

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

Л. В. Кутовий, В. А. Овчаренко

ЗБІРНИК
КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ
З КУРСУ
«ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»

Затверджено
на засіданні кафедри
технічної механіки
Протокол № 20 від 21 лютого 2012 р.

Краматорськ 2012

ББК 30.121

УДК 539. 3/.6

3-41

]

Кутовий Л.В., Овчаренко В.А.

3-41 Збірник контрольних завдань з курсу «Технічна механіка» (для студентів спеціальності «Інформаційні технології проектування» заочної форми навчання). – Краматорськ: ДДМА, 2012. – 112 с.
ISBN

Містяться умови задач, які входять до завдання, стислі теоретичні викладки за тематикою задач, які виконуються, рекомендації щодо їх розв'язання, приклади їх виконання та аналіз одержаних результатів.

ББК 30.121

УДК 539. 3/.6

ISBN

© Л. В. Кутовий,
В. А. Овчаренко, 2012
© ДДМА, 2012

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 КОНТРОЛЬНА РОБОТА “СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА”	
Методичні вказівки до виконання контрольної роботи	5
1.1 Визначення реакцій опор твердого тіла (консольна балка).....	8
1.2 Визначення реакцій опор твердого тіла (балка на двох опорах)	12
1.3 Визначення реакцій опор твердого тіла (рама на двох опорах)	15
1.4 Визначення реакцій опор твердого тіла (стрижнева система).....	18
2 КОНТРОЛЬНА РОБОТА “КІНЕМАТИКА ТА ДИНАМІКА ”	
Методичні вказівки до виконання контрольної роботи.....	22
2.1 Визначення кінематичних характеристик точок і тіл при поступальному та обертальному рухах	31
2.2 Кінематичний аналіз плоского механізму	38
2.3 Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи	47
2.4 Застосування загального рівняння динаміки при дослідженні руху механічної системи з одним ступенем вільності	56
3 КОНТРОЛЬНА “ОПІР МАТЕРІАЛІВ”	
Методичні вказівки до виконання контрольної роботи.....	62
3.1 Геометричні характеристики перерізів.....	71
3.2 Статично визначувана стрижнева система	76
3.3 Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок	81
3.4 Повна перевірка міцності балки	87
3.5 Згинання з крученням	94
ЛІТЕРАТУРА.....	102
ДОДАТКИ.....	104
Додаток А. Двотаври. Нормальні лінійні розміри.	104
Додаток Б. Швелери.....	105
Додаток В. Кутики сталеві гарячекатані рівносмужні	106
Додаток Г. Кутики сталеві гарячекатані нерівносмужні.....	108
Додаток Д. Питання для підготовки до екзамену.....	110

ВСТУП

Технічна механіка містить багато наукових узагальнень, які допомагають майбутнім інженерам різних спеціальностей правильно розуміти ті явища, які вони спостерігають, і робити науково обґрунтовані висновки. Крім того, технічна механіка є науковою базою багатьох галузей сучасної техніки, наприклад таких як, теорія механізмів і машин, гідравліка, деталі машин, динаміка машин та інші, що вивчаються у вузах.

Запропоновані методичні вказівки складено відповідно до уніфікованого навчального плану програми та робочого плану з цього курсу. Контрольні роботи з технічної механіки спрямовані на розвиток у студентів умінь виконувати типові задачі.

1 Студент заочної форми навчання спеціальності ІТП виконує три контрольні роботи. Перша контрольна робота містить чотири завдання, друга – теж чотири, третя – п'ять завдань.

2 *Номер варіанта* завдання відповідає *трьом останнім цифрам* навчального шифру студента (*номери залікової книжки студента*):

перша цифра указує номер стовпця першої таблиці,

друга – номер стовпця другої таблиці,

третя – номер схеми (рисунка).

3 Контрольні роботи повинні виконуватися студентом самостійно після вивчення відповідної теми.

4 Кожна контрольна робота виконується в окремому зошиті або на аркушах формату А₄, які треба скріпити.. На титульному аркуші указується номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище, ім'я, по батькові студента, навчальний шифр, відповідний номеру залікової книжки, дата передачі роботи в деканат.

5 Для кожного завдання повинно написати її умову з даними, відповідними варіанту, виконаний рисунок схеми (у масштабі), на якому повинні бути проставлені всі задані величини. Рішення повинне супроводжуватися короткими послідовними поясненнями.

6 Виправлення помилок, які відмітив рецензент, слід виконувати в тому ж зошиті на вільних сторінках, наступних за рішенням останньої задачі.

1 КОНТРОЛЬНА РОБОТА

«СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА»

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи

Статикою називають розділ механіки, в якому вивчають методи перетворення одних систем сил на інші, що еквівалентні їм, а також умови рівноваги різних систем сил, які діють на тверде тіло.

В'язями називають тіла, що обмежують свободу руху системи матеріальних точок або твердого тіла.

Реакцією в'язі називають силу, з якою в'язь діє на систему матеріальних точок або на тверде тіло.

Конструктивні форми в'язів (опор) різноманітні. Для розрахунку плоских систем їх схематизують у вигляді трьох типів опор.

Шарнірно-нерухома опора (рис.1.1, а) перешкоджає переміщенню тіла у двох напрямках – вертикальному і горизонтальному, і тому в ній виникають дві реакції – вертикальна V_A і горизонтальна H_A .

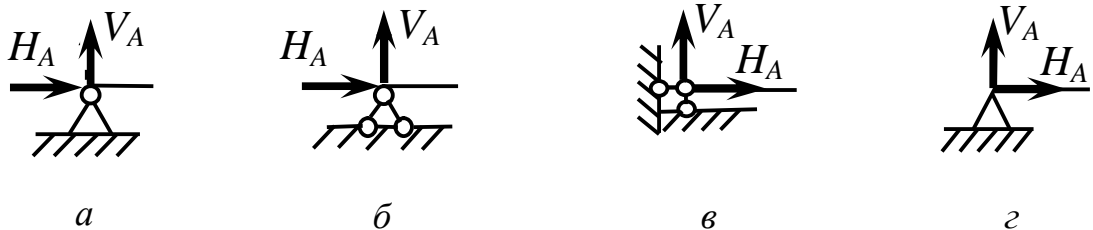


Рисунок 1.1

Конструктивно шарнірно-нерухома опора може бути виконана з двох стрижнів (див. рис.1.1, б і в). Іноді її позначають трикутником (див. рис.1.1, г). Дана опора не перешкоджає повороту балки.

Шарнірно-рухома опора (рис.1.2, а) перешкоджає переміщенню балки тільки в одному напрямку, тому її реакція (R_A) направлена перпендикулярно опорній поверхні катків.

Іноді шарнірно-рухома опору схематично зображають з одним катком (див. рис.1.2, б), або без нього – ковзаюча опора (див. рис.1.2, в). У деяких випадках шарнірно-рухома опору виконують у вигляді стрижня (див. рис.1.2, г і д), реакція якого направлена уздовж його осі.

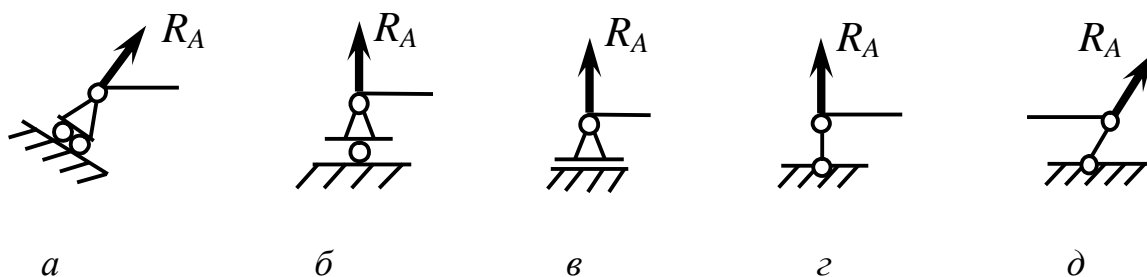


Рисунок 1.2

Жорстке затиснення (защемлення) (рис.1.3, а) перешкоджає двом лінійним і кутовому переміщенням, і тому його реакція складається з трьох складових: горизонтальної сили H_A , вертикальної сили V_A і реактивного моменту M_A .

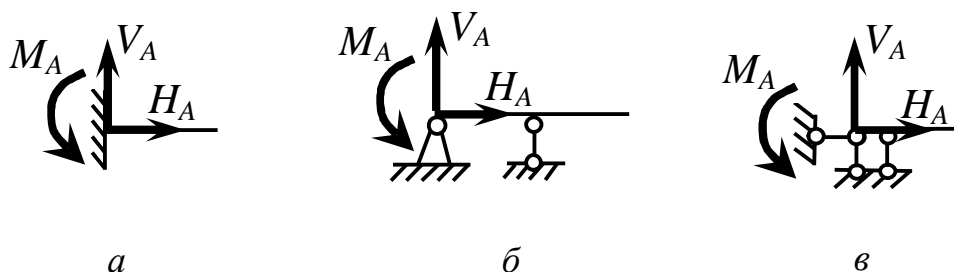


Рисунок 1.3

Іноді затискання зображають і виконують у вигляді комбінації рухомої і нерухомої опор (див. рис.1.3, б) або трьох стрижнів (див. рис.1.3, в).

Стрижень, що працює на згинання, називається балкою. До схеми «балка» зводяться багато машинобудівних конструкцій (балка мостового крана, валок прокатного стану, зуб шестерні та ін.).

Балка, яка показана на рисунку 1.4, а, називається простою (двоопорною).

Відстань між опорами називається прогіном.

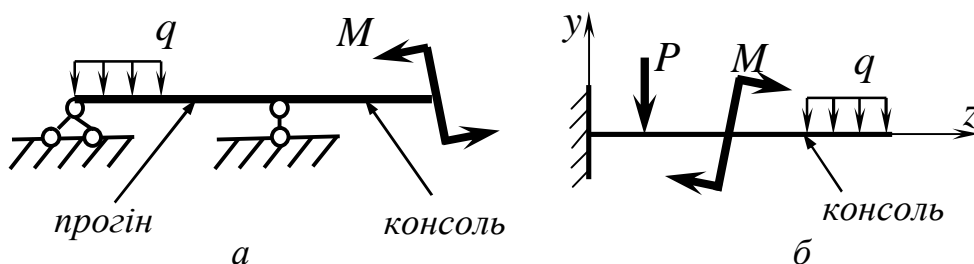


Рисунок 1.4

Консоллю називається балка, закріплена одним кінцем і що не має інших опор (див. рис.1.4, б), або частина балки, що зв'язується за опори (див. рис.1.4, а).

Системою сил називають сукупність сил, які прикладені до тіла (до балки чи рами). Якщо лінії дій сил розміщені в одній площині, то систему сил називають *плоскою*, а якщо лінії дій сил розміщені не в одній площині, то систему сил називають *просторовою*. Крім того, сили, лінії дій яких перетинаються в одній точці, називають *збіжними*, сили, лінії дій яких паралельні одна одній, називають *паралельними*, а сили, лінії дій яких не перетинаються в одній точці і не паралельні одна одній, називають *довільними*.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил системи на дві взаємно перпендикулярні осі в площині дії сил дорівнювали нулю і щоб при цьому дорівнювала нулю сума алгебраїчних моментів сил відносно будь-якої точки цієї площини:

$$\sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_A(P_k) = 0, \quad (1.1)$$

де n – кількість сил у системі ($k = 1, 2, 3, \dots, n$);

A – довільна точка в площині дії сил.

Це перша (основна) форма аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил. Крім неї існують ще дві форми.

Друга форма умов рівноваги довільної плоскої системи сил використовує дві довільні точки в площині дії сил, наприклад A та B , та суму проекцій всіх сил системи на вісь (наприклад x) в площині дії сил, яка не перпендикулярна прямій AB :

$$\sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_A(P_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(P_k) = 0. \quad (1.2)$$

Третя форма умов рівноваги довільної плоскої системи сил використовує три довільні точки в площині дії сил, наприклад A , B та C , при цьому моментні точки не повинні лежати на одній прямій:

$$\sum_{k=1}^n M_A(P_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(P_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_C(P_k) = 0, \quad (1.3)$$

Застосувавши будь-яку з зазначених форм умов рівноваги, можна визначити не більше трьох невідомих опорних реакцій твердого тіла, навантаженого тією чи іншою заданою системою сил, довільно розташованою в одній площині.

Для визначення реакцій опор рами можна використовувати рівняння (1.1) ... (1.3). Але, якщо це можливо, треба вибирати такі рівняння, щоб у кожному з них було тільки одна невідома реакція.

1.1 Визначення реакцій опор твердого тіла (консольна балка)

Визначити опорні реакції твердого тіла (консольної балки).

Вихідні дані вибрати із таблиць 1.1 та 1.2 і рисунка 1.5.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до задачі 1.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	1	2	3	4	4	1	2	3	4	4
b , м	2	3	4	2	1	3	4	3	2	1
c , м	3	4	1	1	2	4	3	2	1	3
d , м	2	1	2	3	3	2	1	1	3	2

Таблиця 1.2 – Вихідні дані до задачі 1.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M , кН·м	4	8	10	6	12	14	8	12	6	8
P , кН	12	18	10	8	18	6	16	8	14	18
q , кН/м	10	12	8	14	10	12	14	10	12	14

1.1.2 Приклад розв'язання задач 1.1

Для заданої балки (рис. 1.6) визначити реакції опори.

Дано: $P = 15$ кН; $q = 20$ кН/м; $M = 10$ кН·м; $a = 2$ м;

$b = 0,8$ м; $c = 0,6$ м, $\alpha = 60^\circ$.

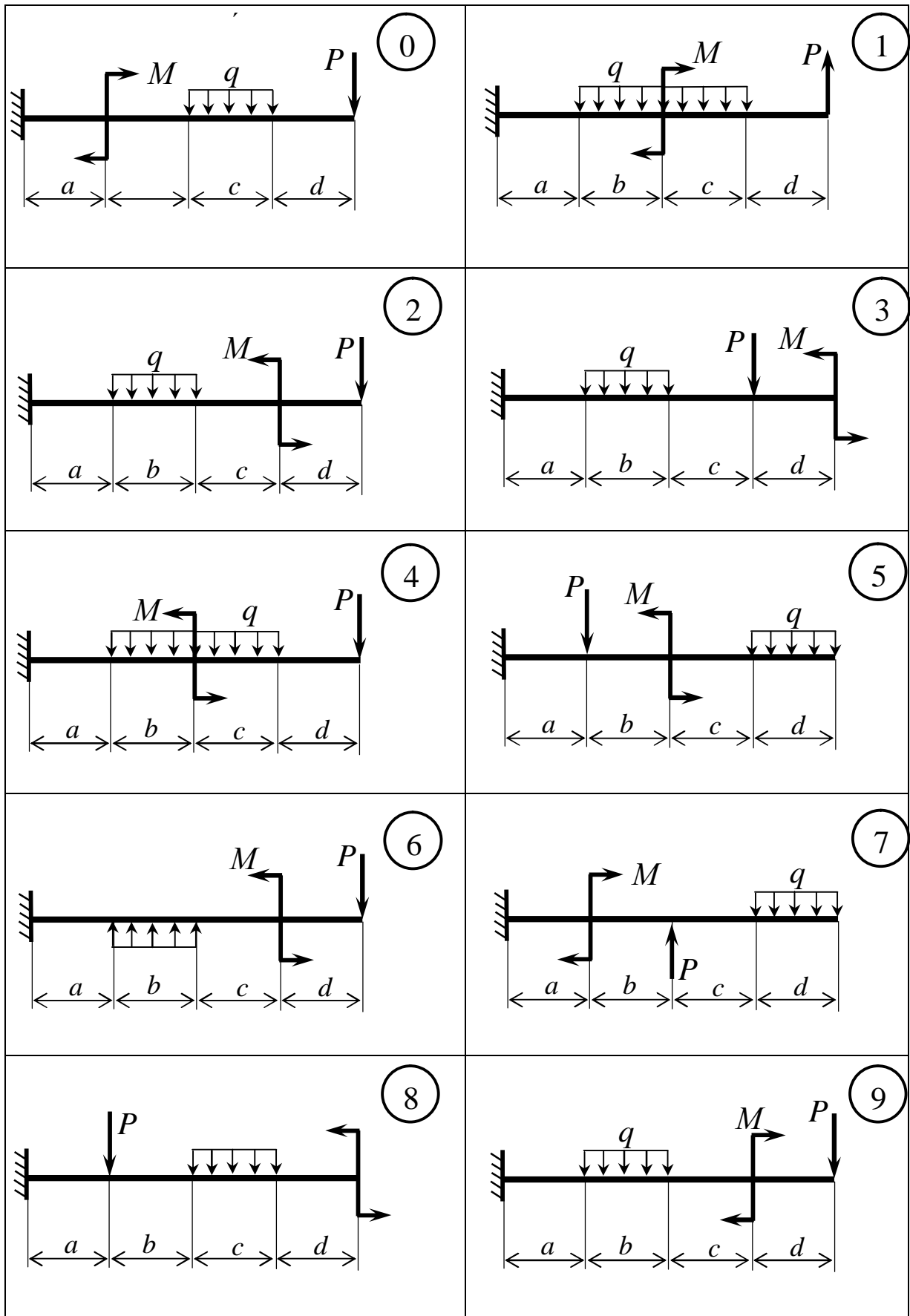


Рисунок 1.5 - Схеми до варіантів завдання 1.1

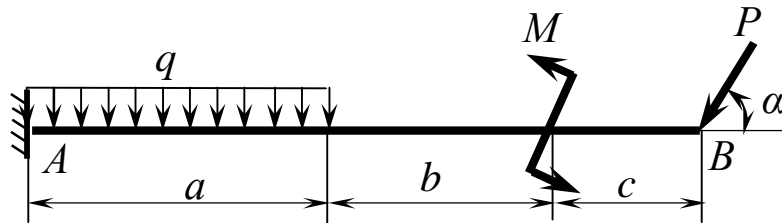


Рисунок 1.6 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 1.1

Розв'язання. Задана балка має одну опору (жорстке защемлення), реакція якої складається з трьох частин: вертикальна і горизонтальна реакції X_A та Z_A та реактивний момент – M_A .

Відкинемо в'язі, а дію цих в'язей замінимо їх реакціями (рис.1.7).

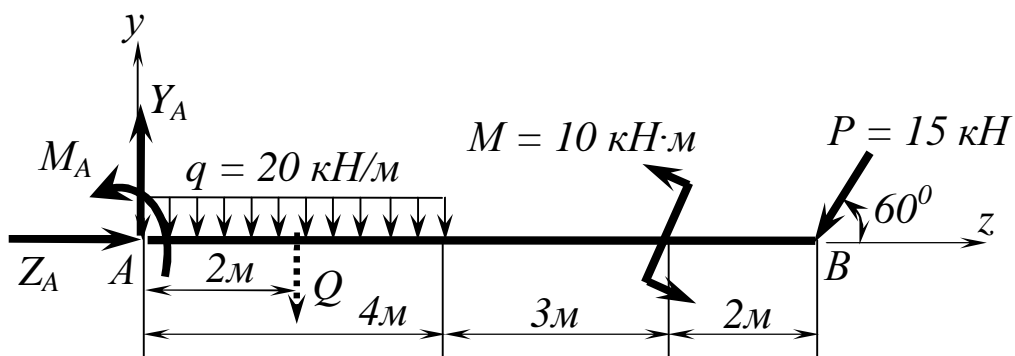


Рисунок 1.7 – Заміна в'язів реакціями

З умов рівноваги визначимо опорні реакції балки.

Для визначення реакції Z_A складемо рівняння – суму проекцій сил на горизонтальну вісь z . $\sum P_{kz} = 0$; $Z_A - P \cos 60^\circ = 0$.

Звідки маємо $Z_A = P \cos 60^\circ = 15 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ кН}$.

Для визначення реакції Y_A складемо рівняння – суму проекцій сил на вертикальну вісь y .

Розподілене навантаження з інтенсивністю q , що діє на частину рами довжиною a , замінимо рівнодійною $Q = q \cdot a$ (див. рис. 1.3).

$$\sum P_{ky} = 0; \quad Y_A - q \cdot 4 - P \sin 60^\circ = 0.$$

Звідки маємо $Y_A = q \cdot 4 + P \sin 60^\circ = 20 \cdot 4 + 15 \cdot 0,866 = 92,99 \text{ кН}$.

Для визначення реактивного моменту M_A складемо рівняння – суму моментів відносно точки A .

Рівнодійну ($Q = q \cdot a$) розподіленого навантаження інтенсивності q прикладемо посередині навантаженого відрізка балки, тобто на відстані $0,5a$ від точки A (див. рис. 1.3).

Для визначення моменту сили P відносно точки A використаємо теорему Варіньона, згідно з якою момент рівнодійної відносно будь-якої точки дорівнює сумі моментів всіх сил відносно тієї ж точки, тобто

$$M_A(P) = M_A(P_x) + M_A(P_y) = -P(a + b + c) \sin 60^\circ,$$

тому що момент проекції сили P на вісь z дорівнює нулю.

Остаточного маємо:

$$SM_A = 0; \quad M_A - q \cdot 4 \left(\frac{4}{2} \right) + M - P(4 + 3 + 2) \sin 60^\circ = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Звідки } M_A &= q \cdot 4 \left(\frac{4}{2} \right) - M + P(4 + 3 + 2) \sin 60^\circ = \\ &= 20 \cdot 4 \cdot 2 - 10 + 15 \cdot 9 \cdot 0,866 = 266,91 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Зробимо перевірку. Для цього використаємо рівняння суми моментів відносно точки B .

$$SM_B = 0; \quad M_A - Y_A(4 + 3 + 2) + q \cdot 4 \left(\frac{4}{2} + 3 + 2 \right) + M = 0.$$

$$266,91 - 92,99 \cdot (4 + 3 + 2) + 20 \cdot 4 \left(\frac{4}{2} + 3 + 2 \right) + 10 = 0.$$

$$836,908 - 836,912 = 0$$

$$\text{Похибка складає } \frac{836,908 - 836,912}{836,908} \cdot 100\% = 0,04\%, \text{ що є допустимим.}$$

тимим.

Таким чином, реакції балки визначені вірно.

1.2 Визначення реакцій опор твердого тіла (балка на двох опорах)

Визначити опорні реакції твердого тіла (консольної балки).

Вихідні дані вибрати із таблиць 1.1 та 1.2 і рисунка 1.8.

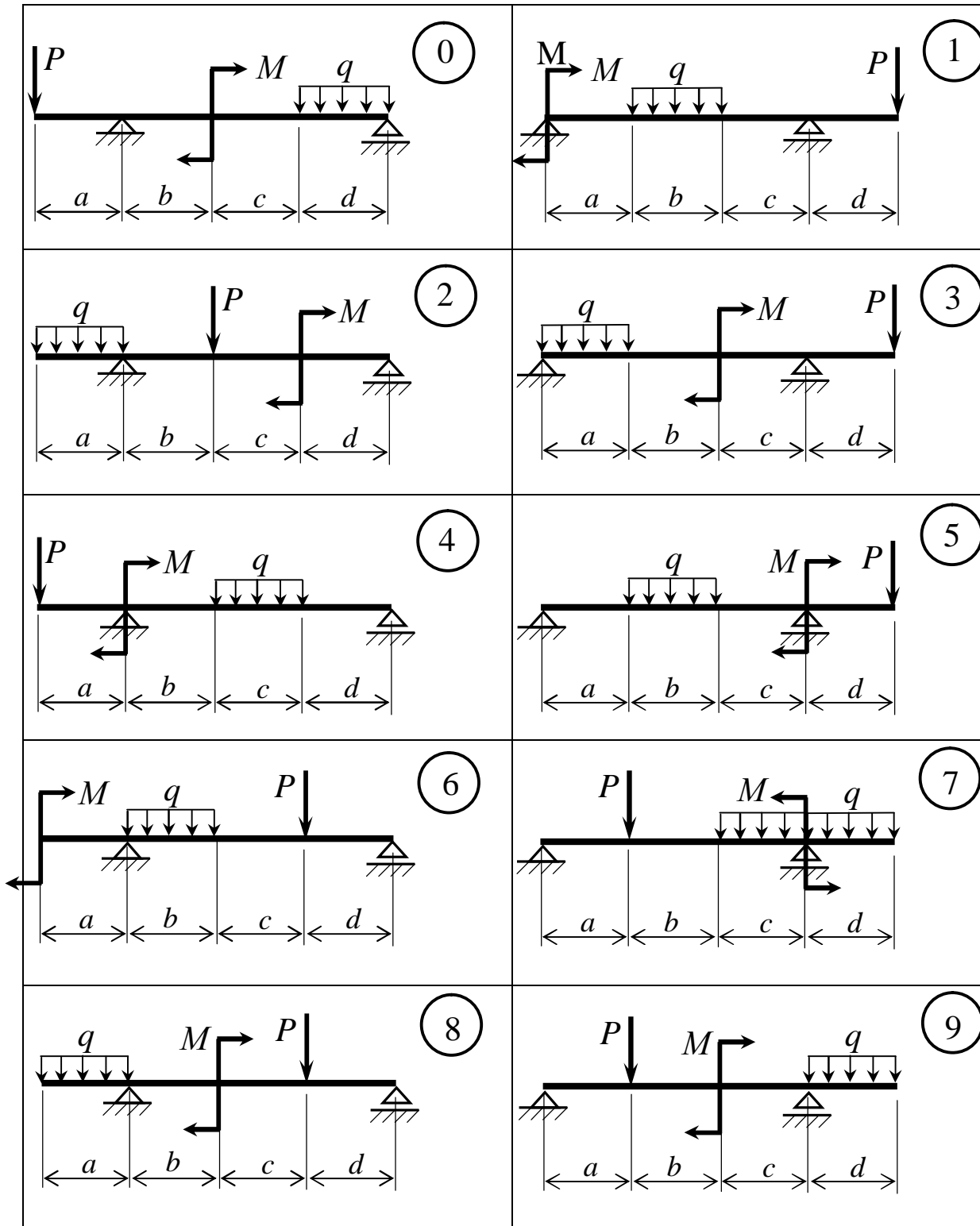


Рисунок 1.8 - Схеми до варіантів завдання 1.2

1.2.1 Приклад розв'язання задач 1.2

Для заданої балки (рис. 1.9) визначити реакції опор.

Дано: $P = 55 \text{ кН}$; $q = 50 \text{ кН/м}$; $M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $a = 2 \text{ м}$;

$b = 0,8 \text{ м}$; $c = 0,6 \text{ м}$; $\alpha = 60^\circ$.

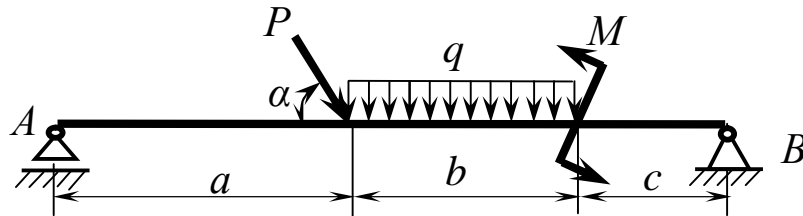


Рисунок 1.9 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 1.2

Розв'язання. Задана балка опирається на дві опори, одна з котрих шарнірно-рухома (т. A) і має одну реакцію (Y_A), а друга – нерухома (т. B) і має дві реакції (Y_B та Z_B).

Відкинемо в'язі, а дію цих в'язей замінимо їх реакціями (рис.1.10).

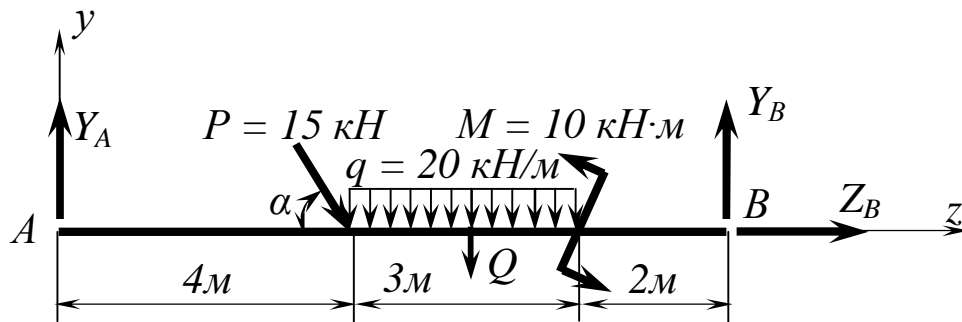


Рисунок 1.10 – Заміна в'язів реакціями

З умов рівноваги визначимо опорні реакції балки.

Для визначення реакції Y_A складемо рівняння – суму моментів відносно точки B . Розподілене навантаження з інтенсивністю q , що діє на частину рами довжиною b , замінимо рівнодійною, яку прикладемо посередині навантаженого відрізка рами.

$$SM_B = 0; -Y_A(4+3+2) + P(3+2)\sin 60^\circ + q \cdot 3\left(\frac{3}{2} + 2\right) + M = 0;$$

$$Y_A = \frac{P(3+2)\sin 60^\circ + q \cdot 3\left(\frac{3}{2} + 2\right) + M}{4+3+2} =$$

$$= \frac{15 \cdot 5 \cdot 0,866 + 20 \cdot 3 \cdot 3,5 + 10}{9} = 31,66 \text{ кН}.$$

Для визначення реакції Y_B складемо рівняння – суму моментів відносно точки А.

$$SM_A = 0; -P \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ - q \cdot 3\left(4 + \frac{3}{2}\right) + M + Y_B(4+3+2) = 0;$$

$$Y_B = \frac{P \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ + q \cdot 3\left(4 + \frac{3}{2}\right) - M}{4+3+2} =$$

$$= \frac{15 \cdot 4 \cdot 0,866 + 20 \cdot 3 \cdot 5,5 - 10}{9} = 41,33 \text{ кН}.$$

Для визначення реакції Z_B складемо рівняння – суму проекцій сил на вісь Z .

$$\sum P_{kz} = 0; P \cos 60^\circ + Z_B = 0.$$

$$Z_B = -P \cos 60^\circ = -15 \cdot 0,5 = -7,5 \text{ кН}.$$

Зробимо перевірку. Для цього використаємо рівняння суми проекцій всіх сил на вісь Y :

$$\sum P_{ky} = 0; Y_A - P \sin 60^\circ - q \cdot 3 + Y_B = 0.$$

$$31,66 - 15 \cdot 0,866 - 20 \cdot 3 + 41,33 = 0;$$

$$72,992 - 72,988 = 0.$$

Похибка складає $\frac{72,992 - 72,988}{72,988} \cdot 100\% = 0,005\%$, що є допустимим.

Таким чином, реакції балки визначені вірно.

1.3 Визначення реакцій опор твердого тіла (рама на двох опорах)

Визначити опорні реакції твердого тіла (рами).

Вихідні дані вибрати із таблиць 1.1 та 1.2 і рисунків 1.11 та 1.12.

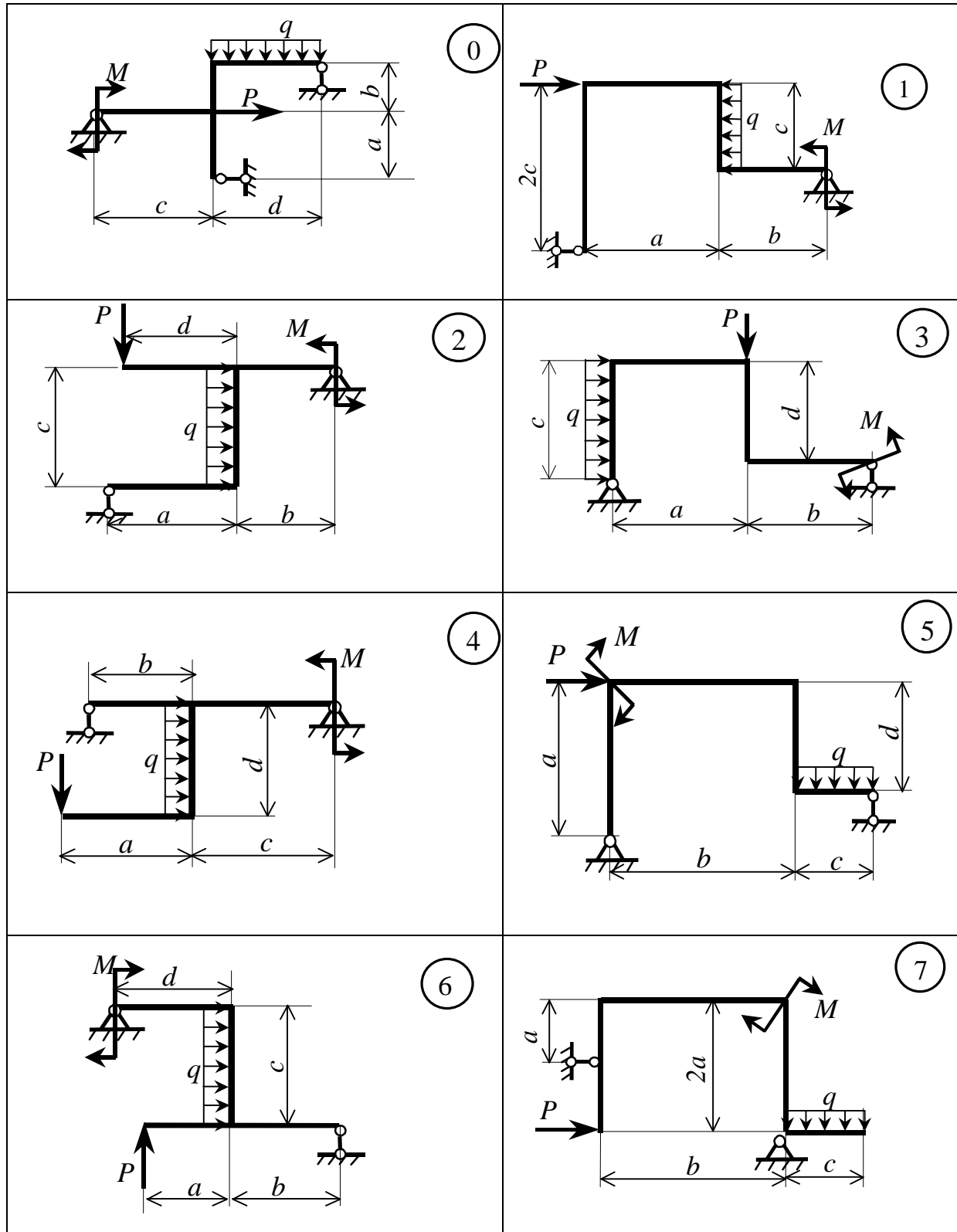


Рисунок 1.11 - Схеми до варіантів завдання 1.3

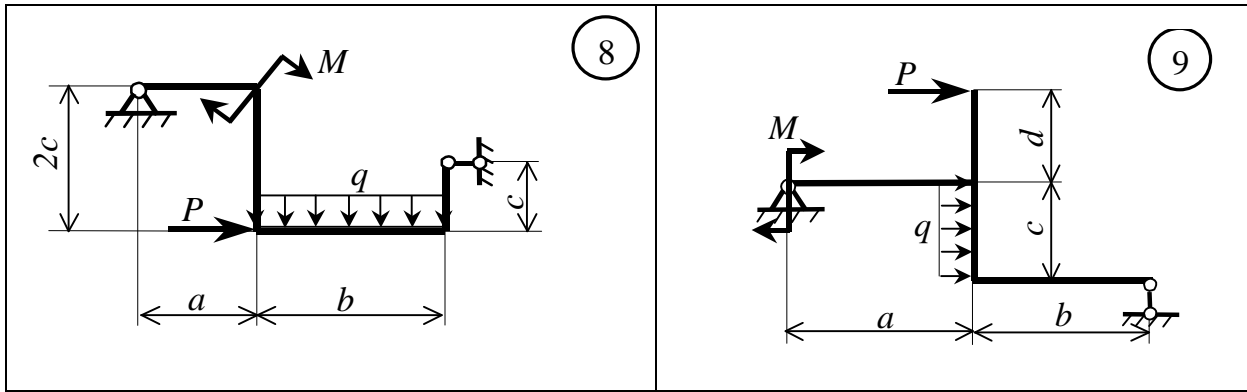


Рисунок 1.12 - Схеми до варіантів завдання 1.3

1.3.1 Приклад розв'язання задач 1.3

Для заданої рами (рис. 1.13) знайти реакції опор.

