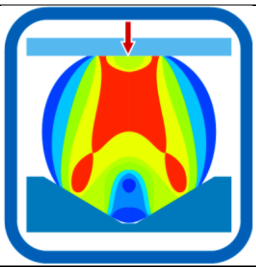

РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 531.1+621.7

Алюшин Ю. А.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ОСАДКЕ ПОЛОСЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ТРЕНИЕМ

Осадка в условиях плоской деформации исследована всеми известными методами, включая метод главных напряжений [1–2], инженерный метод [3–4], теорию линий скольжения [5–6], метод верхней оценки [7–8], метод конечных элементов [9], а также экспериментально [2, 7, 10] с целью изучения особенностей полей скоростей и напряжений, свойств материала заготовки в области необратимых деформаций. По существу, осадку считают процессом, удобным для оценки эффективности различных методов при решении практических задач. Во всех упомянутых работах решения получены для пространства переменных Эйлера в произвольный момент времени, условия трения формулируются через касательные напряжения на контакте τ_k , которые принимаются пропорциональными пределу текучести σ_s:

$$\tau_k = \mu\sigma_s .$$

Коэффициент трения μ может изменяться в пределах до $0 \le \mu \le 0{,}5$, так как касательные напряжения не могут превышать предельных значений $\tau_k = 0{,}5\sigma_s$, соответствующих переходу материала в пластическое состояние по гипотезе максимальных касательных напряжений [5–6]. К сожалению, точность такой формулировки граничных условий не может быть проверена, так как все экспериментальные методы сводятся к замерам перемещений, которые затем пересчитывают в напряжения по одной из известных методик [2, 10].

Известно, что отсутствию трения при плоской осадке соответствует однородное деформированное состояние, перемещения и компоненты скорости зависят только от одной из координат, на боковой поверхности они одинаковы по всей высоте заготовки, в том числе на контакте и на оси симметрии. При увеличении трения перемещения возрастают по мере удаления от поверхности контакта к плоскости симметрии, соотношение между максимальными и минимальными перемещениями оцениваются по виду боковой поверхности.

Цели работы: сопоставление различных методик определения уравнений движения в форме Лагранжа на примере осадки, в том числе с помощью суперпозиции [11] двух процессов с предельными вариантами трения;

использование новой методики учета трения, которая предусматривает весь диапазон кинематических особенностей процесса: от максимально возможных смещений (при отсутствии трения) до полного их отсутствия на контактной поверхности.

Полное прилипание практически не наблюдается при осадке, но такие решения могут представлять интерес для процессов высадки и некоторых других [2, 7], где отсутствие перемещений определяют граничные условия на плоскостях между недеформируемой и деформируемой частями заготовки. Учитывать трение по измеряемому параметру проще всего по разности смещений на оси симметрии, где они максимальны, и на контактной поверхности.

В соответствии с энергетической моделью механики [12] для процессов, близких к статическим, уравнения движения в форме Лагранжа должны удовлетворять дифференциальным уравнениям второго порядка, например, в системе декартовых координат [13, 14]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

которые называют уравнениями Лапласа. Для плоской задачи с учетом особенностей искомых уравнений $x_i(\alpha, \beta)$ и области определения переменных – пространством переменных Лагранжа (α, β) – исходные уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 x_i}{\partial \beta^2}=0. \tag{1}$$

В качестве решений возможны любые гармонические функции [13]. Для каждой из эйлеровых координат x_i область определения (α, β) остается неизменной на всем протяжении процесса, в рассматриваемом случае – осадки. Это в определенной степени способствует снижению математических трудностей решений, так как позволяет проще формулировать граничные условия. Для поиска решений удобно воспользоваться методом разделения переменных, представляя каждую из функций в виде:

$$x_i(\alpha,\beta)=x_i'(\alpha)x_i''(\beta), \tag{2}$$

тогда уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{d^2 x_i'}{d\alpha^2}x_i''+\frac{d^2 x_i''}{d\beta^2}x_i'=0 \ .$$

Вместо уравнения (1) второго порядка с частными производными получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 x_i'}{d\alpha^2}=\lambda x_i', \qquad \frac{d^2 x_i''}{d\alpha^2}=-\lambda x_i''. \tag{3}$$

