СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Новиков О. А., Ровенская О. Г., Обухов А. Н.

Рассмотрены вопросы решения и исследования уравнений динамики систем автоматического регулирования. Предложен метод построения спектральной характеристики периодического сигнала на основании разложения в тригонометрический ряд. Показаны преимущества применения средних арифметических сумм Фурье в спектральном анализе периодического возмущающего воздействия автоматической регулируемой системы по сравнению с соответствующим обычным представлением функции в виде суммы ряда Фурье. Предложенный метод может быть использован в областях физики и техники, где имеют место периодические процессы.

Розглянуті питання розв'язання та дослідження рівнянь динаміки систем автоматичного регулювання. Запропоновано метод побудови спектральної характеристики періодичного сигналу, що базується на розвиненні в тригонометричний ряд. Показано переваги використання середніх арифметичних сум Фур'є в спектральному аналізі періодичного збурюючого імпульсу автоматичної регульованої системи в порівнянні з відповідним звичайним представленням функції у вигляді суми ряду Фур'є. Запропонований метод може бути використаний в областях фізики і техніки, де мають місце періодичні процеси.

This work considers solving and study of dynamics equations in the automatic control systems. Proposed method of construction spectral characteristic of periodic signal based on expansion in trigonometric series. Advantages of the arithmetic use Fourier sums in spectral analysis of periodic disturbing impulse of the automatic controlled system in comparison with the conventional representation of function as ordinary sum of Fourier series. In some cases the process has been accompanied by disturbances, repeated at regular intervals. Such case has been always the case when a regulated environment is consumed regularly in equal portions. The proposed method can be used in the fields of physics and engineering, where there are periodic processes.

Новиков О. А. канд. физ.-мат. наук, доц., декан СГПУ

sgpi@slav.dn.ua

Ровенская О. Г. канд. физ.-мат. наук, ст. преп кафедры ВМ ДГМА

o.rovenskaya@mail.ru

Обухов А. Н. канд. техн. наук, доц. кафедры ВМ ДГМА

СГПУ – Славянский государственный педагогический университет, г. Славянск

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск

УДК 517.5

Новиков О. А., Ровенская О. Г., Обухов А. Н.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА

С периодическими движениями (колебаниями) приходится иметь дело в самых различных областях знания – в теории упругости, акустике, радиотехнике, электротехнике, в том числе, теории автоматического регулирования, – и всюду простейшими периодическими движениями являются гармонические колебания.

Устройства автоматического регулирования предназначены для изменения управляемого процесса по заранее определённому закону. Производственный процесс, происходящий в регулируемом объекте, характеризуется одной или несколькими величинами. Некоторые из них в ходе процесса должны поддерживаться постоянными, другие изменяться по заданному закону. Эти задачи и выполняют системы автоматического регулирования (САР). Исследование движения систем автоматического регулирования под действием возмущающих сил составляет основной вопрос динамики регулирования. Как известно, задачей всякой системы автоматического регулирования является поддержание равенства между действительным и предписанным значениями регулируемой величины. Изменение регулируемой величины вызывается возмущающими воздействиями, приложенными к системе, которые нарушают соответствие между действительным и установленным значениями этой величины. С другой стороны, задающее или управляющее воздействие регулятора изменяет регулируемую величину таким образом, чтобы действительное значение регулируемой величины приближалось к предписанному.

В теории автоматического регулирования получили широкое распространение частотные методы анализа и синтеза САР. Частотные методы являются весьма удобным инструментом, пригодным для суждения об устойчивости системы, точности ее работы, качества переходных процессов и т. д. Математической основой частотных методов являются спектральные представления сигналов и связанные с этими представлениями частотные характеристики систем. В свою очередь, спектральные представления непосредственно опираются на ту часть математического анализа, в которой рассматривается теория рядов Фурье и интеграла Фурье.