Дано: $P = 4 \text{ кН}$; $q = 3 \text{ кН/м}$; $M = 6,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $a = 1,5 \text{ м}$;

$b = 2 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$; $d = 2 \text{ м}$.

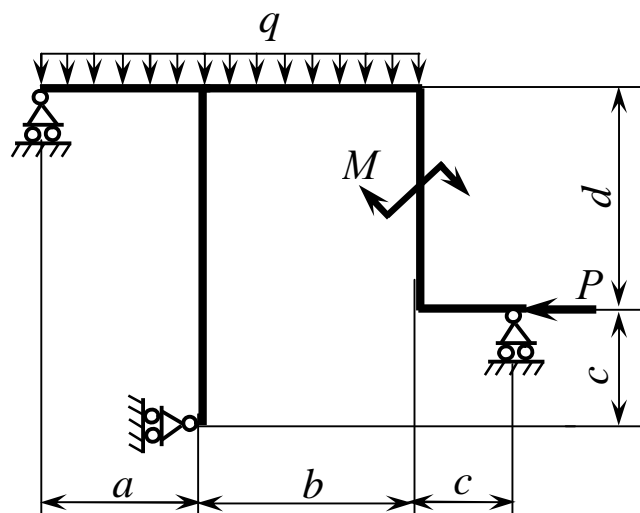


Рисунок 1.13 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 1.3

Розв'язання. Задана рама опирається на три шарнірно-рухомі опори, кожна з котрих має по одній реакції. Відкинемо в'язі, а дію цих в'язей замінімо їх реакціями (рис.1.14). Означимо на схемі всі задані величини.

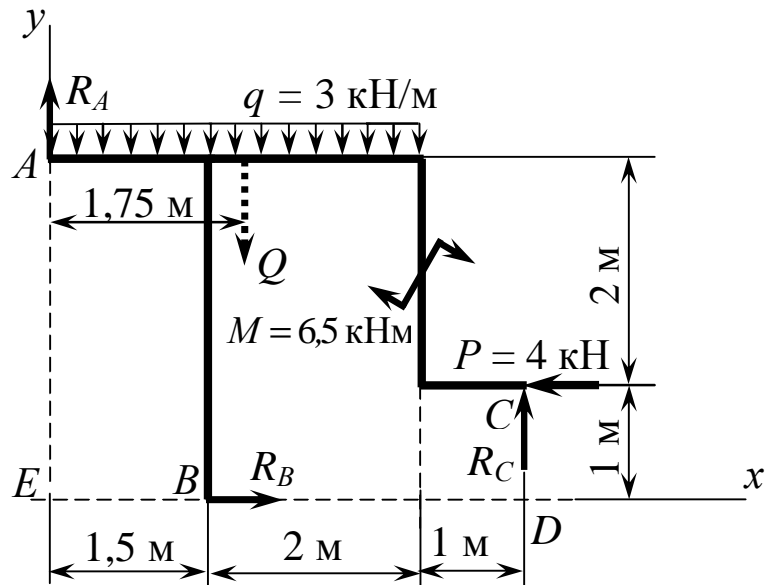


Рисунок 1.14 – Заміна в'язів реакціями

Знайдемо опорні реакції, для чого складемо для рами рівняння рівноваги. При складанні рівнянь зручно, щоб у кожному рівнянні було лише по одній невідомій реакції.

Для визначення реакції R_A знайдемо точку перетину ліній дій двох інших реакцій (R_B та R_C). Такою точкою є точка D (див. рис. 1.14). Розподілене навантаження з інтенсивністю q , що діє на частину рами довжиною $(a + b)$, замінимо рівнодійною, яку прикладемо посередині навантаженого відрізка рами і яка має модуль $q(a + b) = 3 \cdot 3,5$.

$$\sum M_D(\bar{P}_k) = 0; \quad q \cdot 3,5 \cdot \left(\frac{3,5}{2} + 1 \right) - M + P \cdot 1 - R_A \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_A = \frac{3 \cdot 3,5 \cdot 2,75 - 6,5 + 4 \cdot 1}{4,5} = 5,86 \text{ кН};$$

Для визначення реакції R_C знайдемо точку перетину ліній дій двох інших реакцій (R_A та R_B). Такою точкою є точка E (див. рис. 1.10).

$$\sum M_E(\bar{P}_k) = 0; \quad -q \cdot 3,5 \cdot 1,75 - M + P \cdot 1 + R_C \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_C = \frac{3 \cdot 3,5 \cdot 1,75 + 6,5 - 4 \cdot 1}{4,5} = 4,64 \text{ kH};$$

Для визначення реакції R_B використаємо рівняння суми проекцій сил на вісь x , оскільки реакції R_A та R_C (див. рис. 1.10) паралельні осі y .

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_B - P = 0; \quad \text{звідки } R_B = P = 4 \text{ кН.}$$

Зробимо перевірку.

Для цього використаємо рівняння суми проекцій всіх сил на вісь y (див. рис. 1.10).

$$\sum P_{ky} = 0; \quad R_1 - q \cdot 3,5 + R_5 = 0;$$

$$5,86 - 3 \cdot 3,5 + 4,64 = 10,5 - 10,5 = 0.$$

Таким чином, реакції знайдені вірно.

Висновки:

1 Реакції дорівнюють: $R_A = 5,86 \text{ кН}$; $R_B = 4 \text{ кН}$;

$R_C = 4,64 \text{ кН}$.

2 Позитивні знаки при значеннях реакцій вказують на те, що реакції R_A , R_B , R_C дійсно спрямовані так, як зображено на рисунку 1.10.

1.4 Визначення реакцій опор твердого тіла (стрижнева система)

Визначити опорні реакції (реакції стрижнів) твердого тіла.

Вихідні дані вибрати із таблиць 1.1 та 1.2 і рисунків 1.15 та 1.16.

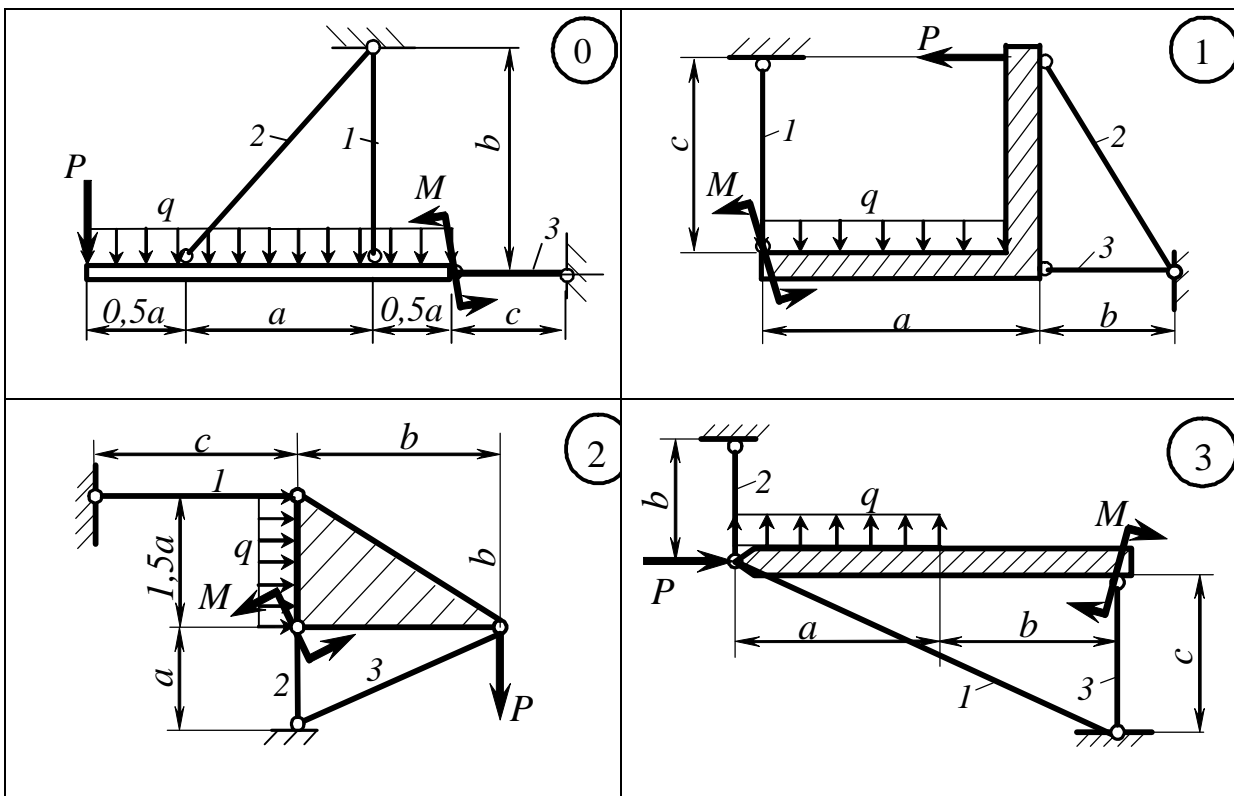


Рисунок 1.15 - Схеми до варіантів завдання 1.4

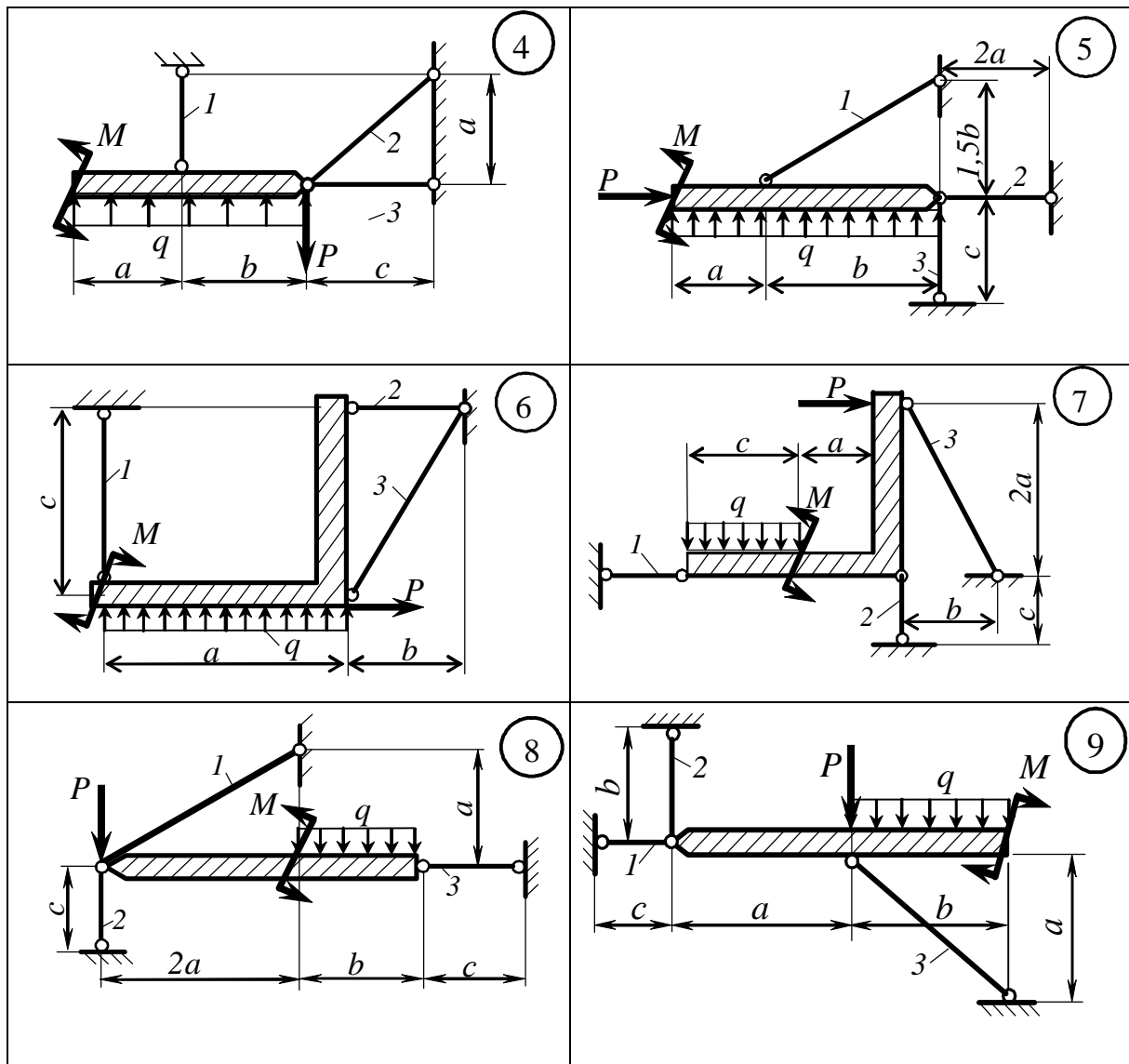


Рисунок 1.16 - Схеми до варіантів завдання 1.4

1.4.1 Приклад розв'язання задачі 1.4

Для заданої системи (балки), показаної на рисунку 1.17, знайти опорні реакції, якщо: $P = 200$ кН; $q = 200$ кН/м; $M = 200$ кН·м; $a = 3$ м; $b = 2$ м; $c = 2$ м; $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

Розв'язання. У заданій стрижневій системі (рис. 1.17) невідомими є зусилля в трьох стрижнях, які не перетинаються в одній точці й не паралельні між собою. Таку систему називають плоскою довільною.

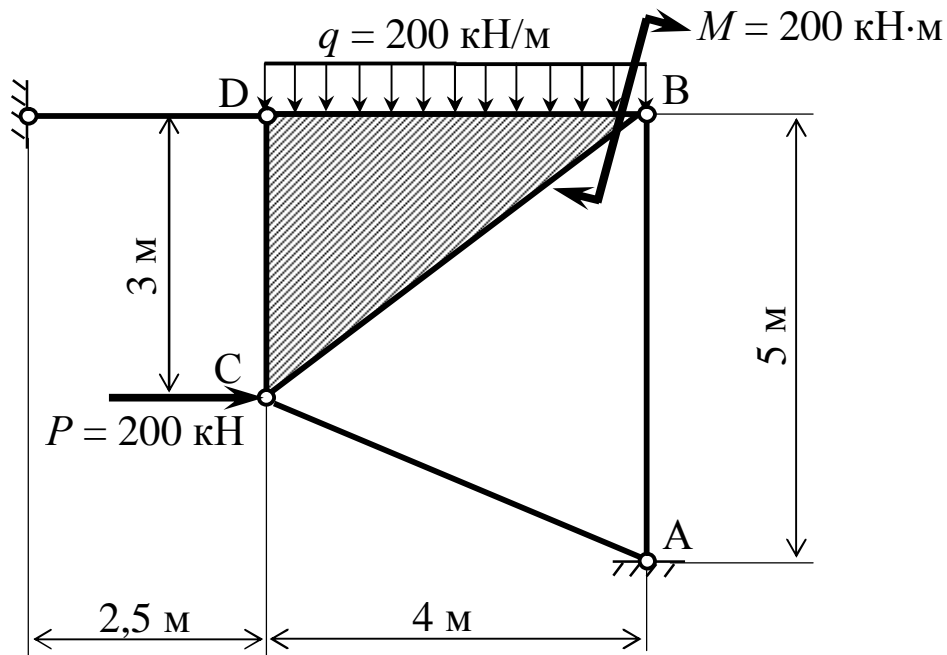


Рисунок 1.17 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 1.2

Відкинемо накладені на тіло в'язі (стрижні), а їх вплив замінимо зусиллями N_1 , N_2 та N_3 (рис. 1.18).

Для такої системи можна скласти три незалежних рівняння статки, тобто вона є статично визначуваною стрижневою системою. Для визначення зусиль у стрижнях складаємо рівняння рівноваги. Необхідно намагатися складати тільки такі рівняння, до яких входило б тільки по одному невідомому зусиллю.

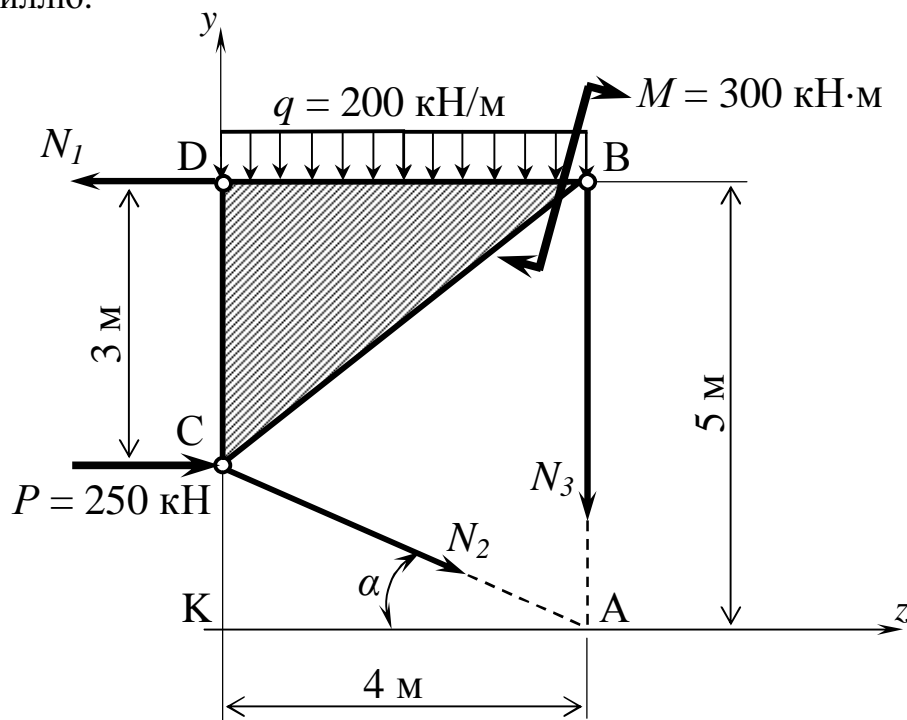


Рисунок 1.18 – Заміна в'язів реакціями

Перш за все з трикутника АКС (рис. 1.18) знайдемо довжину 2-го стрижня та косинус і синус кута α :

$$l_3 = AC = \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{4^2 + (5-3)^2} = 4,48 \text{ м}$$

$$\cos \alpha = \frac{AK}{AC} = \frac{4}{4,48} = 0,893; \quad \sin \alpha = \frac{KC}{AC} = \frac{2}{4,48} = 0,446.$$

Візьмемо суму моментів відносно точки А (див. рис. 1.18), тому що в ній перетинаються два невідомі зусилля – N_2 і N_3 :

$$\Sigma M_A = 0; \quad N_1 \cdot 5 - P \cdot (5-3) + q \cdot 4 \cdot 2 - M = 0,$$

звідки
$$N_1 = \frac{P \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5} = \frac{250 \cdot 2 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{5} = -160 \text{ кН}.$$

Тепер беремо суму моментів відносно точки В (у ній перетинаються зусилля N_1 та N_3):

$$\Sigma M_B = 0; \quad P \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 - M + N_2 \cdot 5 \cdot \cos \alpha = 0,$$

звідки
$$N_2 = \frac{-P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5 \cdot \cos \alpha} = \frac{-250 \cdot 3 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{5 \cdot 0,893} = -459,2 \text{ кН}.$$

Зусилля N_3 знаходимо із суми проекцій на вертикальну вісь:

$$\Sigma P_Y = 0; \quad -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 = 0;$$

$$N_3 = -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin \alpha = -200 \cdot 4 - (-459,2) \cdot 0,446 = -595,2 \text{ кН}.$$

Усі зусилля одержали зі знаком мінус, тому напрямок усіх зусиль зворотний заданому, тобто усі стрижні стиснуті.

Тепер виконаємо перевірку, чи вірно ми знайшли зусилля. Для перевірки необхідно брати тільки ті рівняння, які ми не використовували при знаходженні зусиль, наприклад, суму проекцій всіх сил на вертикальну вісь:

$$\Sigma P_z = 0; \quad P - N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$250 - (-160) - 459,2 \cdot 0,893 = 0; \quad 410 - 410 = 0.$$

$$\Sigma M_c = 0; \quad N_1 \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 - M - N_3 \cdot 4 = 0;$$

$$-160 \cdot 3 - 200 \cdot 4 \cdot 2 - 300 - (-595,2) = 0; \quad -2380 + 2380,7 = 0.$$

Похибка складає $\frac{2380,7 - 2380}{2380} \cdot 100\% = 0,03\%$, що є допустимим.

Висновки:

1 Реакції дорівнюють: $N_1 = -160 \text{ кН}; \quad N_2 = -459,2 \text{ кН};$
 $N_3 = 595,2 \text{ кН}.$

2 Знаки «мінус» при значеннях N вказують на те, що їх напрямки протилежні прийнятим, тобто усі стрижні стиснуті.

2 КОНТРОЛЬНА РОБОТА «КІНЕМАТИКА ТА ДИНАМІКА»

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи

Кінематикою називають розділ механіки, в якому вивчають рух системи матеріальних точок незалежно від діючих на них сил.

Розрізняють п'ять видів руху твердого тіла:

- 1) поступальний;
- 2) обертальний навколо нерухомої осі;
- 3) плоско-паралельний;
- 4) обертальний рух навколо нерухомої точки;
- 5) рух вільного твердого тіла.

Поступальний і обертальний рухи навколо нерухомої осі належать до простих рухів. Інші види руху твердого тіла можна звести до одного із цих рухів або їх сукупності.

Поступальним називається рух твердого тіла, при якому відрізок прямої, що з'єднує будь-які дві його точки, рухається паралельно самому собі.

При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії, а вектори швидкостей і вектори прискорень усіх його точок відповідно однакові в кожний момент часу.

Таким чином поступальний рух твердого тіла цілком характеризується рухом однієї будь-якої точки цього тіла.

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому будь-які дві точки залишаються нерухомими. Прямая, проведена через ці дві нерухомі точки, називається віссю обертання.

При обертальному русі положення твердого тіла визначається кутом повороту j , де $j = j(t)$. Це співвідношення називається рівнянням обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Зміну кута повороту тіла j з часом характеризує кутова швидкість W , яка дорівнює похідній за часом від кута повороту j , тобто $W = \dot{j}$.

У міжнародній системі одиниць СІ кутова швидкість має розмірність рад/с або с^{-1} . У техніці кутову швидкість часто визначають кількістю обе-

ртів за хвилину (n обертів за хвилину). Зв'язок між цими одиницями вимірювання задається формулою $w = \frac{pn}{30} c^{-1}$.

Зміну кутової швидкості у часі характеризує *кутове прискорення*, яке дорівнює першій похідній від кутової швидкості за часом або другій похідній від кута повороту тіла за часом, тобто

$$e = \dot{w} = \ddot{\varphi}.$$

При обертальному русі тіла кожна його точка має швидкість

$$V = wR, \quad (2.1)$$

і прискорення,
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

яке складається з *тангенціальної* складової

$$a_t = eR, \quad (2.2)$$

та *нормальної* складової прискорення

$$a_n = w^2 R, \quad (2.3)$$

де R – радіус обертання точки.

Вектори швидкості V і тангенціальне прискорення a_t напрямлені за дотичною до кола, яке описує дана точка тіла, або перпендикулярно до радіуса R , а вектор нормального прискорення a_n напрямлений за радіусом цього кола до його центра (рис. 2.1).

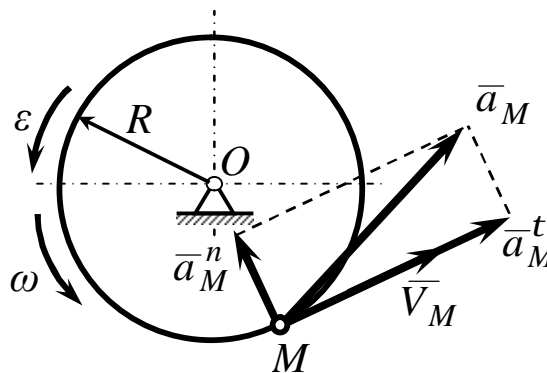


Рисунок 2.1 – Швидкості та прискорення точок тіла при обертальному русі

Тангенціальна складова прискорення точки (або *тангенціальне* прискорення) характеризує зміну швидкості за її величиною (модулем). Тому,

якщо обертальний рух тіла *прискорений*, то вектори V і a_t мають однаковий напрямок, якщо рух *сповільнений* – то напрямки протилежні. При *рівномірному* обертанні $a_t=0$.

Нормальна складова прискорення точки (або *нормальне* прискорення) характеризує зміну швидкості за її напрямком.

Передачами називають механізми, які змінюють швидкість обертання, напрямок обертання або вид руху тіла.

Передача обертання від одного твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, до другого твердого тіла, яке обертається навколо другої нерухомої осі, здійснюється за допомогою зубчастого або фрикційного зачеплення двох колес (рис.2.2), або за допомогою пасової або ланцюгової передач (рис.2.3).

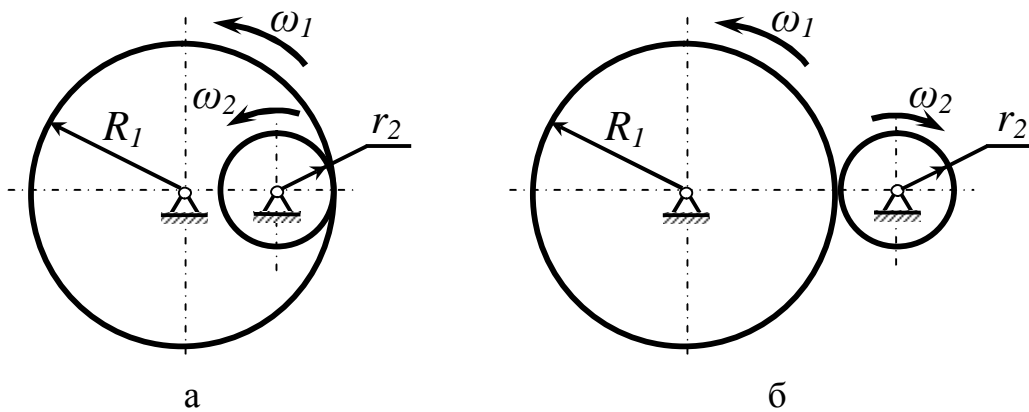


Рисунок 2.2 – Приклади зубчастих або фрикційних передач

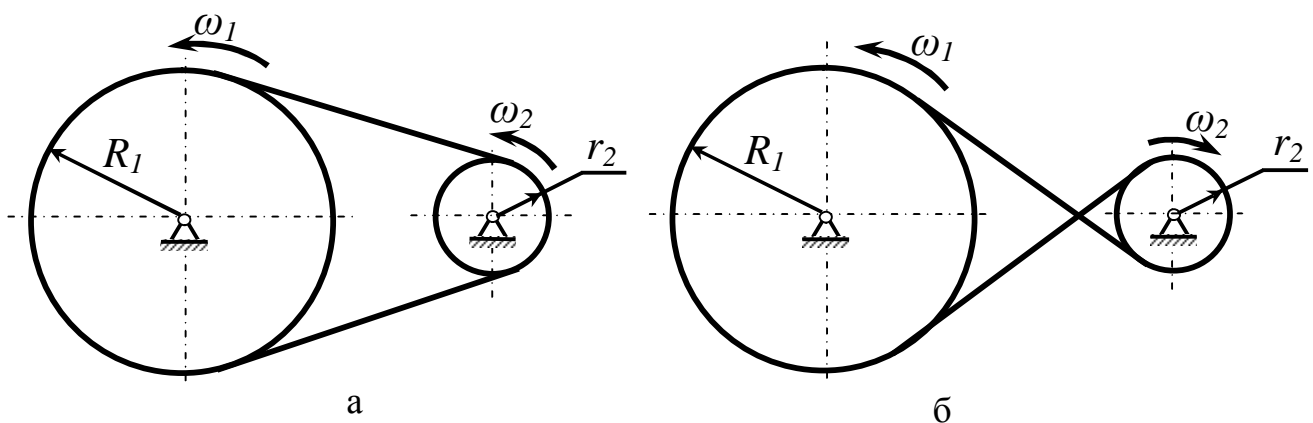


Рисунок 2.3 – Приклади ремінних або ланцюгових передач

При внутрішньому зачепленні (див.рис.2.2, а) і не перехресній пасо-

вій передачі (див.рис.2.3, а) напрямки обертань обох коліс збігаються. При зовнішньому зачепленні (див.рис.2.2, б) і перехресній пасовій передачі (див.рис.2.3, б) напрямки обертань коліс протилежні.

Величини швидкостей точок на ободі зубчастих коліс, які знаходяться в зачепленні, однакові. Також однакові за модулем і швидкістю на ободі шківів пасової передачі, якщо немає ковзання паса по шківу.

Тому кутові швидкості коліс обернено пропорційні радіусам r_i відповідних коліс (або діаметрам d_i колес, або кількості зубців z_i):

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2.4)$$

Плоско-паралельним (плоским) рухом називають рух тіла, при якому всі його точки рухаються паралельно будь-якій площині.

Рух плоскої фігури в її площині складається з *поступального руху разом з полюсом* (це може бути будь-яка точка плоскої фігури) і *обертального руху навколо полюса*.

Кінематичними характеристиками плоско-паралельного руху є швидкість та прискорення полюсу і кутова швидкість та кутове прискорення плоскої фігури навколо полюса.

Виходячи з цього, швидкість V_B довільної точки B плоскої фігури визначається за формулою

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \quad (2.5)$$

де \bar{V}_A - вектор швидкості полюса A ,

\bar{V}_{BA} – вектор швидкості точки B в обертальному русі плоскої фігури навколо полюса A . При цьому вектор \bar{V}_{BA} - перпендикулярний до лінії AB , і його числове значення:

$$\bar{V}_{BA} = w_{AB} AB, \quad (2.6)$$

де w_{AB} - кутова швидкість плоскої фігури.

Крім того, швидкість довільної точки B можна знайти, використовуючи теорему: проекції швидкостей двох довільних точок A і B на напрямки відрізка AB , що з'єднує ці точки, дорівнюють одна одній, тобто:

$$V_A \cos a = V_B \cos b. \quad (2.7)$$

Але найбільш універсальним є спосіб знаходження швидкостей дові-

льних точок плоскої фігури за допомогою поняття *миттєвого центра швидкостей* (МЦШ) – точки плоскої фігури, швидкість якої в момент часу, коли розглядаємо, дорівнює нулю.

Отже швидкість точок плоскої фігури можна розглядати як швидкість обертального руху навколо миттєвого центра швидкостей (рис.2.4).

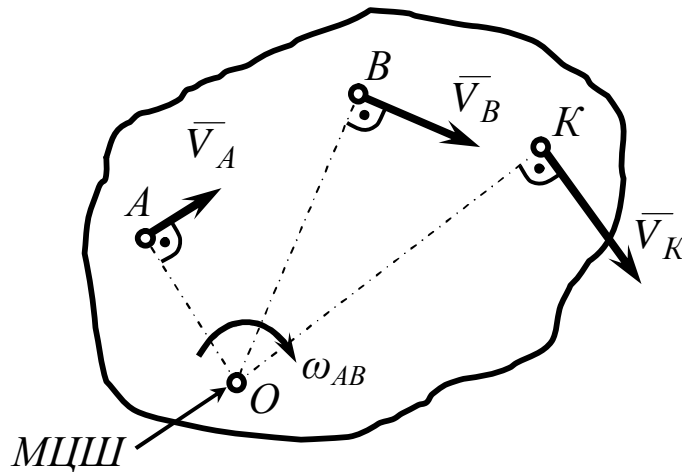


Рисунок 2.4 – Швидкості точок тіла при плоскому русі

Тому вектори швидкостей всіх точок плоскої фігури перпендикулярні до відрізків, які з'єднують ці точки з миттєвим центром швидкостей і напрямлені в бік обертання фігури, а модулі швидкостей пропорційні відстаням точок до миттєвого центра швидкостей-точки O .

$$\frac{V_A}{AO} = \frac{V_B}{BO} = \dots = \frac{V_K}{KO} = \omega_{AB}. \quad (2.8)$$

Знаючи положення миттєвого центра швидкостей і швидкість однієї з точок, можна за допомогою формули (2.8) знайти швидкості всіх інших точок та кутову швидкість плоскої фігури.

Прискорення кожної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорень полюса і прискорення цієї точки в обертальному русі фігури навколо полюса, тобто:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA},$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n. \quad (2.9)$$

Тут дотичне прискорення в обертальному русі:

$$a_{BA}^t = e_{AB} \cdot AB \quad \text{і} \quad \bar{a}_{BA}^n \perp \overline{AB} \quad (2.10)$$

а нормальне прискорення в обертальному русі дорівнює:

$$a_{BA}^n = w_{AB} \cdot AB \quad (2.11)$$

і напрямлене від точки B до точки A .

Динамікою називають розділ механіки, в якому вивчають механічний рух системи матеріальних точок з урахуванням сил, що діють на ці рухомі об'єкти.

Основним законом динаміки вільної матеріальної точки вважається другий закон Ньютона – *прискорення (\bar{a}) матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі (\bar{P}) і має однаковий з нею напрямок:*

$$m\bar{a} = \bar{P}.$$

Цей закон є основою усіх теорем динаміки, однією з яких є теорема про зміну кінетичної енергії, на якій базується завдання 2.3.

Для розв'язання завдання 2.3 треба застосувати *теорему про зміну кінетичної енергії* матеріальної системи в інтегральній формі:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i, \quad (2.12)$$

де T – поточне значення кінетичної енергії системи;

T_0 – початкове значення кінетичної енергії системи;

$\sum_{k=1}^n A_k^e$ і $\sum_{k=1}^n A_k^i$ – суми робіт усіх відповідно зовнішніх і внутріш-

ніх сил;

n – кількість матеріальних точок, які складають систему.

Оскільки робота внутрішніх сил для ідеальної системи, в якій в'язі не деформуються, а тертям нехтують, дорівнює нулю, то формула (2.12) набуде вигляду

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e. \quad (2.13)$$

Якщо в початковий момент система була нерухома, то $T_0 = 0$.

Кінетична енергія системи T складається із кінетичних енергій (T_k)

тіл, які входять до складу системи:
$$T = \sum_{k=1}^n T_k. \quad (2.14)$$

Кінетична енергія твердого тіла, яке рухається поступально, дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m V^2, \quad (2.15)$$

де m – маса тіла;

V – його швидкість.

Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює

$$T = \frac{1}{2} J_Z \omega^2, \quad (2.16)$$

де J_Z – момент інерції тіла відносно осі обертання;

ω – кутова швидкість тіла.

