

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

Л.В.Васильєва, І.А.Гетьман

**ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ
В ЕКОНОМІЦІ**

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

Краматорськ 2011

УДК 519.852
ББК 22.18
В 19

Рецензенти:

Васильєва Л.В., Гетьман І.А.

В 19 Використання комп'ютерних технологій для розв'язання оптимізаційних задач в економіці: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. – Краматорськ: ДДМА, 2011 – 200 с.

ISBN 0000000000

Навчальний посібник містить шість лабораторних і одну самостійну роботу за такими темами: запис задачі лінійного програмування в загальному вигляді і в матричній формі; геометричний зміст і графічне розв'язання формалізованої двовимірної задачі ЛП; подвійність в задачах ЛП; задача визначення оптимального асортименту; задача про оптимальну суміш; транспортна задача; задачі, що зводяться до транспортної; задача міжгалузевого балансу, нелінійна оптимізаційна задача.

Посібник розрахований на студентів і аспірантів економічних спеціальностей, а також може бути корисним тим, хто бажає самостійно освоїти методи розв'язання оптимізаційних задач у системі Maple, Excel for Windows, MathCAD.

УДК 519.852

ББК 22.18

ISBN 0000000000

© Васильєва Л.В.,
Гетьман І.А., 2011.
© ДДМА, 2011.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	9
1 ПРЕДМЕТ "МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ".....	11
2 ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	14
3 МАТРИЧНИЙ ЗАПИС ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	16
3.1 Приклад запису задачі лінійного програмування в матричному вигляді.....	18
4 ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	19
4.1 Різні випадки, що зустрічаються при рішенні задач лінійного програмування	21
5 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. ГРАФІЧНЕ ВИРОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	25
5.1 Приклад графічного розв'язання формалізованої двовимірної задачі лінійного програмування	25
5.3 Розв'язання задачі лінійного програмування у пакеті Maple.....	31
5.4 Завдання до лабораторної роботи 1	34
5 ПОДВІЙНІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ	37
5.1 Поняття подвійності	37
5.2 Типи задач лінійного програмування	37
5.3 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі стандартного виду	39
5.4 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі канонічного виду	40
5.5 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі загального виду	40
5.6 Приклад побудови двоїстої задачі для задачі загального типу	41
5.7 Основні твердження про взаємно двоїсті задачі	43
5.7.1 Перша теорема подвійності.....	43
5.7.2 Друга теорема подвійності	44
5.8 Економічний зміст двоїстої задачі.....	44
6 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО АСОРТИМЕНТУ	46
6.1 Задача визначення оптимального асортименту (планування виробництва).....	46
6.2 Завдання до лабораторної роботи 2	47
6.3 Приклад виконання лабораторної роботи 2	49

6.4 Економічний висновок	51
6.5 Побудова двоїстої задачі до задачі планування виробництва	51
6.6 Розв'язання задачі за допомогою пакету Maple	56
6.7 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 2	57
7 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3. ОПТИМАЛЬНА СУМІШ	60
7.1 Теоретичні відомості.....	60
7.2 Завдання до лабораторної роботи.....	61
7.3 Приклад виконання лабораторної роботи 3	62
7.4 Побудова двоїстої задачі до задачі про оптимальну суміш	64
7.5 Розв'язання задачі за допомогою пакету Maple	66
7.6 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 3	68
8 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	74
8.1 Загальне формулювання транспортної задачі	74
8.2 Задачі, що зводяться до транспортних	76
8.2.1 Задача про укладання контрактів	76
8.2.2 Задача розподілу устаткування.....	78
9 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА	80
9.1 Завдання до лабораторної роботи 4.....	80
9.2 Приклад виконання лабораторної роботи 4	81
9.2.1 Розв'язання замкнутої транспортної задачі	81
9.2.2 Розв'язання замкнутої задачі за допомогою пакету Maple	84
9.2.3 Розв'язання відкритої транспортної задачі	85
9.2.4 Розв'язання відкритої задачі за допомогою пакету Maple	89
9.3 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 4	90
10 ЗАДАЧА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ	92
10.1 Задача типу 1: a_{ij} – витрати продукції	93
10.2 Задача типу 2: a_{ij} – витрати в грошовому вираженні.....	94
11 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5. ЗАДАЧА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ	95
11.1 Завдання до лабораторної роботи 5.....	95
11.2 Приклад виконання лабораторної роботи 5	96
11.2.1 Приклад 1 (a_{ij} – витрати в грошовому вираженні).....	96
11.2.2 Розв'язання задачі за допомогою пакету Maple.....	97
11.2.3 Приклад 2 (a_{ij} – витрати продукції)	98
11.2.4 Розв'язання задачі за допомогою пакету Maple.....	100
11.3 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 5	100
11 ЗАДАЧА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	105

11.1 Теоретичні відомості	105
11.2 Приклад розв'язання задачі нелінійного програмування в пакеті Maple	108
12 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	113
12.1 Завдання до лабораторної роботи 6	113
12.2 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 6.....	113
13 САМОСТІЙНА РОБОТА	116
13.1 Завдання до самостійної роботи	116
13.2 Індивідуальні завдання до самостійної роботи	116
Варіант 1	116
Варіант 2	118
Варіант 3	119
Варіант 4	121
Варіант 5	122
Варіант 6	123
Варіант 7	125
Варіант 8	126
Варіант 9	128
Варіант 10	129
Варіант 11	131
Варіант 12	132
Варіант 13	133
Варіант 14	135
Варіант 15	136
ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ	138
Варіант 1	138
Варіант 2	138
Варіант 3	139
Варіант 4	139
Варіант 5	140
Варіант 6	140
Варіант 7	141
Варіант 8	141
Варіант 9	142
Варіант 10	142
Варіант 11	143
Варіант 12	144
Варіант 13	144

Вариант 14	145
Вариант 15	145
Вариант 16	146
Вариант 17	146
Вариант 18	147
Вариант 19	147
Вариант 20	148
Вариант 21	148
Вариант 22	149
Вариант 23	149
Вариант 24	150
Вариант 25	150
Вариант 26	151
Вариант 27	151
Вариант 28	152
Вариант 29	152
Вариант 30	153
Вариант 31	154
Вариант 32	154
Вариант 33	155
Вариант 34	156
Вариант 35	157
Вариант 36	157
Вариант 38	159
Вариант 39	160
Вариант 40	160
Вариант 41	161
Вариант 42	162
Вариант 43	163
Вариант 44	163
Вариант 45	164
Вариант 46	164
Вариант 47	165
Вариант 48	165
Вариант 49	166
Вариант 50	167
Вариант 51	167
Вариант 52	168
Вариант 53	168
Вариант 54	169
Вариант 55	169

Варіант 56	170
Варіант 57	170
Варіант 58	171
Варіант 60	172
ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ	174
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ З КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.....	175
Варіант 1	175
Варіант 2	175
Варіант 3	175
Варіант 4	176
Варіант 5	176
Варіант 6	177
ДОДАТОК А ПАКЕТ MAPLE	178
Декотрі дані про роботу в пакеті Maple	178
Команди «=» и «:=». Відміна присвоювання	178
Функція користувача. Обчислення значень функції	179
Побудова графіка функції	180
Текст на графіку	183
Сполучення графіків і написів	183
Побудова графічного розв'язання системи нерівностей	184
Розв'язок рівнянь, нерівностей и систем рівнянь і нерівностей	186
Знаходження максимуму (мінімуму) лінійної функції	187
Знаходження екстремумов функцій в пакеті Maple	187
ДОДАТОК Б РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ПАКЕТІ EXCEL FOR WINDOWS	189
Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 1	189
Графічне розв'язання задачі ЛП	192
Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 2	194
Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 3	197
Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 4	201
Розв'язання замкнутої транспортної задачі	201
Розв'язання відкритої транспортної задачі	205
Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 5	209
Приклад розв'язання задачі НЛП з лабораторної роботи № 6.....	212
ДОДАТОК В ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ЗА ДОПОМОГОЮ MATHCAD	215
Загальні положення пакету MathCad.....	215

Прості арифметичні обчислення	218
Табулювання функцій	220
Форматування результатів	221
Побудова графіків функцій у декартовій системі координат	221
Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 1	226
Графічне розв'язання задачі ЛП	227
Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 2	229
Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 4	231
Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 5	235
Приклад розв'язання задачі НЛП з лабораторної роботи № 6	236
ЛІТЕРАТУРА.....	238

ВСТУП

Сучасний економіст повинний знати і вміти використовувати в повсякденній роботі новітні економіко-математичні методи і моделі.

Традиційний спосіб вивчення економіко-математичних моделей полягав у визначенні їхнього призначення і суті, в освоєнні техніки "ручної" реалізації. Щоб зробити доступною "ручну" реалізацію, об'єм оброблюваних даних доводилося максимально скорочувати. З одного боку, це найчастіше віддаляє побудовану модель від реальності, а з іншого боку – знижує ефективність застосування досліджуваних методів.

Використання комп'ютерних технологій звільняє економістів від необхідності спрощувати економічні моделі, рятує їх від рутинної обчислювальної роботи з реалізації математичних методів, дозволяє сконцентрувати увагу не на алгоритмі обчислення, а безпосередньо на аналізі результатів моделювання. Очевидно, що ефективність вивчення предмета стає істотно вище, якщо в економіста є можливість самостійно швидко "програти" варіанти моделей, змінити їхні параметри, порівнявши в графічній і числовій формі результати використання декількох методів.

Однак жодна комп'ютерна технологія ні в даний час, ні в доступному для огляду майбутньому не в змозі вирішити довільно сформульовану змістовну задачу з якого б ні було розділу математики, економіки або техніки. Ця процедура формалізації задачі і є творча складова процесу розв'язання будь-якої задачі, що в даний час доступна тільки людині.

Тому даний учбовий посібник побудовано на наступних принципах:

- виклад коротких теоретичних відомостей, необхідних для розуміння процесу формалізації задач лінійного програмування.
- розгляд процесу формалізації для визначених класів задач у загальному вигляді і на конкретних прикладах.
- індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів.
- загальні принципи і приклади використання різних комп'ютерних технологій для розв'язання формалізованих задач.

В цьому посібнику задачі розв'язуються за допомогою програм *Maple*, *Excel for Windows* і *MathCad*.

У Додатку А розглянуті правила та команди роботи у пакеті *Maple*. Для кожної лабораторної роботи наведено приклад розв'язання задачі. Це допоможе оволодіти основами роботи з пакетом.

У Додатку Б розглянуті правила та команди роботи у *Excel for Windows*. Для кожної лабораторної роботи наведено приклад розв'язання задачі.

У Додатку В розглянуті правила та команди роботи у пакеті *MathCad*. Для кожної лабораторної роботи наведено приклад розв'язання задачі.

1 ПРЕДМЕТ "МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ"

В економічній практиці доволі часто виникають такі питання:

як організувати виробництво продукції, щоб отримати максимальний прибуток, у той же час не перебільшити затрати існуючих ресурсів;

як з мінімальними затратами з наявних видів сировини одержати шляхом змішування новий продукт (наприклад, бензин, металевий сплав і т. ін.) із заданими технічними й іншими характеристиками;

як організувати доставку товарів чи сировини в декілька пунктів з найменшими затратами та подібні.

Таким чином у практиці економічного планування на будь-якому його рівні виникає необхідність вибору оптимального варіанта серед різних варіантів плану.

Однак, як правило, інтуїція і досвід планування виявляються тут недостатніми. Тому в плануванні необхідні точні методи, що дають можливість зіставляти різні варіанти плану і вибирати оптимальний варіант. Один з методів, що полегшує перебір оптимальних варіантів плану, це так називане математичне програмування.

Математичне програмування – розділ математики, що розробляє теорію і чисельні методи розв’язання задач на екстремум функції багатьох змінних з обмеженнями на область зміни цих змінних.

Термін «програмування» (від англійського «programming» – складання плану або програми дій) тут треба розуміти як «пошук найкращих планів», на відміну від того тлумачення, яке прийняте спеціалістами з програмного забезпечення – складання програм для ПЕОМ.

При вивченні математичного програмування потрібне знання загального курсу вищої математики, математичної статистики і математичного апарату для розв’язання задач економіки і планування, а також вміння користуватися ПЕОМ. Оскільки цей навчальний посібник орієнтований на студентів і аспірантів економічних спеціальностей, які у своїй діяльності зустрічаються з математичними методами як користувачі, далі будуть наведені тільки короткі теоретичні відомості, а більше уваги приділено практичним задачам.

Основні поняття, якими оперує математичне програмування, такі.

Функцію, екстремальне значення якої треба знайти в умовах заданих економічних можливостей, називають цільовою функцією або критерієм оптимальності.

Економічні можливості записуються (формалізуються) у вигляді системи обмежень.

Сукупність невідомих величин (x_1, \dots, x_n) , змінюючи які, можна вдосконалювати систему, називають планом задачі.

Приведені вище поняття складають математичну модель задачі.

Математична модель – відображення реального економічного процесу або об'єкту засобами математики (у вигляді функцій, рівнянь, нерівностей і т. ін.).

В загальному вигляді математична модель записується так:

Знайти план $x = (x_1, \dots, x_n)$, який доставляє екстремальне значення цільової функції F , тобто

$$F = F(x_1, \dots, x_n)$$

при заданих обмеженнях

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = 1..m.$$

Зазвичай, із економічних міркувань $x_j \geq 0, j = 1..n$.

Задачі математичного програмування класифікують в залежності від особливостей цільової функції і системи обмежень.

Якщо цільова функція $F(x)$ і функції $\varphi_i(x), i = 1..m$ є лінійними, то це задача лінійного програмування (ЛП).

Якщо хоча б одна з функцій, що входять в математичну модель ($F(x), \varphi_i(x)$) нелінійна, то це задача нелінійного програмування (НЛП).

Якщо хоча б одна із змінних за умовою задачі повинна бути цілим числом, то це задача цілочислового програмування (ЦП).

Якщо параметри цільової функції і/або системи обмежень змінюються у часі, то такі задачі вирішують за допомогою методів динамічного програмування (ДП).

Методи розв'язання наведених вище задач оперують з детермінованими математичними моделями, які відображують поведінку об'єкту з позицій повної визначеності у сучасному і майбутньому.

Якщо параметри, що входять у цільову функцію або функції-обмеження, є випадковими величинами, або треба приймати розв'язання в умовах неповної і недостовірної інформації, то говорять про стохастичне програмування (СП).

Задачі, у яких треба знайти розв'язання за кількома цільовими функціями, називають задачами багатокритеріальної оптимізації.

2 ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Для початку розглянемо розділ математичного програмування – лінійне програмування, де розглядаються тільки лінійні функції, що спрощує знаходження розв'язання.

У загальному вигляді сутність лінійного програмування можна сформулювати в такий спосіб:

Є n змінних x_1, x_2, \dots, x_n . Визначити максимум (чи мінімум) наступної лінійної функції, яку називають цільовою функцією, цих змінних:

$$F = \sum_{i=1}^n c_i x_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n. \quad (1)$$

При рішенні задачі на максимум економічний зміст функції F може бути таким:

x_i – кількість виробів, що випускаються, i -го виду, $i = 1, \dots, n$;

c_i – ціна одиниці виробу i -го виду, $i = 1, \dots, n$;

F – сумарна ціна виробів, що випускаються.

При рішенні аналогічної задачі на мінімум: c_i – виробничі витрати (у грошовому вираженні) на одиницю виробу, що випускається, i -го виду, $i=1, \dots, n$; F – сумарні витрати.

Пошук екстремуму цільової функції F зв'язаний з необхідністю мінімізувати витрати (грошові, сировинні) чи максимізувати прибуток, вартість зробленої продукції і т. і. При цьому повинні задовольнятися наступні умови, що називаються системою лінійних обмежень (СОБ) задачі.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \quad (2)$$
$$x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, n).$$

Умови СОБ (2) відображують обмеженість наявних ресурсів (матеріальних, грошових, часових, виробничих потужностей і т. п.).

Вектор $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, компоненти якого задовольняють обмеженням задачі, будемо називати планом або припустимим розв'язанням задачі лінійного програмування.

Усі припустимі розв'язання утворюють область розв'язання задачі лінійного програмування.

Припустиме розв'язання, що максимізує (мінімізує) цільову функцію, називається оптимальним планом задачі.

Розв'язання такого роду задач і складає предмет лінійного програмування. Термін "лінійне програмування" вказує, що розв'язання полягає у визначенні оптимального плану, причому в математичному вираженні цих задач фігурують тільки лінійні рівняння і лінійні нерівності.

Розв'язання задачі лінійного програмування складається з трьох основних етапів:

- а) складання математичної моделі (формалізація задачі);
- б) розв'язання формалізованої задачі;
- в) аналіз отриманого оптимального розв'язання.

Формалізація задачі починається з вибору змінних, сукупність числових значень яких однозначно визначає один з варіантів плану. При цьому варто мати на увазі, що в більшості випадків від вдалого вибору цих змінних залежить простота моделі і, отже, зручність подальшого її аналізу. Після вибору змінних необхідно скласти за текстом задачі систему обмежень, якій ці змінні повинні задовольняти. При цьому потрібно стежити, щоб у модель були включені всі обмежувальні умови й в той же час не було ні одного зайвого обмеження або обмеження, записаного в неадекватній формі (тобто не слід писати в СОБ знак "<" замість " \leq " і навпаки).

Нарешті, складається цільова функція, що у математичній формі відображує критерій вибору кращого варіанта.

Метод розв'язання формалізованої задачі залежить від її розмірності. Якщо кількість змінних дорівнює двом ($n = 2$), то задача називається плоскою і може бути вирішена графічно. Контроль правильності розв'язання в даному випадку варто проводити, вирішуючи задачу на ЕОМ. Для багатомірних задач ($n \geq 3$) графічний метод розв'язання не можна застосовувати. У цьому випадку і розв'язання задачі, і контроль правильності розв'язання виконується за допомогою ПЕОМ.

3 МАТРИЧНИЙ ЗАПИС ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Задачу лінійного програмування зручно подати в матричній формі. Визначимо основні поняття.

Матриця $\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – таблиця, що складається з

m рядків і n стовпців; $m \times n$ – розмірність матриці.

Вектор $\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – стовпець з n елементів, його можна подати як ма-

трицю $X(n \times 1)$.

Деякі дії над матрицями:

1 Транспонування

Транспонована матриця \mathbf{A}^T отримана з матриці \mathbf{A} заміною рядків на стовпці:

$$\mathbf{A}_{n \times m}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & & \dots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця-рядок $(y_1 \ \dots \ y_n)$ може бути подана як транспонований вектор-стовпець – $\bar{Y}^T = (y_1 \ \dots \ y_n)$.

2 Порівняння матриць

Порівнюються матриці однакової розмірності.

Дві матриці називаються рівними, якщо в них рівні відповідні елементи: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$.

Матриця A не більше матриці B ($A \leq B$), якщо для всіх елементів матриць виконується нерівність $a_{ij} \leq b_{ij}$.

3 Множення матриць

Скалярний добуток векторів:

$$\bar{Y}^T \cdot \bar{X} = y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n = \sum_{i=1}^n y_ix_i.$$

Множення можливе лише для матриць, що мають наступну властивість: кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці: $A \cdot B = C$.

$$\begin{matrix} n \times p & p \times t & n \times t \end{matrix}$$

Елемент матриці c_{ij} — скалярний добуток i -ого рядка матриці A на j -й стовпець матриці B .

На основі цих понять запишемо задачу лінійного програмування в матричному вигляді.

Дана задача:

$$F = \sum_{i=1}^n c_ix_i = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (\max);$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

У матричному вигляді ця задача запишеться так:

$$F = \bar{C}^T \cdot \bar{X} \quad (\max).$$

$$A \cdot \bar{X} \leq \bar{B},$$

$$\bar{X} \geq \bar{0}.$$

3.1 Приклад запису задачі лінійного програмування в матрично-му вигляді

Дана формалізована задача лінійного програмування.

$$\begin{aligned} F &= 5x_1 + 3x_2 - x_3 \quad (\max). \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 \geq 9, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Перш ніж переходити до матричного запису, перетворимо задачу так, щоб у системі обмежень усі нерівності були одного знака. Якщо для цільової функції шукають максимум, то обмеження повинні мати знак « \leq ».

Ті нерівності, у яких знак « \geq », помножимо на (-1) . Одержимо задачу:

$$\begin{aligned} F &= 5x_1 + 3x_2 - x_3 \quad (\max). \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq -9, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Випишемо вектори і матрицю:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

У матричному вигляді

$$\begin{aligned} F &= \bar{C}^T \cdot \bar{X} \quad (\max). \\ \mathbf{A} \cdot \bar{X} &\leq \bar{B}, \\ \bar{X} &\geq \bar{0}. \end{aligned}$$

4 ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У випадку, коли в задачі фігурують тільки дві змінні, задача лінійного програмування може бути вирішена геометричним способом.

Дано систему m лінійних нерівностей із двома невідомими x_1, x_2 :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{cases} \quad (3)$$

Дано лінійну функцію:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2, \quad (4)$$

Причому

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (5)$$

Потрібно серед усіх рішень системи (3), (5) знайти таке, котре максимізує функцію (4).

Системи обмежень (3) і (5) задають на площині опуклий багатокутник M , причому умови (5) свідчать про те, що він розташований у першій чверті (рис.1). Цей багатокутник називається областю рішень задачі.

Зауваження: при неправильно сформульованій задачі область розв'язання може виявитися порожньою або необмеженою.

Отже, задача може бути сформульована так: серед усіх точок області M знайти таку, координати якої максимізують функцію F .

Доведено, що функція (4) не може досягати екстремального значення в жодній внутрішній точці області M , значить розв'язання задачі (4) при умовах (3) і (5) варто шукати на границі цієї області.

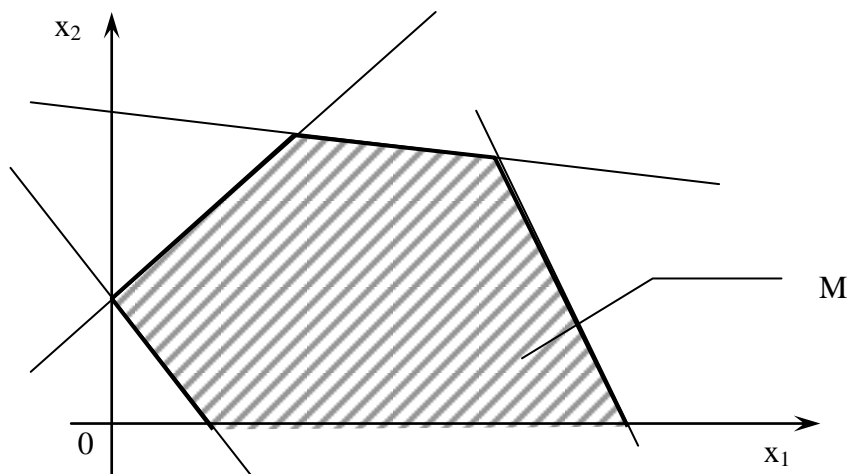


Рисунок 1 – Область розв'язання системи лінійних обмежень

Якщо дорівняти вираження для функції F який-небудь постійний C :

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = C, \quad (6)$$

то одержимо рівняння прямої лінії, у точках якої функція F приймає те саме фіксоване значення C .

Відомо, що значення функції F зростають у напрямку вектора градієнта:

$$\overline{\text{grad } F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2),$$

і спадають у напрямку, протилежному напрямку градієнта.

Виходить, остання точка області, що перетинає пряма (6) при русі в напрямку градієнта, є точкою максимуму (т.К на рис.2).

Остання точка області, що перетинає пряма (6) при русі в напрямку, протилежному напрямку градієнта, є точкою мінімуму (т.Н на рис.2).

Координати оптимальної точки знаходимо, вирішуючи систему рівнянь прямих, що перетинаються в цій точці.

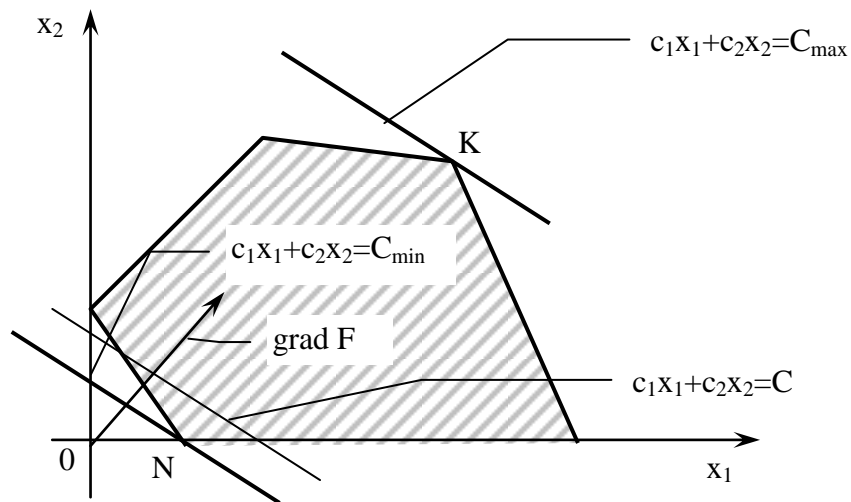


Рисунок 2 – Знаходження максимуму і мінімуму цільової функції графічним методом

4.1 Різні випадки, що зустрічаються при рішенні задач лінійного програмування

Передбачається, що область D , обумовлена СОБ, не порожня.

1 Область D обмежена. Розв'язання існує і єдине.

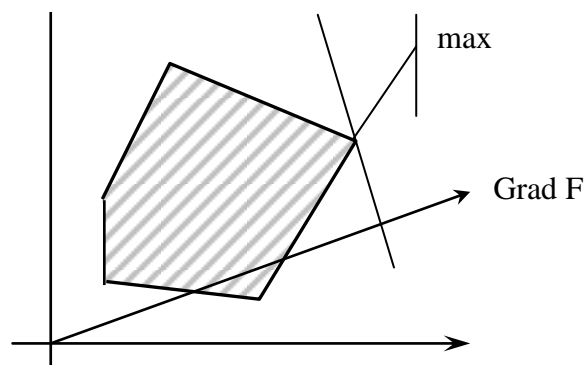


Рисунок 3

2 Область D необмежена. Розв'язання (max) існує і єдине.

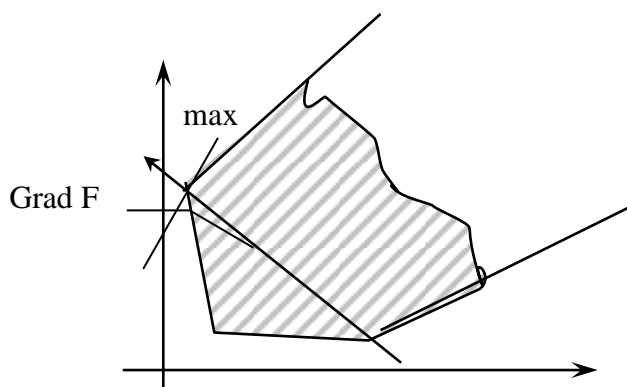


Рисунок 4

3 Область D обмежена, градієнт перпендикулярний стороні M_1M_2 . У цьому випадку існує нескінченна безліч рішень, що складаються з координат точок відрізка $[M_1, M_2]$.

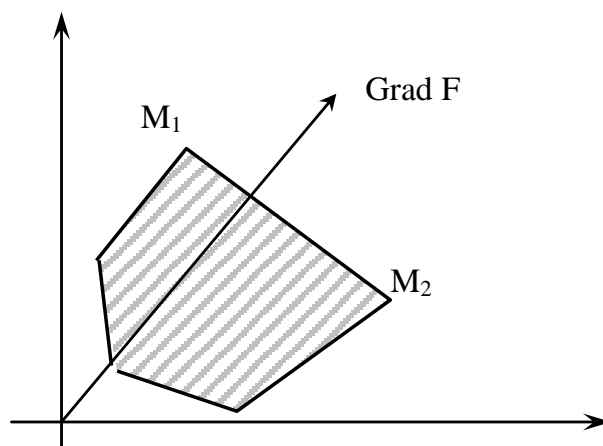


Рисунок 5

4 Область D необмежена, цільова функція необмежена. Розв'язання не існує.

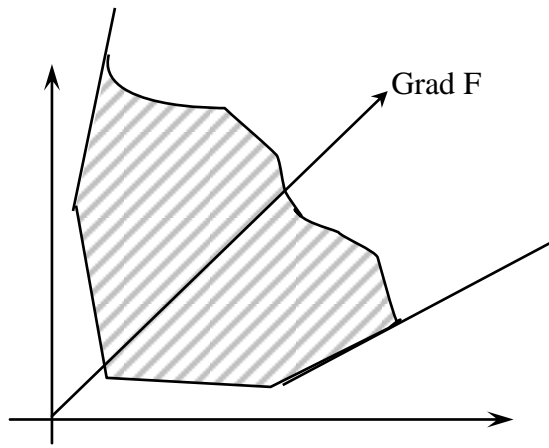


Рисунок 6

5 Особливий випадок складають так називані погано обумовлені задачі, коли пряма $F=c_1x_1+c_2x_2$ майже співпадає з однією зі сторін багатокутника. Тоді найменша погрішність у визначенні коефіцієнтів приводить до дуже великої погрішності у відповіді.

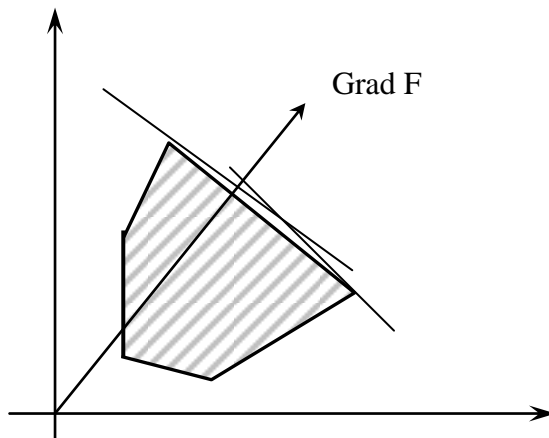


Рисунок 7

Існують спеціальні алгоритми для розв'язання погано обумовлених задач. Для перевірки, чи не є ваша задача погано обумовленою, потрібно вирішити її двічі: один раз з її коефіцієнтами $C=(c_1, c_2, \dots, c_n)$, а другого разу з коефіцієнтами, злегка зміненими, $C=(c_1+e_1, c_2+e_2, \dots, c_n+e_n)$. Якщо задача не є погано обумовленою, то зміни у відповіді того ж порядку, що і

для коефіцієнтів (наприклад, $\sim 1\%$). Якщо ж задача погано обумовлена, то змінивши в умові c_i на кілька відсотків, одержимо відповідь, що відрізняється від вихідного на десятки або навіть сотні відсотків.

Зауваження: у випадку задачі трьох і більше невідомих із принципової сторони справа обстоїть зовсім так само, як у випадку двох невідомих. Однак вже в 3-мірному випадку, як правило, геометричне тлумачення задачі не може бути основою для її розв'язання. У кращому випадку воно відіграє допоміжну роль. Однак якісно картина не змінюється, тобто розв'язання задачі може бути єдиним, задача може мати нескінченну безліч рішень, розв'язання задачі може бути необмеженим.

5 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. ГРАФІЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Тема. Запис задачі лінійного програмування в матричній формі. Графічне розв'язання задачі.

Мета лабораторної роботи

Мають бути придбані наступні **вміння**: запис задачі лінійного програмування в матричній формі; вибір методу розв'язання формалізованої задачі; побудова області припустимих рішень; знаходження за графіком оптимального значення цільової функції.

Мають бути засвоєні наступні **поняття**: оптимальний план, припустиме розв'язання, цільова функція, система обмежень, область припустимих рішень, добре і погано обумовлені задачі.

Робота розрахована на 8 годин.

5.1 Приклад графічного розв'язання формалізованої двовимірної задачі лінійного програмування

Перш ніж розглянути приклад графічного розв'язання задачі лінійного програмування, розглянемо графічне розв'язання нерівності і системи нерівностей.

Графічне розв'язання нерівності

Приклад 1

Нехай дана нерівність $x_1 + 2x_2 \leq 4$. Вирішимо цю нерівність графічно.

1 Побудуємо на площині рівняння прямої, що відповідає нерівності $x_1 + 2x_2 = 4$. Для побудови прямої досить знати дві довільні точки, що належать цій прямій. Знайдемо ці точки.

Для цього візьмемо довільне значення x_1 , наприклад, $x_1 = 0$ та підставимо у рівняння. Тоді $0 + 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2$. Перша точка $(0; 2)$. Візьмемо друге x_1 , наприклад, $x_1 = 4$ та підставимо у рівняння. Тоді $4 + 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 0$. Друга точка $(4; 0)$. Маємо дві точки на координатній площині, через які проводимо пряму (рис.8).

x_1	x_2
0	2
4	0

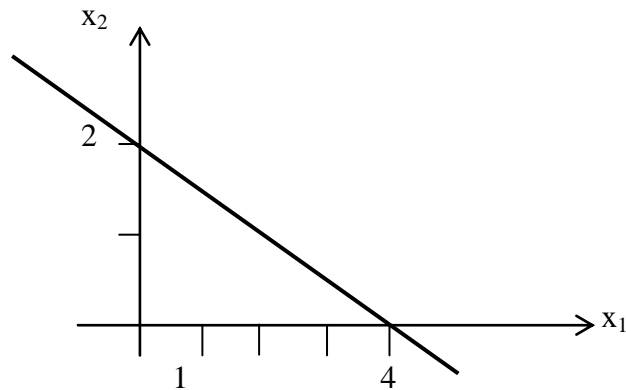


Рисунок 8

2 Пряма розбиває площину на дві напівплощини. Розв'язанням нерівності є одна з напівплощин. Підставимо в нерівність довільну точку площини (найпростіше, точку $(0; 0)$). Якщо нерівність вірна, то розв'язанням є напівплощина, що містить цю точку. Якщо нерівність невірна, то розв'язанням є інша напівплощина. На рисунку напівплощину-розв'язання показують штрихуванням (рис.9).

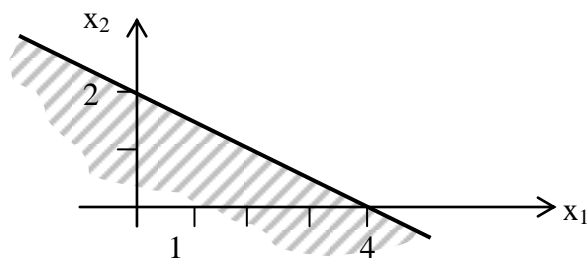


Рисунок 9

Підставимо в нашу нерівність точку $(0; 0)$: $0 \leq 4$ – вірно. Значить розв'язанням нерівності буде напівплощина, що містить цю точку.

Тепер вирішимо графічно систему нерівностей

Дано систему нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для того, щоб вирішити графічно систему нерівностей, потрібно вирішити графічно кожену нерівність. Пронумеруємо нерівності:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 & (1), \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70 & (2), \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20 & (3), \\ x_1 \geq 0 & (4), \\ x_2 \geq 0 & (5). \end{cases}$$

Нерівності (4) і (5) показують, що область рішень системи знаходиться в першій чверті координатної площини.

Вирішимо графічно нерівності (1), (2) і (3). Областю рішень системи нерівностей буде та область площини, у якій перетинаються напівплощини рішень кожної нерівності. У нашому прикладі областю розв'язання системи нерівностей є багатокутник ABCDE (рис. 10).

$$1 \quad x_1 + 3x_2 = 6$$

x_1	x_2
0	2
6	0

$$T.(0;0) \Rightarrow 0 \geq 6 - \text{невірно.}$$

$$2 \quad 7x_1 + 10x_2 = 70$$

x_1	x_2
0	7
10	0

$T.(0;0) \Rightarrow 0 \leq 70$ – вірно.

$$3 \ 4x_1 - 5x_2 = -20$$

x_1	x_2
0	4
5	8

$T.(0;0) \Rightarrow 0 \geq -20$ – вірно.

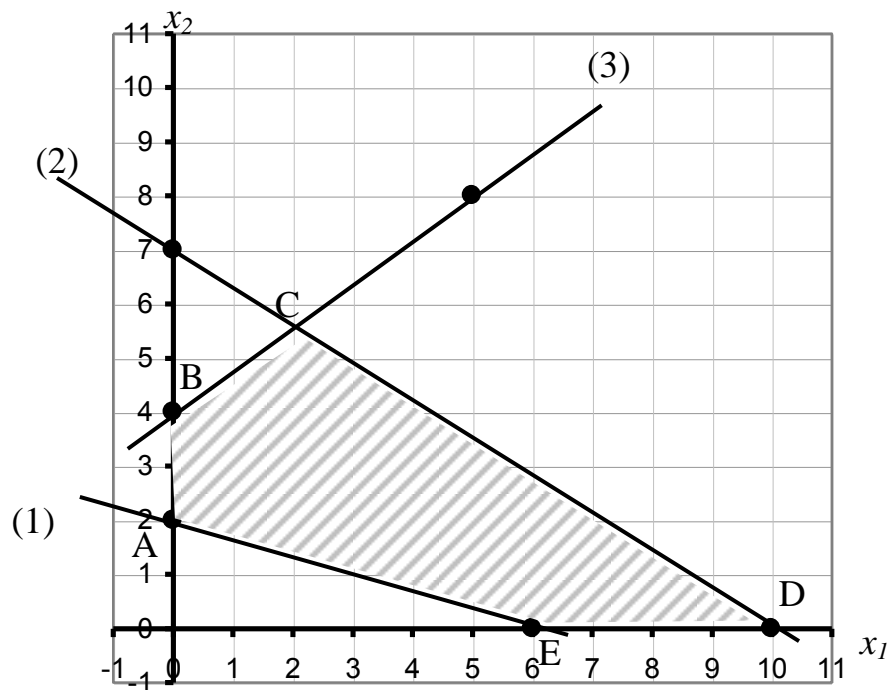


Рисунок 10 – Побудова області розв’язання системи нерівностей

5.2 Графічне розв’язання задачі лінійного програмування

Приклад 2

Нехай необхідно знайти (x_1, x_2) , при яких функція $F = 2x_1 + x_2$ досягає максимуму, причому x_1, x_2 повинні задовольняти наступній системі обмежень (СОБ):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання:

1 Будуємо область рішень системи обмежень. Область рішень – багатокутник ABCDE, побудова якого відбулася раніше. (рис. 11).

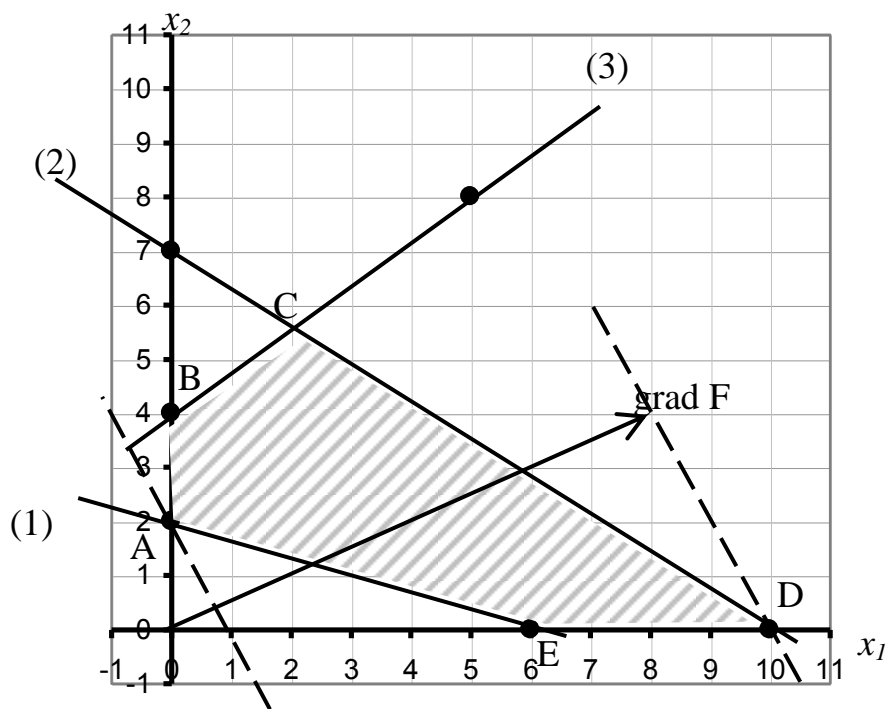


Рисунок 11 – Приклад графічного розв'язання задачі лінійного програмування

2 Знаходимо градієнт функції F : $\overline{gradF} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (2; 1)$

Будуємо вектор з початком у точці (0; 0) і кінцем у точці (2; 1).

Примітка: вектор можна збільшувати, чи зменшувати пропорційно:

$$\overline{gradF} = (2; 1) = (8; 4)$$

3 Будуємо пряму, перпендикулярну вектору градієнта. Пересуваємо цю пряму в напрямку, зазначеному вектором. Остання точка області, що перетинає пряма і є точкою максимуму. У даному випадку це точка D.

4 Знаходимо координати точки максимуму Ця точка лежить на перетинанні прямих (2) і $x_2 = 0$. Вирішуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Одержали: $x_{1\max} = 10$; $x_{2\max} = 0$.

5 Визначимо максимальне значення цільової функції:

$$F_{\max} = 2 \cdot 10 + 0 = 20.$$

Відповідь: максимального значення $F=20$ цільова функція досягає в точці (10; 0).

Розглянемо іншу задачу:

$$F = 2x_1 + x_2 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача відрізняється від попередньої тим, що необхідно знайти такі (x_1, x_2) , при яких функція F досягає мінімуму при даній системі обмежень.

Розв'язання повторює попереднє, крім наступного моменту: пряму пересувають у напрямку, протилежному зазначеному вектором.

Для цього прикладу мінімум досягається в точці A. Ця точка лежить на перетинанні прямих (1) і $x_1 = 0$. Вирішуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Одержали: $x_{1\min} = 0$; $x_{2\min} = 2$.

Визначимо мінімальне значення цільової функції:

$$F_{\min} = 2 \cdot 0 + 2 = 2.$$

Відповідь: мінімального значення $F=2$ цільова функція досягає в точці $(0; 2)$.

5.3 Розв'язання задачі лінійного програмування у пакеті Maple

Примітка. Команди виділені **напівжирним** шрифтом, пояснення змісту команд – звичайним шрифтом, результати виконання команд – *курсивом*.

Побудуємо спочатку область рішень СОБ.

Команда очищення пам'яті:

> restart:

Вводимо функцію та нерівності з СОБ

> F := 2 * x1 + x2;

$$F := 2 x1 + x2$$

> g1 := x1 + 3 * x2 >= 6; g2 := 7 * x1 + 10 * x2 <= 70; g3 := 4 * x1 - 5 * x2 >= -20;

$$g1 := 6 \leq x1 + 3 x2$$

$$g2 := 7 x1 + 10 x2 \leq 70$$

$$g3 := -20 \leq 4 x1 - 5 x2$$

Команди підключення бібліотек розширеної графіки:

> with (plots):

Команда побудови області рішень:

```
>ris1:= inequal({g1,g2,g3, x1>=0, x2>=0}, x1=0..10, x2=0..10,
optionsexcluded = (color = white )):
>ris1;
```

Результат виконання цієї команди – на рис. 12.

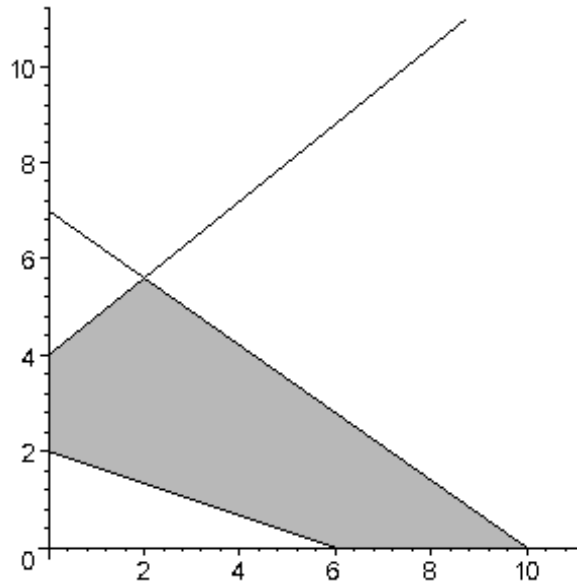


Рисунок 12

Примітка. Для вірного масштабу треба виділити графік та натиснути кнопку **1:1** на панелі інструментів Maple

Знайдемо точку максимуму цільової функції.

