Міністерство освіти і науки України

Донбаська державна машинобудівна академія

Автори: В. О. Паламарчук,

А. І. Степанов

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник

До друку прим.
Перший проректор
________А. М. Фесенко

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № 11 від 28.05.2009

Краматорськ 2009

В. О. Паламарчук, А. І. Степанов

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Міністерство освіти і науки України

Донбаська державна машинобудівна академія

В. О. Паламарчук, А. І. Степанов

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № 11 від 28.05.2009

Краматорськ 2009

УДК 517.1
ББК 22.161
П 14

Рецензенти:

Скафа О. І., доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики і методики викладання математики, Донецький національний університет;

Божко В. О., кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу, Слов'янський державний педагогічний університет.

Паламарчук, В. О.

П14 Вступ до математичного аналізу : навчальний посібник / В. О. Паламарчук, А. І. Степанов. – Краматорськ : ДДМА, 2009. – 56 с.

ISBN XXXXX.

Посібник містить короткі теоретичні відомості, приклади розв’язання задач, завдання для самостійної роботи з відповідями, методичні рекомендації та варіанти контрольних і тестових завдань для студентів денного та заочного відділень, а також список необхідної літератури

УДК 517.1
ББК 22.161

ISBN XXXXX

ЗМІСТ

ВСТУП

Як відомо, болонська система, до якої у останні роки активно приєднується українська вища освіта, має за основу кредитно-модульну організацію навчального процесу. Така організація приводить до запровадження нових форм і методів поточного і підсумкового контролю, а це, у свою чергу, вимагає значного посилення ролі самостійної роботи студента.

У курсі вищої математики для технічних і економічних спеціальностей є декілька тем, які, по перше, входять складовою частиною до різних модулів, а по друге, є базою для розуміння багатьох ключових понять дисципліни у цілому. До таких тем можна віднести тему «Вступ до математичного аналізу», що містить у собі поняття границі числової послідовності, змінної величини і функції, неперервності функції у точці та на інтервалі. Розуміння основних положень цієї теми дає студенту змогу швидше і глибше засвоїти такі теми, як диференціальне та інтегральне числення, ряди.

Посібник складається з трьох частин, кожна з яких має кілька розділів, та індивідуальних домашніх завдань. Деякі необхідні відомості наведені у додатках.

Перша та друга частини присвячені теоретичним та практичним питанням з обчислення границь та дослідження неперервності функцій, а також містять завдання для самостійної роботи

Третя частина складається з прикладної задачі та зразків тестових завдань.

Автори посібника поставили перед собою такі задачі:

- не замінюючи курсу лекцій або підручника, познайомити студента з основними теоретичними положеннями, визначеннями і теоремами (без доведення);
- детально розібрати велику кількість типових прикладів ;
- надати студенту можливість самостійно навчитися розв'язувати аналогічні задачі, контролюючи правильність відповідей;
- окреслити коло задач, які можуть бути запропоновані у різних тестах як поточного, так і агрегатного контролю;
- запропонувати набір індивідуальних домашніх завдань, який викладачі можуть використовувати у навчальному процесі студентів як денного, так і заочного відділень. З цього набору викладач може підібрати необхідний об'єм завдань, виходячи з вимог робочого плану дисципліни.

Кількість завдань, склад і зміст контрольної роботи, яку можуть виконувати студенти заочної форми навчання, визначаються рішенням кафедри вищої математики.

1 ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

1.1 Границя числової послідовності

Назвемо послідовністю множину чисел, пронумерованих натуральними числами, розташованими у порядку зростання. Іншими словами, якщо кожному натуральному числу n за певним правилом ставиться у відповідність число a_n, то множину чисел $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ називають числовою послідовністю. Або, коротко, послідовністю.

Послідовність позначається $\{a_n\}$. Послідовність вважається заданою, якщо відома формула, за якою знаходять загальний член a_n.

Наприклад, $a_n = \dfrac{n}{n+2}$,

тобто $a_1 = \dfrac{1}{3}$; $a_2 = \dfrac{2}{4}$; $a_3 = \dfrac{3}{5}$; ...; $a_n = \dfrac{n}{n+2}$; ... .

Послідовність є функцією цілочислового аргументу.

Визначення 1.1. Послідовність називається обмеженою зверху, якщо існує таке число $M > 0$, що $|a_n| \le M$ для усіх $n \in N$. (Запис $n \in N$ означає, що *n* належить множині натуральних чисел).

Визначення 1.2. Послідовність називається обмеженою знизу, якщо існує таке M, що $a_n \ge M$, для усіх $n \in N$.

Визначення 1.3. Число A називається границею числової послідовності $\{a_n\}$, якщо для довільного наперед заданого числа $\varepsilon > 0$, яке може бути яким завгодно малим, існує такий номер $N = N(\varepsilon)$ (залежний від обраного ε), що для усіх значень $n \ge N$ буде виконуватися нерівність: $|a_n - A| < \varepsilon$.

Запис $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ означає: границя послідовності $\{a_n\}$ дорівнює *A* коли *n* прямує до нескінченності.

Якщо послідовність має скінченну границю, то вона називається збіжною. В усіх інших випадках вона називається розбіжною.

Властивості границі числової послідовності:

1 Якщо послідовність має границю, то ця границя є єдиною.

2 Послідовність, що має границю, є обмеженою.

3 Теорема існування границі монотонної обмеженої послідовності (теорема Вейєрштрасса): якщо послідовність $\{a_n\}$ неспадна і обмежена зверху, $a_n \le M$, то послідовність має границю. Якщо послідовність $\{a_n\}$ не зростає і обмежена знизу, то вона має границю.

4 Нехай послідовність $\{x_n\}$ має границю, яка дорівнює *a*, послідовність $\{y_n\}$ має границю, яка дорівнює *b*, тоді справедливі такі рівності:

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n = a \pm b.$$

$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = a \cdot b.$$

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim y_n}{\lim x_n} = \frac{a}{b},\ b \neq 0$$

$$\lim x_n^{y_n} = \lim x_n^{\lim y_n} = a^b$$

5 Якщо $\lim x_n \leq \lim y_n$, то $a \leq b$.

6 Якщо $x_n \leq z_n \leq y_n$ і $\lim x_n = a;\ \lim y_n = a$, то $\lim z_n = a$;

Визначення 1.4. Послідовність $\{a_n\}$ називається нескінченно малою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Приклад 1.1. Написати перші чотири члени послідовності $\left\{a_n = \frac{1}{1+n^2}\right\}$.

Розв'язання

при n = 1 $a_1 = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$; при n = 2 $a_2 = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$;

при n = 3 $a_1 = \frac{1}{1+3^2} = \frac{1}{10}$; при n = 4 $a_2 = \frac{1}{1+4^2} = \frac{1}{17}$.

Тобто перші чотири члени послідовності $\{a_n\}$:

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, ...\right\}.$$

Приклад 1.2. Написати формулу загального члена послідовності : $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, ...\right\}$.

Розв'язання

Проаналізуємо чисельники. Ці числа є непарними, які можна записати у вигляді (2n – 1). Аналогічно знаменники – парні числа, тому вони будуть записані у вигляді 2n, тобто маємо послідовність

$$\left\{a_n = \frac{2n-1}{2n}\right\}.$$

Приклад 1.3. Показати, що при $n \to \infty$ послідовність $\left\{\frac{7}{3}, \frac{10}{5}, \ldots \frac{3n+4}{2n+1}, \ldots\right\}$ має границю $\frac{3}{2}$.

Розв’язання

Скористуємось визначенням 1.3.

Побудуємо $a_n - \frac{3}{2} = \frac{3n+4}{2n+1} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2(2n+1)}$. Визначимо, при якому значенні n виконується нерівність $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$. Розв’язуючи цю нерівність, отримаємо $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Наприклад при ε = 0,1 нерівність $\left|a_n - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ виконується при n > 12.

До поняття числової послідовності ми ще повернемось при вивченні теми «Ряди». Методи пошуку границь числових послідовностей цілком співпадають з методами пошуку границь неперервних змінних, що будуть розглянуті в наступних розділах.

1.2 Границя змінної величини

Якщо змінна величина x_n пробігає значення послідовності $\{x_n\}$, то вона є дискретною змінною. І границю такої змінної знаходять за визначенням 1.3.

Якщо змінна величина x набуває усіх числових значень деякого скінченого проміжку X, то вона є неперервною змінною.

Визначення 1.5. Число x_0 називають границею змінної x, якщо для довільного числа ε > 0 існує таке значення x’, починаючи з якого для усіх наступних значень x виконується нерівність $|x - x_0| < \varepsilon$, і пишуть

$$\lim x = x_0, \text{ або } x \to x_0.$$

Визначення 1.6. Якщо для довільного числа M>0 існує таке значення x’, починаючи з якого усі наступні значення x задовольняють нерівність $|x| > M$, то кажуть, що змінна x прямує до нескінченності і пишуть

$$\lim x = \infty, \text{ або } x \to \infty.$$

Таку змінну називають нескінченно великою змінною.

Зауваження. З виразом ∞ не можна поводитись, як з числом, це – лише символ, який характеризує певну змінну величину.

1.3 Границя функції в точці

Визначення 1.7. Число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon)$, що при $0 < |x - x_0| < \delta$, буде виконуватись нерівність: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записується границя функції $f(x)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Приклад 1.4. Доведемо, що $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 1) = 7$. Дійсно, нехай задане довільне $\varepsilon > 0$; для того, щоб виконувалась нерівність $|(3x + 1) - 7| < \varepsilon$, необхідне виконання таких нерівностей:

$$|3x - 6| < \varepsilon. \; |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{3} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Порівнюючи вираз $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ з виразом $|x - x_0| < \delta$, маємо, що $x_0 = 2; \delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Таким чином, при кожному ε для усіх значень *x*, що задовольняють нерівності $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$, значення функції $3x + 1$ буде відрізнятися від числа 7 менше ніж на ε. А це і означає, що 7 є границею функції при $x \to 2$.