Общее решение можно найти через линейную комбинацию $x_i'=A(x_i')_1+B(x_i')_2$ двух независимых решений $(x_i')_1$ и $(x_i')_2$, каждое из которых будем искать в виде:

$$(x_i')_j=\exp(k\alpha), \tag{4}$$

где k – некоторое число, тогда:

$$\frac{d(x_i')}{d\alpha}=k\exp(k\alpha), \qquad \frac{d^2(x_i')}{d\alpha^2}=k^2\exp(k\alpha).$$

Первое из уравнений (3) преобразуется к виду:

$$k^2\exp(k\alpha)-\lambda\exp(k\alpha)=0, \tag{5}$$

так как $\exp(k\alpha)\neq 0$, коэффициент λ должен быть положительным $\lambda>0$. Функция (4) будет множителем уравнения (2), если k удовлетворяет уравнению (5), при этом решение определяют показательные функции [16]:

$$x_i'(\alpha)=A\exp(k\alpha)+B\exp(-k\alpha).$$

Представляя аналогично (4) вторую функцию $x_i''=\exp(p\beta)$, $\frac{d(x_i'')}{d\beta}=p\exp(p\beta)$, $\frac{d^2(x_i'')}{d\beta^2}=p^2\exp(p\beta)$, получаем $p^2\exp(p\beta)+\lambda\exp(p\beta)=0$ и, так как $\exp(p\beta)\neq 0$, должно выполняться условие $p^2+\lambda=0$ или $\lambda=-p^2$, коэффициент λ должен быть отрицательным $\lambda<0$, решение определяют тригонометрические функции [16]:

$$x_i''(\beta) = C\cos(p\beta) + D\sin(p\beta).$$

С учетом (2) получаем общее решение уравнения (1):

$$x_i(\alpha,\beta) = [A\exp(p\alpha) + B\exp(-p\alpha)][C\cos(p\beta) + D\sin(p\beta)], \quad (6)$$

в котором константы *A, B, C, D, p* должны быть определены из граничных условий.

Как следует из изложенного, методика интегрирования уравнений (1) разработана достаточно подробно и позволяет получить решения через произведения действительных линейных, показательных, тригонометрических или гиперболических функций для конкретных частных случаев [13], если известны требуемые граничные условия. Для повышения точности описания уравнений движения они могут быть сформулированы, в том числе, на основе экспериментальных данных, например, через координаты специально маркированных частиц на свободной поверхности заготовки. Это позволит конкретизировать вид уравнений движения с учетом фактической неоднородности возникающего при различных условиях трения деформированного и напряженного состояний [10, 12].

Если граничных условий недостаточно для определения коэффициентов, входящих в уравнение (6), как в рассматриваемом процессе, можно ограничиться простейшим вариантом представления решения (2) с линейными функциями и неизвестными *m, n, A, B*:

$$x_i(\alpha,\beta) = (m + n\alpha)(A + B\beta). \quad (7)$$

Совместим начало координат с пересечением осей симметрии исходной заготовки. Для координаты x известно лишь одно условие $x = 0$ при $\alpha = 0$, тогда $m = 0$, $n = 1$,

$$x(\alpha,\beta) = \alpha(A + B\beta).$$

Для координаты y можно воспользоваться уравнением (2) с граничными условиями на плоскостях симметрии и контакта с инструментом $y = 0$ при $\beta = 0$ и $y = h$ при $\beta = h_0$. В результате получаем:

$$y = \beta h / h_0. \quad (8)$$

Для определения оставшихся коэффициентов *A, B* воспользуемся условием постоянства объема в окрестности каждой частицы [11, 12]:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 1 \quad \text{или} \quad (A + B\beta)\frac{h}{h_0} = 1.$$

Отсюда находим зависимость *A* и *B:*

$$A = \frac{h_0}{h}\left(1 - B\beta\frac{h}{h_0}\right),$$

после чего получаем известное решение для осадки полосы при отсутствии трения на поверхностях контакта с однородным деформированным состоянием:

$$x = \alpha h_0 / h, \quad y = \beta h / h_0, \quad (9)$$

где α и β – начальные координаты частиц при высоте заготовки $h = h_0$.