Команда підключення бібліотеки симплекс-програм:

```
> with(simplex):
```

Warning, new definition for maximize

Warning, new definition for minimize

Команда розв'язання задачі ЛП симплекс-методом:

```
> maximize(F, {g1,g2,g3} union {x1 >= 0, x2 >= 0});
{x1 = 10, x2 = 0.5}
```

Команди присвоєння змінним x1,x2 знайдених значень:

> x1 := 10: x2 := 0:

Команда обчислення значення цільової функції та значень системи обмежень в точці максимуму:

> F_max := F; g1; g2; g3; x1 := 'x1': x2 := 'x2':

$$F_{max} := 20$$

$$6 \leq 10$$

$$70 \leq 70$$

$$-20 \leq 40$$

Відповідь: максимального значення цільова функція $F=20$ досягає в точці (10; 0). Це співпадає з “ручним” розрахунком.

Примітка: мінімум знаходиться відповідно:

> minimize(F, {g1,g2,g3} union {x1 >= 0, x2 >= 0});

$$\{x1 = 0, x2 = 2\}$$

> x1 := 0: x2 := 2:

> F_min := F; g1; g2; g3; x1 := 'x1': x2 := 'x2':

$$F_{min} := 2$$

$$6 \leq 6$$

$$20 \leq 70$$

$$-20 \leq -10$$

Зауваження. Після розв’язання задачі, можна на одному малюнку побудувати розв’язання системи СОБ, градієнт функції, пряму в точці максимуму та мінімуму.

Команда побудови графіка цільової функції: (Примітка. Якщо цільова функція $F = 2x_1 + x_2$ у точці максимуму дорівнює 20, то цільова пряма, що проходить через точку максимуму, має рівняння: $x_2 = (20 - 2x_1)/1$.

>ris2 := plot((20 - 2 * x1)/1,x1 = 0..11, x2 = 0..11, color = black, thickness = 2):

Команда побудови градієнту:

> ris3 := plottools[arrow] ([0,0], [8,4], .1, 0.6, .1):

Команда підпису точки максимуму з координатами $x_1=10$, $x_2=0$:

> ris4 := textplot([10,0,'max'], align = {ABOVE, RIGHT}):

>ris5:=plot((2-2*x1) /1,x1=0..11,x2=0..11,color=black,thickness=2):

> ris6:=textplot([0,2,'min'],align={ABOVE,RIGHT}):

Команда побудови на однім малюнку області рішень, градієнту і графіка цільової функції:

> display(ris1,ris2,ris3,ris4,ris5,ris6);

Результат виконання цієї команди – на рис. 13.

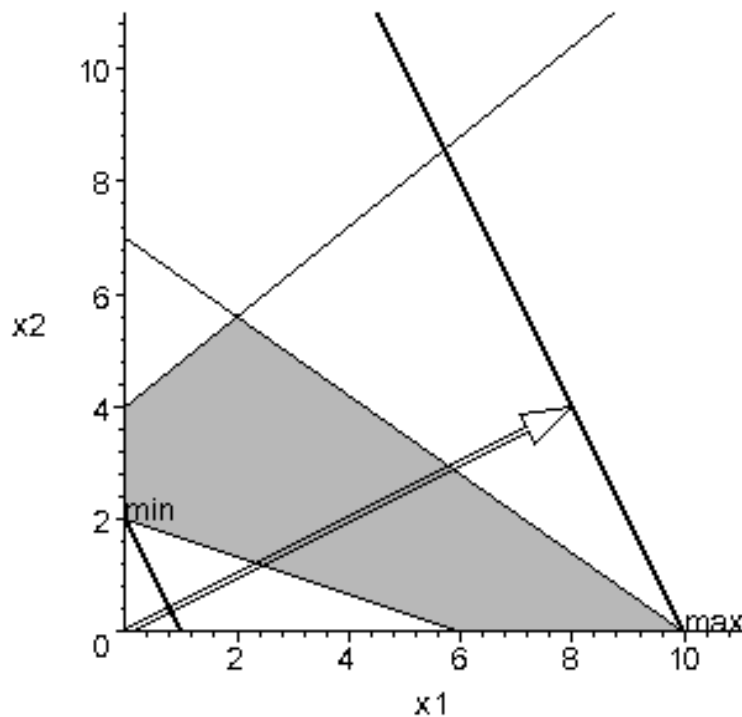


Рисунок 13

5.4 Завдання до лабораторної роботи 1

Вирішити графічно формалізовану задачу лінійного програмування (табл. 1). Записати задачу в матричній формі.

Таблиця 1 – Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 1

<p><i>Варіант 1</i></p> $-x_1+x_2 \leq 3$ $5x_1+3x_2 \leq 97$ $x_1+7x_2 \geq 77$ $f=3x_1+4x_2$ (max).	<p><i>Варіант 2</i></p> $10x_1-x_2 \geq 57$ $2x_1+3x_2 \leq 53$ $6x_1-7x_2 \leq 15$ $f=5x_1+x_2$ (max).	<p><i>Варіант 3</i></p> $-4x_1+5x_2 \leq 29$ $3x_1-x_2 \leq 14$ $5x_1+2x_2 \geq 38$ $f=3x_1+2x_2$ (max).	<p><i>Варіант 4</i></p> $-3x_1+14x_2 \leq 78$ $5x_1-6x_2 \leq 26$ $x_1+4x_2 \geq 26$ $f=5x_1+7x_2$ (max).
<p><i>Варіант 5</i></p> $x_1+4x_2 \leq 53,$ $x_1-x_2 \leq 3,$ $7x_1+3x_2 \geq 71;$ $f=9x_1+2x_2$ (max).	<p><i>Варіант 6</i></p> $3x_1-x_2 \geq 9,$ $2x_1+x_2 \leq 50,$ $-x_1+4x_2 \geq 19;$ $f=x_1+5x_2$ (max).	<p><i>Варіант 7</i></p> $6x_1-5x_2 \geq 17,$ $x_1+2x_2 \leq 34,$ $-4x_1+9x_2 \geq 17;$ $f=5x_1+3x_2$ (min).	<p><i>Варіант 8</i></p> $11x_1-3x_2 \geq 24,$ $9x_1+4x_2 \leq 110,$ $-2x_1+7x_2 \geq 15;$ $f=9x_1+2x_2$ (min).
<p><i>Варіант 9</i></p> $2x_1-x_2 \geq 4,$ $x_1+3x_2 \leq 37,$ $-4x_1+9x_2 \geq 20;$ $f=4x_1+3x_2$ (min).	<p><i>Варіант 10</i></p> $-x_1+x_2 \leq 3,$ $5x_1+3x_2 \leq 97,$ $x_1+7x_2 \geq 77;$ $f=7x_1+2x_2$ (min).	<p><i>Варіант 11</i></p> $-x_1+x_2 \leq 4,$ $5x_1+3x_2 \leq 92,$ $x_1+7x_2 \geq 76;$ $f=3x_1+4x_2$ (min).	<p><i>Варіант 12</i></p> $10x_1-x_2 \geq 47,$ $2x_1+3x_2 \leq 51,$ $6x_1-7x_2 \leq 9;$ $f=5x_1+x_2$ (min).
<p><i>Варіант 13</i></p> $-4x_1+5x_2 \leq 33,$ $3x_1-x_2 \leq 11,$ $5x_1+2x_2 \geq 33;$ $f=3x_1+2x_2$ (max).	<p><i>Варіант 14</i></p> $-3x_1+14x_2 \leq 81,$ $5x_1-6x_2 \leq 21,$ $x_1+4x_2 \geq 25;$ $f=5x_1+7x_2$ (max).	<p><i>Варіант 15</i></p> $x_1+4x_2 \leq 52,$ $x_1-x_2 \leq 2,$ $7x_1+3x_2 \geq 64;$ $f=9x_1+2x_2$ (max).	<p><i>Варіант 16</i></p> $3x_1-x_2 \geq 6,$ $2x_1+x_2 \leq 48,$ $-x_1+4x_2 \geq 20;$ $f=x_1+5x_2$ (max).
<p><i>Варіант 17</i></p> $6x_1-5x_2 \geq 11,$ $x_1+2x_2 \leq 33,$ $-4x_1+9x_2 \geq 21;$ $f=5x_1+3x_2$ (max).	<p><i>Варіант 18</i></p> $11x_1-3x_2 \geq 13,$ $9x_1+4x_2 \leq 101,$ $-2x_1+7x_2 \geq 17;$ $f=9x_1+2x_2$ (max).	<p><i>Варіант 19</i></p> $2x_1-x_2 \geq 2,$ $x_1+3x_2 \leq 36,$ $4x_1+9x_2 \geq 24;$ $f=4x_1+3x_2$ (min).	<p><i>Варіант 20</i></p> $-x_1+x_2 \leq 4,$ $5x_1+3x_2 \leq 92,$ $x_1+7x_2 \geq 77;$ $f=7x_1+2x_2$ (min).
<p><i>Варіант 21</i></p> $4x_1-x_2 \geq 6,$ $9x_1+8x_2 \leq 157,$ $-3x_1+11x_2 \geq 16;$ $f=x_1+x_2$ (min).	<p><i>Варіант 22</i></p> $3x_1-x_2 \geq 9,$ $2x_1+3x_2 \leq 50,$ $-x_1+4x_2 \geq 19;$ $f=6x_1+x_2$ (min).	<p><i>Варіант 23</i></p> $10x_1-x_2 \geq 57,$ $2x_1+3x_2 \leq 53,$ $6x_1-7x_2 \leq 15;$ $f=2x_1+3x_2$ (min).	<p><i>Варіант 24</i></p> $11x_1-3x_2 \geq 24,$ $9x_1+4x_2 \leq 110,$ $-2x_1+7x_2 \geq 15;$ $f=7x_1+x_2$ (min).

Продовження таблиці 1

<p>Варіант 25</p> $4x_1 - x_2 \geq 6,$ $9x_1 + 8x_2 \leq 157,$ $-3x_1 + 11x_2 \geq 16;$ $f = 8x_1 + 5x_2$ (max).	<p>Варіант 26</p> $-3x_1 + 14x_2 \leq 78,$ $5x_1 - 6x_2 \leq 26,$ $x_1 + 4x_2 \geq 26;$ $f = x_1 + 8x_2$ (max).	<p>Варіант 27</p> $2x_1 - x_2 \geq 4,$ $x_1 + 3x_2 \leq 37,$ $-4x_1 + 9x_2 \geq 20;$ $f = x_1 + 3x_2$ (max).	<p>Варіант 28</p> $6x_1 - 5x_2 \geq 17,$ $x_1 + 2x_2 \leq 34,$ $-4x_1 + 9x_2 \geq 20;$ $f = x_1 + 9x_2$ (max).
<p>Варіант 29</p> $-4x_1 + 5x_2 \leq 29,$ $3x_1 - x_2 \leq 14,$ $5x_1 + 2x_2 \geq 38;$ $f = 3x_1 + x_2$ (max).	<p>Варіант 30</p> $x_1 + 4x_2 \leq 53,$ $x_1 - x_2 \leq 3,$ $7x_1 + 3x_2 \geq 71;$ $f = x_1 + 7x_2$ (max).		

Звіт про лабораторну роботу повинен містити:

- 1 Тему роботи, завдання.
- 2 Запис задачі в матричній формі.
- 3 Графічне розв'язання задачі.
- 4 Висновки.

5 ПОДВІЙНІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

5.1 Поняття подвійності

Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність деяку іншу задачу лінійного програмування, яку називають *двоїстою* стосовно першої.

Цільова функція і система обмежень двоїстої задачі цілком визначаються умовою прямої задачі.

Вихідна і двоїста задачі утворюють пару взаємно двоїстих задач, і кожна з них можна розглядати як вхідну (пряму) задачу.

Виявляється, що, вирішуючи одну з задач, ми тим самим вирішуємо і другу. Теорія подвійності дозволяє, таким чином, розширити число задач лінійного програмування, розв'язання яких представляє теоретичний і практичний інтерес.

Найчастіше двоїсті задачі використовуються для перевірки правильності розв'язання прямої задачі, а також для аналізу розв'язання і вихідних даних.

5.2 Типи задач лінійного програмування

У лінійному програмуванні задачі в залежності від виду системи обмежень підрозділяються на три типи:

1 Стандартна задача:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\max).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\min).$$

$$\text{або} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким чином у стандартної задачі всі обмеження – нерівності (\geq чи \leq у залежності від цільової функції) і всі змінні невід’ємні.

2 Канонічна задача.

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\max).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким чином у канонічної задачі всі обмеження – рівності і всі змінні невід’ємні.

3 Загальна задача:

У загальній задачі деякі обмеження – рівності, деякі – нерівності, а також деякі змінні можуть приймати довільний знак.

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\max).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, l;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = l + 1, \dots, m;$$

$$l < m;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad k < n.$$

Останню нерівність варто розуміти так: змінні x_1, \dots, x_k невід’ємні, а змінні $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ можуть приймати довільний знак (тому що ніяких умов на їхні знаки в задачі немає).

У матричному вигляді загальну задачу подати не можна.

5.3 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі стандартного виду

У загальному вигляді запишемо:

Пряма задача:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\max).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Двоїста задача:

$$G = \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \quad (\min).$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\min).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$G = \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \quad (\max).$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Сформулюємо алгоритм побудови двоїстої задачі до прямої задачі стандартного виду в словесній формі

1 Кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі; кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі.

2 Вільні члени системи обмежень прямої задачі служать коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі, а коефіцієнти цільової функції прямої задачі – вільними членами системи обмежень двоїстої задачі.

3 Максимізація (мінімізація) цільової функції прямої задачі замінюється мінімізацією (максимізацією) цільової функції двоїстої задачі.

4 Матрицею системи обмежень двоїстої задачі служить матриця, отримана транспонуванням матриці системи обмежень прямої задачі.

5 Усі змінні двоїстої задачі невід'ємні: $y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$

5.4 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі канонічного виду

У загальному вигляді запишемо:

Пряма задача:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\max).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Двоїста задача:

$$G = \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \quad (\min).$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

Сформулюємо алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі канонічного виду в словесній формі

Двоїста задача до задачі канонічного виду будується за тим же алгоритмом, що і двоїста до задачі стандартного виду, відмінність в останньому пункті:

5 Усі змінні двоїстої задачі довільного знака (ніяких обмежень на знак змінних y_i , $i = 1, \dots, m$ не накладається).

5.5 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі загального виду

Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі загального виду збігається з алгоритмом побудови двоїстої задачі до задачі стандартного виду в пунктах 1-4. Пункт 5 алгоритму змінюється і стає таким:

5 Кожному обмеженню – нерівності прямої задачі відповідає невід’ємна змінна двоїстої задачі, а кожному обмеженню – рівності прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі довільного знака. Кожній невід’ємній змінній прямої задачі відповідає обмеження – нерівність двоїстої задачі, а кожній змінній довільного знака прямої задачі відповідає обмеження – рівність двоїстої задачі.

5.6 Приклад побудови двоїстої задачі для задачі загального типу

Дана задача лінійного програмування:

$$F = 2x_1 + 4x_3 - 5x_4 \quad (\max)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_4 \leq 12, \\ x_2 - 6x_3 - 3x_4 \geq 8, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Перш ніж будувати двоїсту задачу, перетворимо вхідну задачу. Тому що цільова функція максимізується, то всі обмеження–нерівності повинні мати знак \leq . Тому друге обмеження потрібно помножити на -1 . Одержимо систему обмежень виду:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_4 \leq 12, \\ -x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq -8, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Випишемо матрицю коефіцієнтів системи обмежень A , вектор вільних членів B і вектор коефіцієнтів цільової функції C :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Будуємо двоїсту задачу за пунктами:

1 Кількість обмежень прямої задачі дорівнює 3, тому кількість змінних двоїстої задачі дорівнює $3 - y_1, y_2, y_3$; кількість змінних прямої задачі дорівнює 4, тому кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює 4.

2 Вільні члени системи обмежень прямої задачі служать коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі (коефіцієнти цільової функції прямої задачі – вільними членами обмежень двоїстої задачі). Отже, цільова функція двоїстої задачі має вид:

$$G = \bar{B}^T \cdot \bar{Y} = 12y_1 - 8y_2 + 5y_3 ;$$

3 Максимізація цільової функції прямої задачі замінюється мінімізацією цільової функції двоїстої задачі:

$$G = 12y_1 - 8y_2 + 5y_3 \quad (\min).$$

4 Матрицею коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі служить матриця, отримана транспонуванням матриці системи обмежень прямої задачі:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо ліву і праву частини системи обмежень двоїстої задачі.

Ліва частина $(A^T \cdot \bar{Y})$: Права частина (\bar{C}) :

$$\begin{cases} 3y_1 + y_3 & 2 \\ 5y_1 - y_2 + 3y_3 & 0 \\ 6y_2 - 2y_3 & 4 \\ y_1 + 3y_2 & -5 \end{cases}$$

Між лівою і правою частинами потрібно вставити знаки відносин ($=$, \leq , \geq)

5 Встановимо вигляд відносин. Кожній невід'ємній змінній прямої задачі відповідає обмеження – нерівність двоїстої задачі. Тому що змінні x_2 і x_3 – невід'ємні, то обмеження 2 і 3 – нерівності. Кожній змінній довільно-

го знака прямої задачі відповідає обмеження – рівність двоїстої задачі. Тому що змінні x_1 і x_4 мають довільні знаки, обмеження 1 і 4 – рівності.

У задачі мінімізації обмеження - нерівності мають знак \geq .

Встановимо знаки змінних двоїстий задачі. Кожному обмеженню – нерівності прямої задачі відповідає невід’ємна змінна двоїстої задачі. Тому що обмеження прямої задачі 1 і 2 – нерівності, то y_1 і y_2 – невід’ємні. Кожному обмеженню – рівності прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі довільного знака. Тому що третє обмеження прямої задачі – рівність, то y_3 має довільний знак.

Система обмежень двоїстої задачі буде такою:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_3 = 2, \\ 5y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 0, \\ 6y_2 - 2y_3 \geq 4, \\ y_1 + 3y_2 = -5, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Одержали математичну модель двоїстої задачі:

$$\begin{aligned} G = 12y_1 - 8y_2 + 5y_3 \quad (\min) \\ \begin{cases} 3y_1 + y_3 = 2, \\ 5y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 0, \\ 6y_2 - 2y_3 \geq 4, \\ y_1 + 3y_2 = -5, \\ y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

5.7 Основні твердження про взаємно двоїсті задачі

5.7.1 Перша теорема подвійності

Для взаємно двоїстих задач можливий один із взаємовиключних випадків:

1 Якщо пряма задача має оптимальне розв'язання, то і двоїста задача має оптимальне розв'язання, при цьому значення цільових функцій на оптимальних розв'язаннях збігаються: $F=G$.

2 Якщо в прямій задачі область припустима рішень непорожня, а цільова функція на ній не обмежена ($F \rightarrow \infty$ или $F \rightarrow -\infty$), то в двоїстій задачі буде порожня область розв'язання.

5.7.2 Друга теорема подвійності

Якщо за оптимальним планом прямої задачі якийсь i -й ресурс використовується не цілком, то відповідна змінна двоїстої задачі дорівнює нулю ($y_i^* = 0$); якщо ж змінна двоїстої задачі, що відповідає ресурсу i -го виду позитивна, то в рішенні прямої задачі цей ресурс використовується цілком.

Якщо j -а змінна прямої задачі має позитивне значення, то відповідне обмеження двоїстої задачі після розв'язання буде виконуватися як строга рівність. А якщо ж j -а змінна прямої задачі дорівнює 0, то відповідне j -е обмеження двоїстої задачі після розв'язання буде виконуватися як строга нерівність.

5.8 Економічний зміст двоїстої задачі

Так само як пряма, двоїста задача має економічний сенс і її розв'язання використовується для деяких задач в економічному аналізі.

З економічної точки зору розв'язання прямої задачі планування виробництва (визначення оптимального асортименту) дозволяє одержати оптимальний план випуску продукції, а розв'язання двоїстої задачі – оптимальну систему умовних оцінок використовуваних ресурсів.

З рішень прямої і двоїстої задачі планування виробництва впливають такі властивості:

Властивість 1. Зв'язок значень цільових функцій прямої і двоїстої задачі.

Значення цільових функцій прямої і двоїстої задач рівні: $F_{\max} = G_{\min}$.

Властивість 2. Розв'язання як міра впливу на цільову функцію.

Нехай, наприклад, величина ресурсу, оцінка якого y_i збільшиться на k одиниць (b_i+k) . Порахуємо зміну величини функції G :

$$\begin{aligned}\Delta G = G_{\text{измен}} - G_{\text{исход}} &= \sum_{j=1}^{i-1} b_j y_j + (b_i + k) y_i + \sum_{j=i+1}^m b_j y_j - \left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j y_j + b_i y_i + \sum_{j=i+1}^m b_j y_j \right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j y_j - \sum_{j=1}^{i-1} b_j y_j \right) + ((b_i + k) y_i - b_i y_i) + \left(\sum_{j=i+1}^m b_j y_j - \sum_{j=i+1}^m b_j y_j \right) = k y_i.\end{aligned}$$

Таким чином, значення цільової функції двоїстої задачі збільшилося на $k y_i$. Але значення цільової функції прямої задачі також збільшилося на $k y_i$, тому що $F_{\max} = G_{\min}$.

Іншими словами, зміна цільової функції F_{\max} при збільшенні вільного члена b_i на величину k можна визначити, використовуючи співвідношення $\Delta F_{\max} = k y_i$.

Величина двоїстої оцінки того чи іншого ресурсу показує, наскільки зросло б максимальне значення цільової функції, якби обсяг даного ресурсу збільшився б на одиницю. Однак варто мати на увазі, що двоїста оцінка дозволяє судити про ефект порівняно невеликих змін обсягу ресурсів.

Найбільшій величині оцінки вартості ресурсів відповідає найбільш дефіцитний ресурс. Недефіцитному ресурсу відповідає оцінка, рівна 0.

Властивість 3. Оцінки y_i як міра дефіцитності ресурсів.

Чим вище величина оцінки, тим гостріше дефіцитність ресурсу.

Властивість 4. Оцінки y_i як міра вигідності випуску продукції

Якщо одне обмеження двоїстої задачі виконується як строга нерівність, це означає, що оцінка ресурсів, використовуваних на виробництво відповідного виробу вище ціни цього виробу, і, отже, випускати його не вигідно. Якщо обмеження двоїстої задачі виконується як рівність, це означає, що оцінки ресурсів, використовуваного для виробництва одиниці відповідного виробу рівне в точності їхнім цінам. Тому випускати цей вид продукції економічно доцільно, що буде видно з розв'язання прямої задачі.

6 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО АСОРТИМЕНТУ

Тема. Задача визначення оптимального асортименту. Подвійність у задачах лінійного програмування.

Мета лабораторної роботи 2

Мають бути придбані наступні **вміння**: складання математичної моделі задачі виробничого планування; одержання двоїстої задачі.

Мають бути засвоєні наступні **поняття**: математична модель (формалізація); взаємно двоїсті задачі; типи задач ЛП: стандартна, канонічна, загального виду; аналіз розв'язання.

Робота розрахована на 4 години.

6.1 Задача визначення оптимального асортименту (планування виробництва)

Дані n видів ресурсів у кількостях p_1, p_2, \dots, p_n , що можуть бути використані для виготовлення m виробів. Задано матрицю $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, де a_{ij} характеризує норми витрати i -го ресурсу на виробництво j -го виробу ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$). Вартість одиниці j -го виробу характеризується показником c_j .

Визначити план виробництва, при якому сумарна вартість набуває найбільшого значення.

План виробництва – це вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, що показує, яка кількість кожного продукту буде вироблена; x_j – змінні задачі.

Цільова функція – максимальна вартість продукції, що випускається:

$$F = \sum_{j=1}^m c_j \cdot x_j \quad (\max). \quad (7)$$

З умови обмеженості ресурсів, з одного боку, і сумарних витрат ресурсів для виконання плану виробництва, з іншого боку, будується система обмежень:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j &\leq p_i, i = 1, \dots, n; \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (8)$$

Одержали математичну модель задачі.

Зауваження 1. Крім зазначених обмежень по ресурсах, в умову задачі, а отже, і в її математичну модель можуть вводитися додаткові обмеження на планований випуск продукції (обмеження по асортименту, умови комплектності і т.і.). Наприклад, кількість першого продукту вдвічі більше, ніж кількість другого продукту, третього продукту не менш 120 одиниць і т.д.

Зауваження 2. Математична модель (7) - (8), хоча і відображує головні риси реального виробництва, є ідеалізованою. У ній, наприклад, не враховані динаміка виробництва, ритмічність постачань і деякі інші властивості реального виробництва.

6.2 Завдання до лабораторної роботи 2

Формалізувати задану задачу лінійного програмування. Вирішити задачу графічним методом. Зазначити економічний зміст цільової функції і системи обмежень. Записати задачу в матричній формі. Перейти до двоїстої задачі. Вирішити двоїсту задачу за допомогою одного з пакетів. Проаналізувати відповіді прямої і двоїстої задач.

Задача 1

Для виробництва двох видів виробів А і В використовується три типи технологічного устаткування. На виробництво одиниці виробу А устаткування першого типу використовується a_1 годин, устаткування другого типу – a_2 годин, третього – a_3 годин. На виробництво одиниці виробу В устаткування першого типу використовується b_1 годин, устаткування другого типу – b_2 годин, третього – b_3 годин. На

виготовлення усіх виробів адміністрація підприємства може надати устаткування першого типу не більш, ніж на t_1 годин, устаткування другого типу – не більш, ніж на t_2 годин, устаткування третього типу – не більш, ніж на t_3 годин.

Прибуток від реалізації одиниці готового виробу А складає r_1 грошових одиниць, вироби У – r_2 грошових одиниць.

Скласти план випуску виробів, що забезпечує максимальний прибуток.

Задача 2

Для виробництва двох видів виробів А і В використовується три види сировини. На виробництво одиниці виробу А потрібно затратити сировини першого виду a_1 кг, сировини другого виду – a_2 кг, третього – a_3 кг. На виробництво одиниці виробу В потрібно затратити сировини першого виду b_1 кг, сировини другого виду – b_2 кг, третього – b_3 кг. Виробництво забезпечене сировиною першого виду в кількості t_1 кг, другого виду – у кількості t_2 кг, третього виду – t_3 кг.

Прибуток від реалізації одиниці готового виробу А складає r_1 грошових одиниць, вироби У – r_2 грошових одиниць.

Скласти план випуску виробів, що забезпечує максимальний прибуток.

Звіт про лабораторну роботу

Повинний містити такі розділи:

- 1 Умова задачі.
- 2 Формалізація задачі.
- 3 Графічне розв’язання задачі.
- 4 Запис задачі в матричній формі.
- 5 Роздрук розв’язання задачі.
- 6 Формалізація двоїстої задачі.
- 7 Роздрук розв’язання двоїстої задачі.
- 8 Економічний аналіз результату.

Примітка. Приклади розв’язку задачі у пакетах MAPLE, Excel, Mathcad наведено в Додатках А, Б, В відповідно.

6.3 Приклад виконання лабораторної роботи 2

Для виробництва трьох видів виробів (А, В, С) використовується три різноманітних види ресурсів. Норми витрат кожного з видів ресурсів на одиницю продукції кожного виду, запаси ресурсів і прибуток від випуску одиниці продукції приведені в таблиці 2:

Таблиця 2

Вид ресурсів	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ресурсів
	А	В	С	
Труд, люд-г	4	2	1	180
Сировина, кг	3	1	3	210
Устаткування, годин	1	2	5	244
Прибуток, гр.од.	10	14	12	—

Визначити план випуску продукції, при якому сумарний прибуток максимальний.

Розв'язання

Позначимо кількість одиниць виробу А, що випускається підприємством, через x_1 , виробу В – x_2 , виробу С – x_3 .

Визначимо прибуток від випуску виробів. Прибуток від випуску одного виробу А складає за умовою 10 гр.од. План випуску виробів А – x_1 од. Прибуток від випуску виробів А за планом складе $10x_1$ гр.од. Аналогічно визначаємо прибуток від випуску виробів В – $14x_2$ гр.од. і виробів С – $12x_3$ гр.од. Сумарний прибуток від випуску усіх виробів складає $(10x_1+14x_2+12x_3)$ гр.од.

Тоді цільова функція має вид: $F = 10x_1+14x_2+12x_3$ – сумарний прибуток і має бути найбільший.

Складемо систему обмежень.

1 Обмеження на використання ресурсу «праця»

На випуск одиниці виробу А витрачається 4 людино-годин ресурсу «праця», на x_1 одиниць виробу А витрачається $4x_1$ годин ресурсу «праця».

На випуск x_2 виробів В витрачається $2x_2$ люд-г ресурсу «праця»; на випуск x_3 виробів С витрачається $1x_3$ люд-г ресурсу «праця». Усього на випуск виробів витрачається ресурсу «праця» $(4x_1+2x_2+x_3)$ люд-год, що за умовою не перевищує 180 люд-год. Обмеження на ресурс «праця»: $3x_1+2x_2+x_3 \leq 180$.

2 Обмеження на використання сировини

На випуск одиниці виробу А витрачається 3 кг сировини, на x_1 одиниць виробу А витрачається $3x_1$ кг сировини. На випуск x_2 виробів В витрачається $1x_2$ кг сировини; на випуск x_3 виробів С витрачається $3x_3$ кг сировини. Усього на випуск виробів витрачається $(3x_1+x_2+3x_3)$ кг сировини, що за умовою не перевищує 210 кг. Обмеження на використання сировини: $3x_1+x_2+3x_3 \leq 210$.

3 Обмеження на використання часу роботи устаткування

На випуск одиниці виробу А витрачається 1 годин устаткування, на x_1 одиниць виробу А витрачається x_1 годин устаткування. На випуск x_2 виробів В витрачається $2x_2$ годин устаткування; на випуск x_3 виробів С витрачається $5x_3$ годин устаткування. Усього на випуск виробів витрачається $(x_1+2x_2+5x_3)$ годин устаткування, що за умовою не перевищує 244 годин. Обмеження на годину роботи устаткування: $x_1+2x_2+5x_3 \leq 244$.

Тому що x_1 , x_2 і x_3 – випуск виробів, то вони невід'ємні.

Одержали математичну модель задачі:

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \text{ (max).}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Розв'язавши задачу за допомогою одного з пакетів (MAPLE, Excel, Mathcad), одержали значення змінних: $x_1=0$; $x_2=82$; $x_3=16$; $F_{\max}=1340$.

Нагадаємо, що розв'язання задачі лінійного програмування містить у собі не тільки формалізацію і математичне розв'язання, але й економічний аналіз отриманих результатів.

6.4 Економічний висновок

Для одержання максимального прибутку в розмірі 1340 г.о. план випуску продукції має бути таким: виріб А – не випускається, випуск виробу В – 82 одиниці, вироби С – 16 одиниць. При цьому, витрати ресурсів складуть:

«праця» – 180 люд-г при запасі 180 люд-г. ;

«сировина» - 130 кг при запасі 210 кг (залишок - 80 кг);

«устаткування» – 244 ч при запасі 244 годин.

Надлишковим є ресурс «сировина», недостатнім – «праця» і «устаткування».

6.5 Побудова двоїстої задачі до задачі планування виробництва

Перед побудовою двоїстої задачі запишемо задачу в матричній формі. Випишемо вектори і матрицю:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 180 \\ 210 \\ 244 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У матричному вигляді:

$$F = \bar{C}^T \cdot \bar{X} \quad (\max).$$

$$\mathbf{A} \cdot \bar{X} \leq \bar{B},$$

$$\bar{X} \geq \bar{0}.$$

Будуємо двоїсту задачу по пунктах:

1 Кількість обмежень прямої задачі дорівнює 3, значить кількість змінних двоїстої задачі дорівнює 3 – y_1, y_2, y_3 ; кількість змінних прямої задачі дорівнює 3, значить кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює 3.

2 Вільні члени системи обмежень прямої задачі служать коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі (коефіцієнти цільової функції прямої задачі – вільними членами обмежень двоїстої задачі). Отже, цільова функція двоїстої задачі буде такою: $G = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3$.

3 Максимізація цільової функції прямої задачі замінюється мінімізацією цільової функції двоїстої задачі: $G = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3$ (min).

4 Матрицею коефіцієнтів обмежень двоїстої задачі служить матриця, отримана транспонуванням матриці обмежень прямої задачі:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5 Усі змінні двоїстої задачі невід'ємні: $y_i \geq 0$.

У матричній формі двоїста задача:

$$G = \bar{B}^T \cdot \bar{Y} \quad (\text{min}).$$

$$\mathbf{A}^T \cdot \bar{Y} \geq \bar{C},$$

$$\bar{Y} \geq \bar{0}.$$

У координатній формі двоїста задача має вигляд:

$$G = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \quad (\text{min}).$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10,$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14,$$

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Двоїста задача за тими ж вхідними даними формулюється так.

Припустимо, що підприємство за деяких обставин вирішило реалізувати наявні ресурси, не випускаючи готову продукцію. Необхідно вста-

новити оптимальні ціни на ресурси y_1, y_2, y_3 , що задовольняли б умовам: 1) підприємство, що закуповує дані ресурси, прагне, щоб загальна вартість придбаних ресурсів була мінімальною; 2) за кожен вид ресурсів треба сплатити не менш тієї суми, яку можна одержати при переробці сировини в готову продукцію.

Відповідно до першої умови загальна вартість сировини виразиться величиною $G = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3$ (min). Відповідно до другої вимоги, вводяться такі обмеження: на одиницю першого виду продукції А витрачаються 4 одиниці ресурсу «праця» ціною y_1 , 3 одиниці ресурсу «сировина» ціною y_2 і 1 одиниця ресурсу «устаткування» ціною y_3 . Вартість всіх ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці продукції А, дорівнює $4y_1 + 3y_2 + y_3$ і повинна скласти не менш 10, тобто $4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10$.

У результаті аналогічних міркувань щодо виробництва продукції В і С система нерівностей набуде вигляду:

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14,$$

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12,$$

Ціни ресурсів, природно, мають бути невід'ємні:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Одержали пару симетричних взаємно двоїстих задач, і кожна з них може розглядатися як вхідна.

Пряма задача:

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \text{ (max).}$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180,$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210,$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Двоїста задача:

$$G = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \quad (\min).$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10,$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14,$$

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Розв'язання прямої задачі дає оптимальний план виробництва виробів А, В, С, а розв'язання двоїстої задачі – оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовується для виробництва цих виробів.

Розв'язання прямої задачі:

$$x_1=0, x_2=82, x_3=16, F=1340.$$

Перевірка виконання обмежень прямої задачі:

$$4 \cdot 0 + 2 \cdot 82 + 16 = 180 \text{ (праця, людино-годин);}$$

$$3 \cdot 0 + 82 + 3 \cdot 16 = 130 \leq 210 \text{ (сировина, кг); } 210 - 130 = 80;$$

$$0 + 2 \cdot 82 + 5 \cdot 16 = 244 \text{ (устаткування, ч).}$$

Розв'язання двоїстої задачі:

$$y_1=5,75, y_2=0, y_3=1,25, G=1340.$$

Перевірка виконання обмежень двоїстої задачі:

$$4 \cdot 5,75 + 3 \cdot 0 + 1,25 = 24,25 \geq 10,$$

$$2 \cdot 5,75 + 0 + 2 \cdot 1,25 = 14,$$

$$5,25 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1,25 = 12.$$

З розв'язання прямої задачі видно, що оптимальним планом виробництва виробів є такий, при якому виготовляється 82 одиниць виробу В і 16 одиниць виробу С. При даному плані виробництва залишається невикористаним 80 кг сировини, а загальна ціна виробів дорівнює 1340.

Зробимо висновки за розв'язаннями прямої і двоїстої задачі згідно з наведеними в теоретичній частині властивостями 1-4:

1 Значення цільових функцій прямої і двоїстої задач рівні:

$$F_{\max} = G_{\min} \quad (1340 = 1340).$$

2 Збільшення фонду часу роботи (ресурс «праця») на 1 ч приведе до того, що з'явиться можливість скласти новий оптимальний план виробництва виробів, при якому загальна ціна виготовленої продукції зросте на 5,75 одиниць і стане рівної $1340 + 5,75 = 1345,75$ одиниць. Точно так само збільшення на 1 ч часу роботи устаткування дозволить знайти новий оптимальний план виробництва виробів, при якому загальна ціна виготовленої продукції зросте на 1,25 одиниць і складе $1340 + 1,25 = 1341,25$ одиниць.

Нульова оцінка, отримана для ресурсу «сировина» означає, що, оскільки сировина використовується не цілком, то збільшення його запасів не вплине на оптимальний план випуску продукції і загальну ціну виготовленої продукції.

3 Змінні $y_1 = 5,75$, $y_2 = 0$ і $y_3 = 1,25$ визначають умовні оцінки одиниці ресурсів «праця», «сировина» і «устаткування» відповідно. Оцінки «праця» і «устаткування» відмінні від 0, відповідно до другої теореми подвійності відповідні ресурси використовується цілком при оптимальному плані виробництва продукції, тобто є дефіцитними. Двоїста оцінка ресурсу «сировина» дорівнює 0. Цей вид ресурсу не цілком використовується при оптимальному плані виробництва продукції.

Чим вище величина оцінки, тим гостріше дефіцитність ресурсу: «праця» більш дефіцитна, чим «устаткування»: $(y_1 = 5,75) > (y_3 = 1,25)$.

4 При підстановці двоїстих оцінок у систему обмежень двоїстої задачі одержуємо:

$$23+1,25>10,$$

$$11,5+2,5=14,$$

$$5,75+6,25=12.$$

Перше обмеження двоїстої задачі виконується як строга нерівність. Це означає, що оцінка ресурсів, використовуваних на виробництво одного виробу виду А вище ціни цього виробу, і, отже, випускати виробу А не вигідно. Друге і третє обмеження двоїстої задачі виконуються як рівності. Це означає, що оцінки ресурсів, використовуваного для виробництва одиниці відповідних виробів В і С рівні в точності їхнім цінам. Тому випускати ці два види продукції економічно доцільно, що і видно з розв'язання прямої задачі.

6.6 Розв'язання задачі за допомогою пакету Maple

Для початку розв'язання прямої задачі

```
> restart;
```

```
> with(simplex):
```

```
Warning, the protected names maximize and minimize have  
been redefined and unprotected
```

```
> F:=10*x1+14*x2+12*x3;
```

$$F := 10 x1 + 14 x2 + 12 x3$$

```
> g1:=4*x1+2*x2+x3<=180; g2:=3*x1+x2+3*x3<=210;
```

```
g3:=x1+2*x2+5*x3<=244;
```

$$g1 := 4 x1 + 2 x2 + x3 \leq 180$$

$$g2 := 3 x1 + x2 + 3 x3 \leq 210$$

$$g3 := x1 + 2 x2 + 5 x3 \leq 244$$

```
> maximize(F, {g1,g2,g3}, NONNEGATIVE);
```

$$\{x1 = 0, x3 = 16, x2 = 82\}$$

```
> x1:=0: x2:=82: x3:=16: F; {g1,g2,g3};
```


$$\{ 180 \leq 180, 130 \leq 210, 244 \leq 244 \}$$

Розв'язання двоїстої задачі:

> **restart:**

> **with(simplex):**

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

> **G:=180*y1+210*y2+244*y3;**

$$G := 180 y1 + 210 y2 + 244 y3$$

> **d1:=4*y1+3*y2+y3>=10;d2:=2*y1+y2+2*y3>=14;**

d3:=y1+3*y2+5*y3>=12;

$$d1 := 10 \leq 4 y1 + 3 y2 + y3$$

$$d2 := 14 \leq 2 y1 + y2 + 2 y3$$

$$d3 := 12 \leq y1 + 3 y2 + 5 y3$$

> **minimize(G, {d1,d2,d3}, NONNEGATIVE);**

$$\{ y2 = 0, y3 = \frac{5}{4}, y1 = \frac{23}{4} \}$$

> **y1:=23./4; y2:=0; y3:=5./4; G; {d1,d2,d3};**

$$y1 := 5.750000000$$

$$y2 := 0$$

$$y3 := 1.250000000$$

$$1340.000000$$

$$\{ 10 \leq 24.25000000, 14 \leq 14.00000000, 12 \leq 12.00000000 \}$$

6.7 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 2

Таблиця 3 – Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 2

Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3
a1=5 b1=3 t1=750	a1=6 b1=2 t1=600	a1=4 b1=3 t1=440
a2=4 b2=3 t2=630	a2=4 b2=3 t2=520	a2=3 b2=4 t2=393
a3=3 b3=4 t3=700	a3=3 b3=4 t3=600	a3=3 b3=5 t3=450
r1=5 r2=6	r1=6 r2=3	r1=6 r2=5

Продовження таблиці 3

Варіант 4

a1=3 b1=2 t1=273
a2=3 b2=3 t2=300
a3=2 b3=5 t3=380
r1=4 r2=5

Варіант 5

a1=2 b1=1 t1=438
a2=3 b2=6 t2=747
a3=3 b3=7 t3=812
r1=7 r2=5

Варіант 6

a1=4 b1=3 t1=480
a2=3 b2=4 t2=444
a3=2 b3=6 t3=546
r1=2 r2=4

Варіант 7

a1=8 b1=2 t1=840
a2=6 b2=3 t2=870
a3=3 b3=2 t3=560
r1=6 r2=2

Варіант 8

a1=5 b1=2 t1=505
a2=3 b2=3 t2=393
a3=2 b3=3 t3=348
r1=7 r2=4

Варіант 9

a1=6 b1=2 t1=600
a2=4 b2=3 t2=520
a3=3 b3=4 t3=600
r1=6 r2=3

Варіант 10

a1=2 b1=3 t1=428
a2=3 b2=6 t2=672
a3=2 b3=8 t3=672
r1=3 r2=8

Варіант 11

a1=3 b1=2 t1=273
a2=3 b2=3 t2=300
a3=2 b3=5 t3=380
r1=4 r2=5

Варіант 12

a1=7 b1=3 t1=1365
a2=6 b2=3 t2=1245
a3=1 b3=2 t3=650
r1=6 r2=5

Варіант 13

a1=4 b1=3 t1=480
a2=3 b2=4 t2=444
a3=2 b3=6 t3=546
r1=2 r2=4

Варіант 14

a1=5 b1=3 t1=750
a2=4 b2=3 t2=630
a3=3 b3=4 t3=700
r1=5 r2=6

Варіант 15

a1=5 b1=2 t1=505
a2=3 b2=3 t2=393
a3=2 b3=3 t3=348
r1=7 r2=4

Варіант 16

a1=4 b1=3 t1=440
a2=3 b2=4 t2=393
a3=3 b3=5 t3=450
r1=6 r2=5

Варіант 17

a1=2 b1=3 t1=428
a2=3 b2=6 t2=672
a3=2 b3=8 t3=672
r1=3 r2=8

Варіант 18

a1=2 b1=1 t1=438
a2=3 b2=6 t2=747
a3=3 b3=7 t3=812
r1=7 r2=5

Варіант 19

a1=7 b1=3 t1=1365
a2=6 b2=3 t2=1245
a3=1 b3=2 t3=650
r1=6 r2=5

Варіант 20

a1=8 b1=2 t1=840
a2=6 b2=3 t2=870
a3=3 b3=2 t3=560
r1=6 r2=2

Варіант 21

a1=5 b1=3 t1=750
a2=4 b2=3 t2=630
a3=3 b3=4 t3=700
r1=5 r2=6

Продовження таблиці 3

Варіант 22

a1=6 b1=2 t1=600

a2=4 b2=3 t2=520

a3=3 b3=4 t3=600

r1=6 r2=3

Варіант 23

a1=4 b1=3 t1=440

a2=3 b2=4 t2=393

a3=3 b3=5 t3=450

r1=6 r2=5

Варіант 24

a1=3 b1=2 t1=273

a2=3 b2=3 t2=300

a3=2 b3=5 t3=380

r1=4 r2=5

Варіант 25

a1=2 b1=1 t1=438

a2=3 b2=6 t2=747

a3=3 b3=7 t3=812

r1=7 r2=5

Варіант 26

a1=4 b1=3 t1=480

a2=3 b2=4 t2=444

a3=2 b3=6 t3=546

r1=2 r2=4

Варіант 27

a1=8 b1=2 t1=840

a2=3 b2=3 t2=393

a3=2 b3=3 t3=348

r1=6 r2=4

Варіант 28

a1=5 b1=2 t1=505

a2=6 b2=3 t2=870

a3=3 b3=2 t3=560

r1=7 r2=2

Варіант 29

a1=2 b1=3 t1=428

a2=3 b2=6 t2=672

a3=2 b3=8 t3=672

r1=3 r2=8

Варіант 30

a1=7 b1=3 t1=1365

a2=6 b2=3 t2=1245

a3=1 b3=2 t3=650

r1=6 r2=5

7 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3. ОПТИМАЛЬНА СУМІШ

Тема. Задача про оптимальну суміш. Необмежена область припустимих рішень.