З виразу $|x - x_0| < \delta$ легко отримати: $-\delta < x - x_0 < \delta$; звідки $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Цей інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ називають дельта-околом точки x_0.

Ці поняття можна проілюструвати (рис. 1.1)

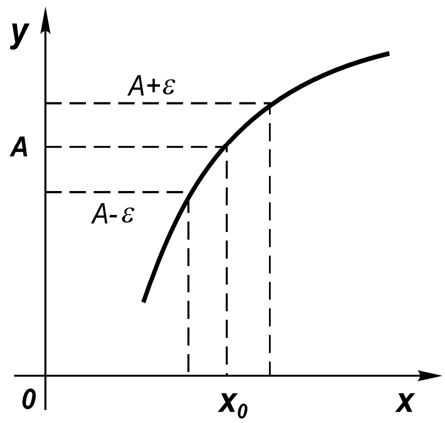

Рисунок 1.1 – Поняття околу точки.

Зауваження. Функція необов'язково має границю у точці.

Приклад 1.5. Візьмемо точку перетину функції $y=\sin\frac{1}{x}$ з віссю Ох. (рис. 1.2).

$$\sin\frac{1}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x}=\pi n;\ x=\frac{1}{\pi n},$$

де $n=0, 1, 2, \ldots$.

Який би ми не взяли окіл навколо точки О, функція приймає всі значення від –1 до 1, і «загнати» значення функції в ε - окіл будь-якої точки при малому ε неможливо, тому функція $f(x)$ не має границі в точці О.

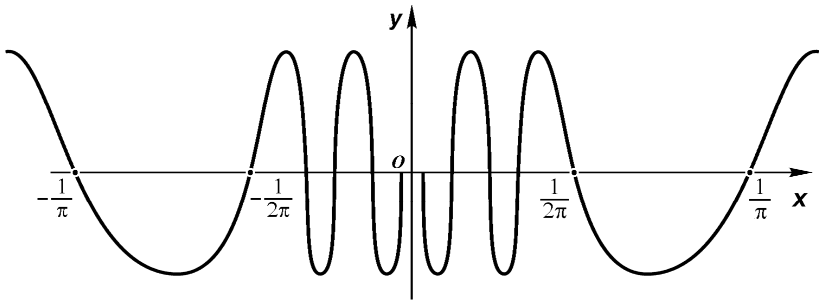

Рисунок 1.2 – Графік функції $y=\sin\frac{1}{x}$

Визначення 1.8. Число A_1 назвемо границею функції $f(x)$ в точці x_0 справа (правосторонньою границею), якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що при всіх *x*, які задовольняють нерівності $x_0<x<x_0+\delta$, виконується нерівність: $|f(x)-A_1|<\varepsilon$.

Позначається правостороння границя так: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_1$;

можна записати: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_1$, якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-A_1|<\varepsilon.$$

Визначення 1.9. Число A_2 називається границею функції $f(x)$ в точці x_0 зліва (лівосторонньою границею), якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що при всіх *x*, які задовольняють нерівності $x_0-\delta<x<x_0$, виконується нерівність: $|f(x)-A_2|<\varepsilon$.

Лівостороння границя позначається так: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_2$;

можна записати: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$.

Скорочено $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_2$, якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-A_2|<\varepsilon.$$

Властивості односторонніх границь

Якщо існує границя функції в точці, то існують обидві односторонні границі.

Але, якщо існують односторонні границі, це не означає, що існує границя функції в точці.

Для того щоб існувала границя функції в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб існували обидві односторонні границі і щоб ці границі були рівні між собою: $f(x_0+0)=f(x_0-0)$.

Визначення 1.10. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x\to\infty$, якщо для будь-якого додатного ε існує $N>0$ таке, що при усіх $|x|>N$, виконується нерівність: $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Позначається: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

Наприклад, візьмемо функцію $y=\dfrac{1}{x^2}$ (рис. 1.3).

Якщо $|x|>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, то $\left|\dfrac{1}{x^2}-0\right|<\varepsilon$.

$N=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

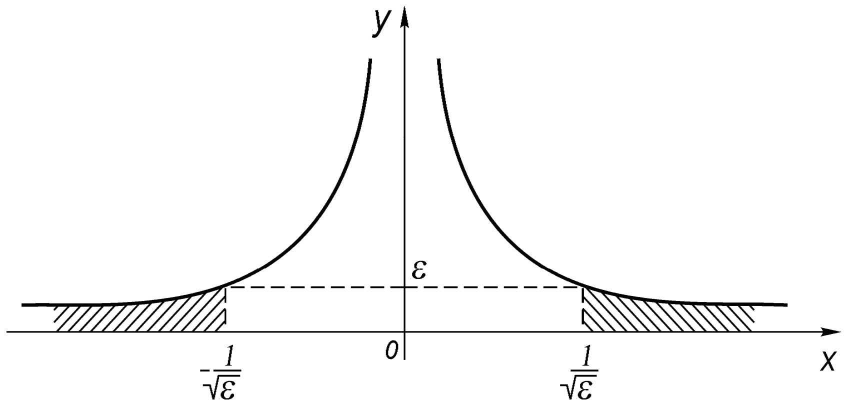

Рисунок 1.3 – Окіл нескінченно великої точки.

Множина x, яка задовольняє нерівності $|x|>N$, називається околом нескінченно великої точки: $|x|>N$, $U(\infty)$ (рис. 1.3).

Визначення 1.11. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x\to a$, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує окіл точки *a* такий, що при всіх *x*, які належать околу, ($x\neq a$), виконується нерівність: $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Властивості границь функції є такими ж, як і властивості границь числової послідовності:

1 Якщо функція має границю, то ця границя є єдиною.

2 Границя сталої дорівнює цій сталій .$\lim\limits_{x\to x_0} C=C$.

3 Нехай при $x \to x_0$ функція f(x) має границю, яка дорівнює *a*, а функція g(x) має границю, яка дорівнює *b*, тоді справедливі такі рівності:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = a \pm b.$$

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = a \cdot b.$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}, \; b \neq 0.$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x \to \infty} g(x)} = a^b.$$

4 Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то: $a \le b$.

5 Якщо $f(x) \le h(x) \le g(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$, то $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$;.

6 Перша стандартна границя $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

7 Друга стандартна границя $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

1.4 Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Поняття еквівалентних функцій. Основні еквівалентності

Визначення 1.12. Функція $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ називається нескінченно малою, якщо її границя дорівнює нулю. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Властивості нескінченно малих функцій:

1 Для того щоб функція $f(x)$ при $x \to x_0$ мала границю A, необхідно і достатньо, щоб $f(x)$ можна було записати у вигляді:

$$f(x) = A + \alpha(x) \; ,$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to x_0$.

2 Сума скінченої кількості нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

3 Добуток нескінченно малої при $x \to x_0$ функції на функцію, обмежену в околі точки x_0, є нескінченно малою функцією.

4 Добуток двох нескінченно малих функцій при $x \to x_0$ є нескінченно малою функцією.

Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими при $x \to x_0$.

5 Нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку, якщо:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0, \quad \text{де } C - \text{const},$$

6 Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то нескінченно мала $\alpha(x)$ називається нескінченно малою більш високого порядку, ніж $\beta(x)$. При цьому нескінченно мала $\beta(x)$ є нескінченно малою більш низького порядку, чим $\alpha(x)$.

7 Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то нескінченно мала $\alpha(x)$ називається нескінченно малою більш низького порядку, ніж $\beta(x)$.

8 Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$, то нескінченно мала $\alpha(x)$ називається нескінченно малою *k-го* порядку в порівнянні з нескінченно малою $\beta(x)$.

9 Дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними при $x \to x_0$, якщо :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Еквівалентність позначається так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

З першої стандартної границі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ маємо: $\sin x \sim x$.

Визначення 1.13. Функція $f(x)$ при $x \to x_0$ називається нескінченно великою, якщо для будь-якого як завгодно великого додатного числа M існує окіл точки x_0 $U(x_0)$ такий, що при усіх $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$ виконується нерівність: $|f(x)| > M$ або скорочено: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Властивості нескінченно великих функцій:

1 Якщо функція є нескінченно великою, то вона є необмеженою. Зворотне твердження невірне, тобто необмежена функція не обов'язково є нескінченно великою.

Наприклад, якщо взяти функцію $y = x\sin x$ (рис. 1.4), вона не є нескінченно великою, але є необмеженою.

2 Дві нескінченно великі функції $A(x)$ і $B(x)$ називаються еквівалентними при $x \to x_0$, якщо :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)} = 1.$$

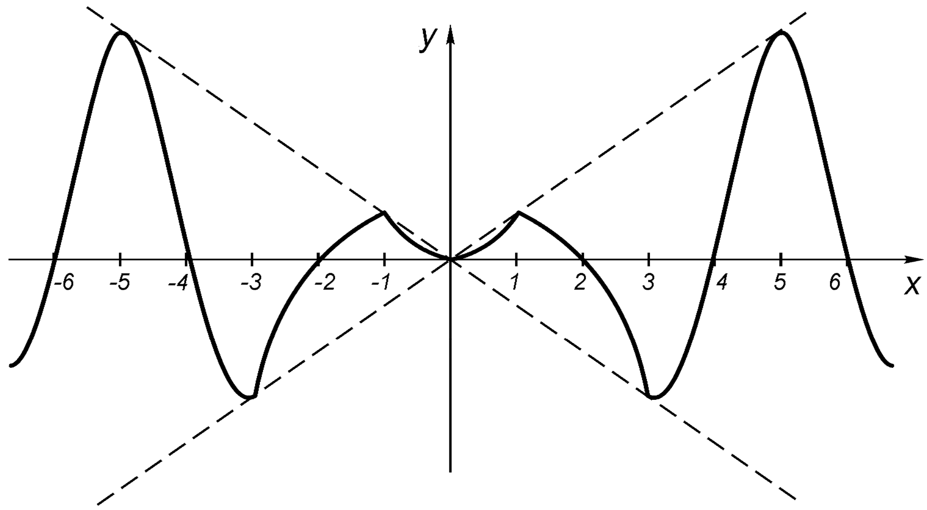

Рисунок 1.4 – Графік функції $y = x\sin x$.