Для второго предельного случая с отсутствием перемещений на контактной поверхности в качестве дополнительного граничного условия воспользуемся предположением, что боковая поверхность заготовки остается плоской, прямоугольное исходное сечение (в первой четверти исходной заготовки) преобразуется в трапецию, верхняя грань которой сохраняет исходный размер α, перемещения на оси симметрии определим из условия постоянства объема. В этом случае прямая $x(\alpha = const, \beta) = M\beta + N$, соответствующая боковой грани трапеции, должна проходить через точки:

$$x = \alpha \text{ при } \beta = h_0 \qquad \text{и} \qquad x = \alpha(2h_0 / h - 1) \text{ при } \beta = 0. \tag{10}$$

В результате для координаты x получаем:

$$x(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{hh_0}\left[h_0(2h_0 - h) - 2\beta(h_0 - h)\right]. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (11) удовлетворяет граничным условиям (10), уравнению Лапласа (1) и интегральному условию постоянства объема для части заготовки в первой четверти системы координат:

$$\alpha h_0 = 0{,}5h[x(\alpha, h_0) + x(\alpha, 0)].$$

Для координаты y можно воспользоваться либо уравнением (8), либо найти иное решение, используя условие постоянства объема в локальном виде через якобиан, как в первом варианте.

Уравнений (8)–(11) достаточно для описания уравнений движения при осадке полосы с произвольным трением, если воспользоваться наложением приведенных выше решений по одному из трех вариантов.

Суперпозиция [11] предусматривает замену переменных Лагранжа внешнего движения на выражения для соответствующих переменных Эйлера внутреннего движения. Если в качестве внешнего рассматривать осадку с прилипанием заготовки на контактной поверхности (11), а в качестве внутреннего – осадку без трения (9), в результате суперпозиции получаем:

$$x = \frac{\alpha}{h^2}\left[h_0(2h_0 - h) - 2\beta h / h_0(h_0 - h)\right], \qquad y = \beta h / h_0. \tag{12}$$

Если поменять выбор внешнего и внутреннего движений, приняв в качестве внешнего движение при отсутствии трения, тогда результат будет отличаться вторым слагаемым:

$$x = \frac{\alpha}{h^2}\left[h_0(2h_0 - h) - 2\beta(h_0 - h)\right], \qquad y = \beta h / h_0. \tag{13}$$

Принцип суперпозиции не имеет ограничений на число вложений и не противоречит общепринятому положению о векторном сложении как скоростей, так и ускорений накладываемых движений в каждый момент времени [11].

Уравнения (12) и (13) предусматривают одновременное протекание обоих налагаемых движений. К недостатку следует отнести отсутствие контролирующего параметра по доле каждого из участвующих в суперпозиции движений. Указанный недостаток можно устранить, если предусмотреть поэтапное выполнение деформации. Например, на первом этапе $h_0 \ge h \ge h_1$ происходит равномерная деформация, крайняя частица на контакте с верхней плитой с начальными координатами $\alpha = \alpha_k$, $\beta = h_0$ получает смещение $u = \alpha_k(h_0 / h_1 - 1)$, текущая координата составит:

$$x_k(\alpha_k, h_0) = \alpha_k h_0 / h_1, \tag{14}$$

где α_k – ширина исходной заготовки.

Деформация на втором этапе ($h_1 \ge h \ge h_k$) происходит при условии полного прилипания в соответствии с уравнениями (8) и (11), в которых в качестве исходной следует принять высоту заготовки после окончания первого этапа h_1

$$x = \frac{\alpha}{hh_1}\left[h_1(2h_1 - h) - 2\beta(h_1 - h)\right], \quad y = \beta h / h_1. \tag{15}$$

На этом этапе перемещения на контактной поверхности отсутствуют, координата крайней точки остается неизменной в соответствии с уравнением (14).

При изменении порядка выполнения этапов после уменьшении высоты заготовки от h_0 до h_1 (в конце первого этапа) абсцисса крайней точки на контакте сохраняет начальное значение $x(\alpha_k, h_0) = \alpha_k$, на оси симметрии составит $x(\alpha_k, 0) = \alpha_k / h_1(2h_0 - h_1)$. В дальнейшем при $h_1 \geq h \geq h_k$ деформация протекает в соответствии с уравнениями (9) для равномерной деформации (при отсутствии трения), абсцисса частицы с начальными координатами Лагранжа (α_k, h_0) увеличивается пропорционально изменению высоты заготовки на втором этапе:

$$x(\alpha_k, h_0) = \alpha_k(2h_1 - h)/h, \qquad y = \beta h / h_1. \tag{16}$$

Ординаты частиц изменяются в обоих вариантах по единому закону (8).