Мета лабораторної роботи

Мають бути придбані наступні **вміння**: складання математичної моделі задачі про оптимальну суміш; економічний висновок із розв'язання задачі.

Робота розрахована на 4 години.

7.1 Теоретичні відомості

Задача визначення оптимального складу суміші виникає тоді, коли з наявних видів сировини необхідно одержати шляхом змішування новий продукт (наприклад, бензин, металевий сплав і т.і.) із заданими технічними й іншими характеристиками, або скласти раціон харчування, маючи зазначені продукти. При цьому потрібно, щоб вартість такої суміші була мінімальна.

Припустимо, що суміш потрібно скласти з n різних видів сировини, кожний з яких містить m видів цікавлячих нас речовин.

Нехай a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, це кількість i -ої речовини в одиниці j -го виду сировини.

Вартість сировини c_j , $j = 1, \dots, n$. Позначимо через b_i найменшу припустиму кількість i -ої речовини, через d_j - запас сировини j -го виду.

Нехай x_j - кількість сировини j -го виду, яку необхідно використовувати для складання суміші. Тоді цільова функція - вартість суміші - дорівнює:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\min).$$

Обмеження на вміст необхідних речовин у готовій суміші:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, i = 1, \dots, m.$$

Обмеження на запаси сировини:

$$x_j \leq d_j, j = 1, \dots, n.$$

Тому що x_j - кількість сировини, $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$.

Одержали математичну модель задачі про суміші:

$$\begin{aligned} F &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\min); \\ &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, i = 1, \dots, m; \\ x_j \leq d_j, j = 1, \dots, n. \end{cases} \\ &x_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

7.2 Завдання до лабораторної роботи

Формалізувати задану задачу лінійного програмування. Зазначити економічний зміст цільової функції і системи обмежень. Записати задачу в матричній формі. Перейти до двоїстої задачі. Вирішити пряму і двоїсту задачу за допомогою одного з пакетів. Проаналізувати відповіді прямої і двоїстої задач.

Лікувальна дієта контролюється за компонентами: а) білками; б) вуглеводами; в) жирами; г) вітамінами. Обсяг необхідних компонентів у повсякденних продуктах харчування і ціни продуктів зазначені в таблиці 4.

Таблиця 4

Склад, од	Продукти			
	1	2	3	4
Білки	s11	s12	s13	s14
Вуглеводи	s21	s22	s23	s24
Жири	s31	s32	s33	s34
Вітаміни	s41	s42	s43	s44
Ціна 1 кг	r1	r2	r3	r4

Скласти план найбільш дешевих закупівель продуктів, що забезпечує дієтичні вимоги.

Звіт про лабораторну роботу

Повинен містити:

- 1 Умова задачі.
- 2 Формалізація задачі.
- 3 Запис задачі в матричній формі.
- 4 Роздрук розв'язання задачі.
- 5 Формалізація двоїстої задачі.
- 6 Роздрук розв'язання двоїстої задачі.
- 7 Економічний аналіз результату.

7.3 Приклад виконання лабораторної роботи 3

При складанні добового раціону годівлі худоби можна використовувати свіже сіно (не більш 50 кг) і силос (не більш 85 кг). У таблиці 5 приведені дані про вміст зазначених компонентів у 1 кг кожного продукту харчування, поживність раціону (мінімальні норми) і вартість продуктів.

Таблиця 5

Поживні речовини	Продукт		Поживність раціону
	Свіже сіно	Силос	
Кормові одиниці	0,5	0,5	30 одиниць
Білок, г/кг	40	10	1 кг
Кальцій, г/кг	1,25	2,5	100 г
Фосфор, г/кг	2	1	80 г
Вартість, гр.од.	1,2	0,8	—

Скласти раціон, що задовольняє вищевикладеним вимогам і мінімальний за вартістю.

Формалізація задачі

Нехай x_1 , кг – кількість сіна, а x_2 , кг – кількість силосу, який необхідно використовувати в раціоні. Тоді цільова функція – вартість продуктів – дорівнює:

$$F = 1,2x_1 + 0,8x_2 - \min.$$

Складемо систему обмежень.

1 Обмеження на вміст у раціоні кормових одиниць – не менш 30. В одному кілограмі сіна і силосу міститься по 0,5 кормових одиниць. Усього в раціоні буде $(0,5x_1 + 0,5x_2)$ кормових одиниць. Виходить, $0,5x_1 + 0,5x_2 \geq 30$.

2 Обмеження на вміст у раціоні білка – не менш 1 кг. В одному кілограмі сіна міститься 40 г білка, у 1 кг силосу – 10 г білка. Перейдемо до однієї розмірності – кг. Усього в раціоні буде $(0,04x_1 + 0,01x_2)$ кг білка. Виходить: $0,04x_1 + 0,01x_2 \geq 1$.

3 Аналогічно міркуючи, складемо обмеження на вміст кальцію – не менш 0,1 кг: $0,00125x_1 + 0,0025x_2 \geq 0,1$.

4 Вміст фосфору – не менш 0,08 кг: $0,002x_1 + 0,001x_2 \geq 0,08$.

5 За умовою, закупівля сіна не повинна перевищувати 50 кг, а силосу – 85 кг. Виходить, $x_1 \leq 50$ і $x_2 \leq 85$.

Тому що x_1 і x_2 – кількість продукту, то x_1 і x_2 невід'ємні.

Одержали математичну модель задачі про суміші:

$$\begin{aligned}F &= 1,2x_1 + 0,8x_2 \quad (\min). \\0,5x_1 + 0,5x_2 &\geq 30, \\0,04x_1 + 0,01x_2 &\geq 1, \\0,00125x_1 + 0,0025x_2 &\geq 0,1, \\0,002x_1 + 0,001x_2 &\geq 0,08, \\x_1 &\leq 50, \\x_2 &\leq 85, \\x_1 &\geq 0, \\x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Розв'язавши задачу за допомогою пакету, одержали значення змінних: $x_1 = 20$; $x_2 = 40$; $F_{\min} = 56$.

Економічний висновок: у добовому раціоні має бути сіна 20 кг і си-лосу 40 кг. Вартість такого раціону складе 56 гр.од.

Поживність раціону складе:

Кормових одиниць – 30 од. при нормі 30 од.;

Білок – 1,2 кг при нормі 1 кг;

Кальцій – 125 г при нормі 100 г;

Фосфору 80 г при нормі 80 г.

7.4 Побудова двоїстої задачі до задачі про оптимальну суміш

Формалізована задача про суміші має вигляд:

$$\begin{aligned}F &= 1,2x_1 + 0,8x_2 \quad (\min). \\0,5x_1 + 0,5x_2 &\geq 30, \\0,04x_1 + 0,01x_2 &\geq 1, \\0,00125x_1 + 0,0025x_2 &\geq 0,1, \\0,002x_1 + 0,001x_2 &\geq 0,08, \\x_1 &\leq 50, \\x_2 &\leq 85, \\x_1 &\geq 0, \\x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Перед побудовою двоїстої задачі запишемо пряму задачу в матричній формі. Приведемо нерівності системи обмежень до одного виду (знак \geq):

$$\begin{aligned}0,5x_1 + 0,5x_2 &\geq 30, \\0,04x_1 + 0,01x_2 &\geq 1, \\0,00125x_1 + 0,0025x_2 &\geq 0,1, \\0,002x_1 + 0,001x_2 &\geq 0,08, \\-x_1 &\geq -50, \\-x_2 &\geq -85.\end{aligned}$$

Випишемо вектори і матрицю:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \\ 0,1 \\ 0,08 \\ -50 \\ -85 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,04 & 0,01 \\ 0,00125 & 0,0025 \\ 0,002 & 0,001 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У матричному вигляді:

$$\begin{aligned}F &= \bar{C}^T \cdot \bar{X} \quad (\min). \\ \mathbf{A} \cdot \bar{X} &\geq \bar{B}, \\ \bar{X} &\geq \bar{0}.\end{aligned}$$

Тому що кількість обмежень прямої задачі – 6, то в двоїстій задачі – 6 змінних.

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,04 & 0,00125 & 0,002 & -1 & 0 \\ 0,5 & 0,01 & 0,0025 & 0,001 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Двоїста задача в матричному вигляді:

$$G = \bar{B}^T \cdot \bar{Y} \quad (\max).$$

$$\mathbf{A}^T \cdot \bar{Y} \leq \bar{C},$$

$$\bar{Y} \geq \bar{0}.$$

У координатній формі двоїста задача має вид:

$$G = 30y_1 + y_2 + 0,1y_3 + 0,08y_4 - 50y_5 - 85y_6 \quad (\max).$$

$$0,5y_1 + 0,04y_2 + 0,00125y_3 + 0,002y_4 - y_5 \leq 1,2,$$

$$0,5y_1 + 0,01y_2 + 0,0025y_3 + 0,001y_4 - y_6 \leq 0,8,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0.$$

7.5 Розв'язання задачі за допомогою пакету Maple

Для початку розв'язання прямої задачі

> restart;

> with(simplex):

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

> F:=1.2*x1+0.8*x2;

$$F := 1.2 x1 + .8 x2$$

> g1:=0.5*x1+0.5*x2>=30; g2:=0.04*x1+0.01*x2>=1;

g3:=0.00125*x1+0.0025*x2>= 0.1; g4:=0.002*x1+0.001*x2>=0.08;

g5:=x1<=50; g6:=x2<=85;

$$g1 := 30 \leq .5 x1 + .5 x2$$

$$g2 := 1 \leq .04 x1 + .01 x2$$

```

g3 := .1 ≤ .00125 x1 + .0025 x2
g4 := .08 ≤ .002 x1 + .001 x2
g5 := x1 ≤ 50
g6 := x2 ≤ 85
> minimize(F, {g1,g2,g3,g4,g5,g6}, NONNEGATIVE);
      { x2 = 39.99999996 , x1 = 20.00000004 }
> x1:=20: x2:=40: F; {g1,g2,g3,g4,g5,g6}; x1:='x1': x2:='x2':
      56.0
      { .1 ≤ .12500 , .08 ≤ .080 , 20 ≤ 50 , 40 ≤ 85 , 30 ≤ 30.0 , 1 ≤ 1.20 }

```

Так як задача є двовимірною, можна вирішити графічно:

```

> with(plots):
Warning, the names changecoords and display have been re-
defined
> inequal({g1,g2,g3,g4,g5,g6,x1>=0,x2>=0}, x1=0..100,x2=0..100,
optionsexcluded=(color=white));

```

Результат виконання цієї команди – на рис. 14.

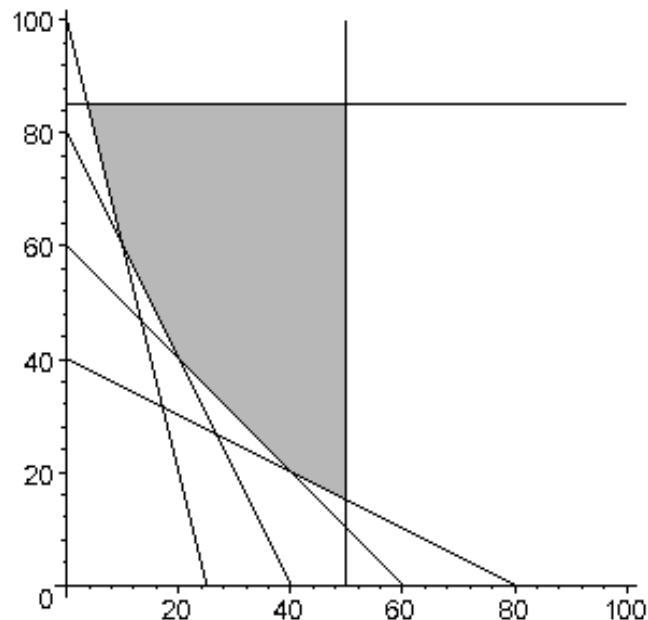


Рисунок 14

Вирішимо двоїсту задачу:

```

> restart:
> with(simplex):
Warning, the protected names maximize and minimize have
been redefined and unprotected
> G:=30*y1+y2+0.1*y3+0.08*y4-50*y5-85*y6;

```

$$G := 30 y_1 + y_2 + .1 y_3 + .08 y_4 - 50 y_5 - 85 y_6$$

$$> \mathbf{d1:=0.5*y1+0.04*y2+0.00125*y3+0.002*y4-y5\leq 1.2;}$$

$$\mathbf{d2:=0.5*y1+0.01*y2+0.0025*y3+0.001*y4-y6\leq 0.8;}$$

$$d1 := .5 y_1 + .04 y_2 + .00125 y_3 + .002 y_4 - y_5 \leq 1.2$$

$$d2 := .5 y_1 + .01 y_2 + .0025 y_3 + .001 y_4 - y_6 \leq .8$$

$$> \mathbf{maximize(G, \{d1,d2\}, NONNEGATIVE);}$$

$$\{y_3 = 0., y_2 = 0., y_4 = 400.0000000, y_1 = .8000000000, y_6 = 0., y_5 = 0.\}$$

$$> \mathbf{y1:=0.8: y2:=0: y3:=0: y4:=400: y5:=0: y6:=0: G; \{d1,d2\};}$$

$$56.00$$

$$\{.800 \leq .8, 1.200 \leq 1.2\}$$

7.6 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 3

Таблиця 6 – Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 3

<p>Варіант 1</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(4, 6, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10 і не більш 50; вітаміни – не менше 40.</p>	<p>Варіант 2</p> $S = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 7, 2, 1)$ <p>Обмеження: білки – не менше 18; вуглеводи – не менше 27; жири – не менше 11 і не більш 55; вітаміни – не менше 41.</p>
<p>Варіант 3</p> $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 12 & 2 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(1, 2, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 33; жири – не менше 12и не більш 65; вітаміни – не менше 34.</p>	<p>Варіант 4</p> $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 2, 1, 4).$ <p>Обмеження: білки – не менше 24; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 15 і не більш 45; вітаміни – не менше 37.</p>

<p>Варіант 5</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 & 2 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(4, 6, 5, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10 і не більш 50; вітаміни – не менше 40.</p>	<p>Варіант 6</p> $S = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 10 & 2 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, R=(3, 3, 2, 1).$ <p>Обмеження: білки – не менше 15; вуглеводи – не менше 25; жири – не менше 10 і не більш 50; вітаміни – не менше 30 .</p>
<p>Варіант 7</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(2, 6, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 30; вуглеводи – не менше 40; жири – не менше 20 і не більш 70; вітаміни – не менше 35 їж.</p>	<p>Варіант 8</p> $S = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 10 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 5, 2, 1).$ <p>Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 34; жири – не менше 15 і не більш 65; вітаміни – не менше 40.</p>
<p>Варіант 9</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(2, 3, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 31; жири – не менше 11 і не більш 51; вітаміни – не менше 41.</p>	<p>Варіант 10</p> $S = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 & 4 \\ 13 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 1, 2, 1).$ <p>Обмеження: білки – не менше 22; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 12 і не більш 52; вітаміни – не менше 42.</p>

Продовження таблиці 6

<p>Варіант 11</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(4, 6, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10 і не більш 50; вітаміни – не менше 40.</p>	<p>Варіант 12</p> $S = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 7, 2, 1).$ <p>Обмеження: білки – не менше 18; вуглеводи – не менше 27; жири – не менше 11 і не більш 55; вітаміни – не менше 41.</p>
<p>Варіант 13</p> $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 12 & 2 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(1, 2, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 33; жири – не менше 12 і не більш 65; вітаміни – не менше 34.</p>	<p>Варіант 14</p> $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 2, 1, 4).$ <p>Обмеження: білки – не менше 24; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 15 і не більш 45; вітаміни – не менше 37.</p>
<p>Варіант 15</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 & 2 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(4, 6, 5, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10 і не більш 50; вітаміни – не менше 40.</p>	<p>Варіант 16</p> $S = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 10 & 2 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, R=(3, 3, 2, 1).$ <p>Обмеження: білки – не менше 15; вуглеводи – не менше 25; жири – не менше 10 і не більш 50; вітаміни – не менше 30.</p>

Продовження таблиці 6

<p>Варіант 17</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(2, 6, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 30; вуглеводи – не менше 40; жири – не менше 20 і не більш 70; вітаміни – не менше 35.</p>	<p>Варіант 18</p> $S = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 10 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 5, 2, 1).$ <p>Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 34; жири – не менше 15 і не більш 65; вітаміни – не менше 40.</p>
<p>Варіант 19</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(2, 3, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 31; жири – не менше 11 і не більш 51; вітаміни – не менше 41.</p>	<p>Варіант 20</p> $S = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 & 4 \\ 13 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 1, 2, 1).$ <p>Обмеження: білки – не менше 22; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 12 і не більш 52; вітаміни – не менше 42.</p>
<p>Варіант 21</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(4, 6, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10 і не більш 50; вітаміни – не менше 40.</p>	<p>Варіант 22</p> $S = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 7, 2, 1).$ <p>Обмеження: білки – не менше 18; вуглеводи – не менше 27; жири – не менше 11 і не більш 55; вітаміни – не менше 41.</p>

Продовження таблиці 6

<p>Варіант 23</p> $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 12 & 2 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(1, 2, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 33; жири – не менше 12 і не більш 65; вітаміни – не менше 34.</p>	<p>Варіант 24</p> $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 2, 1, 4).$ <p>Обмеження: білки – не менше 24; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 15 і не більш 45; вітаміни – не менше 37.</p>
<p>Варіант 25</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 & 2 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(4, 6, 5, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10и не більш 50; вітаміни – не менше 40.</p>	<p>Варіант 26</p> $S = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 10 & 2 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, R=(3, 3, 2, 1).$ <p>Обмеження: білки – не менше 15; вуглеводи – не менше 25; жири – не менше 10 і не більш 50; вітаміни – не менше 30.</p>
<p>Варіант 27</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(2, 6, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 30; вуглеводи – не менше 40; жири – не менше 20 і не більш 70; вітаміни – не менше 35.</p>	<p>Варіант 28</p> $S = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 10 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 5, 2, 1).$ <p>Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 34; жири – не менше 15 і не більш 65; вітаміни – не менше 40.</p>

Продовження таблиці 6

<p>Варіант 29</p> $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(2, 3, 2, 3).$ <p>Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 31; жири – не менше 11 і не більш 51; вітаміни – не менше 41.</p>	<p>Варіант 30</p> $S = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 & 4 \\ 13 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R=(3, 1, 2, 1).$ <p>Обмеження: білки – не менше 22; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 12 і не більш 52; вітаміни – не менше 42.</p>
---	--

8 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Транспортна задача – задача про найбільш ощадливий план перевезень однорідного чи взаємозамінного вантажу з пунктів відправлення в пункти споживання – є найважливішою частковою задачею лінійного програмування, що має велике практичне застосування не тільки до проблем транспорту. Транспортна задача виділяється в окрему задачу лінійного програмування визначеністю економічного змісту й особливостями математичної моделі.

8.1 Загальне формулювання транспортної задачі

Однорідний вантаж, зосереджений у m пунктах відправлення в кількостях $a_i \geq 0$ у кожному i -му пункті відправлення $i = 1, \dots, m$, необхідно доставити в кожний з n пунктів призначення в кількостях $b_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$. Вартість перевезення одиниці вантажу з i -го вихідного пункту в j -й пункт призначення дорівнює c_{ij} .

Нехай x_{ij} – кількість вантажу, перевезеного з пункту відправлення i у пункт призначення j .

Потрібно скласти план перевезень так, щоб транспортні витрати були мінімальні.

Для наочності дані задачі заведено оформляти у виді таблиці 7.

Таблиця 7

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення							
		B_1		...	B_j		...	B_n	
A_1	a_1	x_{11}	c_{11}	...	x_{1j}	c_{1j}	...	x_{1n}	c_{1n}
...	
A_i	a_i	x_{i1}	c_{i1}	...	x_{ij}	c_{ij}	...	x_{in}	c_{in}
...	
A_m	a_m	x_{m1}	c_{m1}	...	x_{mj}	c_{mj}	...	x_{mn}	c_{mn}
Потреби		b_1		...	b_j		...	b_n	

Оскільки розглядається однорідний вантаж, потреби пункту призначення можуть задовольнятися за рахунок будь-яких вихідних пунктів.

Розрізняють два типи транспортних задач: закриті, у яких сумарний попит дорівнює сумарним запасам, тобто $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, і відкриті, у яких

сумарний попит менше сумарних запасів, тобто $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$.

Дано математичне формулювання транспортної задачі закритого типу:

Цільова функція – вартість перевезень:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (\min).$$

Обмеження на запаси (всі запаси потрібно вивезти):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Обмеження на потреби (всі потреби потрібно задовольнити):

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тому що x_{ij} – кількість перевезеного вантажу, то $x_{ij} \geq 0$.

Одержали математичну модель замкнутої транспортної задачі:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (\min).$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Для відкритої задачі математична модель будується аналогічно, крім обмежень на запаси (якщо $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m.$$

8.2 Задачі, що зводяться до транспортних

При розгляді транспортної задачі вказувалося, що до схеми транспортної задачі відноситься більш широке коло задач, чим власне транспортні задачі.

Розглянемо коротко задачі, моделі яких подібні з транспортної.

8.2.1 Задача про укладання контрактів

Усякий раз, коли організації потрібно одержати товари з приватних джерел, виробники цих товарів беруть участь у складанні контрактів. Вони пропонують свої умови, у яких указують:

- а) ціну одиниці товару;
- б) максимальну і мінімальну кількість кожного товару, що можуть бути поставлені за зазначеною ціною;
- в) інші умови.

Запропоновані умови відбивають бажання виробника дістати прибуток. Організація повинна укласти контракти так, щоб загальні витрати були мінімальні.

При цьому враховуються транспортні й інші витрати, зв'язані з кожною пропозицією.

Розглянемо просту задачу про укомплектування складів.

Є m постачальників, готових взяти участь в укомплектуванні n складів. Кожен постачальник готовий поставити продукції в кількостях $a_i \geq 0$, ($i = 1, \dots, m$). Кожному складу потрібно продукції в кількостях $b_j \geq 0$,

($j = 1, \dots, n$). Придбання і доставка одиниці продукції від i -го постачальника на j -ий склад дорівнює c_{ij} .

Нехай x_{ij} – кількість продукції, перевезеного від i -го постачальника на j -й склад.

Потрібно скласти план перевезень так, щоб витрати були мінімальні.

Для наочності дані задачі заведено оформляти у вигляді таблиці 8.

Таблиця 8

Постачальники	Запаси	Склади							
		B_1		...	B_j		...	B_n	
A_1	a_1	x_{11}	c_{11}	...	x_{1j}	c_{1j}	...	x_{1n}	c_{1n}
...	
A_i	a_i	x_{i1}	c_{i1}	...	x_{ij}	c_{ij}	...	x_{in}	c_{in}
...	
A_m	a_m	x_{m1}	c_{m1}	...	x_{mj}	c_{mj}	...	x_{mn}	c_{mn}
Потреби		b_1		...	b_j		...	b_n	

Дано математичне формулювання задачі:

Цільова функція – вартість комплектації: $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (\min).$

Обмеження на запаси: потрібно замовити продукції не більш, ніж є в запасі:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m.$$

Обмеження на потреби: на складі потрібно одержати необхідну норму продукції:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n.$$

Тому що x_{ij} – кількість продукції, то $x_{ij} \geq 0$.

Одержали математичну модель, ідентичну моделі транспортної задачі.

8.2.2 Задача розподілу устаткування

Припустимо, на підприємстві є m верстатів різної потужності a_i ($i = 1, \dots, m$), на яких може виготовлятися кожне з n видів виробів. Відомі витрати c_{ij} у грошових одиницях на виготовлення одиниці j -го виробу при виробництві його на i -ому верстаті, а також відома продуктивність p_{ij} (од/год) i -го верстата при виробництві j -го виробу ($j = 1, \dots, n$). Відомо планове завдання по виробництву виробів b_j ($j = 1, \dots, n$).

Потрібно розподілити виробництво виробів на різних верстатах так, щоб мінімізувати сумарні витрати при виконанні планового завдання..

Подамо умову у вигляді таблиці 9.

Таблиця 9

Верс- тат	Ресурс, ве- рстато-год.	Витрати на одиницю виробу											
		B ₁			.	B _j			.	B _n			
A ₁	a ₁	x ₁₁	p ₁₁	c ₁₁	.	x _{1j}	p _{1j}	c _{1j}	...	x _{1n}	p _{1n}	c _{1n}	
...			
A _i	a _i	x _{i1}	p _{i1}	c _{i1}	...	x _{ij}	p _{ij}	c _{ij}	...	x _{in}	p _{in}	c _{in}	
...			
A _m	a _m	x _{m1}	p _{m1}	c _{m1}	...	x _{mj}	p _{mj}	c _{mj}	...	x _{mn}	p _{mn}	c _{mn}	
Потреби		b _l			...	b _j			...	b _n			

Числа x_{ij} – час, впродовж якого i -й верстат зайнятий виробництвом j -го виробу.

Дамо математичне формулювання задачі

Нехай x_{ij} – час, впродовж якого i -й верстат зайнятий виробництвом j -го виробу. Тоді цільова функція – сумарні витрати:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot p_{ij} \cdot x_{ij} \quad (\min).$$

Обмеження на ресурси верстатів (витрати ресурсу кожного верстата на виробництво не більше наявних):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m.$$

Обмеження на виконання планового завдання (випуск виробів не менше плану):

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} x_{ij} \geq b_j, j = 1, \dots, n.$$

Тому що x_{ij} – час роботи верстатів, то $x_{ij} \geq 0$.

Одержали математичну модель задачі розподілу устаткування, аналогічну транспортної моделі:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot p_{ij} \cdot x_{ij} \quad (\min).$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m p_{ij} \cdot x_{ij} \geq b_j, j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

9 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Тема. Транспортна задача (відкрита і замкнута). Задачі, що зводяться до транспортної (задача про закладення контракту, задача розподілу устаткування).

Мета лабораторної роботи

Мають бути придбані наступні **вміння**: визначення змінних для транспортної задачі; визначення типу транспортної задачі; економічний аналіз особливостей відкритої і замкнутої задач.

Мають бути засвоєні наступні **поняття**: відкрита і замкнута задачі.

Робота розрахована на 4 години.

9.1 Завдання до лабораторної роботи 4

Записати умову задачі у вигляді таблиці. Формалізувати задачу. Визначити економічний зміст цільової функції і системи обмежень. Перейти до двоїстої задачі. Вирішити пряму і двоїсту задачі за допомогою одного з пакетів. Проаналізувати відповіді прямої і двоїстої задач. Отримане розв'язання прямої задачі оформити у вигляді таблиці для перевірки виконання обмежень. Зробити порівняння значень цільової функції замкнутої задачі $F_{\text{замк}}$ із значенням цільової функції відкритої задачі $F_{\text{відкр}}$. Зробити економічний висновок.

На дві бази A_1 і A_2 надійшов однорідний вантаж у кількості a_1 т на базу A_1 і a_2 т на базу A_2 . Отриманий вантаж потрібно перевезти у три пункти: b_1 т у пункт B_1 , b_2 т у пункт B_2 , b_3 т у пункт B_3 . Відстані між пунктами відправлення і пунктами призначення зазначені в матриці R . Скласти план перевезень із мінімальними витратами. Вартість одного тонно - кілометра прийняти за одиницю.

1 Вирішити задачу при заданих запасах і потребах.

2 Збільшити запаси на 10%. Додаткова кількість запасів довільно розподілити між пунктами A_1 і A_2 . Потреби залишаються без змін. Вирішити задачу з новими умовами.

Звіт про лабораторну роботу

Повинен містити:

- 1 Умова задачі.
- 2 Формалізація задачі.
- 3 Запис задачі в матричній формі (якщо це можливо).
- 4 Роздрук розв'язання задачі.
- 5 Формалізація двоїстої задачі.
- 6 Роздрук розв'язання двоїстої задачі.
- 7 Економічний аналіз результату.

9.2 Приклад виконання лабораторної роботи 4

9.2.1 Розв'язання замкнутої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n = 2$, $m = 2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в таблиці 10.

Таблиця 10

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		В ₁		В ₂	
A ₁	100	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	150	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Нехай x_{ij} – кількість вантажу, перевезеного з пункту A_i до пункту B_j.
Перевіримо відповідність запасів і потреб:

$$100+150 = 250 = 120+130 = 250.$$

Задача замкнута. Цільова функція F дорівнює вартості всіх перевезень:

$$F = 4x_{11}+2x_{12}+3x_{21}+6x_{22} \text{ (min)}.$$

Система обмежень визначається наступними умовами:

а) кількість вантажів, що вивозяться, дорівнює запасам:

$$x_{11} + x_{12} = 100,$$

$$x_{21} + x_{22} = 150,$$

б) кількість увезених вантажів дорівнює потребам:

$$x_{11} + x_{21} = 120,$$

$$x_{12} + x_{22} = 130,$$

в) кількість вантажів, що вивозяться, невід'ємно:

$$x_{11} \geq 0; x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0; x_{22} \geq 0.$$

Одержали формалізовану задачу:

$$F = 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 6x_{22} \text{ (min).}$$

$$x_{11} + x_{12} = 100,$$

$$x_{21} + x_{22} = 150,$$

$$x_{11} + x_{21} = 120,$$

$$x_{12} + x_{22} = 130,$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0,$$

Запишемо задачу в матричному вигляді.

Випишемо рівняння, що відповідають системі обмежень:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} & & & & = 100, \\ & & x_{21} + x_{22} & & = 150, \\ x_{11} + & & x_{21} & & = 120, \\ & x_{12} + & & x_{22} & = 130. \end{cases}$$

Випишемо матрицю і вектори:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

У матричному вигляді:

$$F = \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{X}} \quad (\min).$$

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{B}},$$

$$\bar{\mathbf{X}} \geq \bar{\mathbf{0}}.$$

Складемо двоїсту задачу.

Випишемо матрицю і вектори:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Пряма задача – задача канонічного типу, всі обмеження – рівності. У двоїстій задачі всі змінні довільного знака.

У матричному вигляді:

$$G = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{Y}} \quad (\max).$$

$$\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} \leq \bar{\mathbf{C}}.$$

Випишемо формалізовану задачу:

$$G = 100y_1 + 150y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} y_1 + y_3 \leq 4, \\ y_1 + y_4 \leq 2, \\ y_2 + y_3 \leq 3, \\ y_2 + y_4 \leq 6. \end{cases}$$

Розв'язавши задачу за допомогою пакету, одержали:

$$x_{11}=0; x_{12}=100; x_{21}=120; x_{22}=30; F= 740.$$

Мінімальна вартість перевезення вантажу – 740 гр.од. Переміщення вантажу від постачальників до споживачів оформимо у вигляді таблиці розподілу (табл. 11).

Таблиця 11

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
		B ₁	B ₂
A ₁	100	0	100
A ₂	150	120	30
Потреби		120	130

За таблицею видно, що всі потреби задоволені і всі запаси вивезені.

Розв'язання двоїстої задачі: $y_1 = -4$; $y_2 = 0$; $y_3 = -3$; $y_4 = 6$; $G = 740$.

Цільові функції прямої і двоїстої задач рівні, тобто задача вирішена вірно.

9.2.2 Розв'язання замкнутої задачі за допомогою пакету Maple

Для початку розв'язання прямої задачі:

> restart:

> with(simplex):

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

> F:=4*x11+2*x12+3*x21+6*x22;

$$F := 4 x_{11} + 2 x_{12} + 3 x_{21} + 6 x_{22}$$

> g1:=x11+x12=100; g2:=x21+x22=150; g3:=x11+x21=120;

g4:=x12+x22=130;

$$g1 := x_{11} + x_{12} = 100$$

$$g2 := x_{21} + x_{22} = 150$$

$$g3 := x_{11} + x_{21} = 120$$

$$g4 := x_{12} + x_{22} = 130$$

```

> minimize(F, {g1,g2,g3,g4}, NONNEGATIVE);
      { x11 = 0, x22 = 30, x12 = 100, x21 = 120 }
> x11:=0: x12:=100: x21:=120: x22:=30: F; {g1,g2,g3,g4};
      740
      { 100 = 100, 150 = 150, 120 = 120, 130 = 130 }

```

Розв'язання двоїстої задачі:

```

> restart:
> with(simplex):
> G:=100*y1+150*y2+120*y3+130*y4;
      G := 100 y1 + 150 y2 + 120 y3 + 130 y4
> d1:=y1+y3<=4; d2:=y1+y4<=2; d3:=y2+y3<=3; d4:=y2+y4<=6;
      d1 := y1 + y3 ≤ 4
      d2 := y1 + y4 ≤ 2
      d3 := y2 + y3 ≤ 3
      d4 := y2 + y4 ≤ 6
> maximize(G, {d1,d2,d3,d4});
      { y1 = 2, y2 = 6, y3 = -3, y4 = 0 }
> y1:=2: y2:=6: y3:=-3: y4:=0: G; {d1,d2,d3,d4};
      740
      { 2 ≤ 2, -1 ≤ 4, 3 ≤ 3, 6 ≤ 6 }

```

9.2.3 Розв'язання відкритої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n = 2$, $m = 2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в таблиці 12.

Таблиця 12

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		B ₁		B ₂	
A ₁	120	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	180	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Нехай x_{ij} - кількість вантажу, перевезеного з пункту A_i до пункту B_j . Перевіримо відповідність запасів і потреб: $120+180=300 > 120+130=250$.
Задача відкрита.

Цільова функція F дорівнює вартості всіх перевезень:

$$F = 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 6x_{22} \text{ (min).}$$

Система обмежень визначається наступними умовами:

а) кількість вантажів, що вивозяться, не більше запасів:

$$x_{11} + x_{12} \leq 120,$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 180,$$

б) кількість увезених вантажів дорівнює потребам:

$$x_{11} + x_{21} = 120,$$

$$x_{12} + x_{22} = 130,$$

в) кількість вантажів, що вивозяться, не негативна:

$$x_{11} \geq 0; x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0; x_{22} \geq 0.$$

Одержали формалізовану задачу:

$$F = 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 6x_{22} \text{ (min).}$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 120,$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 180,$$

$$x_{11} + x_{21} = 120,$$

$$x_{12} + x_{22} = 130,$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0.$$

Випишемо систему обмежень, змінивши знак нерівності в першому і другому обмеженні:

$$\begin{cases} -x_{11} - x_{12} & & & \geq -120, \\ & -x_{21} - x_{22} & & \geq -180, \\ x_{11} + & & x_{21} & = 120, \\ & x_{12} + & & x_{22} = 130. \end{cases}$$

Випишемо матрицю і вектори:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -120 \\ -180 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

У матричному вигляді задачу не можна подати, тому що це задача загального виду.

Складемо двоїсту задачу:

Випишемо матрицю і вектори:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -120 \\ -180 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Пряма задача – задача загального виду. У прямій задачі перше і друге обмеження – нерівність, у двоїстій задачі $y_1 \geq 0$ і $y_2 \geq 0$, а y_3 і y_4 – довільні знаки.

Випишемо формалізовану задачу:

$$G = -120y_1 - 180y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_3 \leq 4, \\ -y_1 + y_4 \leq 2, \\ -y_2 + y_3 \leq 3, \\ -y_2 + y_4 \leq 6, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,$$

$$y_2 \geq 0.$$

Розв'язавши задачу за допомогою пакету, одержали: $x_{11} = 0$; $x_{12} = 120$; $x_{21} = 120$; $x_{22} = 10$; $F = 660$.

Мінімальна вартість перевезення вантажу – 660 гр.од. Переміщення вантажу від постачальників до споживачів оформимо у вигляді таблиці розподілу (табл. 13).

Таблиця 13

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення		Залишок
		B ₁	B ₂	
A ₁	120	0	120	0
A ₂	180	120	10	50
Потреби		120	130	

За таблицею видно, що всі потреби задовільнено.

Розв'язання двоїстої задачі: $y_1 = 4$; $y_2 = 0$; $y_3 = 3$; $y_4 = 6$; $G = 660$.

Цільові функції прямої і двоїстої задач рівні, значить задача вирішена вірно.

Зауваження. При однакових потребах і тарифах перевезень, вартість перевезення для відкритої задачі менше ніж для замкнутої ($660 < 740$). Це пояснюється тим, що при надлишку запасів з'являється воля маневру, тобто вантаж можна переважно вивозити з тих пунктів, де більш дешеві тарифи.

9.2.4 Розв'язання відкритої задачі за допомогою пакету Maple

Для початку розв'язання прямої задачі:

```
> restart;
> with(simplex):
Warning, the protected names maximize and minimize have
been redefined and unprotected
> F:=4*x11+2*x12+3*x21+6*x22;
      F := 4 x11 + 2 x12 + 3 x21 + 6 x22
> g1:=x11+x12<=120; g2:=x21+x22<=180; g3:=x11+x21=120;
g4:=x12+x22=130;
      g1 := x11 + x12 ≤ 120
      g2 := x21 + x22 ≤ 180
      g3 := x11 + x21 = 120
      g4 := x12 + x22 = 130
> minimize(F, {g1,g2,g3,g4}, NONNEGATIVE);
      { x11 = 0, x22 = 10, x21 = 120, x12 = 120 }
> x11:=0: x12:=120: x21:=120: x22:=10: F; {g1,g2,g3,g4};
      660
      { 120 ≤ 120, 130 ≤ 180, 120 = 120, 130 = 130 }
```

Розв'язання двоїстої задачі:

```
> restart;
> with(simplex):
> G:=-120*y1-180*y2+120*y3+130*y4;
      G := -120 y1 - 180 y2 + 120 y3 + 130 y4
> d1:=-y1+y3<=4; d2:=-y1+y4<=2; d3:=-y2+y3<=3; d4:=-y2+y4<=6;
      d1 := -y1 + y3 ≤ 4
      d2 := -y1 + y4 ≤ 2
      d3 := -y2 + y3 ≤ 3
      d4 := -y2 + y4 ≤ 6
> maximize(G, {d1,d2,d3,d4,y1>=0,y2>=0});
      { y2 = 0, y1 = 4, y3 = 3, y4 = 6 }
> y1:=4: y2:=0: y3:=3: y4:=6: G; {d1,d2,d3,d4};
      660
      { -1 ≤ 4, 3 ≤ 3, 6 ≤ 6, 2 ≤ 2 }
```

9.3 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 4

Таблиця 14 – Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 4

Варіант	a1	a2	b1	b2	b3	R
1	200	150	190	100	60	12 15 21 14 8 15
2	150	200	140	100	110	8 20 7 4 14 12
3	150	150	100	100	100	20 3 9 14 10 12
4	250	250	150	170	180	13 7 16 20 9 6
5	220	200	150	100	170	20 17 13 6 10 9
6	200	230	190	100	140	12 5 16 14 10 8
7	200	300	140	150	210	6 11 10 17 6 4
8	200	250	190	150	110	6 1 7 13 4 9
9	150	250	180	120	100	14 6 4 17 10 9
10	250	200	180	100	170	12 8 21 13 4 15
11	200	280	180	170	130	12 21 10 13 15 13
12	200	200	170	120	110	28 12 7 15 14 12
13	210	220	130	140	160	7 3 9 34 10 12
14	150	180	110	120	100	34 10 12 6 5 14
15	160	280	180	120	140	6 13 14 25 14 7
16	260	240	170	160	170	4 7 8 15 11 21

Продовження таблиці 14

Варіант	a1	a2	b1	b2	b3	R
17	250	270	150	170	200	9 16 10 12 18 12
18	250	200	175	125	150	5 13 18 6 10 15
19	250	200	140	160	150	9 15 35 15 35 12
20	230	250	180	170	130	13 9 5 14 5 12
21	100	150	90	110	50	15 21 14 8 17 11
22	150	150	110	90	100	8 20 8 4 14 12
23	200	190	130	160	100	20 13 15 14 10 20
24	250	200	110	190	150	13 7 16 20 9 6
25	220	280	150	170	180	10 17 13 6 10 9
26	230	200	180	150	100	11 5 16 14 10 8
27	230	320	200	180	170	6 11 12 17 6 4
28	210	130	120	120	100	9 6 17 13 4 9
29	150	140	90	110	90	14 6 14 17 10 9
30	220	130	100	120	130	12 8 21 13 4 15

10 ЗАДАЧА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

Припустимо, що матеріальне виробництво поділяється на n галузей. Плановий обсяг валової продукції кожної галузі позначимо x_1, x_2, \dots, x_n . Кожна з галузей для виробництва своєї продукції частково витрачає власні кошти, а частково використовує кошти, одержані від інших галузей. *Задача міжгалузевого балансу* полягає в такому плануванні виробництва, щоб забезпечити максимальний сумарний прибуток по всіх галузях.

Витрати i -ої галузі на виробництво одиниці продукції j -ої галузі задаються матрицею коефіцієнтів витрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи a_{ij} матриці A можуть мати подвійний сенс:

1 a_{ij} – витрати продукції i -ої галузі на виробництво одиниці продукції j -ої галузі (бартер).

2 a_{ij} – розмір капіталовкладень з фондів накопичень i -ої галузі на виробництво одиниці продукції j -ої галузі.

Ціни на одиницю продукції кожної галузі задані:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язання задачі залежить від змісту матриці A .

10.1 Задача типу 1: a_{ij} – витрати продукції

Формалізація задачі

Нехай x_i – валовий випуск i -ї галузі, $i = 1, \dots, n$. На власне виробництво 1-ї галузі споживає $a_{11}x_1$ зробленої нею продукції. На виробництво x_2 товарів 2-ї галузі піде $a_{12}x_2$ продукції 1-ї галузі, і т.д., а на виробництво x_n товарів n -ї галузі піде $a_{1n}x_n$ продукції 1-ї галузі. Разом буде витрачено

$\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j$ зробленої продукції. Кількість продукції, що залишилася для про-

дажу, буде дорівнювати:

$$K_1 = x_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j .$$

Аналогічно визначається кінцева кількість продукції для кожної галузі:

$$K_i = x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Величини K_i називаються кінцевим продуктом i -ї галузі.

Цільова функція – це ціна всієї проданої продукції:

$$F = \sum_{i=1}^n c_i K_i \quad (\max)$$

Система обмежень задачі визначається наступними умовами:

- 1 Обмеженістю виробничих потужностей, тобто обмеження на валовий випуск продукції x_i .
- 2 Обмеженістю ринкового попиту, тобто обмеження на кінцевий продукт K_i .
- 3 Асортиментними обмеженнями типу $K_1 : K_2 = 1 : 4$ (наприклад, до одного автомобіля – чотири колеса).

4 Невід'ємністю величин кінцевого продукту, тому що не можна витратити більше, чим зроблено.

10.2 Задача типу 2: a_{ij} – витрати в грошовому вираженні

Формалізація задачі

Нехай x_i – валовий випуск i -ї галузі, $i = 1, \dots, n$. У даному випадку кінцевий продукт збігається з валовим продуктом $k_i = x_i$. Але від виторгу $c_i x_i$ i -ї галузі від продажу зробленого продукту потрібно відняти суми, витрачені на виробництво товарів усіх галузей $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$. Тому прибуток i -ї галузі буде дорівнює:

$$P_i = c_i x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Цільова функція – це ціна всієї проданої продукції:

$$F = \sum_{i=1}^n P_i \quad (\max).$$

Система обмежень задачі 2 визначається тими ж обмеженнями (1-4), що і для задачі 1, але з'являється додаткове обмеження, зв'язане з розмірами фондів накопичення галузей D_i :

Витрати на виробництво не можуть перевищувати розмірів фонду накопичення:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq D_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

11 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5. ЗАДАЧА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

Тема. Задача міжгалузевого балансу.

Мета лабораторної роботи

Мають бути придбані наступні **вміння**: складання математичної моделі задачі міжгалузевого балансу для двох типів задач: матриця коефіцієнтів витрат – витрати продукції, матриця коефіцієнтів витрат – розмір капіталовкладень.

Мають бути засвоєні наступні **поняття**: задача міжгалузевого балансу; матриця коефіцієнтів витрат.

Робота розрахована на 4 години.

11.1 Завдання до лабораторної роботи 5

Формалізувати задачу. Зазначити економічний зміст цільової функції і системи обмежень. Перейти до двоїстої задачі. Вирішити пряму і двоїсту задачі за допомогою одного з пакетів. Проаналізувати відповіді прямої і двоїстої задач. Зробити економічний висновок.