Кінетична енергія тіла при плоско-паралельному русі дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{Z_C} \omega^2, \quad (2.17)$$

де V_C – швидкість центра мас тіла;

J_{Z_C} – момент інерції тіла відносно осі, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас.

Робота сили P , яка прикладена до точки M , на переміщенні $M_1 M_2$, визначається за формулою

$$A = \int_{M_1}^{M_2} P_t dS, \quad (2.18)$$

де $P_t = P \cdot \cos(\vec{P}, \vec{t})$ – проекція сили P на дотичну вісь t ;

dS – елементарне переміщення точки по траєкторії.

У окремих випадках роботу обчислюють за формулами.

Робота сили ваги матеріальної точки

$$A = \pm mgh, \quad (2.19)$$

де $h = z_2 - z_1$ – різниця вертикальних координат між початковою та кінцевою точками відрізка траєкторії. Робота вважається додатною, якщо напрямок сили (mg) співпадає з напрямком переміщення, тобто коли сила переміщується униз.

Робота сили пружності

$$A = \pm \frac{c}{2} (x_0^2 - x_1^2), \quad (2.20)$$

де C – коефіцієнт жорсткості пружини;

x_0 і x_l – відповідно початкове і кінцеве видовження пружини.

Робота сил, які прикладені до тіла, що обертається навколо нерухо-

мої осі

$$A = \int_0^j M_Z d\mathbf{j} , \quad (2.21)$$

де $M_Z = \sum_{k=1}^n m_Z (\bar{P}_k^e)$ – обертовий момент, або сума моментів зов-

нішніх сил відносно осі обертання

$d\mathbf{j}$ – елементарний кут повороту тіла навколо осі;

\mathbf{j} – кінцевий кут повороту.

Для розв’язання завдання 2.4 треба застосувати *загальне рівняння динаміки*.

Розглянемо рух механічної системи з ідеальними в’язями. Якщо до кожної точки системи, крім діючих активних сил \bar{F}_k і реакцій в’язей \bar{R}_k , додати сили інерції $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$, то згідно з принципом Даламбера отримана система сил буде перебувати у стані рівноваги. Використовуючи для такої системи принцип можливих переміщень, отримаємо *загальне рівняння динаміки*, а саме:

$$\sum \bar{F}_k d\bar{r}_k + \sum \bar{R}_k d\bar{r}_k + \sum \bar{\Phi}_k d\bar{r}_k = 0 \quad (2.22)$$

або

$$\sum dA_k + \sum dA_k^R + \sum dA_k^\Phi = 0 .$$

(2.23)

Якщо до системи прикладені ідеальні в’язі, то рівняння (2.22) і (2.23) можливо спростити, оскільки умови ідеальності в’язей мають вигляд:

$$\sum \bar{R}_k d\bar{r}_k = 0 .$$

Тоді рівняння (2.22) набуде вигляду:

$$\sum \bar{F}_k d\bar{r}_k + \sum \bar{\Phi}_k d\bar{r}_k = 0 ,$$

а рівняння (2.23):

$$\sum dA_k + \sum dA_k^\Phi = 0 . \quad (2.24)$$

Кількість рівнянь (2.22) або (2.23) залежить від числа ступенів вільності системи. Якщо система має один ступінь вільності, то для розв’язання задачі необхідно надати можливе переміщення одній із точок

системи.

Усі інші можливі переміщення точок системи необхідно визначити через надане можливе переміщення

При виконанні контрольної роботи на рисунку необхідно зобразити всі діючі сили та додати до них відповідні сили інерції. При цьому треба мати на увазі, що при поступальному русі твердого тіла зображуємо рівнодіючу силу $\bar{\Phi}$, яка спрямована проти прискорення центра мас тіла:

$$\bar{\Phi}_C = -M\bar{a}_C,$$

де M – маса тіла;

\bar{a}_C – прискорення центра мас тіла,

При обертальному русі однорідних тіл навколо осі, що співпадає з віссю симетрії, сили інерції зводимо до однієї пари сил з моментом:

$$L_x^\Phi = I_x e,$$

де I_x – момент інерції тіла навколо осі обертання,

e – кутове прискорення тіла.

Напрямок головного моменту сил інерції L_x^Φ зображуємо дуговою стрілкою, протилежною напрямку e .

При плоскому русі твердого тіла на рисунку, який зобразить студент, треба зобразити і головний вектор сил інерції, спрямований протилежно прискоренню центра мас тіла (точки C)

$$\bar{\Phi}_C = -M\bar{a}_C,$$

і головний момент сил інерції

$$L_C^\Phi = I_x e,$$

де I_x – момент інерції тіла відносно центра мас тіла.

Напрямок L_C^Φ протилежний напрямку e .

Прискорення усіх точок системи і кутові прискорення виражаємо через одне прискорення, яке необхідно знайти згідно з умовою задачі.

Далі обчислюємо елементарну роботу зображених сил і моментів сил на можливих переміщеннях, тобто записуємо рівняння (2.24), з якого і знаходимо невідому величину.

2.1 Визначення кінематичних характеристик точок і тіл при поступальному та обертальному рухах

Механізм складається із ступінчастих коліс 1...3, зубчатої рейки 4 і тягача 5, який прив'язано до кінця нитки, намотаної на циліндричний барабан одного із коліс. Колеса знаходяться у зачепленні між собою або зв'язані ремінною передачею. На ободі коліс позначені точки А, В і С.

Згідно із заданим рівнянням руху ведучого тіла механічної системи і в заданий час $t_I = 2c$, визначити лінійні і кутові переміщення зазначених тіл, а також кінематичні характеристики вказаних точок.

Дані взяти з таблиць 2.1, 2.2 та рисунків 2.1, 2.2.

У таблиці 2.2 означені рівняння руху або кутові переміщення ведучого тіла механізму, де $j_1(t)$, $j_2(t)$ – закон обертання відповідних коліс, (радіан); $S_4(t)$, $S_5(t)$ – закони руху відповідно зубчатої рейки і тягача, (см).

Попередження: додатні спрямування для j – проти руху стрілки годинника, для S_4 та S_5 – у бік додатних спрямувань відповідних осей (X та Z) або вниз.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані до задачі 2.1

Розміри колес	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r_1 , см	2	3	2	4	2	3	2	3	2	3
R_1 , см	4	6	4	10	6	6	4	9	4	6
r_2 , см	6	8	5	6	3	4	3	4	4	4
R_2 , см	8	10	10	12	9	8	6	10	8	12
r_2 , см	12	14	12	14	12	10	14	12	8	14
R_3 , см	14	18	16	20	16	12	20	18	16	18

Таблиця 2.2 – Вихідні дані до задачі 2.2

Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта	Задано	Знайти	
	Рівняння руху (см або рад)	Швидкості, см/с	Прискорення, см/с ²
0	$S_4 = 8t + 6t^2$	V_A, V_5, w_1, w_2	e_1, a_4, a_B
1	$S_5 = 7t + 9t^2$	V_C, V_4, w_1, w_2	e_2, a_5, a_B
2	$j_1 = 5t + 3t^2$	V_C, V_5, w_2, w_3	e_1, a_4, a_B
3	$j_2 = 2t + 5t^2$	V_A, V_4, w_2, w_3	e_1, a_5, a_C
4	$S_4 = 3t + 10t^2$	V_B, V_5, w_1, w_2	e_2, a_5, a_A
5	$S_5 = 5t + 4t^2$	V_C, V_4, w_1, w_2	e_2, a_4, a_B
6	$j_1 = 4t + 5t^2$	V_B, V_4, w_2, w_3	e_2, a_4, a_C
7	$j_2 = 2t + 6t^2$	V_A, V_4, w_1, w_3	e_1, a_5, a_B
8	$S_4 = 5t + 6t^2$	V_A, V_5, w_1, w_2	e_1, a_4, a_C
9	$S_5 = 8t + 7t^2$	V_B, V_4, w_1, w_2	e_2, a_5, a_C

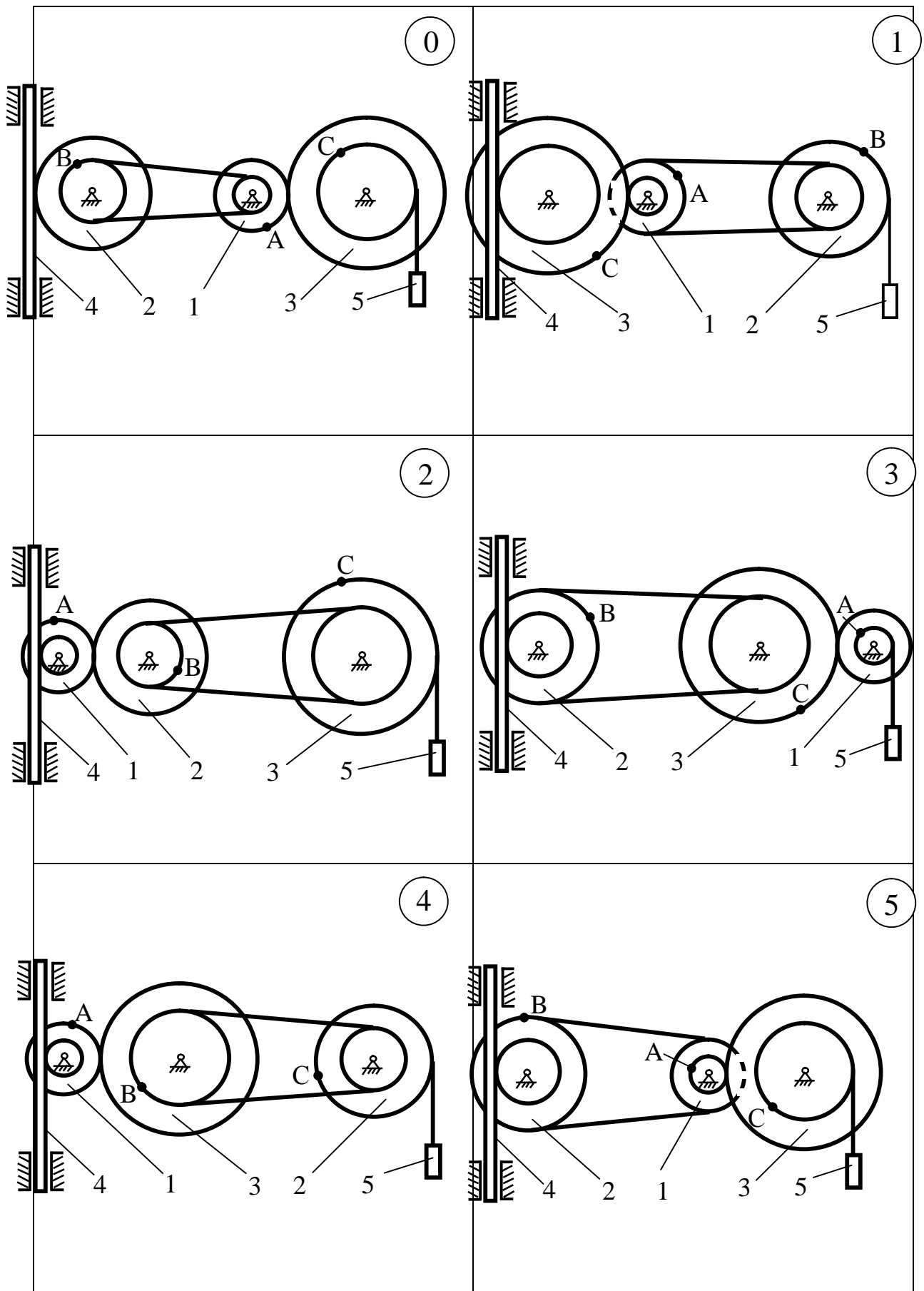


Рисунок 2.1 – Схеми до варіантів завдання

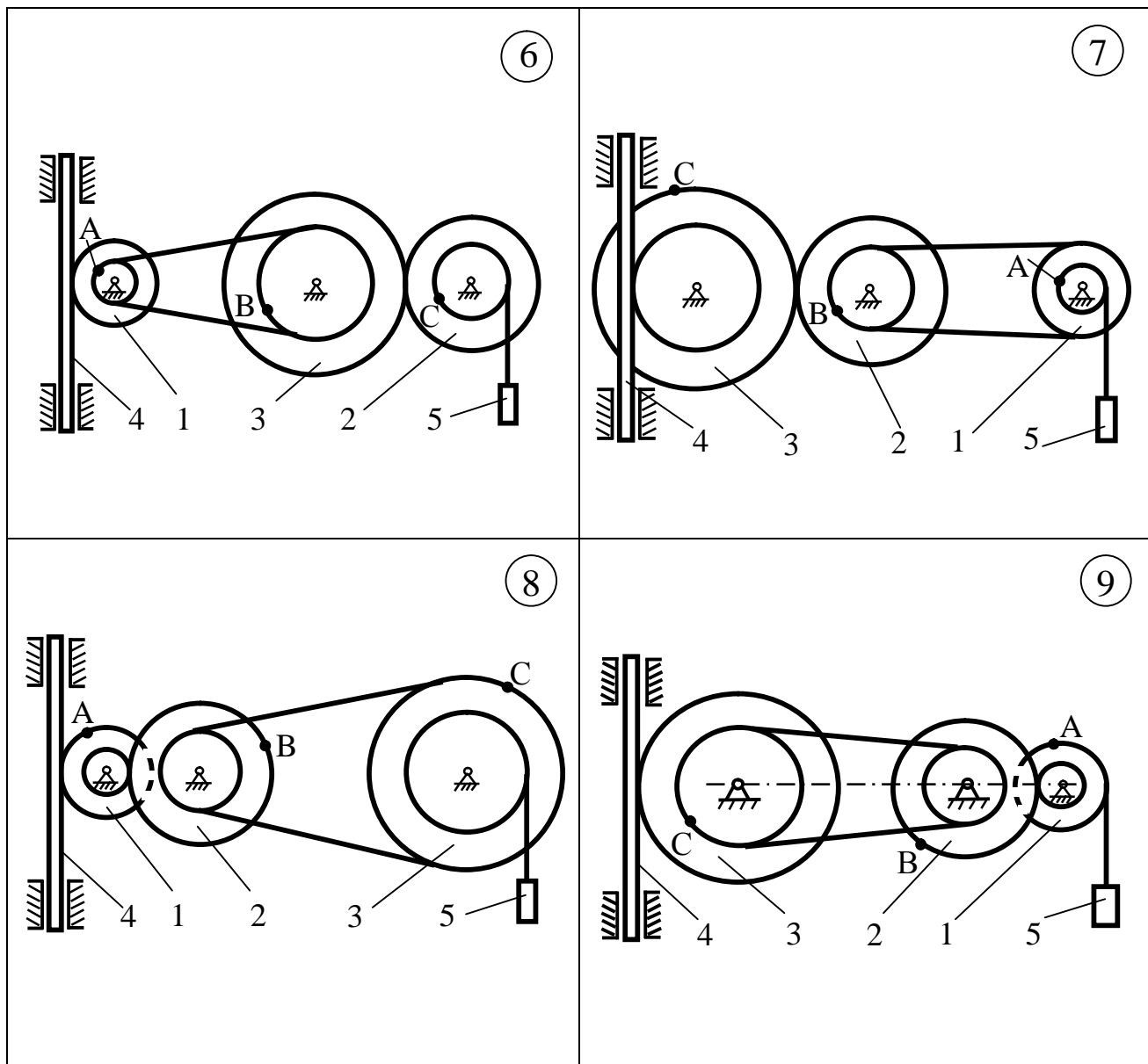


Рисунок 2.2 – Схеми до варіантів завдання

2.1.1 Приклад розв'язання задачі 2.1

Механізм складається із ступінчастих коліс 1...3, що перебувають у зачепленні або зв'язаних пасовою передачею, зубчастої рейки 4 і тягара 5, прив'язаного до кінця нитки, намотаної на колесо 3 (рис. 2.3). Радіуси коліс відповідно дорівнюють: $R_1 = 4 \text{ см}$; $r_1 = 2 \text{ см}$; $R_2 = 8 \text{ см}$; $r_2 = 6 \text{ см}$; $R_3 = 16 \text{ см}$; $r_3 = 12 \text{ см}$. На ободах коліс розташовані точки A , B і C .

Закон зміни швидкості вантажу $S_5 = 2t^2 - 3t$. Позитивний напрямок для S_5 – донизу. У завданні φ виражається у радіанах, S – у сантиметрах, t – у секундах.

Визначити в момент часу $t_1 = 2 \text{ с}$ величини V_A , V_C , ε_3 , a_B , a_4 .

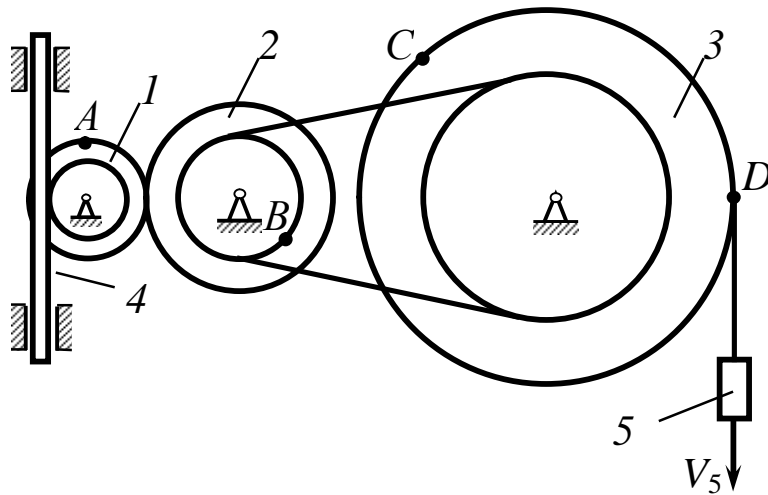


Рисунок 2.3 - Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 2.1
Розв'язання

1 Визначення швидкостей

Знайдемо швидкість тягара 5: $V_5 = \frac{dS_5}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 - 3t) = 4t - 3$.

Тягар 5 пов'язаний з колесом 3 у точці D, отже $V_D = V_5 = 4t - 3$.

Використаємо формулу (2.1) і знайдемо кутову швидкість ω_3 :

$$\omega_3 = \frac{V_D}{R_3} = \frac{4t - 3}{16}.$$

Обертання колеса 3 відбувається за ходом годинникової стрілки.

Колесо 3 знаходиться з колесом 2 у зачепленні, отже $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2}$.

Звідки знайдемо кутову швидкість колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{\omega_3 r_3}{r_2} = \frac{(4t - 3) \cdot 12}{16 \cdot 6} = 0,125(4t - 3).$$

Аналогічно знайдемо кутову швидкість колеса 1: $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$.

Звідки знайдемо кутову швидкість колеса 1:

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 R_2}{R_1} = \frac{(4t - 3) \cdot 8}{8 \cdot 4} = \frac{(4t - 3)}{4}.$$

Використовуючи формулу (2.1), знайдемо швидкість рейки 4:

$$V_4 = \omega_1 r_1 = \frac{(4t - 3)}{4} \cdot 2 = 0,5(4t - 3).$$

Швидкість точки C співпадає із швидкістю точки D оскільки вони знаходяться на одному колесі на однаковій відстані від осі обертання:

$$V_C = V_D = 4t - 3.$$

Швидкість точки A можна знайти за допомогою формули (2.1):

$$V_A = w_1 R_1 = \frac{(4t - 3)}{4} \cdot 4.$$

У момент часу $t_1 = 2$ с швидкості дорівнюють:

$$V_A = (4t - 3) = (4 \cdot 2 - 3) = 5 \text{ м/с}; \quad V_C = 4 \cdot 2 - 3 = 5 \text{ м/с};$$

$$w_2 = 0,125(4 \cdot 2 - 3) = 0,625 \text{ с}^{-1}.$$

Вектори швидкостей всіх тіл і точок проставимо на рисунку 2.4.

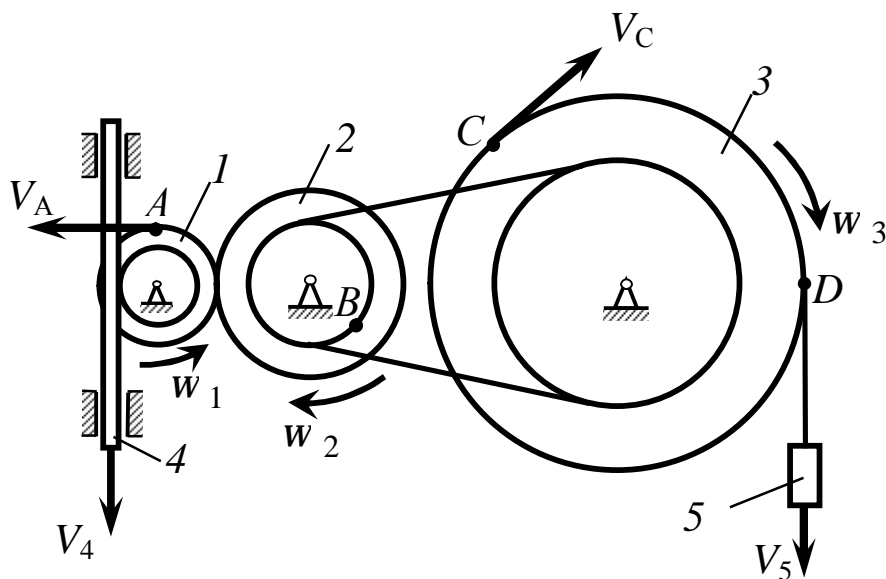


Рисунок 2.4 – Означення швидкостей тіл і точок заданого механізму

2 Визначення прискорень

Кутове прискорення є похідна від кутової швидкості: $e = \dot{w}$.

Для кутового прискорення колеса 3 рівняння запишеться у вигляді:

$$e_3 = \dot{w}_3, \quad \text{звідки} \quad e_3 = \frac{d}{dt} \left(\frac{(4t - 3)}{16} \right) = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ с}^{-2}.$$

Прискорення будь-якої точки тіла при його обертовому русі можна визначити як $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$. Дотичне прискорення \bar{a}_t чисельно дорівнює $a_t = e \cdot R$ і спрямоване за дотичною до кола, а нормальне прискорення \bar{a}_n чисельно дорівнює $a_n = w^2 R$ і спрямовано за нормаллю (за радіусом) убік осі обертання.

Спочатку визначимо кутові прискорення колеса 2:

$$e_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{(4t-3)}{8} \right) = 0,5 c^{-2}.$$

Визначимо дотичне прискорення точки B :

$$a_B^t = e_2 \cdot r_2 = 0,5 \cdot 6 = 3 м / c^2.$$

Визначимо нормальне прискорення точки B .

$$a_B^n = w_2^2 \cdot r_2 = 0,625^2 \cdot 6 = 2,34 м / c^2.$$

Повне прискорення точки B :

$$a_B = \sqrt{(a_B^t)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{3^2 + 2,34^2} = 3,8 м / c^2.$$

Прискорення рейки 4 можна визначити як похідну від швидкості

рейки V_4 :

$$a_4 = \frac{dV_4}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{(4t-3)}{2} \right) = 2 м / c^2.$$

Вектор \bar{a}_4 спрямований по швидкості V_4 рейки 4, тобто донизу.

У момент часу $t_1 = 2 c$ прискорення дорівнюють:

$$e_3 = 0,25 c^{-2}; a_B = 3,8 м / c^2; a_4 = 2 м / c^2.$$

Вектори знайдених прискорень зображені на рисунку 2.5.

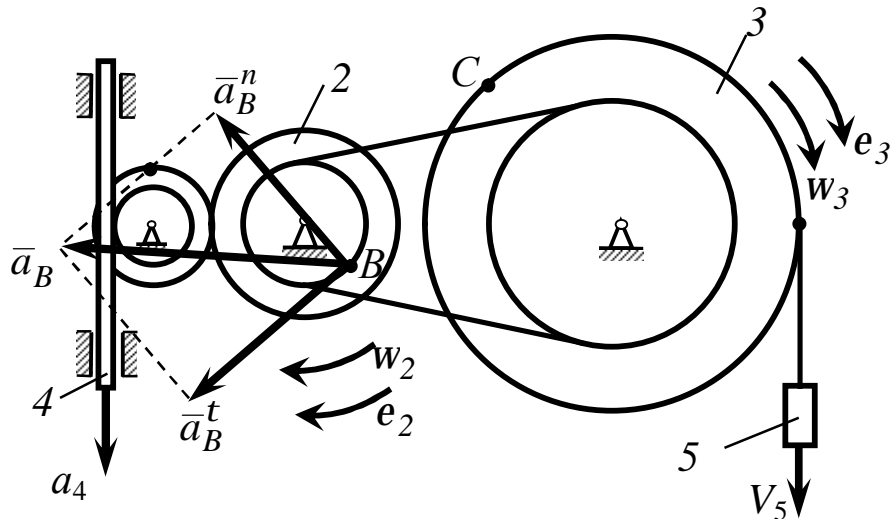


Рисунок 2.5 – Означення прискорень тіл і точок заданого механізму

Висновок: 1 У момент часу $t_1 = 2 c$ $V_A = 5 м / c$; $V_C = 5 м / c$;

$$e_3 = 0,25 c^{-2}; a_B = 3,8 м / c^2; a_4 = 2 м / c^2.$$

2 Заданий механізм рухається прискорено.

2.2 Кінематичний аналіз плоского механізму

Плоский механізм (рис.2.6 та 2.7) складається із декількох стрижнів, повзунів та опор. Довжини стрижнів дорівнюють відповідно: $l_1 = 0,6$ м, $l_2 = 1,8$ м, $l_3 = 2,0$ м, $l_4 = 0,8$ м.

Один із стрижнів у схемах поділений шарніром приєднання на дві рівні частини. Положення механізму визначається кутами a , b , g та q . Значення цих кутів й інших заданих величин вказані в таблицях 2.3 і 2.4.

Знайти швидкості і прискорення точок та кутові швидкості і кутові прискорення ланок, які вказані в таблиці 2.4.

Дугові стрілки на рисунках, які зображені студентом, показують, як при побудові креслення механізму повинні відкладатись відповідні кути. Побудову механізму слід починати із стрижня, напрям якого визначається кутом a .

Задані кутову швидкість і кутове прискорення вважати напрямленими проти ходу годинникової стрілки, а задані швидкість V_B і прискорення a_B - вниз або праворуч (відповідно до рисунку).

Таблиця 2.3 – Вихідні дані до задачі 2.2

Величина	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Кути $a, ^\circ$	90	120	0	30	60	90	150	60	30	0
Кути $g, ^\circ$	60	150	30	120	90	60	90	30	120	60

Таблиця 2.4 – Вихідні дані до задачі 2.2

Величина			Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Задані кінематичні характеристики	Кути	q^0	120	60	90	150	60	30	120	30	90	30
		b^0	30	120	150	60	30	120	150	60	90	30
	Для схем 1...5	w_I	6	-	5	-	2	-	8	-	4	-
		w_4	-	4	-	3	-	5	-	6	-	2
	Для схем 0, 6...9	w_I	2	-	3	-	4	-	5	-	6	-
		e_I	4	-	5	-	6	-	8	-	10	-
		V_B	-	4	-	6	-	2	-	3	-	5
		a_B	-	6	-	8	-	5	-	6	-	4
Невідомі (треба знайти)	V точок, м/с		В,Е	А,Е	В,Е	А,Е	В,Е	Д,Е	В,Е	А,Е	В,Е	Д,Е
	ω ланки, с ⁻¹		ω_3	ω_2	ω_2	ω_3	ω_2	ω_2	ω_3	ω_3	ω_2	ω_3
	a точок, м/с ²		В	А	В	А	В	А	В	А	В	А
	ϵ ланки, с ⁻²		ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2	ϵ_2

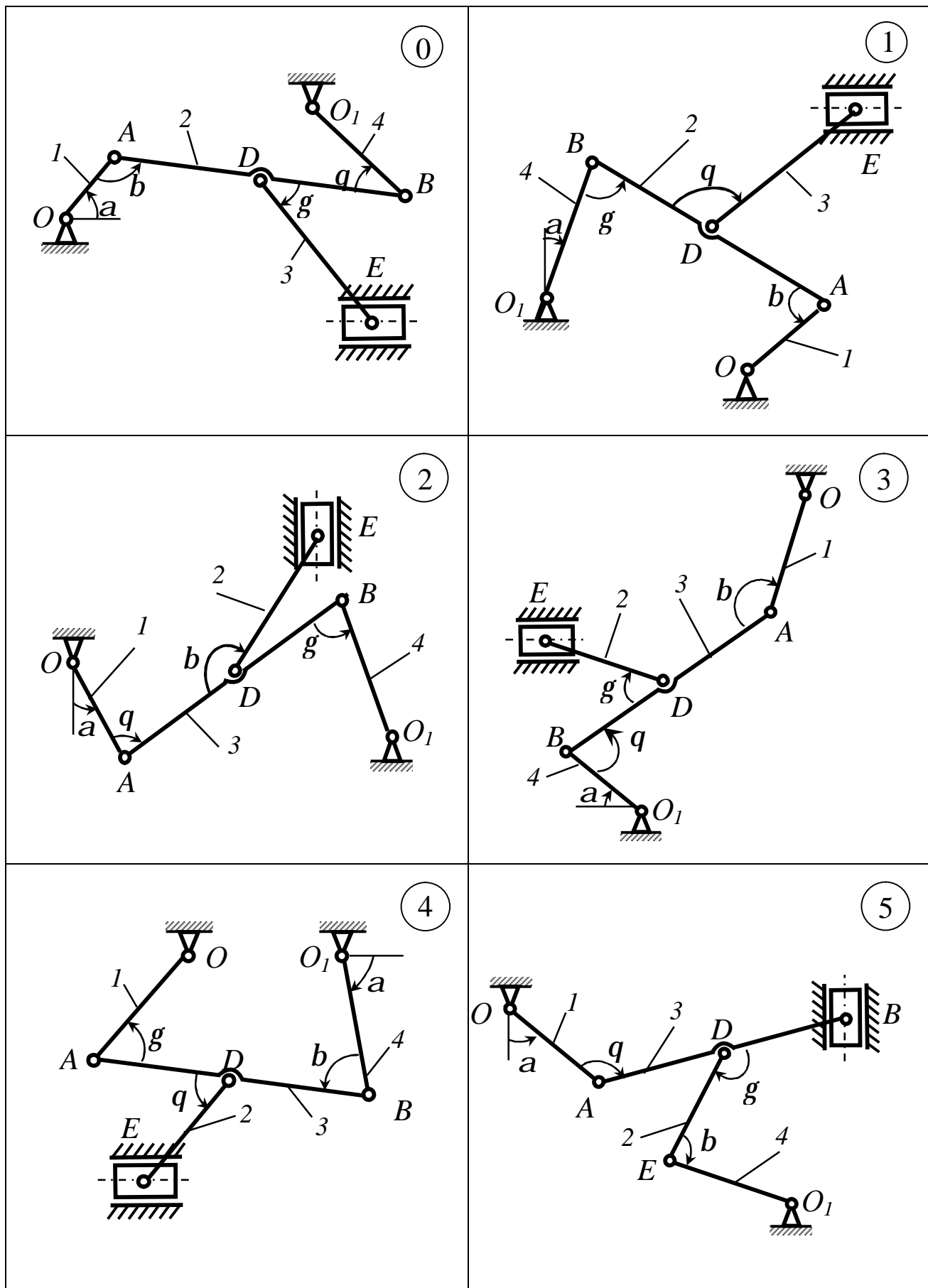


Рисунок 2.6 – Схеми до варіантів завдання

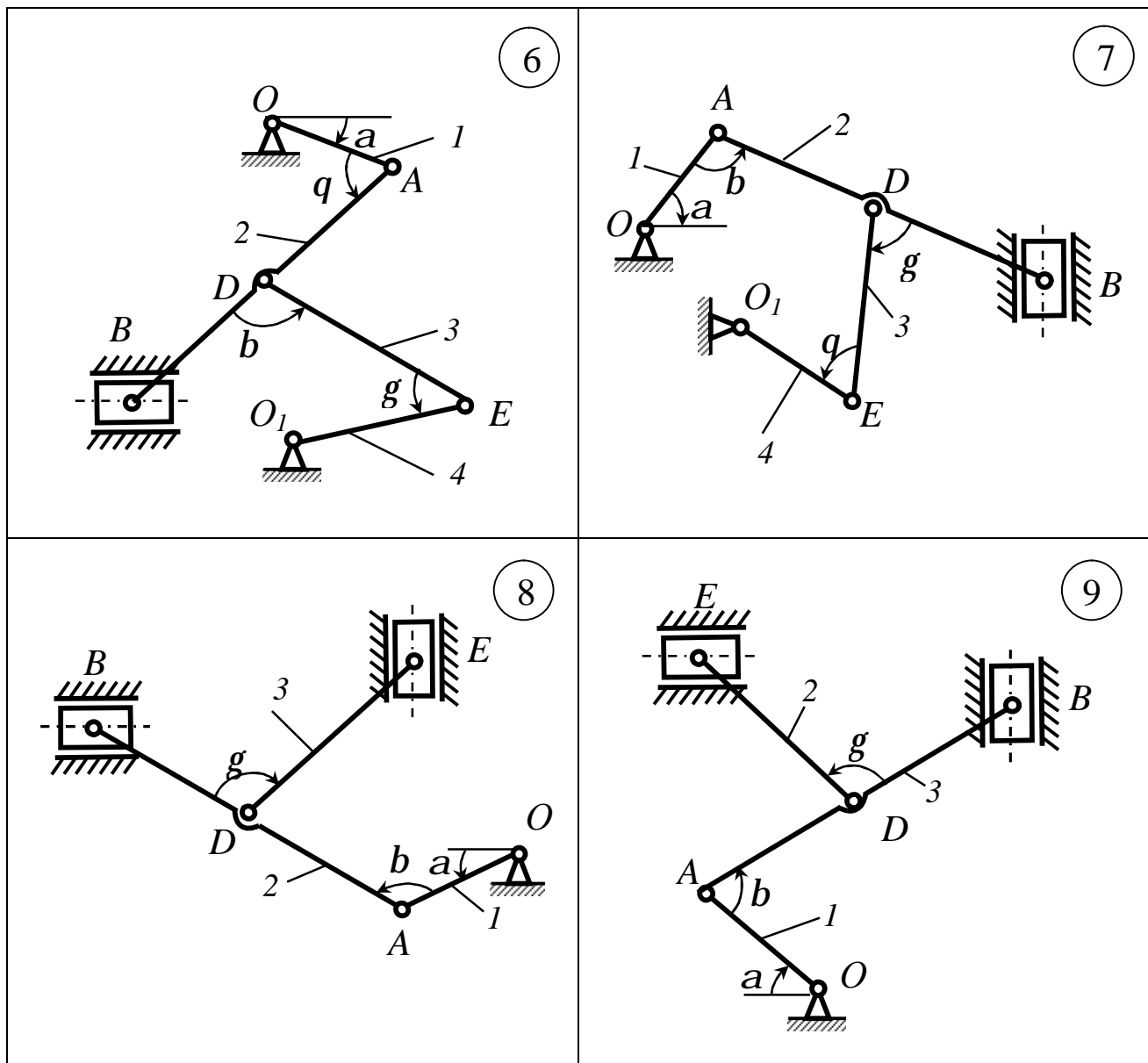


Рисунок 2.7 – Схеми до варіантів завдання

2.2.2 Приклад розв'язання задачі 2.2

Механізм (рис. 2.8) складається із з'єднаних один з одним стрижнів 1...4, повзуна B та нерухомих опор O і O_1 .

