

Министерство образования и науки Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия (ДГМА)

МАТЕМАТИКА

Пособие

для слушателей подготовительных курсов,
поступающих в вуз

Утверждено
на заседании
методического совета
Протокол № 3 от 20.11.2014

Краматорск
ДГМА
2014

Математика : пособие для слушателей подготовительных курсов. поступающих в вуз / сост.: Е. С. Зозуля, Т. В. Скарлат. – Краматорск : ДГМА, 2014. – 138 с.

Данное пособие предназначено для выпускников общеобразовательных учебных заведений, которые будут участвовать во внешнем независимом оценивании. Пособие может использоваться на подготовительных курсах в системе довузовской подготовки ДГМА. Содержит справочные материалы, примеры и задачи полного курса школьной математики.

Составители:	Е. С. Зозуля, ассист.;
	Т. В. Скарлат, учитель

Отв. за выпуск	В. Н. Астахов, доц.
----------------	---------------------

СОДЕРЖАНИЕ

Вступление	5
1 Арифметика и тождественные преобразования	6
1.1 Арифметические вычисления.....	6
1.2 Проценты	9
1.3 Действия со степенями.....	11
1.4 Действия с корнями.....	12
1.5 Модуль числа. Преобразования выражений.....	13
1.6 Формулы сокращенного умножения	14
1.7 Преобразования логарифмических выражений	17
1.8 Преобразования тригонометрических выражений	20
2 Уравнения и системы уравнений	27
2.1 Линейные уравнения	27
2.2 Квадратные уравнения. Разложение квадратного трехчлена на множители	29
2.3 Уравнения, приводящиеся к квадратным	30
2.4 Иррациональные уравнения	28
2.5 Показательные уравнения.....	33
2.6 Логарифмические уравнения.....	35
2.7 Тригонометрические уравнения	36
2.8 Уравнения, содержащие знак модуля.....	39
2.9 Уравнения с параметром.....	39
2.10 Системы уравнений	41
3 Неравенства и системы неравенств	43
3.1 Линейные неравенства	43
3.2 Метод интервалов.....	44
3.3 Логарифмические неравенства.....	48
3.4 Показательные неравенства.....	50
3.5 Тригонометрические неравенства	52
3.6 Системы неравенств	53
4 Прогрессии	56
4.1 Арифметическая прогрессия	56
4.2 Геометрическая прогрессия.....	57
5 Функции. Графики	59
5.1 Функция. Область определения	59
5.2 Виды функций.....	61
5.3 Основные функции.....	65
5.4 Преобразования графиков	74
6 Элементы математического анализа.....	79
6.1 Производная. Таблица производных. Правила нахождения производных	79
6.2 Производная сложной функции.....	82
6.3 Геометрический смысл производной	83

6.4 Физический смысл производной	85
6.5 Исследование функции на монотонность и экстремум.....	86
6.6 Наибольшее и наименьшее значения функции	90
6.7 Первообразная. Неопределенный интеграл.	
Таблица интегралов. Правила интегрирования.....	91
6.8 Определенный интеграл. Правила интегрирования	94
6.9 Криволинейная трапеция. Площадь фигуры	96
7 Комбинаторика. Элементы теории вероятностей и статистики	98
7.1 Комбинаторика	98
7.2 Элементы теории вероятностей	100
7.3 Элементы статистики	104
8 Геометрия	107
8.1 Площади фигур	107
8.2 Треугольники	107
8.3 Четырехугольники.....	112
8.4 Многогранники	120
8.5 Декартовы координаты и векторы.....	134
Литература.....	136

ВСТУПЛЕНИЕ

Данное пособие предназначено для выпускников общеобразовательных учебных заведений, которые будут участвовать во внешнем национальном оценивании. Пособие может использоваться на подготовительных курсах в системе довузовской подготовки ДГМА. Кроме того, пособие может быть полезным ученикам школ, гимназий, лицеев и т.д., если есть необходимость в «сжатые» сроки пройти или повторить материал, подготовиться к собеседованиям при поступлении в высшее учебное заведение.

Пособие содержит 8 разделов, каждый из которых разбит на подразделы. Подраздел содержит несколько составляющих:

- теоретические основы, где в кратком виде, конспективно (основные определения, теоремы, графики, схемы) подаются знания, необходимые для повторения или усвоения данного материала;

- примеры решения задач. Здесь разобраны примеры решения типовых задач курса школьной математики, а также задач, аналогичных тем задачам, которые предлагались во время проведения внешнего национального оценивания;

- задания самоконтроля (задания с ответом), предназначенные для получения навыков и проверки собственных достижений в повторении или изучении материала;

- задания для самостоятельной работы, решение которых позволяет закрепить знания по данной теме. Здесь представлены задачи курса школьной математики, а также задачи, аналогичные тем, которые предлагались во время проведения внешнего национального оценивания или пробного тестирования. Также присутствуют задания, которые предлагались во время проведения внешнего национального оценивания.

При составлении данного пособия, авторы преследовали цель создать практический справочник, использование которого позволило бы быстро и эффективно систематизировать знания по математике, необходимые для успешной сдачи внешнего национального оценивания, поступления в высшее учебное заведение.

1 АРИФМЕТИКА И ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1.1 Арифметические вычисления

Обыкновенная дробь имеет вид $\frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Свойства дробей

$$1. \frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

$$5. \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$2. \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

$$6. \frac{a}{b} \cdot m = \frac{a \cdot m}{b}$$

$$3. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

$$7. \frac{a}{b} : m = \frac{a}{b \cdot m}$$

$$4. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$8. m : \frac{a}{b} = m \cdot \frac{b}{a} = \frac{m \cdot b}{a}$$

$$9. \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

Пример 1. Вычислить $\frac{3}{5} + \frac{8}{3} : 2$.

Решение.

Применяя свойство 7, получим $\frac{3}{5} + \frac{4}{3}$.

Применяя свойство 9, получим $\frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{9 + 20}{15} = \frac{29}{15} = 1\frac{14}{15}$.

Ответ: $1\frac{14}{15}$.

Пример 2. Вычислить $\left(\frac{4}{5} + \frac{8}{3}\right) \cdot \frac{15}{2}$.

Решение.

Применяя свойство 9, получим $\frac{52}{15} \cdot \frac{15}{2}$.

Выполнив сокращение (свойство 2), получим число 26.

Ответ: 26.

Пример 3. Вычислить $8 : \frac{2}{5} - \frac{1}{6} \cdot 2$.

Решение.

Применяя свойства 8 и 6, получим $\frac{8 \cdot 5}{2} - \frac{2}{6}$. Применяя свойство 2, получим $\frac{20}{1} - \frac{1}{3}$. Приводя к общему знаменателю, получим $\frac{60 - 1}{3} = \frac{59}{3}$. Выделим целую часть $\frac{59}{3} = 19\frac{2}{3}$.

Ответ: $19\frac{2}{3}$.

Пример 4. Вычислить $\frac{5}{8} : \frac{15}{2} - \frac{1}{3}$.

Решение.

Применяя свойство 5, получим $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{3}$. Выполнив сокращение, получим $\frac{1}{12} - \frac{1}{3}$. После применения свойства 9 получим $\frac{1 - 4}{12} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

Задания для самоконтроля

1. Вычислить $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

2. Вычислить $\frac{3}{2} : \frac{9}{8} - \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{6}$.

3. Вычислить $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{12}{13}$.

Ответ: $\frac{2}{13}$.

4. Вычислить $\frac{2}{15} : \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) - \frac{2}{3}$.

Ответ: 4.

5. Вычислить $\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5} : 2\right) + 0,1$

Ответ: 1.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	0,08	$-\frac{2}{15}$	другой вариант ответа

2. Вычислить $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} : 2$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{13}{20}$	2,6	0,9	$\frac{21}{10}$	другой вариант ответа

3. Вычислить $\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{9}{50}$	другой вариант ответа

4. Вычислить $1\frac{3}{8} + 1\frac{3}{4} - 0,125$.

А	Б	В	Г	Д
2,125	2,5	2	4,475	другой вариант ответа

5. Расположить в порядке возрастания числа $\frac{1}{9}$; 0,11; 0,111.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{9}$ 0,11 0,111	$\frac{1}{9}$ 0,111 0,11	0,111 0,11 $\frac{1}{9}$	0,11 0,111 $\frac{1}{9}$	другой вариант ответа

6. Вычислить $\frac{\left(\frac{3}{7} - \frac{2}{5}\right) : \frac{3}{14} - 2}{\frac{2}{15}} - 2 + 2,25$.

7. Вычислить $\frac{\frac{1}{125} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{150}}{\frac{7}{75} - \frac{1}{25}} : \frac{2}{3} + 0,01$.

1.2 Проценты

Процентом называется сотая часть числа (обозначается %).

Например, 1% числа 70 это $\frac{1}{100}$ числа 70, что составляет $\frac{70}{100} = 0,7$.

Пример 1. Дано число 5. Найти 40% этого числа.

Решение.

Найдем один процент числа 5. Для этого сосчитаем $\frac{5}{100} = 0,05$.

То есть, 1% от 5 составляет 0,05. Тогда 40% составляет $0,05 \cdot 40 = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Число 250 увеличили на 20%. Найти число, получившееся в результате.

Решение.

Найдем один процент числа 250. Для этого сосчитаем $\frac{250}{100} = 2,5$.

Тогда 20% составляет $2,5 \cdot 20 = 50$. Увеличивая число 250 на 50, получим 300.

Ответ: 300.

Пример 3. Мяч стоил 50 грн. Через некоторое время стал стоить 42 грн. На сколько процентов снизилась цена мяча?

Решение.

Пусть 50 грн – это 100%, тогда 42 грн – это $x\%$. Способом пропорции получим, что 42 грн составляет от 50 грн $x\% = \frac{42 \cdot 100\%}{50} = 84\%$. Таким образом, цена уменьшилась на 16 %.

Ответ: 16 %.

