $x_1 = 3t^2$ і $y_1 = 4t^2$. Визначити абсолютне прискорення точки.

Відповідь: $11{,}3$.

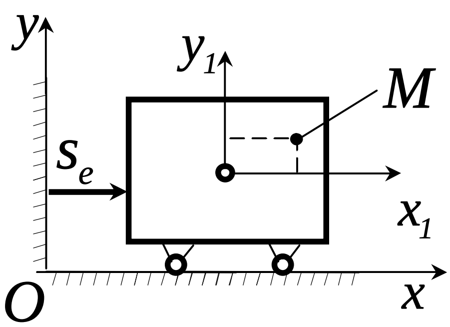
11



Тягарець рухається зі швидкістю $V_e = sin(p/3)t$. Стрижень O_1M довжиною $1\, м$, закріплений в центрі тягарця, рухається за законом $j = 0{,}5pt$. Визначити абсолютне прискорення кінця стрижня (точки M) в момент часу $t = 0{,}5\, c$.

Відповідь: $1{,}93$

12



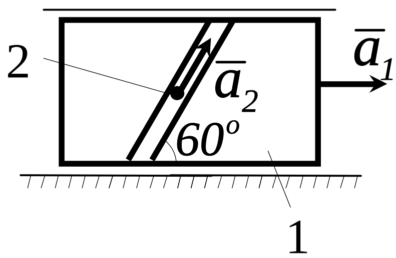
Тягарець рухається за законом $s_e = 0{,}5t^3$. По ньому в площині рисунка рухається точка M відповідно до рівнянь $x_1 = 0{,}3t$ і $y_1 = 0{,}1t^2$. Визначити абсолютне прискорення точки M в момент часу $t = 1\, c$.

Відповідь: $3{,}01$.

13 Відносний рух точки M визначається рівняннями $x_r = e^t$, $y_r = 2sint$, а переносний поступальний рух – рівняннями $x_e = e^{-t}$, $y_e = 2cost$. Осі абсолютної та відносної систем координат паралельні. Визначити модуль абсолютного прискорення точки M в момент часу $t = 0$.

Відповідь: $2,83$.

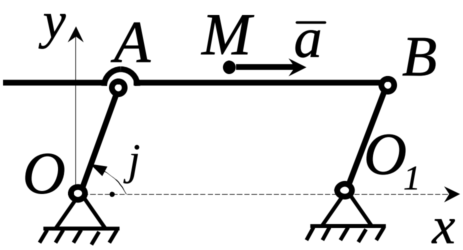
14



Повзун 1 рухається за горизонтальними напрямними зі сталим прискоренням $a_1 = 4\ м/с^2$. Точка 2 переміщується у відношенні до повзуна з прискоренням $a_2 = 3\ м/с^2$. Визначити абсолютне прискорення точки.

Відповідь: $6,08$.

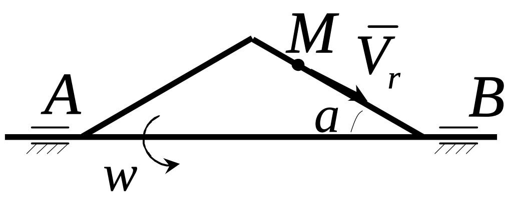
15



По стрижню AB шарнірного паралелограма $OABO_1$ рухається точка M з прискоренням $a = const$. Стрижень OA довжиною $2\ м$ обертається відповідно до рівняння $j = t$. Визначити модуль абсолютного прискорення точки M в момент часу $t = p$.

Відповідь: $1,0$.

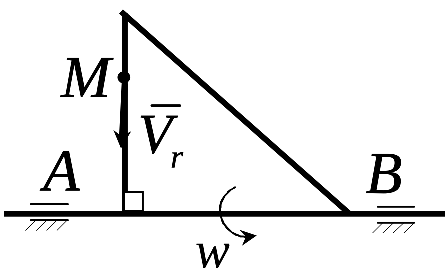
16



По стороні трикутника, який обертається навколо сторони AB з кутовою швидкістю $w = 4\ {}^{1}\!/_{c}$, рухається точка M з відносною швидкістю $V_r = 2\ м/с$. Визначити модуль прискорення Коріоліса точки M, якщо кут $a = 30^o$.