Є тригалузева балансова модель із матрицею коефіцієнтів витрат

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} – витрати i -ої галузі на виробництво одиниці продукції j -ої галузі (у товарному або в грошовому вираженні). Фонди накопичення галузей задані числами d_1, d_2, d_3 .

Виробничі потужності галузей обмежують можливості її валового випуску числами r_1, r_2, r_3 . Ціна одиниці кінцевого продукту 1, 2 і 3 галузей відповідно дорівнює : c_1, c_2, c_3 .

Визначити оптимальний валовий випуск усіх галузей, що максимізує вартість сумарного кінцевого продукту, якщо на кінцевий продукт накладається деякі обмеження.

Звіт про лабораторну роботу

Повинен містити:

- 1 Умова задачі.
- 2 Формалізація задачі.
- 3 Роздрук розв'язання задачі.
- 4 Формалізація двоїстої задачі.
- 5 Роздрук розв'язання двоїстої задачі.
- 6 Економічний аналіз результату.

11.2 Приклад виконання лабораторної роботи 5

11.2.1 Приклад 1 (a_{ij} – витрати в грошовому вираженні)

Є двогалузева балансова модель із матрицею коефіцієнтів витрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,22 & 0,15 \end{pmatrix}$, де a_{ij} – витрати i -ої галузі на виробництво одиниці продукції j -ї галузі в грошовому виразі.

Фонди накопичення галузей задані: $d_1 = 400$, $d_2 = 200$. Виробничі потужності галузей, що обмежують можливості їхнього валового випуску задані числами: $r_1 = 350$, $r_2 = 280$. Ціни одиниці кінцевого продукту i -ї галузі задані числами: $c_1 = 8$, $c_2 = 7$.

Визначити оптимальний валовий випуск усіх галузей, що максимізує вартість сумарного кінцевого продукту, якщо на кінцевий продукт K_i i -ї галузі накладається обмеження $K_1 : K_2 = 3 : 4$.

Формалізація задачі

Нехай x_i – валовий випуск i -ї галузі, $i = 1, 2$. Тому що на власне виробництво, а також на виробництво продукції 2-ї галузі перша галузь зроблену продукцію не витрачає, сумарний кінцевий продукт дорівнює зробленої продукції: $K_1 = x_1$.

Уся зроблена продукція буде продана і виторг складає $c_1 x_1$.

Щоб визначити прибуток 1-ї галузі, з отриманого нею виторгу потрібно відняти суми, витрачені на виробництво продукції 1-ї і 2-ї галузей: $P_1 = c_1 x_1 - (a_{11} x_1 + a_{12} x_2)$.

Аналогічно для 2-ої галузі $K_2 = x_2$, $P_2 = c_2x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$.

Підставляючи числові значення, одержимо вид прибутку 1-й і 2-й галузей: $P_1 = 8x_1 - (0,1x_1 + 0,2x_2)$, $P_2 = 7x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2)$.

Сумарний прибуток об'єднання дорівнює $P_1 + P_2$. Отже, цільова функція задачі така: $F = 8x_1 - (0,1x_1 + 0,2x_2) + 7x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2)$ (max). Привівши подібні члени, одержимо: $F = 7,62x_1 + 6,45x_2$ (max).

Обмеження задачі.

1) За фондами накопичення

$$0,01x_1 + 0,2x_2 \leq 400,$$

$$0,22x_1 + 0,15x_2 \leq 200.$$

2) За комплектністю: $K_1 : K_2 = 3 : 4$. Ця умова дорівнює умові

$$K_1 = \frac{3}{4} K_2, \text{ тобто умові } x_1 = \frac{3}{4} x_2 \text{ або } x_1 - \frac{3}{4} x_2 = 0.$$

3) За виробничими потужностями: $x_1 \leq 350$, $x_2 \leq 280$.

4) Випуск продукції: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Формалізована задача має вид:

$$F = 7,62x_1 + 6,45x_2 \text{ (max);}$$

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 0,2x_2 \leq 400, \\ 0,22x_1 + 0,15x_2 \leq 200, \\ x_1 - \frac{3}{4}x_2 = 0, \\ x_1 \leq 350, \\ x_2 \leq 280, \end{cases} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

11.2.2 Розв'язання задачі за допомогою пакету Maple

> restart:

> with(simplex):

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

> F:=7.62*x1+6.45*x2 ;

$$F := 7.62 x1 + 6.45 x2$$

```

> g1:=0.01*x1+0.2*x2<=400; g2:=0.22*x1+0.15*x2<=200; g3:=x1-
3/4*x2=0; g4:=x1<=350; g5:=x2<=280;
      g1 := .01 x1 + .2 x2 ≤ 400
      g2 := .22 x1 + .15 x2 ≤ 200
      g3 := x1 -  $\frac{3}{4}$  x2 = 0
      g4 := x1 ≤ 350
      g5 := x2 ≤ 280
> maximize(F, {g1,g2,g3,g4,g5}, NONNEGATIVE);
      { x1 = 210., x2 = 280. }
> x1:=210: x2:=280: F; {g1,g2,g3,g4,g5};
      3406.20
      { 0 = 0, 58.10 ≤ 400, 88.20 ≤ 200, 210 ≤ 350, 280 ≤ 280 }

```

11.2.3 Приклад 2 (a_{ij} – витрати продукції)

Є двогалузева балансова модель із матрицею коефіцієнтів витрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,22 & 0,15 \end{pmatrix}$, де a_{ij} – витрати i -й галузі на виробництво одиниці продукції j -й галузі в товарному вираженні:

Виробничі потужності галузей обмежують можливості її валового випуску числами: $r_1 = 350$, $r_2 = 280$. Ціни одиниці кінцевого продукту i -й галузі задані числами: $c_1 = 8$, $c_2 = 7$.

Визначити оптимальний валовий випуск усіх галузей, що максимізує вартість сумарного кінцевого продукту, якщо на кінцевий продукт K_i i -ой галузі накладається обмеження $K_2 \leq 50$.

Формалізація задачі

Нехай x_i – валовий випуск i -й галузі, $i = 1, 2$. На власне виробництво 1-а галузь витратить $a_{11}x_1$ зробленої нею продукції. На виробництво x_2 товарів 2-ої галузі піде $a_{12}x_2$ продукції 1-ої галузі. Разом буде витрачене $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ зробленої продукції. Кількість продукції, що залишилася для продажу, буде дорівнювати: $K_1 = x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)$.

Аналогічно визначається кінцева кількість продукції 2-ої галузі: $K_2 = x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$.

Підставляючи конкретні числові значення, одержимо:

$$K_1 = x_1 - (0,1x_1 + 0,2x_2),$$

$$K_2 = x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2).$$

Цільова функція - це ціна всієї проданої продукції:

$$F = c_1 K_1 + c_2 K_2 \quad (\max).$$

Підставляючи в останню формулу значення c_1 , c_2 і вирази K_1 , K_2 , одержуємо вираз для цільової функції:

$$F = 8(x_1 - (0,1x_1 + 0,2x_2)) + 7(x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2)) \quad (\max).$$

Привівши подібні члени, одержимо: $F = 5,66x_1 + 4,35x_2 \quad (\max)$.

Обмеження задачі:

1) За кількістю кінцевого продукту (обмеження $K_2 \leq 50$).

Умова $K_2 \leq 50$ означає: $x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2) \leq 50$, що дає

$$-0,22x_1 + 0,85x_2 \leq 50.$$

2) За виробничими потужностями: $x_1 \leq 350$, $x_2 \leq 280$.

3) Розмір кінцевого продукту невід'ємна: $K_1 \geq 0$, $K_2 \geq 0$;

$$x_1 - (0,1x_1 + 0,2x_2) \geq 0; \quad x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2) \geq 0;$$

$$\text{що дає: } 0,9x_1 - 0,2x_2 \geq 0; \quad -0,22x_1 + 0,85x_2 \geq 0.$$

4) Невід'ємний випуск продукції: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Формалізована задача має вид:

$$F = 5,66x_1 + 4,35x_2 \quad (\max);$$

$$\begin{cases} -0,22x_1 + 0,85x_2 \leq 50, \\ x_1 \leq 350, \\ x_2 \leq 280, \\ 0,9x_1 - 0,2x_2 \geq 0, \\ -0,22x_1 + 0,85x_2 \geq 0, \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

10.2.4 Розв'язання задачі за допомогою пакету Maple

```

> restart:
> with(simplex):
Warning, the protected names maximize and minimize have
been redefined and unprotected
> F:=5.66*x1+4.35*x2;
      F := 5.66 x1 + 4.35 x2

>      g1:=-0.22*x1+0.85*x2<=50;g2:=x1<=350;      g3:=x2<=280;
g4:=0.9*x1-0.2*x2>=0; g5:=-0.22*x1+0.85*x2>=0;
      g1 := -.22 x1 + .85 x2 ≤ 50
      g2 := x1 ≤ 350
      g3 := x2 ≤ 280
      g4 := 0 ≤ .9 x1 - .2 x2
      g5 := 0 ≤ -.22 x1 + .85 x2

> maximize(F, {g1,g2,g3,g4,g5}, NONNEGATIVE);
      { x2 = 149.4117647, x1 = 350.0000000 }

> x1:=350: x2:=149.41: F; {g1,g2,g3,g4,g5};
      2630.9335
      { 49.9985 ≤ 50, 350 ≤ 350, 149.41 ≤ 280, 0 ≤ 49.9985, 0 ≤ 285.118 }

```

10.3 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 5

Таблиця 15 – Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 5

Варіант 1	Варіант 2
$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.03 & 0.50 \\ 0.04 & 0.05 & 0.30 \\ 0.3 & 0.00 & 0.05 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2 = 1:2$; $k_3 \leq 100$; $R = (300, 200, 400)$, $C = (3, 2, 4)$, $F = (200, 400, 350)$</p>	$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.09 \\ 0.24 & 0.15 & 0.03 \\ 0.3 & 0.01 & 0.05 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 1:4:3$; $R = (320, 400, 200)$, $C = (5, 3, 2)$.</p>

<p>Варіант 3</p> $A = \begin{pmatrix} 0.050.120.50 \\ 0.320.010.15 \\ 0.200.050.00 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2 = 1:3$; $k_3 \geq 10$; $R = (400, 200, 300)$, $C = (2, 3, 5)$, $F = (250, 340, 250)$</p>	<p>Варіант 4</p> $A = \begin{pmatrix} 0.000.320.11 \\ 0.400.010.25 \\ 0.250.180.04 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 2:1:3$; $R = (350, 230, 300)$, $C = (1, 4, 6)$.</p>
<p>Варіант 5</p> $A = \begin{pmatrix} 0.030.200.51 \\ 0.230.100.00 \\ 0.140.500.30 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2=3:2$; $k_3 \leq 50$; $R = (420, 200, 300)$, $C = (2, 1, 3)$, $F = (400, 200, 550)$.</p>	<p>Варіант 6</p> $A = \begin{pmatrix} 0.210.070.12 \\ 0.060.030.15 \\ 0.200.140.03 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 2:1:2$; $R = (240, 420, 230)$, $C = (2, 4, 3)$.</p>
<p>Варіант 7</p> $A = \begin{pmatrix} 0.150.230.60 \\ 0.300.000.08 \\ 0.400.050.11 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2 = 2:3$; $k_3 \geq 15$; $R = (300, 250, 420)$, $C = (3, 2, 5)$, $F = (320, 320, 250)$.</p>	<p>Варіант 8</p> $A = \begin{pmatrix} 0.100.300.00 \\ 0.400.310.25 \\ 0.050.280.04 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 1:1:3$; $R = (400, 340, 300)$, $C = (4, 3, 6)$.</p>
<p>Варіант 9</p> $A = \begin{pmatrix} 0.200.350.09 \\ 0.000.210.15 \\ 0.240.100.23 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2 = 3:1$; $k_3 \leq 80$; $R = (500, 300, 400)$, $C = (5, 3, 4)$, $F = (300, 450, 350)$.</p>	<p>Варіант 10</p> $A = \begin{pmatrix} 0.200.030.10 \\ 0.400.000.05 \\ 0.070.140.24 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 3:4:1$; $R = (400, 350, 280)$, $C = (4, 2, 3)$.</p>

<p>Варіант 11</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.030.50 \\ 0.300.000.05 \\ 0.040.050.30 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2 = 1:2$; $k_3 \leq 100$; $R = (300, 200, 400)$, $C = (3, 2, 4)$, $F = (200, 400, 350)$.</p>	<p>Варіант 12</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.210.070.12 \\ 0.060.030.15 \\ 0.200.140.03 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 2:1:2$; $R = (240, 420, 230)$, $C = (2, 4, 3)$.</p>
<p>Варіант 13</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.100.300.00 \\ 0.400.310.25 \\ 0.050.280.04 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2 = 1:3$; $k_3 \geq 10$; $R = (400, 200, 300)$, $C = (2, 3, 5)$ $F = (250, 340, 250)$.</p>	<p>Варіант 14</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.050.120.50 \\ 0.320.010.15 \\ 0.200.050.00 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 1:1:3$; $R = (400, 340, 300)$, $C = (4, 3, 6)$.</p>
<p>Варіант 15</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.350.09 \\ 0.000.210.15 \\ 0.240.100.23 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2 = 3:2$; $k_3 \leq 50$; $R = (420, 200, 300)$, $C = (2, 1, 3)$, $F = (400, 200, 550)$.</p>	<p>Варіант 16</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.030.200.51 \\ 0.230.100.00 \\ 0.140.500.30 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 3:4:1$; $R = (400, 350, 280)$, $C = (4, 2, 3)$.</p>
<p>Варіант 17</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.100.300.09 \\ 0.300.010.05 \\ 0.240.150.03 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2 = 2:3$; $k_3 \geq 15$; $R = (300, 250, 420)$, $C = (3, 2, 5)$, $F = (320, 320, 250)$.</p>	<p>Варіант 18</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.150.230.60 \\ 0.300.000.08 \\ 0.400.050.11 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 1:4:3$; $R = (320, 400, 200)$, $C = (5, 3, 2)$.</p>

<p>Варіант 19</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.000.320.11 \\ 0.400.010.25 \\ 0.250.180.04 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2 = 3:1$; $k_3 \leq 80$; $R = (500, 300, 400)$, $C = (5, 3, 4)$, $F = 300, 450, 350$).</p>	<p>Варіант 20</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.030.10 \\ 0.400.000.05 \\ 0.070.140.24 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 2:1:3$; $R = (350, 230, 300)$, $C = (1, 4, 6)$.</p>
<p>Варіант 21</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.150.230.60 \\ 0.300.000.08 \\ 0.400.050.11 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 1:4:3$; $R = (320, 400, 200)$, $C = (5, 3, 2)$, $F = (320, 320, 250)$.</p>	<p>Варіант 22</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.100.300.09 \\ 0.300.010.05 \\ 0.240.150.03 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2 = 2:3$; $k_3 \geq 15$; $R = (300, 250, 420)$, $C = (3, 2, 5)$.</p>
<p>Варіант 23</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.350.09 \\ 0.000.210.15 \\ 0.240.100.23 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 2:1:3$; $R = (350, 230, 300)$, $C = (1, 4, 6)$, $F = (300, 450, 350)$.</p>	<p>Варіант 24</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.000.320.11 \\ 0.400.010.25 \\ 0.250.180.04 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2 = 3:1$; $k_3 \leq 80$; $R = (500, 300, 400)$, $C = (5, 3, 4)$.</p>
<p>Варіант 25</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.030.50 \\ 0.300.000.05 \\ 0.040.050.30 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 2:1:2$; $R = (240, 420, 230)$, $C = (2, 4, 3)$, $F = (200, 400, 350)$.</p>	<p>Варіант 26</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.210.070.12 \\ 0.060.030.15 \\ 0.200.140.03 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2 = 1:2$; $k_3 \leq 100$; $R = (300, 200, 400)$, $C = (3, 2, 4)$.</p>

<p>Варіант 27</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.12 & 0.50 \\ 0.32 & 0.01 & 0.15 \\ 0.20 & 0.05 & 0.00 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 1:1:3$; $R = (400, 340, 300)$, $C = (4, 3, 6)$, $F = (250, 340, 250)$.</p>	<p>Варіант 28</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.30 & 0.00 \\ 0.40 & 0.31 & 0.25 \\ 0.05 & 0.28 & 0.04 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2 = 1:3$; $k_3 \geq 10$; $R = (400, 200, 300)$, $C = (2, 3, 5)$.</p>
<p>Варіант 29</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.20 & 0.51 \\ 0.23 & 0.10 & 0.00 \\ 0.14 & 0.50 & 0.30 \end{pmatrix}$ <p>грошових одиниць. $k_1:k_2:k_3 = 3:4:1$; $R = (400, 350, 280)$, $C = 4, 2, 3$, $F = (400, 200, 550)$.</p>	<p>Варіант 30</p> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.03 & 0.10 \\ 0.40 & 0.00 & 0.05 \\ 0.07 & 0.14 & 0.24 \end{pmatrix}$ <p>товарних одиниць. $k_1:k_2 = 3:2$; $k_3 \leq 50$; $R = (420, 200, 300)$, $C = (2, 1, 3)$.</p>

11 ЗАДАЧА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

11.1 Теоретичні відомості

Задача математичного програмування у якій цільова функція і/або обмеження нелінійні, називається нелінійною.

Ці задачі складають великий клас настільки складних задач, що для них досі немає універсальних методів точного розв'язання. Але є методи для окремих спеціальних класів.

Одним з таких класів є задача, у якій цільова функція має квадратичну складову, а обмеження – лінійні функції. Така задача відноситься до квадратичного програмування.

У якості основної розглядають задачу мінімізації:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j \quad (\min);$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m;$$
$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

Якщо в задачі квадратичного програмування цільова функція максимізується, або в системі обмежень є знак \geq , то їх завжди можна звести до вищенаведеної форми.

У випадку нелінійного програмування методи розв'язання задачі зовсім відмінні від методів розв'язання задач лінійного програмування.

Нагадаємо, що значення функції $f(A)$ називається максимумом (мінімумом) функції $f(X)$, якщо воно є найбільшим (найменшим) в деякому околоті точки A . Відповідне значення аргументу A називається точкою максимуму (мінімуму). Максимуми та мінімуми функції називаються екстремумами функції, а точки максимуму и мінімуму – точками екстремуму.

Однак екстремум не завжди є найбільшим (найменшим) значенням функції в деякій області, а в задачі математичного програмування треба

знайти саме найбільше (найменше) значення цільової функції в області розв'язання системи обмежень.

На відміну від задачі ЛП, у якої оптимальне розв'язання завжди знаходять на границі області рішень задачі, цільова функція задачі нелінійного програмування може мати екстремум як на границі, так і у середині багатокутника рішень.

Розглянемо алгоритм знаходження найбільшого значення функції в деякій області СОБ, (найменше значення знаходиться аналогічно).

1 Знаходимо безумовний екстремум функції F . Перевіряємо, чи знаходиться точка екстремуму в СОБ. Якщо „так” – запам'ятовуємо її координати та значення функції в цій точці.

2 Знаходимо умовний екстремум функції F на кожній границі області відповідно. Перевіряємо, чи знаходиться точка екстремуму в СОБ. Якщо „така” – запам'ятовуємо її координати та значення функції в цій точці

3 Знаходимо значення функції у всіх кутових точках області.

4 Порівняємо всі знайдені значення функції. Обираємо найбільше значення. Відповідна точка и буде точкою максимуму в заданій області обмежень.

Приклад. Розглянемо задачу, в якій цільова функція нелінійна, а система обмежень задана лінійними функціями.

$$U = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 3x_2 \text{ (max)}$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \geq 13 \\ 3x_1 + x_2 \leq 39 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Побудуємо графік рішень системи обмежень (рис. 15).

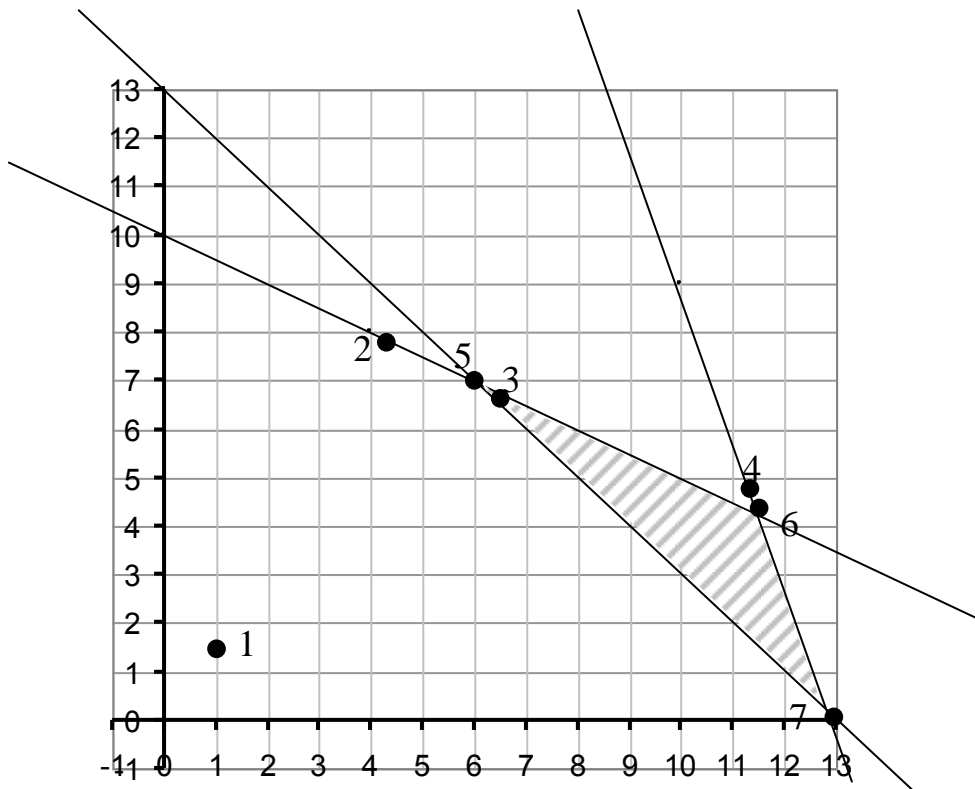


Рисунок 15

Знаходимо по черзі:

1 Безумовний екстремум – не попадає в область.

2 Умовний екстремум якщо $x_1 + 2x_2 = 20$:

$x_1 = 4.2, x_2 = 7.9$ $U(4.2; 7.9) = 47.95$ – не попадає в область.

3 Умовний екстремум якщо $x_1 + x_2 = 13$:

$x_1 = 6.25, x_2 = 6.75$ $U(6.25; 6.75) = 51.875$ – попадає в область.

4 Умовний екстремум якщо при $3x_1 + x_2 = 39$:

$x_1 = 11.35, x_2 = 4.95$ $U(11.35; 4.95) = 115.775$ – не попадає в область.

5 Розв'язуємо систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 13 \end{cases}$, $x_1 = 6, x_2 = 7$ $U(6; 7) = 52$.

6 Розв'язуємо систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 20 \\ 3x_1 + x_2 = 39 \end{cases}$, $x_1 = 11.6, x_2 = 4.2$ $U(11.6; 4.2) = 116.4$.

7. Розв'язуємо систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 13 \\ 3x_1 + x_2 = 39 \end{cases}$, $x_1 = 13, x_2 = 0$ $U(13; 0) = 143$.

Випишуємо точки, які попали в область:

$$x_1 = 6.25, x_2 = 6.75 \quad U(6.25; 6.75) = 51.875$$

$$x_1 = 6, x_2 = 7 \quad U(6; 7) = 52.$$

$$x_1 = 11.6, x_2 = 4.2 \quad U(11.6; 4.2) = 116.4.$$

$$x_1 = 13, x_2 = 0 \quad U(13; 0) = 143.$$

Як бачимо, найбільшим значенням функції U при умові виконання системи обмежень, буде $x_1 = 13, x_2 = 0 \quad U(13; 0) = 143$.

При вивченні вищої математики розглядались методи пошуку екстремумів функцій багатьох змінних. Але ми будемо вирішувати задачу нелінійного програмування за допомогою пакету *Maple* (Додаток А).

11.2 Приклад розв'язання задачі нелінійного програмування в пакеті Maple

Знайти максимальне значення функції F на області, заданою системою обмежень.

$$\begin{cases} F = 9x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 & (\max), \\ x_1 + 4x_2 \leq 52, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 64. \end{cases}$$

Розв'язання

Розв'яжемо задачу за допомогою пакету MAPLE.

> restart;

> readlib(extrema);

> F:=9*x1+2*x2-x1*x1-x2*x2;

$$F := 9x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

> **q1:=x1+4*x2; b1:=52;**

$$q1 := x1 + 4 x2$$

$$b1 := 52$$

> **q2:=x1-x2; b2:=2;**

$$q2 := x1 - x2$$

$$b2 := 2$$

> **q3:=7*x1+3*x2; b3:=64;**

$$q3 := 7 x1 + 3 x2$$

$$b3 := 64$$

> **sog:={q1<=b1,q2<=b2,q3>=b3};**

$$sog := \{ x1 + 4 x2 \leq 52, x1 - x2 \leq 2, 64 \leq 7 x1 + 3 x2 \}$$

> **inequal(sog,x1=0..18,x2=0..14,optionsexcluded=(color=white));**

Результат виконання команди – на рис. 16.

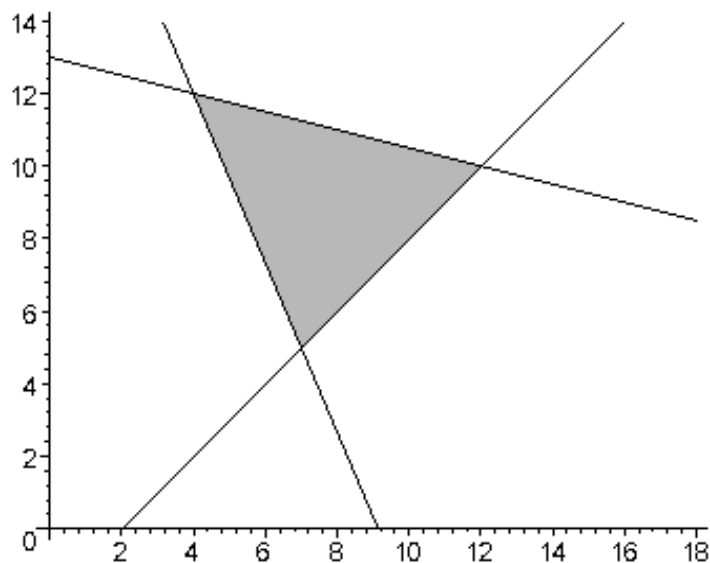


Рисунок 16

Команда пошуку безумовного екстремуму:

> **extrema(F,{},{x1,x2},'s'); s;**

$$\left\{ \frac{85}{4} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ x1 = \frac{9}{2}, x2 = 1 \right\} \right\}$$

Команда перевірки системи обмежень для знайденого розв'язання:

**> x1:=9./2;x2:=1.;Fex:=evalf(F,4); x1:=9/2: x2:=1: q1<=b1; q2<=b2;
q3>=b3; x1:='x1': x2:='x2':**

$x1 := 4.500000000$

$x2 := 1.$

$Fex := 21.25$

$8.500000000 \leq 52$

$3.500000000 \leq 2$

$64 \leq 34.50000000$

Команда пошуку екстремуму на границі, заданій 1-м обмеженням:

> extrema(F,{q1=b1},{x1,x2},'s');s;

$\left\{ \frac{-1531}{17} \right\}$

$\left\{ \left\{ x2 = \frac{191}{17}, x1 = \frac{120}{17} \right\} \right\}$

Команда перевірки системи обмежень для знайденого розв'язання:

**> x1:=120./17;x2:=191./17; Fex:=evalf(F,4); q1<=b1; q2<=b2;
q3>=b3; x1:='x1': x2:='x2':**

$x1 := 7.058823529$

$x2 := 11.23529412$

$Fex := -90.12$

$52.000000001 \leq 52$

$-4.176470591 \leq 2$

$64 \leq 83.11764706$

Команда пошуку екстремуму на границі, заданій 2-м обмеженням:

> extrema(F,{q2=b2},{x1,x2},'s');s;

$\left\{ \frac{161}{8} \right\}$

$\left\{ \left\{ x2 = \frac{7}{4}, x1 = \frac{15}{4} \right\} \right\}$

Команда перевірки системи обмежень для знайденого розв'язання:

**> x1:=15./4;x2:=7./4; Fex:=evalf(F,4); q1<=b1; q2<=b2; q3>=b3;
x1:='x1': x2:='x2':**

$x1 := 3.750000000$

$x2 := 1.750000000$

$Fex := 20.13$

$10.75000000 \leq 52$

$2.000000000 \leq 2$

$$64 \leq 31.50000000$$

Команда пошуку екстремуму на границі, заданій 3-м обмеженням:

```
> extrema(F,{q3=b3},{x1,x2},'s');s;
      { 1449 }
      { 232 }
      { { x2 = 293/116, x1 = 935/116 } }
```

Команда перевірки системи обмежень для знайденого розв'язання:

```
> x1:=935./116; x2:=293./116; Fex:=evalf(F,4); q1<=b1; q2<=b2;
q3>=b3; x1:='x1'; x2:='x2':
      x1 := 8.060344828
      x2 := 2.525862069
      Fex := 6.249
      18.16379311 ≤ 52
      5.534482759 ≤ 2
      64 ≤ 64.00000001
```

Команда пошуку розв'язання системи із 1-го і 2-го рівняння:

```
> solve({q1=b1,q2=b2});
      { x2 = 10, x1 = 12 }
> x1:=12;x2:=10:F_ex_1_2:=evalf(F,4);
      F_ex_1_2 := -116.
```

Команда пошуку розв'язання системи із 3-го і 2-го рівняння:

```
> solve({q3=b3,q2=b2});
      { x2 = 5, x1 = 7 }
> x1:=7;x2:=5:F_ex_2_3:=evalf(F,4); x1:='x1';x2:='x2':
      F_ex_2_3 := -1.
```

Команда пошуку розв'язання системи із 3-го і 1-го рівняння:

```
> solve({q3=b3,q1=b1});
      { x2 = 12, x1 = 4 }
> x1:=4;x2:=12:F_ex_2_3:=evalf(F,4); x1:='x1';x2:='x2':
      F_ex_2_3 := -100.
```

Для зручності аналізу отриманих рішень зведемо їх в таблицю 16:

Таблиця 16

№ п/п	Тип екстремуму	План	Цільова функція	Система обмежень
1	Безумовний	$x_1 := \frac{9}{2} \quad x_2 := 1$	$F_{ex} := 21.25$	Не виконується
2	На границі, заданій 1-м обмеженням	$x_1 := \frac{120}{17} \quad x_2 := \frac{191}{17}$	$F_{ex} := -90.06$	Виконується
3	На границі, заданій 2-м обмеженням	$x_1 := \frac{15}{4} \quad x_2 := \frac{7}{4}$	$F_{ex} := 20.12$	Не виконується
4	На границі, заданій 3-м обмеженням	$x_1 := \frac{935}{116} \quad x_2 := \frac{293}{116}$	$F_{ex} := 6.246$	Не виконується
5	Точка перетину прямих 1 і 2	$\{x_2 = 10, x_1 = 12\}$	$F_{ex_1_2} := -116.$	Виконується
6	Точка перетину прямих 3 і 2	$\{x_2 = 5, x_1 = 7\}$	$F_{ex_2_3} := -1.$	Виконується
7	Точка перетину прямих 1 і 3	$\{x_2 = 12, x_1 = 4\}$	$F_{ex_2_3} := -100.$	Виконується

Розв'язання знаходять серед тих, для яких виконується система обмежень. Це розв'язання 2, 5, 6, 7. Найбільше значення $F = -1$ цільова функція приймає у точці $x_1 = 7$, $x_2 = 5$.

Висновок

Координати оптимальної точки (точки максимуму): $x_1 = 7$, $x_2 = 5$.
При цьому цільова функція приймає найбільше значення $F = -1$.

12 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Тема: Задача квадратичного програмування.

Мета лабораторної роботи

Повинні бути придбані наступні **вміння**: пошук розв'язання задачі квадратичного програмування.

Робота розрахована на 4 години.

12.1 Завдання до лабораторної роботи 6

Вирішити формалізовану задачу квадратичного програмування.
Зробити висновок.

Звіт з лабораторної роботи

Повинен містити:

- 1 Умова задачі.
- 2 Графік області обмежень.
- 3 Роздрук розв'язання задачі.
- 4 Намалювати на графіку області обмежень всі знайдені точки
- 5 Аналіз результату.

12.2 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 6

Таблиця 17 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 6

Варіант 1 $\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	Варіант 2 $\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ 2x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	Варіант 4 $\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Продовження таблиці 17

<p>Варіант 5</p> $\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	<p>Варіант 6</p> $\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
<p>Варіант 7</p> $\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	<p>Варіант 8</p> $\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
<p>Варіант 9</p> $\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	<p>Варіант 10</p> $\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
<p>Варіант 11</p> $\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	<p>Варіант 12</p> $\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ -x_1 - 2x_2 \leq -2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
<p>Варіант 13</p> $\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -2x_1 - x_2 \leq -4, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	<p>Варіант 14</p> $\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
<p>Варіант 15</p> $\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 0, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	<p>Варіант 16</p> $\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ -2x_1 - x_2 \leq -2, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
<p>Варіант 17</p> $\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	<p>Варіант 18</p> $\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Продовження таблиці 17

Варіант 19	Варіант 20
$\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 21	Варіант 22
$\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 23	Варіант 24
$\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 25	Варіант 26
$\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ -x_1 - 2x_2 \leq -2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 27	Варіант 28
$\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -2x_1 - x_2 \leq -4, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 29	Варіант 30
$\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 0, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ -2x_1 - x_2 \leq -2, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

13 САМОСТІЙНА РОБОТА

Тема. Визначення типу задачі лінійного програмування. Розв’язання прямої (при необхідності – двоїстої) задачі. Інтерпретація результатів розрахунків.

Мета самостійної роботи

Мають бути придбані наступні **вміння**: правильне визначення типу неформалізованої задачі, запис її математичної моделі.

13.1 Завдання до самостійної роботи

Вимоги до виконання завдання 1.

Вирішити задачу лінійного програмування.

Звіт повинний містити:

- 1 Умова задачі.
- 2 Формалізація задачі.
- 3 Графічне розв’язання задачі (для завдання 1).
- 4 Запис задачі в матричній формі (якщо можливо).
- 5 Роздрук розв’язання задачі.
- 6 Формалізація двоїстої задачі.
- 7 Роздрук розв’язання двоїстої задачі.
- 8 Економічний аналіз результату.

13.2 Індивідуальні завдання до самостійної роботи

Варіант 1

Завдання 1

З пункту А в пункт В щодня відправляються пасажирські і швидкі поїзди. У таблиці 18 зазначений наявний парк вагонів різних типів, із котрих щодня можна формувати дані поїзда, і кількість пасажирів, що вміщаються в кожний із вагонів.

Таблиця 18

Поїзди	Вагони				
	Багажний	Поштовий	Плацкарт	Купейний	М'який
Швидкий	1	1	5	6	3
Пасажи́рський	1	—	7	2	1
Кількість пасажирів у вагоні	—	—	58	40	32
Парк вагонів	14	8	91	72	33

Визначити оптимальну кількість швидких і пасажирських поїздів, при яких кількість перевезених пасажирів максимально.

Завдання 2

До складу раціону годівлі входять три продукти: сіно, силос і концентрати, що містять живильні речовини: білок, кальцій і вітаміни. Утримання живильних речовин у грамах на 1 кг відповідного продукту харчування і мінімально необхідна норма їхнього споживання задана таблицею 19.

Таблиця 19

Продукти	Живильні речовини		
	Білок	Кальцій	Вітаміни
Силос	20	4	1
Концентрати	180	3	1
Сіно	10	6	2
Норма споживання	2000	120	40

Визначити оптимальний раціон годівлі з умови мінімальної вартості, якщо ціна 1 кг продукту харчування складає: силос – 2, концентрати – 5, сіно – 3 г. о. Включити в задачу умову: відношення сіно:концентрати = 5:1.

Завдання 3

Колгосп може посіяти жито, пшеницю і ячмінь на чотирьох ділянках, площі котрих відповідно рівні 500, 400, 600 і 500 га. Є в наявності насіння жита, пшениці і ячменя для посіву на площі 250, 1400 і 350 га відповідно.

Врожайність кожної культури на кожній з ділянок і ціни зазначені в таблиці 20.

Таблиця 20

Зернова культура	Врожайність на відповідній ділянці				Ціни
	I	II	III	IV	
Жито	22	25	20	18	7
Пшениця	30	32	25	28	6.5
Ячмінь	31	28	25	23	4.3

Скласти план посіву зернових культур (з урахуванням родючості ділянок), що максимізує прибуток.

Варіант 2

Завдання 1

Завод виробляє два вироби на експорт за допомогою машин M_1 і M_2 . Максимальний час роботи машини M_1 – 10,6 г., машини M_2 – 14,2 г. у добу. Витрата часу роботи машин на один виріб подана у таблиці 21.

Таблиця 21

Виріб	Машини, годин	
	M_1	M_2
A	1.3	2.5
B	1.8	2.1

Валютний прибуток від продажу одиниці виробу A складає 4 долара, а виробу B - 3 долара. Розрахувати виробничий план на добу при максимумі прибутку, якщо виробів B треба випустити не менше 2.

Завдання 2

Тригалазева балансова модель у вартісному виразі характеризується матрицею коефіцієнтів прямих затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальний випуск продукції, що забезпечує максимальний прибуток, якщо розміри капіталовкладень у відповідну галузь обмежені числами 100, 50, 60 гр.од., а вартості одиниці кінцевого продукту відповідно рівні 1, 5, 4 гр.од. Крім цього випуск продукції обмежен числами 100, 200, 150 одиниць, та кінцевий продукт першої галузі повинен складати не менш 10 одиниць.

Завдання 3

Три бази, у яких збираються надлишки картоплі в даному регіоні, постачають її в чотири міста. Добова потреба міст у картоплі складає відповідно 120, 80, 240 і 160 т. Бази можуть доставити 200, 270 і 130 т картоплі відповідно. Витрати на перевезення 1 т картоплі до кожного з міст задаються матрицею

$$Z = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 9 \\ 5 & 1 & 8 & 12 \\ 11 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати план перевезень, при якому зводяться до мінімуму транспортні витрати.

Варіант 3

Завдання 1

На кондитерській фабриці виробляється два виду карамелі K1 и K2. Для виробництва карамелі потрібні цукор, патока та повидло. Запаси сировини, витрати сировини на виробництво карамелі та прибуток, отриманий від продажу 1 т карамелі, наведено в таблиці 22.

Таблиця 22

Сировина	Витрати сировини		Запаси
	K1	K2	
Цукор	0,7	0,5	700
Патока	0,3	0,2	300
Повидло	0,1	0,3	150
Прибуток, гр.од.	10	11,2	

Скласти план виробництва карамелі, що дає максимальний прибуток, якщо виробництво карамелі K1 має бути не менше 150 т.

Завдання 2

До порту кораблі привезли 6000 т чавуна, 4000 т залізної руди і 3000 т апатитів. Розвантаження кораблів може бути здійснено двома засобами:

- а) безпосередньо у вагони;
- б) на склади.

Першим засобом треба розвантажити 8000 т, залишок (5000 т) прийдеться направити на склад. Вартість розвантаження 1 т товару безпосередньо у вагони складає відповідно 4,30; 5,25 і 2,20 г.о., а при відправленні на склад – 7,8; 6,40 і 3,25 г.о. Як спланувати розвантаження з мінімальними витратами?

Завдання 3

Підприємство має три складові частини A_1 , A_2 , A_3 , що можуть постачатися з чотирьох сировинних точок C_1 , C_2 , C_3 , C_4 . Транспортні витрати на одиницю сировини в дані в матриці B . Виробничі потужності баз в одиницю часу складають 100, 160, 140 і 120 одиниць сировини. Виробничі потужності складових частин підприємства в одиницю часу складає 150, 250 і 120 одиниць сировини.

$$B = \begin{pmatrix} 18 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \\ 12 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Прибуток від переробки кожної одиниці без урахування транспортних витрат складає 30 гр.од. на кожен вагову одиницю сировини, що переробляється. Розрахувати план постачання, що забезпечує максимальний прибуток підприємства.

Варіант 4

Завдання 1

Хлібопекарський цех випікає два види хліба – А і В. На виробництво 1 т хліба А потрібно 700 кг муки; хліба В – 820 кг. Витрати робочого часу основного устаткування цеху на 1 т хліба А і В відповідають 1,2 і 2,2 годин. Цех володіє запасом муки у кількості 14340 кг. Резерв робочого часу устаткування – 36,1 годин. Прибуток від реалізації однієї тонни хліба А – 22 гр.од., хліба В – 30 гр.од. Спланувати роботу цеху так, щоб прибуток був максимальний, якщо випуск хліба В має бути не менше 12 тонн.

Завдання 2

З трьох видів сировини необхідно скласти суміш, до складу якої повинні входити не менше 26 одиниць хімічної речовини А, 30 одиниць речовини В и 27 одиниць речовини С. Кількість одиниць хімічної речовини, що утримується в 1 кг сировини кожного виду, зазначено у таблиці 23. У ній же приведена ціна 1 кг сировини кожного виду. Скласти суміш потрібного складу, що має мінімальну вартість.

Таблиця 23

Речовина	К-ть одиниць речовини в 1 кг сировини		
	Сировина 1	Сировина 2	Сировина 3
А	1	1	–
В	2	–	3
С	1	2	4
Ціна	5	6	7

Завдання 3

Для обігріву помешкань використовують чотири агрегати, кожний із яких може працювати на будь-якому із трьох сортів палива, наявного в кількостях 70, 80 і 150 т. Потреба в паливі кожного з агрегатів відповідно дорівнює 80, 120, 40 і 60 т. Теплотворна спроможність i -го сорту палива при використанні його на j -му агрегаті задається матрицею

$$T = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 11 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 7 & 11 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти такий розподіл палива між агрегатами, при якому утворюється максимальна кількість тепла від використання всього палива.

Варіант 5

Завдання 1

Корабель привіз 6000 т чавуну і 4000 т залізної руди. Розвантаження може бути здійснено двома засобами:

- а) безпосередньо у вагони;
- б) на склади.

Першим засобом треба розвантажити 7000 т, залишок вантажу прийдеться направити на склад. Вартість розвантаження 1 т товару безпосередньо у вагони складає відповідно 4,3 і 3,6 гр.од., а при відправленні на склади 3,6 і 5,1 гр.од. відповідно. Спланувати розвантаження з мінімальними витратами, якщо у вагони треба розвантажити не менш 2000 т чавуну.

Завдання 2

Механічний завод при виготовленні трьох різних типів деталей використовує токарські, фрезерні і стругальні верстати. При цьому опрацювання кожної деталі можна вести трьома засобами. У таблиці 24 зазначені ресурси (у станко-годинах) кожної групи верстатів, норми витрати часу при опрацюванні деталі на відповідному верстаті за даним

технологічним засобом і прибуток від випуску одиниці деталі кожного виду.

Таблиця 24

Верстати	Деталі								Ресурси часу
	1		2			3			
	Технічні засоби								
	1	2	1	2	3	1	2	3	
Токарний	0,4	0,9	0,5	0,3	–	0,7	–	0,9	250
Фрезерний	0,5	–	0,6	0,2	0,5	0,3	1,4	–	450
Строгальний	0,3	0,5	0,4	1,5	0,3	–	1,0	0,5	600
Прибуток	12		18			30			–

Скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, що забезпечують максимальний прибуток. Вирішити задачу, якщо деталі 2-го і 3-го типів повинні випускатися в комплекті 2:3.

Завдання 3

Виготовлена на чотирьох цегельних заводах цегла надходить на три об'єкти. У таблиці 25 зазначене виробництво цегли на кожному заводі в тисячах одиниць, потреби в цеглі на об'єктах у тисячах одиниць, ціна перевезень 1 тисячі одиниць цегли від кожного заводу до кожного об'єкта.

Таблиця 25

Завод	Вартість перевезень			Виробництво
	1	2	3	
I	8	7	5	240
II	13	8	10	360
III	12	4	11	180
IV	14	6	12	120
Потреба	230	320	350	–

Скласти план доставок цегли з мінімальною вартістю перевезень.