Пример 4. Площадь клумбы составляет 36 квадратных метров.

На сколько процентов нужно увеличить площадь, чтобы она равнялась 81 квадратному метру?

Решение.

Пусть 36 кв. м это 100%, тогда 81 кв. м это $x\%$. Способом пропорции получим, что 81 кв. м составляет $x\% = \frac{81 \cdot 100\%}{36} = 225\%$.

$225\% - 100\% = 125\%$. Таким образом, нужно увеличить площадь на 125 %.

Ответ: 125 %.

Задания для самоконтроля

1. Дано число 64 . Найти 25% этого числа. *Ответ: 16 .*
2. Число 1,2 уменьшили на 75% . Найти число, получившееся в результате. *Ответ: 0,3 .*
3. Площадь круга составляет 36π квадратных метров. На сколько процентов нужно радиус круга площадь, чтобы площадь равнялась 144π квадратных метров? (Площадь круга $S = \pi R^2$, где R – радиус). *Ответ: 100 % .*
4. На сколько процентов нужно увеличить массу груза в 40 кг, чтобы она стала равной 45 кг ? *Ответ: 11,25 % .*

Задания для самостоятельного решения

1. Дано число 125. Найти 20% этого числа.

А	Б	В	Г	Д
20	250	2,5	25	другой вариант ответа

2. Число 16 увеличили на 5% . Найти получившееся число.

А	Б	В	Г	Д
16,8	24	16,08	21	другой вариант ответа

3. Журнал стоил 25 грн. После этот самый журнал стал стоить 21 грн. На сколько процентов снизилась цена журнала? (ВНО-11)

А	Б	В	Г	Д
16%	$\frac{4}{21} \cdot 100\%$	84%	$\frac{25}{21} \cdot 100\%$	4%

4. Положительное число A больше положительного числа B в 2,7 раза. На сколько процентов число A больше числа B ?

5. Пять литров 70- процентного раствора кислоты смешали с 10 литрами 20- процентного раствора кислоты. Найти процентное содержание кислоты в получившемся растворе.

6. Сплав 10 кг содержит 30% меди, 70% олова. Сколько кг необходимо добавить меди, чтобы образовался 45% - ый сплав меди?

1.3 Действия со степенями

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$ означает « a в степени n », где a – основание, n – показатель степени. Например, $2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ множителей}}$ есть 2 в 5-й степени ($2^5 = 32$).

Свойства степеней

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$5. \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$2. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$6. \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$7. \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$4. a^0 = 1$$

$$8. a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

Пример 1. Упростить $\frac{12 \cdot a^3 \cdot b^6}{18 \cdot a^4 \cdot b^{30}}$.

Решение.

Применяя свойства 2 и 5, получим $\frac{2 \cdot a^{3-4} \cdot b^{6-30}}{3} = \frac{2}{3} \cdot a^{-1} \cdot b^{-24} = \frac{2}{3ab^{24}}$.

Ответ: $\frac{2}{3ab^{24}}$.

Пример 2. Упростить $0,3d^{10} : 0,1d^4$.

Решение.

Применяя свойство 2, получим $3d^{10-4} = 3d^6$.

Ответ: $3d^6$.

Задания для самоконтроля

$$1. \text{ Упростить } \frac{3^7 \cdot 5^{11}}{15^7}.$$

Ответ: 5^4 .

$$2. \text{ Упростить } 0,5b^{10} : 5b^2.$$

Ответ: $0,1b^8$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить $\frac{2^6 \cdot 5^6}{10^4}$. (ВНО-2013)

А	Б	В	Г	Д
10^{10}	10^9	10^8	10^2	$10^{1,5}$

2. Вычислить $0,8b^9 : 8b^3$. (ВНО-2011)

А	Б	В	Г	Д
$0,1b^3$	$10b^6$	$6,4b^{12}$	$0,1b^6$	$10b^3$

3. Расположить в порядке возрастания числа $2^{15}; 4^{10}; 10^5$. (ВНО-2012)

4. Расположить в порядке возрастания числа $2^{30}; 3^{20}; 7^{10}$. (ВНО-2010)

1.4 Действия с корнями

Свойства корней

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

6. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

7. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n - \text{нечетное} \\ |a|, & \text{если } n - \text{четное} \end{cases}$

4. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$

8. $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$

Пример 1. Преобразовать в степень $\frac{1}{\sqrt[4]{x^{17}}}$.

Решение.

Используя свойство корня 8, имеем $\frac{1}{x^{\frac{17}{4}}}$. Далее, по свойству 5 степе-

ни получим $x^{-\frac{17}{4}}$.

Ответ: $x^{-\frac{17}{4}}$.

Задания для самоконтроля

1. Преобразовать в степень $\sqrt[7]{x^3}$.

Ответ: $x^{\frac{3}{7}}$.

2. Преобразовать в степень $\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}$.

Ответ: $x^{-\frac{9}{5}}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Преобразовать в степень $\sqrt[5]{a^2}$.

2. Преобразовать в степень $\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$.

1.5 Модуль числа. Преобразования выражений

Определение **модуля**: $|a| = \begin{cases} -a, & \text{если } a < 0 \\ a, & \text{если } a \geq 0 \end{cases}$.

Например, $|-7| = -(-7) = 7$, так как $a = -7 < 0$,

$|10| = 10$, так как $a = 10 \geq 0$.

Пример 1. Упростить выражение $a + |a|$, если $a < 0$.

Решение.

Так как $a < 0$, то, по определению $|a| = -a$, и значит

$$a + |a| = a - a = 0$$

Ответ: 0.

Пример 2. Упростить выражение $|3 - \sqrt{10}| + |3 + \sqrt{10}|$.

Решение.

Так как $3 < \sqrt{10}$, то $3 - \sqrt{10} < 0$, а значит, определению модуля

$|3 - \sqrt{10}| = -(3 - \sqrt{10})$. Так как $3 + \sqrt{10}$ число положительное, то

$|3 + \sqrt{10}| = 3 + \sqrt{10}$. Подставляя полученные выражения в исходное,

получим $|3 - \sqrt{10}| + |3 + \sqrt{10}| = -(3 - \sqrt{10}) + 3 + \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$.

Ответ: $2\sqrt{10}$.

Задания для самоконтроля

1. Упростить выражение $a + |a|$, если $a \geq 0$. Ответ: $2a$.

2. Упростить выражение $|\sqrt{15} - 4| - |\sqrt{15} + 4|$. Ответ: $-2\sqrt{15}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Упростить выражение $a - |a|$, если $a \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$2a$	a	0	$-2a$	другой вариант ответа

2. Упростить выражение $a - |a|$, если $a < 0$. (ВНО-2011)

А	Б	В	Г	Д
$-2a$	$-a$	0	a	$2a$

3. Упростить выражение $1 - |a + 2|$, если $a \geq -2$.

А	Б	В	Г	Д
$a + 3$	$a - 1$	$-a - 1$	$-a + 3$	другой вариант ответа

4. Упростить выражение $1 - |a + 2|$, если $a < -2$. (ВНО-2013)

А	Б	В	Г	Д
$-a - 3$	$-a - 1$	$a - 1$	$a + 3$	$-a + 3$

5. Упростить выражение $|2 + \sqrt{5}| - |2 - \sqrt{5}|$.

6. Упростить выражение $|\sqrt{45} - 7| + |7 + \sqrt{45}|$.

1.6 Формулы сокращенного умножения

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

квадрат суммы

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

квадрат разности

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

разность квадратов

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{куб суммы}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{куб разности}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{сумма кубов}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{разность кубов}$$

Пример 1. Упростить выражение $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$

Решение.

Пользуясь формулой «разность квадратов», получим

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x - y) \cdot (x + y)}{(x - y)} = x + y.$$

Ответ: $x + y$.

Пример 2. Вычислить значение выражения $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$, если

$a = -10,2$, $b = 0,2$. (ВНО-2013)

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} &= \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} - \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)(a-b)} = (a+b) - \\ &- \frac{(a^2 + ab + b^2)}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + ab + b^2)}{a+b} = \frac{ab}{a+b}. \end{aligned}$$

Подставляя значения $a = -10,2$, $b = 0,2$, получим 0,204

Ответ: 0,204.

Задания для самоконтроля

1. Упростить выражение $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$. *Ответ:* $x - y$.

2. Упростить выражение $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$. *Ответ:* $a^2 + ab + b^2$.

3. Упростить выражение $\frac{c^2 - 4}{c^2 + 6c + 9} \cdot \frac{c + 3}{c - 2}$. *Ответ:* $\frac{c + 2}{c + 3}$.

4. Упростить выражение $x + \frac{1 - x^2}{x}$. *Ответ:* $\frac{1}{x}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Упростить выражение $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$x-1$	$-x-1$	$-\frac{1}{x+1}$	$-\frac{1}{x-1}$	другой вариант ответа

2. Упростить выражение $x^2 + \frac{x^3-1}{1-x}$.