3 Поліном степеня n $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...a_n$ при $x \to \infty$ є еквівалентним своєму члену з найбільшим степенем, або

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...a_n \sim a_0x^n .$$

4 Якщо функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$, тоді функція $\beta(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою при $x \to x_0$ і навпаки: якщо функція $\beta(x)$ нескінченно велика при $x \to x_0$, тоді $\alpha(x) = \dfrac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно .малою при $x \to x_0$.

Наведемо основні еквівалентності, які є наслідками першої та другої стандартних границь:

1 $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$ – власне перша стандартна границя,

та її наслідки:

2 $\mathrm{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

3 $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

4 $\mathrm{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

наслідки другої стандартної границі:

5 $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;

6 $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$;

7 $(1 + \alpha(x))^n - 1 \sim \alpha(x)n$;

8 $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

1.5 Приклади на знаходження границь

За допомогою розглянутих властивостей можна знаходити деякі границі.

Приклад 1.6. Знайти границю

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x}{x^2+3}.$$

Розв'язання

На основі згаданих властивостей і рівності $\lim\limits_{x\to 1}x=1$ маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x}{x^2+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(4x)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2)+3}=\frac{4\lim\limits_{x\to 1}(x)}{(\lim\limits_{x\to 1}(x))^2+3}=\frac{4}{1^2+3}=1.$$

Цей самий результат можна дістати, підставляючи у вираз граничне значення x. Тому сформулюємо **перше правило** обчислення границь:

- підставити у вираз граничне значення x. Якщо отримане скінченне число, границя знайдена.

Зауваження. Не завжди можна під знак границі підставляти граничне значення аргументу. Такі функції, для яких це можна робити, називаються неперервними і будуть розглянуті далі.

Приклад 1.7. Знайти границю

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}.$$

Розв'язання

Підставляючи x = 2 у вираз, дістанемо $\frac{0}{0}$. Таку ситуацію називають невизначеністю, оскільки після знаходження границь чисельника і знаменника обидві дорівнюють нулю, а границя усього виразу може бути як конкретним числом, так і нескінченністю, або взагалі може не існувати. Знайти подібну границю означає розкрити невизначеність. Є інші види невизначеностей: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞} тощо.

Друге правило обчислення границь:

У виразі під знаком границі можна виконувати будь-які спрощення, що не суперечать правилам алгебри. Повернемось до прикладу 1.7.

Приклад 1.8. Знайти границю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}.$$

Розв’язання

Розкладемо знаменник на множники. У чисельнику винесемо за дужки число -1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x+2)}=-\frac{1}{4}.$$

У фігурних дужках після умови задачі будемо надалі вказувати вид невизначеності.

У більш складних випадках пошуку границь для функції виду

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m},$$

якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$ у чисельнику і знаменнику виділяють множник $x-x_0$, поки не позбуваються невизначеності.

Приклад 1.9. Знайти границю

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}.$$

Розв’язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}=\frac{5}{3}.$$

Приклад 1.10. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}.$$

Розв’язання

Домножимо чисельник і знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{4}.$$

Третє правило обчислення границь:

У виразі під знаком границі замість будь-якої функції можна підставляти еквівалентну їй іншу функцію.

Приклад 1.11. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x^2)}{x\,\mathrm{arctg}x}$$

Розв'язання

Скористаємось еквівалентностями 4 і 8:

$$\left|\begin{array}{l}\ln(1+5x^2)\sim 5x^2\\ \mathrm{arctg}x\sim x\end{array}\right|.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x^2)}{x\,\mathrm{arctg}x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{x\cdot x}=5.$$

Ці правила можна використовувати одночасно.

Приклад 1.12. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}.$$

Розв'язання

Використаємо відому тригонометричну формулу $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$ і першу еквівалентність:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{x}\right)^2=2\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

Приклад 1.13. Знайти границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}.$$

Розв'язання

Використаємо відому тригонометричну формулу $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ і першу еквівалентність:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin 3x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x3x}{3x^2}=2.$$

Розглянемо границю функції

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

у випадку, коли $x \to \infty$. У цьому випадку для пошуку границі використовують третю властивість нескінченно великих функцій. У загальному випадку її можна записати у вигляді:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =$$

$$= \begin{cases} \infty, \text{якщо } n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0}, \text{ якщо } n = m. \\ 0, \quad \text{якщо } n < m \end{cases}$$

Приклад 1.14. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{4x^5 + x^2 - x - 1}.$$

Розв’язання

Використаємо наведену узагальнену формулу $n = m = 5$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{4x^5 + x^2 - x - 1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{3}{4}.$$

Приклад 1.15. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{n^3 + 2} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^3 + 2} + n}.$$

Розв’язання

Степінь чисельника $n = 3/5$ менший ніж степінь знаменника $m = 3/4$, тому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{n^3 + 2} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^3 + 2} + n} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 0.$$

Приклад 1.16. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}\right)$$

Розв’язання

Домножимо і поділимо розглянутий вираз на $\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\{\infty-\infty\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\frac{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+x}=2.$$

Тут враховані еквівалентності:

$$\sqrt{x^2+8x+3}\sim\sqrt{x^2}=x; \qquad \sqrt{x^2+4x+3}\sim\sqrt{x^2}=x.$$

У випадках невизначеності 1^∞ використовують другу стандартну границю.

Приклад 1.17. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}.$$

Розв’язання

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{3\cdot\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^3=e^3,$$

Приклад 1.18. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}.$$

Розв’язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}\alpha}\right)^{\beta}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}.$$

На основі перетворень, що застосовані у прикладах 1.16 і 1.17, можна розв’язувати більш складні задачі.

Приклад 1.19. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x-2}.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x-2}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{4x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+1}(4x-2)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}}\right)^{\frac{-4}{2x+1}(4x-2)}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{4(4x-2)}{2x+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{4(4x-2)}{2x+1}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(2-\frac{1}{x})}{1+\frac{1}{2x}}}=e^{-8}.$$

Приклад 1.20. Знайти границю

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Розв'язання

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(1+2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=$$

$$e^{-2\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2}=e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

У загальному вигляді, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1;\quad \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty;$ то

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{\varphi(x)}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to x_0}\left[(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\varphi(x)[f(x)-1]}=$$

$$\left|\begin{array}{l} f(x)-1=\alpha(x) \\ \alpha(x)\to0 \text{ при } x\to x_0 \end{array}\right|=\left[\lim_{\alpha(x)\to0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)[f(x)-1]}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)[f(x)-1]}.$$

1.6 Завдання для самостійної роботи

1 Теоретичні питання необхідно вивчити самостійно з використанням курсу лекцій та підручників.

1) Що називається числовою послідовністю?
2) Що називається границею числової послідовності?
2) Що називається границею змінної величини?
4) Що називається границею функції?
5) У чому полягає геометричний зміст границі функції у точці?
6) Які величини називаються нескінченно малими?
7) Які нескінченно малі величини називаються еквівалентними?
8) Самостійно або з використанням відповідної лекції довести першу стандартну границю.
9) Самостійно або з використанням підручника довести другу стандартну границю.
10) Дати визначення числа e як основи натурального логарифма.

2 Написати перші п'ять членів числової послідовності (див. приклад 1.1):

а) $\left\{a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3}\right\}$; Відповідь: $\left\{2, \dfrac{5}{8}, \dfrac{10}{27}, \dfrac{17}{64}, \dfrac{26}{125}, ...\right\}$;

б) $\left\{a_n = \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}\right\}$; Відповідь: $\left\{\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{40}, \dfrac{1}{88}, \dfrac{1}{143}, \dfrac{1}{238}, ...\right\}$;

в) $\left\{a_n = \dfrac{5+n}{2+n^2}\right\}$; Відповідь: $\left\{2, \dfrac{7}{6}, \dfrac{8}{11}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{10}{27}, ...\right\}$.

3 Написати формулу загального члена послідовності (див. приклад 1.2):

а) $\left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{6}{27}, \dfrac{8}{81}, ...\right\}$; Відповідь: $a_n = \dfrac{2 \cdot n}{3^n}$;

б) $\left\{1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, ...\right\}$; Відповідь: $a_n = \dfrac{1}{n^2}$;

в) $\left\{\dfrac{2}{1}, \dfrac{2\cdot 5}{1\cdot 5}, \dfrac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}, \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}, ...\right\}$;

Відповідь: $a_n = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot ...(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot ...(4n-3)}$.

4 Користуючись визначенням границі, довести:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+2}{5n-3} = \dfrac{2}{5}$ (див. приклад 1.3);

б) $\lim\limits_{x\to 3}(3x+1)=10$ (див. приклад 1.4).

5 Знайти границі (див. приклад 1.6):

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x+2}{5x-5}$; Відповідь: $\dfrac{2}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+4x+1}{x-1}\right)^{3x}$; Відповідь: 1.

6 Знайти границі (див. приклади 1.8, 1.9):

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x}{x^2-25}$; Відповідь: $\dfrac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{3x+9}$; Відповідь: -2;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3x^2}{x^2+2x}$; Відповідь: $\dfrac{1}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$; Відповідь: $-\dfrac{1}{7}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; Відповідь: 0.

7 Знайти границі (див. приклад 1.10):

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{\sin\pi x}$; Відповідь: $-\dfrac{1}{4\pi}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$; Відповідь: -4.

8 Знайти границі (див. приклад 1.11):

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{\sin 4x}$; Відповідь: $\dfrac{3}{4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\mathrm{tg}2x}$; Відповідь: $\dfrac{1}{2}\ln(5)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+5x}{\arcsin\pi x}$; Відповідь: $\dfrac{5}{\pi}$.

9 Знайти границі (див. приклади 1.10–1.13):

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+4x)}{\cos 5x-\cos 3x}$; Відповідь: $-\dfrac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{\operatorname{arctg}2x}$; Відповідь: $\dfrac{1}{12}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{2x\sin x}$; Відповідь: $\dfrac{9}{4}$.