Варіант 6

Завдання 1

На звірофермі можуть вирощувати чорно-бурих лисиць і песців. Для забезпечення нормальних умов їхнього вирощування

використовуються три види кормів. Кількість одиниць корму, що витрачаються на одну тварину, запаси кормів і ціна 1 шкурки зазначені у таблиці 26.

Таблиця 26

Вид корму	Кіл-ть од. на 1 тварину		Загальна кількість корму
	Лисиця	Песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Вартість	16	12	—

Визначити, скільки лисиць і песців необхідно вирощувати, щоб одержати максимальну ціну від продажу їхніх шкурок.

Завдання 2

З чотирьох видів основних матеріалів (мідь, цинк, свинець, нікель) складають три види сплавів латуні: звичайний, спеціальний і для художніх виробів. Ціни одиниці ваги міді, цинку, свинцю і нікелю складають 0,8; 0,6; 0,4; 1 гр.од., а одиниці ваги сплавів 2; 3; 5 гр.од. відповідно.

Сплав для художніх виробів повинний містити 6% нікелю, 50% міді і 30% свинцю; спеціальний – 10% нікелю, 60% міді, 10% цинку і 20% свинцю. У звичайний сплав компоненти можуть входити порівну.

Виробнича потужність підприємства дозволяє випускати не більш 400 од. ваги звичайного сплаву, не більше 700 од. ваги спеціального сплаву і не більш 100 од. ваги сплаву для художніх виробів.

Скласти виробничий план, що забезпечує максимальний прибуток.

Завдання 3

На трьох складах оптової бази зосереджений однорідний вантаж у кількостях 180, 60 і 80 одиниць. Цей вантаж необхідно перевезти у чотири магазину. Кожний із магазинів повинний одержати відповідно 120, 40, 60 і 80 одиниць вантажу. Тарифи перевезень одиниці вантажу з кожного складу в усі магазини задаються матрицею

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Скласти план перевезень, вартість яких є мінімальною.

Варіант 7

Завдання 1

Підприємство випускає продукцію двох видів – P_1 і P_2 , використовуючи при цьому три види сировини – C_1 , C_2 , C_3 , запаси якого обмежені. Витрата сировини кожного виду при виробництві одиниці продукції P_1 і P_2 задається таблицею 27; у ній зазначені прибутки підприємства від продажу одиниці готової продукції кожного виду.

Таблиця 27

Продукція	Сировина			Прибуток від продукції
	C_1	C_2	C_3	
P_1	1	3	4	7
P_2	2	2	6	8
Загальні запаси	10	18	36	–

Скласти план випуску продукції кожного виду так, щоб прибуток підприємства був максимальний.

Завдання 2

Для підтримки нормальної життєдіяльності людині щодня необхідно споживати не менше 118 г білків, 56 г жирів, 500 г вуглеводів, 8 г мінеральних солей. Кількість живильних речовин (в грамах) у 1 кг продуктів і ціна 1 кг продуктів зазначені у таблиці 28.

Скласти денний раціон, що містить не менше мінімальної добової норми потреби людини в необхідних живильних речовинах при мінімальній вартості споживаних продуктів.

Таблиця 28

Живильні речовини	Обсяг живильних речовин						
	М'ясо	Риба	Молоко	Олія	Сир	Крупа	Картопля
Білки	180	190	30	10	260	130	21
Жири	20	3	40	85	310	30	2
Вуглеводи	–	–	50	6	20	650	200
Мін.солі	9	10	7	12	60	20	10
Ціна	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Завдання 3

Виробниче об'єднання має у своєму складі три філії, що роблять однорідну продукцію в кількостях, рівних 50, 30 і 10 одиниць відповідно. Цю продукцію одержують чотири споживачі, розташовані у різних місцях. Їхні потреби відповідно рівні 30, 30, 20 і 10 одиниць. Тарифи перевезень одиниці продукції від кожної з філій кожному споживачу задаються матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Скласти план прикріплення одержувачів продукції до її постачальників, при якому вартість перевезень є мінімальною.

Варіант 8**Завдання 1**

У двогалузевій моделі задані розміри фонду накопичення 60 і 50 гр.од. і матриця коефіцієнтів повних капітальних витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.25 & 0.8 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} являє собою розмір капіталовкладень із фонду накопичення i -ої галузі для збільшення на 1 од. випуску кінцевої продукції k -ої галузі. Визначити оптимальний план розвитку виробництва з умови одержання максимального сумарного приросту кінцевої продукції при додатковій умові, що приріст кінцевого продукту 1-ї і 2-ї галузей знаходиться у співвідношенні 1:3.

Завдання 2

Меблева фабрика випускає столи, стільці, бюро і книжкові шафи. При виготовленні цих товарів використовуються два різноманітних типи дощок, при чому фабрика має в наявності 1500 м дощок 1-го типу і 1000 м дощок 2-го типу; крім того задані трудові ресурси в кількості 800 чол. У таблиці 29 приведені нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення однієї одиниці виробів і прибуток на одну одиницю виробів.

Таблиця 29

Вироби Ресурси	Витрати на 1 од.			
	Столи	Стільці	Бюро	Книжк.шафа
Дощки 1-го типу,м	5	1	9	12
Дощки 2-го типу,м	2	3	4	1
Трудові ресурси	3	2	5	10
Прибуток, гр.од.	12	5	15	10

Знайти план виробництва, що максимізує прибуток, за умови, що комплектність стільців і шаф дорівнює 6:1.

Завдання 3

Для будівництва трьох доріг використовується гравій із чотирьох кар'єрів. Запаси гравію в кожному з кар'єрів відповідно дорівнюють 120, 280 і 160 умовних одиниць. Потреби в гравії для будівництва кожній із доріг відповідно рівні 130, 220, 60 і 70 умовних одиниць. Тарифи перевезень однієї умовної одиниці гравію з кожного з кар'єру до кожної з мурованих доріг задаються матрицею

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скласти план перевезень, вартість яких є мінімальною.

Варіант 9

Завдання 1

До складу раціону годівлі входять два види продуктів – сіно і концентрати, що містять живильні речовини: білок, кальцій, вітаміни. Утримання живильних речовин (у грамах на 1 кілограм) відповідного продукту харчування і мінімально необхідні норми їхнього споживання задані таблицею 30.

Таблиця 30

Продукти	Живильні речовини		
	Білок	Кальцій	Вітаміни
Сіно	65	6	1
Концентрати	200	4	2
Норми споживання	2500	120	42

Визначити оптимальний раціон годівлі з умов мінімальної вартості, якщо ціна 1 кг продукту харчування відповідно складає: сіно – 5 гр.од., концентрати – 7 гр.од.

Включити в задачу умову обмеженості ресурсів на один раціон: сіна – не більше 25 кг, концентратів – не більше 20 кг.

Завдання 2

Продукцією міського молокозаводу є молоко, кефір і сметана, розфасовані в пляшки. На виробництво 1 т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1010; 1010; 9450 кг молока. При цьому витрати робочого часу при розливі 1 т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 маш-год. На розфасуванні сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 годин. Усього для виробництва продукції завод може використовувати

136000 кг молока. Основне устаткування може використовуватися протягом 21,4 маш-год, а автомати з розфасування сметани – протягом 16,25 годин. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру і сметани відповідно дорівнює 30, 32 і 136 гр.од. Завод повинний щодня робити не менше 100 т молока, розфасованого в пляшки.

Скласти план випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

Завдання 3

Для будівництва трьох об'єктів використовується цегла, виготовлена на чотирьох заводах. Щодня кожний із заводів може виготовити 100, 150 і 50 умовних одиниць цегли. Щоденні потреби в цеглі на кожному з об'єктів відповідно рівні 75, 80, 60 і 85 умовних одиниць. Тарифи перевезень 1 умовної одиниці цегли з кожного з заводів до кожного з об'єктів задаються матрицею

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скласти план перевезень, вартість яких є мінімальною.

Варіант 10

Завдання 1

Виробництво поділяється на дві галузі. Матриця коефіцієнтів матеріальних витрат $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$, де b_{ik} – витрати продукції i -ої галузі на виробництво одиниці продукції k -ої галузі. Ціни на кінцевий продукт галузей $C_1=5$ г.о., $C_2=4$ г.о. Визначити оптимальний валовий випуск кожної галузі у вартісному вираженні, якщо виробничі можливості галузей обмежені розмірами 200 і 300 одиниць продукції, що випускається.

Завдання 2

На ткацькій фабриці для виготовлення трьох артикулів тканини використовуються ткацькі верстати двох типів, пряжа і барвники. Норми витрат ресурсів на виготовлення 1 м тканин, ціна 1 м тканин, запаси ресурсів і випуск тканин зазначені в таблиці 31.

Таблиця 31

Ресурси	Норми витрат			Запаси
	1	2	3	
Станки, стан-год				
1-го типу	0,02	-	0,04	200
2-го типу	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа, кг	1,0	1,5	2,0	15000
Барвники, кг	0,03	0,02	0,025	450
Ціна , гр.од.	5	8	9	
Випуск, м				
Мінімальний	1000	2000	2500	
Максимальний	2000	9000	4000	

Скласти план випуску тканин, такий, щоб була зроблена можливо більша кількість тканин із максимальною вартістю.

Завдання 3

На трьох комбінатах щодня виробляється 110; 190 і 90 т муки. Це борошно споживається чотирма хлібозаводами, щоденні потреби яких рівні відповідно 80; 60; 170 і 80 т. Тарифи перевезень 1 т борошна з комбінатів на кожний хлібозавод задаються матрицею.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план доставки борошна, при якому загальна вартість перевезень мінімальна.

Варіант 11

Завдання 1

На швейній фабриці для виготовлення двох видів виробів (А і В) використовується тканина двох артикулів та інші витрати. Норми витрати тканин всіх артикулів на пошиття одного виробу, загальний запас тканини і ціна одного виробу приведені в таблиці 32.

Таблиця 32

Ресурси	Норми витрат тканини на один виріб виду, м		Загальний запас тканини, м
	А	В	
Тканина 1	2	1	150
Тканина 2	3	2	210
Ін.витрати	7	8	560
Ціна	8	6	-

Визначити, скільки виробів кожного виду повинна зробити фабрика, щоб ціна виготовленої продукції була максимальною.

Завдання 2

Для виготовлення певного сплаву зі свинцю, цинку й олова використовується сировина у виді таких п'ятих сплавів із тих же металів, що відрізняються складом і вартістю 1 кг. Ці дані наведені в таблиці 33.

Таблиця 33

Складові	Вміст в сплавах, %				
	I	II	III	IV	V
Свинець	10	10	40	60	30
Цинк	10	30	50	30	20
Олово	80	60	10	10	50
Вартість	4	4,5	5,8	6	7,5

Визначити, скільки потрібно взяти сплаву кожного виду, щоб виготовити з мінімальною собівартістю сплав, що містить 20% свинцю, 30% цинку і 50% олова.

Завдання 3

У трьох сховищах пального щодня зберігається 175; 125 і 140 т бензину. Цей бензин щодня одержують чотири заправні станції в кількостях, рівних відповідно 180; 110; 60 і 40 т. Вартість перевезень 1 т бензину зі сховищ до заправних станцій задаються матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень бензину, при якому загальна вартість перевезень мінімальна.

Варіант 12

Завдання 1

Підприємство може працювати за двома технологічними процесами, причому кількість одиниць продукції, що випускається за різними технологічними процесами за одиницю часу відповідно дорівнює 300 і 250. Витрати виробничих чинників за технологічними процесами в одиницю часу і ресурси, зазначені в таблиці 34.

Таблиця 34

Чинник	Процес		Ресурси
	1	2	
Сировина	12	10	544
Електроенергія	0,2	0,1	8
Зарплата	3	4	204
Накладні витрати	6	5	300

Скласти план максимального випуску продукції.

Завдання 2

Є тригалузева балансова модель із матрицею коефіцієнтів грошових витрат

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.15 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виробничі потужності галузей обмежують можливості її валового випуску числами 300, 200, 500. Вектор цін на кінцевий продукт: (2, 5, 1). Визначити оптимальний валовий випуск усіх галузей, що максимізує вартість сумарного кінцевого продукту, якщо на кінцевий продукт накладаються такі обмеження: перший відноситься до третього, як 1:2, другого - не більше 100.

Завдання 3

На трьох складах оптової бази зосереджено борошно в кількостях 140; 360 і 180 т відповідно. Це борошно необхідно перевезти в 5 магазинів, кожний із яких повинний одержати відповідно 90; 120; 230; 180 і 60 т. З першого складу борошно неможливо перевозити в 2-й і 5-й магазини, а з другого складу в третій магазин має бути завезено 100 т борошна.

Тарифи перевезень 1 т борошна з кожного складу в усі магазини задаються матрицею

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & - & 8 & 2 & - \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Скласти план перевезень, вартість яких є мінімальною.

Варіант 13

Завдання 1

Столярна майстерня випускає столи і стільці. При виготовленні цих товарів використовуються два різноманітних типи дошок, причому є наявності 450 м дошок 1-го типу і 240 м дошок 2-го типу. Крім того задані трудові ресурси в кількості 330 люд.-г. У таблиці 35 приведені нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення однієї одиниці виробу і прибуток на одну одиницю виробу.

Таблиця 35

Ресурси	Витрати	
	Столи	Стільці
Дошки 1-го типу, м	5	3
Дошки 2-го типу, м	1	2
Людські ресурси, люд-год	3	2
Прибуток	10	6

Максимізувати прибуток при умовах, що накладаються на асортимент: столів - не менше 15 штук; стільців - не менше 80 штук.

Завдання 2

На судно вантажопідйомністю 2000 т і ємкістю 3080 м³ потрібно відвантажити три товари А, Б, С. Об'ємні коефіцієнти товару складають відповідно 2,1; 1,2 і 2,3 м³/т. На портовому складі є 900 т товару А і достатньо велика кількість товару С і Б. Товари Б, С має бути надіслані в належному відношенні, тобто кількість товару С не повинна перевищувати половини кількості товару Б. Доход від перевезення однієї тонни товару складає відповідно 80; 75; 70 г.о. Яку кількість окремих товарів варто відвантажити на судно, щоб одержати мах прибуток від перевезення.

Завдання 3

На трьох залізничних відстоях А₁, А₂, А₃ зібралося 120, 110 і 130 незавантажених вагонів. Ці вагони необхідно перегнати на залізничні станції В₁, В₂, В₃, В₄, В₅. На кожній із цих станцій потреба у вагонах відповідно дорівнює 80, 60, 70, 100 і 50. З огляду на те, що з відстою А₂ неможливо перегнати вагони на станцію В₂ і В₄, і знаючи, що тарифи перегонки одного вагона визначаються матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & - & 5 & - & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перегонки вагонів, щоб загальна вартість була мінімальною.

Варіант 14

Завдання 1

На промисловому підприємстві виготовляють два продукти - A_1 і A_2 . Ця продукція виготовляється за допомогою устаткування Y_1 , Y_2 , Y_3 , що протягом дня може працювати відповідно 24000, 32000, 27000 секунд. Норми часу, необхідного для виробництва одиниці продукції за допомогою відповідного устаткування, дані у таблиці 36.

Таблиця 36

Виріб	Устаткування		
	Y_1	Y_2	Y_3
A_1	3	8	9
A_2	6	4	3

Прибуток від виробництва першого виробу - 23 гр.од., другого - 12 гр.од.

Спланувати виробництво так, щоб одержати максимальний прибуток, якщо виробів 2 має бути випущене не менше 1000.

Завдання 2

Пароплав може бути використаний для перевезення 11 найменувань вантажу, маса, обсяг і ціна одиниці кожного з яких наведені в таблиці 37.

Таблиця 37

Параметри одиниці вантажy	Номер грузy										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Маса, т	80	62	92	82	90	60	81	83	86	65	83
Об'єм, м ³	100	90	96	110	120	80	114	60	106	114	86
Ціна	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7	2,8	3,3	3,5	3,7	3,9	4,0

На пароплав може бути завантажено не більше 800 т вантажу, загальним об'ємом не перевищуючим 600 м³. Визначити, скільки одиниць кожного вантажу варто помістити на пароплав так, щоб загальна вартість розміщеного вантажу була максимальною.

Завдання 3

На текстильному підприємстві є три типи ткацьких верстатів. На верстатах кожного з типів можуть вироблятися чотири види тканин: шовк, бязь, ситець і сатин. Продуктивність кожного верстата і собівартість тканин, зазначені в таблиці 38.

Таблиця 38

Тип верстата	Продуктивність, м/г				Собівартість, \$·м/годин			
	Шовк	Бязь	Ситец	Сатин	Шовк	Бязь	Ситец	Сатин
I	24	36	18	42	4	1	3	1
II	12	15	9	21	5	2	4	1
III	8	10	6	14	6	3	5	2

З огляду на те, що фонд робочого часу кожній із груп ткацьких верстатів відповідно дорівнює 90; 220; 180 верстато-годин, скласти такий план їхнього завантаження, при якому загальна собівартість тканин, що випускаються у кількостях 1200 м шовку, 900 м бязі, 1800 м ситцю і 800 м сатину є мінімальною.

Варіант 15

Завдання 1

Для годівлі піддослідної тварини їй необхідно давати щодня не менше 15 од. хімічної речовини A_1 (вітаміну або деякої солі) і 15 од. хімічної речовини A_2 . Не маючи можливості давати речовину A_1 або A_2 у чистому виді, можна набувати речовини B_1 по 1 гр.од. або B_2 по 3 гр.од. за 1 кг, причому кожний кілограм B_1 містить 1 од. A_1 і 3 од. A_2 , а кг B_2 - 6 од. A_1 і 2 од. A_2 .

Запаси речовин на складі: B_1 - 7 кг, B_2 - 9 кг.

Визначити оптимальну закупівлю речовин B_1 і B_2 для щоденного раціону.

Завдання 2

Механічний завод при виготовленні двох типів деталей використовує токарське, фрезерне і зварювальне устаткування. При цьому обробку кожної деталі можна вести за двома різноманітними технологічними засобами. Корисний фонд часу роботи кожної групи устаткування (станко-години), норми витрати часу при обробці кожної деталі на відповідному устаткуванні за даним технологічним засобом і прибуток від випуску одиниці деталі кожного виду наведені в таблиці 39.

Таблиця 39

Устаткування	Деталі				Фонд часу
	1		2		
	Технологічні засоби				
	I	II	I	II	
Фрезерне	2	2	3	0	20
Токарне	3	1	1	2	37
Сварочне	0	1	1	4	30
Прибуток	11	6	9	7	-

Скласти оптимальний план загрузки устаткування, що забезпечує заводу максимальний прибуток.

Завдання 3

Є три ділянки землі, на яких можуть бути посіяні кукурудза, пшениця, ячмінь і просо. Площа кожної ділянки дорівнює 600, 180 і 220 га відповідно. З урахуванням наявності насіння, кукурудзою, пшеницею, ячменем і просом варто засіяти відповідно 290, 180, 110 і 420 га. Врожайність кожної із культур для кожної ділянки задається матрицею.

$$Y = \begin{pmatrix} 40 & 45 & 50 \\ 30 & 28 & 22 \\ 18 & 22 & 14 \\ 24 & 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

Визначити, скільки гектарів кожної культури на кожній ділянці варто посіяти, щоб одержати максимальний збір зерна.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Наступні задачі сформулювати як задачі лінійного програмування й розв'язати їх.

Варіант 1

Компанія робить полиці для ванних кімнат двох розмірів – А і В. Агенти в справах продажу вважають, що в тиждень на ринку може бути реалізоване до 550 полиць. Для кожної полиці типу А потрібно 2 м^2 матеріалу, а для полиці типу В – 3 м^2 матеріалу. Компанія може одержати до 1200 м^2 матеріалу в тиждень. Для виготовлення однієї полиці типу А потрібно 12 хвилин роботи устаткування, а для виготовлення однієї полиці типу В - 30 хвилин. Устаткування можна використовувати 160 годин на тиждень. Якщо прибуток від продажу полиць А становить 3 грн., а полиць типу В - 4 грн., то скільки полиць треба випустити в тиждень, щоб дістати максимальний прибуток?

Як зміниться виробнича програма, якщо ринок не зможе приймати в тиждень більше 450 полиць? Який в цьому випадку буде максимальний прибуток?

Варіант 2

Виробник елементів центрального опалення виготовляє радіатори чотирьох моделей. Обмеження на виробництво обумовлені кількістю робочої сили й кількістю сталевих аркушів, з яких виготовляють радіатори (табл. 40).

Таблиця 40

Модель радіатора	А	В	С	Д
Необхідна кількість робочої сили, людино-години	0,5	1,5	2	1,5
Необхідна кількість сталевих аркушів, м^2	4	2	6	8
Прибуток від продажу одного радіатора, грн..	5	5	12,5	10

Кількість сталевго аркуша – не більше 2500 м², кількість людино-годин – не більше 5000. Знайти прибуток підприємства. Як змінитися прибуток підприємства, якщо прибуток від продажу одного радіатора кожної моделі збільшиться на 5%, а загальна кількість сталевго аркуша знизиться на 10%?

Варіант 3

Фірма робить три види продукції (А, В, С), для випуску кожного з яких потрібне певний час роботи на всіх чотирьох пристроях (I, II, III, IV) (табл. 41).

Таблиця 41

Вид продукції	Час обробки				Прибуток, грн..
	I	II	III	IV	
А	1	3	1	2	3
В	6	1	3	3	6
С	3	3	2	4	4

Нехай час роботи на пристроях відповідно - 84, 42, 21 і 42 години. Визначити, яку продукцію й у яких кількостях варто виготовляти. Ринок збуту для кожного продукту не обмежений. Як змінитися прибуток, якщо час обробки кожного продукту I і IV пристроєм збільшитися на 7%?

Варіант 4

Фірма виготовляє два продукти А і В, ринок збуту яких не обмежений. Кожний продукт повинен бути оброблений кожною з машин М1, М2 і М3. Час обробки для кожного виробу А і В наведені в таблиці 42.

Таблиця 42

	М1	М2	М3
А	0,5	0,4	0,2
В	0,25	0,3	0,4

Час роботи машин M1, M2 і M3, відповідно, 40, 36 і 36 годин на тиждень. Прибуток від виробів становить, відповідно, 5 і 3 грн. Фірмі необхідно визначити тижневі норми випуску виробів А і В, які максимізують прибуток. Як зміниться прибуток, якщо час роботи машин зменшиться на 15%?

Варіант 5

Прибуток від продажу виробів А, В і С становить відповідно 3, 4, 5 грн. Для кожного виробу потрібен час використання верстатів В1 і В2, які доступні, відповідно 12 і 15 годин на день.

Таблиця 43

	А	В	С
В1	2	3	3
В2	4	1	2

Знайти оптимальний план виробництва. Як зміниться план виробництва, якщо доступний час використання верстатів збільшити на 20%?

Варіант 6

Два вироби В1 і В2 послідовно обробляються на верстатах №1, 2, 3, 4, 5. Машинний час на одиницю виробів на кожному верстаті зазначено в таблиці 44. Тут же наведений прибуток від кожного виробу, причому обсяг виробництва другого виду продукції не повинен перевищувати 40% загального випуску.

Таблиця 44

Номер напівфабрикату	Номер робочого місця					Прибуток, грн./од..
	1	2	3	4	5	
1	4	3	2	3	0	1
2	2	0	6	5	4	1,5
Тижневий фонд робочого часу, хв.	352	240	330	420	400	

Визначити оптимальну програму випуску, що забезпечує максимальний прибуток.

Варіант 7

На підприємстві можуть виготовляти два види продукції П1 і П2. На випуск одиниці продукції П1 витрачається 3 одиниці ресурсу, а на одиницю продукту П2 – 1 одиниця того ж ресурсу. У плановому періоді в розпорядженні підприємства є 300 одиниць цього ресурсу. Обмеження на випуск продукції першої й вищої категорій якості виглядають у такий спосіб: $-3x_1 + 4x_2 \leq 0$. При цьому потрібно, щоб продукції П1 було випущено не менше 40 одиниць. Підприємство бажає дістати максимальний прибуток.

Кожний виріб виду П1 дає 3 грн. прибутку, кожний виріб виду П2 дає 4 грн. прибутку.

Варіант 8

Невелика фірма виготовляє два види підшипників А і В, кожний з яких повинен бути оброблений на трьох верстатах, а саме токарському, шліфувальному й свердлильному. Час, необхідний для кожної стадії виробничого процесу, наведений в таблиці 45.

Фірма хотіла б виготовляти підшипники в кількості, яка максимізує прибуток. Як змінитися виробництво, якщо повний можливий час роботи в тиждень кожного верстата збільшити на 15%, 20% і 25% відповідно?

Таблиця 45

Номер напівфабрикату	Номер робочого місця					Прибуток, грн./шт.
	1	2	3	4	5	
1	4	3	2	3	0	1
2	2	0	6	5	4	1,5
Тижневий фонд робочого часу, хв.	352	240	330	420	400	

Варіант 9

У цеху є 6 типів робочих місць. Відповідно до оптимальної виробничої програми на наступному тижні в цеху повинні виготовляти 7 типів напівфабрикатів. Виробництво одиниці кожного напівфабрикату збільшує фонд матеріального заохочення. Розмір прибутку від одиниці кожного виду напівфабрикату, час, що витрачається на виготовлення кожного напівфабрикату на кожному робочому місці, тижневий фонд робочого часу на кожному робочому місці зазначені в таблиці 46.

Випуск напівфабрикатів №5 не повинен бути менше 25%, а №7 - не більше 7% від загального обсягу виробництва. Визначити оптимальну програму випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

Таблиця 46

Номер напівфабрикату	Норми робочого часу						Прибуток від од. напівфабрикату, тис. грн. /шт.
	1	2	3	4	5	6	
1	5	7	15	2	3	14	0,10
2	2	0	6	7	3	2	0,115
3	5	5	4	1	1	10	0,112
4	4	8	7	0	8	5	0,090
5	3	1	7	2	4	0	0,065
6	6	0	4	3	1	8	0,080
7	10	2	1	11	10	7	0,160
Тижневий фонд робочого часу, тис. хв	21	18	27	16,8	18,6	24	

Варіант 10

Побудуйте економіко-математичну модель для наступної ситуації. Фірма виготовляє три види продукції, використовуючи для цього два види ресурсів. Технологічна матриця задана в таблиці 47. Фірма має у своєму розпорядженні 20 одиниць 1-го ресурсу і 25 одиниць 2-го ресурсу; ціни, за

якими припускає реалізувати свою продукцію фірма дорівнюють 15, 20, 30 тис. грн. за 1-й, 2-й, 3-й товар відповідно. Фірма бажає одержати максимальний дохід.

Таблиця 47

	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3
Ресурс 1	1	2	0
Ресурс 2	2	3	1

Для виконання зобов'язань необхідно виготовляти принаймні 30 продуктів типу 1. Як ця додаткова вимога вплине на дохід підприємства?

Варіант 11

Засоби очищення підлоги оцінюють за наступними показниками:

- А) засоби, що очищують;
- Б) дезінфікуючі засоби;
- В) дратівний вплив на шкіру.

Кожний із цих показників змінюється за лінійною шкалою від 0 до 100.

Продукт на ринку повинен мати принаймні 60 одиниць властивостей, що очищують і принаймні 60 одиниць дезінфікуючих властивостей за відповідною шкалою. При цьому дратівний вплив на шкіру повинний бути мінімальним. Кінцевий продукт повинен бути сумішшю трьох основних очисників, характеристики яких приводяться в таблиці 48.

Сформулювати задачу знаходження оптимальної суміші як задачу лінійного програмування й вирішити її.

Таблиця 48

Очисник	Властивості, що очищають	Дезінфікуючі властивості	Дратівні властивості
А	90	30	70
В	65	85	50
С	45	70	10

Варіант 12

Фірма спеціалізується на виробництві меблів для житлових приміщень. Вона може виготовити три типи меблевих гарнітурів А, В, С, що вимагає різних витрат праці на кожній стадії виробництва (табл. 49).

Таблиця 49

Виробнича ділянка	Витрати праці, люд.-годин		
	А	В	С
Лісопилка	1	2	4
Складальний цех	2	4	2
Оздоблювальний цех	1	1	2

Впродовж тижня можна планувати роботу на лісопилці на 360 люд.-годин, у складальному цеху - на 250 люд.-годин, в оздоблювальному цеху - 220 люд.-годин. Прибуток від продажу кожного типу гарнітурів А, В, С становить, відповідно, 900, 1100 і 1500 грн.

Визначити надлишок люд.-годин роботи на лісопилці, у складальному цеху, в оздоблювальному цеху.

Для виконання зобов'язань по організації інтер'єру готелів необхідно виготовляти принаймні 40 гарнітурів типу С щотижня. Як ця додаткова вимога вплине на план виробництва? Як при цьому зміниться розмір прибутку підприємства?

Варіант 13

Фірма виготовляє на фабриці чотири сорти виробів. Виробництво лімітується часом використання верстатів і кількістю комплектуючих виробів. Відомо також, що сумарний час використання верстатів - 90 годин у день, а комплектуючих виробів може бути поставлено не більше 80 у день.

Визначити виробничу програму для одержання максимального прибутку.

Таблиця 50

Виробничі характеристики	Виріб			
	1	2	3	4
Час використання верстата, год.	1	3	8	4
Кількість комплектуючих виробів	2	2	1	3
Собівартість виробу, грн..	20	25	40	85
Доход від продажу, грн..	30	45	80	45

Фірма може збільшити час роботи верстатів до 100 год, при цьому собівартість кожного виробу всіх чотирьох типів збільшиться на 10 грн. Який буде прибуток фірми в цьому випадку? Чи зміниться виробнича програма?

Безладдя на заводі одного зі споживачів приводять до того, що денний випуск виробу 4 скорочений на 15 одиниць. Як це вплине на план виробництва і розмір прибутку фірми?

Варіант 14

Фірма, що випускає трикотажні вироби, використовує для виробництва продукції два види сировини. Всі необхідні дані наведені в таблиці 51. Розрахувати умови випуску готової продукції, якщо сировина використовується повністю, а прибуток повинний бути максимальним.

Таблиця 51

Сировина	Запас сировини, кг	Витрати на одиницю продукції		
		свєтр	штани	костюм
Чиста вовна	160	0,4	0,2	0,8
Силон	60	0,2	0,1	0,2
Прибуток за од. виробу		16	15	22

Варіант 15

Цех виготовляє вироби И1 і И2. За зміну не може бути використано більше 540 од. устаткування, більше 550 од. сировини і більше 450 од. електроенергії. Витрати ресурсів на один виріб зазначений у таблиці 52. Від

реалізації виробу И1 прибуток становить 80 грн., виробу И2 - 70 грн. Який повинен бути мінімальний випуск продукції, щоб забезпечити прибуток не менш 2800 грн.

Таблиця 52

Ресурси	Виробу	
	И1	И2
Устаткування	2	3
Сировина	1	4
Електроенергія	2	1,5

Варіант 16

У торговельному залі необхідно виставити для продажу товари Т1 і Т2. Робочий час продавців не перевищує 36 годин, а площа торговельного залу, яку можна зайняти, не перевищує 120 м². Кожна реалізована одиниця товару приносить прибуток, відповідно, 50 і 80 грн. Норми витрат ресурсів на одиницю проданого товару наведені в таблиці 53. Визначити умови, яким повинна задовольняти структура товарообігу, що забезпечує прибуток не менш 40000 грн.

Таблиця 53

Ресурси	Товари	
	Т1	Т2
Робочий час, ч	0,4	0,6
Площа, м ²	0,2	0,1

Варіант 17

Компанія виготовляє різні типи меблів для кабінетів. Вона робить столи трьох типів (1, 2, 3). Обсяг роботи, необхідної для кожної операції, приводиться в таблиці 54.

Максимум обсягу робіт в тиждень становить 360 люд.-годин на виготовлення частин стола, 240 люд.-годин - на зборку й 180 люд.-годин на полірування. Ринок збуту розширюється, але він недовговічний, а можливос-

ті зберігання обмежують виробництво 170 столами в тиждень. Прибуток від продажу столів типу 1, 2, 3 становить, відповідно, 15, 22 і 19 грн. Визначить оптимальний план виробництва.

Таблиця 54

Операції	Об'єм роботи, люд.-година.		
	1	2	3
Виготовлення частин	2	3	2
Зборка	1	2	3
Полірування й перевірка	1	1	2

Як зміниться оптимальний план виробництва, якщо для задоволення потреб цінного клієнта необхідно випускати не менш 30 столів типу 3 на тиждень?

Як зміниться оптимальний план виробництва, якщо через безладдя на ділянці виготовлення частин стола обсяг робіт у тиждень скоротиться вдвічі?

Варіант 18

Фабрика виготовляє два основних типи товару. Виробу типу Т1 потрібно 3 одиниці сировини А і одиниця сировини В. Воно приносить прибуток 3 грн. Виробу типу Т2 потрібно 4 одиниці сировини А і 3 одиниці сировини В. Воно приносить прибуток в 2 грн. Знайдіть оптимальний план виробництва, якщо доступні всього 20 одиниць сировини А і 10 одиниць сировини В.

Як зміниться оптимальний план виробництва, якщо виявиться доступною ще одна одиниця сировини А, а потім і ще одна одиниця сировини В?

Варіант 19

Потрібно визначити план випуску чотирьох видів продукції П1, П2, П3, П4, для виготовлення яких необхідні ресурси трьох типів: трудові, матеріальні, фінансові. Норми витрат ресурсу, кількість кожного виду ресур-

су зазначені в таблиці 55. Виходячи з вимог попиту, задані нижні й верхні границі випуску кожного виду продукції. На підставі наведених вихідних даних скласти математичну модель для визначення плану випуску продукції з метою одержання максимального прибутку.

Таблиця 55

Ресурси		Вид продукції				Кількість ресурсу
		П1	П2	П3	П4	
Трудові		1	2	3	4	40
Матеріальні		6	5	4	3	110
Фінансові		4	6	8	12	100
Границі	нижня	1	5	2	3	-
	верхня	-	-	-	3	-
Прибуток		60	70	120	130	

Варіант 20

Фірмі потрібно вугілля з вмістом фосфору не більше 0,03% і з домішкою попелу не більше 3,25%. Доступні три сорти вугілля А, В, С за наступними цінами (за тонну) (табл. 56):

Таблиця 56

Сорт вугілля	Вміст домішки фосфору, %	Вміст домішки попелу, %	Ціна, діл.
А	0,06	2,0	30
В	0,04	4,0	30
С	0,02	3,0	45

Як їх варто змішати, щоб задовольнити обмеження на домішки й мінімізувати ціну?

Варіант 21

Фірма займається складанням дієти, що містить принаймні 20 одиниць білків, 30 одиниць вуглеводів, 10 одиниць жирів і 40 одиниць вітамі-

нів. Як дешевше цього досягти при зазначених у таблиці 57 цінах на 1 кг (або 1 л) п'яти наявних продуктів?

Таблиця 57

	Хліб	Соя	Сушена риба	Фрукти	Молоко
Білки	2	12	10	1	2
Вуглеводи	12	0	0	4	3
Жири	1	8	3	0	4
Вітаміни	2	2	4	6	2
Ціна	12	36	32	18	10

Варіант 22

Раціон годівлі корів на молочній фермі може складатися із трьох продуктів - сіна, силосу й концентратів. Ці продукти містять живильні речовини - білок, кальцій і вітаміни. Чисельні дані представлені в таблиці 58. З розрахунку на одну корову добові норми споживання білка й кальцію становлять не менш 200 і 210 г, відповідно. Споживання вітамінів строго дозоване й повинне дорівнювати 87 мг у добу.

Скласти найдешевший раціон, якщо вартість 1 кг сіна, силосу і концентратів дорівнює, відповідно, 1,5 грн. 5 грн. і 2 грн.

Таблиця 58

Продукти	Живильні речовини		
	білок (г/кг)	кальцій (г/кг)	вітаміни (мг/кг)
Сіно	50	10	2
Силос	70	6	3
Концентрати	180	3	1

Варіант 23

Споживач вирішує питання про придбання набору із двох видів товарів. Корисність одиниці першого товару дорівнює 100 одиниць, другого - 250 одиниць. Сформулюйте задачу споживача, якщо ціни на товари стано-

влять 500 грн. і 700 грн., відповідно, споживач виділив на придбання товарів 2 тис. грн., і функція корисності лінійна.

Виберіть з цих наборів найкращий з погляду максимуму корисності.

Як зміниться розв'язання задачі споживача, якщо дохід споживача зросте на 10%?

Як зміниться розв'язання задачі споживача, якщо ціна другого товару зросте на 10%?

Варіант 24

Перед проектувальниками автомобіля поставлена задача сконструювати найдешевший кузов, використовуючи листовий метал, скло й пластмасу. Основні характеристики матеріалів представлені в таблиці 59.

Загальна поверхня кузова (разом із дверима і вікнами) повинна становити 14м^2 , з них не менш 4м^2 і не більше 5м^2 треба відвести під скло. Маса кузова не повинна перевищувати 150 кг. Скільки металу, скла й пластмаси повинен використати найкращий проект?

Таблиця 59

Характеристики	Матеріали		
	метал	скло	пластмаса
Вартість (грн. / м^2)	25	20	40
Маса (кг/ м^2)	10	15	30

Варіант 25

Об'єднання «Норд» виготовляє холодильники, газові плити, морозильні шафи й електропечі за ціною 200, 180, 250 і 100 грошових одиниць, відповідно. Постійним фактором, що обмежує обсяги виробництва, є фіксована величина трудових ресурсів – 12000 людино-годин на місяць. З'ясувалося, однак, що в найближчий місяць дефіцитної буде й листова сталь для корпусів зазначених виробів, оскільки постачальники зможуть забезпечити лише 7000м^2 цього матеріалу.

Потрібно скласти план виробництва на даний місяць для того, щоб максимізувати вартість випущеної продукції. Відомо, що для виготовлення холодильника потрібно 2 м^2 листової сталі й 3 люд.-годин. Робочого часу,

для газової плити – відповідно 1,5 м² і 3 люд.-година., для морозильної шафи – 3 м² і 4 люд.-година., для електропечі – 1 м² і 2 люд.-години.

Варіант 26

Учасник експедиції «Північний полюс» складає рюкзак, і йому потрібно вирішити, які покласти продукти. У його розпорядженні є м'ясо, борошно, сухе молоко й цукор. У рюкзаку для продуктів залишилося лише 45 дм³ об'єму і потрібно, щоб сумарна маса продуктів не перевершувала 35 кг. Лікар експедиції рекомендував, щоб м'яса (по масі) було більше, ніж борошна принаймні у два рази, борошна не менше молока, а молока принаймні у вісім разів більше, ніж цукру. Скільки і які продукти потрібно покласти в рюкзак, для того щоб сумарна калорійність продуктів була найбільшою? Характеристики продуктів наведені в таблиці 60.

Таблиця 60

Характеристики	Продукти			
	м'ясо	борошно	молоко	цукор
Об'єм (дм ³ /кг)	1	1,5	2	1
Калорійність (ккал/кг)	1500	5000	5000	4000

Варіант 27

На звірофермі можуть вирощуватися песці, чорно-бурі лисиці, нутрії й норки. Для їхнього харчування використовується три види кормів. У таблиці 61 наведені норми витрати кормів, їхній ресурс з розрахунку на день, а також прибуток від реалізації однієї шкурки кожного звіра.

Визначить, скільки і яких звірків варто вирощувати на фермі, щоб прибуток від реалізації шкурок був максимальним.

Таблиця 61

Вид корму	Норми витрати корму (кг/день)				Ресурси кормів (кг)
	песець	лисиця	нутрія	норка	
Корм 1	1	2	1	2	300
Корм 2	1	4	2	0	400
Корм 3	1	1	3	2	600
Прибуток дол./шкурка	6	12	8	10	

Варіант 28

Завод виготовляє корпуса холодильників і комплектує їх устаткуванням, що поставляють без обмежень інші підприємства. У таблиці 62 зазначені норми трудовитрат, витрат матеріалів для виготовлення корпусів, обмеження по цих ресурсах з розрахунку на місяць і прибуток від реалізації холодильників по кожній з п'яти марок.

Знайти місячний план випуску холодильників, який максимізує прибуток.

Таблиця 62

Ресурси	Марки холодильників					Об'єм ресурсу
	Донбас	Мінськ	Снайге	Ока	Норд	
Трудовитрати	2	3	5	4	4	9000
Метал (м ²)	2	2	4	5	0	8500
Пластик (м ²)	1	3	2	0	4	4000
Фарба (кг)	1	2	3	3	2	5000
Прибуток (грн..)	40	70	120	120	50	

Варіант 29

Розподілити групи профілерозмірів прокату між верстатами таким чином, щоб собівартість продукції була мінімальною. Вихідні дані: п'ять груп профілерозмірів прокату одержують на трьох верстатах. Фонд робочого часу верстатів В1, В2 і В3 дорівнює відповідно 7200, 8000 і 7500. Інші дані наведені в таблиці 63.

Таблиця 63

Групи профіле-розмірів	Планове завдання	Продуктивність вер-статів, т/год			Собівартість прока-ту, тис. грн. /т		
		31	32	33	31	32	33
1	30	20	30	10	80	70	105
2	40	15	15	15	100	96	90
3	100	20	20	18	120	120	120
4	20	15	15	15	85	90	95
5	80	19,5	25	30	120	110	85

Варіант 30

Компанія виготовляє свердлильні верстати трьох видів D1, D2 і D3. Кожний вид приносить, відповідно, 10, 10 і 30 дол. прибутку. Кількість верстатів, що може бути виготовлені впродовж тижня, обмежено поставками комплектуючих виробів A1, A2, A3, де для D1 потрібно 1 штука A1, 4 штуки A2 і 2 штуки A3, для D2 - 2 штуки A1, 3 штуки A2 і 3 штуки A3, а для D3 потрібно 10 штук A1, 10 штук A2 і 8 штук A3. Щотижня кількість доступних виробів A1, A2, A3 становить, відповідно, 650, 850 і 650 штук.

Визначить максимальний прибуток, який можна одержати в тиждень. Яку кількість верстатів вигідніше всього виготовляти?

Компанія звертається в комісію із цін за дозволом підвищити ціни настільки, щоб вони давали 25%-не збільшення прибутку від всіх моделей. Розглянувши питання, комісія дозволяє збільшення цін на верстати D1 і D2, але наполягає на такій організації цін на верстат D3, при якому прибуток від продажу верстата D3 зменшився б на 10%. Чи варто компанії погоджуватися з варіантом, запропонованим комісією із цін? Що в цьому випадку відбудеться із прибутком?

Керівництво компанії зв'язане угодою, що забезпечує зайнятість 300 робітників. Якщо можливості виробництва дозволяють одному робітникові впродовж тижня зробити 1 верстат D1 і 1 верстат D2, а п'яти робітником - 1 верстат D3, то як ця угода вплине на нове розв'язання? Який буде прибуток у цьому випадку?

Варіант 31

Чаєрозжувальна фабрика випускає чай сорту «Травневий» і «Бадьорість» змішуючи три інгредієнти: індійський, грузинський і краснодарський. У таблиці 64 наведені норми витрати інгредієнтів, об'єм запасів кожного інгредієнта й прибуток від реалізації 1 тонни чаю сортів «Травневий» і «Бадьорість».

Потрібно скласти план виробництва із метою максимізації прибутку.

Таблиця 64

Інгредієнти	Норми витрати (т/т)		Об'єм запасів (т)
Індійський чай	0,5	0,2	600
Грузинський чай	0,2	0,6	870
Краснодарський чай	0,3	0,2	430
Прибуток від реалізації 1 т чаю (діл.)	320	290	

Варіант 32

Підприємець збирається робити сплав, що вміщує 30% свинцю, 30% цинку й 40% олова. Припустимо, що на ринку є сплави А, В, С, D, , склад й ціни на які наведені в таблиці 65. Яку кількість сплаву кожного типу варто закупити на кожний кг виробленій суміші? Яку кількість сплаву кожного типу варто закупити на кожний кг виробленій суміші при мінімальних витратах?

Таблиця 65

Сплав	А	В	С	D	Е	F	G	Н	I	Необхідна суміш
% свинцю	10	10	40	60	30	30	30	50	20	30
% цинку	10	30	50	30	30	40	20	40	30	30
% олова	80	60	10	10	40	30	50	10	50	40
Вартість за кг, діл.	4,1	4,3	5,8	6,0	7,6	7,5	7,3	6,9	7,3	

Варіант 33

Необхідно знайти оптимальний план розвитку металургійних підприємств для задоволення потреб району в сортовому прокаті. Потреба прокату задана в динаміці (на 1995, 2000, 2005 рр). Розроблено три варіанти розвитку I і по два варіанти для II і III підприємств. Варіанти розрізняються структурою й динамікою обсягу виробництва по роках планового періоду, а також приведеними витратами на їхнє здійснення.