Д а н о: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $g = 90^\circ$, $j = 30^\circ$, $q = 30^\circ$, $AD = DB$, $\mathbf{l}_1 = 0,4 \text{ м}$, $\mathbf{l}_2 = 1,2 \text{ м}$, $\mathbf{l}_3 = 1,4 \text{ м}$, $\mathbf{l}_4 = 0,6 \text{ м}$, $\omega_1 = 2 \text{ с}^{-1}$, $\mathbf{e}_1 = 7 \text{ с}^{-2}$ (напрямки ω_1 і \mathbf{e}_1 – проти ходу годинникової стрілки).

Визначити: V_B , V_E , ω_2 , a_B , \mathbf{e}_3 .

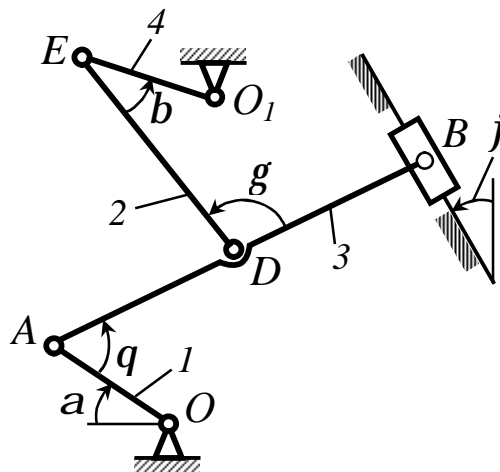


Рисунок 2.8 - Задана схема до прикладу виконання завдання 2.2

Розв'язання

1 Побудуємо положення механізму (рис. 2.9) відповідно до заданих кутів та довжин стрижнів.

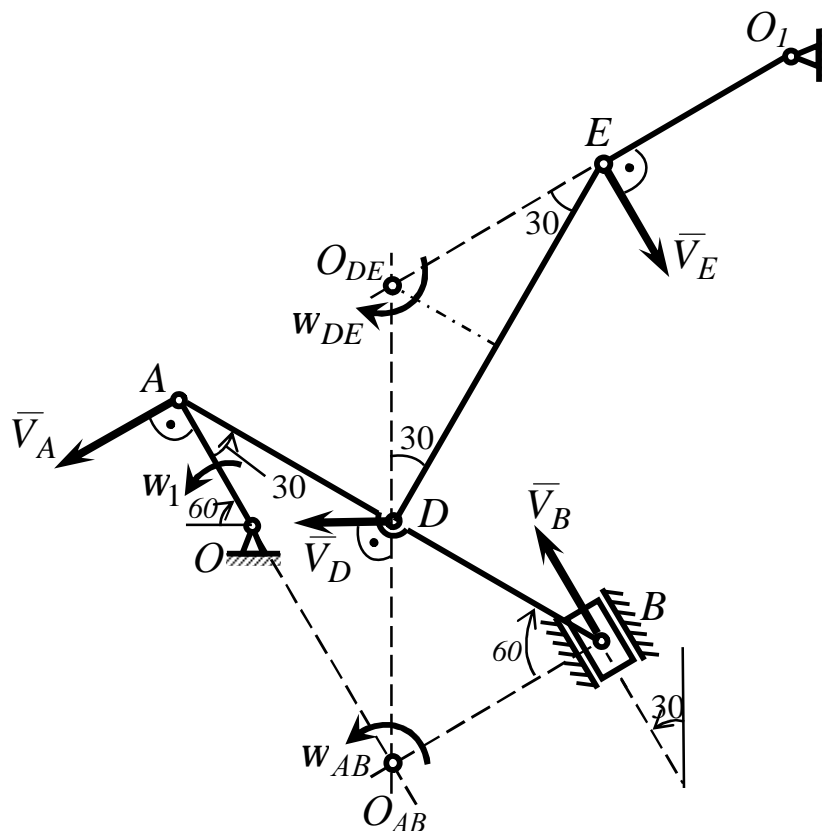


Рисунок 2.9 - Розрахункова схема для визначення швидкостей до прикладу виконання завдання 2.2

2 Спочатку знайдемо швидкість точки А, оскільки задана кутова швидкість (ω_1) стрижня ОА:

$$V_A = w_1 l_1 = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с}; \quad \bar{V}_A \perp O_1 A. \quad (2.25)$$

3 Визначимо швидкість V_B . Точка B (див. рис. 2.9) належить стрижню AB , який здійснює плоско-паралельний рух. Напрямок \bar{V}_B знайдемо, урахувуючи, що точка B належить одночасно повзуну, який рухається уздовж напрямних поступально. Тепер, знаючи напрямки векторів \bar{V}_A та \bar{V}_B , скористаємося теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла (стрижня AB) на пряму, що з'єднує ці точки (пряма AB).

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ \quad (2.26)$$

Звідки
$$V_B = V_A \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 0,8 \frac{0,5}{0,867} = 0,46 \text{ м/с}.$$

4 Визначимо швидкість \bar{V}_E . Точка E (див. рис. 2.9) належить стрижню DE . Отже, за аналогією з попереднім, щоб визначити \bar{V}_E , треба спочатку знайти швидкість точки D , що належить одночасно стрижням AB і DE . Для цього, знаючи \bar{V}_A й \bar{V}_B , будемо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) стрижня AB . Це точка O_{AB} , що лежить на перетинанні перпендикулярів до \bar{V}_A і \bar{V}_B , побудованих із точок A і B . За напрямком вектора \bar{V}_A визначимо напрямок кутової швидкості стрижня AB (ω_{AB}) навколо МЦШ O_{AB} . Вектор \bar{V}_D направлений перпендикулярно відрізку $O_{AB}D$ і спрямований убік повороту ω_{AB} .

Величину V_D знайдемо із пропорції

$$\frac{V_D}{O_{AB}D} = \frac{V_B}{O_{AB}B}. \quad (2.27)$$

Щоб обчислити $O_{AB}D$ і $O_{AB}B$, будемо мати на увазі, що $\triangle ABO_{AB}$ — прямокутний, тому що гострі кути в ньому рівні 30° і 60° , і що

$$O_{AB}B = AB \sin 30^\circ = 0,5 \cdot AB = BD.$$

Тоді $\triangle BDO_{AB}$ є рівностороннім і $BO_{AB} = DO_{AB}$.

У результаті чого рівняння (2.27) дає

$$V_D = V_B = 0,46 \text{ м/с} \quad \text{і} \quad V_D \perp DO_{AB} \quad (2.28)$$

5 Оскільки точка E (див. рис. 2.9) належить одночасно стрижню

O_1E , що обертається навколо опори O_1 , то $\bar{V}_E \perp O_2E$. Тоді, проводячи із точок E і D перпендикуляри до швидкостей \bar{V}_E і \bar{V}_D , побудуємо МЦШ O_{DE} стрижня DE . За напрямком вектора \bar{V}_D визначаємо напрямок кутової швидкості (ω_{DE}) стрижня DE навколо центра O_{DE} . Вектор \bar{V}_E також спрямований убік кутової швидкості ω_{DE} . З рисунку 2.9 видно, що $\angle O_{DE}ED = \angle O_{DE}DE = 30^\circ$, звідки $O_{DE}E = O_{DE}D$.

Пам'ятаючи, що швидкості точок пропорційні відстаням до МЦШ

$$\frac{V_E}{O_{DE}E} = \frac{V_D}{O_{DE}D}, \quad (2.29)$$

знайдемо

$$V_E = V_D = 0,46 \text{ м/с}.$$

6 Визначимо ω_{DE} . Для цього треба знайти відстань $O_{DE}D$. Опустимо перпендикуляр з точки O_{DE} на стрижень DE і знайдемо:

$$O_{DE}D = \frac{0,5\mathbf{l}_2}{\cos 30^\circ} = 0,69 \text{ м}, \quad (2.16)$$

тоді

$$\omega_{DE} = \frac{V_D}{O_{DE}D} = \frac{0,46}{0,69} = 0,67 \text{ с}^{-1}.$$

7 Для визначення прискорень побудуємо рисунок 2.10, на якому зображено вектори всіх прискорень.

8 Визначимо \bar{a}_B . Точка B належить стрижню AB , який здійснює плоско-паралельний рух, тому для визначення \bar{a}_B скористаємося рівнянням

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n. \quad (2.30)$$

Щоб знайти \bar{a}_B , треба знати прискорення якої-небудь іншої точки (полюса) стрижня AB і траєкторію точки B .

За даними завдання можемо визначити $\bar{a}_A = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n$, де чисельно

$$a_A^t = e_1 \mathbf{l}_1 = 7 \cdot 0,4 = 2,8 \text{ м/с}^2, \quad (2.31)$$

$$a_A^n = w_1^2 \mathbf{l}_1 = 2^2 \cdot 0,4 = 1,6 \text{ м/с}^2. \quad (2.32)$$

Вектор \bar{a}_A^n спрямований уздовж AO , а \bar{a}_A^t – перпендикулярно AO ; зображуємо ці вектори на схемі (див. рис. 2.10).

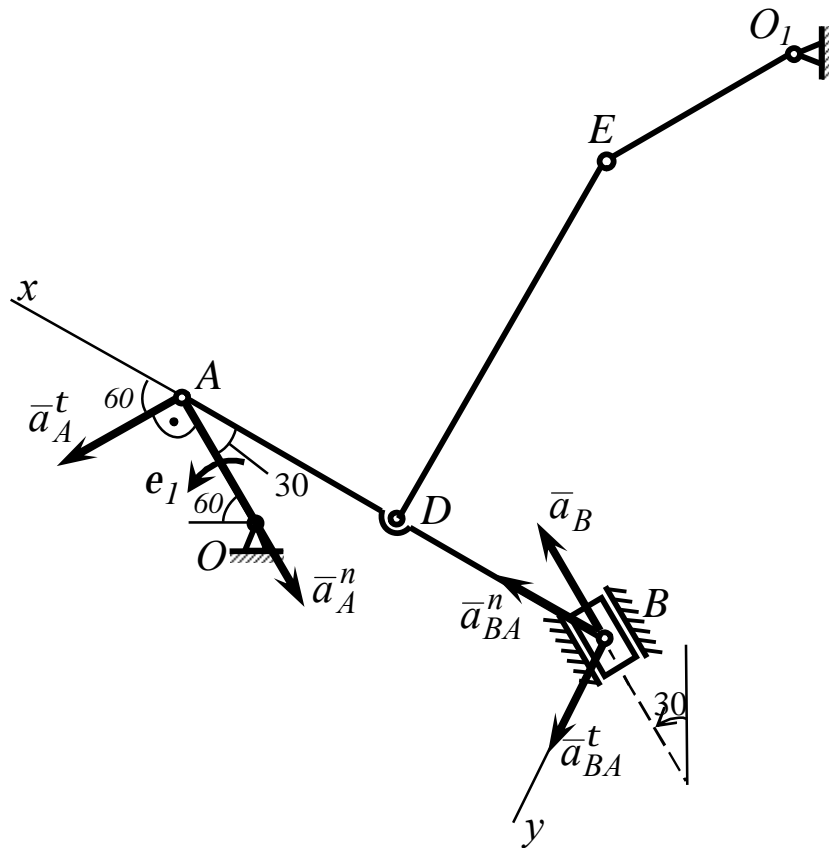


Рисунок 2.10 - Розрахункова схема для визначення прискорень до прикладу виконання завдання 2.2

Точка B , яка належить повзуну рухається паралельно напрямку повзуна. Тому зобразимо вектор \bar{a}_B на схемі (див. рис. 2.10), вважаючи, що \bar{a}_B спрямований у ту ж сторону, що й швидкість \bar{V}_B .

Зобразимо на схемі вектори \bar{a}_{BA}^n (уздовж BA від B к A) і \bar{a}_{BA}^t (перпендикулярно BA у будь-яку сторону). Чисельно $\bar{a}_{BA}^n = w_3^2 \mathbf{l}_3$.

Кутову швидкість ω_{AB} знайдемо за допомогою побудованого МЦШ стрижня AB (точка O_{AB} , див. рис. 2.9):

$$w_{AB} = \frac{V_A}{O_{AB}A} = \frac{V_A}{\mathbf{l}_3 \cos 30^\circ} = \frac{0,8}{1,4 \cdot 0,866} = 0,66 \text{ c}^{-1}.$$

$$\text{Тоді} \quad \bar{a}_{BA}^n = w_3^2 \mathbf{l}_3 = 0,66^2 \cdot 1,4 = 0,61 \text{ м/с}^2. \quad (2.33)$$

Таким чином, у величин, що входять до рівняння (2.30), невідомі тільки дві величини: a_B й a_{BA}^t . Їх можна знайти, спроектувавши частини

рівняння (2.30) на дві будь-які осі. Наприклад, вісь x направимо вздовж стрижня АВ, а вісь y – у перпендикулярному напрямку.

Спроектуємо векторне рівняння (2.30) на вісь x і одержимо:

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^t \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \quad (2.34)$$

Підставивши в рівняння (2.34) числові значення всіх величин з (2.31)...(2.33), знайдемо:

$$a_B = \frac{a_A^t \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n}{\cos 30^\circ}$$

$$a_B = \frac{2,8 \cdot 0,5 - 1,6 \cdot 0,867 + 0,61}{0,867} = 0,72 \text{ м/с}^2. \quad (2.35)$$

Позитивний знак a_B означає, що наше припущення щодо напрямку вектора \bar{a}_B (див. рис. 2.10) дійсно підтверджується.

Тепер спроектуємо векторне рівняння (2.30) на вісь y і одержимо:

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^t \sin 60^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^t, \quad (2.36)$$

звідки знайдемо $a_{BA}^t = -a_B \sin 30^\circ - a_A^t \sin 60^\circ - a_A^n \sin 30^\circ$.

$$a_{BA}^t = -0,72 \cdot 0,5 - 2,8 \cdot 0,866 - 1,6 \cdot 0,5 = -3,58 \text{ м/с}^2.$$

Знак $a_{BA}^t < 0$ указує, що напрямок дотичного прискорення \bar{a}_{BA}^t протилежний показаному на рисунку 2.10.

9 Визначимо e_3 . Оскільки $a_{BA}^t = e_3 \mathbf{l}_3$, то

$$e_3 = \frac{|a_{BA}^t|}{\mathbf{l}_3} = \frac{3,58}{1,4} = 2,56 \text{ с}^{-2}. \quad (2.37)$$

Висновок: $V_B = 0,46 \text{ м/с}$; $V_E = V_D = 0,46 \text{ м/с}$;

$$w_{DE} = 0,67 \text{ с}^{-1}; a_B = 0,72 \text{ м/с}^2; e_3 = 2,56 \text{ с}^{-2}.$$

2.3 Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи

Механічна система під впливом змінної сили $P = f(S)$ починає рухатись із стану спокою (при цьому пружини вважаються не розтягнутими). Початкові положення системи зображені на рисунку 2.11...2.13.

Враховуючи тертя ковзання тіла 1 та опір тіла 3 при коченні (вар.1...6, 8, 9), ігноруючи маси ниток, які вважають нерозтяжними, визначити швидкість тіла 1 у положенні, коли точка прикладання сили P пройде шлях $S = l_m$.

У завданні прийняті такі позначення:

- m_1, m_2 та m_3 – маси тіл 1, 2 та 3, величини яких залежать від заданої маси (для усіх варіантів $m = 10 \text{ кг}$);
- r_2, R_2, r_3 та R_3 – радіуси великих та малих кіл, причому $R_2 = 2r_2, R_3 = 2r_3$;
- $i_{2Z} = 1,5 r_2$ – радіус інерції тіла 2 відносно горизонтальної осі;
- c – коефіцієнт жорсткості пружини;
- f та f_K – коефіцієнти тертя відповідно ковзання та кочення.

Необхідні для рішення дані наведені в таблицях 2.5 і 2.6.

Таблиця 2.5 – Вихідні дані до задачі 2.3

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r_2, \text{м}$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55
$r_3, \text{м}$	0,50	0,60	0,80	0,70	0,60	0,40	0,50	0,30	0,20	0,10
f	0,12	0,15	0,22	0,28	0,35	0,40	0,35	0,32	0,25	0,24
$f_K, \text{см}$	0,25	0,22	0,24	0,26	0,28	0,32	0,18	0,12	0,14	0,16

Таблиця 2.6 – Вихідні дані до задачі 2.3

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_1 , кг	9m	10m	9m	8m	6m	8m	7m	9m	10m	8m
m_2 , кг	6m	5m	4m	3m	4m	3m	5m	6m	4m	3m
m_3 , кг	2m	3m	1m	3m	2m	1m	2m	3m	2m	1m
c , Н/м	12	14	18	20	16	14	12	18	22	20
$P = f(S)$, Н	$30S^2$	$21S^2$	$40S^2$	$18S^2$	$10S^2$	$24S^2$	$16S^2$	$30S^2$	$24S^2$	$12S^2$

Попередження: блоки та катки, які мають тільки один радіус, вважати однорідними суцільними циліндрами. Тіла, маси яких не задані, вважаються невагомими.

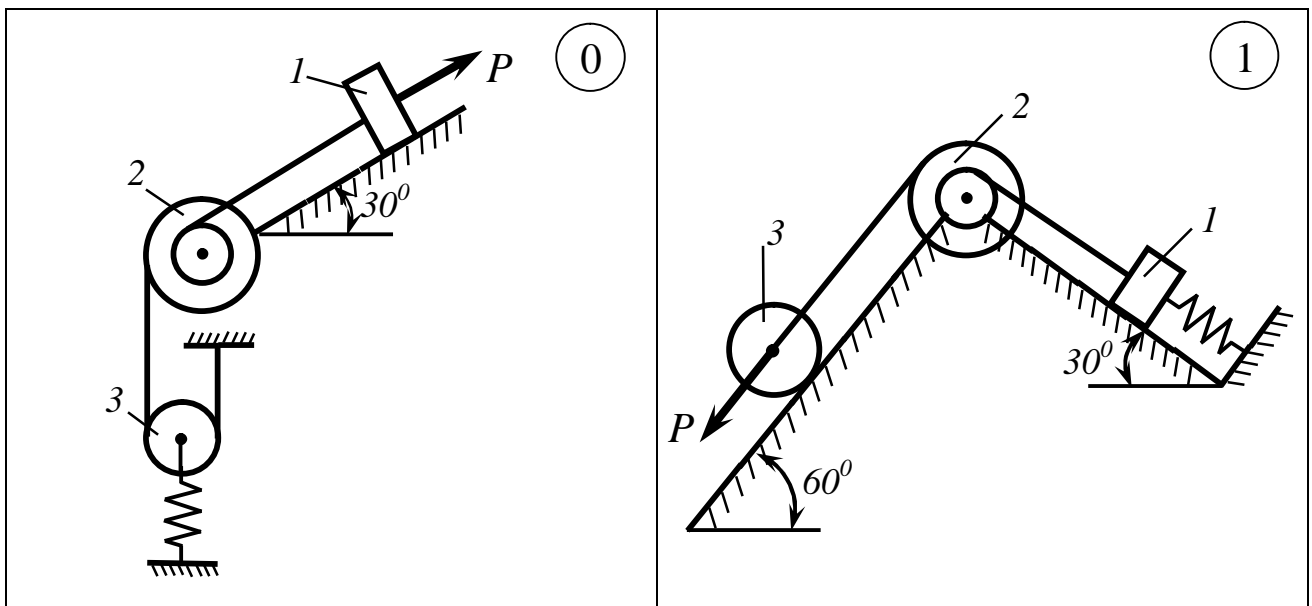


Рисунок 2.11-Схеми до варіантів завдання 2.3

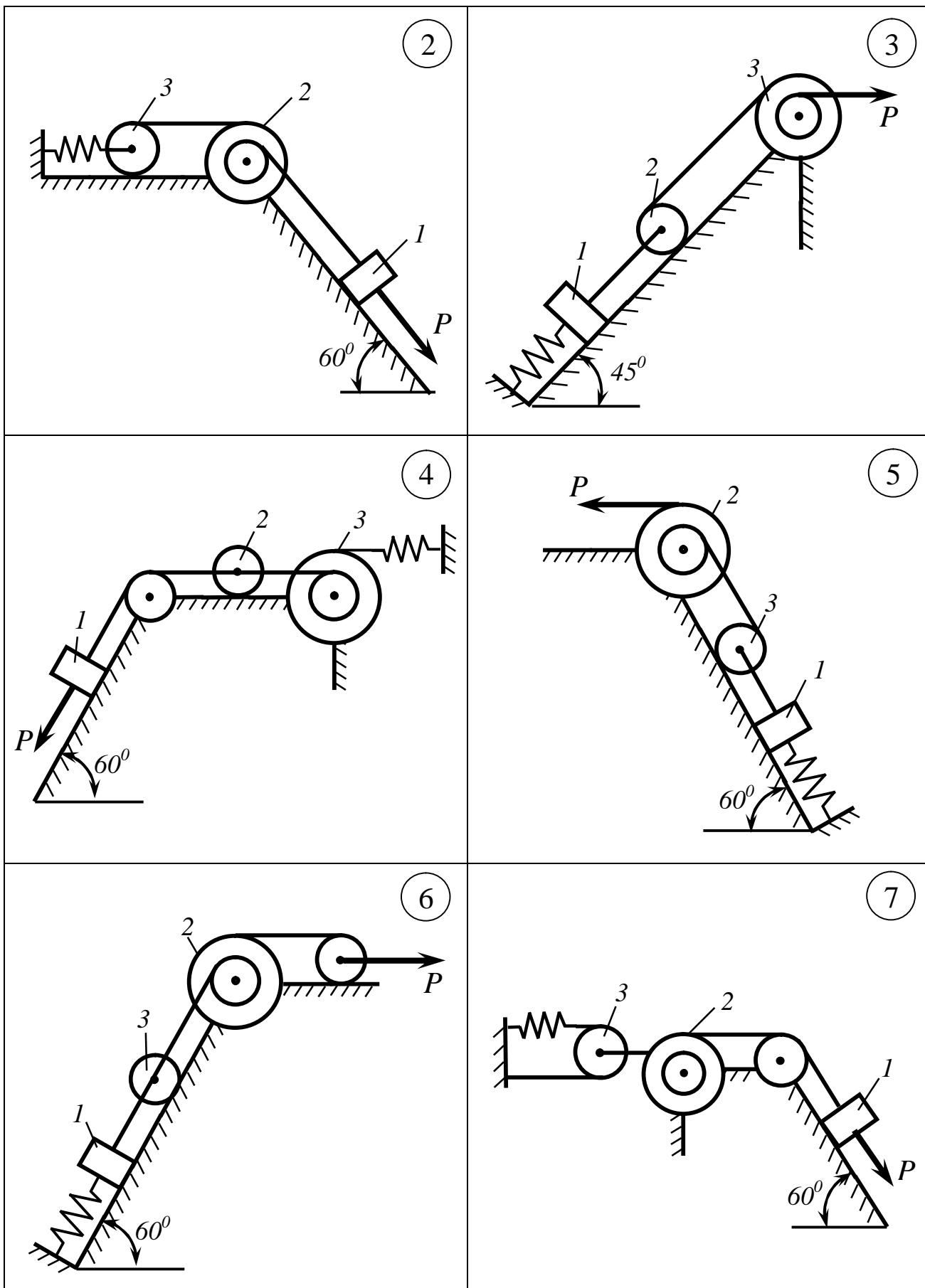


Рисунок 2.12-Схеми до варіантів завдання 2.3

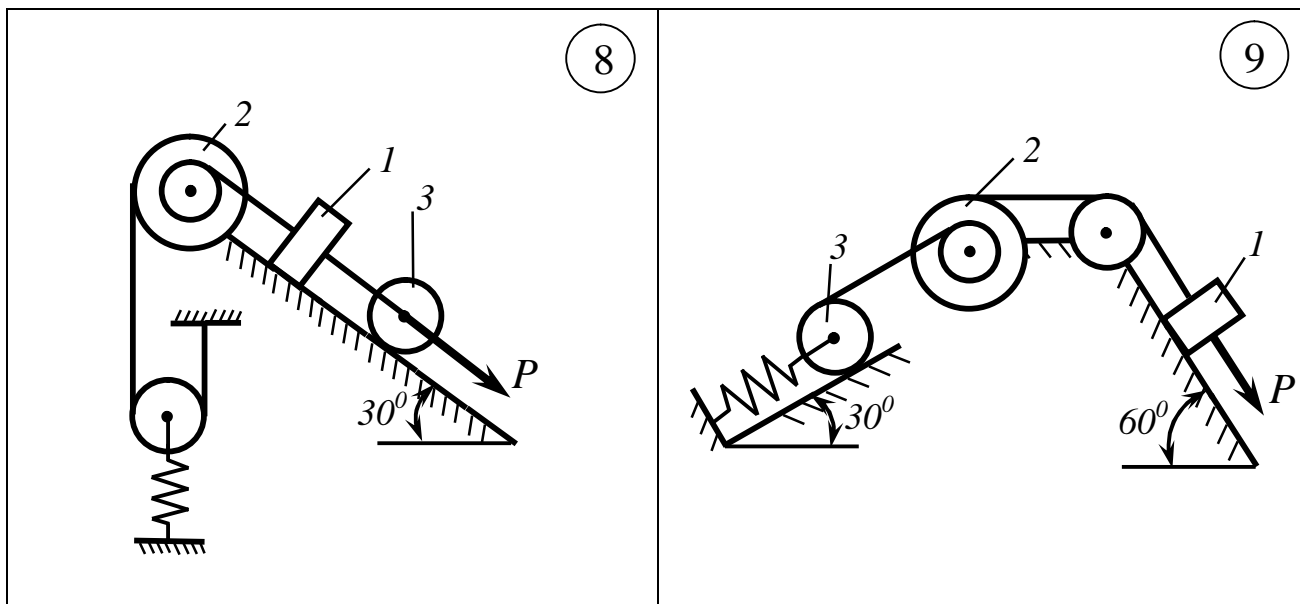


Рисунок 2.13-Схеми до варіантів завдання 2.3

2.3.1 Приклад розв'язання задачі 2.3

Механічна система (рис. 2.14) складається з вантажу 1 , ступінчастого шківів 2 і однорідного суцільного циліндра 3 . Тіла системи зв'язані нерозтяжними нитками. До центра C_3 циліндра 3 прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості c (її початкова деформація дорівнює нулю). Коефіцієнт тертя вантажу 1 об поверхню дорівнює f . Коефіцієнт кочення циліндра 3 дорівнює d .

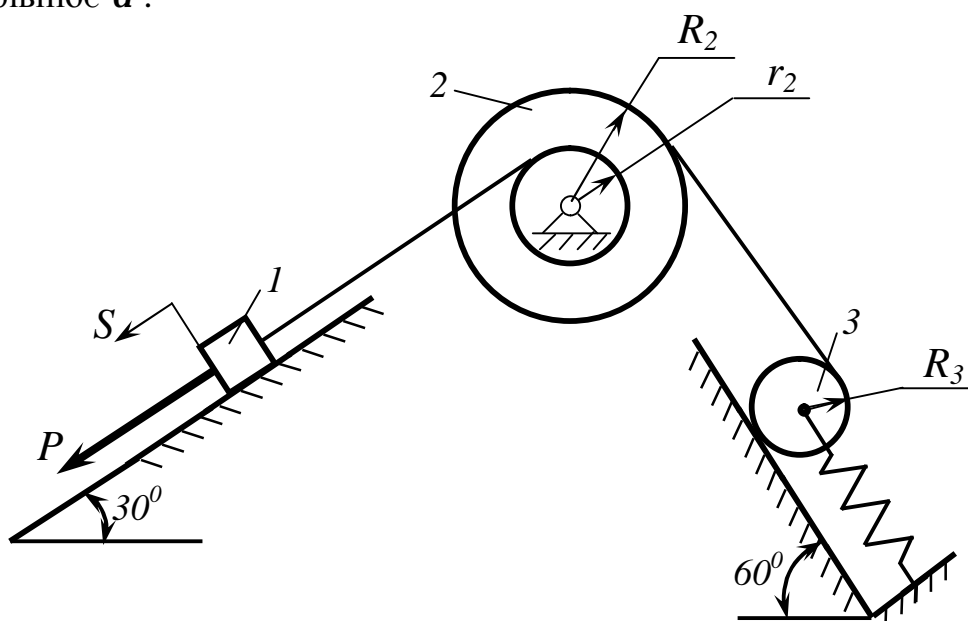


Рисунок 2.14 - Задана схема до прикладу виконання завдання 2.3

Система починає рухатись під впливом сили $P = f(S)$.

Дано: $m_1 = 10m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m$; $m = 10 \text{ кг}$; $r_2 = 6 \text{ см}$; $R_2 = 2r_2 = 12 \text{ см}$; $i_{2Z} = 1,5r_2 = 9 \text{ см}$; $R_3 = 15 \text{ см}$; $a = 30^\circ$; $b = 60^\circ$; $f = 0,1$; $f_K = 0,2 \text{ см}$; $c = 10 \text{ Н/м}$; $S = 0,5 \text{ м}$; $P = 30(2+3S), \text{ Н}$.

Визначити: швидкість вантажу 1 в кінцевому положенні.

Розв'язання

Зобразимо механічну систему в кінцевому положенні (рис. 2.15), коли тіло 1 пройде шлях $S = S_1$. Позначимо всі зовнішні сили, які діють на систему: активні сили ваги $m_1 \bar{g}$; $m_2 \bar{g}$; $m_3 \bar{g}$; нормальні реакції N_1 та N_3 площини та реакцію N_2 нерухомої опори східчастого шківів 2 ; сили тертя ковзання F_{TP1} та момент опору кочення M_{TP} .

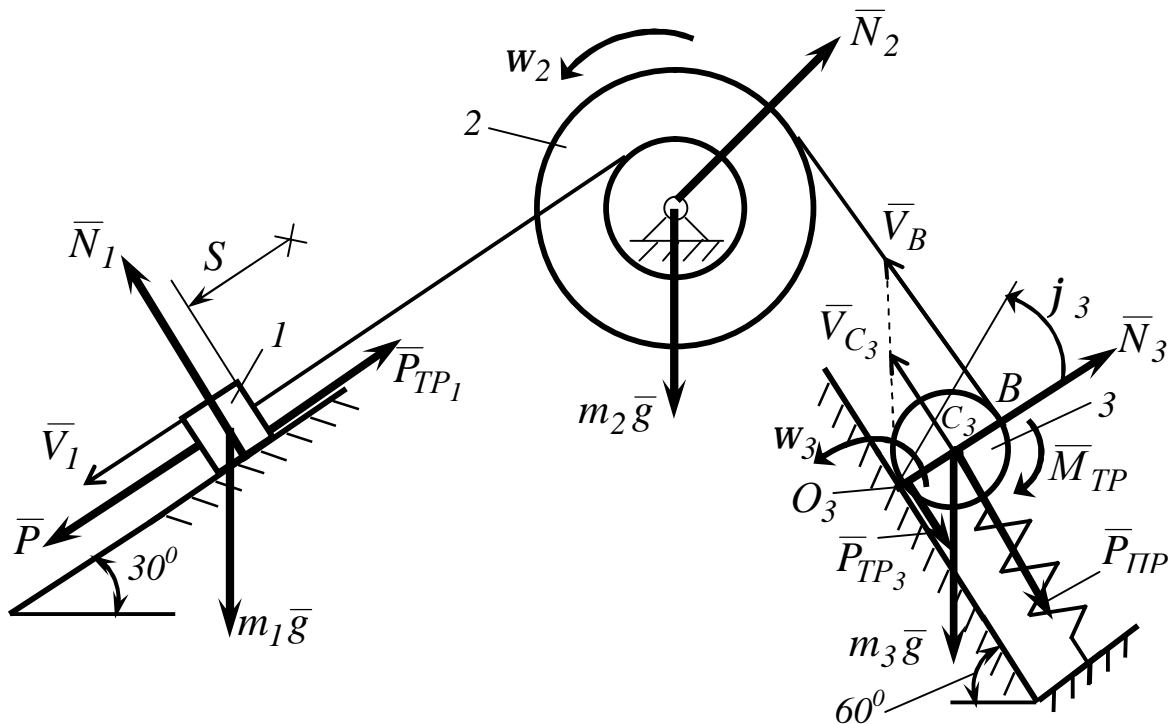


Рисунок 2.15 - Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 2.3

На підставі теореми про зміну кінетичної енергії можна записати

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e, \quad (2.38)$$

де $T_0 = 0$ – кінетична енергія системи у початковому положенні;

$\sum_{k=1}^n A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил.

Кінетична енергія системи у кінцевому положенні дорівнює:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (2.39)$$

Кінетична енергія вантажу 1, який рухається поступально

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2. \quad (2.40)$$

Кінетична енергія блока 2, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2Z} w_2^2, \quad (2.41)$$

де J_{2Z} – момент інерції блока відносно осі обертання;

$J_{2Z} = m_2 i_{2Z}^2$ – момент інерції блока відносно осі обертання,

w_2 – кутова швидкість блока 2, яка дорівнює

$$w_2 = \frac{V_1}{r_2}. \quad (2.42)$$

Кінетична енергія блока 2, що обертається навколо нерухомої осі
Таким чином

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{i_{2Z}^2}{r_2^2} V_1^2. \quad (2.43)$$

Кінетична енергія катка 3, який рухається плоско-паралельно:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{C3}^2 + \frac{1}{2} J_{ZC} w_3^2, \quad (2.44)$$

де V_{C3} – швидкість центра мас тіла;

w_3 – кутова швидкість катка;

J_{ZC} – момент інерції тіла відносно осі, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас.

Оскільки тіло 3 можна вважати суцільним однорідним диском, то його момент інерції відносно осі z , яка проходить через центр мас C , дорівнює:

$$J_{ZC} = \frac{m_3 R_3^2}{2}. \quad (2.45)$$

Для знаходження швидкостей w_3 і V_{C_3} скористуємося формулою (2.8) і спочатку знайдемо швидкість точки В:

$$V_B = w_2 R_2 = \frac{V_1 R_2}{r_2}. \quad (2.46)$$

Оскільки $V_{C_3} = \frac{1}{2} V_B$, то $V_{C_3} = \frac{V_1 R_2}{2 r_2} = V_1$. (2.47)

Кутова швидкість катка $w_3 = \frac{V_B}{2 R_3} = \frac{V_1 R_2}{2 r_2 R_3}$. (2.48)

Підставимо (2.45), (2.47) та (2.48) в (2.44):

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{V_1 R_2}{2 r_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3 R_3^2}{2} \left(\frac{V_1 R_2}{2 r_2 R_3} \right)^2 = \frac{3}{16} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} V_1^2. \quad (2.49)$$

Визначимо кінетичну енергію усієї механічної системи, підставивши (2.40), (2.43) та (2.49) у формулу (2.39):

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{i_{2Z}^2}{r_2^2} V_1^2 + \frac{3}{16} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} V_1^2 = \frac{V_1^2}{16} \left(8 m_1 + 8 m_2 \frac{i_{2Z}^2}{r_2^2} + 3 m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right).$$

Після підстановки значень мас і радіусів одержимо:

$$T = \frac{V_1^2}{16} \left(8 \cdot 10 m + 8 \cdot 2 m \left(\frac{1,5 r_2}{r_2} \right)^2 + 3 m \left(\frac{2 r_2}{r_2} \right)^2 \right) = 8 m V_1^2. \quad (2.50)$$

Знайдемо суму робіт усіх зовнішніх сил (див. рис. 2.15), які діють на тіла системи на заданому переміщенні:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = A(\bar{P}) + A(m_1 \bar{g}) + A(\bar{N}_1) + A(\bar{P}_{TP_1}) + A(m_2 \bar{g}) + A(\bar{N}_2) + A(m_3 \bar{g}) + A(\bar{N}_3) + A(\bar{P}_{TP_3}) + A(M_{TP}) + A(\bar{P}_{\Pi P}). \quad (2.51)$$

Робота зовнішньої сили F :

$$A(P) = \int_0^{S_I} P dS = \int_0^{S_I} 30(2 + 3S) dS = 60 S_I + 45 S_I^2, \quad (2.52)$$

де S_I – переміщення вантажу I .