10 Знайти границі (див. приклад 1.14):

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+6}{5+6n-7n^2}$; Відповідь: $-\dfrac{3}{7}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n-2}{6n^3-3n+4}$; Відповідь: 0;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+6}{5n-7}$; Відповідь: ∞.

11 Знайти границі (див. приклади 1.15–1.16):

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{3x^2+2x^4}-\sqrt{12x}}{\sqrt[3]{3x^2+5x-1}}$; Відповідь: ∞;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-x^2}\right)$; Відповідь: 1;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^3+2}+\sqrt[3]{n^5}}{\sqrt[4]{n^3+2}+n}$; Відповідь: ∞;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)$; Відповідь: $(a-c)/2$.

12 Знайти границі (див. приклади 1.17–1.18):

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{2x}$; Відповідь: e^{14};

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}}$ Відповідь: e^{km}.

13 Знайти границі (див. приклад 1.19):

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2+5}\right)^{x^2+3}$; Відповідь: 0;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+4}{3x^2+x+2}\right)^{\frac{2x+1}{x+5}}$; Відповідь: $\dfrac{1}{9}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+4-x^2}{1-x^2}\right)^{x}$; Відповідь: e^{-8};

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$; Відповідь: e^{-1};

д) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+4x+1}{x-1}\right)^{3x}$; Відповідь: 1.

14 Знайти границі (див. приклад 1.20):

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{2}{\cos x}}$; Відповідь: e^2;

б) $\lim\limits_{x\to\pi}(1+3\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$; Відповідь: e^3.

15 Комбіновані задачі на знаходження границь:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{2x+9}}{\mathrm{tg}2x}$; Відповідь: $-\frac{1}{6}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}+x}{x}$; Відповідь: 2;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{1-x^2}$; Відповідь: $\frac{1}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{x(1-\mathrm{tg}x)}{\cos 2x}$; Відповідь: $\frac{\pi}{4}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$; Відповідь: e.

2 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

2.1 Неперервність функції у точці

Визначення 2.1. Функція f(x) називається неперервною в точці $x = x_0$, якщо:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому її околі, тобто існує значення $f(x_0)$;
2) існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$;
3) і ця границя дорівнює $A = f(x_0)$.

Визначення 2.2. Функція f(x) називається неперервною в точці x_0, якщо:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому її околі;
2) існує границя приросту функції, коли $\Delta x \to 0$ (приріст аргументу прямує до нуля): $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$;
3) і ця границя дорівнює нулю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Таким чином, функція неперервна в точці x, якщо: $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Візьмемо значення $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 2.1).

Розглянемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$,

тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ або $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

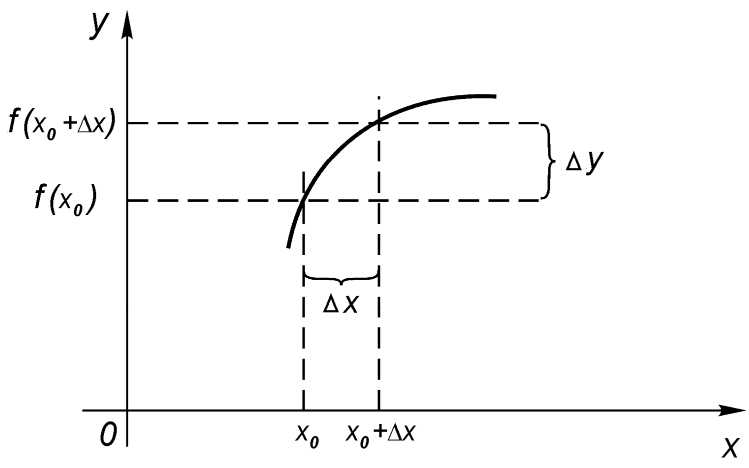

Рисунок 2.1

Розглянемо неперервність основних елементарних функцій:

1) $y = x^a$ – степенева;
2) $y = a^x$ – показникові;
3) $y = \log_a x$ – логарифмічна;
4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg} x$, $y = \text{arctg} x$ – тригонометричні.

Усі вони є функціями неперервними в області визначення.

Приклад 2.1. Показати неперервність функції $y = x^2$.

Розв’язання

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x\Delta x + \Delta x^2) = 0$. Функція $y = x^2$ неперервна на всій числовій вісі.

Приклад 2.2. Показати неперервність функції $y = \sin x$.

Розв’язання

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2};$$

$$\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0$. Функція $y = \sin x$ неперервна при усіх $x \in R$.

Визначення 2.3. Функція $y = f(x)$ називається неперервною зліва у точці x_0, якщо:

1) вона визначена в точці x_0 і у деякому лівому півоколі $(x_0 - \Delta x, x_0)$ і існує границя:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0);$$

2) існує границя приросту функції $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \Delta y$, яка дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \Delta y = 0.$$

Визначення 2.4. Функція $y = f(x)$ називається неперервною справа у точці x_0, якщо:

1) вона визначена в точці x_0 і у деякому правому півоколі $(x_0, x_0 + \Delta x)$ і існує границя:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0);$$

2) існує границя приросту функції $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \Delta y$, яка дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \Delta y = 0.$$

Точки, у яких порушується хоча б одна з умов неперервності функції, називаються точками розриву, тобто це точки, у яких функція:

1) або не визначена;
2) або не існує границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Точки розриву ділять на точки першого і другого роду.

Визначення 2.5. Точка розриву x_0 називається точкою розриву першого роду, якщо в цій точці існують обидві скінченні односторонні границі. Точки розриву першого роду бувають усувного і неусувного розриву.

Розрив неусувний, якщо:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x) \qquad f(x_0-0) \neq f(x_0+0),$$

але в точці x_0 функція або не існує, або не визначена.

Визначення 2.6. Точка x_0 називається точкою розриву другого роду, якщо в цій точці функція $f(x)$ не має принаймні однієї з односторонніх границь, або хоча б одна одностороння границя дорівнює нескінченності.

Приклад 2.3. Знайти точки розриву функції $y = \dfrac{x}{|x|}$, дослідити їх характер.

Розв'язання

При $x = 0$ функція невизначена. Тому $x = 0$ – точка розриву.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x > 0 \\ -x, & \text{якщо } x < 0 \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}.$$

Побудуємо графік функції (рис. 2.2).

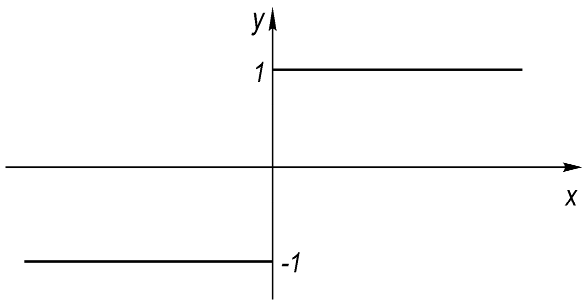

Рисунок 2.2 – Графік функції $y = \dfrac{x}{|x|}$

Легко бачити: $\lim\limits_{x \to 0+0} y(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0-0} y(x) = -1$.

Висновок:

$x = 0$ – точка розриву 1-го роду. Розрив неусувний.

Приклад 2.4. Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{\sin x}{x}$, дослідити їх характер.

Розв’язання

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \text{тобто}\ f(0-0)=1\ \text{зліва;}$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \text{тобто}\ f(0+0)=1\ \text{справа;}$$

$$f(0-0)=f(0+0);$$

$$f(0)=\frac{0}{0}\ \text{ не існує.}$$

У цьому випадку точка $x_0 = 0$ є точкою усувного розриву. Точка $x_0 = 0$ – точка розриву першого роду (див. рис. 2.3).

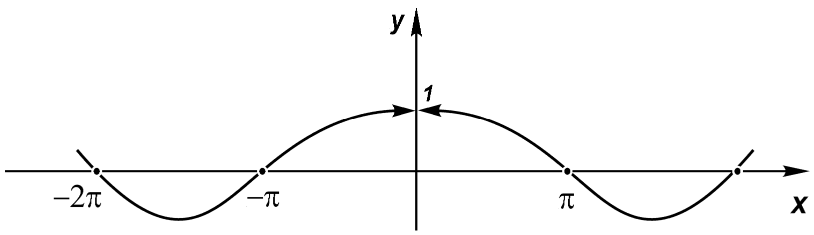

Рисунок 2.3 – Графік функції $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x\neq 0\\ 1 & \text{при } x\neq 0\end{cases},$$

тобто у точці $x_0 = 0$ існують значення функції як граничної зліва і справа.

Приклад 2.5. Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{1}{x}$, дослідити їх характер.

Розв’язання

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Побудуємо графік (рис. 2.4).

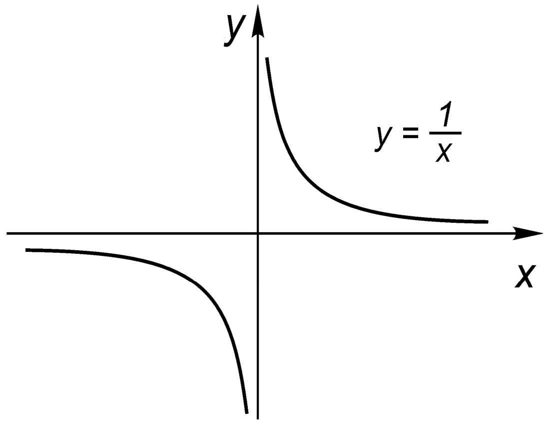

Рисунок 2.4 – Графік функції $y = \frac{1}{x}$.

x = 0 – точка розриву другого роду.

Приклад 2.6. Знайти точки розриву функції, $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$ дослідити їх характер.

Розв'язання

x = 3 – точка розриву

Розглянемо границю зліва:

$$\lim_{x\to 3-0} y(x) = \lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0.$$

Розглянемо границю справа:

$$\lim_{x\to 3+0} y(x) = \lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\infty} = \frac{1}{2^{-\infty}} = \infty.$$

Побудуємо схематичний графік (рис. 2.5).