Оптимізація плану полягає у виборі з відомих варіантів розвитку кожного підприємства таких, реалізація яких дозволяє забезпечити задану потребу в сортовому прокаті по роках планового періоду з мінімальними сукупними приведеними сортами.

Для кожного підприємства може бути обрано не більше одного варіанта реконструкції й розвитку.

Таблиця 66 - Варіанти розвитку підприємств і потреба в сортовому прокаті по роках

Роки	Вихідні дані	I			II		III		Задана потре- ба в прокаті	
		Варіанти розвитку								
		1	2	3	1	2	1	2		
1995	Великий	200	200	450	300	600	-	-	500	
	Середній	250	250	250	1000	500	600	-	1800	
	Дрібний	250	850	850	150	650	-	600	1000	
2000	Великий	800	800	1300	300	600	-	-	1100	
	Середній	600	1000	1100	800	600	1200	-	1800	
	Дрібний	250	850	1150	400	1100	-	1100	1250	
2005	Великий	800	800	1300	900	1050	-	-	1700	
	Середній	1000	1000	1500	800	1000	1650	-	3200	
	Дрібний	700	1200	1600	1300	1100	-	1600	2500	
Приведені інтегра- льні витрати, млн.. грн.		450	510	836	531	630	302	288	-	

Варіант 34

На кінець планового періоду в економічному районі для задоволення потреб цього району в прокаті необхідно зробити 1100 тис. т листового й 1000 тис. т сортового прокату. Виробництво прокату на трьох підприємствах, для кожного з яких розроблені по два варіанти їхньої реконструкції, що розрізняються як витратами на їхню реалізацію, так і структурою виробництва. Крім того, установлені ліміти на споживання ресурсів двох видів (табл. 67).

Необхідно вибрати для кожного підприємства такий варіант реконструкції, при якому забезпечується виробництво листового й сортового прокату на трьох підприємствах у розмірах, не менших заданих, при цьому мінімізуються сумарні приведені витрати на виробництво.

Для кожного підприємства у розв'язання включають не більше одного варіанту реконструкції.

Таблиця 67 - Варіанти реконструкції підприємств і обмеження задачі

Вихідні дані		I		II		III		Потреба в продукції й ліміти ресурсів
		Варіанти реконструкції						
		1	2	1	2	1	2	
Продукція, тис. т	Листовий прокат	300	100	1000	500	600	200	1100
	Сортовий прокат	250	500	100	500	-	700	1000
Лімітуємі ре- сурси	1-го виду, тис. т	300	250	500	400	350	650	1200
	2-го виду, тис. т	55	60	190	100	80	90	250
Витрати на весь варіант, млн..грн.		100	120	190	160	140	210	-

Варіант 35

Цех випускає три види деталей, які виготовляються на трьох верстатах. На рисунку 17 показана технологічна схема виготовлення деталі кожного виду із вказівкою часу її обробки на верстатах. Добовий ресурс робочого часу верстатів 1, 2, 3 становить, відповідно, 890, 920 і 840 хвилин. Вартість однієї деталі виду 1, 2, 3 дорівнює, відповідно, 3, 2 і 1 грн. Потрібно скласти добовий план виробництва з метою максимізації вартості випущеної продукції.

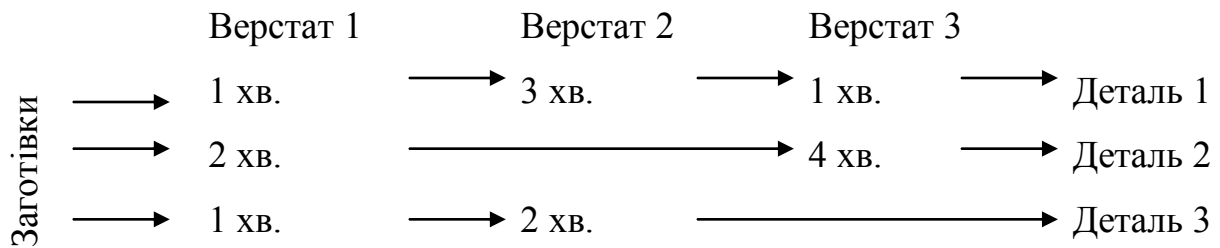


Рисунок 17

Варіант 36

Для виробництва трьох видів виробів (А, В и С) використовується сировина типу 31, 32 і 33, причому закупівлі сировини типу 31 і 32 обмежені можливостями постачальників. У таблиці 68 наведені норми витрат сировини, ціни на сировину й на вироби, а також обмеження по закупівлі сировини. Потрібно оптимізувати план виробництва продукції з метою максимізації прибутку.

Таблиця 68

Тип сировини	Ціна 1 кг. сировини (грн.)	Норми витрат сировини на один виріб (кг)			Обмеження по закупівлі сировини (кг)
		А	В	С	
31	2	1	3	А	3000
32	1	4	1	3	-
33	В	6	5	2	3320
	Ціна одного виробу грн.)	6В+12	5В+22		

Таблиця 69

	A	B	C		A	B	C
1	2	1	17	11	3	3	26
2	2	2	19	12	3	4	26
3	2	3	21	13	4	1	25
4	2	4	23	14	4	1	27
5	3	1	21	15	4	2	26
6	3	1	22	16	4	2	27
7	3	2	23	17	4	3	28
8	3	2	24	18	4	3	30
9	3	2	25	19	4	4	30
10	3	3	25	20	4	4	32

Варіант 37

Була запропонована наступна проста модель сільськогосподарського виробництва в Донецькій області для зовнішнього ринку. Є три основних культури, що ростуть у цьому кліматі, і вирощуватися вони можуть на одному із двох типів орних земель. У цей час для обробки придатні 1400000 га землі типу I і 1200000 га землі типу II. Різні типи культур по-різному ростуть на різних землях. Підраховано, що чистий урожай культури i на землі типу j становить R_{ij} (табл. 70).

Таблиця 70

I	R_{ij}	
	J=I	J=II
1	6	6
2	88	5
3	4	5

Всі культури вимагають додаткового зрошення (іригаційного). Наявна іригаційна система забезпечує 5600000 м^3 води в рік. Для одного га культури i , вирощеної на землі типу j , $n_{ht,f} W_{ij} \text{ м}^3$ у рік (табл. 71).

Таблиця 71

I	W _{ij}	
	J=I	J=II
1	2	3
2	3	2
3	3	1

Населення, зайняте в сільському господарстві, становить 700000 чоловік. Щоб одержати врожаї 1, 2, 3 з кожних 10 га землі, для виконання різних робіт з вирощування культур впродовж 1 року потрібно, відповідно, 2, 1 і 3 чоловік.

Визначить, які культури, у якій кількості й на яких землях необхідно вирощувати, щоб одержати максимальний урожай? Який розмір максимального врожаю?

Варіант 38

Стандартом передбачено, що октанове число автомобільного бензину А-76 повинне бути не нижче 76, а вміст сірки не більше 0,3%. Для виготовлення такого бензину на Лисичанському заводі використовується суміш чотирьох компонентів. Дані про ресурси компонентів, що змішують, їхня собівартість і їхні октанові числа, а також дані про вміст сірки наведені в таблиці 72.

Потрібно визначити, скільки тонн кожного компонента варто використати для одержання 1000 т автомобільного бензину А-76, щоб його собівартість була мінімальною.

Таблиця 72

Характеристика	Компоненти автомобільного бензину			
	№1	№2	№3	№4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,30	0,20
Ресурси, т	700	600	500	300
Собівартість, діл./т	40	45	60	90

Варіант 39

На ділянку споруджуваної дороги необхідно вивезти 20000 м³ кам'яних матеріалів. У районі будівництва є три кар'єри із запасами 8000 м³, 9000 м³, 10000 м³. Для навантаження матеріалів використовуються екскаватори, що мають продуктивність 250 м³ у зміну в кар'єрах 1 і 2 і 500 м³ у зміну в кар'єрі 3.

Ці кар'єри забезпечують кам'яними матеріалами також ряд інших споруджуваних об'єктів. На навантаження матеріалів для розглянутої ділянки виділений для екскаваторів загальний ліміт 60 машино-змін із правом використання його за розсудом будівельників.

Транспортні витрати на перевезення матеріалів характеризуються показниками: для перевезення 10000 м³ матеріалів з кар'єру 1 потрібно 1000 автомобілів-змін, з кар'єру 2 – 1350, з кар'єру 3 – 17000 змін. Потрібно знайти оптимальний план перевезень, що забезпечує мінімальні транспортні витрати.

Варіант 40

Цех випускає три види деталей, які виготовляються на двох верстатах. На рис. 18 показана технологічна схема виготовлення деталей кожного виду із вказівкою часу її обробки на верстатах.

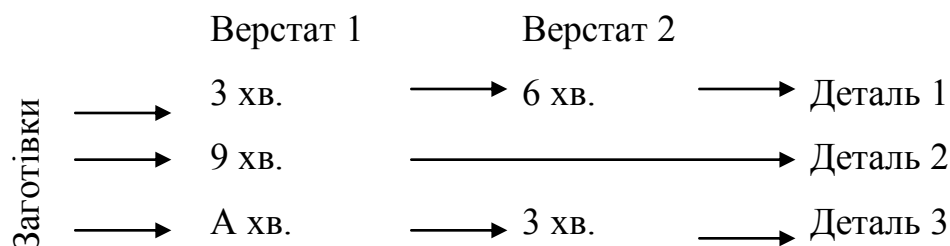


Рисунок 18

Задано добовий ресурс робочого часу кожного верстата: В хв. Для верстата 1, С хв. для верстата 2 (табл. 73). Вартість однієї деталі виду 1, 2, 3 становить 3, 2 і 1 грн., відповідно. Потрібно скласти добовий план виробництва деталей з метою максимізації вартості випущеної продукції.

Таблиця 73

	A	B	C		A	B	C
1	3	600	900	11	5	870	900
2	3	960	600	12	5	930	450
3	3	510	750	13	3	720	900
4	4	690	450	14	3	960	420
5	5	660	900	15	4	660	900
6	5	840	450	16	4	870	450
7	3	660	900	17	5	630	270
8	3	960	510	18	3	600	750
9	4	600	900	19	4	720	900
10	3	780	450	20	4	750	360

Варіант 41

У пекарні для випічки чотирьох видів хліба використовується борошно двох сортів, маргарин і яйця. Наявне устаткування, виробничі площі й поставки продуктів такі, що в добу можна переробити не більше А кг борошна сорту 1, В кг борошна сорту 2, С кг маргарину, D штук яєць. У таблиці 74 наведені норми витрати продуктів, а також прибуток від продажу 1 кг хліба кожного виду.

Потрібно визначити добовий план випічки хліба, що максимізує прибуток.

Таблиця 74

Найменування продукту	Норми витрати на 1 кг хліба (по видах)			
	1	2	3	4
Борошно сорту 1 (кг)	0,5	0,5	0	0
Борошно сорту 2 (кг)	0	0	0,5	0,5
Маргарин (кг)	0,0125	0	0	0,12
Яйце (шт.)	2	1	1	1
Прибуток (коп.)	14	12	5	6

Таблиця 75

	A	B	C	D		A	B	C	D
1	250	200	60	1380	11	210	180	50	1180
2	290	200	70	1540	12	260	190	60	1380
3	350	200	80	1740	13	300	200	70	1560
4	380	200	90	1880	14	330	210	80	1720
5	290	150	50	1280	15	370	220	90	1900
6	300	150	60	1380	16	220	160	50	1160
7	310	150	70	1480	17	270	210	60	1440
8	330	150	80	1600	18	310	190	70	1560
9	400	150	90	1820	19	340	200	80	1720
10	240	100	50	1080	20	390	180	90	1820

Варіант 42

Прядильна фабрика для виробництва двох видів пряжі використовує три типи сировини - чисту вовну, капрон і акрил. У таблиці 76 зазначені норми витрати сировини і його загальна кількість, яку можна використати фабрикою впродовж року, і прибуток від реалізації тони пряжі кожного виду.

Потрібно скласти річний план виробництва пряжі з метою максимізації сумарного прибутку.

Таблиця 76

Тип сировини	Норми витрати сировини на 1 тонну пряжі (т)		Кількість сировини (т)
	Вид 1	Вид 2	
Вовна	0,5	0,2	600
Капрон	A	0,6	B
Акрил	0,5-A	0,2	C
Прибуток від реалізації пряжі (грн..)	1100	90	

Таблиця 77

	A	B	C		A	B	C
1	0,1	620	500	11	0,2	710	400
2	0,1	730	500	12	0,2	880	410
3	0,1	840	500	13	0,2	810	410
4	0,1	650	510	14	0,2	740	410
5	0,1	760	510	15	0,3	660	300
6	0,1	870	510	16	0,3	690	300
7	0,1	790	520	17	0,3	720	300
8	0,2	920	400	18	0,3	750	300
9	0,2	850	400	19	0,3	780	300
10	0,2	780	400	20	0,3	800	300

Варіант 43

Припустимо, що з двох складів розвозять товари по трьох магазинах, вартість перевезень одиниці продукції задана у вигляді таблиці 78. Побудуйте транспортну задачу, якщо на 1-му складі зберігається 100 од. продукції, на 2-м - 150 одиниць, в 1-й магазин потрібно доставити 70 одиниць продукції, в 2-й - 80, в 3-й - 100 одиниць продукції, відповідно.

Таблиця 78

	Магазин №1	Магазин №2	Магазин №3
Склад №1	10	18	15
Склад №2	16	20	10

Варіант 44

Фірма АМІК повинна відправити деяку кількість персональних комп'ютерів із трьох складів у п'ять магазинів. На складах є, відповідно, 15, 25, 20 комп'ютерів, а для п'яти магазинів потрібно, відповідно, 20, 12, 5, 8 і 12 комп'ютерів. Вартість перевезення одного комп'ютера (у доларах) зі складу в магазин приведена в таблиці 79.

Як варто спланувати перевезення для мінімізації вартості?

Таблиця 79

Склад	Магазини				
	Фокстрот	Быттехника	Про	Матриця	Ост-вест
№1	1	0	3	4	2
№2	5	1	2	3	3
№3	4	8	1	4	3

Варіант 45

Визначить взаємозв'язок пунктів поставки й закупівлі вагонів при наступній характеристики транспортної мережі (табл. 80):

Таблиця 80

Постачальники вагонів	Ресурси вагонів, шт.	Відстань до пунктів завантаження, км			
		2	3	1	4
1-й	120	2	3	1	4
2-й	65	3	2	4	6
3-й	35	5	3	6	3
Потреба у вагонах (шт.)		90	70	40	20

Варіант 46

Припустимо, що в Полтаві, Сумах і Харкові знаходяться три консервних заводи. Ці консервні заводи можуть робити, відповідно, 250, 500 і 750 ящиків консервів у день. Для реалізації продукції в Україні є п'ять складів оптової торгівлі: у Києві, Донецьку, Дніпропетровську, Запоріжжі й Луганську. Кожний склад може продати до 300 ящиків за день. Фахівець, зайнятий розподілом продукції, хоче визначити число ящиків, що повинні бути доставлені від трьох консервних заводів до п'яти збутових складів так, щоб кожний склад міг би одержати стільки ящиків, скільки може продати щодня, а транспортні витрати були б мінімальними. У таблиці 81 зазначена вартість транспортування ящика (дол.).

Таблиця 81

	Полтава	Суми	Харків
Київ	0,90	2,50	0,60
Донецьк	1,80	1,70	1,80
Дніпропетровськ	1,50	1,80	2,50
Запоріжжя	1,00	2,00	1,40
Луганськ	2,70	1,80	1,60

Варіант 47

Компанія запланувала переміщення багатьох службовців на нові посади відповідно до нового штатного розкладу. Службовці, яких зачіпає ця реформа, можуть бути по кваліфікації й досвіду розділені на п'ять груп Г1, Г2, Г3, Г4 і Г5, що містять, відповідно, 2, 5, 4, 8 і 6 службовців. Аналогічним чином кожен посаду можна віднести до однієї з наступних чотирьох груп: Д1, Д2, Д3 і Д4 - по 8, 3, 9 і 5 посад, відповідно. У таблиці 82 вказуються, які групи службовців мають достатню кваліфікацію для заняття відповідних посад.

Таблиця 82

Посади	Групи				
	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
Д1		+		+	
Д2				+	+
Д3	+			+	
Д4	+	+	+		+

Варіант 48

Потрібно транспортувати вантаж одного виду, що перебуває у двох постачальників А1 і А2, до трьох споживачів, В1, В2 і В3. Кожний з постачальників має деякий запас товарів: А1 - 100 одиниць, А2 - 200 одиниць. Кожний споживач характеризується своїм попитом на товари: В1 - 80 одиниць, В2 - 130 одиниць, В3 - 90 одиниць. Можливі варіанти транспорту-

вання й вартість перевезення одиниці вантажу (дол.) зазначені в таблиці 83.

Таблиця 83

Постачальник	Споживач			Ресурс
	B1	B2	B3	
A1	7	9	2	100
A2	20	15	16	200
Потреба	80	130	90	

Потрібно визначити, яку кількість вантажу варто відправити від кожного постачальника кожному споживачеві, щоб сумарні транспортні витрати були мінімальними.

Варіант 49

У певний день підприємство по перевезенню вантажів повинне забрати вантажі в п'ятьох місцях: 1, 2, 3, 4, 5. Підприємство має п'ять вантажівок різних типів. Вартість перевезення одиниці вантажу кожним типом вантажівки до пункту призначення приведена в таблиці 84.

У пунктах 1, 2, 3, 4, 5 необхідно забрати, відповідно, 60, 30, 100, 50, 40 тонн вантажу. Кожний з типів вантажівок може перевезти за день, відповідно, 40, 60, 20, 30, 20 тонн вантажу, відповідно. Визначить розподіл вантажів по вантажівках, що мінімізує загальну вартість.

Таблиця 84

Тип вантажівки	Вартість перевезень, грн..				
	1	2	3	4	5
Тип 1	30	20	40	10	20
Тип 2	30	10	30	20	30
Тип 3	40	10	10	40	10
Тип 4	20	20	40	20	30
Тип 5	30	20	10	30	40

Варіант 50

Компанія володіє двома фабриками Ф1 і Ф2, що виготовляють електронне устаткування. Фабрики впродовж деякого періоду випускають 16 і 12 тис. виробів, відповідно. Компанія постачає трьох споживачів 31, 32 і 33, потреби яких впродовж одного й того ж періоду становлять, відповідно, 10, 13 і 7 тис. виробів. Вартість перевезень 1 тис. виробів споживачеві з фабрик наведена в таблиці 85.

Сформулюйте задачу як транспортну й вирішіть її. Яким чином необхідно переглянути план перевезень, якщо виробничі можливості фабрик Ф1 і Ф2 зростуть, відповідно, до 20 і 14 тис. виробів?

Таблиця 85

Фабрика	Споживач		
	31	32	33
Ф1	5	4	6
Ф2	6	3	2

Варіант 51

Компанія володіє заводами А, В і С. Відповідні обсяги виробництва 6000, 3000 і 3000 одиниць. Компанія зобов'язалася поставляти відповідно 1500, 2500, 2700 і 3300 одиниць у міста Г1, Г2, Г3, Г4. При заданих вартостях перевезень складіть оптимальні плани перевезень.

Таблиця 86

Місто	Вартість транспортування, грн..		
	А	В	С
Г1	1	9	6
Г2	4	2	1
Г3	1	2	7
Г4	9	8	3

Варіант 52

Фірма запропонувала власникам трьох авіаліній перевозити бригади фахівців у різні частини світу. Вартість перевезень у тис. грн.. наведена в таблиці 87.

Адміністрація фірми вирішила, що індивідуальні контракти на перевезення будуть заключатися із власниками ліній Київ, Харків, Донецьк у співвідношенні 2:3:2, і повідомила про це керуючого транспортними перевезеннями, а також сповістила його про те, що з 70 намічених на наступний рік перевезень 10 - в ОАЕ, 15 - на Кіпр, 20 - на Мальту, 10 - у Туреччину й 15 - у Єгипет.

Таблиця 87

Авіалінія	ОАЕ	Кіпр	Мальта	Туреччина	Єгипет
Київ-Авіа	24	16	8	10	14
Харків-Авіа	21	15	7	12	16
Донецьк-авіа	23	14	7	14	20

Як йому варто розподілити індивідуальні контракти на перевезення для мінімізації загальної вартості за умови задоволення запитів адміністрації фірми? Яка мінімальна вартість перевезень, що задовольняють наведеним вище обмеженням?

Варіант 53

Урядовий заклад одержав наступні пропозиції від фірм Ф1, Ф2 і Ф3 на покупку фірмових пальто трьох розмірів X, XL, XXL (табл. 88).

Таблиця 88

Фірма	Вартість одного пальто, діл.		
	L	XL	XXL
Ф1	110	115	126
Ф2	107	115	130
Ф3	104	109	116

Повинні бути укладені контракти на продаж 1000 пальто розміру L, 1500 пальто розміру XL, 1200 пальто розміру XX, однак обмеженість виробничих потужностей фірм приводить до того, що загальна кількість замовлень не може перевершувати 1000 пальто для фірми Ф1, 1500 пальто для фірми Ф2 і 2500 пальто для фірми Ф3. Необхідно, щоб ці контракти були укладені з мінімізацією загальної вартості, однак обмеження повинні бути розподілені по фірмах як можна справедливніше. Як варто розподілити замовлення для виконання цих вимог?

Варіант 54

Сталеплавильна компанія має три заводи М1, М2 і М3, здатні зробити за деякий проміжок часу 50, 30 і 20 тис. тонн стали, відповідно. Свою продукцію компанія поставляє чотирьом споживачам 31, 32, 33 і 34, потреби яких становлять, відповідно 12, 15, 25 і 36 тис. тонн сталі. Вартість виробництва й транспортування 1 тис. тонн сталі з різних заводів різним споживачам наведені в таблиці 89.

Визначить мінімальні загальну вартість, обсяги виробництва на кожному заводі й плани перевезень.

Таблиця 89

Споживач	Завод		
	М1	М2	М3
31	15	19	14
32	19	18	16
33	19	18	20
34	15	19	18

Варіант 55

Чотири сталеливарних заводи 1, 2, 3 і 4 роблять щотижня, відповідно, 950, 300, 1350 і 450 тонн стали певного сорту. Сталеві болванки повинні бути передані споживачам П1, П2, П3, П4 і П5, щотижневі запити яких становлять відповідно, 250, 1000, 700, 650 і 450 тонн стали.

Вартість транспортування від заводів до споживачів наведена в таблиці 90.

Який потрібно скласти план розподілу сталевих болванок, щоб мінімізувати загальну вартість?

Таблиця 90

Завод	Споживач				
	П1	П2	П3	П4	П5
1	12	16	21	19	32
2	4	4	9	5	24
3	3	8	14	10	26
4	24	33	36	34	49

Варіант 56

У деякій місцевості у двох пунктах А і В є потреба в додатковому транспорті. В пункті А потрібно 5 додаткових автобусів, а в пункті В -7. Відомо, що 3, 4 і 5 автобусів можуть бути отримані з гаражів Г1, Г2 і Г3.

Як варто розподілити ці автобуси між пунктами А і В, щоб мінімізувати їхній сумарний пробіг? Відстані від гаражів до пунктів А і В наведені в таблиці 91.

Таблиця 91

Гараж	Відстань до пунктів, км	
	А	В
Г1	3	4
Г2	1	3
Г3	4	2

Варіант 57

Заводи фірми розташовані в містах Г1 і Г2. Вони доставляють товари на склади міст 31, 32 і 33. Відстань між цими містами наведені в таблиці 92.

Завод у місті Г1 випускає в рік 600 т товарів, у місті Г2 - 500 т. Склад 31 уміщає 400 т, 32 - 600 т, 33 - 300 т. Як варто транспортувати товари для мінімізації цін на перевезення?

Таблиця 92

	31	32	33
Г1	40	110	190
Г2	170	100	150

На дорозі Г1-Г2 ведуться роботи, що подвоюють вартість перевезень по ній. Як би ви переглянули план перевезень?

Варіант 58

В області є два цементних заводи й три споживачі на їхню продукцію - домобудівних комбінати. У таблиці 93 зазначені добові обсяги виробництва цементу, добові потреби в ньому комбінатів і вартість перевезення 1 т цементу від кожного заводу до кожного комбінату.

Потрібно скласти план добових перевезень цементу з метою мінімізації транспортних витрат.

Таблиця 93

Заводи	Виробництво цементу (т/доба)	Вартість перевезення 1 т цементу (діл.)		
		Комбінат 1	Комбінат 2	Комбінат 3
1	40	10	15	20
2	60	20	30	30
	Потреба в цементі (т/доба)	50	20	30

Варіант 59

У місті А намічено провести міську олімпіаду по математиці серед школярів, причому окремо по сімох розділах. Для цього кожна школа повинна представити на олімпіаду по 7 школярів для участі по одному в кожному розділі.

Кожна школа визначила по 7 школярів у команду. Причому відомо, що кожний із семи учнів може за відпущений час вирішити правильно наступну кількість задач (табл.. 94).

Визначить, хто й у якому розділі олімпіади повинен брати участь.

Таблиця 94

Номер учасника	Кількість правильно вирішених задач по кожному із семи розділів						
	Номер розділу						
	1	2	3	4	5	6	7
1	11	15	20	16	13	26	11
2	12	13	22	14	16	29	13
3	14	16	24	22	22	32	16
4	14	12	20	19	20	31	15
5	16	13	22	20	23	34	17
6	13	15	18	14	26	29	18
7	12	11	16	17	17	24	10

Варіант 60

П'ять співробітників з номерами 1, 2, 3, 4, 5 здатні виконати п'ять завдань із номерами 31, 32, 33, 34, 35. В силу різної кваліфікації на виконання цих завдань їм буде потрібно різний час. Як варто розподілити людей по завданнях, щоб мінімізувати час виконання? Час виконання (у годинах) наведені в таблиці 95.

Таблиця 95

Співробітники	Завдання				
	31	32	33	34	35
1	10	5	9	18	11
2	13	19	6	12	14
3	3	2	4	4	5
4	18	9	12	17	15
5	11	6	14	19	10

Варіант 61

На новорічному вечорі буде проведений конкурс серед танцювальних пар. Дев'ять юнаків і дев'ять дівчат давно знайомі один з одним і знають, хто з ким і як танцює. Якість виконання танців парами по п'ятибальній системі в різних сполученнях партнерів оцінюється так, як це показано в таблиці 96.

Таблиця 96

	Андрій	Борис	Віктор	Олексій	Дмитро	Георгій	Іван	Ілля	Леонід
Ганна	3	4	5	2	4	5	3	2	5
Інна	4	4	2	4	5	4	5	5	3
Галина	2	4	3	5	4	5	3	4	5
Дар'я	3	4	5	5	3	4	4	3	3
Марія	4	5	5	3	4	5	3	5	4
Кира	3	2	3	5	4	5	2	3	5
Ірина	5	2	4	3	2	5	3	4	5
Лариса	3	3	2	5	4	4	5	5	4
Ніна	4	5	2	3	4	4	3	5	4

Як потрібно скласти танцювальні пари, щоб у сумі набрати найбільшу кількість балів?

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

- 1 Дайте визначення таким термінам:
 - математичне програмування;
 - лінійне та квадратичне програмування;
 - цільова функція;
 - система обмежень;
 - план задачі;
 - математична модель;
- припустиме розв'язання і оптимальний план задачі.
- 2 Як записати задачу лінійного програмування в матричній формі.
- 3 Як вибрати метод розв'язання формалізованої задачі.
- 4 Як знайти за графіком оптимальне значення цільової функції.
- 5 Типи задач ЛП: стандартна, канонічна, загального виду.
- 6 Як одержати двоїсту задачу.
- 7 Як визначити тип транспортної задачі.
- 8 Які два типи задач міжгалузевого балансу Ви знаєте.
- 9 Поняття нелінійного програмування.
- 10 Поняття багатокритеріальних задач в економіці.
- 11 Алгоритм побудування двоїстої задачі до задачі канонічного виду.
- 12 Глобальний екстремум, умовний екстремум, найбільше й найменше значення функції в області.
- 13 Алгоритм побудування двоїстої задачі до задачі загального виду.
- 14 Алгоритм знаходження найбільшого значення функції в деякій області (нелінійне програмування).
- 15 Алгоритм побудування двоїстої задачі до задачі стандартного виду.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ З КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 6x_2 - x_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + 4x_3 \leq 4 \\ x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 При рішенні прямої й двоїстої задачі одержали $F_{\max} = G_{\min}$. Що можна сказати про дане розв'язання. На підставі якої теореми?

Варіант 2

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 - 4x_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + x_3 + 5x_4 \leq 8 \\ x_1 = 3x_2 \\ 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 \geq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 Після розв'язання двоїстої задачі одержали наступні оцінки ресурсів: $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$. Що можна сказати про ресурси прямої задачі. На підставі якої теореми?

Варіант 3

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$z = 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \leq 17 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 12 \\ x_2 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

2 Після розв'язання двоїстої задачі одержали наступні обмеження: $2 = 2$, $3 > 2$, $4.5 = 4.5$. Що можна сказати про план прямої задачі (які технології вигідні). На підставі якої теореми?

Варіант 4

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2 Після розв'язання прямої й двоїстої задачі одержали $F_{\max} = 50$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$. Перший ресурс збільшили на 3 одиниці й знайшли нове розв'язання. Чому дорівнює нове значення цільової функції? На підставі чого?

Варіант 5

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2 Після розв'язання прямої задачі одержали наступні значення: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$. Що можна сказати про виконання обмежень двоїстої задачі. На підставі якої теореми?

Варіант 6

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$z = x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \leq 8 \\ 3x_2 + 5x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

2 Після розв'язання прямої задачі одержали наступні обмеження: $25 = 25$, $43 < 45$, $55 = 55$. Що можна сказати про двоїсті оцінки ресурсів. На підставі якої теореми?

ДОДАТОК А ПАКЕТ MAPLE

Деякі дані про роботу в пакеті Maple

Пакет є командним пакетом, тому що працює з командами (операторами), які треба набирати на клавіатурі. Виконується оператор після натиску на клавішу «**Enter**». Запрошенням для вводу оператора є знак $[>$. Команди розділяються символами «:» або «;». Якщо команда закінчується символом «:», то результат її виконання на екран не виводиться. Якщо команда закінчується символом «;», то результат її виконання виводиться на екран.

Абетка **Maple** містить букви латинської абетки от *a* до *z* и от *A* до *Z*, цифри от 0 до 9 и 32 спеціальних знака. К спеціальним знакам відносяться:

$+$, $-$, $*$, $/$ - знаки арифметичних операцій;

$^$ - зведення в ступінь; и т.ін.

Ім'я змінної може бути будь-якою послідовністю букв, цифр і знаків підкреслення, що починається з букви. Букви верхнього і нижнього регістрів різняться в іменах змінних: *x* і *X* - це різні змінні.

Алгебраїчні вирази записуються так, наприклад,

$$a^2 \left(2 + \frac{3}{\sqrt{b}} \right) = a^2 * (2 + 3 / \text{sqrt}(b)).$$

Команди «:=» и «:=». Відміна присвоювання

Команда «:=» присвоює значення змінним, вираз функціям и т.ін. Команда «=» просто використовується в рівняннях.

Оператор присвоювання має вигляд ім'я змінної := вираз;

Система зберігає в пам'яті результати всіх команд усіх завантажених документів. Тому результати обчислень у поточному документі можуть виявитися залежними від визначень, зроблених в інших документах.

Для скасування операції присвоювання можна скористатися одним з наступних способів:

1) якщо необхідно скасувати присвоювання значень для всіх перемінних, можна використовувати команду **restart**. Ця команда скасовує всі попередні визначення, скасовує залежність значень перемінних від результатів роботи інших документів. Її варто застосовувати, коли попередня частина команд документа не важлива. Тому цю команду рекомендується ставити першою.

2) Для скасування присвоювання конкретної перемінної можна скористатися оператором виду **ім'я змінної:= ім'я змінної** ;.

Приклад:

> x:=a+b; y:=x^2;

$$x := a + b$$

$$y := (a + b)^2$$

> x:='x':

> x;y;

x

$$(a + b)^2$$

Функція користувача. Обчислення значень функції

Функція користувача задається оператором **Ім'я функції:=вираження** ;

Наприклад:

> y:=x^2;

$$y := x^2$$

Щоб обчислити значення функції при деякому значенні аргументу, необхідно аргументові привласнити значення і вказати ім'я функції.

> **x:=Pi;y;**

$$x := \pi$$
$$\pi^2$$

Якщо Maple записав результат в аналітичному виді , то для чисельного представлення потрібно використовувати оператор **evalf(y,k)**; де **y** - вираження , **k** - кількість значущих цифр.

> **evalf(y);**

9.869604404

> **evalf(y,4);**

9.872

Побудова графіка функції

Основна функція системи, призначена для побудови двовимірних графіків, має вигляд **plot(y, x=a..b, option)** .

Тут **y = f(x)** - функція, **x = a..b** - діапазон змін по горизонталі, **option** - додаткові функції.

Щоб побудувати на одному малюнку графіки декількох функцій, необхідно перелічити потрібні функції або їхні імена, уклавши їхню послідовність у квадратні дужки . Усі використовувані функції повинні залежати від аргументу, позначеного однаковим ім'ям .

За замовчуванням графіки зображуються кольоровими лініями: червоний (**red**), зелений (**green**), жовтий (**yellow**), синій (**blue**) і т.д. Але при роздруківці малюнка в чорно-білому варіанті графіки стають не помітними. Тому, для наочності, різні криві зображують різними способами, при цьому колір указують чорний (**color = black**).

1 Лінії різної товщини задаються параметром **thickness**. Товщина лінії може бути дорівнює 1 (за замовчуванням), 2 або 3.

```
> y1:=x: y2:=x^2: y3:=x^3:
```

```
> plot([y1,y2,y3],x=-1..1, thickness=[1,2,3],color=black);
```

Результат – на рис. А.1.

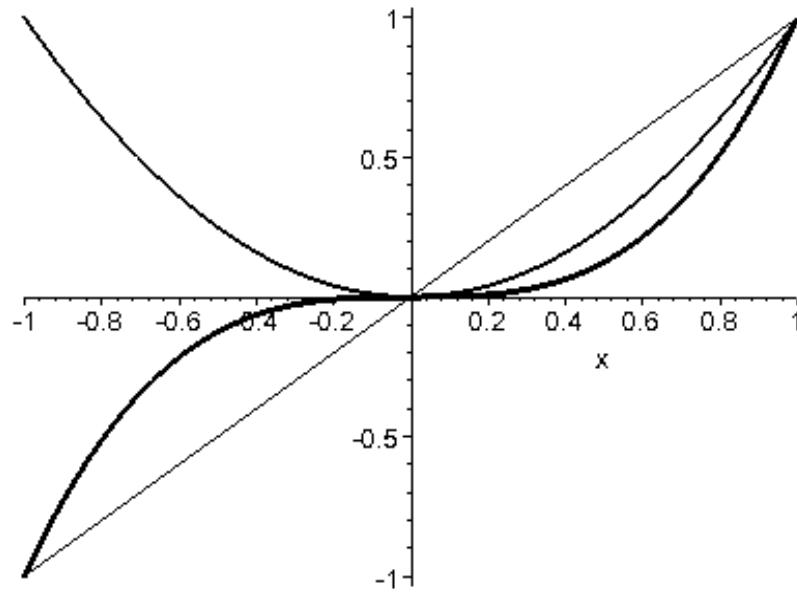


Рисунок А.1

2 Лінія задається крапками – **style = point**. При цьому можна задавати вид символів, що зображують крапки графіка – **symbol = s**. Може приймати одне з наступних значень: **box** - квадратики, **cross** - хрестики (за замовчуванням), **circle**- кружечки, **point** - крапки і **diamond** - ромбики.

```
>plot([y1,y2,y3], x=-1..1, style=point, symbol=[cross,circle,diamond],  
color=black);
```

Результат – на рис. А.2.

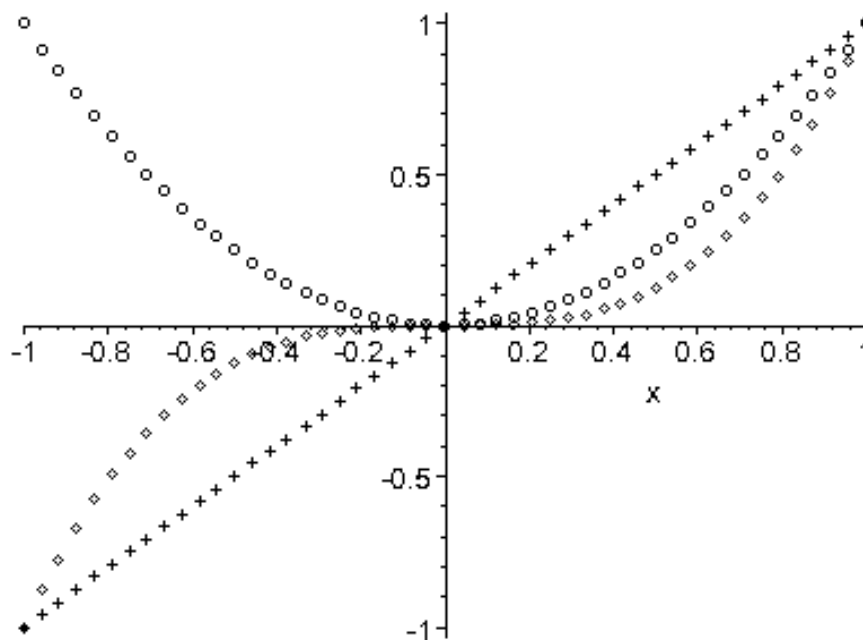


Рисунок А.2

3 Допускається комбінація стилів лінії:

```
>plot([y1,y2,y3],          x=-1..1,          style=[point,point,line],  
symbol=[cross,circle], thickness=[1,1,2], color=black);
```

Результат – на рис. А.3.

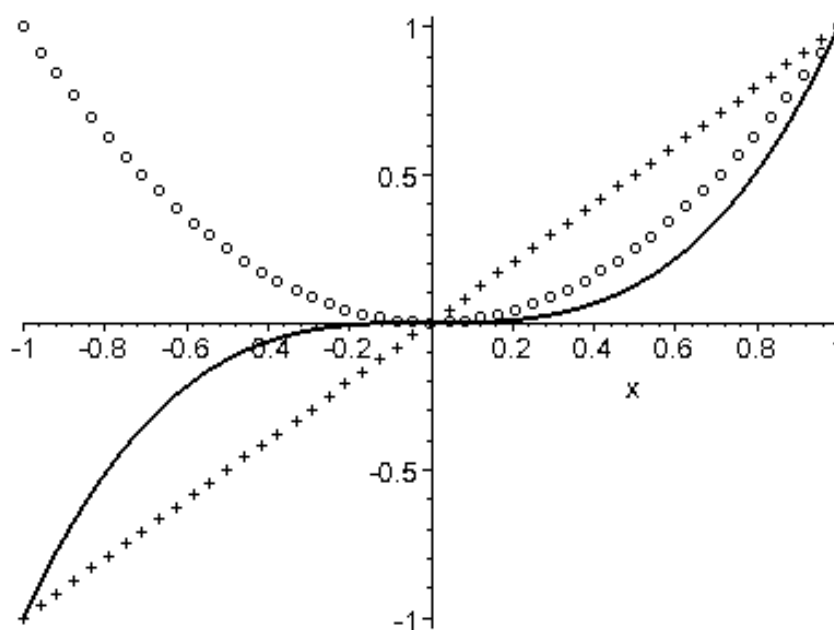


Рисунок А.3

Опції `thickness`, `color`, `style`, `symbol` команди `plot` можуть розташовуватися в довільному порядку.

Текст на графіку

1 Заголовок задається опцією `title = 'текст'`.

2 Команда `textplot([t_x, t_y, рядок], опції)`, що входить у пакет `plots`, дає можливість поміщати текст на графіку в заданій крапці. Тут `t_x`, `t_y`, - координати крапки, починаючи з якої розміщується рядок.

Як опції можна вказати:

Font = [назва _шрифту, стиль, розмір].

назва _шрифту: **times, courier, helvetica, symbol**;

стиль: **roman, bold, italic, bolditalic**;

розмір: **розмір шрифту**;

align = *v* -розміщення тексту на малюнку. Величина *v* приймає значення **below** (нижче), **right** (вправо), **above** (вище), **left** (уліво) .

Приклади опцій: **align = below** або **align = {above, right}**,
font = [times, italic, 12].

Сполучення графіків і написів

Команда `display([pic_1, pic_2, ...])` сполучає графіки .

Команда виводить `pic_1`, `pic_2`, ... на одному малюнку в загальних координатах. Для застосування цієї команди потрібно привласнити змінним `pic_1`, `pic_2`, ... дії графічних команд.

Приклад. Одержати графіки функцій $F1(x) = \sin(x) - 1$ і $F2(x) = 1 + \cos(x)$. Зробити напис на малюнках: $F1(x)$ и $F2(x)$.

> **with(plots):**

> **t1:=textplot([2,2,`F1(X)`], [2,-2,`F2(X)`]), font=[TIMES, BOLDITALIC, 12]):**

```
> f1:= 1+cos(x): f2:= sin(x)-1:
```

```
> pic:=plot({f1,f2},x=-7..7, y=-3..3, title=` f1(x)=1+cos(x),  
f2(x)=sin(x)-1`, color=black):
```

```
> display([t1,pic]);
```

Результат – на рис. А.4.

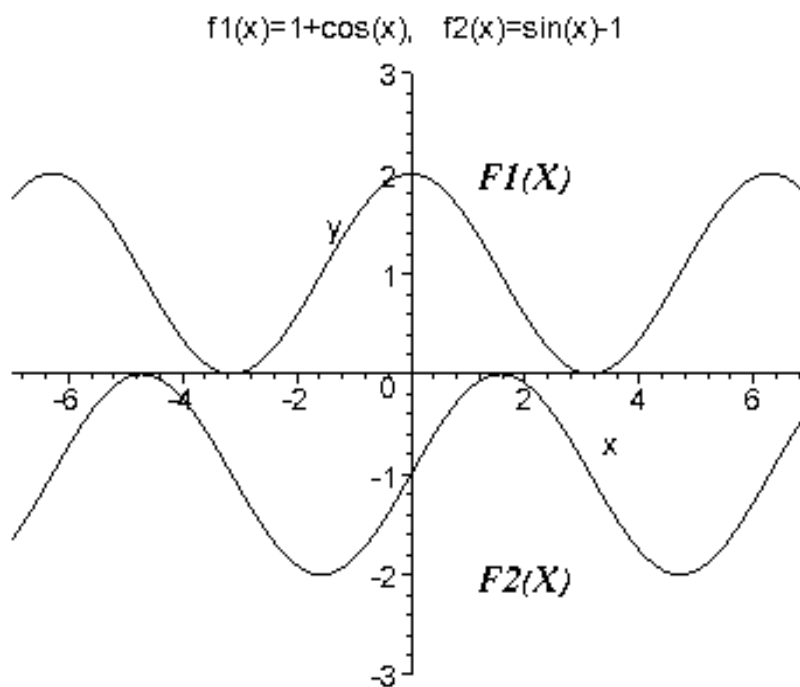


Рисунок А.4

Побудова графічного розв'язання системи нерівностей

Треба розв'язати графічно систему нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Команда очищення пам'яті:

> restart:

Вводимо нерівності

> g1:=x1+3*x2>=6; g2:=7*x1+10*x2<=70; g3:=4*x1-5*x2>=-20;

$$g1 := 6 \leq x1 + 3 x2$$

$$g2 := 7 x1 + 10 x2 \leq 70$$

$$g3 := -20 \leq 4 x1 - 5 x2$$

Команди підключення бібліотек розширеної графіки:

> with(plots):

Команда побудови області рішень:

**>inequal({g1,g2,g3, x1>=0, x2>=0}, x1=0..10, x2=0..10,
optionsexcluded=(color=white));**

Результат – на рис. А.5.