А	Б	В	Г	Д
$x-1$	$-x-1$	$-\frac{1}{x+1}$	$-\frac{1}{x-1}$	другой вариант ответа

3. Упростить выражение $\frac{1-x}{x} : \frac{x^2-1}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$x-1$	$-x-1$	$-\frac{1}{x+1}$	$-\frac{1}{x-1}$	другой вариант ответа

4. Упростить выражение $\frac{x-2}{x-1} - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$x-1$	$-x-1$	$-\frac{1}{x+1}$	$-\frac{1}{x-1}$	другой вариант ответа

5. Каждому выражению (1 – 4) подобрать тождественно равное ему выражение (А – Д). (ВНО-2012)

1	$(a-8) \cdot (a+8)$	А	$a^2 - 16a + 64$
2	$(a-8)^2$	Б	$a^2 - 64$
3	$(a-4) \cdot (a^2 + 4a + 16)$	В	$a^2 - 20a + 64$
4	$(a-4) \cdot (a-16)$	Г	$a^3 + 64$
		Д	$a^3 - 64$

6. Установить соответствие между выражениями (1 – 4) и их значениями (А – Д), если $x = 0,5$. (ВНО-2010)

	Выражение	Значение выражения	
1	$\frac{x^2 - 9}{3 + x}$	А	2,5
2	$(x - 5)^2 + 5(2x - 5)$	Б	1,5
3	$\frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$	В	- 2,5
4	$\frac{3x - 6}{8x} \cdot \frac{x}{x^2 - 4x + 4}$	Г	0,25
		Д	- 0,25

Найти значения выражений (7-10):

$$\begin{aligned}
 7. \quad & \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \quad 9. \quad \frac{2\sqrt{2} - 5}{\sqrt{2} - 1} + \frac{3\sqrt{6} - \sqrt{300}}{\sqrt{3}} \quad (ВНО-2011) \\
 8. \quad & \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - \sqrt{3}} \quad 10. \quad (\sqrt[6]{27} - \sqrt[4]{100}) \cdot (\sqrt[6]{27} + \sqrt[4]{100}).
 \end{aligned}$$

1.7 Преобразования логарифмических выражений

Логарифмом числа b ($b > 0$) по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число b . Например, $\log_2 8 = 3$ т.к. $2^3 = 8$.

Равенство $a^{\log_a b} = b$ называется **основным логарифмическим тождеством**. Например, $3^{\log_3 7} = 7$.

Свойства логарифмов

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \log_a a = 1 & 5. \quad & \log_a b^k = k \cdot \log_a b \\
 2. \quad & \log_a 1 = 0 & 6. \quad & \log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b \\
 3. \quad & \log_a (bc) = \log_a b + \log_a c & 7. \quad & \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \\
 4. \quad & \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c & 8. \quad & \log_a b = \frac{1}{\log_b a}
 \end{aligned}$$

Пример 1. Найти значение выражения $\log_3 \sqrt{3}$.

Решение.

Преобразуем $\log_3 \sqrt{3}$ к виду $\log_3 3^{\frac{1}{2}}$. Тогда по свойству 5 получим $\frac{1}{2} \cdot \log_3 3$. Используя свойство 1, получим $\frac{1}{2} \cdot \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Найти значение выражения $\log_{\frac{1}{9}} 81$.

Решение.

Преобразуем $\log_{\frac{1}{9}} 81$ к виду $\log_{3^{-2}} 81$. Тогда по свойству 6 получим

$$\frac{1}{-2} \cdot \log_3 81 = -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2.$$

Ответ: -2 .

Пример 3. Найти значение выражения $\log_3 54 - \log_3 2$.

Решение.

Применяя свойство 4, получим $\log_3 \frac{54}{2} = \log_3 27 = 3$.

Ответ: 3 .

Пример 4. Найти значение выражения $\log_2 \left(\frac{1}{2} \right)^{50}$

Решение.

Преобразуем к виду $\log_2 2^{-50}$. Применяя свойство 5, получим $-50 \cdot \log_2 2 = -50$.

Ответ: -50 .

Пример 5. Найти значение выражения $10^{7 \lg 2}$.

Решение.

Применяя свойство 5, получим $10^{\lg 2^7} = 10^{\lg 128}$.

По основному логарифмическому тождеству $10^{\lg 128} = 128$.

Ответ: 128 .

Пример 6. Найти значение выражения $\log_5 10$, если $\log_5 2 = a$.

Решение.

Применяя свойство 3, получим $\log_5 10 = \log_5 5 + \log_5 2 = 1 + a$.

Ответ: $1 + a$.

Пример 7. Найти значение выражения $2^{\frac{4}{\log_{25} 16}}$.

Решение.

Применяя свойство 8, получим $2^{\frac{4}{\log_{25} 16}} = (2^4)^{\log_{16} 25} = 16^{\log_{16} 25} = 25$.

Ответ: 25.

Задания для самоконтроля

1. Найти значение выражения $\log_2 18 + \log_2 \frac{1}{9}$. *Ответ:* 1.

2. Найти значение выражения $\log_4 \sqrt[5]{4}$. *Ответ:* $\frac{1}{5}$.

3. Найти значение выражения $\log_{\frac{1}{27}} 3$. *Ответ:* $-\frac{1}{3}$.

4. Найти значение выражения $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[16]{27}$. *Ответ:* $-\frac{3}{32}$.

5. Найти значение выражения $100^{3\lg 2}$. *Ответ:* 64.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить $\log_5 49 + 2 \log_5 \frac{5}{7}$. (ВНО-2013)

А	Б	В	Г	Д
25	$\log_5 70$	$\log_5 49 \frac{5}{7}$	$\log_5 35$	2

2. Вычислить $\log_2 \frac{1}{8} + \log_5 25$. (ВНО-2011)

А	Б	В	Г	Д
5	$\log_7 25 \frac{1}{8}$	-1	2	$\lg \frac{25}{8}$

3. Вычислить $(\sqrt{20})^{2+\log_{20} 16}$. (ВНО-2012)

4. Вычислить $5^{\log_5 2 + \log_{25} 3}$.

5. Найти значение выражения $100^{3\lg 2}$

6. Найти значение выражения $\log_7 12$, если $\log_7 2 = b$, $\log_7 3 = c$

7. Найти значение выражения $\log_a 500 - \log_a 4$, если $\log_5 a = \frac{1}{6}$.

8. Найти значение выражения $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{2}}$.

1.8 Преобразования тригонометрических выражений

Радииан. Перевод из радианной меры в градусную и обратно

Угол в **1 радиан** - это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности. Углу в 1 радиан соответствует угол $\frac{180}{\pi}$ градусов. Угол в n радиан равен углу в $\frac{180 \cdot n}{\pi}$ градусов. Угол в α° равен углу в $\frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$ радиан. Например, 90° равно $\frac{\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$ радиан, 60° равно $\frac{\pi \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$, 45° равно $\frac{\pi}{4}$ радиан и т.д.

Определения тригонометрических функций

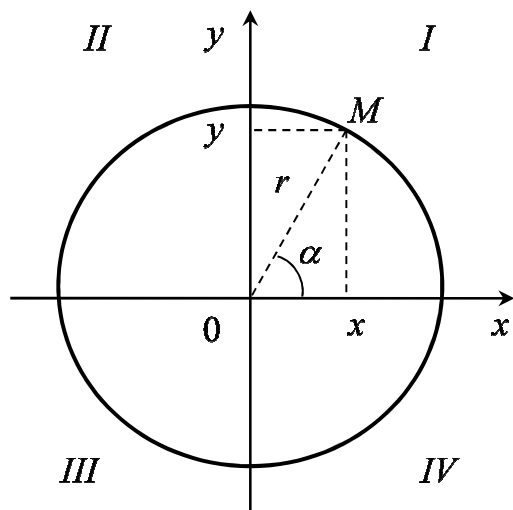


Рисунок 1.1

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

Знаки тригонометрических функций

	I четверть	II четверть	III четверть	IV четверть
$\sin \alpha$	+	+	—	—
$\cos \alpha$	+	—	—	+
$tg \alpha$	+	—	+	—
$ctg \alpha$	+	—	+	—

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не существует
$ctg \alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Формулы приведения

Формулы приведения могут быть получены для преобразования выражений $\sin\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $\cos\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $tg\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $ctg\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, если использовать правила:

- перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция (рис. 1.1), если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

- функция меняется на кофункцию, если k нечетно; функция не меняется, если k четно. Кофункция для синуса - косинус, для тангенса - котангенс и т.д. Например, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2 - \alpha\right) = \sin \alpha$,

$tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -ctg \alpha$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3 + \alpha\right) = -\sin \alpha$ и т.д.

Основные тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Тригонометрические функции суммы и разности аргументов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Формулы произведения тригонометрических функций

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа a называется угол, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a . $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Арккосинусом числа a называется угол, принадлежащий отрезку $[0; \pi]$, косинус которого равен a . $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Арктангенсом числа a называется угол, принадлежащий интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a . $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Арккотангенсом числа a называется угол, принадлежащий интервалу $(0; \pi)$, котангенс которого равен a . $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Пример 1. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = 0,8$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Решение.

Формула «синус двойного угла» имеет вид $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, т.к.

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. Знак выбираем «-», т.к.

$\cos \alpha$ во второй четверти отрицателен. $\cos \alpha = -\sqrt{1 - 0,8^2} = -0,6$.

Тогда, подставив имеющиеся значения, получим $\sin 2\alpha = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,96$.

Ответ: 0,96.

Пример 2. Найти $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \beta = -\frac{5}{13}$,

$180^\circ < \alpha < 270^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$.

Решение. Формула «косинус суммы углов» имеет вид

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. Т.к. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Знак выбрали «-», потому как синус угла третьей четверти отрицателен.

$$\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = +\sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

Знак выбрали «+», потому как синус угла второй четверти положителен.

$$\cos(\alpha + \beta) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \frac{12}{13} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{60}{169} = \frac{\sqrt{3} \cdot 169 - 240}{676}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3} \cdot 169 - 240}{676}.$$

Пример 3. Вычислить $\cos 15^\circ$.

Решение.

Формула «понижения степени» имеет вид $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$. Тогда

$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$. Т.к. 15° угол первой четверти, то

$$\text{выбираем знак «+»}. \cos 15^\circ = +\sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Пример 4. Установить принадлежит ли $\operatorname{tg} 75^\circ$ промежутку $(\sqrt{3}; +\infty)$.

Решение.

Поскольку $60^\circ < 75^\circ < 90^\circ$ и функция $y = \operatorname{tg} x$ на интер-

вале $(60^\circ; 90^\circ)$ возрастает, т.е. $\operatorname{tg} 60^\circ < \operatorname{tg} 75^\circ < \operatorname{tg} 90^\circ$, то

$\sqrt{3} < \operatorname{tg} 75^\circ < +\infty$. ($\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, а при стремлении к 90° тангенс угла стремится к ∞).

Ответ: принадлежит.