Відповідь: 8.

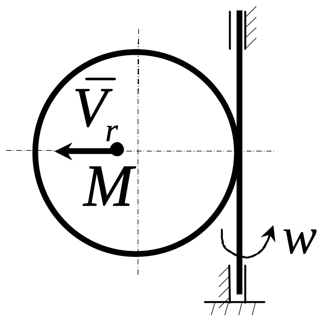
17



По стороні трикутника, який обертається навколо сторони AB з кутовою швидкістю $w = 8\ {}^{1}\!/_{c}$, рухається точка M з відносною швидкістю $V_r = 4\ м/с$. Визначити модуль прискорення Коріоліса точки M.

Відповідь: 64.

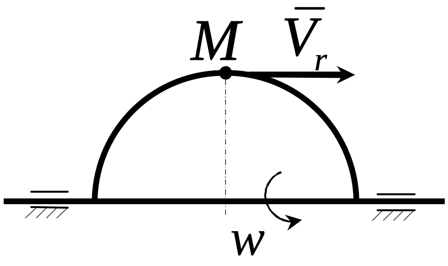
18



Діаметром диска, який обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю $w = 2t$, рухається точка M з відносною швидкістю $V_r = 4t$. Визначити модуль прискорення Коріоліса точки M в момент часу $t = 2\ c$.

Відповідь: 64.

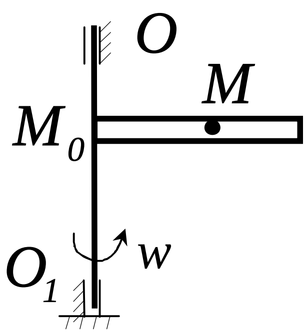
19



Ободом півкола, яке обертається навколо діаметра з кутовою швидкістю $w = 4\ {}^{1}\!/_{c}$, рухається точка M з відносною швидкістю $\bar{V}_r$. Визначити модуль прискорення Коріоліса точки M у вказаному положенні.

Відповідь: 0 .

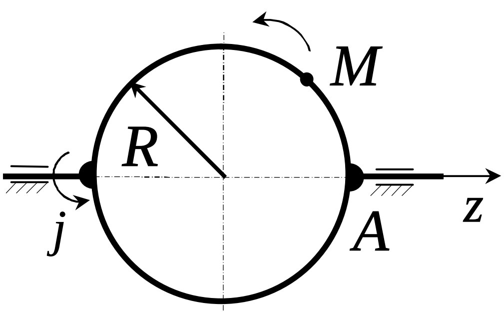
20



Трубка обертається навколо осі OO_1 з кутовою швидкістю $w = 1,5\ {}^{1}\!/_{c}$. Точка M рухається вздовж трубки за законом $M_0M = 4t$. Знайти модуль прискорення Коріоліса точки M .

Відповідь: 12 .

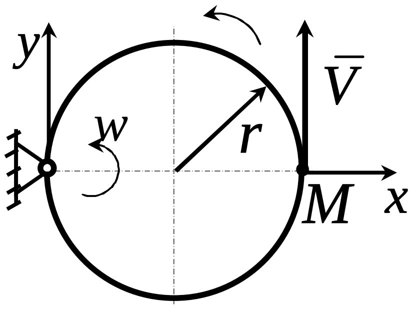
21



Диск обертається навколо осі Oz за законом $j = 4sin0,25pt$. Ободом диска рухається точка M відповідно рівнянню $AM = 0,25pRt^2$. Визначити прискорення Коріоліса точки M в момент часу $t = 1c$, якщо радіус $R = 0,4\ м$.

Відповідь: $1,98$.