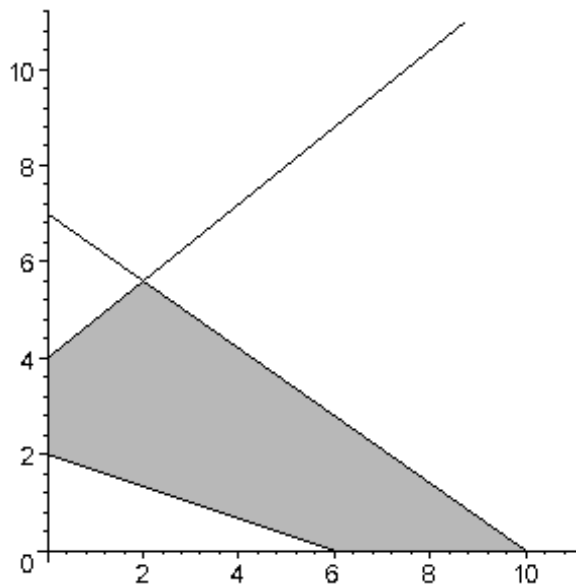


Рисунок А.5

Примітка. Для вірного масштабу треба виділити графік та натиснути кнопку **1:1** на панелі інструментів Maple

Розв'язок рівнянь, нерівностей и систем рівнянь і нерівностей

Для розв'язання рівнянь, нерівностей і їхніх систем в аналітичному виді використовується функція **solve(eqn, var)**.

Тут **eqn** - рівняння, нерівність або система, **var** - імена невідомих змінних, значення яких необхідно знайти.

Якщо система не змогла знайти розв'язання, то в цьому випадку просто видається запрошення введення.

Якщо рівняння в **solve** укладено у фігурні дужки, то результат буде представлений теж у дужках.

Для розв'язання системи рівнянь щодо деякої кількості невідомих, ці система і невідомі повинні бути записані у фігурних дужках.

```
> s:=solve({a*x-y=sqrt(3), 5*x+a*y=1}, {x, y});
```

$$s := \left\{ y = -\frac{-a + 5\sqrt{3}}{a^2 + 5}, x = \frac{a\sqrt{3} + 1}{a^2 + 5} \right\}$$

Для чисельного розв'язання систем рівнянь, коли не вдається знайти аналітичне розв'язання або по інших розуміннях, можна використовувати функцію виду **fsolve(eqns, vars)**.

Для пошуку рішень в околиці якої-небудь конкретної точки, необхідно задавати інтервал пошуку, що включає в себе цю точку

```
.> f := sin(x+y) - exp(x)*y = 0: g := x^2 - y = 2:
```

```
> fsolve({f,g},{x,y},{x=-1..1,y=-2..0});
```

$$\{y = -1.552838698, x = -.6687012050\}$$

Знаходження максимуму (мінімуму) лінійної функції

Розв'язання задач лінійного програмування виконується бібліотекою програм «simplex». Підключається ця бібліотека командою `with(simplex)`.

Максимум або мінімум цільової функції шукаються командами:

`maximize(f, sog додаткові умови);`

`minimize(f, sog додаткові умови);`

Тут **`f`** - цільова функція;

`sog` - система обмежень;

додаткові умови, визначаються знаками змінних.

Нехай, наприклад, цільова функція залежить від трьох змінних x_1 , x_2 , x_3 . Якщо всі три змінні невід'ємні ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$), тоді команда на пошук максимуму дається так:

`maximize(f, sog, NONNEGATIVE);`

Якщо невід'ємні тільки дві змінні ($x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$), а x_2 може бути довільного знака, то команда на пошук максимуму дається так:

`maximize(f, sog union {x1>=0, x3>=0});`

Якщо всі три змінні можуть бути довільного знака, то команда на пошук максимуму дається так:

`maximize(f, sog);`

Для пошуку мінімуму команда аналогічна за структурою.

Знаходження екстремумів функцій в пакеті Maple

Перед зверненням до функції обчислення екстремумів, необхідно загрузити бібліотеку командою **`readlib(extrema)`**.

Для пошуку екстремумів в пакеті Maple використовується функція виду

`extrema(функція, обмеження, змінн, 's')` .

Результат - значення функції в точці екстремуму. Щоб визначити координати точки екстремуму, треба указати параметр **`'s'`**.

Обов'язковий параметр *функція* повинен бути алгебраїчним виразом.

Обмеження можуть бути виразами, нерівностями, рівняннями. Якщо обмеження задано виразом, то цей вираз дорівнює нулю. Якщо обмеження відсутні, то цей параметр задається у вигляді пустої множини $\{ \}$.

Параметр *змінна* повинен містити імена змінних, відносно яких шукається екстремум. Цім іменам не може бути присвоєно ніяких значень.

Якщо використовується параметр *s* (чи якась інша буква), то імена змінних повинні бути указані явно. В цьому випадку результат – множина точок екстремуму – буде присвоєно вказаній змінній *s*.

Приклади:

1. Знайти екстремум функції $f = x^2 - 1$ > **readlib(extrema):**

> **extrema(x^2-1, {}, x);**

Результат - значення функції

$\{-1\}$

> **readlib(extrema):**

> **extrema(x^2-1, {}, x,q); q;**

Результат - значення функції, та точка екстремуму

$\{-1\}$

$\{\{x = 0\}\}$

2. Знайти екстремум функції > **readlib(extrema):**

$f = x + y^2$, якщо $y = x$

> **extrema(x+y^2, {y=x}, {x,y});**

Результат - значення функції

$\{-1/4\}$

> **readlib(extrema):**

> **extrema(x+y^2, {y=x}, {x,y}, s);**

> **s;**

Результат - значення функції, та точка екстремуму

$\{-1/4\}$

$\{\{x = -1/2, y = -1/2\}\}$

:

ДОДАТОК Б РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ПАКЕТІ EXCEL FOR WINDOWS

Для того, щоб у **Excel** можна було розв'язувати задачі на екстремум, необхідно підключити додаткову опцію «*Пошук розв'язання*». Для цього у меню «*Сервіс*» обираємо команду «*Надбудови*» і помічаємо опцію «*Пошук розв'язання*». Тепер ця команда з'явиться у меню «*Сервіс*».

Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 1

Розглянемо розв'язання задачі ЛП прикладу 2 з лабораторної роботи № 1.

Нехай необхідно знайти (x_1, x_2) , при яких функція $F = 2x_1 + x_2$ досягає максимуму, причому x_1, x_2 повинні задовольняти наступній системі обмежень (СОБ):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для того, щоб вирішити цю задачу за допомогою **Excel**, треба:

- 1 На робочому листі записати вихідні данні (рис. Б.1).
- 2 Далі треба записати формули, по яким будуть обчислюватися цільова функція та система обмежень. Для цього треба помножити значення змінних на відповідні коефіцієнти та скласти добутки. Краще використувати функцію **СУММПРОИЗВЕД** (рис. Б.2).

Для початку ці величини будуть дорівнювати 0.

- 3 Зробити активною клітинку, де записана формула обчислення значення цільової функції (C10) та виконати команду: «*Сервіс*», «*Пошук розв'язання*».

Стовпці робочого листа Excel						
	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2			
2	Коефіцієнти цільової функції	2	1			
3	Коефіцієнти системи обмежень				Права частина обмежень	Значення обмежень
4		1	3	>=	6	
5		7	10	<=	70	
6		4	-5	>=	-20	
7						
8	Значення змінних					
9						
10	Значення цільової функції					

Рисунок Б.1

Стовпці робочого листа Excel						
	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2			
2	Коефіцієнти цільової функції	2	1			
3	Коефіцієнти системи обмежень			Права частина обмежень	Значення обмежень	
4		1	3	>=	6	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$C\$8;B4:C4)
5		7	10	<=	70	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$C\$8;B5:C5)
6		4	-5	>=	-20	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$C\$8;B6:C6)
7						
8	Значення змінних					
9						
10	Значення цільової функції		=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$C\$8;B2:C2)			

Рисунок Б.2

4 З'явиться вікно «Пошук розв'язання», в якому треба задати параметри обчислення:

- указати мінімум або максимум функції будемо шукати;
- перейти у віконце "*Змінюючи клітинки*" і вказати адреси клітинок, де будуть знаходитися значення змінних (B8:C8);

- Додати обмеження. Для цього клацнути по кнопці «Додати», з'явиться вікно «Додати обмеження». У віконці «Посилання на клітинку» вказати адрес клітинки, де знаходиться формула обчислення обмеження, вибрати вид обмеження, у віконці «Обмеження» вказати адрес клітинки, де знаходиться права частина обмеження. Клацнути по кнопці «Додати» (рис. Б.3).

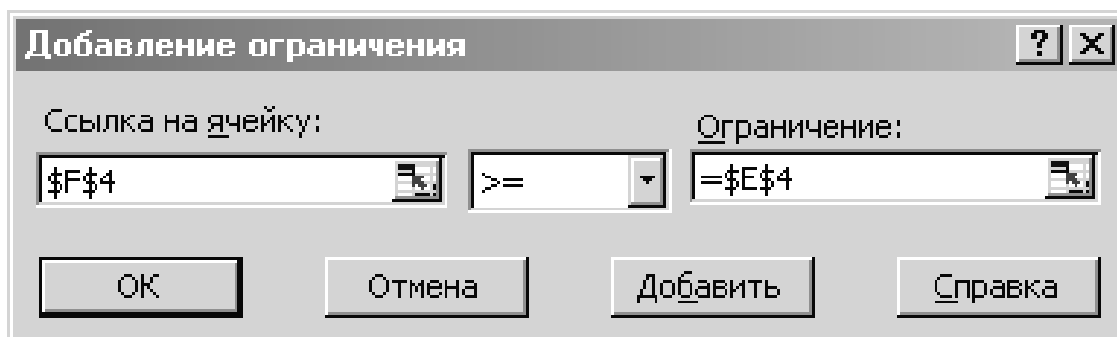


Рисунок Б.3

Так виконується для кожного обмеження.

Загальний вигляд вікна повинен бути такий (рис. Б.4):

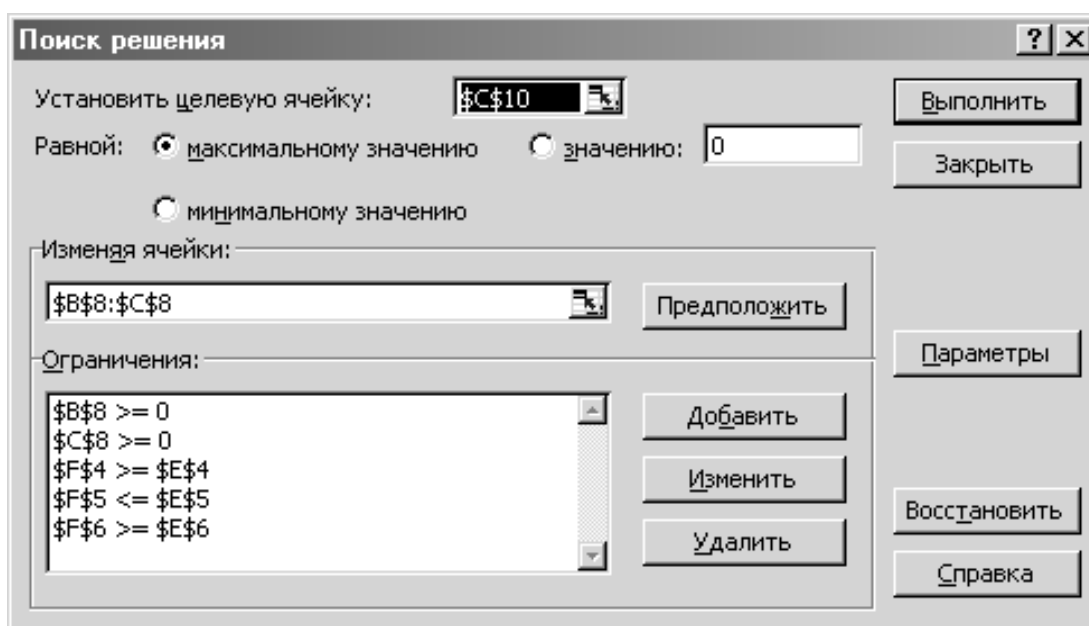


Рисунок Б.4

Клацнути по кнопці «**Виконати**». Отримаємо такий результат (рис.Б.5):

Excel

Стовпці робочого листа Excel						
	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2			
2	Коефіцієнти цільової функції		2	1		
3	Коефіцієнти системи обмежень				Права частина обмежень	Значення обмежень
4		1	3	>=	6	10
5		7	10	<=	70	70
6		4	-5	>=	-20	40
7						
8	Значення змінних		10	0		
9						
10	Значення цільової функції			20		

Рисунок Б.5

Графічне розв'язання задачі ЛП

У пакеті Excel немає можливості вирішувати графічно систему нерівностей. Але можна побудувати графіки відповідних рівнянь.

Для цього треба виразити x_2 через x_1 :

$$\begin{aligned}
 x_2 &= 2 - \frac{1}{3}x_1 \\
 x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\
 7x_1 + 10x_2 &\leq 70, \Rightarrow x_2 = 7 - \frac{7}{10}x_1 \\
 4x_1 - 5x_2 &\geq -20, \\
 x_2 &= 4 + \frac{4}{5}x_1
 \end{aligned}$$

Складемо таблицю, в якій введемо значення x_1 , а x_2 розрахуємо по формулам (достатньо дві точки)

x1	0	10
(1)	2,00	-1,33
(2)	7	0
(3)	4	12

Потім будуємо діаграму. Треба виділити нашу маленьку таблицю.

Для будови діаграми використовується команда „Вставка→Діаграма” чи кнопка „Майстер діаграм” на панелі інструментів „Стандартна”

Шаг 1. Обираємо тип діаграми - Точкова, з'єднана лініями. ДАЛІ..

Шаг 2. Обираємо дані для діаграми. Якщо таблиця була виділена, дані беруться автоматично. ДАЛІ.

Шаг 3. Задаємо параметри діаграми - основні лінії сетки. ДАЛІ.

Шаг 4. Розміщення діаграми - на текущем листі. ГОТОВО (рис. Б.6).

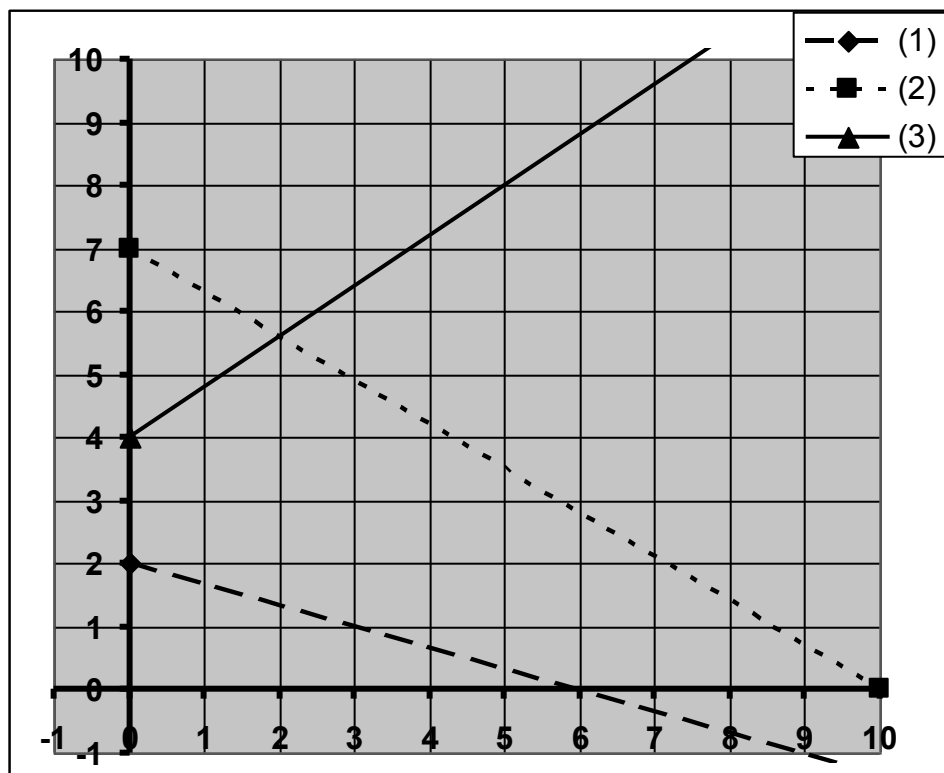


Рисунок Б.6

Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 2

Для виробництва трьох видів виробів (А, В, С) використовується три різноманітних види ресурсів. Норми витрат кожного з видів ресурсів на одиницю продукції кожного виду, запаси ресурсів і прибуток від випуску одиниці продукції приведені в наступній таблиці Б.1:

Таблиця Б.1

Вид ресурсів	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ресурсів
	А	В	С	
Труд, люд-годин	4	2	1	180
Сировина, кг	3	1	3	210
Устаткування, годин	1	2	5	244
Прибуток, гр.од.	10	14	12	-

Визначити план випуску продукції, при якому сумарний прибуток максимальний.

Розв'язання задачі (рис. Б.7, Б.8, Б.9, Б.10).

Стовпці робочого листа Excel						
Строки робочого листа Excel	1	А	В	С	Д	Е
	2	Вид ресурсів	А	В	С	Запаси ресурсів
	3	Труд, люд-г	4	2	1	180
	4	Сировина, кг	3	1	3	210
	5	Устаткування, годин	1	2	5	244
	6	Прибуток, гр.од.	10	14	12	
	7					
	8	Кількість виробів				

Рисунок Б.7 - Робочий лист Excel з вихідними даними

Стовпці робочого листа Excel							
Строки робочого лис- та	A	B	C	D	E	F	
	1	Вид ресурсів	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ре-сурсів	Затрати ресурсів
	2		A	B	C		
	3	Труд, люд-г	4	2	1	180	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B3:D3)
	4	Сировина, кг	3	1	3	210	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B4:D4)
	5	Устаткування, годин	1	2	5	244	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B5:D5)
	6	Прибуток, гр.од.	10	14	12	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B6:D6)	
	7						
	8	Кількість виробів					

Рисунок Б.8 - Робочий лист Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению:

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

-
-
-
-
-
-

Действия:

Рисунок Б.9 - Вікно «Пошук розв'язання»

Стовпці робочого листа Excel								
Строки робочого листа Excel	1	A	B	C	D	E	F	
	2	Вид ресурсів	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ресурсів	Затрати ресурсів	
			A	B	C			
	3		Труд, люд-г	4	2	1	180	180
	4		Сировина, кг	3	1	3	210	130
	5		Устаткування, годин	1	2	5	244	244
	6		Прибуток, гр.од.	10	14	12	1340	
	7							
	8		Кількість виробів	0	82	16		

Рисунок Б.10 - Робочий лист Excel з результатом

Розв'язання двоїстої задачі (рис. Б.11, Б.12, Б.13, Б.14).

$$G = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \text{ (min).}$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10,$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14,$$

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

		Стовпці робочого листа Excel					
Строки робочого листа Excel		A	B	C	D	E	F
	1						
	2		4	3	1	10	
	3		2	1	2	14	
	4		1	3	5	12	
	5						
	6	G	180	210	244		
	7						
	8						
	9		y1	y2	y3		

Рисунок Б.11 - Робочий лист Excel з вихідними даними

		Стовпці робочого листа Excel					
Строки робочого листа Excel		A	B	C	D	E	F
	1						
	2		4	3	1	10	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B2:D2)
	3		2	1	2	14	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B3:D3)
	4		1	3	5	12	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B4:D4)
	5						
	6	G	180	210	244		=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B6:D6)
	7						
	8						
	9		y1	y2	y3		

Рисунок Б.12 - Робочий лист Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

-
-
-
-
-
-

Кнопки: Выполнить, Закреть, Параметры, Восстановить, Справка, Предположить, Добавить, Изменить, Удалить

Рисунок Б.13 - Вікно «Пошук розв’язання»

Строки робочого листа Excel		Стовпці робочого листа Excel						
		A	B	C	D	E	F	
		2		4	3	1	10	24,25
		3		2	1	2	14	14
		4		1	3	5	12	12
		5						
		6	G	180	210	244	1340	
		7						
		8		5,75	0	1,25		
9		v1	v2	v3				

Рисунок Б.14 - Робочий лист Excel з результатом

Приклад розв’язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 3

При складанні добового раціону годівлі худоби можна використовувати свіже сіно (не більш 50 кг) і силос (не більш 85 кг). У наступній таблиці приведені дані про вміст зазначених компонентів у 1 кг кожного продукту харчування, поживність раціону (мінімальні норми) і вартість продуктів (табл. Б.2).

Таблиця Б.2

Поживні речовини	Продукт		Поживність раціону
	Свіже сіно	Силос	
Кормові одиниці	0,5	0,5	30 одиниць
Білок, г/кг	40	10	1 кг
Кальцій, г/кг	1,25	2,5	100 г
Фосфор, г/кг	2	1	80 г
Вартість, гр.од.	1,2	0,8	-

Скласти раціон, що задовольняє вищевикладеним вимогам і мінімальний за вартістю.

Розв'язання задачі (рис. Б.15, Б.16, Б.17, Б.18).


Стовпці робочого листа Excel						
Строки робочого листа Excel	1	A	B	C	D	E
	2	Поживні речовини	Продукт		Поживність раціону	Поживність раціону складає
	3	Кормові одиниці	Свіже сіно	Силос		
	4	Білок, г/кг	0,5	0,5	30	
	5	Кальцій, г/кг	0,04	0,01	1	
	6	Кальцій, г/кг	0,00125	0,0025	0,1	
	7	Фосфор, г/кг	0,002	0,001	0,08	
	8	Вартість, гр.од.	1,2	0,8		
	9					
	10	Раціон складає				
11	Не більше	50	85			

Рисунок Б.15 - Робочий лист Excel з вихідними даними


Стовпці робочого листа Excel						
Строки робочого листа	1	А	В	С	Д	Е
	2	Поживні речовини	Продукт		Поживність раціону	Поживність раціону складає
	3	Кормові одиниці	0,5	0,5	30	=СУММПРОИЗВ(\$B\$9:\$C\$9;B3:C3)
	4	Білок, г/кг	0,04	0,01	1	=СУММПРОИЗВ(\$B\$9:\$C\$9;B4:C4)
	5	Кальцій, г/кг	0,00125	0,0025	0,1	=СУММПРОИЗВ(\$B\$9:\$C\$9;B5:C5)
	6	Фосфор, г/кг	0,002	0,001	0,08	=СУММПРОИЗВ(\$B\$9:\$C\$9;B6:C6)
	7	Вартість, гр.од.	1,2	0,8	=СУММПРОИЗВ(\$B\$9:\$C\$9;B7:C7)	
	8					
	9	Раціон складає				
	10	Не більше	50	85		

Рисунок Б.16 - Робочий лист Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку: 

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки: 

Ограничения:

\$C\$9 <= \$C\$10	<input type="button" value="Добавить"/> <input type="button" value="Изменить"/> <input type="button" value="Удалить"/>
\$C\$9 >= 0	
\$E\$3 >= \$D\$3	
\$E\$4 >= \$D\$4	
\$E\$5 >= \$D\$6	
\$E\$6 >= \$D\$6	

Рисунок Б.17 - Вікно «Пошук розв’язання»

		Стовпці робочого листа Excel				
Строки робочого листа Excel		A	B	C	D	E
	1	Поживні речовини	Продукт		Поживність раціону	Поживність раціону складає
	2		Свіже сіно	Силос		
	3	Кормові одиниці	0,5	0,5	30	29,99999989
	4	Білок, г/кг	0,04	0,01	1	1,200000004
	5	Кальцій, г/кг	0,00125	0,0025	0,1	0,124999999
	6	Фосфор, г/кг	0,002	0,001	0,08	0,08
	7	Вартість, гр.од.	1,2	0,8	55,99999991	
	8					
	9	Раціон складає	20	39,99999996		
	10	Не більше	50	85		

Рисунок Б.18 - Робочий лист Excel з результатом

Розв’язання двоїстої задачі (рис. Б.19, Б.20, Б.21, Б.22).

$$G = 30y_1 + y_2 + 0,1y_3 + 0,08y_4 - 50y_5 - 85y_6 \quad (\max).$$

$$0,5y_1 + 0,04y_2 + 0,00125y_3 + 0,002y_4 - y_5 \leq 1,2,$$

$$0,5y_1 + 0,01y_2 + 0,0025y_3 + 0,001y_4 - y_6 \leq 0,8,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0.$$

Строки робочого листа Excel		Стовпці робочого листа Excel									
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	
		1		0,5	0,04	0,00125	0,002	-1		1,2	
		2		0,5	0,01	0,0025	0,001		-1	0,8	
		3									
		4									
		5	G	30	1	0,1	0,08	-50	-85		
		6									
		7									
		8									
9		y1	y2	y3	y4	y5	y6				

Рисунок Б.19 - Робочий лист Excel з вихідними даними

Строки робочого листа Excel		Стовпці робочого листа Excel									
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	
		1		0,5	0,04	0,00125	0,002	-1		1,2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$G\$8;B1:G1)
		2		0,5	0,01	0,0025	0,001		-1	0,8	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$G\$8;B2:G2)
		3									
		4									
		5	G	30	1	0,1	0,08	-50	-85		=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$G\$8;B5:G5)
		6									
		7									
		8									
9		y1	y2	y3	y4	y5	y6				

Рисунок Б.20 - Робочий лист Excel з формулами

Поиск решения [?] [X]

Установить целевую ячейку: [Иконка]

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки: [Иконка]

Ограничения:

\$D\$8 >= 0
\$E\$8 >= 0
\$F\$8 >= 0
\$G\$8 >= 0
\$I\$1 <= \$H\$1
\$I\$2 <= \$H\$2

Рисунок Б.21 - Вікно «Пошук розв'язання»

		Стовпці робочого листа Excel								
		A	B	C	D	E	F	G	H	I
Строки робочого листа Excel	1		0,5	0,04	0,00125	0,002	-1		1,2	1,2
	2		0,5	0,01	0,0025	0,001		-1	0,8	0,8
	3									
	4									
	5	G	30	1	0,1	0,08	-50	-85	56	
	6									
	7									
	8		0,8	0	0	400,0000157	0	0		
	9		y1	y2	y3	y4	y5	y6		

Рисунок Б.22 - Робочий лист Excel з результатом

Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 4

Розв'язання замкнутої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n = 2$, $m = 2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в наступній таблиці Б.3.

Таблиця Б.3

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		B ₁		B ₂	
A ₁	100	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	150	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Розв'язання задачі (рис. Б.23, Б.24, Б.25, Б.26).

Стовпці робочого листа Excel					
Строки робочого листа Excel	1	A	B	C	D
	2	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
	3			B ₁	B ₂
	4	A ₁	100	4	2
	5	A ₂	150	3	6
	6	Потреби		120	130
	7				
	8		Відповідь		
	9	Вартість перевезень:			
	10				
	11	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
	12			B ₁	B ₂
	13	A ₁			
	14	A ₂			
	15	Потреби			

Рисунок Б.23 - Робочий лист Excel з вихідними даними

Стовпці робочого листа Excel					
Строки робочого листа Excel		A	B	C	D
	1	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
	2			B ₁	B ₂
	3	A ₁	100	4	2
	4	A ₂	150	3	6
	5	Потреби		120	130
	6				
	7		Відповідь		
	8	Вартість перевезень:	=СУММПРОИЗВ(C3:D4;C12:D13)		
	9				
	10	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
	11			B ₁	B ₂
	12	A ₁	=СУММ(C12:D12)		
	13	A ₂	=СУММ(C13:D13)		
	14	Потреби		=СУММ(C12:C13)	=СУММ(D12:D13)

Рисунок Б.24 - Робочий лист Excel з формулами

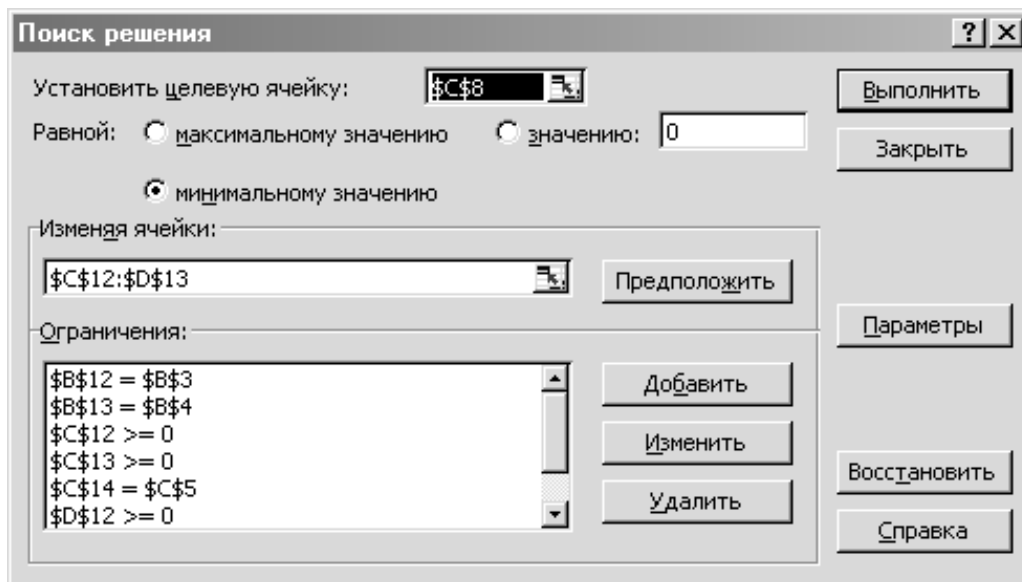


Рисунок Б.25 - Вікно «Пошук розв’язання»

Стовпці робочого листа Excel							
Строки робочого листа Excel	1	A	B	C	D		
	2	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
	3			B ₁	B ₂		
	4			A ₁	100	4	2
	5			A ₂	150	3	6
	6			Потреби		120	130
	7						
	8		Відповідь				
	9	Вартість перевезень:	740				
	10						
	11	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
	12			B ₁	B ₂		
	13			A ₁	100	0	100
	14			A ₂	150	120	30
15	Потреби				120	130	

Рисунок Б.26 - Робочий лист Excel з результатом

Розв’язання двоїстої задачі (рис. Б.27, Б.28, Б.29, Б.30).

$$G = 100y_1 + 150y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} y_1 + y_3 \leq 4, \\ y_1 + y_4 \leq 2, \\ y_2 + y_3 \leq 3, \\ y_2 + y_4 \leq 6. \end{cases}$$

		Стовпці робочого листа Excel						
		A	B	C	D	E	F	G
Строки робочого листа Excel	1		1	0	1	0	4	
	2		1	0	0	1	2	
	3		0	1	1	0	3	
	4		0	1	0	1	6	
	5							
	6	G	100	150	120	130		
	7							
	8		y1	y2	y3	y4		
	9							

Рисунок Б.27 - Робочий лист Excel з вихідними даними

Строки робочого листа Excel		Стовпці робочого листа Excel							
		A	B	C	D	E	F	G	
		1		1	0	1	0	4	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B1:E1)
		2		1	0	0	1	2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B2:E2)
		3		0	1	1	0	3	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B3:E3)
		4		0	1	0	1	6	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B4:E4)
		5							
		6	G	100	150	120	130	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B6:E6)	
		7							
		8		y1	y2	y3	y4		
9									

Рисунок Б.28 - Робочий лист Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

-
-
-
-

Рисунок Б.29 - Вікно «Пошук розв’язання»

		Стовпці робочого листа Excel						
		A	B	C	D	E	F	G
Строки робочого листа Excel	1		1	0	1	0	4	-1
	2		1	0	0	1	2	2
	3		0	1	1	0	3	3
	4		0	1	0	1	6	6
	5							
	6	G	100	150	120	130	740	
	7		-0,76812	3,231884058	-0,2318841	2,768116		
	8		y1	y2	y3	y4		
	9							

Рисунок Б.30 - Робочий лист Excel з результатом

Розв'язання відкритої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n = 2$, $m = 2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в наступній таблиці Б.4.

Таблиця Б.4

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		B ₁		B ₂	
A ₁	120	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	180	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Розв'язання задачі (рис. Б.31, Б.32, Б.33, Б.34).

Стовпці робочого листа Excel

	A	B	C	D
1			Пункти призначення	
2	Пункти відправлення	Запаси	B ₁	B ₂
3	A ₁	120	4	2
4	A ₂	180	3	6
5	Потреби		120	130
6				
7		Відповідь		
8	Вартість перевезень:			
9				
10			Пункти призначення	
11	Пункти відправлення	Запаси	B ₁	B ₂
12	A ₁			
13	A ₂			
14	Потреби			

Строки робочого листа Excel

Рисунок Б.31 - Робочий лист Excel з вихідними даними

Стовпці робочого листа Excel					
Строки робочого листа Excel	1	A	B	C	D
		Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
	2			B ₁	B ₂
	3	A ₁	120	4	2
	4	A ₂	180	3	6
	5	Потреби		120	130
	6				
	7		Відповідь		
	8	Вартість перевезень:	=СУММПРОИЗВ(C3:D4;C12:D13)		
	9				
	10	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
	11			B ₁	B ₂
	12	A ₁	=СУММ(C12:D12)		
	13	A ₂	=СУММ(C13:D13)		
	14	Потреби		=СУММ(C12:C13)	=СУММ(D12:D13)

Рисунок Б.32 - Робочий лист Excel з формулами

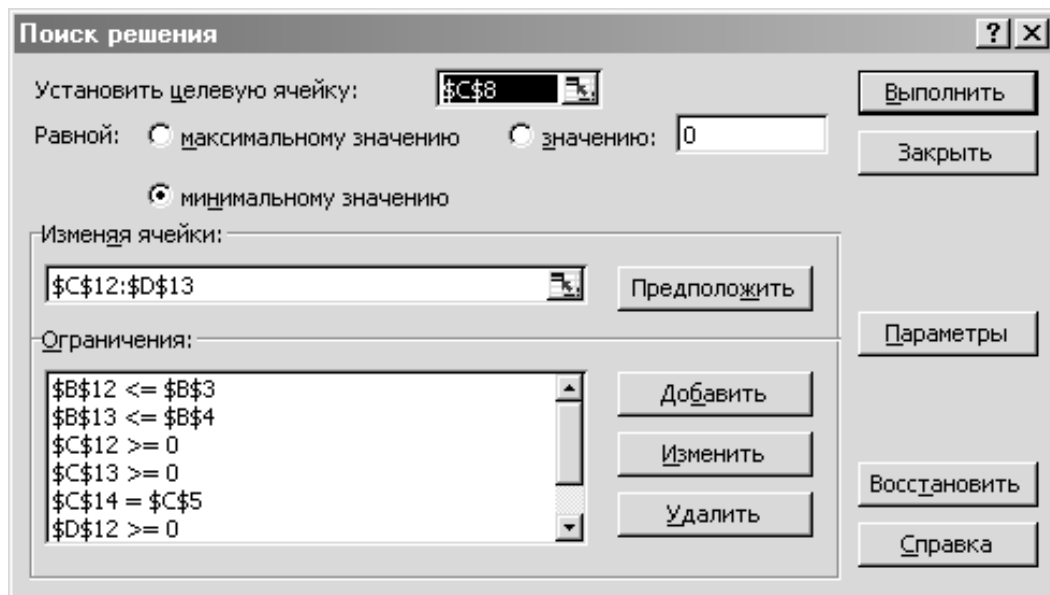


Рисунок Б.33 - Вікно «Пошук розв’язання»

Столпці робочого листа Excel				
Строки робочого листа Excel	А	В	С	Д
	1		Пункти призначення	
	2	Пункти відправлення	Запаси	
	3	A ₁	120	4
	4	A ₂	180	3
	5	Потреби		120
	6			130
	7		Відповідь	
	8	Вартість перевезень:	660	
	9			
	10		Пункти призначення	
	11	Пункти відправлення	Запаси	
	12	A ₁	120	0
	13	A ₂	130	120
	14	Потреби		10
			120	130

Рисунок Б.34 - Робочий лист Excel з результатом

Розв’язання двоїстої задачі (рис. Б.35, Б.36, Б.37, Б.38).

$$G = -120y_1 - 180y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_3 \leq 4, \\ -y_1 + y_4 \leq 2, \\ -y_2 + y_3 \leq 3, \\ -y_2 + y_4 \leq 6, \end{cases} \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

		Стовпці робочого листа Excel						
		A	B	C	D	E	F	G
Строки робочого листа Excel	1		-1	0	1	0	4	
	2		-1	0	0	1	2	
	3		0	-1	1	0	3	
	4		0	-1	0	1	6	
	5							
	6	G	-120	-180	120	130		
	7							
	8		y1	y2	y3	y4		

Рисунок Б.35 - Робочий лист Excel з вихідними даними

		Стовпці робочого листа Excel						
		A	B	C	D	E	F	G
Строки робочого листа Excel	1		-1	0	1	0	4	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B1:E1)
	2		-1	0	0	1	2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B2:E2)
	3		0	-1	1	0	3	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B3:E3)
	4		0	-1	0	1	6	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B4:E4)
	5							
	6	G	-120	-180	120	130	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B6:E6)	
	7							
	8		y1	y2	y3	y4		

Рисунок Б.36 - Робочий лист Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

- \$B\$7 >= 0
- \$C\$7 >= 0
- \$G\$1 <= \$F\$1
- \$G\$2 <= \$F\$2
- \$G\$3 <= \$F\$3
- \$G\$4 <= \$F\$4

Buttons: Выполнить, Заккрыть, Параметры, Восстановить, Справка, Предположить, Добавить, Изменить, Удалить

Рисунок Б.37 - Вікно «Пошук розв'язання»

		Стовпці робочого листа Excel						
		A	B	C	D	E	F	G
Строки робочого листа Excel	1		-1	0	1	0	4	-1
	2		-1	0	0	1	2	2
	3		0	-1	1	0	3	3
	4		0	-1	0	1	6	6
	5							
	6	G	-120	-180	120	130	660	
	7		4	0	3	6		
	8		y1	y2	y3	y4		

Рисунок Б.38 - Робочий лист Excel з результатом

Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 5

Задача 1 (рис. Б.39, Б.40, Б.41, Б.42).

$$F = 7,62x_1 + 6,45x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 0,2x_2 \leq 400 \\ 0,22x_1 + 0,15x_2 \leq 200 \\ x_1 - \frac{3}{4}x_2 = 0 \\ x_1 \leq 350 \\ x_2 \leq 280 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

		Стовпці робочого листа Excel				
Строки робочого листа Excel		A	B	C	D	E
	1		0,01	0,2	400	
	2		0,22	0,15	200	
	3		1	-0,75	0	
	4		1	0	350	
	5		0	1	280	
	6					
	7	F=	7,62	6,45		
	8					
	9		x1	x2		
	10					

Рисунок Б.39 - Робочий лист Excel з вихідними даними

Стовпці робочого листа Excel					
	A	B	C	D	E
1		0,01	0,2	400	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B1:C1)
2		0,22	0,15	200	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B2:C2)
3		1	-0,75	0	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B3:C3)
4		1	0	350	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B4:C4)
5		0	1	280	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B5:C5)
6					
7	F=	7,62	6,45	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B7:C7)	
8					
9		x1	x2		
10					

Рисунок Б.40 - Робочий лист Excel з формулами

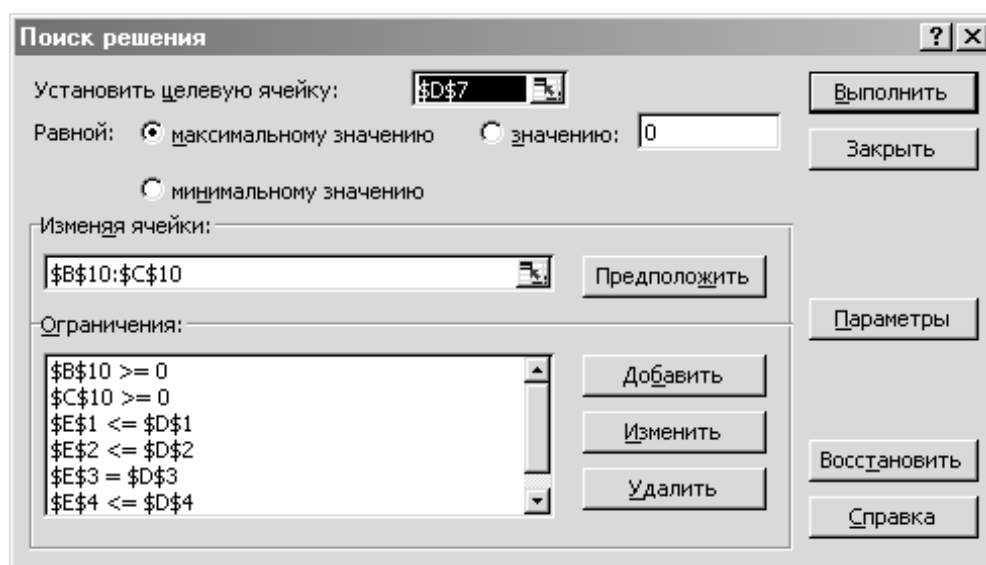


Рисунок Б.41 - Вікно «Пошук розв'язання»

Стовпці робочого листа Excel					
	A	B	C	D	E
1		0,01	0,2	400	58,1
2		0,22	0,15	200	88,2
3		1	-0,75	0	0
4		1	0	350	210
5		0	1	280	280
6					
7	F=	7,62	6,45	3406,2	
8					
9		x1	x2		
10		210	280		

Рисунок Б.42 - Робочий лист Excel з результатом

Задача 2 (рис. Б.43, Б.44, Б.45, Б.46).

$$F = 5,66x_1 + 4,35x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -0,22x_1 + 0,85x_2 \leq 50 \\ x_1 \leq 350 \\ x_2 \leq 280 \\ 0,9x_1 - 0,2x_2 \geq 0 \\ -0,22x_1 + 0,85x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

		Стовпці робочого листа Excel				
Строки робочого листа Excel		A	B	C	D	E
	1		-0,22	0,85	50	
	2		1	0	350	
	3		0	1	280	
	4		0,9	-0,2	0	
	5		-0,22	0,85	0	
	6					
	7	F=	5,66	4,35		
	8					
	9		x1	x2		
	10					

Рисунок Б.43 - Робочий лист Excel з вихідними даними

		Стовпці робочого листа Excel				
Строки робочого листа Excel		A	B	C	D	E
	1		-0,22	0,85	50	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B1:C1)
	2		1	0	350	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B2:C2)
	3		0	1	280	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B3:C3)
	4		0,9	-0,2	0	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B4:C4)
	5		-0,22	0,85	0	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B5:C5)
	6					
	7	F=	5,66	4,35		=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B7:C7)
	8					
	9		x1	x2		
	10					

Рисунок Б.20 - Робочий лист Excel з формулами

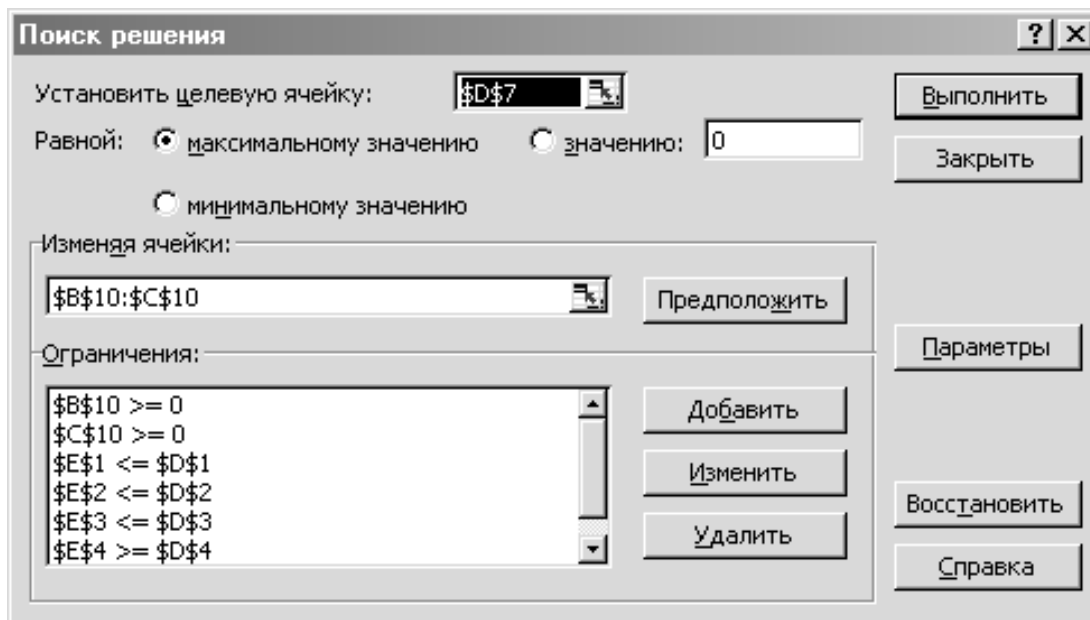


Рисунок Б.44 - Вікно «Пошук розв’язання»

		Столпці робочого листа Excel				
Строки робочого листа Excel		A	B	C	D	E
	1		-0,22	0,85	50	50
	2		1	0	350	350
	3		0	1	280	149,4118
	4		0,9	-0,2	0	285,1176
	5		-0,22	0,85	0	50
	6					
	7	F=	5,66	4,35	2630,941	
	8					
	9		x1	x2		
	10		350	149,4118		

Рисунок Б.45 - Робочий лист Excel з результатом

Приклад розв’язання задачі НЛП з лабораторної роботи № 6

Знайти максимальне значення функції F на області, заданою системою обмежень (рис. Б.46, Б.47, Б.48, Б.49).

$$\begin{cases} F = 9x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 & (\max), \\ x_1 + 4x_2 \leq 52, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 64. \end{cases}$$

		Стовпці робочого листа Excel					
Строки робочого листа Excel		A	B	C	D	E	F
	1		x1	x2			
	2						
	3						
	4	F=	9	2	-1	-1	
	5						
	6		1	4	52		
	7		1	-1	2		
	8		7	3	64		

Рисунок Б.46 - Робочий лист Excel з вихідними даними

		Стовпці робочого листа Excel					
Строки робочого листа Excel		A	B	C	D	E	F
	1		x1	x2			
	2		7	5			
	3						
	4	F=	9	2	-1	-1	=B4*B2+C4*C2+D4*B2*B2+E4*C2*C2
	5						
	6		1	4	52		=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$C\$2;B6:C6)
	7		1	-1	2		=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$C\$2;B7:C7)
	8		7	3	64		=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$C\$2;B8:C8)
	9						

Рисунок Б.47 - Робочий лист Excel з формулами

Поиск решения [?] [X]

Установить целевую ячейку: [icon]

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки: [icon]

Ограничения:

Рисунок Б.48 - Вікно «Пошук розв’язання»

Столпці робочого листа Excel

	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2			
2		7	5			
3						
4	F=	9	2	-1	-1	-1
5						
6		1	4	52		27
7		1	-1	2		2
8		7	3	64		64
9						

Строки робочого листа Excel

Рисунок Б.49 - Робочий лист Excel з результатом

ДОДАТОК В ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ЗА ДОПОМОГОЮ MATHCAD

Загальні положення пакету MathCad

Програма **MathCad** є універсальною математичною системою, що дозволяє здійснювати будь-які обчислення в їхньому звичному алгебраїчному вигляді. Вона містить текстовий, формульний і графічний редактори, цілком сумісні з операційною системою **Windows**.