Пример 5. Упростить выражение $\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$.

Решение.

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha$$

Ответ: $\sin \alpha$.

Пример 6. Упростить выражение $\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) - 1$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) - 1 &= \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - 1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha - 1 = \\ &= \cos^2 \alpha - 1 = -(1 - \cos^2 \alpha) = -\sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $-\sin^2 \alpha$.

Пример 7. Проверить, выполняется ли равенство $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$.

Решение.

Возьмем левую часть равенства и преобразуем ее

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \beta}} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Образовалась правая часть равенства.

Ответ: выполняется.

Задания для самоконтроля

1. Вычислить $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -0,8$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. *Ответ:* $0,6$.

2. Вычислить $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. *Ответ:* $\frac{4}{5}$.

3. Вычислить $\sin 15^\circ$. *Ответ:* $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

4. Упростить выражение $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (\sin^2 \alpha - 1) + 1$. *Ответ:* $\cos^2 \alpha$.

5. Упростить выражение $\frac{\sin^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$. *Ответ:* -1 .

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	другой вариант ответа

2. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = 0,8$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
0,28	-0,28	0,96	-0,96	другой вариант ответа

3. Упростить выражение $\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \cos \alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-2 \cos \alpha$	$2 \cos \alpha$	другой вариант ответа

4. Упростить выражение $\frac{1 - \sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$.

А	Б	В	Г	Д
$3 \cos \alpha$	$-3 \cos \alpha$	$5 \cos \alpha$	$\frac{4}{\cos \alpha}$	другой вариант ответа

5. Проверить, выполняется ли равенство $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}$.

А	Б	В	Г	Д
выполняется	не выполняется	выполняется при некоторых α	невозможно ответить	другой вариант ответа

6. Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения $\operatorname{ctg} 25^\circ$. (ВНО-2012)

А	Б	В	Г	Д
$\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; +\infty)$

2 УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

2.1 Линейные уравнения. Уравнения, приводящиеся к линейным

Линейным уравнением с одной неизвестной x называют уравнение вида $ax = b$, где a, b - действительные числа.

- 1) Если $a \neq 0$, то корень уравнения равен $\frac{b}{a}$.
- 2) Если $a = 0$, $b = 0$, то корнем уравнения является любое число.
- 3) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет.

Пример 1. Решить уравнение $5x = 10$.

Решение.

Разделив обе части уравнения на число 5, получим $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Решить уравнение $2(4x - 1) - 3(5x + 4) = 8x - 29$.

Решение.

$$8x - 2 - 15x - 12 = 8x - 29$$

$$-7x - 14 - 8x + 29 = 0$$

$$-15x + 15 = 0$$

$$15x = 15$$

$$x = 1$$

Ответ: 1.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{x-5}{2} = \frac{x+10}{7}$.

Решение.

Умножив обе части уравнения на число 14 (наименьшее общее кратное знаменателей), получим $7(x-5) = 2(x+10)$, $7x - 35 = 2x + 20$

$$5x = 55, x = 11.$$

Ответ: 11.

Задания для самоконтроля

Решить уравнения:

1. $8x = 14$.

Ответ: $\frac{7}{4}$.

2. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 2$.

Ответ: 2,4.

$$3. -3(x+2)+4(x-2)=2x-15.$$

Ответ: 1.

$$4. \frac{x-7}{3} = \frac{2x-10}{4}$$

Ответ: -1.

$$5. \frac{(x+1)(x-2)}{x-4} = 0$$

Ответ: -1;2;4.

Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения:

$$1. \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1.$$

А	Б	В	Г	Д
1,2	2,4	5	6	другой вариант ответа

$$2. 2(x-5)-3(x+2)=-2(x+4).$$

А	Б	В	Г	Д
-18	10	8	-10	другой вариант ответа

$$3. \frac{x+1}{2} = \frac{x-2}{3}.$$

А	Б	В	Г	Д
-1	0	7	-7	другой вариант ответа

$$4. (2x-5)(x+3)=0.$$

$$5. (x+5)(x-7)(5-x)=0.$$

$$6. \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} = 0.$$

$$7. \frac{(x-1)(x+2)}{x^2-1} = 0.$$

2.2 Квадратные уравнения. Разложение квадратного трехчлена на множители.

Квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c - действительные числа, причем $a \neq 0$. Корни этого уравнения находят по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$ - **дискриминант**.

1. Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня.
2. Если $D = 0$, то уравнение имеет один корень.
3. Если $D < 0$, то уравнение корней не имеет.

Если $b = 0$ или $c = 0$, то квадратное уравнение называют **неполным**. Решить такое уравнение можно, разложив левую часть на множители.

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ раскладывается на множители с помощью формулы $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, где x_1, x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Например, трехчлен $2x^2 + 6x - 8$ имеет разложение $2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 4)$, т.к. корнями являются $x_1 = 1, x_2 = -4$

Пример 1. Решить уравнение $3x^2 - 4x + 1 = 0$.

Решение.

Найдем дискриминант. $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 > 0$.

Дискриминант положителен. Уравнение имеет два корня.

$$x_1 = \frac{4 + 2}{2 \cdot 3} = 1, \quad x_2 = \frac{4 - 2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $1, \frac{1}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Решение.

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

Уравнение имеет один корень $x = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2$.

Ответ: 2 .

Пример 3. Решить уравнение $2x^2 + 3x + 10 = 0$

Решение.

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 9 - 80 = -71 < 0$ Уравнение корней не имеет, т. к. дискриминант отрицателен

Ответ: $\emptyset$.

Задания для самоконтроля

Решить уравнения:

1. $2x^2 - x - 1 = 0$.

Ответ: $1, -\frac{1}{2}$.

2. $5x^2 - 3x + 2 = 0$.

Ответ: $\emptyset$.

3. $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Ответ: -1 .

4. $x^2 + 8x = 0$.

Ответ: $0, -8$.

Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$.

4. $x^2 - 7x = 0$.

2. $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

5. $2x^2 + 10x = 0$.

3. $7x^2 + x + 1 = 0$.

6. $x^2 + 9 = 0$.

Разложить на множители:

7. $x^2 - 3x + 2$.

9. $-2x^2 + 8x$.

8. $-4x^2 + 4x - 1$.

10. $4x^2 + 5x + 1$.

2.3 Уравнения, приводящиеся к квадратным

-Биквадратным называется уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$. При введении новой переменной $t = x^2$, такое уравнение сводится к квадратному $at^2 + bt + c = 0$.

-Уравнение вида $af^2(x) + bf(x) + c = 0$, приводится к квадратному с помощью замены $t = f(x)$.

- Уравнение вида $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = r$, если выполняется условие $a+b = c+d$, приводится к квадратному.

Задания для самостоятельного решения

1. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

2. $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 3 = 0$.

3. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 8$.

2.4 Иррациональные уравнения

Уравнение, в котором неизвестное находится под знаком корня, называется **иррациональным**. При решении такого уравнения используют методы:

- замена переменной

- возведение обеих частей в одинаковую степень

Посторонние корни отсеиваются с помощью проверки или нахождением области допустимых значений (ОДЗ).

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x+5} = 3+x$.

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения

$$(\sqrt{x+5})^2 = (3+x)^2$$

$$x+5 = 9+6x+x^2$$

$$x^2+6x-x+9-5=0$$

$$x^2+5x+4=0$$

$$\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Проверка. 1) $\sqrt{-4+5} \neq 3-4$ $\sqrt{1} \neq -1$

2) $\sqrt{-1+5} = 3-1$ $\sqrt{4} = 2$.

Ответ: -1 .

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+8x+7} - x = 2$.

Решение.

Преобразуем уравнение: $\sqrt{2x^2+8x+7} = 2+x$

Возведем в квадрат обе части уравнения $(\sqrt{2x^2+8x+7})^2 = (2+x)^2$

$$2x^2+8x+7 = 4+4x+x^2$$

$$x^2+4x+3=0$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Проверка: 1) $\sqrt{2(-3)^2 + 8(-3) + 7} - (-3) \neq 2$ $\sqrt{1} + 3 \neq 2$.
 2) $\sqrt{2(-1)^2 + 8(-1) + 7} - (-1) = 2$ $2 = 2$.

Ответ: -1 .

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9$

Решение.

Преобразуем уравнение: $\sqrt{x+7} = 9 - \sqrt{x-2}$

Возведем в квадрат обе части уравнения $(\sqrt{x+7})^2 = (9 - \sqrt{x-2})^2$

$$x+7 = 81 - 18\sqrt{x-2} + x-2$$

$$18\sqrt{x-2} = 72$$

$$\sqrt{x-2} = 4$$

$$(\sqrt{x-2})^2 = 16$$

$$x-2 = 16$$

$$x = 18.$$

Проверка. $\sqrt{18+7} + \sqrt{18-2} = 9$ $\sqrt{25} + \sqrt{16} = 9$ $9 = 9$.

Ответ: 18.

Задания для самоконтроля

Решить уравнения:

1. $\sqrt{x+1} = 5$.

Ответ: 24.

2. $\sqrt{x^2 + x + 2} = 2$.

Ответ: 1, -2.

3. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6$.

Ответ: 5.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $\sqrt{2x+1} = 3$.

А	Б	В	Г	Д
2	4	1	-5	другой вариант ответа

2. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\sqrt{1-x} = 4$. (ВНО- 2013)

А	Б	В	Г	Д
$(-20; -10)$	$(-10; -5)$	$(-5; 5)$	$(5; 10)$	$(10; 15)$

Решить уравнения (3-6):

3. $\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-2} = 1.$

4. $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}.$

5. $\sqrt{2x+3} - \frac{4}{\sqrt{2x+3}} = 3.$

6. $(x^2 - 4)\sqrt{2x+1} = 0.$

2.5 Показательные уравнения

Уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0, b > 0$ называется **простейшим показательным уравнением**. Решением такого уравнения есть число $\log_a b$. Показательное уравнение вида $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, где $a > 0, a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $2^x = 3$.