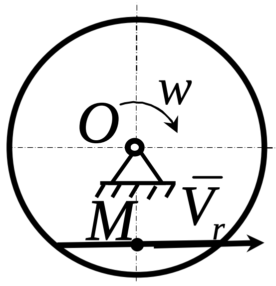
22



Кільце радіуса $r = 0{,}5\ м$ обертається зі сталою кутовою швидкістю $w = 4\ ^1/_с$ в площині рисунка. Кільцем переміщується точка M зі сталою швидкістю $V = 2\ м/с$. Визначити модуль абсолютного прискорення точки M в указаному положенні.

Відповідь: 40.

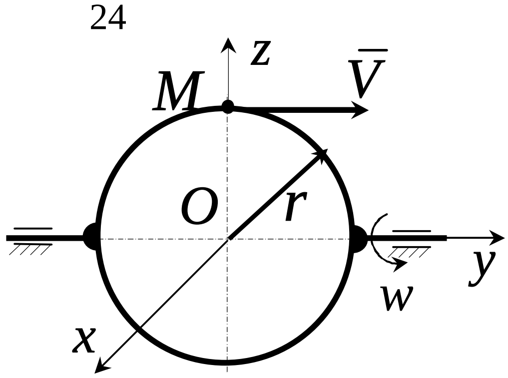
23



Точка M рухається з відносною швидкістю $V_r = 0{,}5t$ за хордою диска, який обертається навколо осі O, перпендикулярній площині диска, з кутовою швидкістю $w = 0{,}5\ ^1/_с$. Визначити абсолютне прискорення точки M в момент часу $t = 2\ с$, якщо відстань $OM = 0{,}02\ м$.

Відповідь: $1{,}11$.

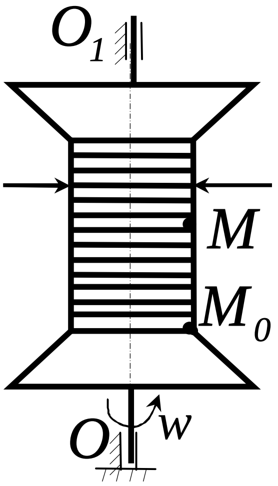
24



Точка M рухається зі сталою швидкістю $V = 2\ м/с$ по кільцю радіуса $r = 0{,}5\ м$, яке обертається зі сталою кутовою швидкістю $w = 4\ ^1/_с$. Визначити модуль абсолютного прискорення точки M в указаному положенні.

Відповідь: 16.

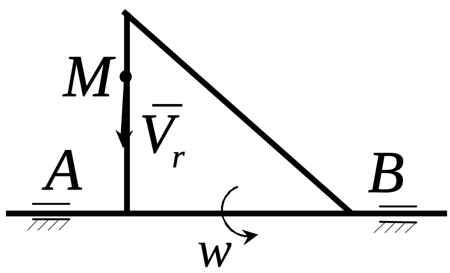
25



Котушка обертається навколо осі OO_1 з кутовою швидкістю $w = 2\ ^1/_c$. Вздовж котушки переміщується точка M за законом $M_0M = 0{,}04t^2$. Визначити абсолютне прискорення точки M, якщо радіус $r = 0{,}02\ м$.

Відповідь: $0{,}113$.

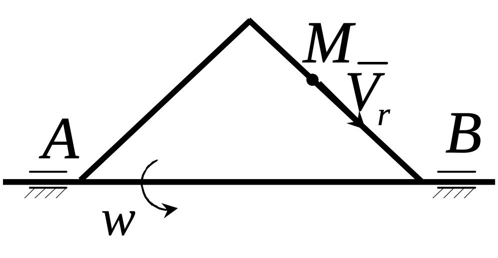
26



Стороною трикутника, який обертається навколо сторони AB з кутовою швидкістю w, рухається точка M з відносною швидкістю $V_r = 3t^2$. Визначити модуль відносного прискорення точки M в момент часу $t = 2\ c$.

Відповідь: 12.