Величина и характер возмущающих воздействий зависит от того технологического процесса, один или несколько параметров которого подлежат автоматическому регулированию. Функция, оказывающая изменение во времени возмущающего воздействия на одно из звеньев регулятора, называется возмущающей функцией. Возмущающую функцию удобно выражать в безразмерных единицах аналогично тому, как это делается в уравнениях малых отклонений, выбрав подходящее базисное значение возмущающего воздействия.

В ряде случаев технологический процесс сопровождается возмущающими воздействиями, повторяющимися через равные промежутки времени. Такой случай имеет всегда место, когда регулируемая среда расходуется периодически равными порциями. На рис. 1 приведены графики периодических возмущающих воздействий.

Для периодических возмущающих воздействий справедлива запись:

$$\begin{cases} f(t) = 0 \ \text{ при } \ t < 0, \\ f(t) = f(t+T) \ \text{ при } \ t \geq 0, \end{cases}$$

если T – период приложения возмущающего воздействия.

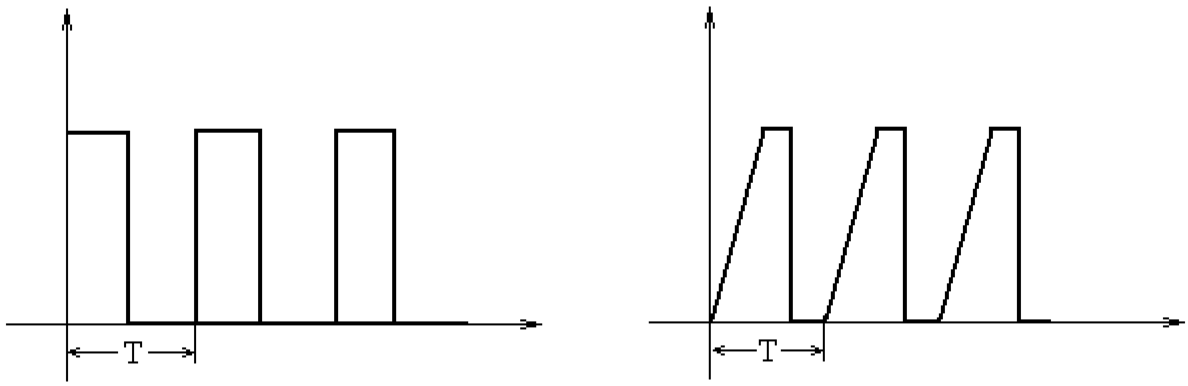


Рис. 1. Графики периодических возмущающих воздействий

Одним из методов решения и исследования уравнений динамики систем автоматического регулирования является метод частотной функции, который нашёл широкое применение при расчётах и проектировании систем автоматического регулирования, особенно в электрических системах. Частотная функция даёт более быстрый способ построения графика переходного процесса, чем другие методы, особенно для систем высокого порядка. Для случаев периодических возмущающих воздействий метод частотной функции быстрее других методов приводит к математическому описанию процесса регулирования.

Метод частотной функции возник на базе теоретических исследований периодических функций в области электротехники и связи и представления их рядами Фурье. Будучи перенесён в теорию регулирования, он оказался весьма плодотворным.

Сущность метода состоит в следующем [1]. Если на входе линейной разомкнутой системы регулирования приложить синусоидальное возмущающее воздействие, то на выходе системы при установившемся режиме мы получим функцию также синусоидальной формы той же частоты, но другой амплитуды и фазы, чем гармоника возмущения.

Представляя воздействие возмущения в виде ряда Фурье и применяя принцип суперпозиции, можно исследовать заданную систему и определить её реакцию на разные виды возмущения, пользуясь отмеченным свойством синусоидального возмущающего воздействия. Этот метод наглядно выявляет характер влияния отдельных параметров системы на переходной процесс и значительно упрощает расчёты. Особенно упрощаются расчёты при периодических возмущающих действиях.