Решение.

По определению логарифма имеем $x = \log_2 3$

Ответ: $\log_2 3$.

Пример 2. Решить уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 27$.

Решение.

Преобразуем уравнение к виду $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

Переходя к равносильному, получим $x+2 = -3$. Откуда $x = -5$.

Ответ: -5 .

Пример 3. Решить уравнение $(7)^{x^2+2x} = 1$.

Решение.

Преобразуем уравнение к виду $(7)^{x^2+2x} = 7^0$.

Переходя к равносильному, получим $x^2 + 2x = 0$. Откуда $x = 0, x = -2$.

Ответ: $0, -2$.

Пример 4. Решить уравнение $\left(\frac{7}{4}\right)^{3x-4} = \left(\frac{16}{49}\right)^{-1}$

Решение.

Преобразуем уравнение к виду $\left(\frac{7}{4}\right)^{3x-4} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$. Переходя к равносильному, получим $3x - 4 = 2$. Откуда $x = 2$.

Ответ: 2

Задания для самоконтроля

Решить уравнения:

1. $7^x = 8$.

Ответ: $\log_7 8$.

2. $5^{2x-1} = 25$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

3. $(7,9)^{9-x^2} = 1$.

Ответ: ± 3 .

Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $2^x = 8$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_8 2$	3	4	$\frac{1}{3}$	другой вариант ответа

2. $5^x = 3$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_3 5$	$\log_5 3$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$	другой вариант ответа

3. $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x} = 7$.

А	Б	В	Г	Д
$2\log_7 5$	$\frac{5}{2}\sqrt[3]{7}$	$\log_{\frac{2}{5}} \sqrt[3]{7}$	$\frac{1}{3}\log_7 \frac{2}{5}$	другой вариант ответа

4. $10^{2x-1} = 10^{5x+3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	другой вариант ответа

$$5. \left(\frac{1}{8}\right)^{x^2} = 2^{12}.$$

А	Б	В	Г	Д
2	± 2	-2	$\emptyset$	другой вариант ответа

$$6. (5,1)^{3x-3} = 1.$$

А	Б	В	Г	Д
0	$\emptyset$	-2	1	другой вариант ответа

$$7. 5^{x-4} + 5^{x-5} - 5^{x-7} = 704. \quad 10. 7^x + \frac{125}{7^x} = 30.$$

$$8. 9^{x+2} - 7^{x+2} - 9^{x+1} - 7^{x+1} = 0. \quad 11. (x-5)^{x^2-3x} = (x-5)^{2x-4}.$$

$$9. 9^x + 3^{x+1} - 24 = 0.$$

12. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$5^{x+3} = \left(\frac{1}{125}\right)^x. \text{ (ВНО- 2011)}$$

А	Б	В	Г	Д
$(-2; -1]$	$(0; 1]$	$(-3; -2]$	$(-1; 0]$	$(1; 3]$

2.6 Логарифмические уравнения

Уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0, a \neq 1, x > 0$ называется **простейшим логарифмическим уравнением**. Решением такого уравнения

есть число $x = a^b$. В случае, если $\log_{a(x)} f(x) = b(x)$, находим ОДЗ
$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение $\log_2 x = -3$.

Решение.

По определению логарифма имеем $x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Пример 2. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(5x-1) = -1$.

Решение.

$$\text{Преобразуем к виду } 5x-1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 5x-1 = 2 \Leftrightarrow 5x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{5}.$$

Задания для самоконтроля

Решить уравнения:

1. $\log_5 x = 2$.

Ответ: 25.

2. $\log_3(2x-1) = 4$.

Ответ: 41.

Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $\log_7 x = 1$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	$\frac{1}{7}$	7	другой вариант ответа

2. $\log_4(3x+1) = 2$.

А	Б	В	Г	Д
5	-5	$\frac{17}{3}$	$\frac{1}{5}$	другой вариант ответа

3. $\log_6(x+4) + \log_6(x-1) = 1$.

6. $\log_2\left(\frac{3x+2}{x-1}\right) = 0$.

4. $\log_7^2 x + \log_7 x - 2 = 0$.

7. $\log_3\left(\frac{5x-2}{x+1}\right) = 1$.

5. $\lg^2(2x+3) + 3\lg(2x+3) + 2 = 0$.

8. $(x^2 - 2x - 7)^{x^2 - 4} = 1$.

2.7 Тригонометрические уравнения

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Случаи решения

Уравнение	Решение
$\sin x = a$, где $ a \leq 1$	$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$, где $ a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$

Частные случаи

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k$	$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k$
$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$	$\operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k$	

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$$

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

$$2x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k \quad 2x = \pm \left(\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + 2\pi k$$

$$2x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k \quad 2x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad x = \pm \frac{5\pi}{12} + \pi k.$$

Ответ: $x = \pm \frac{5\pi}{12} + \pi k$.

Пример 3. Решить уравнение $5\sin 8x = \frac{13}{2}$.

Решение.

Преобразуем к виду $\sin 8x = \frac{13}{10}$, т.к. $\left| \frac{13}{10} \right| > 1$, то решений нет.

Ответ: $\emptyset$.

Задания для самоконтроля

Решить уравнения

1. $\cos x = 1$.

Ответ: $2\pi k$.

2. $\sin 2x = 0$.

Ответ: $\frac{\pi k}{2}$.

3. $\cos \frac{x}{5} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\pm \frac{5\pi}{3} + 10\pi k$.

4. $4\sin 2x = 5$.

Ответ: $\emptyset$.

5. $\operatorname{ctg}(2x - 1) = 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$.

6. $3\operatorname{tg}(7x + 14) = \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{42} - 2 + \frac{\pi k}{7}$.

Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $\cos x = 0$.

7. $\cos x(2\sin x - 1) = 0$.

2. $\sin 3x = 1$.

8. $\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0$.

3. $\cos \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. $\sin^2 5x - \sin 5x - 2 = 0$.

4. $\sin(2x + 8) = \frac{1}{2}$.

10. $\cos^2(2x + 5) - \cos(2x + 5) = 0$.

5. $\operatorname{ctg} x = 1$.

11. $\cos 4x(2\sin 4x + 3) = 0$.

6. $\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x = 1$.

12. $\cos 4x - \sin 2x = 0$.

2.8 Уравнения, содержащие знак модуля

Определение *модуля* $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$

При решении уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля, нужно, с помощью определения модуля, избавиться от знака модуля.

Пример 1. Решить уравнение $|x - 4| = 7$.

Решение.

При $x < 4$ «подмодульное» выражение отрицательное, значит, знак модуля снимется таким образом $|x - 4| = -(x - 4)$. Тогда

$-(x - 4) = 7$, а $x = -3$. При $x \geq 4$ «подмодульное» выражение неотрицательное, значит знак модуля снимется как $|x - 4| = x - 4$.

Тогда $x - 4 = 7$, а $x = 11$.

Ответ: $-3; 11$.

Пример 2. Решить уравнение $|x + 1| + |x + 3| = 8$.

Решение.

При $x < -3$ имеем уравнение $-(x + 1) - (x + 3) = 8$. Тогда $x = -6$

$-6 \in (-\infty; -3)$. При $-3 \leq x < -1$ имеем $-(x + 1) + (x + 3) = 8$. На этом интервале $\emptyset$. При $x \geq -1$ имеем $x + 1 + x + 3 = 8$, $x = 2$. $2 \in [-1; +\infty)$

Ответ: $-6; 2$.

Задание для самоконтроля

Решить уравнения:

1. $|2 - x| = 5$

Ответ: $7; -3$.

2. $|x + 1| - x = 5$

Ответ: -3 .

Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения

1. $|3 + x| = 1$.

3. $|x + 2| + |x - 1| = 10$.

2. $|5 - x| = 3$.

4. $|x| + |2x - 4| + |3 - x| = 5$.

2.9 Уравнения с параметром

Уравнение с параметром – это уравнение, содержащее, кроме неизвестной и числовых коэффициентов еще и буквенные коэффициенты. Решить уравнение с параметром a – это значит, для каждого значения a найти значения x , удовлетворяющие этому уравнению. Для каждого случая значений параметра ответ должен быть записан однозначно.

Пример 1 . Решить уравнение $a \cdot x = 8$.

Решение.

Если $a \neq 0$, то делением на a обеих частей уравнения получим корень $x = \frac{8}{a}$. Если $a = 0$, то имеем $0 \cdot x = 8$. Решений нет.

Ответ: Если $a \neq 0$, то $x = \frac{8}{a}$.

Если $a = 0$, то решений нет.

Пример 2 . Решить уравнение $(a^2 - 4)x = a - 2$.

Решение.

Если $a \neq \pm 2$, то делением на $a^2 - 4$ обеих частей уравнения получим корень $x = \frac{1}{a+2}$. Если $a = 2$, то имеем $0 \cdot x = 0$, где решением есть любое действительное x . Если $a = -2$, то имеем $0 \cdot x = -4$, где решений нет.

Ответ: Если $a \neq \pm 2$, то $x = \frac{1}{a+2}$.

Если $a = 2$, то x – любое действительное число.

Если $a = -2$, то решений нет.

Задания для самоконтроля

Решить уравнения

1. $\frac{x}{a} = 5$. *Ответ:* Если $a \neq 0$, то $x = 5a$.

Если $a = 0$, то решений нет.

2. $\sin x = \frac{1}{b}$. *Ответ:* Если $b \in (-1; 1)$, то решений нет.

Если $b \notin (-1; 1)$, $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{b}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $a \cdot x = a$.
2. Решить уравнение $a \cdot \sin 2x = \sin x$.
3. Найти наименьшее значение a , при котором имеет решения уравнение $\frac{1}{2}(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 4 - 3a - 2a^2$. (ВНО-2011)
4. Найти значение параметра a , при котором корень уравнения $\lg(\sin 5\pi x) = \sqrt{25 + a - x}$ принадлежит промежутку $a \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. (ВНО-2013)

2.10 Системы уравнений

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$. Для полученного решения (x_0, y_0) системы, найдите сумму $x_0 + y_0$. (ВНО-2013)

А	Б	В	Г	Д
-18	3	4	8	12

Решение.