Возможен также вариант контроля граничных условий трения за счет кинематического коэффициента k, характеризующего перемещение u или координату угловой точки $x(\alpha_k, h_0)$ на контакте:

$$u = \alpha_k k(h_0/h - 1) \qquad x(\alpha_k, h_0) = \alpha_k[1 + k(h_0/h - 1)]. \tag{17}$$

Значение $k = 1$ соответствует отсутствию трения и однородному деформированному состоянию, при $k = 0$ на контакте возникает полное прилипание. Уравнение прямой $x(\alpha = const, \beta) = M\beta + N$, соответствующей боковым граням трапеций в сечении заготовки, проходит через две точки с координатами:

$$x = \alpha[k(h_0/h - 1) + 1] \text{ при } \beta = h_0 \qquad \text{и} \qquad x = \alpha(2h_0/h - 1) \text{ при } \beta = 0.$$

В этом случае для координаты x вместо (11) получаем:

$$x = \alpha\{[(2-k)\frac{h_0}{h} + k - 1] + \frac{2\beta}{h_0}(k-1)(\frac{h_0}{h} - 1)\}.$$

Результат отличается от уравнения (12) по первому варианту суперпозиции наличием коэффициента k, предусматривающего возможность изменения условий трения на всем интервале изменения высоты заготовки $h_0 \geq h \geq h_k$, значение k можно определять по результатам экспериментально наблюдаемых координат или смещений на контакте в соответствии с уравнениями (17).

Определение уравнений движения возможно без использования эллиптического уравнения (1), но с применением принципа суперпозиции [11]. Например, сохраняя уравнение для ординаты в виде (8), воспользуемся предположением, что горизонтальные плоскости заготовки остаются горизонтальными на всем протяжении процесса осадки. Если на поверхности контакта заготовки с верхней плитой перемещения отсутствуют, часть исходного сечения в виде прямоугольника шириной $\alpha = const$ и высотой h_0 преобразуется в трапецию, верхняя грань которой сохраняет исходный размер, боковая преобразуется в наклонную плоскость, а текущая абсцисса $x(\alpha, 0)$ на срединной плоскости (на горизонтальной оси симметрии) обеспечивает выполнение условия постоянства объёма:

$$\alpha h_0 = \frac{1}{2}h(\alpha + x(\alpha, 0)) \qquad \text{или} \qquad x(\alpha, 0) = \alpha\left(2\frac{h_0}{h} - 1\right),$$

где $x(\alpha, 0)$ – текущая абсцисса точки с указанными в скобках начальными координатами Лагранжа.

Аналогичным образом, для примыкающего к началу координат объёму с исходной высотой β и шириной α условие постоянства объёма определяет равенство:

$$\alpha\beta = \frac{1}{2} y(0,\beta)[x(\alpha,\beta) + x(\alpha,0)], \tag{18}$$

где $y(0,\beta)$ и $x(\alpha,\beta)$ – текущие (при высоте h) координаты точки с указанными в скобках начальными значениями (переменными Лагранжа). Отсюда:

$$x(\alpha,\beta) = 2\frac{\alpha\beta}{y(0,\beta)} - x(\alpha,0).$$

Так как частица с координатами $x(\alpha,\beta)$ и $y(\alpha,\beta)$ должна располагаться на боковой поверхности трапеции, должно выполняться условие:

$$\frac{x(\alpha,\beta)-\alpha}{x(\alpha,0)-\alpha} = \frac{h - y(0,\beta)}{h}.$$

С учетом (18) тогда получаем:

$$\frac{h-y(0,\beta)}{h} = 1 - \frac{2\alpha\beta}{h[x(\alpha,\beta)+x(\alpha,0)]} = \frac{x(\alpha,\beta)-\alpha}{x(\alpha,0)-\alpha}.$$

или

$$\frac{2\alpha\beta}{h[x(\alpha,\beta)+x(\alpha,0)]} = \frac{x(\alpha,0)-x(\alpha,\beta)}{x(\alpha,0)-\alpha}, \tag{19}$$

откуда следует:

$$2\alpha\beta[x(\alpha,0)-\alpha] = h[x^2(\alpha,0) - x^2(\alpha,\beta)]$$

и окончательно уравнение для координаты x принимает вид:

$$x^2(\alpha,\beta) = \alpha^2\left[\left(2\frac{h_0}{h}-1\right)^2 - 4\frac{\beta}{h}\left(\frac{h_0}{h}-1\right)\right]. \tag{20}$$