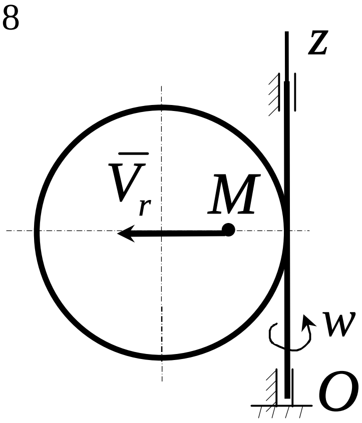
27



Стороною трикутника, який обертається навколо сторони AB з кутовою швидкістю w, рухається точка M з відносною швидкістю $V_r = 2sin4t$. Визначити відносне прискорення точки в момент часу $t = p/_8\ c$.

Відповідь: 0.

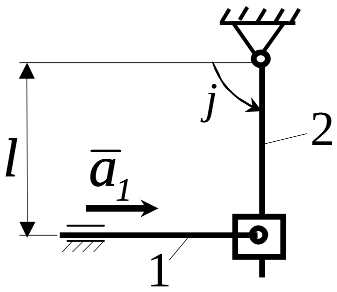
28



Діаметром диска, який обертається навколо осі Oz, рухається точка M з відносною швидкістю $V_r = 0{,}4t^3$. Визначити модуль відносного прискорення точки M в момент часу $t = 1\,c$.

Відповідь: 12.

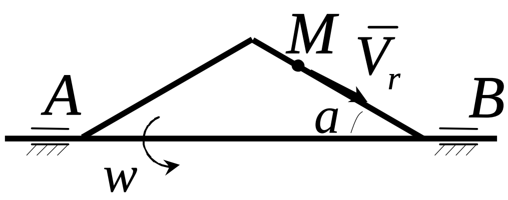
29



Стрижень 1 кулісного механізму рухається з сталим прискоренням $a_1 = 2\ м/с^2$. Визначити кутове прискорення куліси 2 в даному положенні механізму, якщо кут $j = 90^o$ і відстань $l = 0{,}5\ м$.

Відповідь: 4.

30

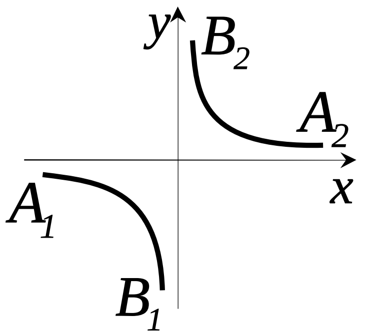


Стороною трикутника, який обертається навколо сторони AB зі сталою кутовою швидкістю $w = 4\ {}^1\!/_c$, рухається точка M з відносною швидкістю $\bar{V}_r$. У момент часу, коли відстань $MB = 0{,}5\ м$ визначити модуль переносного прискорення точки M, якщо кут $a = 30^o$.

Відповідь: 4.

5 ЯКІСНІ ЗАДАЧІ КІНЕМАТИКИ

1

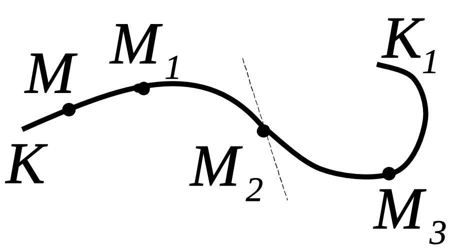


Рух точки заданий рівняннями $x = t + 1$, $y = \dfrac{1}{t+1}$. Вилучимо параметр t, отримуємо рівняння $y = \dfrac{1}{x}$, якому відповідають дві гілки кривої A_1B_1 і A_2B_2. По яких з цих гілок фактично рухається точка?

2 Точка M рівномірно рухається дугою параболи $y = 2x^2$. Можливо чи ні стверджувати, що рух точки є неприскореним?

3 Точка M рівномірно рухається колом. У якій системі координатних осів проекції швидкості і прискорення точки M за весь час її руху залишаються незмінними?