Выражая x из второго уравнения системы, получим $x = 2y + 7$. Подставив в первое уравнение, имеем $2(2y + 7) + 5y = 5$. Откуда $y = -1$. Тогда $x = 2(-1) + 7 = 5$. Подсчет суммы дает 4.

Ответ: В.

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + 2xy - 4y^2 = 4 \end{cases}$

Решение.

Выражая x из первого уравнения системы, получим $x = 3 - y$. Подставив во второе уравнение, имеем $(3 - y)^2 + 2(3 - y)y - 4y^2 = 4$. Преобразовав, получим квадратное уравнение относительно неизвестной y : $y^2 - 1 = 0$, где корни $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Находя соответствующие значения x , получаем $x_1 = 3 - 1 = 2$, $x_2 = 3 - (-1) = 4$.

Ответ: (2; 1), (4; -1).

Задания для самоконтроля

Решите системы уравнений:

$$1. \begin{cases} 4x + y = 3 \\ 9x + 2y = 7 \end{cases}$$

Ответ: $(1; -1)$.

$$2. \begin{cases} x - 2y = 4 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$$

Ответ: $(8; 2), (2; -1)$.

Задания для самостоятельного решения

Решите системы уравнений:

$$1. \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 - 2y^2 = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x - y = 4 \\ 7x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + 4 = 8y \end{cases} \text{ (ВНО-2012)}$$

$$3. \begin{cases} 0,2x + 0,3y = -0,1 \\ 0,5x - 2y = 2,5 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x^2 + xy + 5y^2 = 23 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y - x = 12 \\ \frac{x + 8}{2y - 5} = 2 \end{cases} \text{ (ВНО-2012)}$$

$$8. \begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$$

3 НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

3.1 Линейные неравенства. Неравенства, приводящиеся к линейным

Неравенства вида $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, где a, b – действительные числа, называются *линейными* с одной переменной.

- 1) Если $a \neq 0$, то для того чтобы решить неравенство, необходимо разделить обе части неравенства на a . Причем, если $a > 0$, то знак неравенства сохраняется; если $a < 0$, то знак неравенства меняется на противоположный.
- 2) Если $a = 0$, то решением неравенства является любое число, или же решений нет ($0 \cdot x > 2$ решений нет, $0 \cdot x < 2$ все числа, $0 \cdot x \leq 0$ все числа).

Пример 1. Решить неравенство $2x > 18$.

Решение.

Разделив обе части неравенства на положительное число 2 (знак неравенства сохраняется), получим $x > 9$.

Ответ: $x \in (9; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $-2x \geq 18$.

Решение.

Разделив обе части неравенства на отрицательное число -2 (знак неравенства меняется), получим $x \leq -9$.

Ответ: $x \in (-\infty; -9]$.

Пример 3. Решить неравенство $(2x+1)(x+5) \geq 2x^2 - 4x + 1$.

Решение.

$$2x^2 + 6x + 5 \geq 2x^2 - 4x + 1, \quad 10x \geq -4, \quad x \geq -0,4.$$

Ответ: $x \in [-0,4; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $\frac{x-1}{3} - x > \frac{x+4}{2}$.

Решение.

Умножив обе части уравнения на число 6 (наименьшее общее кратное знаменателей), получим $2(x-1) - 6x > 3(x+4)$

$$2x - 2 - 6x > 3x + 12, \quad -7x > 14, \quad x < -2.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2)$.

Задания для самоконтроля

Решить неравенства:

1. $2x + 5 \geq 3x - 1$.

Ответ: $x \in (-\infty; 6]$.

2. $5(x + 3) - (x - 2) < x$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{17}{3}\right)$.

3. $2x - (3x + 1) \geq -x$.

Ответ: $\emptyset$.

4. $\frac{4,5x - 1}{3} \leq \frac{3x + 2}{2}$.

Ответ: $x \in R$.

Задания для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1. $3x + 10 < 2x - 1$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 11)$	$(-\infty; 11]$	$(-\infty; -11)$	$(11; +\infty)$	другой вариант ответа

2. $7(x - 1) - (2x + 4) > 4x$

А	Б	В	Г	Д
$[11; +\infty)$	$(-\infty; 11]$	$(-\infty; -11)$	$(11; +\infty)$	другой вариант ответа

3. $\frac{4x + 5}{3} \geq \frac{3x - 12}{2}$

4. $2x - \frac{5x + 4}{7} \leq -2x + 1$

3.2 Решение неравенств методом интервалов

Пусть имеем неравенство вида $f(x) > 0$ (знак может быть $<$, $\geq$, $\leq$).

Метод интервалов заключается в применении следующей схемы:

- 1) найти область определения для функции $f(x)$
- 2) найти нули функции
- 3) на числовой оси отметить нули

- 4) установить знак на каждом из интервалов
- 5) выбрать нужные интервалы
- 6) записать ответ.

В случае неравенства вида $\frac{g(x)}{\varphi(x)} > 0$ находят нули числителя и нули знаменателя.

Пример 1. Решить неравенство $(x-5)(x+2) < 0$.

Решение.

Область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

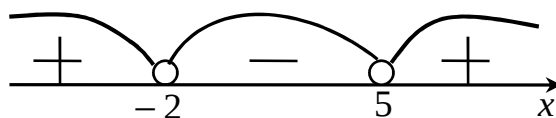
Найдем нули функции $f(x)$. Для этого решим уравнение $(x-5)(x+2) = 0$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 5$

Определим знаки на интервалах

$$f(-3) = (-3-5)(-3+2) > 0$$

$$f(0) = (0-5)(0+2) < 0$$

$$f(6) = (6-5)(6+2) > 0$$



Выбираем промежуток $(-2; 5)$.

Ответ: $x \in (-2; 5)$.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{x+3}{x-7} \geq 0$

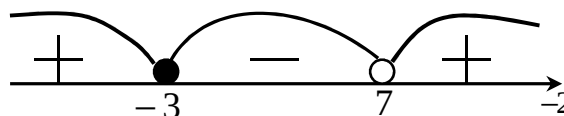
Решение.

Область определения $D(f) = (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$. Найдем нули числителя функции $f(x)$. Для этого решим уравнение $x+3=0$, $x=-3$. Найдем нули знаменателя функции $f(x)$. Для этого решим уравнение $x-7=0$, $x=7$.

$$f(-4) = \frac{-4+3}{-4-7} > 0$$

$$f(0) = \frac{0+3}{0-7} < 0$$

$$f(8) = \frac{8+3}{8-7} > 0$$



Выбираем промежутки $(-\infty; -3]$ и $(7; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup (7; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{(x+3)(x-1)}{x^2+5x} \leq 0$

Решение.

Область определения $D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; +\infty)$

Найдем нули числителя. Для этого решим уравнение $(x+3)(x-1)=0$, корни $x=-3$, $x=1$. Нули знаменателя находим из уравнения $x^2+5x=0$. Корни: $x=-5$, $x=0$. Определим знак на каждом интервале

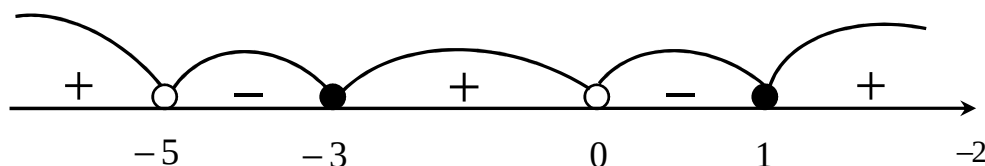
$$f(-6) = \frac{(-6+3)(-6-1)}{-6(-6+5)} = \frac{-3 \cdot (-7)}{-6 \cdot (-1)} > 0$$

$$f(-4) < 0$$

$$f(-1) > 0$$

$$f(0,5) < 0$$

$$f(2) > 0$$



Ответ: $x \in (-5; -3] \cup (0; 1]$.

Задания для самоконтроля

Решить неравенства

1. $(x+4)(x+2) \leq 0$.

Ответ: $x \in [-4; -2]$.

2. $(x-1)(x+3) > 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

3. $x(3x+1) \geq 0$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [0; +\infty)$

4. $\frac{x-2}{x+3} < 0$.

Ответ: $x \in (-3; 2)$.

5. $\frac{x-1}{x-7} \leq 0$.

Ответ: $x \in [1; 7)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить неравенство $(x+1)(x-5) > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(-1; 5)$	другой вариант ответа

2. Решить неравенство $(x-1)(x+4) < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4)$	$(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(1; -4)$	другой вариант ответа

3. Решить неравенство $(x-4)(x-5)x \geq 0$.

А	Б	В	Г
$[5; +\infty)$	$[0; 4] \cup [5; +\infty)$	$(-\infty; 0] \cup [4; 5]$	другой вариант ответа

4. Решить неравенство $\frac{2x-4}{x+1} \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(-1; 2]$	другой вариант ответа

5. Решить неравенство $\frac{3x}{x+1} < \frac{7}{x+1}$. (ВНО - 2011)

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$	$\left(-1; \frac{7}{3}\right)$	$(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{7}{3}\right)$

6. Решить неравенство $(x+4)(x-7) > 3(x-7)$. (ВНО - 2012)

А	Б	В	Г	Д
$(7; +\infty)$	$(-1; 7)$	$(-1; 7) \cup (7; +\infty)$	$(-1; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$

7. Решить неравенство $\frac{4}{x+3} + \frac{6}{x} \geq 1$. (ВНО - 2013).

В ответе записать сумму всех целых его решений.

8. Решить неравенство $\frac{4}{x+3} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x-3} \leq 0$

3.3 Логарифмические неравенства

Решение логарифмических неравенств базируется на том, что функция $y = \log_a x$, при $a > 1$ возрастает, а при $0 < a < 1$ убывает. Логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

при $a > 1$ равносильно системе неравенств
$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases},$$

а при $0 < a < 1$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Пример 1. Решить неравенство $\log_7(5x+2) > \log_7(4x-1)$.