Робота сили ваги тіла I

$$A(m_1 g) = A(m_1 g)_t \cdot S_I = m_1 g \sin \alpha \cdot S_I. \quad (2.53)$$

Оскільки нормальна реакція вантажу I (N_1) направлена перпенди-

кулярно до напрямку руху вантажу I , то її робота дорівнює 0:

$$A(N_I) = 0. \quad (2.54)$$

Робота сили тертя ковзання P_{TP_I}

$$A(P_{TP_I}) = (P_{TP_I})_t \cdot S_I,$$

де $(\bar{P}_{TP_I})_t$ – проекція сили тертя ковзання на напрямок руху.

Оскільки сила тертя дорівнює $(P_{TP_I}) = fN_I = fm_1g \cos a$,

$$\text{то} \quad A(P_{TP_I}) = -fm_1g \cos a. \quad (2.55)$$

Робота сили ваги тіла 2 і реакції підшипника N_2 дорівнюють 0, оскільки сили прикладені до точки, яка не рухається:

$$A(m_2g) = A(N_2) = 0. \quad (2.56)$$

Робота сили ваги тіла 3

$$A(m_3g) = (m_3g)_t \cdot S_{C_3},$$

де $(m_3g)_t$ - проекція сили ваги на напрямок руху,

$$(m_3g)_t = -m_3g \sin b,$$

а S_{C_3} – переміщення центру мас тіла 3, пропорційне відповідній швид-

кості: $\frac{S_3}{V_{C_3}} = \frac{S_I}{V_I}$, звідки, враховуючи (2.47),

$$\text{знайдемо} \quad S_3 = S_I \frac{V_{C_3}}{V_I} = S_I.$$

$$\text{Отже} \quad A(m_3g) = -m_3g \sin b \cdot S_I. \quad (2.57)$$

Робота нормальної реакції катка 3 дорівнює 0, оскільки сила N_3 направлена перпендикулярно напрямку руху катка:

$$A(N_3) = 0. \quad (2.58)$$

Робота сили тертя ковзання P_{TP_3} також дорівнює нулю, оскільки вона прикладена до миттєвого центра швидкостей катка 3 (до точки O_3), який не рухається.

$$\text{Отже} \quad A(P_{TP_3}) = 0. \quad (2.59)$$

Робота сил опору кочення M_{TP}

$$A(M_{TP}) = -M_{TP} \cdot j_3, \quad (2.60)$$

де j_3 – кут повороту катка 3 навколо осі z , яка перпендикулярна до площини руху і проходить через миттєвий центр швидкостей катка O_3 .

Момент сил опору кочення дорівнює $M_{TP} = f_K N_3 = f_K m_3 g \cos b$.

Кут j_3 пропорційний кутовій швидкості w_3 , тому $\frac{j_3}{w_3} = \frac{S_1}{V_1}$,

звідки враховуючи (2.48), знайдемо $j_3 = \frac{S_1}{V_1} w_3 = \frac{S_1}{V_1} \cdot \frac{V_1 R_2}{2r_2 R_3} = \frac{S_1}{R_3}$.

$$\text{Отже} \quad A(M_{TP}) = -f_K m_3 g \cos b \frac{S_1}{R_3}. \quad (2.61)$$

$$\text{Робота сили пружності } P_{PP} \quad A(P_{PP}) = -\frac{cS_3^2}{2} = -\frac{cS_1^2}{2}. \quad (2.62)$$

Підставляючи одержані значення робіт (2.52) ... (2.62) до формули (2.51), отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k^e = & 60S_1 + 45S_1^2 + m_1 g \sin a \cdot S_1 - f m_1 g \cos a \cdot S_1 - \\ & - m_3 g \sin b \cdot S_1 - f_K m_3 g \cos b \frac{S_1}{R_3} - \frac{cS_1^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Після підстановки значень мас та функцій кутів одержуємо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k^e = & 0,5(60 + 45 \cdot 0,5 + 10 \cdot 10 \cdot 9,81 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 10 \cdot 98,1 \cdot 0,866 - \\ & - 98,1 \cdot 0,866 - 0,002 \cdot 98,1 \frac{0,5}{0,015} - \frac{10 \cdot 0,5}{2}) = 197 \text{ Дж}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Підставимо (2.50) і (2.64) у формулу (2.38) і знайдемо, що

$$8mV_1^2 = 197.$$

$$\text{Остаточно} \quad V_1 = 1,57 \text{ м/с}.$$

Висновок: Швидкість вантажу 1 в кінцевому положенні дорівнює $V_1 = 1,57 \text{ м/с}$.

2.4 Застосування загального рівняння динаміки при дослідженні руху механічної системи з одним ступенем вільності

Для заданої механічної системи (рис. 2.16 і 2.17) визначити прискорення тіла 1. Блоки і катки, радіуси інерції яких у таблицях 2.5 і 2.6 відсутні, вважати однорідними круглими циліндрами.

Величини, необхідні для розв'язання задачі, вказані в таблицях 2.5 і 2.6 (див. попереднє завдання).

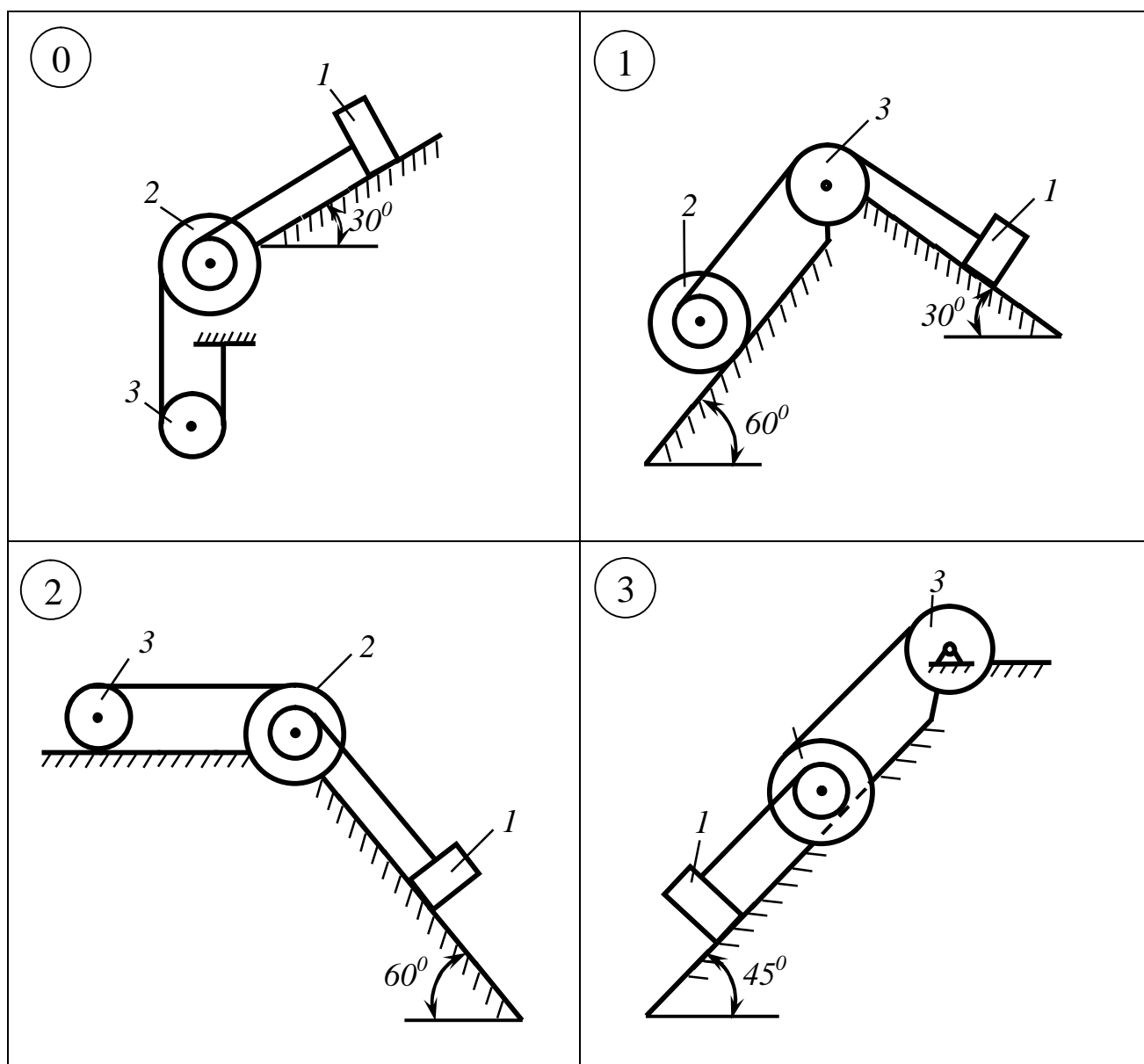


Рисунок 2.16 - Схеми до варіантів завдання 2.4

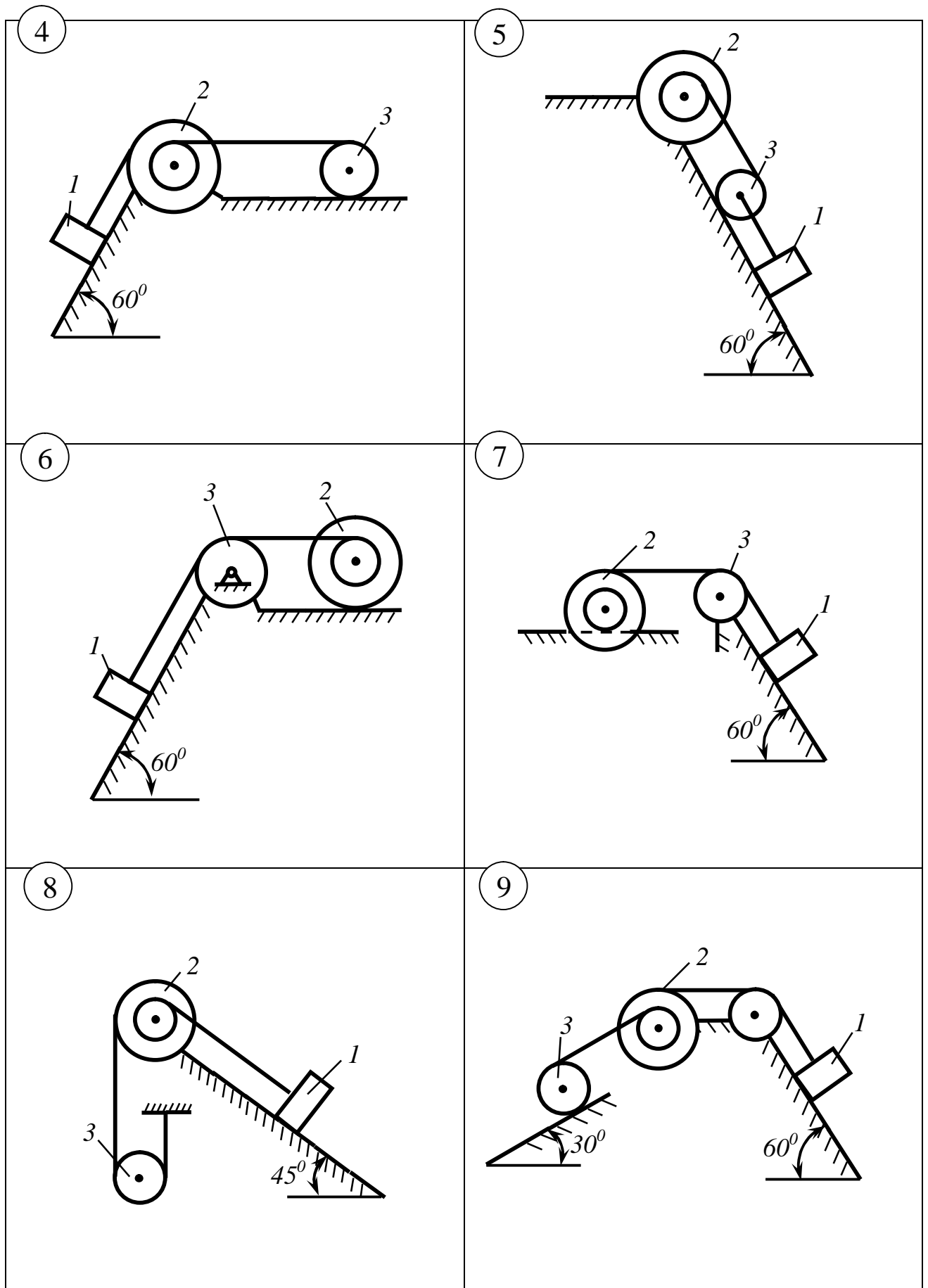


Рисунок 2.17 - Схеми до варіантів завдання 2.4

2.4.1 Приклад розв'язання задачі 2.4

Механічна система (рис. 2.18) складається з вантажу 1, ступінчастого шківів 2 і однорідного суцільного циліндра 3, які зв'язані нерозтяжними нитками.

Коефіцієнт тертя дорівнює f , а коефіцієнт кочення – f_k .

Дано: $m_1 = 10m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m$; $m = 10 \text{ кг}$; $r_2 = 6 \text{ см}$; $R_2 = 2r_2 = 12 \text{ см}$; $i_{2Z} = 1,5r_2 = 9 \text{ см}$; $R_3 = 15 \text{ см}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $f = 0,1$; $f_k = 0,2$.

Визначити: прискорення вантажу 1.

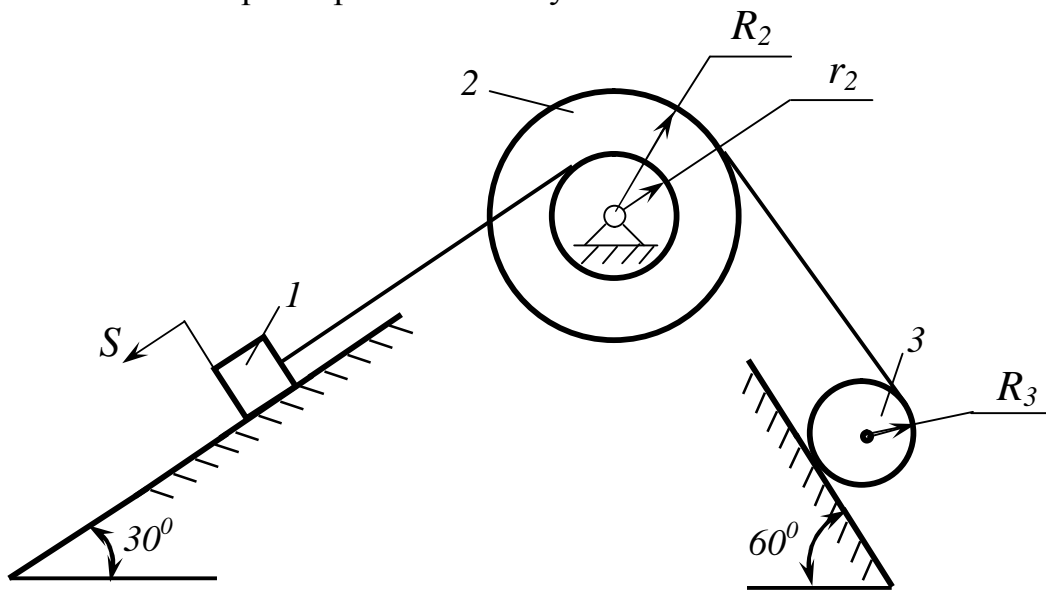


Рисунок 2.18 - Задана схема до прикладу виконання завдання 2.4

Розв'язання. Розглянемо рух механічної системи. Тіло 1 здійснює поступальний рух, тіло 2 – обертальний, а тіло 3 – плоско-паралельний.

Зобразимо на рисунку 2.19 активні сили ваги $m_1 \bar{g}$; $m_2 \bar{g}$; $m_3 \bar{g}$; нормальні реакції N_1 та N_3 площини та реакцію N_2 нерухомої опори ступінчастого шківів 2; сили тертя ковзання тіл 1 і 3 – P_{TP1} , P_{TP3} та момент опору кочення M_{TP} .

Система має один ступінь вільності. Наємо системі можливого переміщення $d\bar{S}_1$, вважаючи, що тіло 1 рухається вниз по нахиленій площині.

Для даної системи можливі переміщеннями будуть такі: для тіла 1,

яке рухається поступально, – переміщення тіла $d\bar{S}_1$; для тіла 2, яке обертається навколо нерухомої осі, – кутове переміщення dj_2 ; для тіла 3, яке здійснює плоско-паралельний рух, маємо переміщення центра ваги (точки C_3) на $d\bar{S}_{C_3}$ та обертання тіла 3 навколо миттєвого центра обертання (точки O_3) на dj_3 .

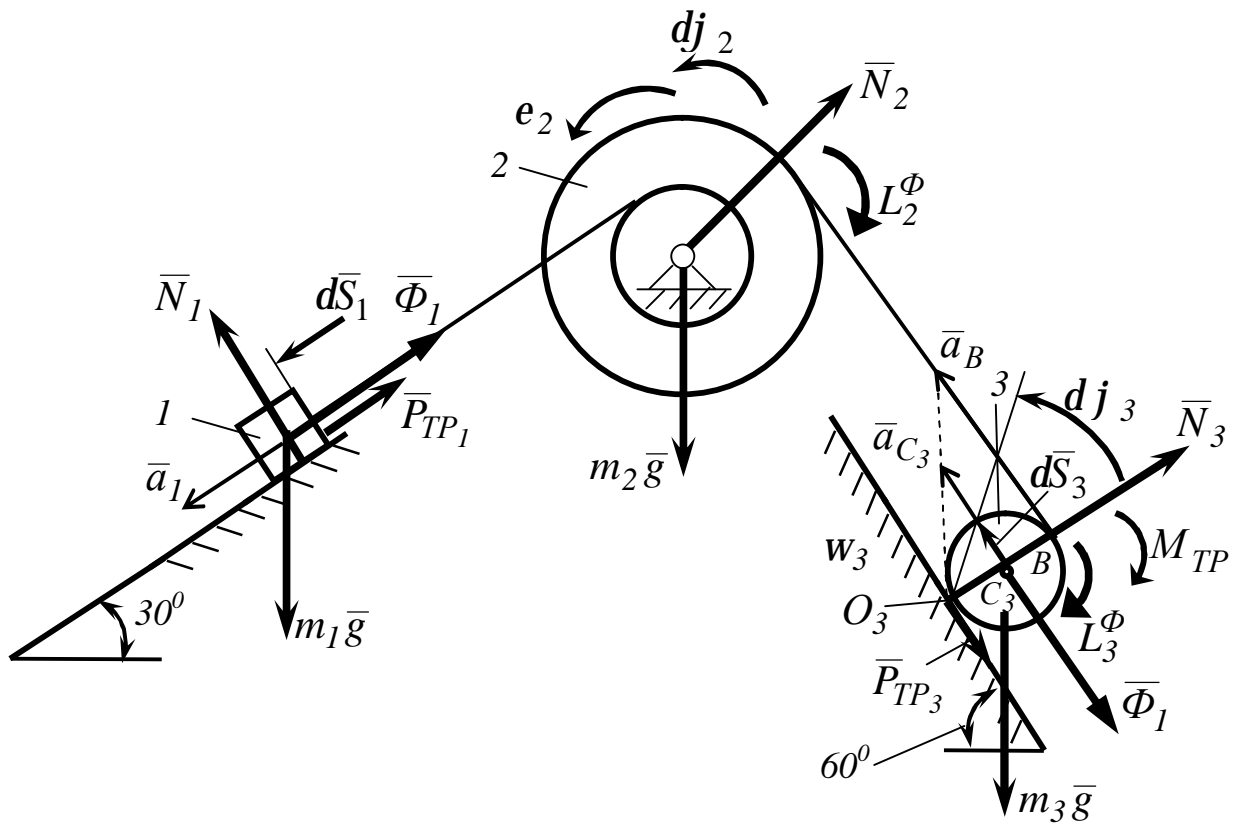


Рисунок 2.19- Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 2.4

Також означимо на рисунку 2.19 сили інерції та моменти сил інерції: тіло 1 рухається поступально, тому сили інерції приводяться до головного вектора $\bar{\Phi}_1$; тіло 2 обертається, і його сили інерції зводяться до головного моменту сил інерції L_2^Φ ; рух тіла 3 – плоский, отже сили інерції зводяться до головного вектора $\bar{\Phi}_3$, який прикладений до центра ваги (точки C_3), і до головного моменту сил інерції L_3^Φ . Вектори сил інерції направлені проти векторів відповідних прискорень центрів ваги, а напрямки головних моментів – проти напрямків відповідних кутових прискорень.

Застосуємо для заданої системи загальне рівняння динаміки:

$$\sum dA_k + \sum dA_k^\Phi = 0.$$

Робота деяких сил системи дорівнює нулю з таких причин:

- нормальні реакції N_1 та N_3 перпендикулярні до переміщень відповідних тіл;
- реакція N_2 нерухомої опори ступінчастого шківів 2 та сила ваги $m_2 \bar{g}$ прикладені в нерухомих точках;
- сили тертя ковзання тіла 3 $-P_{TP3}$ прикладена до миттєвого центра обертання (точки O_3), який не рухається.

Складемо загальне рівняння динаміки для заданої системи:

$$\begin{aligned} m_1 g \cdot \sin a \cdot dS_1 - P_{TP1} \cdot dS_1 - \Phi_1 \cdot dS_1 - L_2^\Phi \cdot dj_2 - \\ - m_3 g \cdot \sin b \cdot dS_{C3} - \Phi_3 \cdot dS_{C3} - L_3^\Phi \cdot dj_3 - M_{TP} \cdot dj_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Виразимо деякі величини в цьому рівнянні:

$$\begin{aligned} P_{TP1} = fN_1 = fm_1 g \cos a; \Phi_1 = m_1 a_1; L_2^\Phi = J_2 e_2; J_2 = m_2 i_2^2; \\ \Phi_3 = m_3 a_{C3}; L_3^\Phi = J_3 e_3; J_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2; M_{TP} = f_k \cdot N_3 = f_k \cdot m_3 g \cos b. \end{aligned}$$

Виразимо прискорення всіх тіл через прискорення тіла 1:

$$e_2 = \frac{a_1}{r_2}; a_{C3} = \frac{a_B}{2} = \frac{e_2 R_2}{2} = \frac{a_1 R_2}{2r_2}; e_3 = \frac{a_{C3}}{R_3} = \frac{a_1 R_2}{2r_2 R_3}.$$

Виразимо можливі переміщення всіх тіл через можливе переміщення $d\bar{S}_1$, маючи на увазі, що залежності між швидкостями, прискореннями та переміщеннями тіл однакові:

$$dj_2 = \frac{dS_1}{r_2}; dS_{C3} = \frac{dS_B}{2} = \frac{dj_2 R_2}{2} = \frac{dS_1 R_2}{2r_2}; dj_3 = \frac{dS_{C3}}{R_3} = \frac{dS_1 R_2}{2r_2 R_3}.$$

Підставимо всі знайдені величини до формули (2.65):

$$\begin{aligned}
 & m_1 g \cdot \sin a \cdot dS_1 - f m_1 g \cos a \cdot dS_1 - m_1 a_1 \cdot dS_1 - \\
 & - m_2 i_2^2 \cdot \frac{a_1}{r_2} \cdot \frac{dS_1}{r_2} - m_3 g \cdot \sin b \cdot \frac{dS_1 R_2}{2r_2} - m_3 \cdot \frac{a_1 R_2}{2r_2} \cdot \frac{dS_1 R_2}{2r_2} - \\
 & - \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \cdot \frac{a_1 R_2}{2r_2 R_3} \cdot \frac{dS_1 R_2}{2r_2 R_3} - f_k \cdot m_3 g \cos b \cdot \frac{dS_1 R_2}{2r_2 R_3} = 0. \quad (2.66)
 \end{aligned}$$

Скоротимо рівняння (2.66) на dS_1 (оскільки $dS_1 \neq 0$) і на R_3 та знайдемо прискорення a_1 , враховуючі, що $R_2 = 2r_2$:

$$a_1 = \frac{g \left(m_1 \cdot \sin a - f \cdot m_1 \cdot \cos a - m_3 \cdot \sin b - f_k \cdot m_3 \cdot \cos b \cdot \frac{1}{R_3} \right)}{m_1 + \frac{m_2 i_2^2}{r_2^2} + m_3 + \frac{1}{2} m_3}.$$

Підставимо значення мас тіл:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{g \left(10m \cdot \sin a - f \cdot 10m \cdot \cos a - m \cdot \sin b - f_k \cdot m \cdot \cos b \cdot \frac{1}{R_3} \right)}{10m + \frac{2m \cdot i_2^2}{r_2^2} + 1,5m} = \\
 &= \frac{g \left(10 \cdot \sin a - f \cdot 10 \cdot \cos a - \sin b - f_k \cdot \cos b \cdot \frac{1}{R_3} \right)}{10 + \frac{2 \cdot i_2^2}{r_2^2} + 1,5}.
 \end{aligned}$$

Підставимо вхідні дані:

$$a_1 = \frac{9,81 \left(10 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 10 \cdot 0,866 - 0,867 - 0,2 \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{15} \right)}{10 + \frac{2 \cdot 9^2}{6^2} + 1,5} = 1,999 \text{ м/с}^2.$$

Висновок: Прискорення тіла 1 дорівнює $a_1 \approx 2 \text{ м/с}^2$.

3 КОНТРОЛЬНА РОБОТА «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи

Опір матеріалів - це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд.

При розв'язанні задач, зв'язаних, в основному, зі згинанням, виникає необхідність оперувати деякими геометричними характеристиками поперечних перерізів. Через своє вузьке прикладне значення в курсі геометрії вони не вивчаються.

До геометричних характеристик відносяться площі поперечних перерізів, моменти інерції, моменти опору, радіуси інерції.

Щоб визначити моменти інерції відносно головних осей необхідно виконати таку послідовність операцій:

1 Для заданого перерізу вибрати систему осей, відносно яких визначити координати центрів ваги фігур, які до нього входять. Визначити положення центра ваги складного перерізу за формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad (3.1)$$

де x_c, y_c – координати центра ваги складного перерізу;

x_{ci}, y_{ci} – координати центрів ваги i -ї фігури у початковій системі осей;

F_i - площа поперечного перерізу i -ї фігури; n – кількість фігур.

2 За знайденими координатами x_c, y_c нанести положення центра ваги складної фігури.

3 Через центр ваги складної фігури провести центральні осі всього перерізу, направляючи їх паралельно центральним осям фігур.

4 Визначити осьові моменти інерції всієї фігури щодо центральних осей фігури за формулами:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_{ci}} + a_i^2 F_i); \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_{ci}} + b_i^2 F_i), \quad (3.2)$$

де J_{x_c}, J_{y_c} – осьові моменти інерції фігур, щодо власних центральних осей;

a_i – відстань між центральною віссю x_c складного перерізу і власною центральною віссю x_{ci} i -ї фігури, $a_i = y_{ci} - y_c$;

b_i – відстань між центральною віссю y_c складного перерізу і власною центральною віссю y_{ci} i -ї фігури, $b_i = x_{ci} - x_c$.

Для стандартних профілів типу швелера, двотавра, кутика осьові моменти інерції слід брати з таблиць сортаменту, для смуги – визначати за формулами:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}, \quad (3.3)$$

де b – сторона прямокутника, яка паралельна осі x ; h – його висота.

Оскільки фігура має вісь симетрії y_c , то відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$. Отже центральні осі x_c та y_c будуть і головними.

Моменти інерції відносно головних центральних осей перерізу як правило означають $J_U = J_{x_c}$, $J_V = J_{y_c}$.

При деформації розтягання та стискання необхідні розміри поперечних перерізів стрижнів можна знайти з умови міцності.

Для стрижневих систем, які працюють на розтягання і стискання, умова міцності має вигляд:

$$s = \frac{N}{F} \leq [s], \quad (3.4)$$

де N – подовжня (осьова) сила в стрижні;

F - площа поперечного перерізу стрижня;

$[s]$ - допустиме напруження.

Для виконання проектувальних розрахунків необхідно визначити площу поперечних перерізів стрижнів:

$$F \geq \frac{N}{[s]}. \quad (3.5)$$

У цій нерівності невідоме зусилля N .

Системи, які розглядаються, статично визначувані, і зусилля в них можуть бути знайдені тільки з рівнянь рівноваги статички.

Задачу слід розв'язувати за таким планом:

1 Скласти рівняння рівноваги, використовуючи тільки ті з них, до яких не входять реакції опор, котрі знаходити немає потреби, і розрахувати зусилля в стрижнях 1, 2, 3.

2 Знайти площі поперечних перерізів стрижнів за формулою (3.5):

а) поперечний переріз стрижня 1 – коло. Для круглого поперечного перерізу

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ звідки } d \geq \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4N}{\pi[\sigma]}}, \quad (3.6)$$

після чого прийняти діаметр з рекомендованих розмірів згідно з Державним стандартом;

б) поперечний переріз стрижня 2 – два рівнобічних кутика.

$$\text{За площею кутика } F^L = \frac{F_2}{2} = \frac{N_2}{2[\sigma]}.$$

За таблицею В1 (додаток В) знаходимо номер кутика, площа якого повинна бути не меншою за F^L ;

в) поперечний переріз стрижня 3 – двотавр. За площею $F_3 = \frac{N_3}{[\sigma]}.$

За таблицею А1 (додаток А) сортаменту знаходимо відповідний номер двотавра. Якщо знайдені площі рівнобічного кутика і двотавра менші від площі найменшого профілю, то необхідно прийняти найменший профіль.

3 Визначити подовження (укорочення) стрижнів за законом Гука. Якщо стрижень розтягується, то Δl вважається додатною, а якщо стискається – від'ємною:

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EF_i}, \quad (3.7)$$

де N_i – зусилля в i -му стрижні;

l_i – довжина i -го стрижня;

E – модуль пружності матеріалу;

F_i – площа поперечного перерізу підібраного профілю.

Зовнішні навантаження, що діють на балку при згинанні, зводяться

до зосереджених сил P (кН або МН), пар сил M (кН·м або МН·м) і рівномірно чи нерівномірно розподілених за довжиною балки навантажень з інтенсивністю q (кН/м або МН/м).

Балка – це стрижень, який працює на згинання.

При впливі зовнішніх навантажень у будь-якому перерізі балки можуть виникнути два внутрішні зусилля: поперечна сила Q і згинальний момент M .

Поперечна сила Q дорівнює сумі проекцій на перпендикуляр до осі усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

Згинальний момент M дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від перерізу, який розглядаємо, щодо центра ваги цього перерізу.

Встановимо такі правила знаків для Q і M в балках:

Поперечна сила Q у перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила діє відносно перерізу за напрямком руху годинникової стрілки (рис. 3.1).

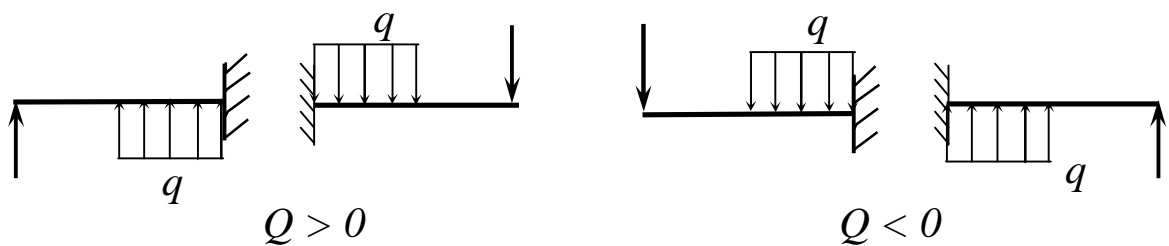


Рисунок 3.1

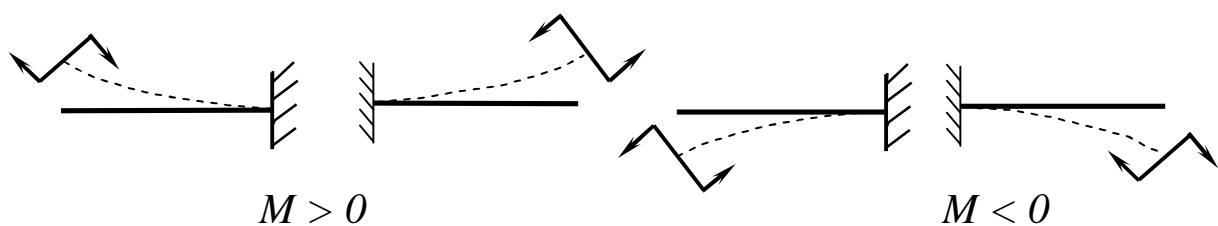


Рисунок 3.2

Згинальний момент M у перерізі вважається додатним, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки (рис. 3.2).

З огляду на правила знаків для M варто підкреслити, що *епюру згинальних моментів будують на стиснутих волокнах*.

Правила побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів

1 На ділянках, де немає розподіленого навантаження, епюри Q окре-

слюються прямими, паралельними базі, а епюри M в загальному випадку – похилими прямими.

2 На ділянках, де до балок прикладене рівномірно розподілене навантаження q , епюра Q обмежується похилою прямою, а епюра M – квадратичною параболою. Оскільки епюру M будуюмо на стиснутих волокнах, то випуклість параболи звернена в бік, протилежний напрямку дії розподіленого навантаження q .

3 У перерізі, де $Q = 0$, дотична до епюри M паралельна базі епюри, тобто епюра M досягає екстремального значення.

Якщо, “рухаючись” зліва направо, Q переходить через нуль, змінюючи знак з $\langle\langle + \rangle\rangle$ на $\langle\langle - \rangle\rangle$, то $M = M_{max}$, а при зміні знака з $\langle\langle - \rangle\rangle$ на $\langle\langle + \rangle\rangle$ – $M = M_{min}$.

Координату z перерізу, де $Q = 0$, зручно обчислювати за формулами:

$$z_{\text{л}} = \frac{Q_{\text{л}}}{q} \quad \text{або} \quad z_{\text{пр}} = \frac{Q_{\text{пр}}}{q},$$

де $Q_{\text{л}}$ та $Q_{\text{пр}}$ – значення поперечної сили відповідно з лівого або з правого краю ділянки.

4 На ділянках, де $Q > 0$, момент зростає, де $Q < 0$, момент зменшується.

5 У перерізі, де до балки прикладені зосереджені сили:

а) на епюрі Q будуть “стрибки” на значення прикладених сил з урахуванням їх знаків (якщо будувати епюру, “рухаючись” зліва направо, то напрямок “стрибка” буде співпадати з напрямком вектора сили);

б) на епюрі M будуть злами, причому вістря зламу спрямоване проти дії сили.