Применение метода частотной функции при произвольном возмущении основывается на двух положениях:

1. Возмущающая функция может быть разложена в гармонический ряд, конечный или бесконечный, дискретный или непрерывный.

2. Выходная функция разомкнутой системы при произвольном возмущающем воздействии на входе определяется как алгебраическая суммам составляющих выходов, вычисленных для отдельных гармоник ряда, в который разложена функция возмущения. Это справедливо только для линейных систем.

Задача разложения функции возмущения в гармонический ряд решается согласно теории рядов Фурье. Функция периодического возмущающего воздействия $\varphi(t)$ отличается от периодической функции тем, что при $t<0$ она везде равна нулю. Поэтому коэффициенты Фурье будут вычисляться для функций $\varphi(t)$ по формулам:

$$C_n=\frac{1}{T}\int\limits_0^T\varphi(t)e^{-in\omega_0 t}dt,\ \ n=0,\pm1,\pm2,... \quad \text{и} \quad \varphi(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}C_n e^{in\omega_0 t}\ ,$$

где n – порядок высшей гармоники, ω_0 – частота основной гармоники, T – период основной гармоники, равный периоду функции.

Приближение периодических функций частичными суммами ряда Фурье является наиболее простым и естественным примером линейного процесса аппроксимации. Но, как хорошо известно, суммы Фурье заданной функции иногда сходятся к ней очень медленно или вообще расходятся. В связи с этим, значительное количество работ (например, [2–5]) в этом направлении посвящено изучению приближающих свойств других методов приближения, которые порождаются определёнными преобразованиями частичных сумм ряда Фурье и позволяют построить тригонометрические полиномы, которые быстрее сходились бы к заданной функции. Тригонометрические полиномы, которые порождаются повторным суммированием частичных сумм ряда Фурье [6], представляют собой один из таких методов. Более подробно с библиографией по этим вопросам можно ознакомиться, например, в работах [7], [8].

Цель работы – показать преимущества применения средних арифметических сумм Фурье в спектральном анализе периодического возмущающего воздействия автоматической регулируемой системы.

По спектру, в частности, видно из каких нетривиальных гармоник состоит периодический возмущающий сигнал. Для синусоидального возмущения амплитуда представляет собой одно комплексное число, определяемое значением частоты ω. При произвольной периодической возмущающей функции порождаются колебания с дискретным спектром частот. В этом случае представляет интерес графическое изображение модуля амплитуды, которое носит название амплитудно-частотной характеристики сигнала.

Сравним приближение, которое обеспечивают частичные суммы ряда Фурье и их повторные средние арифметические для последовательности возмущающих импульсов, изображённой на рис. 2.