Это уравнение удовлетворяет граничному ($x=0$ при $\alpha=0$) и начальному условию $x=\alpha$ в исходном состоянии при $h=h_0$

$$x^2(\alpha,\beta) = x^2(\alpha,0) - 2(\alpha\beta/h_0)[x(\alpha,0)-\alpha] = 4\alpha^2 - 4\alpha^2 + \alpha^2 - 0 = \alpha^2.$$

Подставляя (19) в уравнение (18), получим:

$$y(0,\beta) = \frac{2\alpha\beta}{x(\alpha,0) + \left[x^2(\alpha,0) - \frac{2\alpha\beta}{h}(x(\alpha,0)-\alpha)\right]^{1/2}}.$$

Эта зависимость удовлетворяет условию постоянства объёма, граничному условию $y=0$ при $\beta=0$ и начальному условию $y=\beta$ при $\beta=h_0$.

Так как выше было предположено, что горизонтальные плоскости заготовки $\beta = const$ остаются горизонтальными, уравнение следует распространить на все возможные значения координат α:

$$y(\alpha,\beta) = \frac{2\beta}{\tilde{x}(\alpha,0) + \left[\tilde{x}^2(\alpha,0) - \frac{2\beta}{h}(\tilde{x}(\alpha,0)-1)\right]^{1/2}},$$

которое удовлетворяет граничному условию $y(\alpha, h_0) = h$ при $\beta = h_0$. Для проверки выполнения локального условия постоянства объёма следует воспользоваться соотношением $\partial x / \partial \alpha \cdot \partial y / \partial \beta = 1$, так как $\partial y / \partial \alpha = 0$, или, с учётом соотношений (11), (14) и (20):

$$x_\alpha(\alpha,\beta) = \left[\left(2\frac{h_0}{h} - 1\right)^2 - 4\frac{\beta}{h}\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)\right]^{1/2}, \quad y_\beta(\alpha,\beta) = \frac{2\alpha}{x(\alpha,0) + \left[x^2(\alpha,0) - \frac{2\beta}{h}(x(\alpha,0) - 1)\right]^{1/2}}.$$

Любой из рассмотренных вариантов может быть использован для определения деформированного, а затем напряженного состояния, критерия Одквиста [10, 17], энергетического состояния в каждой частице заготовки по общепринятой теории с последовательным расчетом компонент скорости (ниже для простоты формулы приведены для однородного деформированного состояния),

$$v_x = \alpha h_0 v_0 / h^2 = x v_0 / h, \qquad y = -\beta v_0 / h_0 = -y v_0 / h,$$

скоростей деформации,

$$s_x = v_0 / h \qquad s_y = -v_0 / h,$$

интенсивности касательных напряжений,

$$s_e = 2v_0 / h,$$

удельной мощности деформации w и удельных усилий q

$$w = \tau_s s_e = 2\tau_s v_0 / h, \qquad q = 2\tau_s.$$

Существенно снизить трудоемкость определения конечного результата – энергетического состояния частиц – можно за счет перехода к энергетической модели механики [12]. В частности, уравнение для удельной мощности деформации:

$$w = \tau_{x\alpha} x_{t\alpha} + \tau_{x\beta} x_{t\beta} + \tau_{y\alpha} y_{t\alpha} + \tau_{y\beta} y_{t\beta},$$

если принять зависимость между напряжениями и деформациями Лагранжа в виде [18] $\tau_{ip} = \varphi x_{i,p}$, преобразуется к виду:

$$w = \varphi(x_\alpha x_{t\alpha} + x_\beta x_{t\beta} + y_\alpha y_{t\alpha} + y_\beta y_{t\beta}) = 0{,}5\varphi(\Gamma_e^2)_t.$$

В правую часть входит квадратичный инвариант тензора деформации [18],

$$\Gamma_e^2 = x_\alpha^2 + x_\beta^2 + y_\alpha^2 + y_\beta^2,$$

трудоемкость расчета которого существенно ниже по сравнению с инвариантами тензора скорости деформации. Такой переход может представлять интерес для возможного дальнейшего развития теории упрочнения и разрушения за счет исчерпания пластических свойств.