6 У перерізі, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі M будуть “стрибки” на значення цих моментів (на епюрі Q змін не буде). Напрямок стрибка залежить від напрямку зовнішнього моменту. Лінії епюри до стрибка і за ним – паралельні. Зазначимо, що це не стосується випадку, коли в одній точці прикладені сила і момент – сила спричиняє злам і порушує паралельність.

7 Якщо на кінці консолі або в кінцевій опорі до балки прикладений

зосереджений момент, то в цьому перерізі згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту. Якщо ж у кінцевій шарнірній опорі або на кінці консолі балка не навантажена зовнішнім моментом, то в них $M = 0$, що має місце найчастіше.

8 Епюра Q є діаграмою, похідною від епюри моментів. Отже, ординати епюри Q пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної до епюри M .

Епюра будується на базовій лінії (або на базі), яка співпадає з віссю стрижня і на якій значення всіх внутрішніх зусиль дорівнюють нулю. Додатні ординати будемо відкладати уверх від базової лінії, а від'ємні – униз.

Найзручніше будувати епюри Q і M за характерними перерізами.

Характерними перерізами вважаються перерізи, у яких прикладені зосереджені сили чи зосереджені моменти, починається чи закінчується розподілене навантаження, перерізи, у яких Q дорівнює нулю, а також у місцях зміни напрямку осі стрижня чи величини його поперечного перерізу.

Характерні перерізи проводять на нескінченно малій відстані від сил, моментів, тощо, і позначаються, як правило, цифрами.

Можна рекомендувати такий порядок побудови епюр:

Знайти опорні реакції (для консолі реакції можна не знаходити і будувати епюру від “вільного” кінця балки).

Визначити характерні перерізи.

Обчислити значення Q у характерних перерізах, потім, “рухаючись” уздовж балки (бажано зліва направо), побудувати епюру Q , використовуючи вищеописані правила.

Обчислити значення M у характерних перерізах. Побудувати епюру M за цими значеннями.

Перевірка вірності побудови епюри Q і M зводиться до побудови епюри при “русі” у напрямку, протилежному первісному (наприклад, справа наліво). Крім цього варто звернути увагу на напрямки стрибків і нахилів прямих на епюрі згинальних моментів M .

Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

1 Визначаємо опорні реакції балки.

2 Будуємо епюри поперечних сил Q та згинальних моментів M .

3 З аналізу епюри згинальних моментів визначаємо максимальний згинальний момент M_{max} .

4 З умови міцності за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (3.8)$$

визначаємо потрібний осьовий момент опору перерізу W_x .

5 З сортаменту вибираємо номер двотавра, який має найближчий до визначеного осьовий момент опору, і виписуємо його основні характеристики.

6 Перевіряємо міцність за нормальними напруженнями відповідно до умови (3.8).

7 З аналізу епюри поперечних сил визначаємо максимальну поперечну силу Q_{max} .

8 Перевіряємо міцність за дотичними напруженнями відповідно до

умови:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} \leq [\tau], \quad (3.9)$$

де S_x – статичний момент половини площини перерізу вибраного профілю відносно осі x ;

d – ширина перерізу на осі x (рис. 3.3);

J_x – момент інерції перерізу відносно осі x .

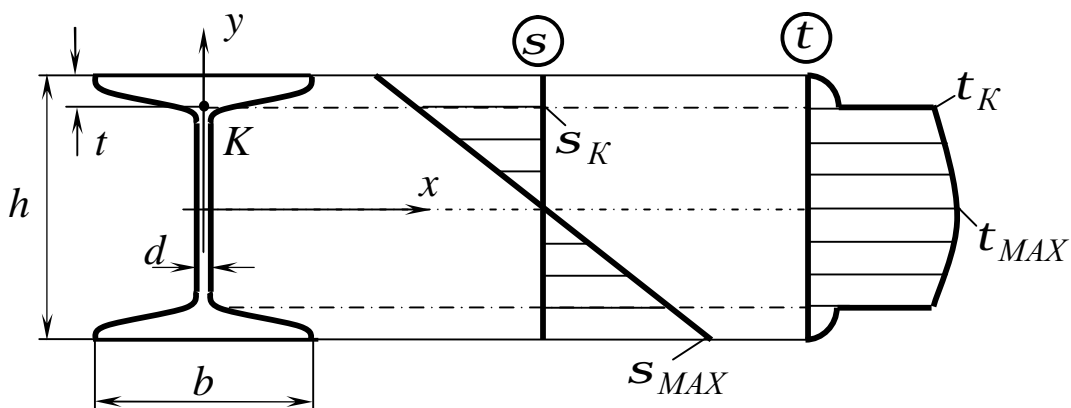


Рисунок 3.3 – Епюри нормальних (S) та дотичних (t) напружень у поперечних перерізах балки

9 Перевіряється міцність за еквівалентними напруженнями відносно до умови:

$$s_{екв}^{max} \leq [s], \quad (3.10)$$

де $s_{екв}^{max}$ – найбільше зі значень еквівалентних напружень у точках K (див. рис. 3.3) небезпечних перерізах балки, тобто у таких перерізах: $M = M_{max}$ і $Q \neq 0$, або $Q = Q_{max}$ і $M \neq 0$, або де M і Q хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

Підрахунки еквівалентних напружень в точках K зазначених перерізів виконуються із застосуванням формул:

$$s_K^{екв} = \sqrt{s_K^2 + 3t_K^2} \quad (3.11)$$

$$s_K = \frac{M}{J_x} \cdot y_K \quad (3.12)$$

$$t_K = \frac{Q \cdot S_x^{відр}}{d \cdot J_x} \quad (3.13)$$

де M і Q – відповідно згинальний момент і поперечна сила в кожному із зазначених перерізів;

y_K – відстань точки K до осі x (див. рис. 3.3):

$$y_K = \frac{h}{2} - t \quad (3.14)$$

$S_x^{відр}$ – статичний момент відрізаної частини перерізу, яка розташована вище точки K відносно осі x :

$$S_x^{відр} = 0,5 \cdot b \cdot t(h - t). \quad (3.15)$$

Підрахунок $s_K^{екв}$ у найбільш навантаженому (небезпечному) перерізі супроводжується рисунком, на якому проставляються конкретні значення розмірів перерізу та підраховані величини s_K і t_K .

Розв'язання задачі на сумісну дію згинання та кручення здійснюємо в такій послідовності:

1 Визначаємо крутний момент та сили, що діють на зубчаті колеса вала:

$$M_{кр} = \frac{30 \cdot W}{p \cdot n}, \quad (3.16)$$

$$P_i = \frac{2 \cdot M_{кр}}{d_i}, \quad (3.17)$$

$$T_i = 0,324 P_i, \quad (3.18)$$

$$S_i = 0,4 P_i. \quad (3.19)$$

2 Усі зазначені сили прикладаємо безпосередньо до вала з додаванням відповідних моментів, які виникають, коли лінія дії сили не перетинає осі вала.

3 Визначаємо опорні реакції вала у вертикальній площині та будуємо епюру згинальних моментів M_x .

4 Визначаємо опорні реакції вала у горизонтальній площині та будуємо епюру згинальних моментів M_y .

5 Будуємо епюру крутних моментів – $M_{кр}$.

6 Визначаємо величини зведених моментів у характерних перерізах вала:

$$M_{np} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2}, \quad (3.20)$$

і будуємо їх епюру та визначаємо найбільше їх значення – M_{np}^{max} .

7 Визначаємо необхідний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}^{max}}{p \cdot n}}. \quad (3.21)$$

Остаточне значення діаметра вала d беремо з нормального ряду (наприклад з ГОСТ 6636-69).

3.1 Геометричні характеристики перерізів

Для складного перерізу визначити положення центра ваги та величини головних центральних моментів інерції.

При розв'язанні задачі прийняти, що силова площина вертикальна.

Вихідні дані вибрати із таблиць 3.1 та 3.2, схему – з рисунка 3.4.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до задачі 3.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Двотавр	10	12	14	16	18	20	18	14	22	24
Швелер	16	18	20	18	20	22	18	22	18	20

Таблиця 3.2 – Вихідні дані до задачі 3.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Смуга мм*мм	150 x 12	170 x 14	180 x 16	200 x 18	220 x 20	240 x 24	260 x 20	230 x 20	240 x 40	180 x 24
Кутик нерав- нобокий	40 x 25 x 4	50 x 32 x 4	63 x 40 x 6	75 x 50 x 8	100 x 63 x 8	125 x 80 x 10	160 x 100 x 12	180 x 110 x 10	200 x 125 x 14	90 x 56 x 8

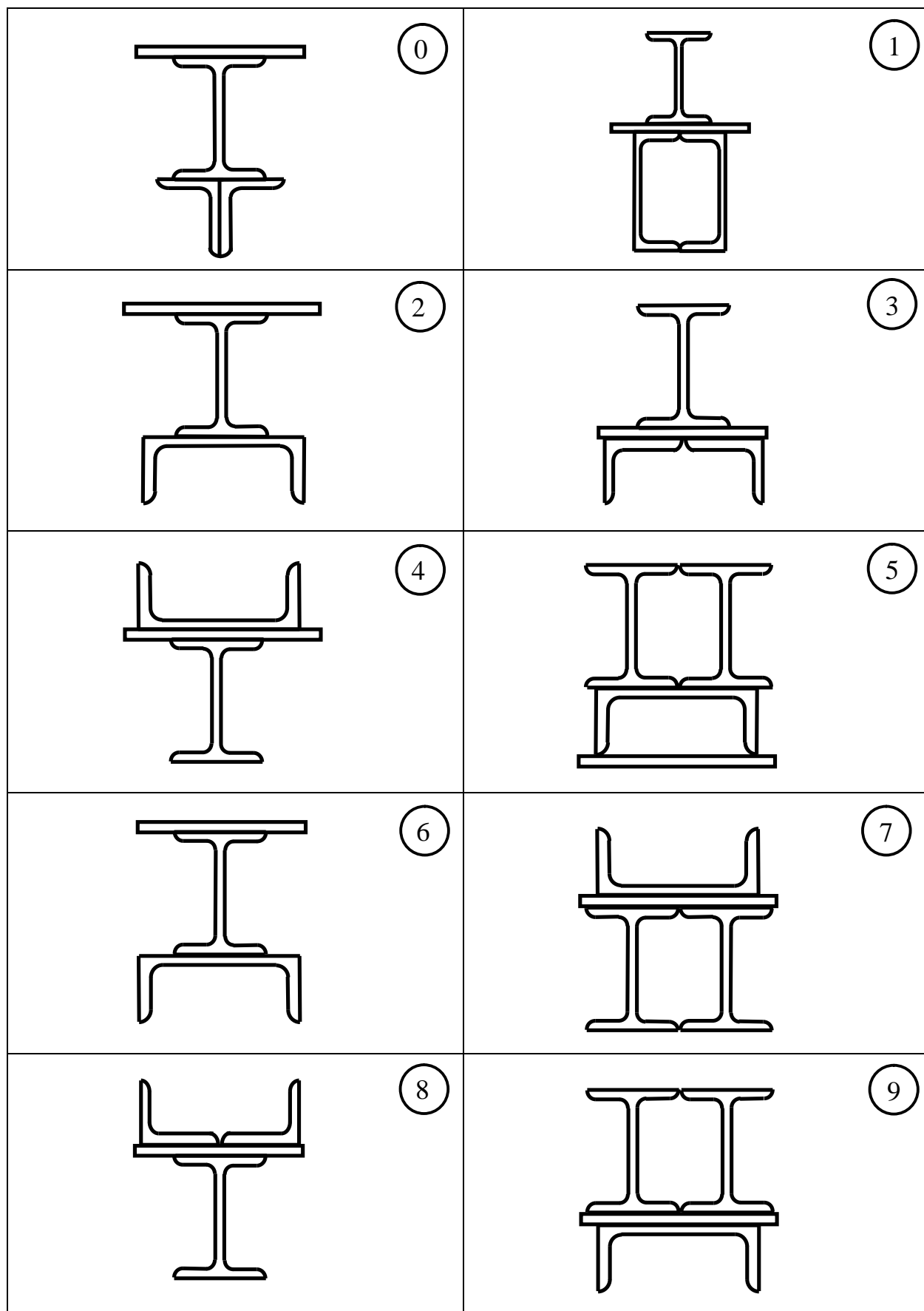


Рисунок 3.4 - Схеми до варіантів завдання 3.4

3.1.2 Приклад розв'язання задачі 3.1

Для складного перерізу, схему якого показано на рисунку 3.5 і який складається із смуги $27 \times 1,2$ см \times см, двотавра 24 та швелера 22, визначити положення центра ваги та величини головних центральних моментів інерції.

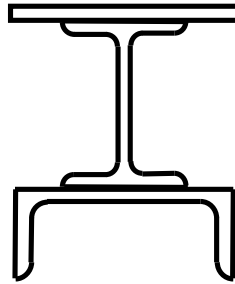


Рисунок 3.5 – Схема заданого перерізу

Розв'язання. Випишемо геометричні характеристики заданих профілів.

Фігура 1 – смуга $27 \times 1,2$ см \times см

Для смуги геометричні характеристики обчислимо як для прямокутника:

$$F = a \cdot b = 27 \cdot 1,2 = 32,4 \text{ см}^2,$$

$$J_{x1} = \frac{ab^3}{2} = \frac{27 \cdot 1,2^3}{2} = 3,888 \text{ см}^4 \approx 4 \text{ см}^4; \quad J_{y1} = \frac{ba^3}{2} = \frac{1,2 \cdot 27^3}{2} = 19683 \text{ см}^4.$$

Геометричні характеристики прокатних профілів виберемо з сортamentів, які наводяться в підручниках і збірниках з опору матеріалів (див., наприклад, [9], або додатки до даних методичних вказівок).

Фігура 2 - двотавр 24 (за ГОСТом 8239-89): $h = 24$ см; $b = 11,5$ см; $d = 0,56$ см; $t = 0,95$ см; $F = 34,8 \text{ см}^2$; $J_x = 3460 \text{ см}^4$; $J_y = 198 \text{ см}^4$.

Фігура 3 - швелер 22 (за ДСТУ 3436-96): (треба звернути увагу на те, що в заданому перерізі швелер розташовано горизонтально, а не вертикально, як в сортаменті, тому його моменти інерції J_x і J_y треба поміняти місцями): $h = 22$ см; $b = 8,2$ см; $d = 0,54$ см; $t = 0,95$ см; $F = 26,7 \text{ см}^2$; $I_x = 151 \text{ см}^4$; $I_y = 2110 \text{ см}^4$; $z_0 = 2,21 \text{ см}^2$.

Викреслимо переріз в масштабі (див. рис. 3.6).

Виберемо систему осей координат.

За початкові осі координат можна прийняти будь-яку систему, наприклад, систему осей координат, яка зв'язана з центрами ваги двотавра або швелера.

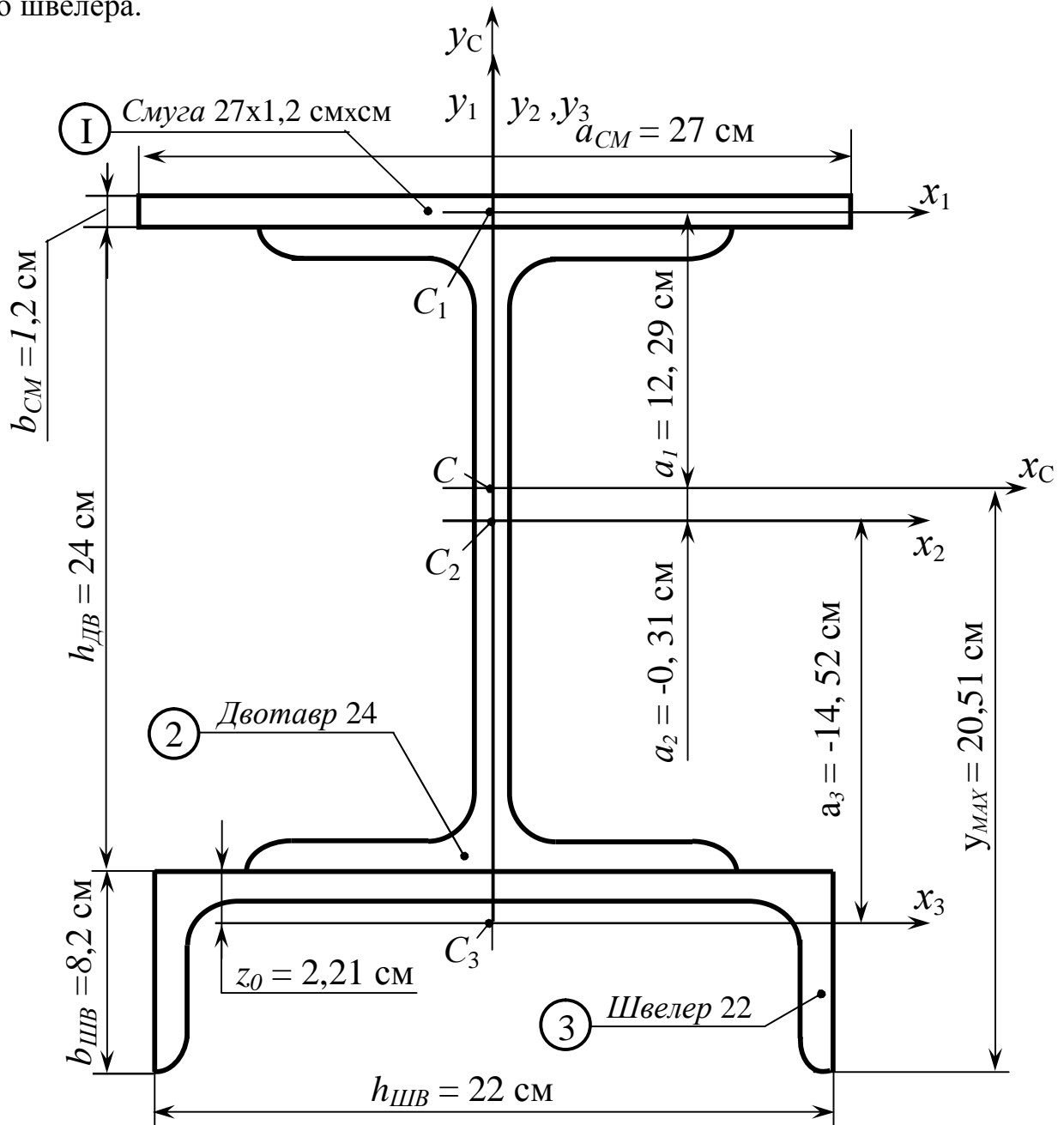


Рисунок 3.6 - Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 4.1

Приймемо за початковий центр координат центр ваги швелера (точка C_3), а за початкові осі координат осі x_3 і y_3 , оскільки відносно цих осей координати центрів ваги всіх фігур будуть додатними.

Оскільки заданий переріз симетричний щодо осі y_3 , то центр ваги складного перерізу будемо шукати тільки за висотою перерізу, тобто ви-

значати тільки координату y_c .

Визначимо координати центрів ваги всіх фігур у вибраній початковій системі осей координат:

$$y_{c1} = z_0 + h_{DB} + \frac{b_{CM}}{2} = 2,21 + 24 + 0,5 \cdot 1,2 = 26,81 \text{ см};$$

$$y_{c2} = z_0 + \frac{h_{DB}}{2} = 2,21 + 0,5 \cdot 24 = 14,21 \text{ см}; \quad y_{c3} = 0.$$

Визначимо координату центра ваги y_c за формулою:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{y_{c1} F_1 + y_{c2} F_2 + y_{c3} F_3}{F_1 + F_2 + F_3} =$$

$$= \frac{26,81 \cdot 32,4 + 14,21 \cdot 34,8 + 0 \cdot 26,7}{32,4 + 34,8 + 26,7} = 14,52 \text{ см}.$$

Проведемо головну центральну вісь x_c на відстані $y_c = 14,52 \text{ см}$ від осі x_3 (див. рис. 3.6).

Визначимо відстань між центральною віссю x_c складного перерізу і власними центральними осями x_{ci} фігур:

$$a_1 = y_{c1} - y_c = 26,81 - 14,52 = 12,29 \text{ см};$$

$$a_2 = y_{c2} - y_c = 14,21 - 14,52 = -0,31 \text{ см};$$

$$a_3 = y_{c3} - y_c = 0 - 14,52 = -14,52 \text{ см}.$$

Тепер визначимо моменти інерції J_{x_c} , J_{y_c} :

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_{ci}} + a_i^2 F_i) = 4 + 12,29^2 \cdot 32,4 + 3460 + 0,31^2 \cdot 34,8 +$$

$$+ 151 + 14,52^2 \cdot 26,7 = 14141,23 \text{ см}^4.$$

Оскільки центри ваги всіх трьох фігур знаходяться на осі y_c , то відстань між осями y_{ci} тобто $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, тому

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_{ci}} + b_i^2 F_i) = 1968,3 + 198 + 2110 = 4276,3 \text{ см}^4.$$

Оскільки фігура має вісь симетрії y_c , то відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$. Отже, центральні осі x_c та y_c будуть і головними.

Висновок: Моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$J_U = J_{x_c} = 14141,23 \text{ см}^4, \quad J_V = J_{y_c} = 4276,3 \text{ см}^4.$$

3.2 Статично визначувана стрижнева система

Із розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів:

стрижень 1 – круглого поперечного перерізу;

стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків;

стрижень 3 – двотаврового поперечного перерізу.

Знайти абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Вихідні дані вибрати із таблиць 3.3 та 3.4 і рисунків 1.11 та 1.12.

Таблиця 3.3 – Вихідні дані до задачі 3.2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	0,8	0,6	1,0	1,2	1,4	1,5	2,0	2,5	1,8	1,6
$b, \text{ м}$	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,3	0,8	2,2	2,4
$c, \text{ м}$	1,2	1,4	0,8	0,6	2,0	2,2	1,1	1,8	1,7	1,6

Таблиця 3.4 – Вихідні дані до задачі 3.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M, \text{ кН}\cdot\text{м}$	100	120	200	80	300	100	220	160	140	250
$P, \text{ кН}$	400	300	450	200	350	240	250	280	340	320
$q, \text{ кН/м}$	200	150	250	300	350	400	280	350	380	320

3.2.1 Приклад розв'язання задачі 3.2

Для стрижневої системи, показаної на рисунку 3.7, із розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів.

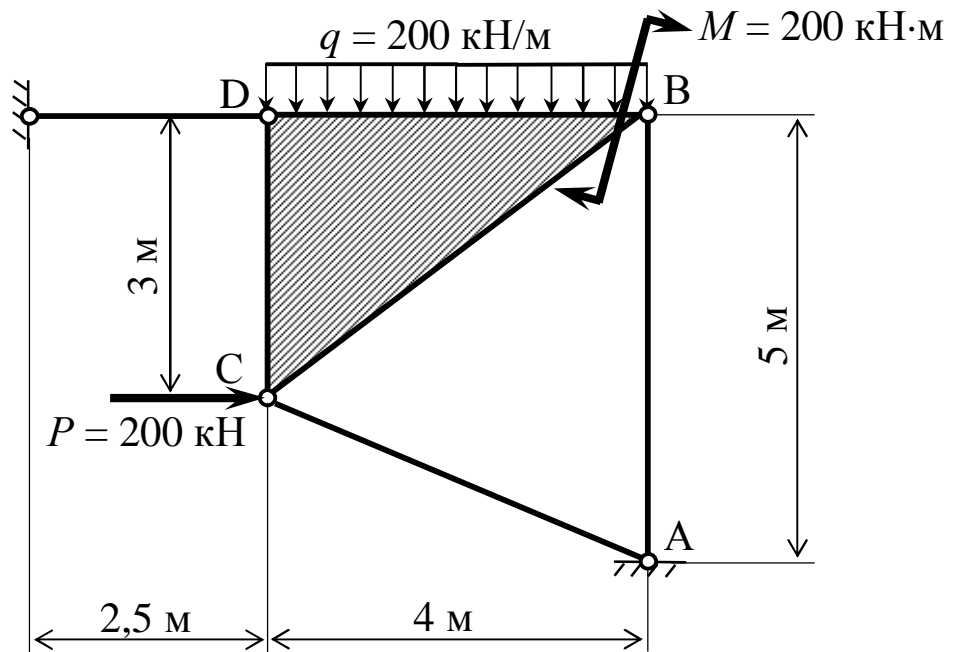


Рисунок 3.7 – Розрахункова схема до прикладу виконання завдання 1.2

При цьому треба мати на увазі, що стрижень 1 складається з круглого поперечного перерізу, стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків, стрижень 3 – з двотаврового поперечного перерізу. Знайти абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Розв'язання. У заданій стрижневій системі (див. рис. 3.7) невідомими є зусилля в трьох стрижнях, які не перетинаються в одній точці й не паралельні між собою. Відкинемо в'язі, а їх вплив замінимо зусиллями N_1 , N_2 та N_3 (рис. 3.8).

Для довільної плоскої системи сил, яку ми розглядаємо, можна скласти три незалежних рівняння статички, тобто вона є статично визначуваною стрижневою системою. Для визначення зусиль у стрижнях складаємо рівняння рівноваги. Необхідно намагатися складати тільки такі рівняння, до яких входило б тільки по одному невідомому зусиллю.

Перш за все визначимо довжину стрижня 2 і функції кута α .

Косинус та синус кута α знаходимо з трикутника AKC .

$$I_3 = AC = \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,48 \text{ м};$$

$$\cos \alpha = \frac{AK}{AC} = \frac{4}{4,48} = 0,893; \quad \sin \alpha = \frac{KC}{AC} = \frac{2}{4,48} = 0,446.$$

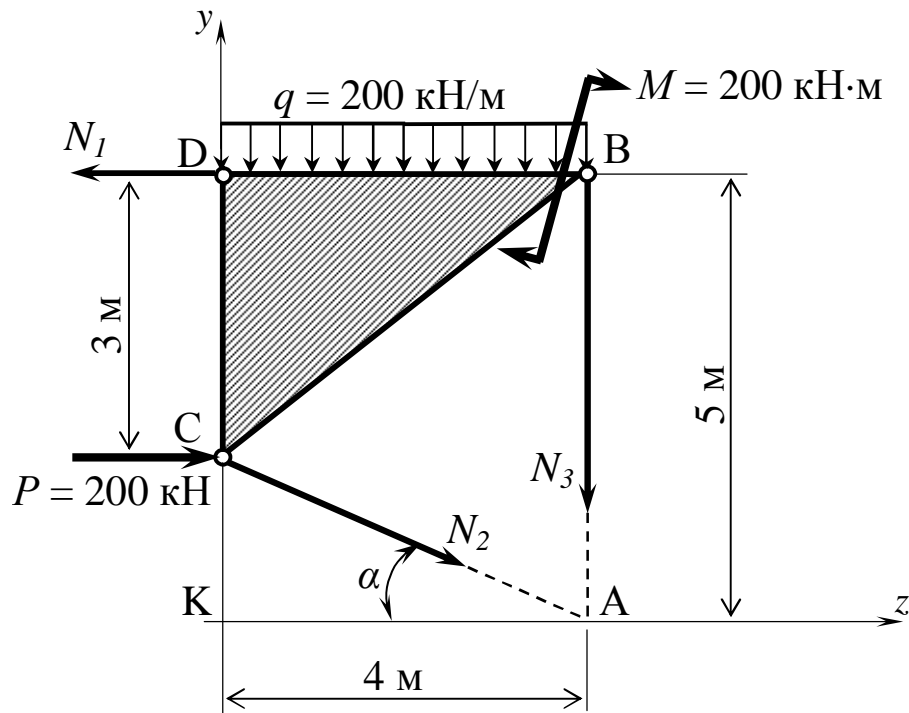


Рисунок 3.8 – Заміна в'язів реакціями

Візьмемо суму моментів відносно точки A (див. рис. 3.8), тому що в ній перетинаються два невідомі зусилля – N_2 і N_3 :

$$\sum M_A = 0; \quad N_1 \cdot 5 - P \cdot (5 - 3) + q \cdot 4 \cdot 2 - M = 0,$$

$$\text{звідки } N_1 = \frac{P \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5} = \frac{250 \cdot 2 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{5} = -160 \text{ кН}.$$

Тепер беремо суму моментів відносно точки B (у ній перетинаються невідомі зусилля N_1 та N_3):

$$\sum M_B = 0; \quad P \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 - M + N_2 \cos \alpha \cdot 3 + N_2 \sin \alpha \cdot 4 = 0;$$

звідки

$$N_2 = \frac{-P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{\cos \alpha \cdot 3 + \sin \alpha \cdot 4} = \frac{-250 \cdot 3 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{0,893 \cdot 3 + 0,446 \cdot 4} = -459,2 \text{ кН}.$$

Зусилля N_3 знаходимо із суми проєкцій на вертикальну вісь

$$\sum P_Y = 0; -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 = 0;$$

$$N_3 = -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin \alpha = -200 \cdot 4 - (-459,2) \cdot 0,446 = -595,2 \text{ кН}.$$

Усі зусилля одержали зі знаком мінус – значить напрямок усіх зусиль зворотний заданому, тобто усі стрижні стиснуті.

Тепер виконаємо перевірку, чи вірно ми знайшли зусилля. Для перевірки необхідно брати тільки ті рівняння, які ми не використовували при знаходженні зусиль, наприклад, суму проєкцій на горизонтальну вісь, або суму моментів відносно точки C :

$$\sum P_z = 0; P - N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$250 - (-160) - 460 \cdot 0,893 = 0; \quad 410 - 410 = 0.$$

$$\sum M_c = 0; N_1 \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 - M - N_3 \cdot 4 = 0;$$

$$-160 \cdot 3 - 200 \cdot 4 \cdot 2 - 300 - (-595,2) = 0; \quad -2380 + 2380,7 = 0.$$

$$\text{Похибка складає } \frac{2380,7 - 2380}{2380} \cdot 100\% = 0,03\%, \text{ що є допустимим.}$$

Тепер за допомогою формули (3.5) підберемо розміри поперечних перерізів стрижнів.

Стрижень 1 за умовою задачі повинен бути круглого поперечного перерізу:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{160 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 10 \text{ см}^2.$$

$$\text{Його діаметр: } d = \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{\pi}} = 3,57 \text{ см}.$$

З рекомендованого ряду чисел (див. додаток А) за ГОСТом 6636-69 приймаємо діаметр стрижня $d = 36 \text{ мм}$, площа якого

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 3,6^2}{4} = 10,2 \text{ см}^2.$$

Стрижень 2 за умовою задачі складається з двох рівнобічних кутиків:

$$F_2 \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{459,2 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 28,68 \text{ см}^2.$$

Звідси площа одного кутика: $F_{\text{кут}} = \frac{F_2}{2} = \frac{28,68}{2} = 14,34 \text{ см}^2.$

З таблиці сортаменту (див. додаток В) за ДСТУ 2251-93 приймаємо кутик 90х90х9, площа якого $F = 15,6 \text{ см}^2.$

Стрижень 3 за умовою задачі – двотаврового поперечного перерізу:

$$F_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{595,2 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 37,2 \text{ см}^2.$$

З таблиці сортаменту (див. додаток А) за ГОСТом 8239-89 приймаємо двотавр 24а, площа якого $F = 37,5 \text{ см}^2.$

Підібравши площі поперечних перерізів, знаходимо їх абсолютні подовження за формулою (4.4):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E \cdot F_1} = \frac{-160 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10,2 \cdot 10^{-4}} = -19,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1,96 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E \cdot F_2} = \frac{-459,2 \cdot 10^{-3} \cdot 5}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4}} = -36,79 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -3,68 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E \cdot F_3} = \frac{-595,2 \cdot 10^{-3} \cdot 4,48}{2 \cdot 10^5 \cdot 37,5 \cdot 10^{-4}} = -35,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -3,56 \text{ мм}.$$

Висновок: всі три стрижні укорочуються.

3.3 Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок

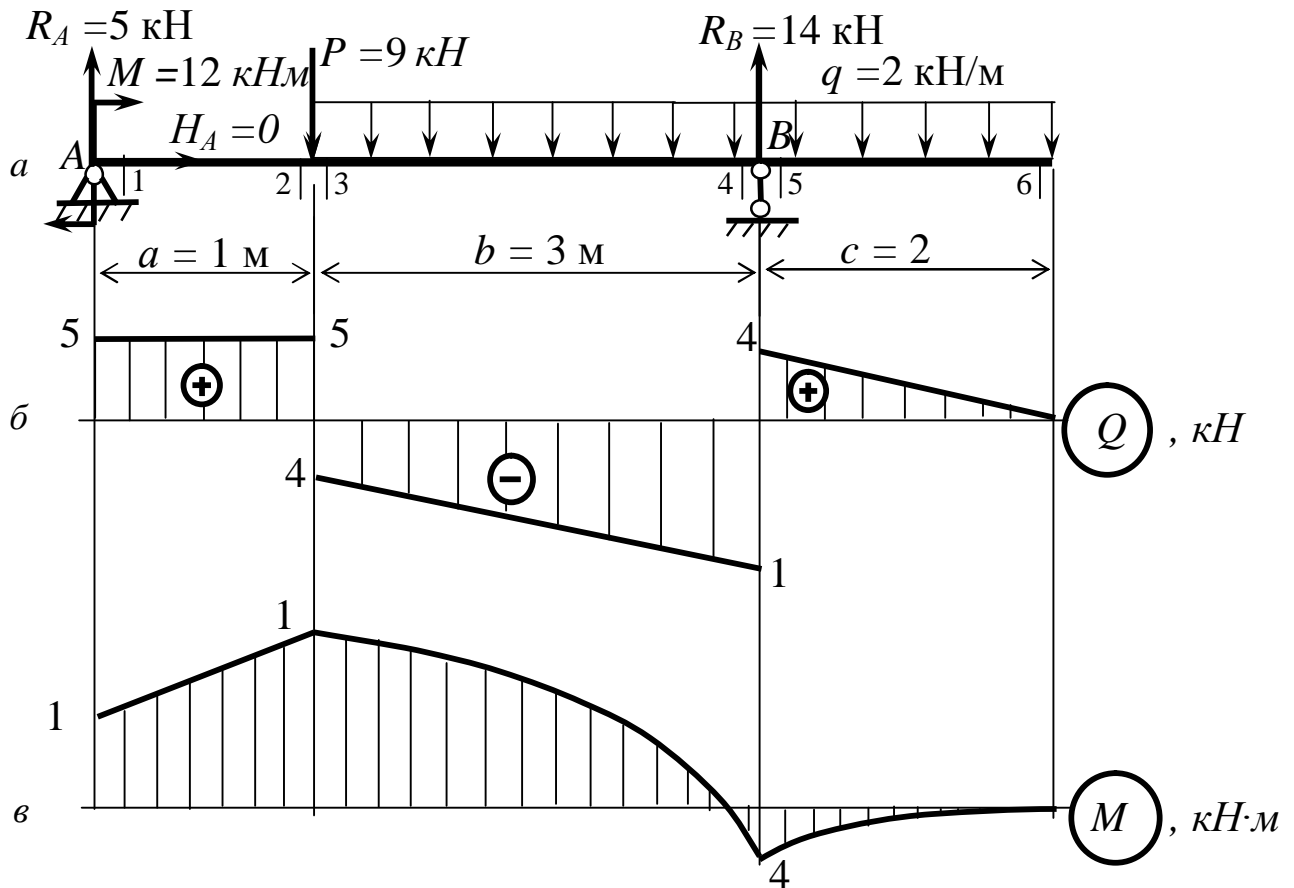
Для заданих балок побудувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M . Визначити максимальне нормальне напруження σ_{MAX} , узявши схему перерізу із завдання 3.1.