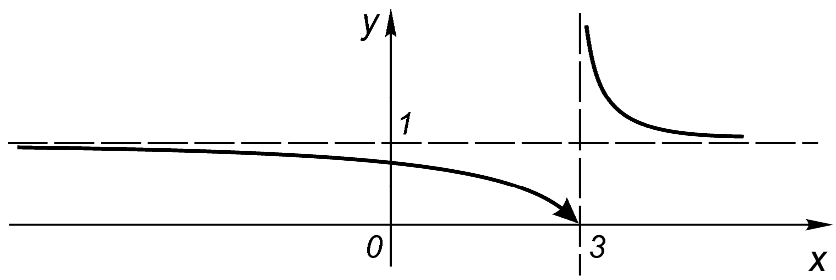

Рисунок 2.5 – Графік функції $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$

Легко бачити, що точка x = 3 – точка розриву другого роду.

Приклад 2.7. Знайти точки розриву функції, дослідити їх характер.

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } x<-2 \\ -x+1 & \text{при } -2\le x\le 1, \\ x^2-1 & \text{при } x>1 \end{cases}$$

Розв’язання

Розглянемо границі зліва і справа точок x = -2, і x = 1:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x)=\lim_{x\to -2-0} x=-2;$$

$$\lim_{x\to -2+0} f(x)=\lim_{x\to -2+0} (-x+1)=3;$$

$$f(-2)=2+1=3;$$

$$f(-2-0)\ne f(-2+0).$$

Висновок: у точці *x* = *-2* існує розрив першого роду.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} (-x+1)=0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} (x^2-1)=0;$$

$$f(1)=0;$$

$$f(1-0)=f(1+0)=f(1=0).$$

Висновок: у точці *x* = 1 функція неперервна.
Побудуємо графік (рис. 2.6).

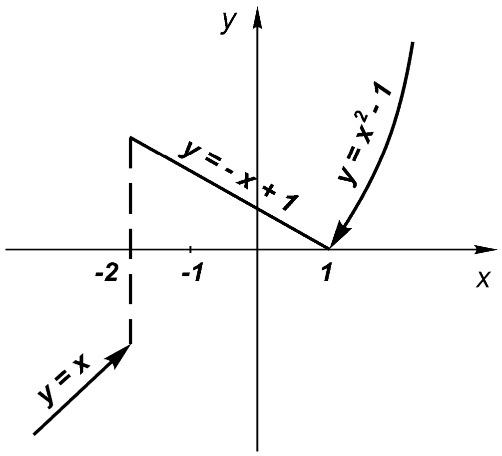

Рисунок 2.6 – Графік функції з прикладу 2.7

Властивості неперервних у точці функцій:

1 Алгебраїчна сума скінченої кількості неперервних функцій є функція неперервна.

2 Добуток скінченої кількості неперервних функцій є функція неперервна.

3 Частка двох неперервних функцій є функція неперервна, за умови, що знаменник є відмінним від нуля у відповідній точці.

4 Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна у відповідній точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ буде неперервною в точці x_0.

5 Будь-яка елементарна функція є неперервною в будь-якій точці області визначення.

2.2 Неперервність функції на інтервалі

Визначення 2.7. Функція $f(x)$ називається неперервною на інтервалі $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Визначення 2.8. Функція називається неперервною на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна в кожній точці цього відрізка і неперервна в точці $x = a$ справа, і в точці $x = b$ зліва.

Визначення 2.9. Якщо для усіх $x \in [a;b]$ виконується нерівність $f(x) < f(x_1)$, де $x_1 \in [a;b]$, то $f(x_1) = M$ називається найбільшим значенням функції на відрізку.

Визначення 2.10. Якщо для усіх $x \in [a;b]$ виконується нерівність $f(x) \geq f(x_1)$, де $x_1 \in [a;b]$, то $f(x_1) = m$ називається найменшим значенням функції на відрізку.

Властивості неперервних на відрізку функцій:

1) якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то принаймні в одній точці цього відрізка вона приймає найбільше значення *M* і принаймні в одній точці – найменше значення m (теорема Вейєрштрасса);

2) нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях цього відрізка приймає значення різних знаків, тоді між точками a і b знайдеться принаймні одна точка $x = c$, у якій функція перетворюється на нуль: $f(c) = 0$, при $a < c < b$ (перша теорема Больцано-Коші);

3) якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $f(a) = A$, $f(b) = B$, і $A \neq B$, то для будь-якого числа C, яке знаходиться між *A* і *B*, знайдеться принаймні одна точка $c \in [a;b]$ така, що $f(c) = C$ (друга теорема Больцано-Коші).

2.3 Асимптоти кривої

Визначення 2.11. Пряма *a* називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо при наближенні точки, яка рухається вздовж кривої, до нескінченності відстань від точки кривої до цієї прямої наближається до нуля (рис. 2.7).

Асимптоти діляться на похилі і вертикальні.

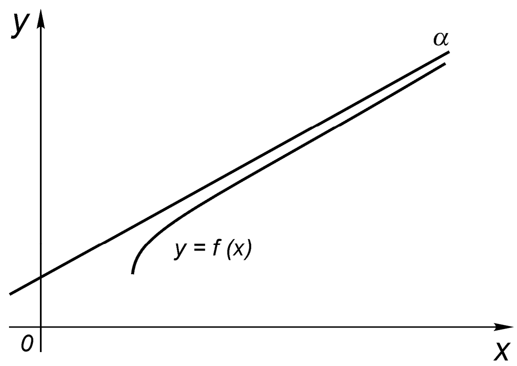

Рисунок 2.7

Визначення 2.12. Пряма $x = a$ називається вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \pm\infty$.

Приклад 2.8. Знайти вертикальну асимптоту функції

$$y = \frac{1}{x}.$$

Розв'язання

Знайдемо $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Висновок: $x = 0$ – вертикальна асимптота(рис. 2.4).

Приклад 2.9. Знайти вертикальну асимптоту функції

$$y = \log_a x$$

Розв'язання

Знайдемо $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$.

Висновок: $x = 0$ – вертикальна асимптота (рис. 2.8)

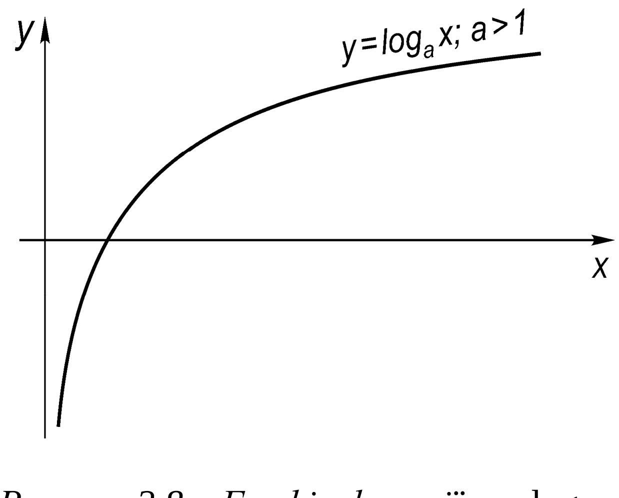

Рисунок 2.8 – Графік функції $y = \log_a x$.

Приклад 2.10. Знайти вертикальні асимптоти функції

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

Розв'язання

Область визначення функції $x^2-1>0 \quad\Rightarrow\quad x^2>1; |x|>1$, або $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ (рис. 2.9).

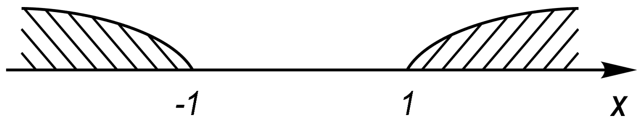

Рисунок 2.9

Знайдемо

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty\ , \qquad \lim_{x\to-1+0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$$

Висновок: вертикальні асимптоти x = -1 і x = 1.

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді:

$$y=kx+b$$

де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ $\qquad$ $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=0$.

Якщо хоча б однієї з границь не існує, то крива похилої асимптоти не має.

Зауваження. Усі викладені вище міркування справедливі і при $x\to-\infty$. Випадки $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$ варто розглядати окремо.

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \qquad b_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=0$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \qquad b_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=0$$

(тобто можливі лівостороння асимптота при $x\to-\infty$, і правостороння асимптота при $x\to+\infty$).

Якщо $k=0$, то

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}f(x),$$

тому $y=b$ – рівняння горизонтальної асимптоти. Оскільки це рівняння є окремим випадком загального рівняння прямої, то можна розрізняти не три, а два види асимптот: вертикальні і невертикальні.

Приклад 2.11. Знайти асимптоти кривої

$$y=\frac{x^3}{x^2-4x+3}$$

1 Знаходимо вертикальні асимптоти.
Знайдемо точки розриву.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad x_1 = 1; \quad x_2 = 3;$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3);$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^3}{(x-1)(x-3)} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^3}{(x-1)(x-3)} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 3+0} \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 3+0} \frac{x^3}{(x-1)(x-3)} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 3-0} \frac{x^3}{(x-1)(x-3)} = +\infty.$$

Маємо дві вертикальні асимптоти $x = 1$ і $x = 3$.
2 Знаходимо похилі асимптоти:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x^2 + 3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(y - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2 - 4x + 3} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 + 4x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3} =$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1;$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 4;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(y - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 4.$$

Маємо похилу асимптоту $y = x + 4$.

Приклад 2.12. Знайти асимптоти кривої

$$y = \frac{1}{1-e^x}.$$

1 $x = 0$ – вертикальна асимптота, тому що

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{1-e^x} = +\infty \;;$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1-e^x} = -\infty \;;$$

2 Похилі асимптоти:

а) $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(1-e^x)x} = 0;$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(y - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-e^2}\right) = 0.$$

Висновок: при $x \to +\infty$ графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$;

б) $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{(1-e^x)x} = 0;$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(y - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1-e^2}\right) = 1.$$

Висновок: при $x \to -\infty$ графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 1$.

Графік функції має дві горизонтальні асимптоти: лівосторонню y = 1 і правобічну y = 0.

2.4 Завдання для самостійної роботи

1 Теоретичні питання необхідно вивчити самостійно з використанням курсу лекцій та підручників.