Решение.

Данное неравенство, с учетом того что основание логарифма $a = 7 > 1$, равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5x+2 > 4x-1 \\ 5x+2 > 0 \\ 4x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > -0,4 \\ x > 0,25 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0,25.$$

Ответ: $x \in (0,25; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{0,4}(3x-2) \geq \log_{0,4}(2x+1)$.

Решение.

Данное неравенство, с учетом того что основание $a = 0,4 < 1$, равно-

сильно системе неравенств $\begin{cases} 3x-2 \geq 2x+1 \\ 3x-2 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > \frac{2}{3} \\ x > -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$

Ответ: $x \in [3; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство $\log_4(x^2 - 5x + 8) > \frac{1}{2}$.

Решение.

Преобразуем данное неравенство к виду $\log_4(x^2 - 5x + 8) > \log_4 2$.

Т.к. основание $a = 4 > 1$, то полученное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 8 > 2 \\ x^2 - 5x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-2) > 0 \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

Ответ: $x \in (2; 3)$.

Пример 4. Решить неравенство $\log_{0,5}^2 x + 6 \leq 5\log_{0,5} x$.

Решение.

Преобразуем данное неравенство к виду $\log_{0,5}^2 x - 5\log_{0,5} x + 6 \leq 0$.

Выполнив замену $t = \log_{0,5} x$, получим квадратное неравенство относительно неизвестной t :

$$t^2 - 5t + 6 \leq 0 \text{ или } (t-2)(t-3) \leq 0, \text{ откуда } 2 \leq t \leq 3.$$

Выполняя обратную замену, получим неравенство $2 \leq \log_{0,5} x \leq 3$, которое равносильно системе

$$\begin{cases} \log_{0,5} x \geq 2 \\ \log_{0,5} x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,5} x \geq \log_{0,5} 0,25 \\ \log_{0,5} x \leq \log_{0,5} 0,125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 0,25 \\ x \geq 0,125 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,125 \leq x \leq 0,25$$

Ответ: $x \in [0,125; 0,25]$.

Задания для самоконтроля

Решить неравенства.

1. $\log_{0,5} x \geq 2$ Ответ: $x \in (0; 0,25]$.

1. $\log_4(x+9) > \log_4(2x-1)$. Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}; 10\right)$.

2. $\log_{0,2}(7x-2) \leq \log_{0,2}(6x+10)$. Ответ: $x \in [12; +\infty)$.

3. $\log_{0,5}(x^2 + 3x) \geq -2$ Ответ: $x \in [-4; -3) \cup (0; 1]$.

Задания для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1. $\log_{0,5}(2x-4) \leq -3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 6]$	$(-\infty; 2]$	$[6; +\infty)$	$(2; 6]$	другой вариант ответа

2. $\log_5 x \leq 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 25]$	$(-\infty; 25]$	$[25; +\infty)$	$(0; +\infty)$	другой вариант ответа

3. $\log_{0,5}(x-1) > 2$. (ВНО11).

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1,25)$	$(2; +\infty)$	$(1,25; +\infty)$	$(0; 0,25)$	$(1; 1,25)$

$$4. 3 + \log_2 x \geq 0.$$

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$	$\left(0; \frac{1}{8}\right]$	$\left(-\infty; \frac{1}{8}\right]$	$[8; +\infty)$	$[-6; +\infty)$

$$5. \log_{0,3}^2 x < \log_{0,3} x$$

$$8. 3\log_{0,7}^2 x < 4\log_{0,7} x - 1.$$

$$6. \log_5^2 x + 6\log_5 x + 5 \geq 0.$$

$$9. \log_2(x+4) + \log_2(x+1) > 2.$$

$$7. \lg^2 x - 6\lg x \geq 2.$$

$$10. \log_8 x + \frac{4}{\log_8 x} - 5 \leq 0.$$

3.4 Показательные неравенства

Решение показательных неравенств базируется на том, что функция $y = a^x$, при $a > 1$ возрастает, а при $0 < a < 1$ убывает. Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (a - постоянная. Например $a = 10$) при $a > 1$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

В случае, когда $a = a(x)$, т.е. является функцией аргумента x , неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ a > 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Пример 1. Решить неравенство $2^{5x-1} > 2^{4x+7}$.

Решение.

Данное неравенство, с учетом того что основание степени $2 > 1$, равносильно неравенству $5x - 1 > 4x + 7$. Откуда $x > 8$.

Ответ: $x \in (8; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $0,2^{x^2} > 0,0016$.

Решение.

Преобразуем данное неравенство к виду $0,2^{x^2} > (0,2)^4$.

Полученное неравенство, с учетом того, что основание степени $0,2 < 1$, равносильно неравенству $x^2 < 4$. Откуда $-2 < x < 2$.

Ответ: $x \in (-2; +2)$.

Пример 3. Решить неравенство $7^x \leq 9$.

Решение.

Используя основное логарифмическое тождество, преобразуем данное неравенство к виду $7^x \leq 7^{\log_7 9}$. Полученное неравенство, с учетом того, что основание степени $a = 7 > 1$, равносильно неравенству $x \leq \log_7 9$.

Ответ: $x \in (-\infty; \log_7 9]$.

Пример 4. Решить неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-7x-4} \geq 9^{x-1}$.

Решение.

Преобразуем данное неравенство к виду $3^{x^2+7x+4} \geq 3^{2x-2}$.

Полученное неравенство равносильно неравенству $x^2 + 5x + 6 \geq 0$

или $(x+2)(x+3) \geq 0$, решая которое получим $\begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq -2 \end{cases}$

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$.

Задания для самоконтроля

Решить неравенства:

1. $7^{5x} < 7^{4x+1}$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1)$.

2. $0,5^x \leq 4$.

Ответ: $x \in [-2; +\infty)$.

3. $5^x > 4$.

Ответ: $x \in (\log_5 4; +\infty)$.

4. $10^{x^2+4x} \geq 0,001$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$.

Задания для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1. $2^{3x} > 2^{x-2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; 1)$	другой вариант ответа

2. $0,4^{3x} > 0,4^{x-2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; 1)$	другой вариант ответа

3. $2^x \leq 3$. (ВНО 13).

А	Б	В	Г	Д
$(0; \log_2 3]$	$(-\infty; \log_2 3]$	$\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$	$(-\infty; \log_3 2]$	$[\log_2 3; +\infty)$

4. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3x-4} > 25^{x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1; 2)$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	другой вариант ответа

5. $3^{x^2+x} \geq 10^{\lg 9}$.

8. $4 \cdot 10^{2x} + 3 \cdot 10^x + 1 \leq 0$.

6. $3^x - 9^x < -6$.

9. $2^{x+2} - 2^{x+4} + 5^{x+2} < 2^{x+3} + 5^{x+1}$.

7. $0,5^x + 0,5^{1-x} > 3$.

10. $(x+1)^{x+3} \leq 1$.

3.5 Тригонометрические неравенства

Решение неравенств, содержащих тригонометрические функции, сводится, в итоге к решению простейших тригонометрических неравенств вида $\sin t > a$, $\cos t \leq a$, $\operatorname{ctg} t > a$ и т.д.

Пример. Решить неравенство $\sin x > -\frac{1}{2}$.

Решение.

Те x , которые удовлетворяют данному неравенству, соответствуют точкам синусоиды, ордината которых больше числа $-\frac{1}{2}$. Очевидно,

что $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < x < \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, то есть $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$.

В силу периодичности, имеем $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

Задания для самоконтроля

Решить неравенства:

1. $\sin x > \frac{1}{2}$. Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}$.

2. $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}$.

Задания для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1. $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. $\sin^2 x > 1$.

2. $\cos x < \frac{1}{2}$.

5. $\sin 2x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. $\cos(4x + \frac{\pi}{3}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\operatorname{tg} x \geq 1$.

6. $\cos 4x \geq 0$.

9. $\operatorname{tg} 3x < 0$.

3.6 Системы неравенств

Решением системы неравенств называется значение переменной, при котором верно каждое неравенство.

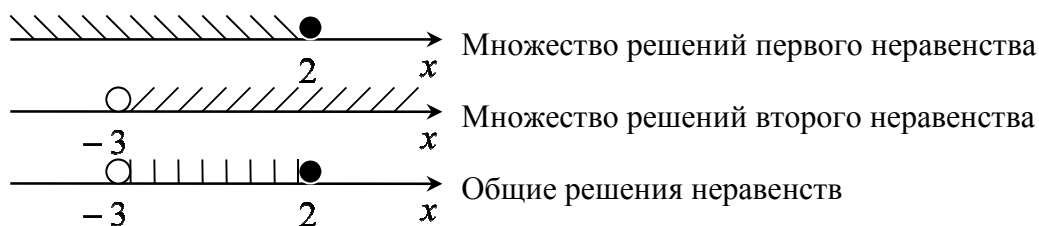
Решить систему – значит отыскать все решения или доказать, что их нет.

Схема решения системы неравенств:

- 1) решается каждое неравенство в отдельности
- 2) изображается каждое множество решений на отдельной числовой оси
- 3) находятся общие решения неравенств (пересечение множеств)

Пример 1. Решить систему неравенств $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > -3 \end{cases}$

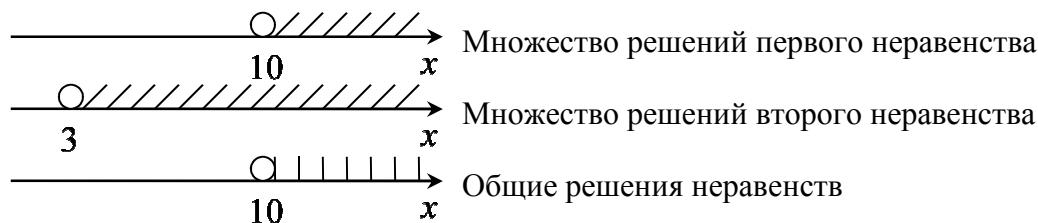
Решение.