Во всех пяти рассмотренных вариантах уравнения движения частиц осаживаемой полосы вдоль координаты x отличаются по виду, но, как показывают расчеты, численные результаты для текущих координат практически не отличаются при малом трении. При увеличении трения и степени осадки разница возрастает, так как гипотеза о горизонтальности сечений β = *const* на протяжении всего процесс не отражает реальный характер течения с образованием жестких зон в окрестности вертикальной оси симметрии. Для повышения точности определения локальных характеристик напряженного и деформированного состояний целесообразно использование общих решений с нелинейными комплексно сопряженными функциями для учета неоднородности полей перемещений.

ВЫВОДЫ

Рассмотрены несколько вариантов определения уравнений движения в форме Лагранжа, в том числе с применением общей методики решения уравнений Лапласа. Отмечена необходимость повышения точности формулировки граничных условий, в том числе за счет экспериментальных данных. Использование дополнительных граничных условий по координатам специально маркированных частиц на свободной поверхности заготовки позволяет повысить точность описания уравнений движения, определения локальных характеристик деформированного и напряженного состояний. Эти результаты позволяют разработать новые методики изучения свойств материалов в области необратимых деформаций.

Обоснованы два варианта уравнений движения для осадки полосы с отсутствием перемещений частиц заготовки относительно инструмента, удовлетворяющие начальным и граничным условиям, а также условиям постоянства объема для любой прямоугольной части исходной заготовки, прилегающей к осям симметрии.

Предложено формулировать условия трения при осадке по смещению или фактическим координатам крайних точек заготовки на поверхности контакта с инструментом. Используя известное решение для уравнений движения в форме Лагранжа для осадки полосы при отсутствии трения на контактных поверхностях деформирующих плит, а также принцип суперпозиции для уравнений движения в форме Лагранжа, рассмотрены три варианта описания процесса осадки полосы с произвольным трением, в том числе с применением кинематического коэффициента трения, который учитывает перемещения на контактной поверхности и удобен при формировании граничных условий на поверхности заготовки.

Показано, что уравнения движения в форме Лагранжа могут быть записаны по аналогии с известной методикой построения кинематически возможных полей скоростей с заменой граничных условий для скоростей на вид поверхностей, ограничивающих очаг деформации. Отмечено, что выбор различных вариантов вложенных и наложенных движений при использовании принципа суперпозиции может повлиять на вид математических соотношений для результирующих движений, но это практически не отражается на численных значениях всех рассчитываемых локальных и интегральных характеристик движения.

Отмечено, что гипотеза о горизонтальности сечений $\beta = const$ при наличии трения не отражает реальный характер течения с образованием жестких зон в окрестности вертикальной оси симметрии. Для повышения точности определения локальных характеристик напряженного и деформированного состояний целесообразно использование в дополнение или вместо метода координатных сеток общих решений с нелинейными комплексно сопряженными функциями для учета неоднородности полей перемещений и экспериментально обоснованных граничных условий по смещениям частиц на свободной поверхности заготовки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением : учебник для вузов / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М. : Машиностроение, 1977. – 423 с.*
2. *Теория ковки и штамповки / Под ред. Е. П. Унксова. – М. : Машиностроение, 1992. – 720 с.*
3. *Унксов Е. П. Инженерная теория пластичности / Е. П. Унксов. – М. : Машгиз, 1957. – 327 с.*
4. *Джонсон У. Теория пластичности для инженеров / У. Джонсон, П. Меллор.– М. : Машиностроение, 1979. – 568 с.*
5. *Томленов А. Д. Механика процессов обработки металлов давлением / А. Д. Томленов. – М. : Машгиз, 1963. – 236 с.*
6. *Джонсон В. Механика процессов выдавливания металла / В. Джонсон, Х. Кудо. – М. : Металлургия, 1965. – 174 с*
7. *Томсен Э. Механика пластических деформаций при обработке металлов / Э. Томсен, Ч. Янг, Ш. Кобаяши. – М. : Машиностроение, 1968. – 504 с.*
8. *Алюшин Ю. А. Теория обработки металлов давлением / Ю. А. Алюшин. – Ростов-на-Дону : РИСХМ, 1977. – 88 с.*
9. *Рыбин Ю. И. Математическое моделирование и проектирование технологических процессов обработки металлов давлением / Ю. И. Рыбин, А. И. Рудской, А. М. Золотов. – Изд-во СПбГПУ, 2004. – 287 с.*