1) Дати означення неперервності функції у точці.
2) Який розрив називається розривом першого роду?
3) Який розрив називається розривом другого роду?
4) Яка функція називається неперервною на проміжку?
5) Сформулювати властивості функцій, неперервних на відрізку. Самостійно або за допомогою лекцій з’ясувати геометричний зміст цих властивостей.
6) Що називається асимптотою кривої?
7) Як знайти вертикальну асимптоту?
8) Як знайти невертикальну асимптоту?

2 Показати неперервність функцій (приклади 2.1, 2.2):

а) $y = x^3$;

б) $y = \cos x$.

3 Знайти точки розриву функції, дослідити їх характер:

а) $y = \dfrac{|x-3|}{x-3}$ (див. приклад 2.3);

Відповідь: $x = 3$; 1-го роду, неусувний;

б) $y = \dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$ (див. приклад 2.4);

Відповідь: $x = 0$; 1-го роду, усувний;

в) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ (див. приклад 2.5);

Відповідь: $x = 2$; $x = -2$. 2-го роду;

г) $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ (див. приклад 2.6);

Відповідь: $x = 0$; 1-го роду;

д) $y = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0 \le x < 1 \\ 4 - 2x & \text{при } 1 \le x \le 2{,}5 \\ 2x - 7 & \text{при } x > 2{,}5 \end{cases}$ (див. приклад 2.7);

Відповідь: $x = 2{,}5$; 1-го роду.

4 Комбіновані задачі на пошук розривів функцій:

а) $y = \dfrac{x^2 - x^3}{|x-1|}$;

Відповідь: $x = 1$; 1-го роду, неусувний;

б) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$;

Відповідь: $x = 2$; $x = 1$; 1-го роду, усувний;

в) $y = \dfrac{x+1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$;

Відповідь: $x = -2$; $x = -3$; 2-го роду; $x = -1$; 1-го роду, усувний;

г) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x-4}$;

Відповідь: $x = 4$; 1-го роду;

д) $y = \dfrac{2^{1/(x-2)} - 1}{2^{1/(x-2)} + 1}$;

Відповідь: $x = 2$; 1-го роду;

е) $y=\begin{cases}1-x^2 & \text{при } x<0\\ (x-1)^2 & \text{при } 0\le x\le 2;\\ 4-x & \text{при } x>2\end{cases}$

Відповідь: $x=0;$ 1-го роду.

5 Знайти вертикальні асимптоти графіків функцій:

а) $y=\dfrac{1}{(x-4)(x+2)}$ (див. приклади 2.5, 2.8, 2.10);

Відповідь: $x=4;\quad x=-2;$

б) $y=\lg(1-x^2)$ (див. приклад 2.9);

Відповідь: $x=-1;\quad x=1.$

6 Знайти асимптоти графіків функцій:

а) $y=\dfrac{x^2-6x+3}{(x-3)}$ (див. приклад 2.11);

Відповідь: $x=3;\quad y=x-3;$

б) $y=xe^x$ (див. приклад 2.12);

Відповідь: $y=0;$ при $x\to-\infty;$

в) $y=\frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3};$

Відповідь: $x=-3;\quad x=1;\quad y=1.$

7 Знайти асимптоти графіків функцій (комбіновані задачі):

а) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}};$

Відповідь: $x=2;\quad y=x+1;$ при $x\to\infty;\quad y=-x-1;$ при $x\to-\infty.$

б) $y=3\ln\frac{x}{x-3}-1;$

Відповідь: $x=3;\quad x=0;\quad y=0;$

в) $y=(3-x)e^{x-2};$

Відповідь: $y=0;$ при $x\to-\infty;$

г) $y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3};$

Відповідь: $x=-3;\quad y=0;$ при $x\to-\infty.$

3 ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ І ЗРАЗКИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Розділ вищої математики, який розглядається у даному посібнику, а саме «Вступ до математичного аналізу», є складовою частиною курсу вищої математики як для студентів технічних напрямів, так і для майбутніх економістів. Тому можуть бути запропоновані як окремі тести з даного розділу, так і окремі задачі, що входять складовою частиною до агрегатних тестів окремих модулів. Крім того, у кожному розділі вищої математики є задачі, які пов'язані з реаліями інших наук. Наприклад, поняття границі використовується в економіці при вивченні неперервного начислення процентів.

3.1 Неперервне начислення процентів

Нехай початковий вклад у банк склав Q_0 грошових одиниць під $p\%$ річних. Необхідно знайти суму вкладу через t років.

Розмір вкладу кожен рік збільшується у $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ разів, тобто через рік він буде дорівнювати

$$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

через два роки

$$Q_2 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \text{ і так далі.}$$

Очевидно, що через t років розмір вкладу становитиме

$$Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Відомо що схеми начислення процентів у банках різняться. Якщо проценти начисляють n разів на рік, тоді за $1/n$ частину року процент зачислювання складе p/n, розмір вкладу через t років становитиме

$$Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}.$$

Якщо $n = 12$, то це означає, що зачислювання процентів відбувається щомісяця, при $n = 365$ – щодня. Можна уявити, що неперервне зачислювання процентів відбувається при $n \to \infty$.

У цьому випадку величина вкладу становитиме

$$Q_t = \lim_{n\to\infty} Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}.$$

Приклад 3.1. У банк поклали 5000 гривень на 3 роки під 20 % річних. Знайти, яку суму отримає клієнт у кінці терміну, якщо зачислювання відбувається: щороку, щомісяця, неперервно?

Розв'язання

Для щорічного зачислювання величина вкладу становитиме:

$$Q_3 = 5000\left(1+\frac{20}{100}\right)^{3} = 8640 \ (\text{грн}).$$

Для щомісячного зачислювання величина вкладу становитиме:

$$Q_3 = 5000\left(1+\frac{20}{100\cdot 12}\right)^{3\cdot 12} = 9065{,}63 \ (\text{грн}).$$

Неперервне зачислювання процентів дасть такий результат:

$$Q_t = \lim_{n\to\infty} 5000\left(1+\frac{20}{100n}\right)^{n3} = 5000e^{\frac{20\cdot 3}{100}} = 9110{,}594 \quad (\text{грн}).$$

3.2 Тести трьох рівнів з даного розділу

Рівень С

Тест1

Обчислити границі:

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+5}{x^2+2x-3}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

4 Знайти асимптоти і побудувати схематичний графік $y=\dfrac{x}{4x+2}$.

Тест 2
Обчислити границі:

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^2+2x+3}{x^2+x-7}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{2x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3x}$.

4 Знайти асимптоти і побудувати схематичний графік $y=\frac{x}{6x-30}$.

Рівень В

Тест 1
Обчислити границі:

1 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+x-2}{x+1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 3x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{2x}$.

4 Знайти асимптоти і побудувати схематичний графік $y=\frac{x+5}{x+2}$.

Тест 2
Обчислити границі:

1 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x^2-9x+3}{x-1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+2x)}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x}$.

4 Знайти асимптоти і побудувати схематичний графік $y=\frac{x-3}{x+2}$.

Рівень А

Тест 1

Обчислити границі:

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^2-x-1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\ln(1+x)}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{3x-6}$.

4 Знайти асимптоти і побудувати схематичний графік

$$y=\frac{x^2+x^3-5x+15}{2x^2-4x+2}.$$

Тест 2

Обчислити границі:

1 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2+2x+1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+4-x^2}{1-x^2}\right)^{x}$.

4 Знайти асимптоти і побудувати схематичний графік

$$y=\frac{-2x^2-7x+6}{2x^2+7x}.$$

3.3 Завдання, що входять до агрегатних тестів окремих модулів

3 тестів для студентів економічних спеціальностей. Модуль: Аналітична геометрія та границі.

1) Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{x}$.

2) Знайти асимптоти і побудувати схематичний графік $y=\dfrac{x-3}{x+2}$.

3) Знайти границю $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x+1}$.

4) Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\ln(1+2x)}$.

5) Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x+4}{2x^2-7}$.

6) Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin x}$.

З тестів для студентів технічних спеціальностей. Модуль: Математичний аналіз функції однієї змінної.

1) Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\mathrm{tg}3x}$.

2) Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ і схематично побудувати цей графік.

3) Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$.

4)Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

5) Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

6) Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\sin x}$.

7) Знайти границю за допомогою правила Лопіталя $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

8) Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x+1}{x^2+6x}$.

9) Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-4x+2}{x^2+2x-3}$.

10) Дослідити на неперервність функцію $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\ge 1;\\ x+1, x<0.\end{cases}$. Побудувати графік.

4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

Задача 1. Обчислити границі заданих функцій.

1.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-3x+1}{4+2x^2-4x^3}$;

1.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-x^2+4}{7x^4+4x^2+1}$;

1.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x-3}{3x^2-7x+1}$;

1.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2+5}{3x^3-1}$;

1.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+6}{7x^3-5x^2+9}$;

1.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x+7}{3x^5+3x^2-1}$;

1.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{x^4+56x-12}$;

1.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5-3x^3+x}{3x^5+4x^2+1}$;

1.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4-5x+5}{7x^4+2x-9}$;

1.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-9x+5}{6x^2+5x-2}$;

1.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+2x+5}{6x^3-5x-2}$;

1.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+8}{2+x+x^2+8x^3}$;

1.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+6}{3x^2++4x+10}$;

1.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^5-3x^3+2}{2x^5+4}$;

1.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x^2-7x}{2x-1-5x^3}$;

1.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x^3+3x}{1+x-x^2+3x^3}$;

1.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-8x+12}{x^2+x+47}$;

1.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-8}{x^3+10x-24}$;

1.19 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+9x-12}{3x^2-5x+25}$;

1.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x-8}{9x^3+2x-2}$;

1.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x-5}{7x^3+7x^2+4}$;

1.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+4x^2+5x+1}{3x^3-3x+2}$;

1.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-2x+1}$;

1.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2+x-5}{2x^3-3x+21}$;

1.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x+17}{4x^3-4x^2-17}$;

1.26 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-3x^2-x+1}{4x^5-x^2+x^3+3}$.