4



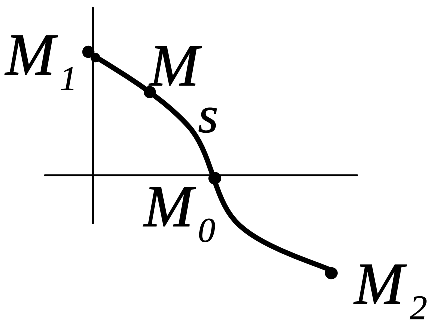
Точка M рівномірно рухається за траєкторією KK_1. У якій із відмічених точок (M_1, M_2 або M_3) модуль прискорення точки M має максимальне значення?

5 Тіло M падає з літака, який летить горизонтально, за законом $x = V_0 t$, $y = \dfrac{gt^2}{2}$, де V_0 – швидкість літака, g - прискорення

вільного падіння, x, y - нерухомі осі з початком координат в точці, де знаходилось тіло M в початковий момент часу ($t = 0$). Вісь y спрямована вниз.

Можливо чи ні називати рух тіла M за його траєкторією рівнозмінним?

6



Точка M рухається дугою косинусоїди $y = cosx$ між її вершинами M_1 і M_2 за законом $s = M_0M_1 = sin2pt$, де M_0 – точка перетину косинусоїди з віссю x. У якому стані точки M її прискорення дорівнює нулю?

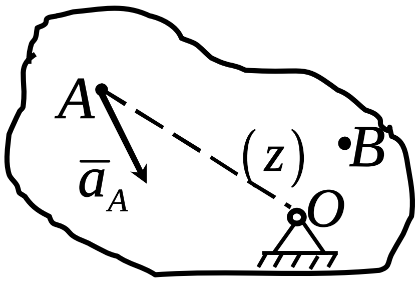
7 При обертанні куба навколо його центральної осі, перпендикулярної граням, будь-яка пряма, паралельна цій осі, залишається паралельною своєму початковому положенню.

Що із цієї фрази відрізняє цей рух від поступального?

8 Тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $j = j_0 coskt$, де j_0 і k – сталі позитивні величини. Як визначити, прискорено або сповільнено проходить тіло положення, яке відповідає $t = t_1$?

9 Циліндр обертається навколо нерухомої вісі зі сталим кутовим прискоренням e. Буде або ні сталим за модулем прискорення будь-якої точки циліндра, яка не знаходиться на його вісі?

10



На рисунку показано прискорення $\bar{a}_A$ точки A тіла, яке обертається навколо нерухомої осі z .

Зобразити прискорення іншої точки B цього тіла.

11 Корабель M_1 рухається зі швидкістю $\bar{V}_1$, а моторний човен M_2 зі швидкістю $\bar{V}_2$.

Що зрозуміти під абсолютною і переносною швидкістю, якщо визначаються швидкості:

1 Човна відносно корабля.

2 Корабля відносно човна?

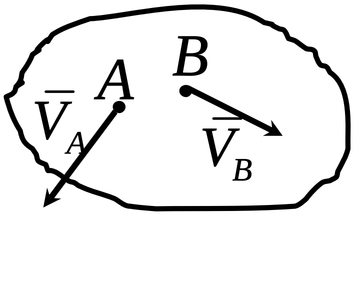
12 Диск обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через центр диска перпендикулярно його площині, а діаметром рівномірно рухається точка M .

У якому розумінні можна говорити про змінність вектора відносної швидкості цієї точки?

13 За переносний рух точки B повзуна кривошипно-шатунного механізму взято її рух разом з кривошипом.

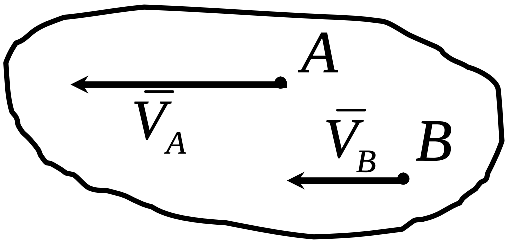
Залежить чи ні напрямок прискорення Коріоліса точки B від напрямку обертання кривошипа?