Вихідні дані вибрати з таблиць 1.1 та 1.2 і рисунка 1.4.

3.3.1 Приклад розв'язання задачі 3.3а (схема без екстремуму)

Для двоопорної балки, яка зображена на рисунку 3.9, побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів. Визначити максимальне нормальне напруження σ_{MAX} , узявши схему перерізу із завдання 3.1.

Розв'язання. Перш за все, знайдемо опорні реакції H_A , R_A та R_B .



a - задана схема; $б$ - епюра поперечних сил;

$в$ - епюра згинальних моментів

Рисунок 3.9 – Двоопорна балка до задачі 3.3а

Для визначення реакцій складемо рівняння рівноваги:

$$\sum P_{kz} = 0; \quad H_A = 0.$$

$$SM_A(\bar{P}_k) = 0; \quad -M - P \cdot a - q(b+c) \left(a + \frac{b+c}{2} \right) + R_B(a+b) = 0;$$

звідки
$$R_B = \frac{1}{1+3} \left(12 + 9 \cdot 1 + 2(3+2) \left(1 + \frac{3+2}{2} \right) \right) = 14 \text{ кН};$$

$$\sum M_B(\bar{P}_k) = 0: \quad -M - R_A(a+b) + P \cdot b + q \frac{b^2}{2} - q \frac{c^2}{2} = 0;$$

звідки
$$R_A = \frac{1}{1+3} \left(-12 + 9 \cdot 3 + 2 \frac{3^2}{2} - 2 \frac{2^2}{2} \right) = 5 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_{ky} = R_A - P - q \cdot (b+c) + R_B = 5 - 9 - 2 \cdot (3+2) + 14 = 19 - 19 = 0.$$

Реакції знайдено вірно.

Визначимо значення Q в характерних перерізі балки:

$$\begin{aligned} Q_1 &= R_A = 5 \text{ кН}; & Q_2 &= Q_1 = 5 \text{ кН}; & Q_3 &= Q_2 - P = 5 - 9 = -4 \text{ кН}; \\ Q_4 &= Q_3 - q \cdot b = -4 - 2 \cdot 3 = -10 \text{ кН}; & Q_5 &= Q_4 + R_B = -10 + 14 = 4 \text{ кН}; \\ Q_6 &= Q_5 - q \cdot c = 4 - 2 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

За цими даними побудуємо епюру поперечних сил (див. рис. 3.9, б), з'єднуючи знайдені ординати прямими лініями.

Зробимо перевірку побудови епюри Q , для чого будемо “рухатись” з правого боку на лівий.

На ділянці 6...5 розподілене навантаження викликає зростання епюри Q від значення $Q_6 = 0$ до значення $Q_5 = q \cdot 2 = 4 \text{ кН}$.

Відносно перерізу 3 реакція $R_B = 14 \text{ кН}$ повертає балку проти ходу годинникової стрілки, тому епюра має “стрибок” униз на величину 14 кН .

Далі під впливом розподіленого навантаження, яке намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, поперечна сила зростає до величини
$$Q_3 = q \cdot 5 - R_B = 2 \cdot 5 - 14 = -4 \text{ кН}.$$

При переході від перерізу 3 до перерізу 2 має місце “стрибок” уверх на величину сили $P = 9 \text{ кН}$. Тому $Q_2 = Q_3 + P = -4 + 9 = 5 \text{ кН}$.

На ділянці 2...1 змін не буде, тому $Q_2 = Q_1 = 5 \text{ кН}$.

Таким чином, епюра Q побудована вірно.

Визначимо значення M в характерних перерізі балки:

$$M_1 = M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = M + R_A \cdot a = 12 + 5 \cdot 1 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = M + R_A \cdot (a+b) - P \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} = 12 + 5 \cdot (1+3) - 9 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Останню частину епюри M побудуємо з правого кінця:

$$M_6 = 0; \quad M_5 = -q \frac{c^2}{2} = -2 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Оскільки значення моменту в перерізі 5 ліворуч і праворуч співпадають, то можна вважати, що епюра M побудована вірно. За визначеними даними побудуємо епюру згинальних моментів (див. рис. 3.9, в).

Максимальне нормальне напруження S_{max} можна знайти за формулою

$$S_{max} = \frac{M_{max} y_{max}}{I_{x_c}},$$

де y_{max} – найбільш віддалена точка перерізу.

Згідно з умовами задачі знайдемо відстань від осі x_c до найбільш віддаленої точки перерізу (див. завдання 3.1). Найбільш віддаленою точкою перерізу (див. рис. 3.6) є найнижча точка перерізу, яка належить швелеру. Відстань до неї від осі x_c дорівнює

$$y_{max} = a_2 + \frac{h_{ДВ}}{2} + b_{ШВ} = 0,31 + 0,5 \cdot 24 + 8,3 = 20,51 \text{ см}.$$

Таким чином, враховуючи найбільший згинальний момент $M_{max} = 17 \text{ кН}$, визначимо максимальне нормальне напруження в перерізі:

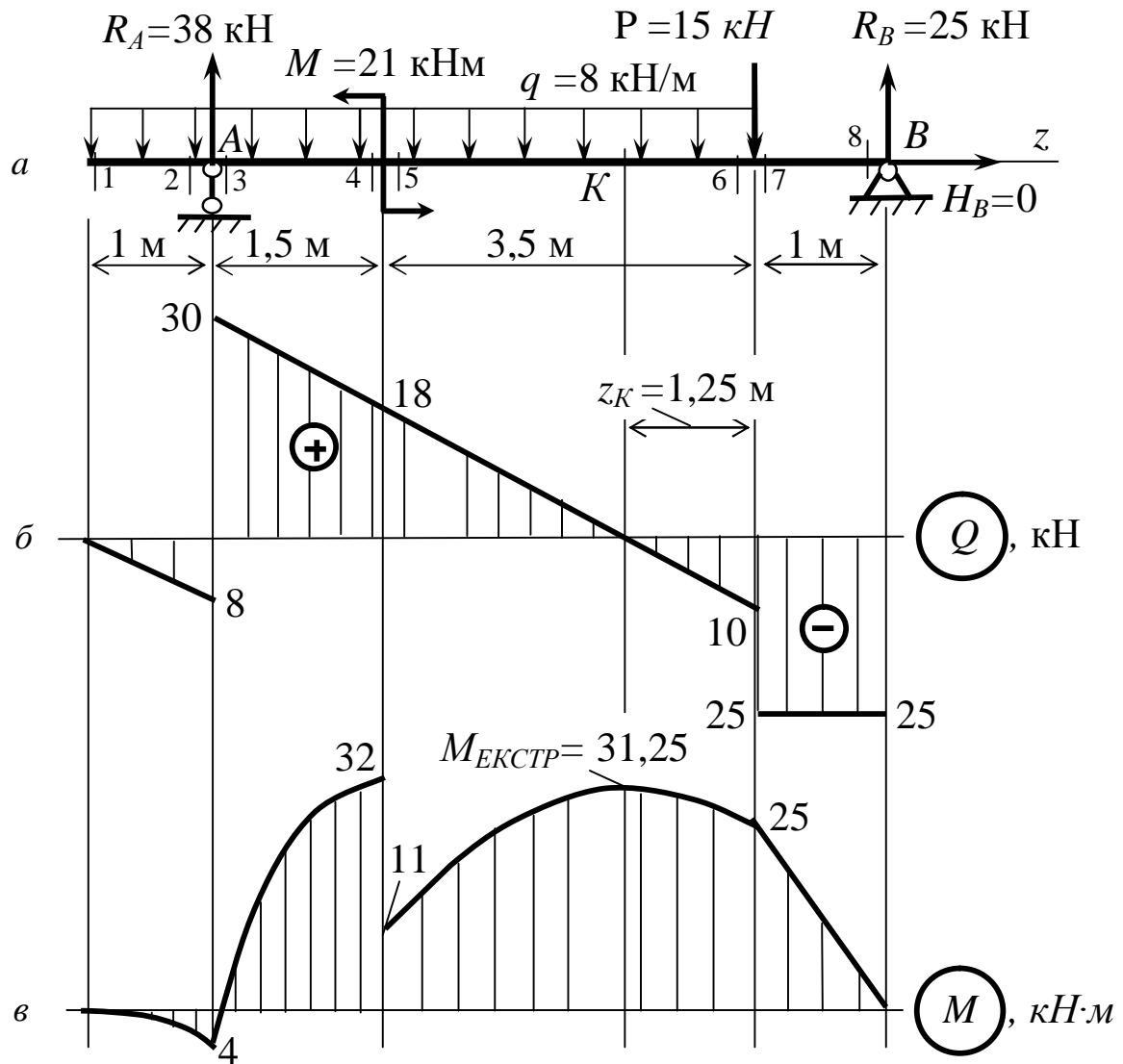
$$S_{max} = \frac{M_{max} y_{max}}{I_{x_c}} = \frac{17 \cdot 10^{-3} \cdot 20,31 \cdot 10^{-2}}{14141,23 \cdot 10^{-8}} = 24,4 \text{ МПа}.$$

Висновок: максимальне нормальне напруження

$$S_{max} = 24,4 \text{ МПа}.$$

3.3.2 Приклад розв'язання задачі 3.3б (схема з екстремумом)

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двоопорної балки (рис. 3.10, а).



а - задана схема; б - епюра поперечних сил;

в - епюра згинальних моментів

Рисунок 3.10 – Двохопорна балка до задачі 3.3б

Розв'язання. Визначимо опорні реакції балки.

Оскільки на балку діють тільки вертикальні сили, то горизонтальна реакція відсутня: $H_B = 0$.

$$SM_A(\bar{P}_k) = 0; \quad q \cdot 1 \cdot 0,5 - q \cdot 5 \cdot 2,5 + M - P \cdot 5 + R_B \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{6} (15 \cdot 5 - 21 + 8 \cdot 5 \cdot 2,5 - 8 \cdot 1 \cdot 0,5) = 25 \text{ кН}.$$

$$SM_B(\bar{P}_k) = 0; \quad q \cdot 6 \cdot \left(\frac{6}{2} + 1 \right) + M + P \cdot 1 - R_B \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{6}(15 \cdot 1 + 21 + 8 \cdot 6 \cdot 4) = 38 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку:

$$SP_{ky} = 0; \quad R_A - q \cdot 6 - P + R_B = 0;$$

$$38 - 8 \cdot 6 - 15 + 25 = 0;$$

$$63 - 63 = 0.$$

Реакції знайдено вірно.

Визначимо значення Q в характерних перерізах балки:

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = -q \cdot 1 = -8 \cdot 1 = -8 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_2 + R_A = -8 + 38 = 30 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_5 = R_A - q \cdot 2,5 = 38 - 8 \cdot 2,5 = 18 \text{ кН};$$

$$Q_6 = R_A - q \cdot 6 = 38 - 8 \cdot 6 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_7 = Q_8 = Q_6 - P = -10 - 15 = -25 \text{ кН}.$$

За цими даними побудуємо епюру (див. рис. 3.10, б) поперечних сил, з'єднуючи знайдені ординати прямими лініями.

Оскільки ми будували епюру Q , “рухаючись” зліва направо, то напрямок “стрибків” на епюрі співпадає з напрямком сил.

На ділянці 1...2 розподілене навантаження приводить до поступового зниження значень поперечних сил Q від значення $Q_1 = 0$ до значення

$$Q_2 = -q \cdot 1 = -8 \text{ кН}.$$

У перерізі 3 реакція $R_A = 38$ кН забезпечує “стрибок” уверх до величини $Q_3 = 30$ кН.

Далі під впливом розподіленого навантаження поперечна сила поступово зменшується до величини $Q_6 = -10$ кН.

У перерізі 7 сила $P = 15$ кН забезпечує “стрибок” униз до величини $Q_7 = -25$ кН і далі поперечна сила не змінюється $Q_8 = Q_7 = -25$ кН.

Зробимо перевірку побудови епюри Q , для чого будемо “рухатись” справа наліво.

У перерізі 8 реакція $R_B = 25$ кН намагається повернути балку проти ходу годинникової стрілки, тому на епюрі Q ми маємо “стрибок” униз до $Q_8 = -25$ кН і далі без змін до перерізу 7.

У перерізі 6 з’являється сила $P = 15$ кН, яка намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, тому на епюрі Q ми маємо “стрибок” уверх до значення $Q_6 = -10$ кН.

На ділянці 6...3 розподілене навантаження викликає зростання значень поперечних сил Q від значення $Q_6 = -10$ кН до значення $Q_3 = Q_6 + q \cdot 5 = 30$ кН. При цьому наявність згинального моменту M на епюрі Q не позначається.

Відносно перерізу 2 реакція $R_A = 38$ кН повертає балку проти ходу годинникової стрілки, тому епюра має “стрибок” униз до величини $Q_2 = -8$ кН.

Далі під впливом розподіленого навантаження, яке намагається повернути балку за ходом годинникової стрілки, поперечна сила зростає до величини $Q_1 = Q_2 + q \cdot 1 = 0$.

Таким чином, епюра Q побудована вірно.

Визначимо значення M в характерних перерізі балки:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -8 \cdot 1 \cdot 0,5 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = R_A \cdot 1,5 - q \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 38 \cdot 1,5 - 8 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 32 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 - M = 32 - 21 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = R_A \cdot 5 - q \cdot 6 \cdot 3 - M = 38 \cdot 5 - 8 \cdot 6 \cdot 3 - 21 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці 5...6 у перерізі K , де $Q = 0$, на епюрі M має бути максимум. Підрахуємо значення z_K і $M_K = M_{\max}$: $z_K = \frac{Q_6}{q} = \frac{10}{8} = 1,25$ м;

$$M_K = M_{\max} = R_B(1 + z_K) - P \cdot z_K - q \cdot \frac{z_K^2}{2} =$$

$$= 25(1 + 1,25) - 15 \cdot 1,25 - 8 \cdot 1,25 \cdot 0,625 = 31,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Останню частину епюри M побудуємо з правого кінця:

$$M_8 = 0; \quad M_7 = R_B \cdot 1 = 25 \cdot 1 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Оскільки $M_6 = M_7$, то епюра M побудована вірно.

За цими даними будуємо епюру (див.рис.3.10, в) згинальних моментів.

Максимальне нормальне напруження S_{max} , можна знайти за форму-

лою

$$S_{max} = \frac{M_{max} y_{max}}{I_{x_c}},$$

де y_{max} – найбільш віддалена точка перерізу.

Згідно з умовами задачі знайдемо відстань від осі x_c до найбільш віддаленої точки перерізу (див. завдання 3.1). Найбільш віддаленою точкою перерізу (див. рис. 3.6) є найнижча точка перерізу, яка належить швелеру. Відстань до неї від осі x_c дорівнює:

$$y_{max} = a_2 + \frac{h_{ДВ}}{2} + b_{ШВ} = 0,31 + 0,5 \cdot 24 + 8,2 = 20,51 \text{ см}.$$

Таким чином, враховуючи найбільший ($M_{max} = 32 \text{ кН} \cdot \text{м}$) згинальний момент, визначимо максимальне нормальне напруження в перерізі:

$$S_{max} = \frac{M_{max} y_{max}}{I_{x_c}} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 20,51 \cdot 10^{-2}}{14141,23 \cdot 10^{-8}} = 46,41 \text{ МПа}.$$

Висновок: максимальне нормальне напруження
 $S_{max} = 46,41 \text{ МПа}.$

3.4 Повна перевірка міцності балки

Для сталеві балки підібрати розміри двотаврового, круглого і прямокутного (співвідношення сторін $h : b = 2$) перерізів, вибрати оптимальний варіант і провести повну перевірку на міцність за IV теорією міцності. Прийняти $[t] = 0,6 \cdot [s]$

Вихідні дані вибрати із таблиць 3.5 та 3.6 і рисунків 3.11 та 3.12

Таблиця 3.5 – Вихідні дані до задачі 3.4

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[\sigma]$, МПа	150	160	170	220	140	180	200	120	210	190
M , кН·м	20	50	80	30	40	65	35	55	45	70
P , кН	30	40	60	70	20	35	65	25	45	55
q , кН/м	12	10	14	20	16	22	18	15	18	24

Таблиця 3.6 – Вихідні дані до задачі 3.4

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	2,0	2,2	2,4	2,3	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,1
b , м	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
c , м	1,6	1,4	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

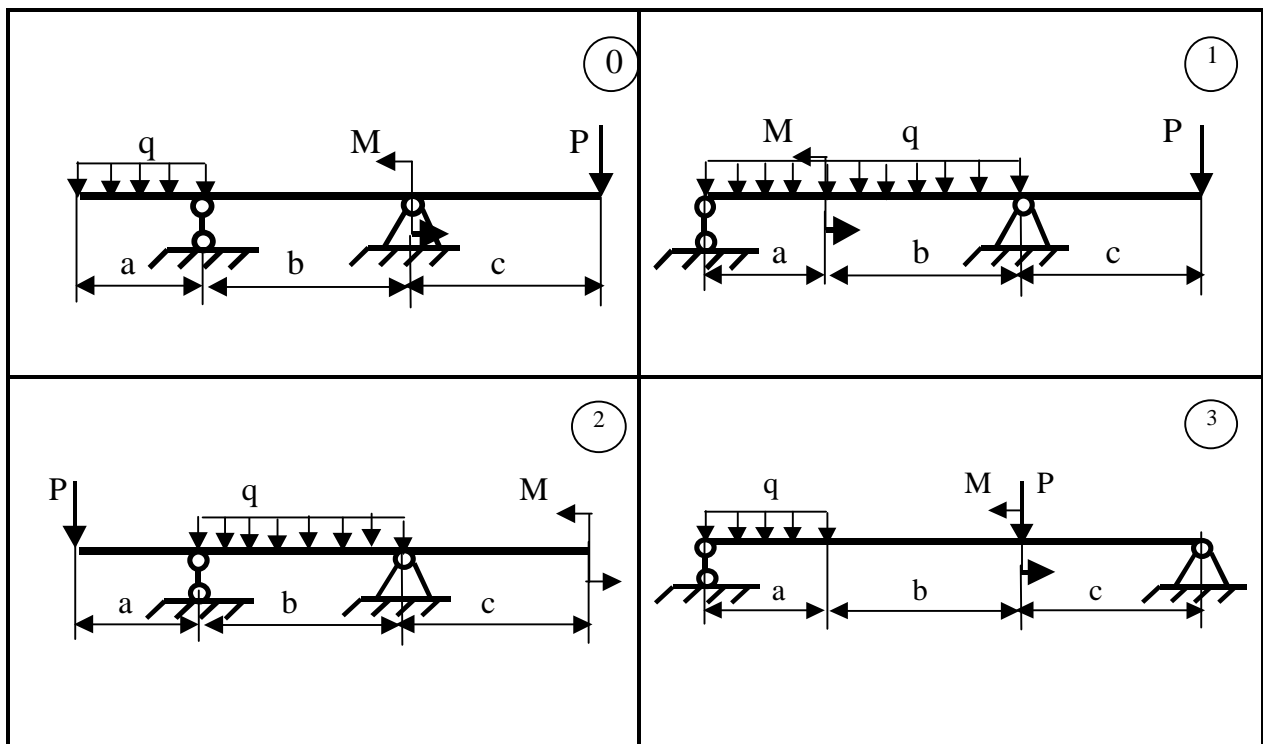


Рисунок 3.11 - Схеми до варіантів завдання 3.4

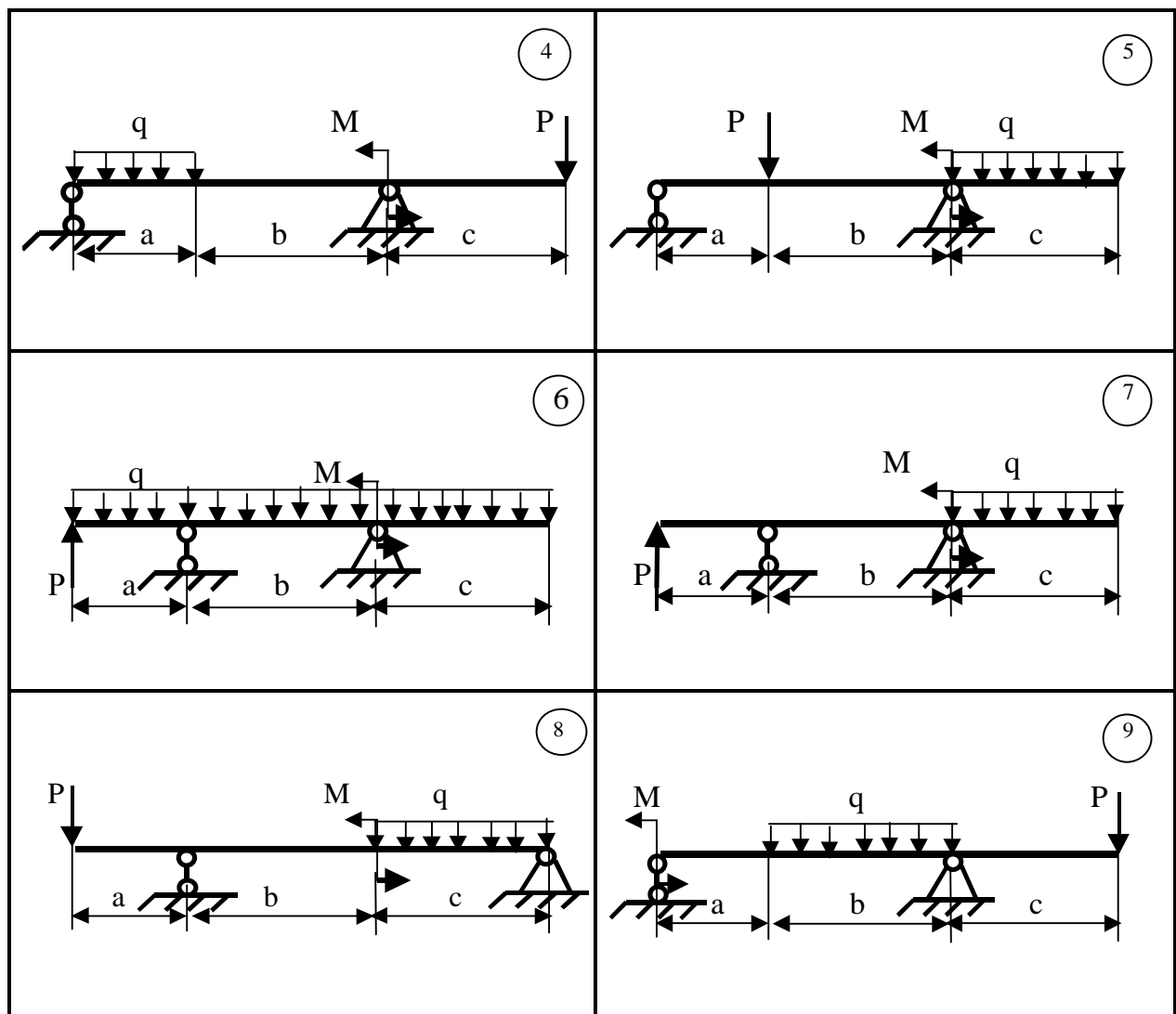


Рисунок 3.12 - Схеми до варіантів завдання 3.4

3.4.1 Приклад розв'язання задачі 3.4

Для сталевий балки (рис. 3.13) підібрати розміри двотаврового, круглого і прямокутного (співвідношення сторін $h : b = 2$) перерізів, вибрати оптимальний варіант і провести повну перевірку на міцність за IV теорією міцності. Розрахунки виконуємо відповідно до $[S] = 150 \text{ МПа}$.

$$\text{Тоді } [t] = 0,6 \cdot [S] = 0,6 \cdot 150 = 90 \text{ МПа}.$$

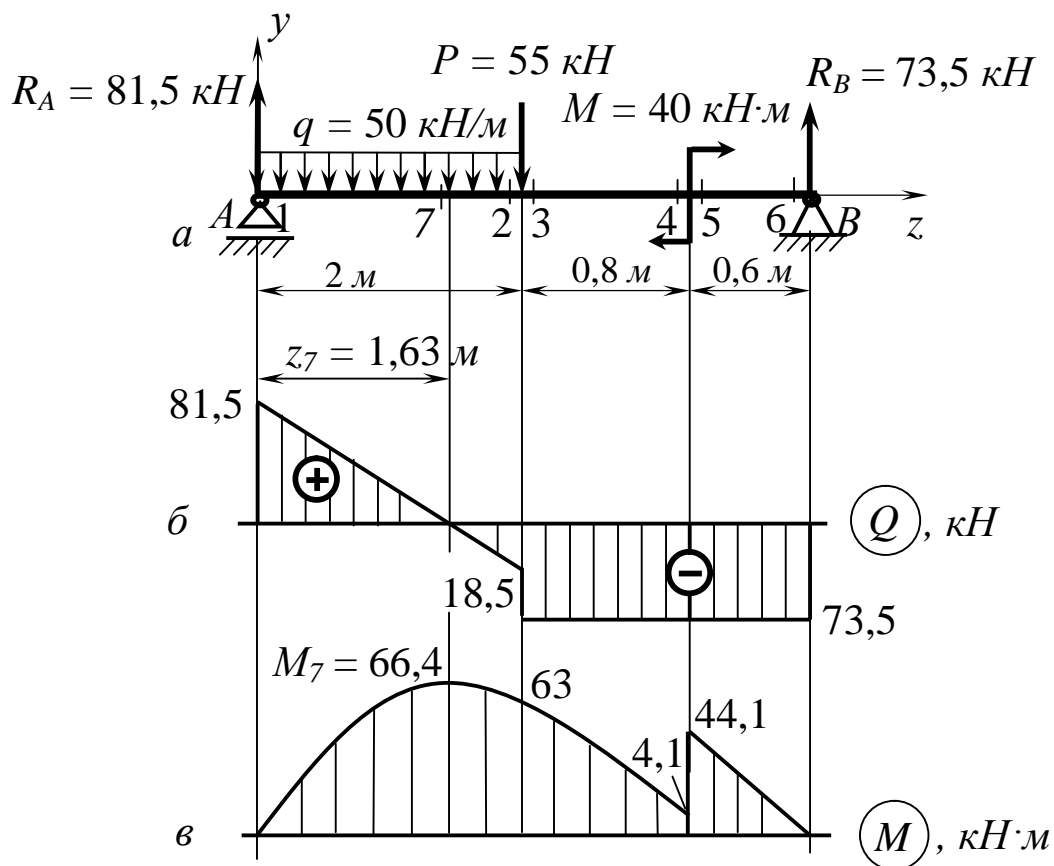


Рисунок 3.13 – Схема балки і основні графічні побудови до задачі 3.4

Розв'язання

Із умов рівноваги визначимо опорні реакції балки:

$$\sum M_A = 0; \quad -q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M + R_B \cdot 3,4 = 0;$$

$$R_B = \frac{50 \cdot 2 \cdot 1 + 55 \cdot 2 + 40}{3,4} = 73,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M - R_A \cdot 3,4 = 0;$$

$$R_A = \frac{50 \cdot 2 \cdot 2,4 + 55 \cdot 1,4 - 40}{3,4} = 81,5 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_Y = 0; \quad R_A - q \cdot 2 - P + R_B = 0;$$

$$81,5 - 50 \cdot 2 - 55 + 73,5 = 0; \quad 155 - 155 = 0.$$

Таким чином, реакції балки визначені вірно.

2 Визначимо величини поперечних сил Q у характерних перерізах балки:

$$Q_1 = R_A = 81,5 \text{ кН}; \quad Q_2 = R_A - q \cdot 2 = 81,5 - 50 \cdot 2 = -18,5 \text{ кН};$$

$$Q_3 = R_A - q \cdot 2 - P = 81,5 - 50 \cdot 2 - 55 = -73,5 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_3 = -73,5 \text{ кН}; \quad Q_5 = Q_4 = -73,5 \text{ кН}; \quad Q_6 = Q_5 = -73,5 \text{ кН}.$$

На ділянці 1, 2 епюра Q змінює знак. Визначимо відстань z_7 до перерізу, де $Q = 0$ і де на епюрі M буде екстремум:

$$z_7 = \frac{Q_1}{q} = \frac{81,5}{50} = 1,63 \text{ м}.$$

Побудуємо епюри поперечних сил Q (рис. 3.13, б).

Визначимо величини згинальних моментів M у характерних перерізах балки:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 81,5 \cdot 2 - 50 \cdot 2 \cdot 1 = 63 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 = 63 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = R_B \cdot 0,6 - M = 73,5 \cdot 0,6 - 40 = 4,1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = R_B \cdot 0,6 = 73,5 \cdot 0,6 = 44,1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_6 = 0;$$

$$M_7 = R_A \cdot 1,63 - 50 \cdot 1,63 \cdot \frac{1,63}{2} = 66,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Побудуємо епюри згинальних моментів M (рис. 3.13, в).

3 На епюрі згинальних моментів знаходимо максимальний за модулем згинальний момент: $M_7 = M_{\max} = 66,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

4 З умови міцності за нормальними напруженнями знаходимо необхідний осьовий момент опору перерізу балки:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{66,4 \cdot 10^{-3}}{150} \cdot 10^6 = 443 \text{ см}^3.$$

5 Переходимо до підбору перерізів.

а) Двотавровий переріз:

За таблицею сортаменту (див., наприклад, [9], або додаток А) підби-

раємо необхідний номер двотавра (трохи більший або рівний одержаному $W_x = 443 \text{ см}^3$).

Приймаємо (ГОСТ8239-89) двотавр 30, який має $W_x = 472 \text{ см}^3$,
 $h = 30 \text{ см}$; $b = 13,5 \text{ см}$; $d = 0,65 \text{ см}$, $t = 1,02 \text{ см}$, $F = 46,5 \text{ см}^2$,
 $J_x = 7080 \text{ см}^4$, $S_x = 268 \text{ см}^3$.

б) Круглий переріз:

Момент опору для круга $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$.

Ми з'ясували, що момент опору перерізу балки повинен бути не менше $W_x = 443 \text{ см}^3$.

Звідки $d = \sqrt[3]{\frac{443}{0,1}} = \sqrt[3]{4430} = 17,7 \text{ см}$.

Приймаємо стрижень діаметром $d = 180 \text{ мм}$, площа котрого

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot 18^2 = 252,7 \text{ см}^2.$$

в) Прямокутний переріз:

Момент опору для прямокутника: $W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3$,

де $h = 2b$.

Звідки $b = \sqrt[3]{\frac{443 \cdot 3}{2}} = \sqrt[3]{669} = 8,7 \text{ см}$.

Приймаємо $h = 2b = 2 \cdot 8,7 = 17,4 \text{ см}$, а $F = b \cdot h = 8,7 \cdot 17,4 = 151,4 \text{ см}^2$.

Аналізуючи три типи перерізів – двотаврове, кругле і прямокутне, бачимо, що найбільш раціональним є двотаврове, оскільки при однаковій міцності балки його площа (а значить і вага) найменша. Тому далі будемо розглядати двотавр.

6 Перевіримо міцність балки за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{max} \geq \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{66,4 \cdot 10^{-3}}{472 \cdot 10^{-6}} = 141 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Ця умова міцності є забезпеченою.

7 На епюрі поперечних сил (див. рис. 3.13, б) знаходимо максимальну за модулем поперечну силу: $Q_{max} = 81,5 \text{ кН}$.

8 Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \frac{81,5 \cdot 10^{-3} \cdot 268 \cdot 10^{-6}}{0,65 \cdot 10^{-2} \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 41,5 \text{ МПа} \text{ а } [\tau] = 90 \text{ МПа}.$$

Таким чином і ця умова міцності є забезпеченою.

8 Аналізуючи епюри Q та M , бачимо, що найбільш небезпечним перерізом з точки зору еквівалентних напружень є переріз 3, в якому величини Q і M хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі: $Q_3 = Q_{HEB} = 73,5 \text{ кН}$; $M_3 = M_{HEB} = 63 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

А в цьому небезпечному перерізі найбільш небезпечною точкою є точка K , де з'єднуються полиця і стінка двотавра (рис. 3.14). Тому будемо визначати максимальні еквівалентні напруження в точці K перерізу двотавра:

$$\sigma_{екв}^{max} = \sqrt{\sigma_K^2 + 3\tau_K^2};$$

$$\sigma_K = \frac{M_{HEB}}{J_x} \cdot y_K = \frac{63 \cdot 10^{-3} \cdot 13,98 \cdot 10^{-2}}{7080 \cdot 10^{-8}} = 123 \text{ МПа},$$

$$\text{де } y_K = \frac{h}{2} - t = \frac{30}{2} - 1,02 = 13,98 \text{ см}.$$

$$\tau_K = \frac{Q_{HEB} \cdot S_X^{відп}}{d \cdot J_X} = \frac{73,5 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{0,65 \cdot 10^{-2} \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 31,9 \text{ МПа},$$

$$\text{де } S_X^{відп} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 13,5 \cdot 1,02 \cdot \left(\frac{15}{2} - \frac{1,02}{2} \right) = 200 \text{ см}^3.$$

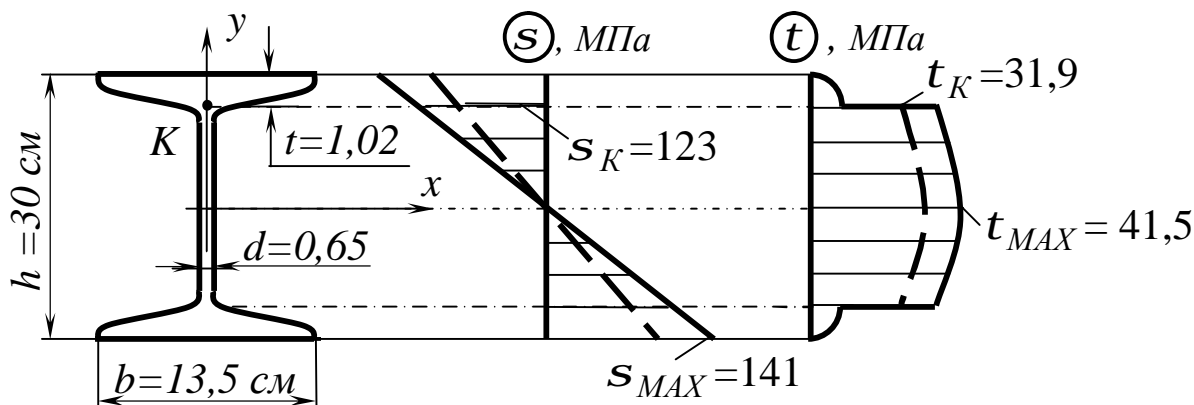


Рисунок 3.14 – Схема до визначення еквівалентних напружень у небезпечному перерізі балки

Таким чином, остаточно маємо:

$$s_{екв}^{max} = \sqrt{123^2 + 3 \cdot 31,9^2} = 135 \text{ МПа} < [s] = 150 \text{ МПа}.$$

Умова міцності за еквівалентними напруженнями також забезпечена.

Значення всіх визначених напружень означимо на рисунку 3.14. При цьому епюри нормальних напружень для перерізів 3 та 7 накладемо один на одний. Теж саме зробимо для епюр дотичних напружень 1- та 3-го перерізів.

Висновок: переріз балки – двотавр 30 – відповідає всім умовам міцності.

3.5 Згинання з крученням

Виходячи з III теорії міцності, визначити діаметр d проміжного вала редуктора. У задачі означено: K – потужність, що передається валом; n – частота обертання вала; D_1 та D_2 – діаметри зубчатих коліс.