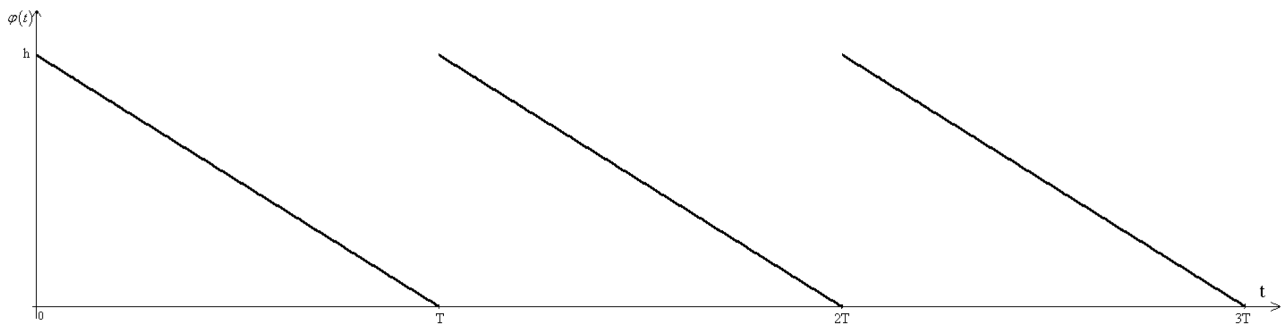


Рис. 2. Периодический возмущающий сигнал

Функция $\varphi(t)$, которая описывает данный сигнал, на периоде может быть представлена таким образом: $\varphi(t) = h - \frac{h}{T}t$. Для упрощения вычислений выполним сдвиг системы координат $t = t_1 + \frac{T}{2}$, тогда $\varphi(t_1) = \frac{h}{2} - \frac{h}{T}t_1$.

Найдём коэффициенты Фурье;

$$C_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}\left(\frac{h}{2} - \frac{h}{T}t_1\right)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt = \begin{cases} \frac{h}{2}, & n = 0, \\ -\frac{hi(-1)^n}{2\pi n}, & n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Тогда:

$$\varphi(t_1) = \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h}{\pi n} \sin \frac{2\pi}{T} n t_1 .$$

Ряд Фурье исходного сигнала имеет вид:

$$\varphi(t) = \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h}{\pi n} \sin \frac{2\pi}{T} n \left(t - \frac{T}{2} \right) = \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h}{\pi n} \sin \frac{2\pi}{T} n t .$$

Модуль амплитуды колебаний $A_0 = \frac{h}{2}$, $A_n = \frac{h}{\pi n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Построим амплитудно-частотную характеристику сигнала $\varphi(t)$ при числовых значения динамических параметров $h = 8$, $T = 10$ (рис. 3).

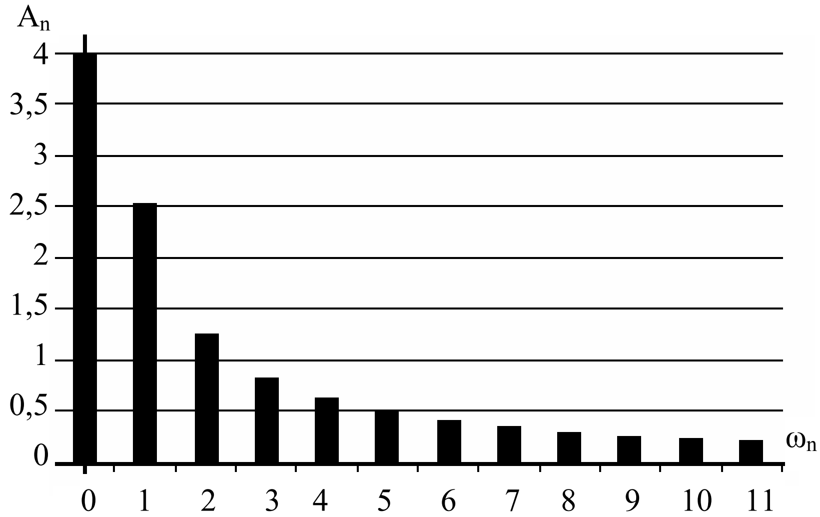


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика периодического сигнала $\varphi(t)$

Анализируя полученную амплитудно-частотную характеристику сигнала, можем сделать вывод, что существенными являются первые четыре-пять гармоник ряда. Сравним приближение функции $\varphi(t)$ частичными суммами ряда Фурье:

$$S_n(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{n-1} A_n \sin \frac{\pi n}{5} t$$

и их повторными средними арифметическими, которые задаются соотношением:

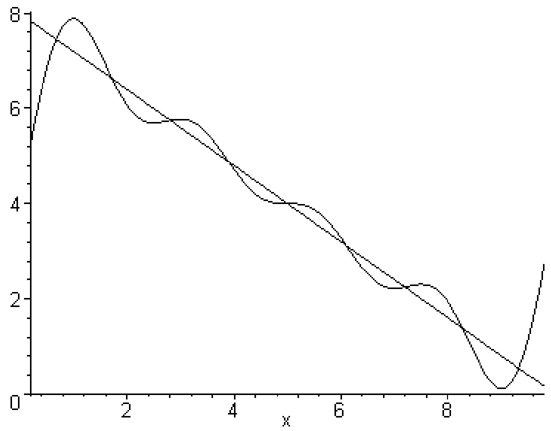
$$S^{(2)}_{n, p_1, p_2}(t) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_{m+1} .$$