Запуск **MathCad** здійснюється за допомогою головного меню Windows або будь-яким іншим способом, що дозволяє активувати даний програмний продукт. Вікно пакету (рис. С.1) містить рядок заголовка (назва програми й ім'я документа) (1), рядок меню, що керує (2). Умовимося, що нумерація рядків виконана зверху вниз, а позицій у рядку – зліва направо. Основні пункти меню дублюються піктограмами (кнопками) керування (3, 4-й рядок).

Опції головного меню (рис. В.1):

File / Файл – робота з файлами (2-1);

Edit / Виправлення – редагування (2-2);

View / Вид – зміна виду змісту робочого документа і панелей керування (2-3);

Insert / Вставка – вставка різних об'єктів і тексту у відкритий документ (2-4);

Format / Форматування – містить команди форматування відкритого документа (2-5);

Math / Математика – керування процесом обчислень (2-6);

Symbolics / Символи – вибір операцій для аналітичних розрахунків (2-7);

Window / Вікно – керування вікнами (2-8);

Help / Довідка – виклик довідкової системи (2-9).

Третій рядок у вікні програми – кнопки шаблонів математичних знаків – палітр, які можна переміщувати:

Calculator Toolbar/ Панель інструментів арифметичних операцій
(3-1);

Grath Toolbar / Панель інструментів графіків (3-2);

Vector and Matrix Toolbar/ Панель інструментів векторів і матриць (3-3);

Evaluation Toolbar/ Панель інструментів деяких знаків (3-4);

Calculus Toolbar/ Панель інструментів математичного аналізу (3-5);

Boolean Toolbar/ Панель інструментів математичної логіки (3-6);

Programming Toolbar/ Панель інструментів програмування (3-7);

Greek symbol Toolbar/ Панель символів грецького алфавіту (3-8);

Symbolic Keyword Toolbar / Панель символічних операторів (3-9).

Щоб перенести символ палітри в місце, позначене курсором, потрібно клацнути по обраній палітрі, розкрити її і клацнути по обраному знаку. Крім вищезгаданого, даний рядок містить піктограми керування шрифтами і положенням тексту в текстовій області.

Четвертий рядок – панель інструментів, що включає кілька груп піктограм.

Перша група – операції з файлами:

New / Новий (4-1);

Open / Відкрити (4-2);

Save / Зберегти (4-3);

Print / Друкувати (4-4);

Print Preview / Попередній перегляд (4-5);

Check Spelling / Перевірка орфографії (4-6).

Друга група – редагування:

Cut / Вирізати (перенести в буфер) (4-7);

Copy / Копіювати (в буфер) (4-8);

Paste / Вставити (перенести вміст буфера на місце вставки) (4-9);

Undo (Redo) / Скасування (Повтор) останньої операції (4-10, 11);

Align Across (Align Down) / Піктограми вирівнювання блоків (4-12, 13).

Далі йдуть:

Insert Function / Вставка функцій (зі списку в діалоговому вікні) - (4-14);

Insert Unit / Вставка розмірних одиниць (4-15);

Calculate / Обчислити виділене вираження (4-16);

Insert Giperlink / Вставка гіперпосилань (4-17);

Insert Component / Вставка компонентів (4-18);

Zoom / Масштаб екрана (4-19);

Resource Center / Центр навчання (4-20);

Help / Допомога (4-21).

Внизу екрана розташований рядок стану програми.

Довідкова система *MathCad* включає: спливаючу підказку при зупинці покажчика на кожній з піктограм; розділ **Resource Center / Центр навчання** (4 20) – довідник з математичних розрахунків із прикладами застосування і самовчитель; розділи допомоги **Help / Допомога** (4-21) – надання допомоги з усіх розділів програми. Комбінація клавіш **Shift+F1** при покажчику, установленому на досліджуваному елементі, дозволяє відкрити контекстну довідку про нього.

Варто враховувати, що послідовність відображуваних на екрані піктограм може бути змінена користувачем за своїм розсудом.

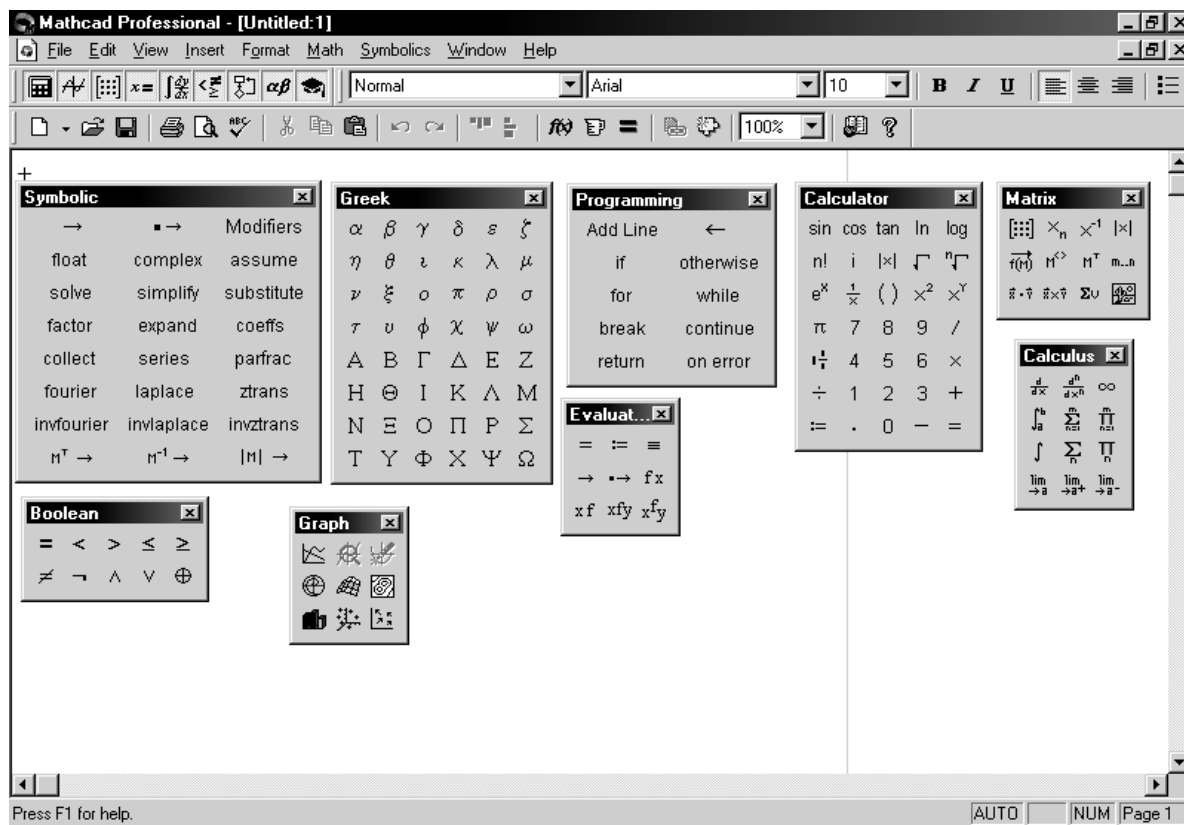


Рисунок В.1 – Вікно програми MathCad Professional 2001

Прості арифметичні обчислення

Клацання у будь-якому місці документа викликає появу курсору у формі хрестика, що вказує місце введення виразу. Для визначення змінної після введення її імені ставиться символ $:=$ (оператор присвоювання) і вказується значення, що присвоюється. Ліворуч від оператора присвоювання може стояти ім'я простої змінної (X), індексованої змінної (X_i чи $X_{i,j}$), матриці (M), перемінної з верхнім індексом (X^i) чи функції $F(x, y, z)$.

Аргументом функцій можуть бути скаляри, вектори, матриці. Імена функцій, задані користувачем, варто набирати скрізь одним шрифтом. Імена вбудованих функцій не чуттєві до шрифтів. Їх можна вдруковувати чи вибирати зі списку – кнопка (4-14) **f(x)** (**Insert Function** / **Вставка функції**).

У якості десяткової коми використовується крапка. Результат обчислення виводиться на екран після набору символу $=$.

Команда **Math - Automatic Calculation / Математика - Автоматичне обчислення** включає / виключає автоматичний режим обчислення результату після набору знака рівності. При відключеному режимі автоматичного обчислення для перерахування потрібно натиснути клавішу **F9**. Переривання обчислень здійснюється кнопкою **ESC** чи клацання по знаку рівняння, або повторне натискання клавіші **F9** продовжить обчислення.

При виявленні помилки варто перейти до ручного режиму й переглянути попередні вирази, що можуть бути її причиною. Для видалення виразу, таблиці, графіка та ін. необхідно спочатку виділити об'єкт, а потім, після появи рамки навколо об'єкта, використовувати опцію контекстного меню – **Cut / Вирізати** або опцію меню **Edit – Delete / Редагувати - Видалити**. Копіювання об'єкта в буфер обміну відбувається аналогічно з використанням опції **Copy / Копіювати**.

Оператори, цифри, знаки вибираються з відповідних палітр (піктограм) рядка 3-9 (рис. В.1) або вводяться з клавіатури. Вихід з-під знака оператора здійснюється переміщенням курсору за область цього оператора або натисканням клавіші **Enter**. Імена змінних повинні бути визначені раніше оператора функції. Вираз, що містить знак **:=**, впливає на документ нижче і праворуч від себе. Команда **Edit - Select All / виправлення - Виділити все** чи протягання курсору при натиснутій лівій кнопці маніпулятора "миша" через документ дає можливість перегляду виділених областей, що не повинні перетинатися.

Визначені змінні (які мають прийняті значення за умовчанням) можна перевизначити **Math – Options / Математика – Параметри**.

За умовчанням установлені:

∞ - нескінченність, приймає значення 10^{307} ;

e - число **e**, приймає значення 2,71828182845905;

π - число **π** , приймає значення 3,14159265358979;

i - уявна одиниця, приймає значення **1i**;

j - уявна одиниця, приймає значення **1j**;

% - відсоток, приймає значення 0.01 (наприклад, 20·30 % = 6);

TOL - припустима погрішність обчислень, приймає значення 0,001;

ORIGIN - завдання індексу 1-го елемента матриці (вектора), приймає значення 0.

Приклад В.1

Розрахувати значення арифметичного виразу в точці $x = 3$ (вид документа в MathCad).

$$x := 3$$

$$\sqrt{\frac{4}{e^x}} - \coth(x)^3 \cdot \cos\left(\left|x \cdot \sin(x^2) - \ln(x)\right|\right) = -0.559$$


Табулювання функцій

Для обчислення значень функції в деякому діапазоні зміни аргументу спочатку необхідно визначити цей дискретний аргумент.

Наприклад, якщо потрібно табулювати функцію $y(t) := \sin(t) - \cos(t)$ при зміні аргументу t в інтервалі $[-2;2]$ із кроком **0,5**, необхідно виконати наступні дії:

- 1 Задати діапазон зміни змінної у вигляді:

$$t := -2, -1.5 .. 2$$

де **-2** - ліва межа інтервалу; **-1,5** - сума лівої межі інтервалу і кроку зміни змінної $[-2 + 0,5 = -1,5]$; **..** - оператор, що встановлюється за допомогою піктограми **Vector and Matrix Toolbar - Range Variable / Операції з векторами і матрицями / Діапазон змінної** (кнопка ); **2** - права межа інтервалу.

- 2 Задати функцію $y(t) := \sin(t) - \cos(t)$.
- 3 Увести t = (на екран буде виведена таблиця значень t).
- 4 Увести $y(t)$ = (на екран буде виведена таблиця значень $y(t)$).

Таблиці значень, що містять від 1 до 10 рядків даних, виводяться на екран повністю. У таблицях з кількістю рядків більше 10 на екран виводяться тільки перші 10 рядків. Для перегляду інших значень необхідно після виділення таблиці скористатися лінійкою прокручування. Вигляд документа MathCad:

$$t := -2, -1.5 .. 2$$

$$y(t) := \sin(t) - \cos(t)$$

t =	y(t) =
-2	-0.493
-1.5	-1.068
-1	-1.382
-0.5	-1.357
0	-1
0.5	-0.398
1	0.301
1.5	0.927
2	1.325

Форматування результатів

Для того, щоб установити формат виводу даних, необхідно:

- 1 Виділити таблицю, клацнувши по ній мишею.
- 2 Вибрати пункт меню **Format – Result / Формат - Результат**. Опції цього вікна дозволяють встановити кількість десяткових знаків у виведених числах (**Number of decimal places**), межі використання експоненційного зображення чисел (**Exponential threshold**) і др.

3 За замовчуванням для **Exponential threshold / Поріг показника** приймається значення 3. Це означає, що тільки числа, більші чи рівні 10^2 , відображаються в експоненційному вигляді.


При зміні формату висновку результатів змінюється тільки їх зовнішній вигляд. Внутрішнє зображення чисел MathCad завжди має повну точність.

Побудова графіків функцій у декартовій системі координат

MathCad надає можливості побудови двовимірних графіків у декартових і полярних координатах, ліній рівня, зображення поверхні, а також побудови ряду інших тривимірних графіків.

Точки, з яких складається графік, визначаються дискретними аргументами: MathCad наносить на графік одну точку для кожного значення дискретного аргументу.

Для того, щоб побудувати двовимірний графік у декартовій системі координат функції $y(t)$, необхідно:

1 Клацнути мишею нижче (правіше) формули для $y(t)$ і вибрати **Graph Toolbar - X-Y Plot / Графік - X-Y залежність**: кнопка  або використати операційне меню **Insert - Graph - X-Y Plot/Вставка - Графік - X-Y залежність**). На екран буде виведений шаблон графіка (рис. С.2).

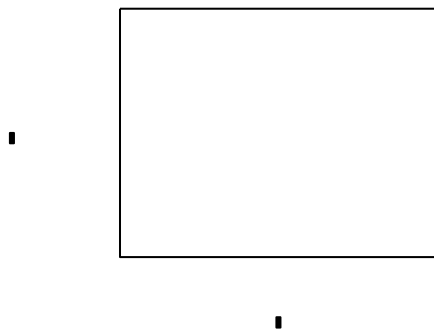


Рисунок В.2 – Шаблон задавання параметрів для побудови графіка

2 У полі введення під віссю абсцис потрібно ввести ім'я змінної t , поставивши, таким чином, у відповідність до цієї осі змінну t .

3 Клацнути в полі навпроти середини осі ординат і ввести ім'я функції з обов'язковою вказівкою її аргументу $y(t)$. Поля, що залишаються призначеними для введення меж на осях (максимального і мінімального значень, що відкладаються на осі). Якщо залишити їх порожніми, MathCad автоматично заповнить їх за умовчанням при побудові графіка.

4 Після клацання поза графіком відбувається процес його побудови. Під ім'ям функції $y(t)$ з'являється зразок креслення лінії. Подвійне клацан-

ня по вікну графіка чи використання **Format - Graph - X-Y Plot / Формат - Графік - X-Y залежність** дозволяє провести форматування зовнішнього вигляду графіка.

Діалогове вікно форматування графіка має чотири вкладки. Розглянемо дві з них (рис. В.3, В.4).

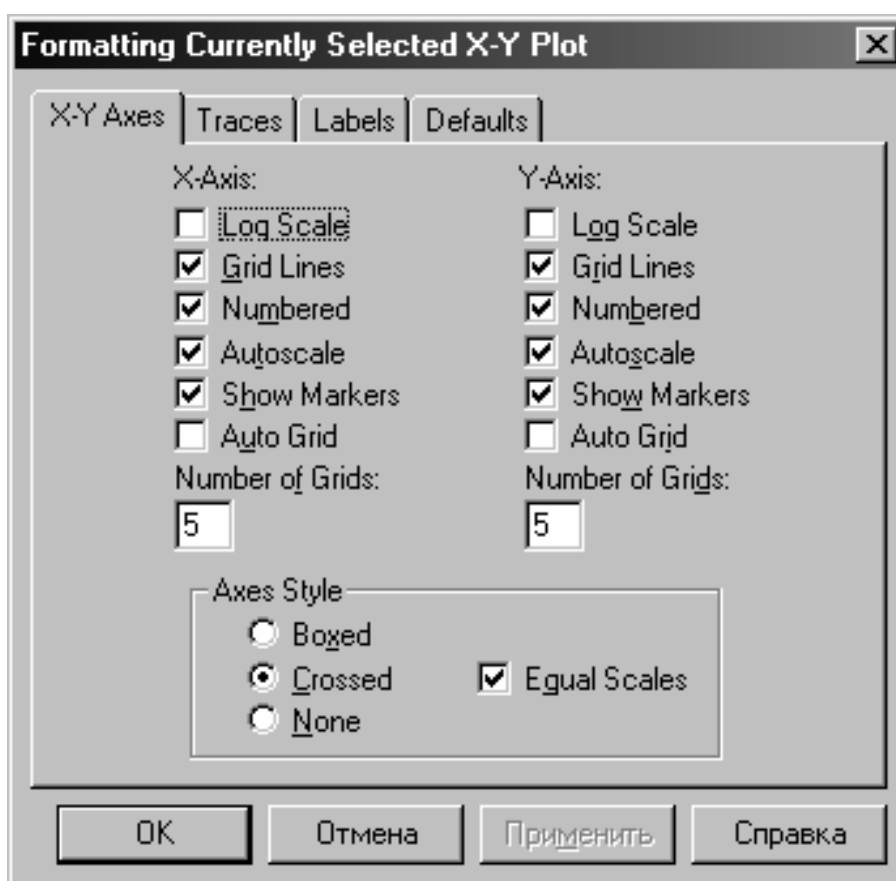


Рисунок В.3 – Вікно форматування графіків. Вкладка X-Y Axes

Склад вкладки **X-Y Axes** (рис. В.3):

Log scale – установка логарифмічного масштабу;

Grid lines – установка ліній масштабної сітки;

Numbered – установка цифрових даних по осях;

Auto scale – автоматичне завдання масштабу осей;

Show markers – нанесення рисок;

Auto grid – автоматична установка масштабних ліній;

Number of grids – установка числа масштабних ліній;

Boxed – рамка навколо графіка;

Crossed – пересічні осі;

None – відсутність осей;

Equal Scales – рівні масштаби.

Мітки точок (**Symbol**), тип лінії (**Line**), колір (**Color**), товщину (**Weight**) і тип лінії (**Type**) графіка можна змінювати, використовуючи вкладку **Traces** вікна форматування графіка (рис. В.4).

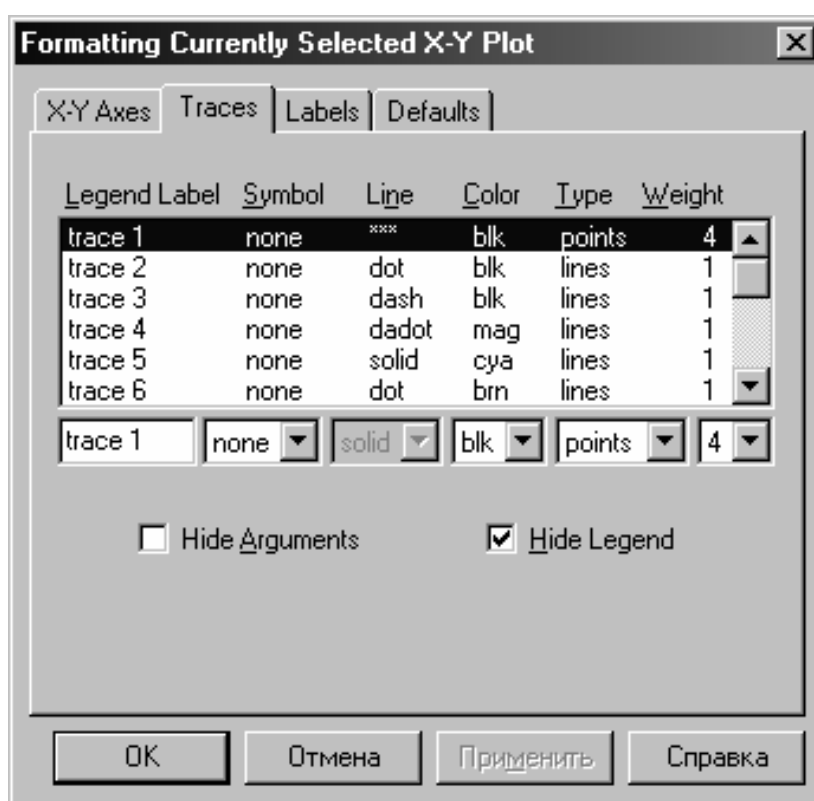


Рисунок В.4 – Вікно форматування графіків. Вкладка **Traces**

На одному рисунку можна побудувати декілька графіків. У середній квадрат по вертикалі вписуються через коми всі імена функцій або їхні визначення. Аналогічно в середній квадрат по горизонтальній осі заносяться аргументи функції (чи аргумент, якщо він один). Для побудови графіка необхідно клацнути мишею за його межами (або натиснути клавішу **F9**).

Виділивши поле графіка пунктирною лінією (клацнувши біля нього і протягнувши мишу, відпустити клавішу), можна потім перемістити на нього курсор, домогтися появи "долоньки" і, клацнувши, переміщати поле по робочому вікну. Для того, щоб розтягувати (звужувати) межі графіка, потрібно захопити курсором необхідну сторону і перемістити її.

Операції копіювання, видалення графіків відбуваються аналогічно діям з іншими об'єктами MathCad і описані раніше. Функції побудови необхідно визначати вище (ліворуч) від місця виведення макета.

Приклад В.2

Побудувати графіки функцій $y(x) = 3 - \cos(x^2)$ і $f(t) = 2 \cdot \sin(2 \cdot t)$ на відріжку $[0; \pi]$ з кроком зміни аргументу $\pi/64$.

Вид документа MathCad приведений на рисунку В.5.

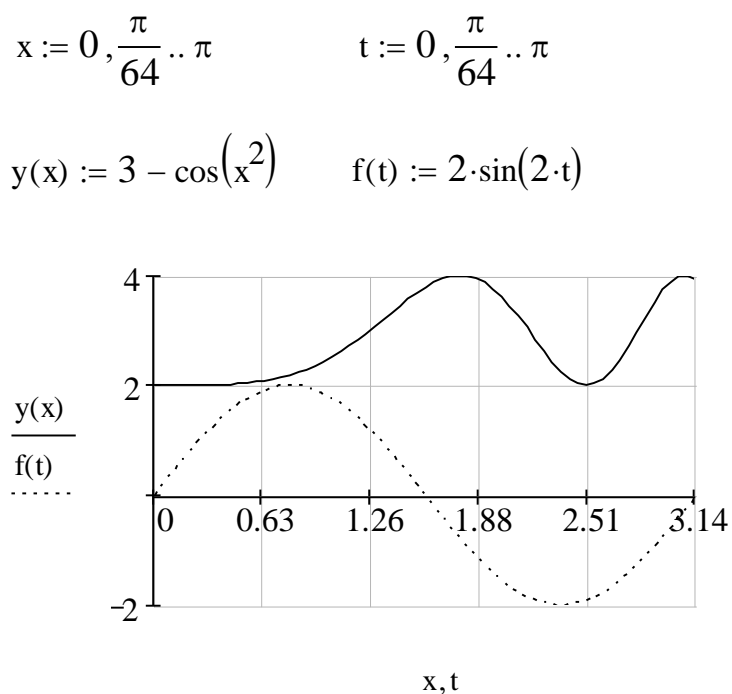


Рисунок В.5 – Результат побудови графіків функцій у заданому діапазоні зміни аргументу в декартовій системі координат

Точність відображення графіка функції залежить від кроку зміни аргументу: чим менше крок, тим більш "гладким" буде графік.

Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 1

Розглянемо розв'язання задачі ЛП прикладу 2 з лабораторної роботи № 1.

Нехай необхідно знайти (x_1, x_2) , при яких функція $F = 2x_1 + x_2$ досягає максимуму, причому x_1, x_2 повинні задовольняти наступній системі обмежень (СОБ):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для того, щоб вирішити цю задачу в MathCad, треба виконати наступні дії.

1. Записати цільову функцію:

$$F(x_1, x_2) := 2x_1 + x_2$$

2. Записати початкові значення змінних:

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1$$

3. Записати систему обмежень:

Given

$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$7x_1 + 10x_2 \leq 70$$

$$4x_1 - 5x_2 \geq -20$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

4. Записати функцію пошуку мінімуму:

$$\text{Maximize}(F, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримали відповідь у вигляді вектору, де $x_1=10$, $x_2=0$.

5.Записати оператор для знаходження значення функції в знайдений точці:

$$F(10,0) = 20 \blacksquare$$

Графічне розв'язання задачі ЛП

У пакеті MathCad немає можливості вирішувати графічно систему нерівностей. Але можна побудувати графіки відповідних рівнянь.

Для цього треба виразити x_2 через x_1 :

$$x_1 + 3x_2 \geq 6, \Rightarrow x_2 = 2 - \frac{1}{3}x_1,$$

$$7x_1 + 10x_2 \leq 70, \Rightarrow x_2 = 7 - \frac{7}{10}x_1,$$

$$4x_1 - 5x_2 \geq -20, \Rightarrow x_2 = 4 + \frac{4}{5}x_1.$$

Записуємо формули цих трьох прямих:

$$f1(x1) := 2 - \frac{1}{3} \cdot x1$$

$$f2(x1) := 7 - \frac{7}{10} \cdot x1$$

$$f3(x1) := 4 + \frac{4}{5} \cdot x1$$

Задаємо діапазон зміни для $x1$:

$$x1 := 0..10$$

Будуємо графік цих функцій (рис. В.6):

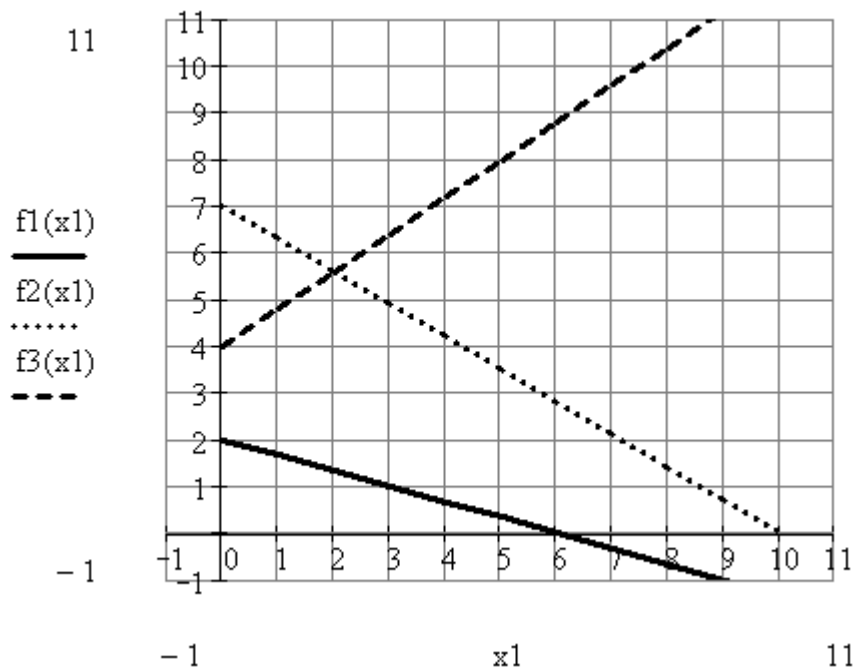


Рисунок В.6

Точку перетину функцій (2) і (3) можна знайти приблизно за допомогою опції *Trace...* з контекстного меню графіку (рис. В.7):

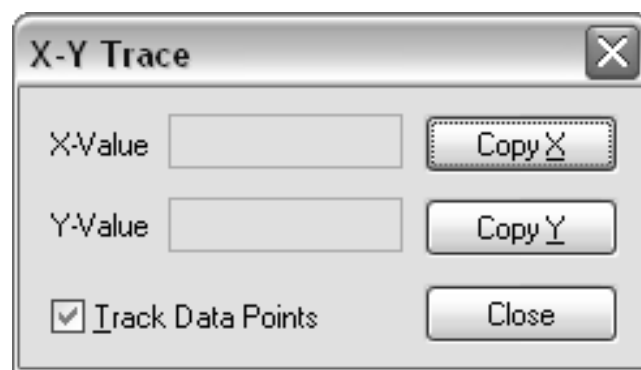


Рисунок В.7

Треба клацнути лівою кнопкою миші на потрібному місці графіку і у вікні *X-Y Trace* побачимо результат (рис. В.8):

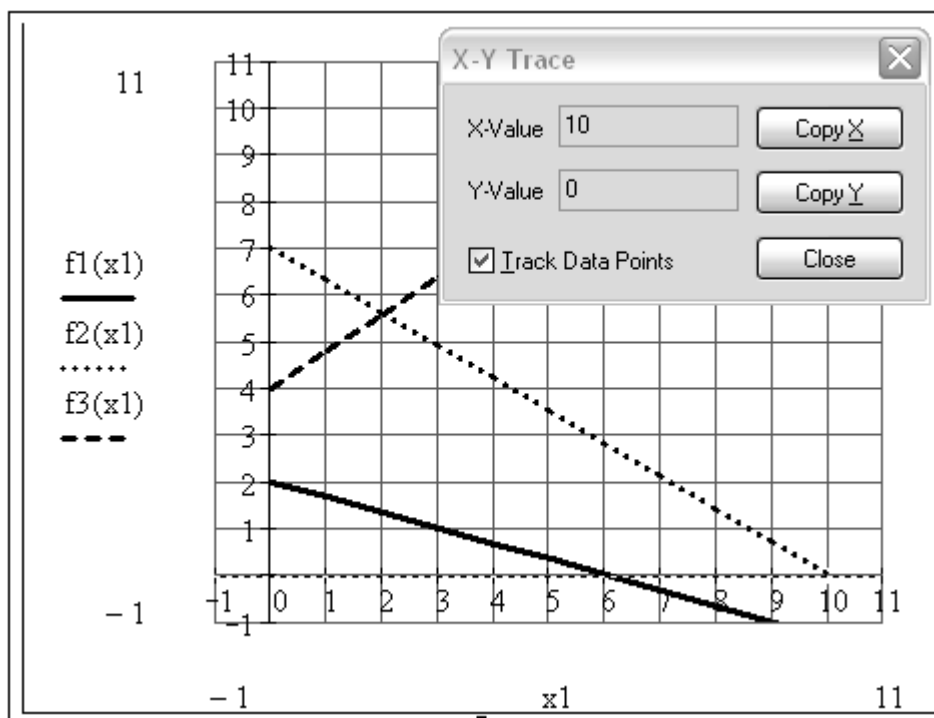


Рисунок В.8

Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 2

Для виробництва трьох видів виробів (А, В, С) використовується три різноманітних види ресурсів. Норми витрат кожного з видів ресурсів на одиницю продукції кожного виду, запаси ресурсів і прибуток від випуску одиниці продукції приведені в наступній таблиці В.1:

Таблиця В.1

Вид ресурсів	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ресурсів
	А	В	С	
Труд, люд-г	4	2	1	180
Сировина, кг	3	1	3	210
Устаткування, годин	1	2	5	244
Прибуток, гр.од.	10	14	12	-

Визначити план випуску продукції, при якому сумарний прибуток максимальний.

$$F(x_1, x_2, x_3) := 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0 \quad x_3 := 0$$

Given

$$4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 180$$

$$3x_1 + 1x_2 + 3x_3 \leq 210$$

$$1x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

$$\text{Maximize}(F, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 82 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Отримали відповідь у вигляді вектору, де $x_1=0$, $x_2=82$, $x_3=16$.

Значення функції у цій точці:

$$F(0, 82, 16) = 1340$$

Двоїста задача

$$G=180y_1+210y_2+244y_3 \quad (\min).$$

$$4y_1+3y_2+y_3 \geq 10,$$

$$2y_1+y_2+2y_3 \geq 14,$$

$$y_1+3y_2+5y_3 \geq 12,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Вид документу MathCad:

$$G(y_1, y_2, y_3) := 180y_1 + 210y_2 + 244y_3$$

$$y_1 := 0 \quad y_2 := 0 \quad y_3 := 0$$

Given

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14$$

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0$$

$$\text{Minimize}(G, y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} 5.75 \\ 0 \\ 1.25 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$G(5.75, 0, 1.25) = 1340 \blacksquare$$

Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 4

Розв'язання замкнутої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n=2$, $m=2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в наступній таблиці В.2.

Таблиця В.2

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		В ₁		В ₂	
A ₁	100	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	150	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Вид документу MathCad:

$$F(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) := 4x_{11} + 2 \cdot x_{12} + 3 \cdot x_{21} + 6 \cdot x_{22}$$

$$x_{11} := 1 \quad x_{12} := 1 \quad x_{21} := 1 \quad x_{22} := 1$$

Given

$$x_{11} + x_{12} = 100$$

$$x_{21} + x_{22} = 150$$

$$x_{11} + x_{21} = 120$$

$$x_{12} + x_{22} = 130$$

$$x_{11} \geq 0 \quad x_{12} \geq 0$$

$$x_{21} \geq 0 \quad x_{22} \geq 0$$

$$\text{Minimize}(F, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 120 \\ 30 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$F(0, 100, 120, 30) = 740 \blacksquare$$

Розв'язання двоїстої задачі

$$G = 100y_1 + 150y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} y_1 + y_3 \leq 4, \\ y_1 + y_4 \leq 2, \\ y_2 + y_3 \leq 3, \\ y_2 + y_4 \leq 6. \end{cases}$$

Вид документу MathCad:

$$G(y_1, y_2, y_3, y_4) := 100y_1 + 150y_2 + 120y_3 + 130y_4$$

$$y_1 := 1 \quad y_2 := 1 \quad y_3 := 1 \quad y_4 := 1$$

Given

$$y_1 + y_3 \leq 4$$

$$y_1 + y_4 \leq 2$$

$$y_2 + y_3 \leq 3$$

$$y_2 + y_4 \leq 6$$

$$\text{Maximize}(G, y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$G(2, 6, -3, 0) = 740 \blacksquare$$

Розв'язання відкритої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n=2$, $m=2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в наступній таблиці В.3.

Таблиця В.3

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		В ₁		В ₂	
A ₁	120	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	180	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Вид документу MathCad:

$$F(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) := 4x_{11} + 2 \cdot x_{12} + 3 \cdot x_{21} + 6 \cdot x_{22}$$

$$x_{11} := 1 \quad x_{12} := 1 \quad x_{21} := 1 \quad x_{22} := 1$$

Given

$$x_{11} + x_{12} \leq 120$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 180$$

$$x_{11} + x_{21} = 120$$

$$x_{12} + x_{22} = 130$$

$$x_{11} \geq 0 \quad x_{12} \geq 0$$

$$x_{21} \geq 0 \quad x_{22} \geq 0$$

$$\text{Minimize}(F, x11, x12, x21, x22) = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 120 \\ 10 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$F(0, 120, 120, 10) = 660 \blacksquare$$

Розв'язання двоїстої задачі

$$G = -120y_1 - 180y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_3 \leq 4, \\ -y_1 + y_4 \leq 2, \\ -y_2 + y_3 \leq 3, \\ -y_2 + y_4 \leq 6, \end{cases} \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

Вид документу MathCad:

$$G(y1, y2, y3, y4) := -120y1 - 180y2 + 120y3 + 130y4$$

$$y1 := 1 \quad y2 := 1 \quad y3 := 1 \quad y4 := 1$$

Given

$$-y1 + y3 \leq 4$$

$$-y1 + y4 \leq 2$$

$$-y2 + y3 \leq 3$$

$$-y2 + y4 \leq 6$$

$$y1 \geq 0 \quad y2 \geq 0$$

$$\text{Maximize}(G, y1, y2, y3, y4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$G(4, 0, 3, 6) = 660 \blacksquare$$

Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи № 5

Задача 1

$$F = 7,62x_1 + 6,45x_2 \quad (\max);$$

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 0,2x_2 \leq 400, \\ 0,22x_1 + 0,15x_2 \leq 200, \\ x_1 - \frac{3}{4}x_2 = 0, \\ x_1 \leq 350, \\ x_2 \leq 280, \end{cases} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Вид документу MathCad:

$$F(x_1, x_2) := 7.62x_1 + 6.45x_2$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1$$

Given

$$0.01x_1 + 0.2x_2 \leq 400$$

$$0.22x_1 + 0.15x_2 \leq 200$$

$$x_1 - \frac{3}{4} \cdot x_2 = 0$$

$$x_1 \leq 350$$

$$x_2 \leq 280$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\text{Maximize } (F, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 210 \\ 280 \end{pmatrix}$$

$$F(210, 280) = 3406.2$$

Задача 2

$$F = 5,66x_1 + 4,35x_2 \quad (\max);$$

$$\begin{cases} -0,22x_1 + 0,85x_2 \leq 50, \\ x_1 \leq 350, \\ x_2 \leq 280, \\ 0,9x_1 - 0,2x_2 \geq 0, \\ -0,22x_1 + 0,85x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Вид документу MathCad:

$$F(x_1, x_2) := 5.66x_1 + 4.35x_2$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1$$

Given

$$-0.22x_1 + 0.85x_2 \leq 50$$

$$x_1 \leq 350$$

$$x_2 \leq 280$$

$$0.9x_1 - 0.2x_2 \geq 0$$

$$-0.22x_1 + 0.85x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\text{Maximize } (F, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 350 \\ 149.412 \end{pmatrix}$$

$$F(350, 149.412) = 2630.942$$

Приклад розв'язання задачі НЛП з лабораторної роботи № 6

Задача квадратичного програмування.

$$\begin{cases} F = 9x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 & (\max), \\ x_1 + 4x_2 \leq 52, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 64. \end{cases}$$

Запис у MathCad

Пояснення

$$f(x_1, x_2) := 9 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

- цільова функція,

$$x_1 := 0$$

- початкові значення змінних,

$$x_2 := 0$$

Given

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 52$$

- запис системи обмежень,

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 64$$

$$\text{Maximize}(f, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- точка екстремуму,

$$f(7, 5) = -1$$

- значення функції в точці екстремуму,

$$x_1 := 7$$

- перевірка виконання системи обме-

$$x_2 := 5$$

жень.

$$x_1 + 4 \cdot x_2 = 27$$

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 64$$

Примітка: у програмі **MathCad** можна розв'язати не всі оптимізаційні задачі. Так, наприклад, не вдалося знайти розв'язання для прикладу з лабораторної роботи №3. Це пов'язано з методами, вбудованими в програму.

ЛІТЕРАТУРА

1 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для экон. спец. вузов. – М.:Высш.шк.,1986 .317 с.

2 Банди Б. Основы линейного программирования: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989. –176 с.

3 Барвінський А. Ф. Математичне програмування. Навчальний посібник/ А.Ф.Барвінський, І.Я. Олексів, З.І. Крупка, І.О. Бобик, І.І. Демків, Р.І. Квіт, В.В. Кісілевич. – Львів: „Інтелект-Захід” 2004. – 448 с.

4 Вітлінський В.В. Математичне програмування/ В.В. Вітлінський, С.І Наконечний, Т.О. Терещенко. - К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.

5 Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). – М., 1961. – 305с.

6 Глухов В.В. Математические методы и модели для менеджмента/ В.В. Глухов, М.Д. Медников, С.Б. Коробко. – СПб.: Издательство “Лань”, 2000. –480 с.

7 Горчаков А.А. Компьютерные экономико-математические модели/ А.А.Горчаков, И.В.Орлова. – М.:Компьютер, 1995. – 135 с.

8 Горчаков А.А. Методы экономико-математического моделирования и прогнозирования в новых условиях хозяйствования/ А.А.Горчаков, И.В.Орлова, В.А.Плотников. – М.: ВЗВЭИ, 1991. –181 с.

9 Данциг Дж. Линейное программирование. – М., 1981. –242 с.

10 Идрисов Ф.Ф. Линейное программирование. – Томск, Изд-во ТГПУ, 2004. – 124 с.

10 Каллихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию.- М.: Высш. школа, 1975. – 270 с.

11 Карасев А.И. Математические методы и модели в планировании. – М.: Экономика, 1987. –221 с.

12 Коробов П. Н. Математическое программирование и моделирование процессов:Учебник . –2-е изд., перераб. и доп.-СПб:ДНК,2003 . –376 с.

13 Костевич Л. Математическое программирование. – М.: Новое знание. 2003. – 424 с.

14 Кузнецов А.В. Математическое программирование/ А.В.Кузнецов, Н.И.Холод. – Минск: Высшейш.школа, 1984. –221 с.

- 15 Куликов Ю.Г. Экономико-математические методы и модели (раздел "Линейное программирование"): Учебное пособие для практ. занятий./Ю.Г. Куликов, Н.Ф. Шеховцова, Л.П. Зикеева. –М: Мос. психолог.-социальный ин-т; Воронеж : МОДЭК, 2000 . –96 с.
- 16 Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с фр. –М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990 . –488 с.
- 17 Плис А. И Сливина Н. А. MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. Пособие/ А.И. Плис, Н.А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.
- 18 Солодовников А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. М., Изд. "Просвещение", 1966. – 184 с
- 19 Степанюк В.В. Методи математичного програмування. – К.: Вища школа. Головне в-во, 1984. – 272 с.
- 20 Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х т. Т.1: Пер с англ. – М.: Мир, 1991. –360 с.
- 21 Тынкевич М.А. Экономико-математические методы (исследование операций). Изд. 2, испр. и доп. — Кемерово, 2000. – 177 с.
- 22 Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели. Учебное пособие для Вузов. –М: ЮНИТИ., 2002. – 391 с.
- 23 Шмырев В.И. Введение в математическое программирование. – М.: РХД, 2002. – 192 с.

Навчальне видання

ВАСИЛЬЄВА Людмила Володимирівна

ГЕТЬМАН Ірина Анатоліївна

**ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ
В ЕКОНОМІЦІ**

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

Редактор О. М. Прізвище

Комп'ютерна верстка О. П. Ордіна

(Позиція за планом видань). Підп. до друку . Формат 60 x 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк.
Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.