14



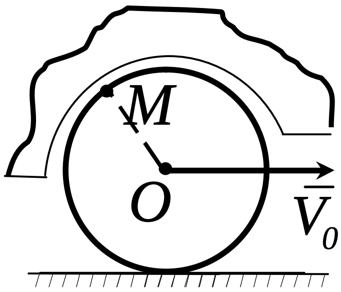
Можливий чи ні рух плоскої фігури в її площині, якщо швидкості точок A і B цієї фігури мають модулі і напрямки, вказані на рисунку.

15



Можливий чи ні рух плоскої фігури в її площині, якщо швидкості точок A і B цієї фігури задані відповідно $\overline{V_B} \parallel \overline{V_A}$, $\overline{V_B} \neq \overline{V_A}$, AB не $\perp \overline{V_A}$ і $\overline{V_B}$?

16



Автомобіль рухається зі швидкістю $\bar{V}$. Який вигляд має паралелограм швидкостей для точки M, яка знаходиться на ободі колеса B, якщо за переносний рух цієї точки взяти її рух разом з корпусом автомобіля? Для вирішення питання використовувати миттєвий центр швидкостей колеса.

6 ФІЗИЧНІ І МАТЕМАТИЧНІ АНАЛОГІЇ В КІНЕМАТИЦІ

Аналогії в поняттях

1 Коефіцієнти при ортах в розкладенні радіуса-вектора за координатними осями - коефіцієнти при ортах при розкладенні вектора швидкості.

2 Коефіцієнти при розкладені радіуса-вектора - коефіцієнти при розкладені вектора прискорення.

3 Швидкість, прискорення точки – кутова швидкість, кутове прискорення тіла.

4 При плоскому русі

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{AB}\right) = \bar{V}_{BA}.$$

При плоскому русі

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{AB}\right) = \overline{a}_{BA} .$$

5 Миттєвий центр швидкостей - миттєвий центр прискорень.

Аналогії в зв'язках між поняттями

1 Залежність між $\overline{r}$ і $\overline{V}$ – залежність між $\overline{V}$ і $\overline{a}$.

2 Залежність між r_x, r_y, r_z і V_x, V_y, V_z – залежність між V_x, V_y, V_z і a_x, a_y, a_z .

3 Залежність між $\overline{r}$, $\overline{V}$, $\overline{a}$ – залежність між j , w , e .

4 Залежність між абсолютним, відносним і переносним рухом – Залежність між відповідними швидкостями.

Аналогії в постановці задач

1 Обчислення швидкості і прискорення точки при координатному способі завдання руху – при натуральному способі завдання руху точки.

2 Закон розподілу швидкостей точок обертального руху – закон розподілу прискорень точок тіла при обертальному русі тіла.

3 Закон розподілу швидкостей відносно миттєвого центра швидкостей (МЦШ) - закон розподілу прискорень відносно миттєвого центра прискорень (МЦП).

Аналогії в діях

1 Обчислення швидкості при векторному способі завдання руху – обчислення прискорення при векторному способі завдання руху.

2 Метод обчислення швидкості при координатному способі завдання руху - спосіб обчислення прискорення при координатному способі завдання руху

3 Виведення формули $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$ – виведення формули $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}$.

4 Метод обчислення величини і напрямку прискорення точки при плоскому русі – метод обчислення рівнодійної системи збіжних сил.

5 Метод визначення миттєвого центра швидкостей (МЦШ) – метод визначення миттєвого центра прискорень (МЦП) при $w = 0$.

6 Виведення закону розподілу швидкостей відносно МЦШ - виведення закону розподілу прискорень відносно МЦП.

7 Виведення закону розподілу швидкостей точок тіла, яке обертається навколо вісі – виведення закону розподілу прискорень.

8 Метод обчислення переносної швидкості – метод обчислення переносного прискорення.

9 Метод обчислення відносної швидкості – метод обчислення відносного прискорення.

10 Метод виведення теореми про складення швидкостей – метод виведення теореми про складення прискорень.