Задача 2. Обчислити границі заданих функцій:

2.1 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-8x+7}{x^2-4x+3}$;

2.2 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2-4x+2}$;

2.3 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$;

2.4 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$;

2.5 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^3+5x^2-2}{5x^2+12x+4}$;

2.6 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

2.7 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$;

2.8 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{2x^2-x-1}$;

2.9 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-3x-9}$;

2.10 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{2x^2-x-15}$;

2.11 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+x-10}{5x^2+12x+4}$;

2.12 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+2x-8}{x^2-x-6}$;

2.13 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{16x^2-13x-3}{2x^2+3x-5}$;

2.14 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-3x+1}$;

2.15 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$;

2.16 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x+2}{x^2+3x+2}$;

2.17 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

2.18 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-4x+1}{4x^2-2x+1}$;

2.19 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5x^2-24x-5}{x^2-6x+5}$;

2.20 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-9x+10}{x^2-5x+6}$;

2.21 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$;

2.22 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-2x}$;

2.23 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

2.24 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+3x-9}{x^2-2x-15}$;

2.25 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-3}$;

2.26 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{16x^2-13x-3}{2x^2+3x-5}$.

Задача 3. Обчислити границі заданих функцій:

3.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-x^2}\right)$;

3.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+5x}}$;

3.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+11x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$;

3.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$;

3.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; 3.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+11x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$;

3.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$; 3.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)$;

3.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$; 3.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+9}\right)$;

3.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x+5}\right)$; 3.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2+3x-1}\right)$;

3.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$; 3.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$;

3.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2x}}$; 3.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2-8x}\right)$;

3.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+3}}{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+x^2}}$; 3.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$;

3.19 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+9x^3}-\sqrt{4x^2-3x}}{x\sqrt{x+7}}$; 3.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$;

3.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+x}-x}$; 3.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-7x}}$;

3.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-8x^3}}{x+1}$; 3.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^4+2x^3}-x^2}$;

3.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x+1}\right)$; 3.26 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x-2}\right)$.

Задача 4. Обчислити границі заданих функцій:

4.1 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$; 4.2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\mathrm{tg}x}\right)$;

4.3 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$; 4.4 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}\right)$;

4.5 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$; 4.6 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;

4.7 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$; 4.8 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}x\right)$;

4.9 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg}x\right)$;

4.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$;

4.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$;

4.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)$;

4.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x+3}-\frac{x^2-1}{2}\right)$;

4.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-1}-\frac{x^2}{3x+1}\right)$;

4.15 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{\operatorname{tg}2x}\right)$;

4.16 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$;

4.17 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\operatorname{ctg}2x\right)$;

4.18 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)$;

4.19 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\frac{x^2}{x-1}\right)$;

4.20 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos 2x}-\operatorname{tg}2x\right)$;

4.21 $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{8}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}\right)$;

4.22 $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{10}{x^2-25}-\frac{1}{x-5}\right)$

4.23 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$;

4.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x+1}-\frac{x^3}{2x^2-1}\right)$;

4.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{2}-\frac{x^3}{2x+3}\right)$;

4.26 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{3x+1}-\frac{x^3}{3x^2-1}\right)$.

Задача 5. Обчислити границі заданих функцій:

5.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{\cos x-1}$;

5.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;

5.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x-x^2}$;

5.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{x+2x^2}$;

5.5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(3x^2-x)}{4x}$;

5.6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x^2-x)}$;

5.7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{x\sin 3x}$;

5.8 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 2x}{5x}$;

5.9 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{1-\cos 3x}$:

5.10 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$;

5.11 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 8x}{\cos 2x-1}$;

5.12 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}{\sin x}$;

5.13 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$;

5.14 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x(1+\cos 2x)}$;

5.15 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

5.16 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{e^{3x^2}-1}$;

5.17 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{\ln(1-3x)}$;

5.18 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{\sqrt{9+x}-3}$;

5.19 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin 3x)}{tg5x}$;

5.20 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3-\sqrt{2x+9}}$;

5.21 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^{2x}-1}{\sqrt{1-\cos 3x}}$;

5.22 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin 3x\cdot(1-\cos x)}$;

5.23 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x\sin 3x)}{(e^{2x}-1)tgx}$;

5.24 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2x)}{\sin(3x^2-5x)}$;

5.25 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg(3x^2-x)}{4\sin x}$;

5.26 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\cos 5x-1}$.

Задача 6. Обчислити границі заданих функцій:

6.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x-2}$;

6.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{5x}$;

6.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+7}\right)^{2x+1}$;

6.4 $\lim\limits_{x\to -4}(x+5)^{\frac{x+2}{x+4}}$;

6.5 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x+7}{x-1}}$;

6.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x-5}\right)^{5x-4}$;

6.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$;

6.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x}{1+6x}\right)^{3x}$;

6.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+6}\right)^{7x}$;

6.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x+4}\right)^{7x}$;

6.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$;

6.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{9x}$;

6.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-x}{1-x}\right)^{6x-1}$; 6.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{3x}$;

6.15 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{4x-7}{3x-5}\right)^{\frac{2}{x-2}}$; 6.16 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x-2}{x-2}\right)^{\frac{5}{x}}$;

6.17 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x-13}{x-5}\right)^{6x}$; 6.18 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{7}{x-1}}$;

6.19 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)^{\frac{3}{x+1}}$; 6.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{3+x}\right)^{x-6}$;

6.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+9}{x+1}\right)^{2x+3}$; 6.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x}{1+9x}\right)^{5x}$;

6.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{3+x}\right)^{6x+1}$; 6.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{5x}$;

6.25 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x-1}{x-5}\right)^{4x+2}$; 6.26 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4+x}{4-3x}\right)^{\frac{1}{x^2+x}}$.

Задача 7. Дослідити функцію на неперервність, побудувати схематичний графік в околі точок розриву:

7.1 $y=4^{\frac{1}{x-3}}$; 7.2 $y=\frac{1}{1-4^{\frac{1}{x-3}}}$;

7.3 $y=\lg(3x-2)$; 7.4 $y=\frac{1}{1-2^{\frac{1}{x-1}}}$;

7.5 $y=\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}$; 7.6 $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$;

7.7 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-3}}$; 7.8 $y=\frac{1-3^{\frac{1}{x-1}}}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}$;

7.9 $y=\operatorname{arctg}\frac{2}{x-1}$; 7.10 $y=\frac{x+1}{2-2^{\frac{1}{x-1}}}$;

7.11 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$; 7.12 $y=\operatorname{arctg}\frac{x+2}{x^2-x}$;

7.13 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5x+6}}$;

7.14 $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x-1}}-1}{3^{\frac{1}{x-1}}+1}$;

7.15 $y=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{x-3}$;

7.16 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-6}}$;

7.17 $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

7.18 $y=\dfrac{x^2-x^3}{|x-1|}$;

7.19 $y=\lg(x+2)$;

7.20 $y=x+\dfrac{x-1}{|x-1|}$;

7.21 $y=\dfrac{2|x-1|}{x^3-x^2}$;

7.22 $y=\lg(3x+2)$;

7.23 $y=2^{\frac{1}{x-1}}$;

7.24 $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$;

7.25 $y=\dfrac{x-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$;

7.26 $y=\dfrac{2|x+1|}{x^2+x}$.

Задача 8. Знайти асимптоти функцій, побудувати схематичний графік:

8.1 $y=\dfrac{x^3-3x+10}{2x^2+4x+2}$;

8.2 $y=\dfrac{4-x}{2x^2-15x+22}$;

8.3 $y=\dfrac{6x^2-x^3-2x-9}{2x^2-4x+2}$;

8.4 $y=\dfrac{2x^2-15x+22}{4x^2-26x+30}$;

8.5 $y=\dfrac{x^3-13x^2+51x-51}{2x^2-12x+18}$;

8.6 $y=\dfrac{6x^2+39x+33}{4x^2+26x+30}$;

8.7 $y=\dfrac{x^3+x^2-5x+15}{2x^2-4x+2}$;

8.8 $y=\dfrac{30x-4x^2-38}{2x^2-15x+22}$;

8.9 $y=\dfrac{2x^2+12x+12}{2x^2+13x+15}$;

8.10 $y=\dfrac{9-26x+10x^2-x^3}{2x^2-12x+18}$;

8.11 $y=\dfrac{15-27x+9x^2-x^3}{2x^2-12x+18}$;

8.12 $y=\dfrac{4x-x^3-2x^2-4}{2x^2+8x+8}$;

8.13 $y=\dfrac{2x^2-3x-5}{4x^2-2x-12}$;

8.14 $y=\dfrac{6-7x-2x^2}{2x^2+7x}$;

8.15 $y=-\dfrac{2x^2+13x+14}{4x^2+22x+18}$;

8.16 $y=\dfrac{4x^2+18x+2}{2x^2+9x+4}$;

8.17 $y=\dfrac{x^3-6x^2+5x+12}{2x^2-8x+8}$;

8.18 $y=\dfrac{6x^2+15x+3}{4x^2+10x-6}$;

8.19 $y=-\dfrac{x+2}{2x^2+9x+4}$;

8.20 $y=\dfrac{x^3-10x^2+28x-12}{2x^2-8x+8}$;

8.21 $y=\dfrac{2x^2+6x-2}{2x^2+5x-3}$;

8.22 $y=\dfrac{18+2x-4x^2}{2x^2-x-6}$;

8.23 $y=-\dfrac{x^3+5x^2+2}{2x^2+4x+2}$;

8.24 $y=\dfrac{12-x-2x^2}{2x^2+x-6}$;

8.25 $y=\dfrac{x^3-7x^2+4x+8}{2x^2-4x+2}$;

8.26 $y=\dfrac{x^3}{4x^2-16x+16}$.

5 СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Підручники та посібники для вивчення теорії

1 Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища школа, 1993. – 648 с. – ISBN 5-11-004038-9.

2 Пак В. В. Вища математика : підручник / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – К. : Либідь, 1996. – 440 с. - ISBN 5-325-00712-2.

3 Шкіль М. І. Вища математика : підручник. У 3 кн. Кн. 2: Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 352 с. – ISBN 5-325-00495-6.