Співвідношення між силами, що діють на зубчаті колеса: $T_i = 0,324 P_i$; $S_i = 0,4 P_i$. Допустиме напруження $[s] = 80 \text{ МПа}$.

Вихідні дані вибрати із таблиць 3.7 та 3.8 і рисунку 3.15.

Таблиця 3.7 – Вихідні дані до задачі 3.5

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
W , кВт	10	35	20	45	15	25	50	30	55	40
D_1 , м	0,5	0,9	0,6	0,8	0,5	0,9	0,6	0,8	0,7	0,8
D_2 , м	0,4	0,6	0,5	0,4	0,3	0,5	0,4	0,3	0,4	0,6

Таблиця 3.8 – Вихідні дані до задачі 3.5

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n , об/хв	100	350	200	450	300	150	500	250	400	350
a , м	0,7	0,5	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,6	0,5
b , м	0,5	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,7	0,6
c , м	0,3	0,5	0,7	0,5	0,6	0,4	0,6	0,7	0,5	0,7

3.5.1 Приклад розв'язання задачі 3.5

Виходячи з III теорії міцності, визначити діаметр d проміжного вала редуктора (рис.3.15). Співвідношення між силами, що діють на зубчаті колеса: $T_i = 0,324P_i$; $S_i = 0,4P_i$. Допустиме напруження $[s] = 80 \text{ МПа}$.

Дано: $a = 0,2 \text{ м}$; $b = 0,3 \text{ м}$; $c = 0,1 \text{ м}$; $D_1 = 0,9 \text{ м}$; $D_2 = 0,3 \text{ м}$; $K = 75 \text{ кВт}$; $n = 450 \text{ об/хв}$.

Розв'язання. 1 Визначимо крутний момент, який діє на вал:

$$M_{кр} = \frac{30 \cdot K}{p \cdot n} = \frac{30 \cdot 75}{3,14 \cdot 450} = 1,592 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будемо мати на увазі, що крутний момент, який діє на вал є однако-
вим для кожного зубчатого колеса.

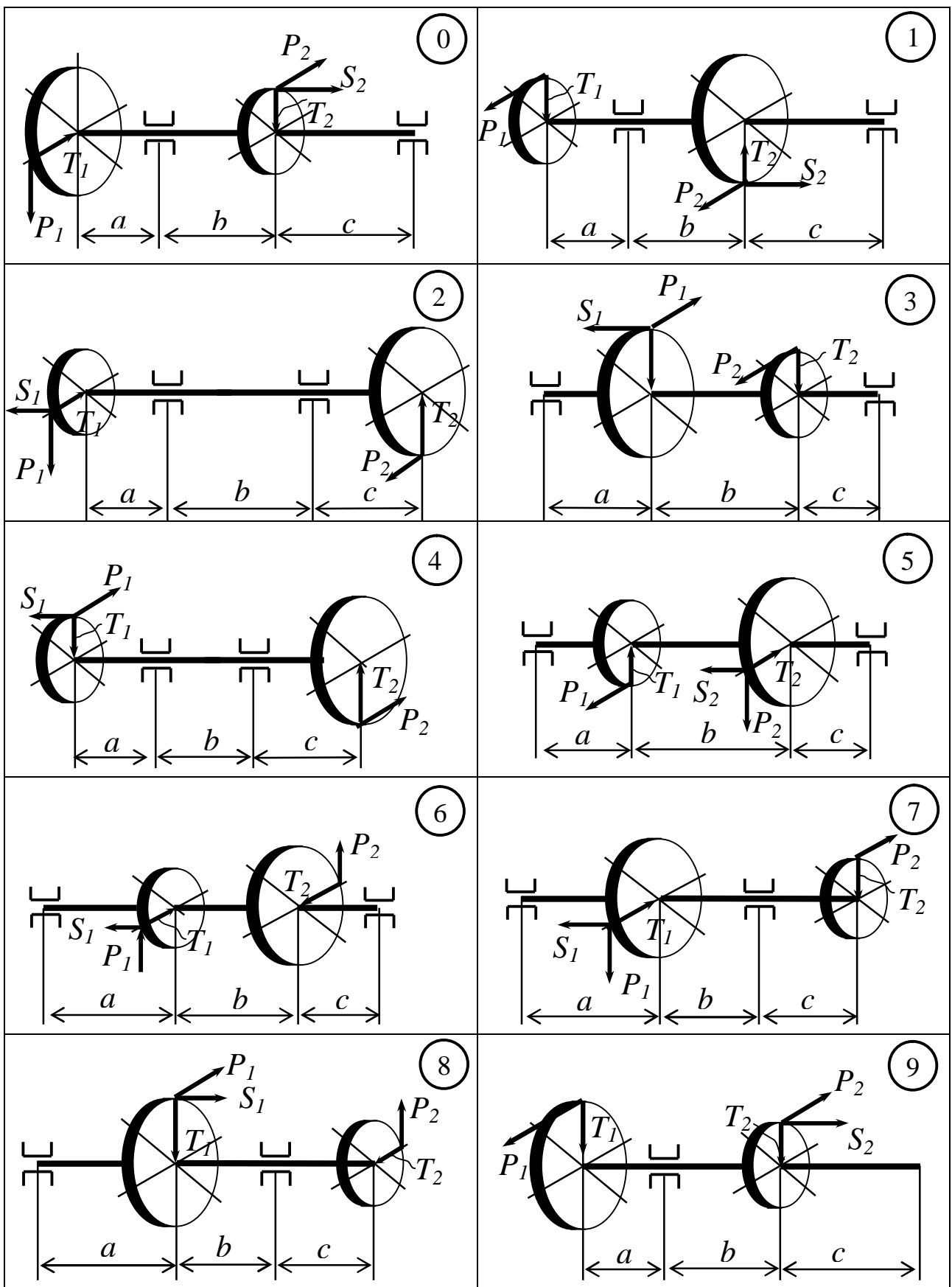


Рисунок 3.15 - Схеми до варіантів завдання 3.5

$$M_{кр} = P_1 \cdot \frac{D_1}{2} = P_2 \cdot \frac{D_2}{2}.$$

Звідки $P_1 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,592}{0,9} = 3,537 \text{ кН};$

а $P_2 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,592}{0,3} = 10,613 \text{ кН}.$

Тоді $T_1 = 0,324 \cdot P_1 = 0,324 \cdot 3,537 = 1,146 \text{ кН};$

$$T_2 = 0,324 \cdot P_2 = 0,324 \cdot 10,613 = 3,439 \text{ кН};$$

$$S_2 = 0,4 \cdot P_2 = 0,4 \cdot 10,613 = 4,245 \text{ кН}.$$

2 Прикладемо усі зазначені сили (див. рис. 3.16, б) безпосередньо до осі вала. Зважаючи на те, що сили P_1 та P_2 не перетинають осі вала, то при їх паралельному перенесенні до них треба додати відповідно добутки $P_1 \cdot \frac{D_1}{2}$ та $P_2 \cdot \frac{D_2}{2}$, які дорівнюють крутному моменту – $M_{кр}$.

3 тієї ж причини дію подовжньої сили S_2 замінюємо згинальним моментом

$$M_S = S_2 \cdot \frac{D_2}{2} = 4,245 \cdot \frac{0,3}{2} = 0,637 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3 Прикладемо до вала всі сили, які діють на нього у вертикальній площині (див. рис. 3.16, в) та визначимо опорні реакції:

$$\sum M_A^B = 0; \quad R_B^B \cdot 0,6 + M_S - T_1 \cdot 0,2 - T_2 \cdot 0,5 = 0;$$

$$\begin{aligned} R_B^B &= \frac{1}{0,6} \cdot (-M_S + T_1 \cdot 0,2 + T_2 \cdot 0,5) = \\ &= \frac{1}{0,6} \cdot (-0,637 + 1,146 \cdot 0,2 + 3,439 \cdot 0,5) = 2,187 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\sum M_B^B = 0; \quad -R_A^B \cdot 0,6 + M_S + T_1 \cdot 0,4 + T_2 \cdot 0,1 = 0;$$

$$\begin{aligned} R_A^B &= \frac{1}{0,6} \cdot (T_1 \cdot 0,4 + M_S + T_2 \cdot 0,1) = \\ &= \frac{1}{0,6} \cdot (1,146 \cdot 0,4 + 0,637 + 3,439 \cdot 0,1) = 2,399 \text{ кН}; \end{aligned}$$

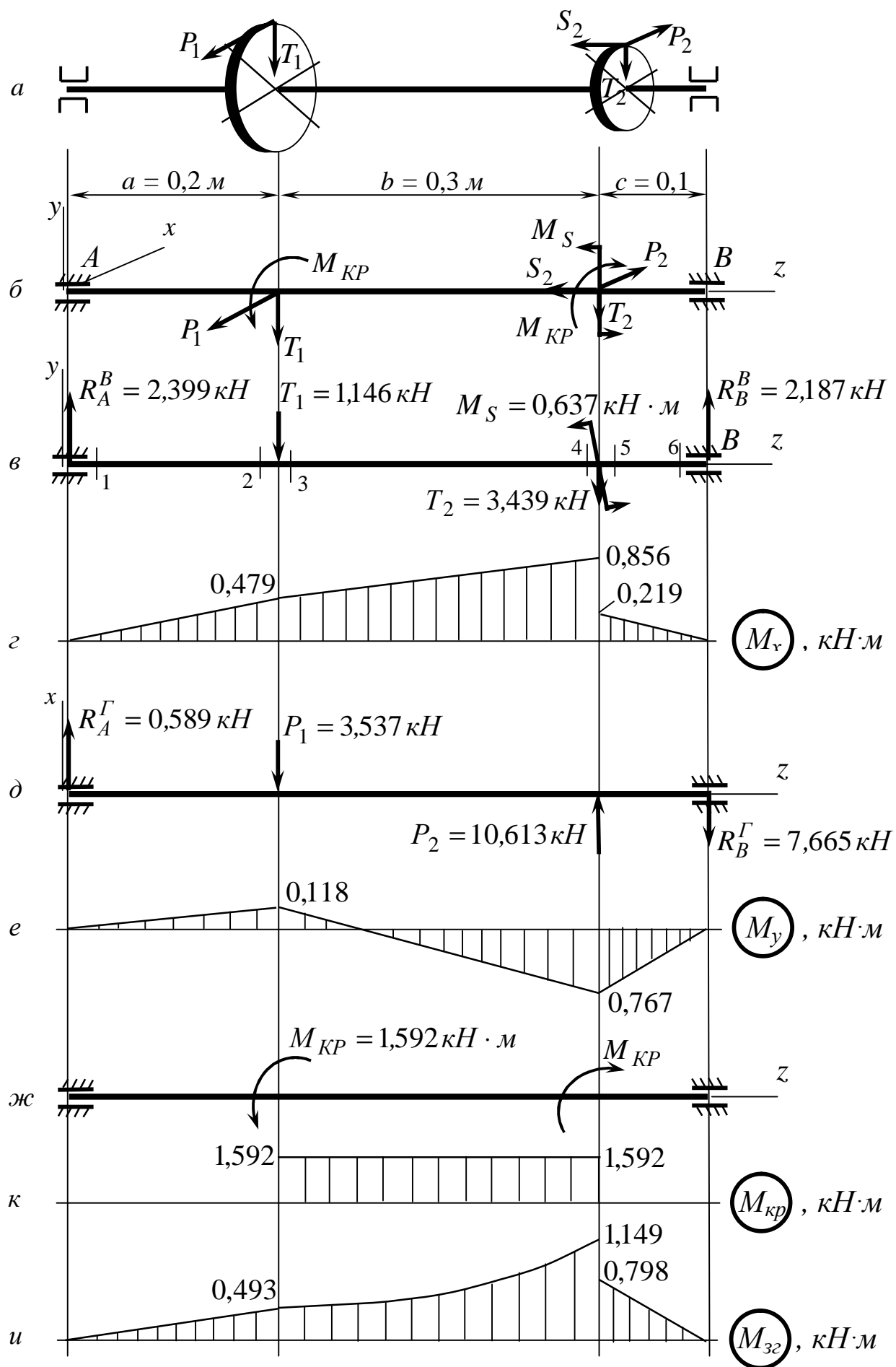


Рисунок 3.16 – Графічні побудови до прикладу розв'язання задачі 3.5

Зробимо перевірку:

$$\begin{aligned}\sum P_{ky} &= 0: \quad R_A^B - T_1 - T_2 + R_B^B = 0; \\ 2,399 - 1,146 - 3,439 + 2,187 &= 0; \\ 4,586 - 4,585 &\approx 0;\end{aligned}$$

Реакції знайдено вірно.

Визначимо згинальні моменти у характерних перерізах:

$$\begin{aligned}M_1 &= 0; \quad M_2 = R_A^B \cdot 0,2 = 2,399 \cdot 0,2 = 0,479 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_3 &= M_2 = 0,479 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_4 &= R_A^B \cdot 0,5 - T_1 \cdot 0,3 = 2,399 \cdot 0,5 - 1,146 \cdot 0,3 = 0,856 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Згинальний момент в 5-му перерізі визначимо, «рухаючись» від перерізу 6:

$$M_6 = 0; \quad M_5 = R_B^B \cdot 0,1 = 2,187 \cdot 0,1 = 0,219 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Як і очікувалось, } M_4 - M_5 = M_S; \quad 0,856 - 0,219 = 0,637 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За визначеними згинальними моментами будуємо епюру згинальних моментів M_x (див. рис. 3.16, г).

4 Прикладемо до вала всі сили, які діють на нього в горизонтальній площині (див. рис. 3.16, д) та визначимо опорні реакції:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0: \quad -P_1 \cdot 0,2 + P_2 \cdot 0,5 - R_B^{\Gamma} \cdot 0,6 = 0; \\ R_B^{\Gamma} &= \frac{1}{0,6} \cdot (-P_1 \cdot 0,2 + P_2 \cdot 0,5) = \\ &= \frac{1}{0,6} \cdot (-3,537 \cdot 0,2 + 10,613 \cdot 0,5) = 7,665 \text{ кН}; \\ \sum M_B &= 0: \quad -R_A^{\Gamma} \cdot 0,6 + P_1 \cdot 0,4 - P_2 \cdot 0,1 = 0; \\ R_A^{\Gamma} &= \frac{1}{0,6} \cdot (P_1 \cdot 0,4 - P_2 \cdot 0,1) = \\ &= \frac{1}{0,6} \cdot (3,537 \cdot 0,4 - 10,613 \cdot 0,1) = 0,589 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Зробимо перевірку:

$$\sum P_{kx} = 0: R_A^I - P_1 + P_2 - R_B^I = 0;$$

$$0,589 - 3,537 + 10,613 - 7,665 = 0;$$

$$11,202 - 11,202 = 0;$$

Реакції знайдено вірно.

Визначимо згинальні моменти в характерних перерізах:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = R_A^I \cdot 0,2 = 0,589 \cdot 0,2 = 0,118 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Згинальний момент в 5-му перерізі визначимо, «рухаючись» від перерізу 6: $M_6 = 0; \quad M_5 = R_B^I \cdot 0,1 = 7,665 \cdot 0,1 = 0,767 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

За визначеними згинальними моментами будуємо епюру згинальних моментів M_y (див. рис. 3.16, е).

4 Прикладемо крутні моменти до вала (див. рис. 3.16, ж) та визначимо крутні моменти у характерних перерізах:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = 0; \quad M_3 = M_{кр} = 1,592 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = M_{кр} = 1,592 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5 = 0; \quad M_6 = 0.$$

За визначеними моментами будуємо епюру $M_{кр}$ (рис. 3.16, к).

5 Для побудови епюри згинальних моментів визначимо величини згинальних моментів у характерних перерізах балки за формулою:

$$M_{32} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2};$$

$$M_{32\ 1} = \sqrt{M_{x1}^2 + M_{y1}^2} = 0;$$

$$M_{32\ 2-3} = \sqrt{M_{x2}^2 + M_{y2}^2} = \sqrt{0,479^2 + 0,118^2} = 0,493 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{324} = \sqrt{M_{x4}^2 + M_{y4}^2} = \sqrt{0,856^2 + 0,767^2} = 1,149 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{325} = \sqrt{M_{x5}^2 + M_{y5}^2} = \sqrt{0,219^2 + 0,767^2} = 0,798 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{326} = \sqrt{M_{x6}^2 + M_{y6}^2} = 0.$$

За визначеними моментами будемо епюру M_{32} (рис. 3.16, и).

7 Аналізуючи епюру згинальних моментів M_{32} , бачимо, що небезпечним є переріз 4, в якому $M_{32} = 1,149 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Визначимо в цьому перерізі зведений момент за III теорією міцності дорівнює:

$$M_{36}^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{0,856^2 + 0,767^2 + 1,592^2} = 1,963 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\text{з умови міцності при згинанні } s_{екв}^{III} = \frac{M_{36}^{III}}{W_o} \leq [s],$$

визначимо осьовий момент опору вала:

$$W_o \geq \frac{M_{36}^{III}}{[s]} = \frac{1,963 \cdot 10^{-3}}{80} 10^6 = 24,5 \text{ см}^3.$$

8 Знаючи, що осьовий момент опору круглого перерізу дорівнює

$$W_o = \frac{\pi d^3}{32},$$

визначаємо необхідний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_o}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 24,5 \cdot 10^3}{3,14}} = 62,97 \text{ мм}.$$

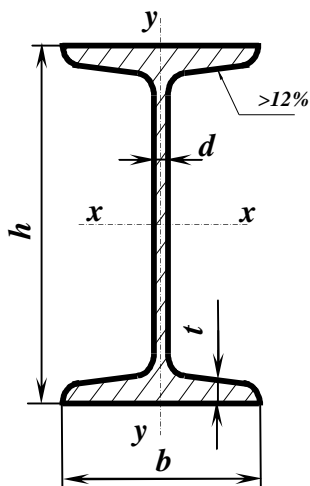
З нормального ряду (ГОСТ6636-69) приймаємо діаметр проміжного вала редуктора $d = 63 \text{ мм}$.

Висновок: приймаємо діаметр проміжного вала редуктора $d = 63 \text{ мм}$.

ЛІТЕРАТУРА

- 1 **Сапрыкин, В. Н.** Техническая механика. – Ростов н/Д: Феникс; Харьков: Торсинг, 2003. – 560 с. – ISBN 5-222-03585-9 (Феникс); – ISBN 966-693-224-5 (Торсинг)
- 2 **Никитин, Н. Н.** Курс теоретической механики. – М.: Высш. школа, 1990. – 607 с.
- 3 **Павловський, М.А.** Теоретична механіка: підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с. – ISBN 966-575-184-0
- 4 **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1983. – 480 с.
- 5 Теоретическая механика: методические указания и контрольные задания для студентов заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений/ Под ред. С. М. Тарга. – М.: Высш. школа, 1989. – 111 с.
- 6 Писаренко, Г. С. Опір матеріалів: підручник / Г. С. Писаренко, О. А. Квітка, Е. С. Уманський; за ред. Г. С. Писаренка. – 2-ге вид. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
- 7 **Феодосьев, В. И.** Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 612 с.
- 8 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов: учеб. для техн. вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высш. школа, 1989. – 624 с.
- 9 Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев и др. – Киев: Наук. думка, 1988. – 704 с.

- 10 **Ерфорт, Ю. А.** Методические указания к оформлению РГР по дисциплине "Теоретическая механика"/сост.:Ю. А. Ерфорт. – Краматорск: КИИ,1992. – 19 с.
- 11 **Овчаренко, В.А.** Самостійна робота студентів з дисципліни «Опір матеріалів»: навчальний посібник /В.А.Овчаренко, Л.В. Кутовой, М.О. Соломін, О.Ю. Деньщиков. – Краматорськ: ДДМА 2004. – 208 с. – ISBN 966-7851-27-3
- 12 **Подлесный, С. В.** Конспект лекций по теоретической механике. Часть 1.Статика и кинематика (для студентов заочной формы обучения) / сост.: С. В. Подлесный, Ю. А. Ерфорт. – 2-е изд., стер – Краматорск: ДГМА, 2005. – 200 с.
- 13 **Подлесный, С. В.** Конспект лекций по теоретической механике. Часть 1.Динамика (для студентов заочной формы обучения) / сост.: С. В. Подлесный, Ю. А. Ерфорт. – 2-е изд., стер. – Краматорск: ДГМА, 2005. – 248 с.
- 14 **Кутовой, Л. В.** Конспект лекций по дисциплине «Сопротивление материалов» (для студентов всех механических специальностей очной и заочной форм обучения). – Часть 1 / сост.: Л. В. Кутовой, Т. П. Зинченко, В. А. Овчаренко – Краматорск: ДГМА, 2004. – 172 с.
- 15 **Кутовой, Л. В.** Конспект лекций по дисциплине «Сопротивление материалов» (для студентов всех механических специальностей очной и заочной форм обучения). – Часть 2 / сост.: Л. В. Кутовой, Т. П. Зинченко, В. А. Овчаренко – Краматорск: ДГМА, 2005. – 176 с.
- 16 **Подлесный, С. В.** Методические указания и контрольные задания по дисциплине "Теоретическая механика" (для студентов всех технических специальностей заочной формы обучения) /сост.: С. В. Подлесный, А. Н. Стадник, Ю. А. Ерфорт, Д. Г. Сущенко. – Краматорск: ДГМА, 2005. –108 с.



ДВОТАВРИ
сталеві гарячекатані
(за ГОСТ 8239-89)

Додаток А

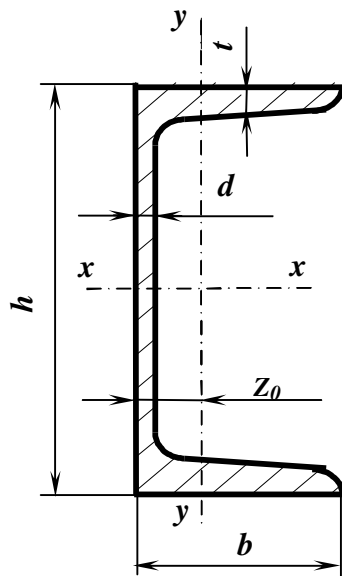
Приклад позначення
Двутавр 30 ГОСТ 8239-89

Таблиця А.1

Номер профілю	Розміри, мм				F см ²	J_X см ⁴	W_X см ³	i_X см	S_X см ³	J_Y см ⁴	W_Y см ³	i_Y см
	h	b	d	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Нормальні лінійні розміри, мм (за ГОСТ 6636-69)

1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6
4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0	10	11	12	14
16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56
63	71	80	90	100	110	125	140	160	180	200	220
250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900



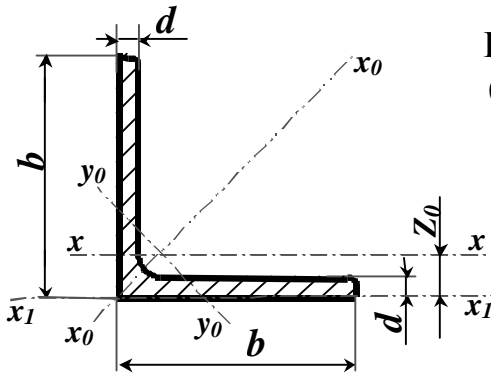
Таблиця Б.1

ШВЕЛЕРИ
сталеві гарячекатані
(за ГОСТ 8240-97 або ДСТУ 3436-96)

Приклад позначення:
Швелер 30 ГОСТ 8240-97

Номер профі- лю	Розміри, мм				F см ²	J_X см ⁴	W_X см ³	i_X см	S_X см ³	J_Y см ⁴	W_Y см ³	i_Y см	Z_0 см
	h	b	d	t									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

КУТИКИ СТАЛЕВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ РІВНОСМУЖНІ (за ГОСТ 8509-93 або ДСТУ2251-93)



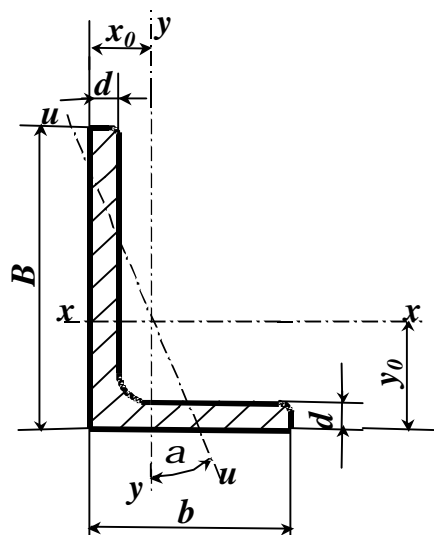
Приклад позначення:
Куттик 50x50x3 ГОСТ 8509-93

Таблиця В.1

Номер кутика	Розміри мм		F см ²	I_x см ⁴	i_x см	I_{x0} max см ⁴	i_{x0} max см	I_{y0} min см ⁴	i_{y0} min см	z_0 см
	b	d								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
		5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
		6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18

Продовження таблиці В.1

Номер кутика	Розміри, мм		F см ²	I_x см ⁴	i_x см	I_{x0} max см ⁴	i_{x0} max см	I_{y0} min см ⁴	i_{y0} min см	z_0 см
	b	d								
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
11	110	16	29,7	264	2,98	416	3,74	112,0	1,94	3,06
		7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
12,5	125	8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
		8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
14	140	16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
16	160	12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
		10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
18	180	18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
		11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	8117	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31



**КУТИКИ СТАЛЄВІ
ГАРЯЧЕКАТАНІ НЕРІВНОСМУЖНІ**
(за ГОСТ 8510-93)

Приклад позначення:

Кутик 50х32х3 ГОСТ 8510-93

Таблиця Г.1

Номер кутика	Розміри, мм			F см ²	I_x см ⁴	I_y см ⁴	I_u min см ⁴	i_u min см	x_0 см	y_0 см	Кут нахилу осі u , $\text{tg } \alpha$
	B	b	d								
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392
3/2	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	0,54	1,04	0,421
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382
			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385
			4	2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
			5	3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	0,66	1,41	0,374
4/3	40	39	4	2,67	4,18	2,01	1,09	0,64	0,78	1,28	0,544
			5	3,28	5,04	2,41	1,33	0,64	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382
			4	2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403
			4	3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
			5	4,41	13,8	4,48	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
			5	4,98	19,9	6,26	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6	5,90	23,3	7,28	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8	7,68	29,6	9,15	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	23,41	12,08	6,41	1,07	1,26	2,00	0,576
			6	6,60	27,46	14,12	7,52	1,07	1,30	2,04	0,575
			7	7,62	31,32	16,05	8,60	1,06	1,34	2,08	0,571
			8	8,62	35,00	18,88	9,65	1,06	1,37	2,12	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
			6	7,25	40,92	14,60	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			7	8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	1,25	2,48	0,435
			8	9,47	52,38	18,52	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430

Продовження таблиці Г.1

Номер кутика	Розміри, мм			F	I_x	I_y	I_u	i_u	x_0	y_0	Кут нахилу осі u , $\text{tg } \alpha$
	B	b	d	см ²	см ⁴	см ⁴	min см ⁴	min см	см	см	
8/5	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	1,09	1,13	2,60	0,387
			6	7,55	48,98	14,85	8,88	1,08	1,17	2,65	0,386
8/6	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	1,29	1,49	2,47	0,547
			7	9,42	59,61	28,74	15,58	1,29	1,53	2,52	0,546
			8	10,6	66,88	32,15	17,49	1,28	1,57	2,56	0,544
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	19,7	11,8	1,22	1,26	2,92	0,384
			6	8,54	70,6	21,2	12,7	1,22	1,28	2,95	0,384
			8	11,2	90,9	27,1	16,3	1,21	1,36	3,04	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	30,6	18,20	1,38	1,42	3,23	0,393
			7	11,1	113,0	35,0	20,83	1,37	1,46	3,28	0,392
			8	12,6	127,0	39,2	23,38	1,36	1,50	3,32	0,391
			10	15,5	154,0	47,1	28,34	1,35	1,58	3,40	0,387
10/6,5	100	65	7	11,2	114,0	38,3	22,77	1,41	1,52	3,24	0,415
			8	12,7	138,3	43,0	25,24	1,41	1,56	3,28	0,414
			10	15,7	155,5	51,7	30,60	1,40	1,64	3,37	0,410
11/7	110	70	6,5	11,4	142	45,6	26,9	1,53	1,58	3,55	0,402
			8	13,9	172	54,6	32,3	1,52	1,64	3,61	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	227	73,7	43,4	1,76	1,80	4,01	0,407
			8	16,0	256	83,0	48,8	1,75	1,84	4,05	0,406
			10	19,7	312	100,0	59,3	1,74	1,92	4,14	0,404
			12	23,4	365	117,0	69,5	1,72	2,00	4,22	0,400
14/9	140	90	8	18,0	364	120	70,3	1,98	2,03	4,49	0,411
			10	22,2	444	146	85,5	1,96	2,12	4,58	0,409
16/10	160	100	9	22,9	606	186	110	2,20	2,23	5,19	0,391
			10	25,3	667	204	121	2,19	2,28	5,23	0,390
			12	30,0	784	239	142	2,18	2,36	5,32	0,388
			14	34,7	897	272	162	2,16	2,43	5,40	0,385
18/11	180	110	10	28,3	952	276	165	2,42	2,44	5,88	0,375
			12	33,7	1123	324	194	2,40	2,52	5,97	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	446	264	2,75	2,79	6,50	0,392
			12	37,9	1568	482	285	2,74	2,83	6,54	0,392
			14	43,9	1801	551	327	2,73	2,91	6,62	0,390
			16	49,8	2026	617	367	2,72	2,99	6,71	0,388
25/16	250	160	12	48,3	3147	1032	604	3,54	3,53	7,97	0,410
			16	63,6	4091	1333	781	3,50	3,69	8,14	0,408
			18	71,1	4545	1475	896	3,49	3,77	8,23	0,407
			20	78,5	4987	1613	949	3,48	3,85	8,31	0,405

Додаток Д

Питання

для підготовки до екзамену з дисципліни

«Технічна механіка»

Модуль 1. «Статика»

- 1 В'язі і їх реакції. Види в'язів.
- 2 Алгебраїчний момент сили відносно центра.
- 3 Пара сил, її властивості. Алгебраїчний момент пари сил.
- 4 Приведення довільної системи сил до простішого виду. Умови рівноваги.
- 5 Теореми про паралельне перенесення сили і про приведення сил до центра.
- 6 Головний вектор і головний момент системи сил.
- 7 Аналітичні умови рівноваги плоскої довільної системи сил, плоских систем пар паралельних та збіжних сил.
- 8 Умови рівноваги плоскої система сил. Теорема Варіньона.

Модуль 2. «Кінематика»

- 1 Координатний засіб завдання руху точки, її траєкторія, швидкості і прискорення.
- 2 Природні осі кривої, природний тригранник. Природний засіб завдання руху точки, визначення швидкості і прискорення точки.
- 3 Поступальний рух твердого тіла, теорема про його властивості.
- 4 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, його основні характеристики.
- 5 Швидкості і прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі.
- 6 Передачі і основи їх кінематичних розрахунків.
- 7 Плоский рух твердого тіла, розкладання його на складові. Рівняння плоского руху.
- 8 Кутова швидкість і кутове прискорення тіла при плоскому русі.
- 9 Теорема про швидкості точок тіла при плоскому русі.
- 10 Миттєвий центр швидкостей і його визначення.
- 11 Миттєвий центр швидкостей і визначення з його допомогою швидкостей точок тіла
- 12 Окремі випадки знаходження миттєвого центру швидкостей.
- 13 Теорема про прискорення точок тіла при плоскому русі.

Модуль 3. «Динаміки»

- 1 Диференціальні рівняння руху матеріальної точки.
Два основні завдання динаміки.
- 2 Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки.
- 3 Моменти інерції тіла відносно точки і осі.
- 4 Моменти інерції простих однорідних тіл: стрижень, пластина, диск.
- 5 Внутрішні сили системи: їх властивості.
- 6 Робота сили: елементарна і повна. Приклади обчислення роботи.
- 7 Кінетична енергія точки і системи.
- 8 Теореми про зміну кінетичної енергії точки і системи.

- 9 Принцип Даламбера для матеріальної точки і для системи.
- 10 Загальне рівняння динаміки.

Модуль 4. «Опір матеріалів»

- 1 Основні поняття і завдання науки “Опір матеріалів”. Реальний об’єкт і розрахункова схема. Поняття про суцільність, ізотропність, пружність і пластичність.
- 2 Зовнішні сили і внутрішні зусилля. Метод перерізів. Напруження нормальні і дотичні
- 3 Розтягання і стискання. Побудова епюри подовжніх сил. Визначення напруження в поперечних перерізах.
- 4 Деформації при розтяганні-стисканні. Закон Гука, коефіцієнт Пуассона.
- 5 Коефіцієнт запасу міцності при розтяганні-стисканні. Допустиме напруження. Умова міцності при розтяганні-стисканні.
- 6 Напружений стан, види напружених станів.
- 7 Поняття про теорії міцності, їх призначення. Перша і друга теорії міцності. Їх недоліки.
- 8 Третя і четверта теорії міцності, теорія Морю. Їх призначення.
- 9 Чистий зсув. Напруга і деформації при зсуві. Закон Гука при зсуві.
- 10 Практичні розрахунки при руйнуванні болтових і заклепувальних з’єднань
- 11 Кручення. Поняття про кручення. Побудова епюри крутних моментів. Зв’язок між потужністю і крутним моментом.
- 12 Кручення. Визначення напруження при крученні круглого валу.
- 13 Кручення. Розрахунки на міцність і жорсткість. Умови міцності і жорсткості.
- 14 Згинання. Поняття про згинання балки. Внутрішні зусилля в балці, їх визначення і правило знаків.
- 15 Диференціальні залежності між розподіленим навантаженням q , поперечною силою Q і згинальним моментом M . Аналіз цієї залежності.
- 16 Загальні принципи побудови епюр внутрішніх зусиль по характерних перерізах. Перевірка правильності побудови епюр.
- 17 Поняття про геометричні характеристики плоских перерізів. Статичний момент площі. Визначення центру тяжіння складної фігури.
- 18 Моменти інерції. Види моментів інерції. Визначення моментів інерції для простих перерізів
- 19 Моменти інерції відносно осей, паралельних центральним. Визначення моментів інерції для складного перерізу. Показати на прикладі.
- 20 Чистий згинання. Визначення напруження при чистому згинанні.
- 21 Поперечне згинання. Визначення дотичної напружень (формула Журавського).
- 22 Побудова епюр дотичних напружень при поперечному згинанні для перерізів різного вигляду (привести приклади).
- 23 Повна перевірка міцності балки. Аналіз напруженого стану балки при поперечному згинанні.
- 24 Складний опір. Складне і косе згинання.
- 25 Складне згинання з розтягуванням. Позацентрове розтягання (стискання). Визначення напружень.
- 26 Згинання з крученням круглих валів. Умова міцності.

Навчальне видання

**КУТОВИЙ Леонід Володимирович
ОВЧАРЕНКО Володимир Андрійович**

**ЗБІРНИК
КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ
З КУРСУ
«ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»**

для студентів спеціальності
«Інформаційні технології проектування»
заочної форми навчання

Редактор І.І.Дьякова

Комп'ютерна верстка О.П.Ордіна

203/2008. Підп. до друку Формат 60x84/16.

Папір офсетний. Ум. друк. арк. 6,52. Обл.-вид. арк. 7,22.

Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник

«Донбаська державна машинобудівна академія»

84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003