11 Метод виведення $\dfrac{d\overline{i}}{dt}$ – метод виведення $\dfrac{d\overline{j}}{dt}$ і $\dfrac{d\overline{k}}{dt}$.

12 Додавання обертаннь навколо перетинних осів – додавання збіжної системи сил.

13 Додавання обертальних рухів навколо паралельних осів – додавання паралельних сил.

14 Розкладення плоского руху - розкладення руху тіла в загальному випадку.

15 Метод обчислення швидкості і прискорення при плоскому рухові – при вільному рухові.

16 Отримання рівняння плоского руху – вільного руху тіла.

Аналогії в результатах

1 Обчислення модуля швидкості $V \neq \frac{dr}{dt}$ - обчислення модуля прискорення $a \neq \frac{dV}{dt}$.

2 Формула $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$ – формула $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}$.

3 Закон розподілу швидкостей точок відносно МЦШ – прискорень відносно МЦП.

4 Закон розподілу швидкостей точок при обертальному русі тіла відносно осі – прискорень тіла.

5 Формула обчислення абсолютної швидкості – відносної швидкості.

6 Формула обчислення абсолютного прискорення – відносного прискорення.

7 Теорема про складення швидкостей при переносному поступовому рухові – складення прискорень.

8 Формула $\frac{d\overline{i}}{dt} = \overline{w} \times \overline{i}$ – формули $\frac{d\overline{j}}{dt} = \overline{w} \times \overline{j}$, $\frac{d\overline{k}}{dt} = \overline{w} \times \overline{k}$.

9 Додавання обертань навколо паралельних осів – додавання паралельних сил.

10 Додавання обертань навколо перетинних осів – додавання збіжних сил.

11 Незалежність w від вибору полюса під час плоского руху – під час вільного руху тіла.

12 Рівняння плоского руху тіла – вільного руху тіла.

ЛІТЕРАТУРА

1 Добронравов В.В. Курс теоретической механики/ В.В.Добронравов, Н.Н.Никитин. - М.: Высшая школа, 1983.- 575 с.

2 Мещерский И. С. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1984. - 480 с.

3 Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания / Под ред. С.М.Тарга. - М.:Высш. шк., 1984. – 111с.

4 Яблонский А.А. Курс теоретической механики/ А.А.Яблонский, В.М.Никифорова. – М. : Высш. Шк., 1977. – Т. 1. – 368 с.; Т. 2. – 410 с.

5 Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. — Ч. 1.: Статика. Кінематика/ А.А.Бондаренко, О.О.Дубінін, О.М.Переяславцев. — К.: Знання, 2004. —– 599 с. — (Вища освіта XXI століття).

6 Теоретическая механика в примерах и задачах/ М.И.Бать, Г.Ю.Джанелидзе, А.С.Кельзон: В 2 т.- М.: Наука. 1972. – Т. 1. – 512 с.; Т. 2. – 640 с.

7 Павловський М. А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. - 512с.

8 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1986.- 415 с.

9 Лойцянский Л. Г. Курс теоретической механики/ Л.Г.Лойцянский, А.И.Лурье: В 2т. – М.: Наука, 1982. – Т. 1. – 352 с.; Т. 2. – 640 с.

10 Кошляков В.Н. Краткий курс теоретической механики. - К.: Вища шк., 1993. - 311 с.

11 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под общей редакцией А.А.Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985. - 366с.

А

Навчальне видання

ПОДЛЄСНИЙ Сергій Володимирович
ФЕДОРЧЕНКО Володимир Григорович
СУЩЕНКО Дмитро Георгійович
ЄРФОРТ Юрій Олександрович

Розв'язання задач з теоретичної механіки
Розділ „кінематика”
Навчальний посібник

Редактор І.І.Дьякова

Верстка О.П.Ордіна

12/2005. Підп. до друку 05.10.06 Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 12,5. Обл.-вид. арк. 9,09.
Тираж 300 прим. Зам. № 247
Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003 р.