4 Бугір М. К. Математика для економістів : навчальний посібник. – Тернопіль : підручники і посібники, 1998. – 192 с. – ISBN 966-562-125-4.

Посібники для опанування практичними навичками

1 Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. – М. : Высшая школа, 1966. – 460 с.

2 Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – М. : Высшая школа, 1974. – Ч. 1. – 416 с.

3 Зимина О. В. Высшая математика (Решебник) / О. В. Зимина, А. И. Кириллов, Т. А. Сальникова. – М. : Физико-математическая література, 2001. – 368 с. – ISBN 5-9221-0126-9.

4 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учебное пособие. В 3-х частях / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Мн. : Вышэйшая школа, 1991. – Ч. 2. – 288 с.

ДОДАТОК А

ПОНЯТТЯ ІНТЕРВАЛУ, ПІВІНТЕРВАЛУ, ВІДРІЗКУ

Проміжком або інтервалом називається множина усіх чисел x, що розташовані між даними числами a і b ($a < b$), при цьому самі числа a і b не належать до цієї множини чисел; інтервал позначають так: (a,b) або за допомогою нерівностей: $a < x < b$.

Відрізком або сегментом називається множина усіх чисел x, що розташовані між двома даними числами a і b, причому обидва числа a і b належать до розглянутої сукупності; його позначають так: $[a;b]$ або за допомогою нерівностей: $a \le x \le b$.

Іноді відрізок називається замкненим інтервалом. Якщо одне з чисел a або b, наприклад a, приєднується до інтервалу, а інше – ні, то ми маємо справу з напівзамкненим інтервалом. Він задається нерівностями $a \le x < b$ і позначається $[a;b)$. Тобто a належить, а b не належить до інтервалу. Якщо ж $a < x \le b$, тобто число a не належить, b належить до інтервалу, це позначається так: $(a;b\ ]$.

Розглянуті проміжки є скінченними.

Якщо точка інтервалу необмежено віддаляється від початку числової вісі вліво чи вправо, такі проміжки називають нескінченними.

Приклади нескінченних проміжків;

$(-\infty;a)$, $(-\infty;+\infty)$, $[c;+\infty)$.

Символи $-\infty$ і $+\infty$ в цих проміжках не треба розглядати як числа, це символічне позначення необмеженого віддалення точок числової осі від її початку вліво чи вправо. Арифметичні операції над цими символами неприпустимі.

Околом даної точки x_0 називається довільний інтервал $(a;b)$, що містить цю точку усередині себе, тобто $a < x_0 < b$. Часто розглядається окіл $(a;b)$ точки x_0, для якої x_0 є серединою. Тоді x_0 називається центром околу, величина $(b-a)/2$ називається радіусом околу. Цей окіл називають малим, якщо радіус є досить малим. Як правило, такий окіл називають ε-околом $(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)$ точки x_0 з радіусом ε.

ДОДАТОК Б

ФУНКЦІЇ

Б.1 Поняття функції

Визначення Б.1. Якщо кожному значенню змінної *x*, що належить деякій області, відповідає єдине значення іншої змінної *y*, то *y* є функція від *x* або, у символічному записі: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ і т. п.

Змінна *x* називається незалежною змінною або аргументом. Змінна *y* називається залежною змінною або функцією. Під символом f (або φ) розуміють те правило, за яким кожному *x* відповідає *y*, або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Визначення Б.2. Сукупність значень *x*, для яких визначаються значення функції «*y*» називається областю визначення функції (або областю існування функції).

Визначення Б.3. Сукупність значень *y* називається областю значень функції.

У ширшому розумінні поняття функції вживають як синонім поняття відображення множини значень *x* на множину значень *y*.

У курсі математичного аналізу розглядають функції, для яких область визначення і множина значень складаються з дійсних чисел.

Б.2 Основні елементарні функції

I. Степенева функція: $y = x^{\alpha}$, де α – дійсне число.

II. Показникова функція: $y = a^{x}$, де a – додатне число, яке не дорівнює одиниці.

III. Логарифмічна функція: $y = \log_a x$, де основа логарифма $a > 0$ – додатне число, яке не дорівнює одиниці.

IV. Тригонометричні функції:

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \mathrm{tg} x,$$
$$y = \mathrm{ctg} x,\ y = \sec x,\ y = \mathrm{cosec}\, x,$$

V. Обернені тригонометричні функції:

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \mathrm{arctg} x,$$
$$y = \mathrm{arcctg} x,\ y = \mathrm{arcsec}\, x,\ y = \mathrm{arccosec}\, x,$$

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується лише скінченна кількість арифметичних операцій і суперпозицій, називаються елементарними.

Так функція

$$y = \arcsin\left(2^x\right) + \frac{x-1}{\ln(x+3)}$$

є елементарною.

Парні функції: $y(-x) = y(x)$.

Непарні функції: $y(-x) = -y(-x)$.

Функція $y = f(x)$, визначена на всій числовій прямій, називається періодичною, якщо існує таке число T, що $f(x+T) = f(x)$. Число T називається періодом функції. Тригонометричні функції є періодичними.

Монотонна функція – функція, яка або тільки спадає, або тільки зростає на деякому інтервалі. Якщо функція не є монотонною в усій своїй області визначення, але цю область можна розбити на деяку кількість проміжків, на кожному з яких функція монотонна, то такі проміжки називаються проміжками монотонності функції.

Функції можуть бути обмеженими і необмеженими. Функція $y = x^2$ необмежена. Область її існування: $y \in [0;+\infty)$.

Функція $y = \sin(x)$ обмежена. Область її існування: $y \in [-1;1]$.

Якщо у формулі $y = f(x)$ в правій частині виконуються операції з нецілими показниками степеня, то функція *y* від *x* називається ірраціональною.

Приклади ірраціональних функцій: $y = \dfrac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^2}}$; $y = \sqrt{x}$ і т. п.

Ціла раціональна або функція многочлен (поліном):

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \; .$$

Многочлен першого степеня називається лінійною функцією, а другого – квадратичною.

Дробова раціональна функція є відношенням двох многочленів:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} \, .$$

Алгебраїчні функції – це цілі раціональні, дробові раціональні та ірраціональні функції.

Функція, яка не є алгебраїчною, називається трансцендентною.

Приклади трансцендентних функцій: $y = \cos x$, $y = 10^x, \ldots$

Розглянемо способи задавання функцій.

1 Аналітичний спосіб задавання функції:

Функцію задають аналітичним виразом. Наприклад:

$$y = x^4 - 2,\ y = \lg x - \sin x \ldots$$

Аналітичний вираз – це символічне позначення сукупності відомих математичних операцій, що виконуються у визначеній послідовності над числами і буквами, які позначають постійні чи змінні величини.

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, записаним відносно змінної *y*, то кажуть, що функція задана у явному вигляді.

Під неявним задаванням функції розуміють задавання функції у вигляді $F(x, y) = 0$, не розв’язаної відносно *y*.

Приклад неявно заданої функції:

$$y - \operatorname{tg}\frac{x}{y} + \sin y = 0.$$

Терміни «явно задана функція» і «неявно задана функція» характеризують не природу функції, а аналітичний спосіб її задавання.

Одним із способів аналітичного задавання функції є параметричне задавання функції.

Нехай дані два рівняння:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \tag{Б.1}$$

де *t* приймає значення, що містяться на відрізку $[t_1; t_2]$. Кожному значенню *t* відповідають значення *x* і *y*. Якщо розглядати значення *x* і у як координати точки на площині Oxy, то кожному значенню *t* буде відповідати визначена точка площини. Коли *t* змінюється від t_1 до t_2, ця точка на площині описує деяку криву. Рівняння (Б.1) називають параметричними рівняннями цієї кривої, t називається параметром, а спосіб задавання кривої рівняннями (Б.1) називається параметричним.

Якщо функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \Phi(x)$, тоді *y* є функцією від *x*: $y = \psi[\Phi(x)]$. Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

2 Табличний спосіб задавання функції полягає у тому, що відповідність між змінними *x* і *y* задають у вигляді таблиці (таблиця Б.1).

Табличний спосіб задавання функції часто використовується при проведенні експериментів.

Таблиця Б.1

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

3 Графічний спосіб завдання функції (рис. Б.1) полягає у тому, що відповідність між змінними *x* і *y* задають у вигляді графіка.

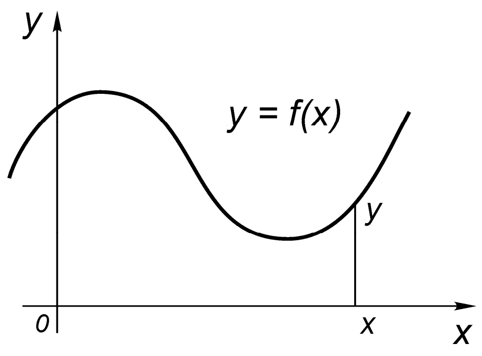

Рисунок Б.1 – Приклад графічного способу задавання функції

Якщо в прямокутній системі координат на площині маємо деяку сукупність точок М (x; y), при цьому ніякі дві точки не лежать на одній прямій, паралельній осі Оy, то ця сукупність точок визначає деяку однозначну функцію $y = f(x)$; значеннями аргументу є абсциси точок, значеннями функції – відповідні ординати.

Якщо функція задана аналітично, то для неї завжди можна побудувати таблицю або графік. Наприклад, загальновідомі таблиці логарифмів, таблиці тригонометричних функцій тощо. Перехід від графічного або табличного задавання функції до аналітичного складає достатньо важливу і цікаву проблему, розв’язання якої є окремою математичною дисципліною.

4 У вигляді програми для комп’ютера або програмованого калькулятора. Цим способом задають такі функції, які є розв’язками складних математичних задач.

Навчальне видання

ПАЛАМАРЧУК Віктор Олександрович,

СТЕПАНОВ Аркадій Іванович

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник

Редактор Я. О. Бершацька

Комп'ютерна верстка О. П. Ордіна

119/2009. Підп. до друку . Формат 60 х 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк.
Тираж прим. Зам. №

Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.03.