10. *Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением : учебник для вузов. / В. Л. Колмогоров. – Екатеринбург : Изд-во Уральского государственного технического университета – УПИ, 2001. – 688 с*

11. *Алюшин Ю. А. Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа // Проблемы машиностроения и надёжности машин. РАН. – 2001. – № 3. – С. 13–19.*

12. *Алюшин Ю. А. Энергетические основы механики / Ю. А. Алюшин // Lambert Academic Publishing, 2016. – 281 с.*

13. *Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М. : Мир, 1964. – 830 с*

14. *Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / М. М. Смирнов. – М. :Наука, 1964. – 206 с*

15. *Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1986. – 720 с.*

16. *Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 576 с.*

17. *Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с*

18. *Алюшин Ю. А. Механика твердого тела в переменных Лагранжа : учеб. пособие для вузов / Ю. А. Алюшин. – М. : Машиностроение, 2012. – 192 с.*

REFERENCES

1. *Storozhev M. V. Teorija obrabotki metallov davleniem : uchebnik dlja vuzov / M. V. Storozhev, E. A. Popov. – M. : Mashinostroenie, 1977. – 423 s.*
2. *Teorija kovki i shtampovki / Pod red. E. P. Unksova. – M. : Mashinostroenie, 1992. – 720 s.*
3. *Unksov E. P. Inzhenernaja teorija plastichnosti / E. P. Unksov. – M. : Mashgiz, 1957. – 327 s.*
4. *Dzhonson U. Teorija plastichnosti dlja inzhenerov / U. Dzhonson, P. Mellor.– M. : Mashinostroenie, 1979. – 568 s.*
5. *Tomlenov A. D. Mehanika processov obrabotki metallov davleniem / A. D. Tomlenov. – M. : Mashgiz, 1963. – 236 s.*
6. *Dzhonson V. Mehanika processov vydavlivanija metalla / V. Dzhonson, H. Kudo. – M. : Metallurgija, 1965. – 174 s*
7. *Tomsen Je. Mehanika plasticheskih deformacij pri obrabotke metallov / Je. Tomsen, Ch. Jang, Sh. Kobajashi. – M. : Mashinostroenie, 1968. – 504 s.*
8. *Aljushin Ju. A. Teorija obrabotki metallov davleniem / Ju. A. Aljushin. – Rostov-na-Donu : RISHM, 1977. – 88 s.*
9. *Rybin Ju. I. Matematicheskoe modelirovanie i proektirovanie tehnologicheskih processov obra-botki metallov davleniem / Ju. I. Rybin, A. I. Rudskoj, A. M. Zolotov. – Izd-vo SPbGPU, 2004. – 287 s.*
10. *Kolmogorov V. L. Mehanika obrabotki metallov davleniem : uchebnik dlja vuzov. / V. L. Kolmogorov. – Ekaterinburg : Izd-vo Ural'skogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta – UPI, 2001. – 688 c*
11. *Aljushin Ju. A. Princip superpozicii dvizhenij v prostranstve peremennyh Lagranzha // Problemy mashinostroenija i nadjozhnosti mashin. RAN. – 2001. – № 3. – S. 13–19.*
12. *Aljushin Ju. A. Jenergeticheskie osnovy mehaniki / Ju. A. Aljushin // Lambert Academic Publishing, 2016. – 281 s.*
13. *Kurant R. Uravnenija s chastnymi proizvodnymi / R. Kurant. – M. : Mir, 1964. – 830 s*
14. *Smirnov M. M. Differencial'nye uravnenija v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka / M. M. Smirnov. – M. :Nauka, 1964. – 206 s*
15. *Korn G. Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov / G. Korn, T. Korn. – M. : Nauka, 1986. – 720 s.*
16. *Kamke Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam / Je. Kamke. – M. : Nauka, 1971. – 576 s.*
17. *Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti / L. M. Kachanov. – M. : Nauka, 1969. – 420 s*
18. *Aljushin Ju. A. Mehanika tverdogo tela v peremennyh Lagranzha : ucheb. posobie dlja vuzov / Ju. A. Aljushin. – M. : Mashinostroenie, 2012. – 192 s.*

Алюшин Ю. А. – д-р техн. наук, проф. НИТУ «МИСиС».

НИТУ «МИСиС» – Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Россия.

E-mail: alyushin7@gmail.com

Статья поступила в редакцию 23.02.2018 г.