Для этого запишем тригонометрические полиномы пятого порядка:

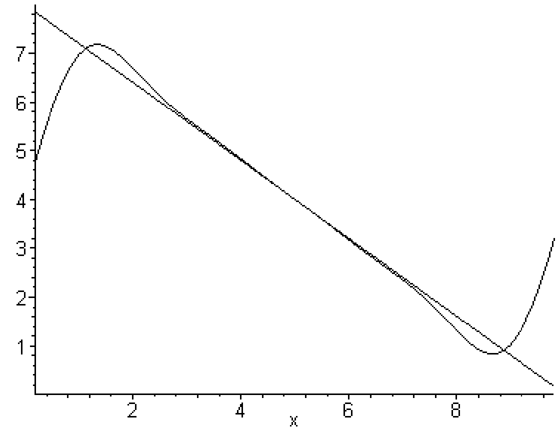
$$S_5(t) = 4 + \frac{8}{\pi} \sin \frac{\pi}{5} t + \frac{4}{\pi} \sin \frac{2\pi}{5} t + \frac{8}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{5} t + \frac{2}{\pi} \sin \frac{4\pi}{5} t ,$$

$$S_{5,2,3}^{(2)}(t) = 4 + \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{5}t + \frac{10}{3\pi}\sin\frac{2\pi}{5}t + \frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{5}t + \frac{1}{3\pi}\sin\frac{4\pi}{5}t.$$

Покажем приближение возмущающей функции $\varphi(t)$ частичными суммами Фурье (рис. 4, а) и их повторными средними арифметическими (рис. 4, б) на одном периоде.



а



б

Рис. 4. Приближение сигнала $\varphi(t)$ частичными суммами Фурье (а) и их повторными средними арифметическими (б) на одном периоде

ВЫВОДЫ

Сравнивая приближение, которое обеспечивается частичными суммами ряда Фурье и их повторными средними арифметическими, можно сделать вывод, что полиномы, порождаемые повторным суммированием ряда Фурье, являются эффективным способом приближения и могут использоваться при спектральном анализе периодических возмущающих воздействий в устройствах автоматического регулирования. При этом метод построения указанных полиномов достаточно прост, не требует специальных навыков и поэтому может быть использован также в других областях физики и техники, где имеют место периодические процессы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп; пер. с англ. Б. И. Копылова. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.

2. Rukasov V. I. Approximation of the classes of analytical functions by de la Vallee-Poussin sums / V. I. Rukasov, S. O. Chaichenko // Ukr. Math. J. – 2003. – Vol. 55, № 6. – P. 575–590.

3. Ровенская О. Г. Приближение периодических аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена / О. Г. Ровенская // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27. – С. 81–92.

4. Сердюк А. С. Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена / А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 1. – С. 97–107.

5. Теляковский С. А. О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости / С. А. Теляковский // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, № 4. – С. 510–518.

6. Rovenska O. Approximation of classes of analytic functions by repeated arithmetic means of Fourier sums / Rovenska Olga // Computational Methods and Function Theory 2009 : Int. Conf., 8 – 12 June 2009. : Abstr. – Ankara, Turkey, 2009. – P. 51.

7. Самойленко А. М. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань / А. М. Самойленко, Р. І. Петришин. – К. : Наук. думка, 2004. – 474 с.

8. Степанец А. И. Методы теории приближений. В 2 ч. / А. И. Степанец. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.

Статья поступила в редакцию 17.10.2011 г.