Ответ: $x \in (-3; 2]$.

Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases} x > 10 \\ x > 3 \end{cases}$

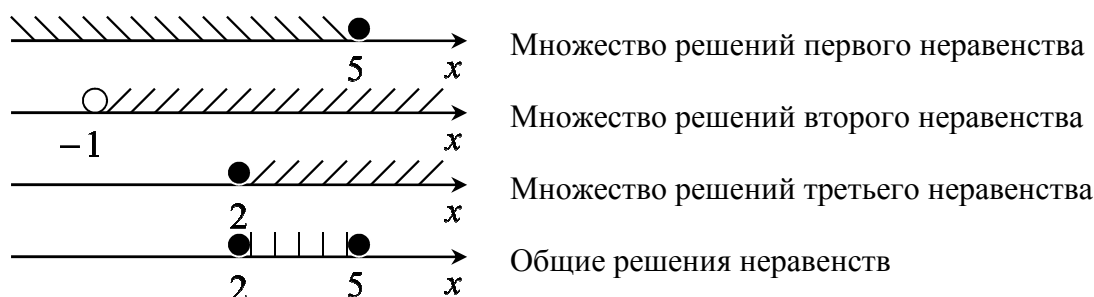
Решение.



Ответ: $x \in (10 ; +\infty)$.

Пример 3. Решить систему неравенств $\begin{cases} -1 < x \leq 5 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Решение.



Преобразовав двойное неравенство, получим систему $\begin{cases} x > -1 \\ x \leq 5 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Ответ: $x \in [2 ; 5]$.

Задания для самоконтроля

Решить системы неравенств:

1. $\begin{cases} 4x - 3 > 5 \\ 2x - 1 \leq x + 19 \end{cases}$

Ответ: $x \in (2 ; 20]$.

2. $\begin{cases} -x - 9 > 2x + 12 \\ 5x - 6 > x + 14 \end{cases}$

Ответ: $\emptyset$.

3. $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases}$

Ответ: $x \in [0 ; 3)$.

Задания для самостоятельного решения

Решить системы неравенств:

$$1. \begin{cases} x \leq 10 \\ x < 3 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -5 \leq \frac{3x-3}{2} < -1 \end{cases} \quad 7. \begin{cases} x^2 + x - 2 < 0 \\ \frac{x-1}{x+3} \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x > 3x - 5 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} (x+2)(x+5) > 0 \\ (x+3)(x+7) \leq 0 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 4}{x+7} \leq 0 \\ 2x - 4 < 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x > -10 \\ 2(3x-1) < 3(4x+1)+16 \\ 4(2+x) < 3x+8 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad 9. \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

4 ПРОГРЕССИИ

4.1 Арифметическая прогрессия

Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называется арифметической прогрессией, если каждый ее член, начиная со второго, отличается от предыдущего на одно и то же число d .

a_1 – первый член арифметической прогрессии, a_n – n -й член;

d – разность арифметической прогрессии. Для любого натурального n выполняется $a_{n+1} = a_n + d$. n -й член находится как $a_n = a_1 + d(n-1)$. Сумма первых n элементов прогрессии находится как

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Пример 1. Дана арифметическая прогрессия 4, 6, 8, ... Найти:

а) разность прогрессии;

б) формулу нахождения a_n ;

в) формулу нахождения S_n .

Решение.

а) разность прогрессии найдем вычитанием $d = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$;

б) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 4 + (n-1) \cdot 2 = 2 + 2n$;

в) $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{8 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = 3n + n^2$.

Ответ: $d = 2$, $a_n = 2 + 2n$, $S_n = 3n + n^2$.

Пример 2. Найти сумму первых 5 членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 3$, $d = -4$.

Решение.

Воспользуемся формулой суммы и получим

$$S_5 = \frac{2 \cdot 3 + (5-1) \cdot (-4)}{2} \cdot 5 = \frac{6-16}{2} \cdot 5 = -25.$$

Ответ: -25 .

Задания для самоконтроля

1. В арифметической прогрессии $a_1 = 3$, $a_2 = 1$. Найти:

а) разность прогрессии;

б) формулу нахождения a_n ;

в) формулу нахождения S_n .

Ответ: $d = -2$, $a_n = 5 - 2n$, $S_n = 4n - n^2$.

2. Найти пятый член арифметической прогрессии если $a_4 = 9$,

$a_{17} = -17$.

Ответ: $a_5 = 7$

Задания для самостоятельного решения

1. Даны $a_1 = 4$ и $a_2 = -1$ арифметической прогрессии. Указать формулу нахождения n -го члена этой прогрессии. (ВНО-13)

А	Б	В	Г	Д
$a_n = -1 + 5n$	$a_n = 7 - 3n$	$a_n = 5 - n$	$a_n = 1 + 3n$	$a_n = 9 - 5n$

2. Даны $a_1 = 4$ и $a_3 = 24$ арифметической прогрессии. Найти разность арифметической прогрессии.

А	Б	В	Г	Д
$d = 20$	$d = -20$	$d = -10$	$d = 10$	другой вариант ответа

4.2 Геометрическая прогрессия

Последовательность чисел $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ называется геометрической прогрессией, если каждый ее член, начиная со второго, отличается от предыдущего в одно и то же число q .

b_1 – первый член геометрической прогрессии, b_n – n -й член.

q – разность геометрической прогрессии, для любого натурального n выполняется $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ – формула нахождения n -го члена.

Сумма первых n элементов прогрессии $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. При $|q| < 1$, имеем

формулу бесконечной убывающей прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Пример 1. Найти сумму первых 5 членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 3$, $q = 2$.

Решение.

Воспользуемся формулой суммы $S_5 = \frac{b_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{3(1-2^5)}{1-2} = \frac{-93}{-1} = 93$.

Ответ: 93.

Пример 2. Найти знаменатель и сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots$

Решение.

Знаменатель найдем делением элемента на предыдущий

$$q = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Воспользуемся формулой суммы $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{9}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{\frac{4}{3}} = \frac{27}{4}.$

Ответ: $q = -\frac{1}{3}, S = \frac{27}{4}.$

Задания для самоконтроля

1. Найти знаменатель геометрической прогрессии $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

Ответ: $q = \frac{1}{3}.$

2. Найти сумму первых 7 членов геометрической прогрессии, если

$b_1 = 4, q = \frac{1}{2}.$ *Ответ:* $\frac{127}{16}.$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти сумму с третьего по седьмой членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 4, q = \frac{1}{2}.$

2. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если $b_9 = 24$ и

$$b_6 = -\frac{1}{9}. \text{ (ВНО-11)}$$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	-6	3	6	$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

3. Какая из ниже приведенных последовательностей является геометрической прогрессией, знаменатель которой $q < 0$?

А	-25; 20; -15; 10
Б	-80; -40; -20; -10
В	30; 10; -10; -30
Г	10; -20; 40; -80
Д	-15; -30; -45; -60

5 ФУНКЦИЯ. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИИ. ГРАФИКИ

5.1 Функция. Область определения

Если каждому x из области D , по некоторому закону f соответствует одно и только одно y из области E , то говорят, что задана функция $y = f(x)$. Например, $y = 3x + 1$ – функция, так как каждому x из множества R , по закону «умножаем x на 3, и к результату добавляем 1», соответствует единственное значение y из множества R .

x – аргумент или независимая переменная, y – значение функции,
 D – область определения функции, E – область значений функции.

Пример 1. Найти область определения функции $y = x^2 + 3x + 4$.

Решение.

Выражение $x^2 + 3x + 4$ имеет смысл при любых x . Значит, $D = R$.

Ответ: R .

Пример 2. Найти область определения функции $y = \sqrt{2x - 8}$.

Решение.

Выражение $\sqrt{2x - 8}$ имеет смысл при x , удовлетворяющих неравенству $2x - 8 \geq 0$. Значит, $D = [4; +\infty)$.

Ответ: $[4; +\infty)$.

Пример 3. Найти область определения функции $y = \log_5(4 - 8x)$.

Решение.

Выражение $\log_5(4 - 8x)$ имеет смысл при x , удовлетворяющих неравенству $4 - 8x > 0$. Значит, $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Пример 4. Найти область определения функции $y = 2 - \frac{1}{x}$.

Решение.

Выражение $2 - \frac{1}{x}$ имеет смысл при $x \neq 0$

Решением системы является множество $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пример 5. Найти область определения функции $y = \frac{3x-4}{x-1} + \sqrt{x}$.

Решение.

Выражение $\frac{3x-4}{x-1} + \sqrt{x}$ имеет смысл при x , удовлетворяющих си-

стеме неравенств $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Решением системы является множество $D = [0;1) \cup (1;+\infty)$.

Ответ: $[0;1) \cup (1;+\infty)$.

Задания для самоконтроля

Найти область определения функции

1. $y = \sqrt{1-x}$. *Ответ:* $(-\infty;1]$.

2. $y = \ln(4x-16)$. *Ответ:* $(4;+\infty)$.

3. $y = \frac{x^2+4x+9}{x^2-25}$. *Ответ:* $(-\infty;-5) \cup (-5;5) \cup (5;+\infty)$.

Задания для самостоятельного решения

Найти область определения функций:

1. $y = \log_3(x+9)$. (ВНО - 2012)

А	Б	В	Г	Д
$(9;+\infty)$	$(-9;+\infty)$	$(-9;0)$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$

2. $y = \sqrt[4]{2x-10}$.

А	Б	В	Г	Д
$[5;+\infty)$	$[-5;+\infty)$	$(-5;0]$	$(-\infty;5]$	другой вариант ответа

3. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0;+\infty)$	$(-1;1)$	$(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$	$\{\pm 1\}$	другой вариант ответа

4. $y = \frac{5}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$\{0\}$	$(-\infty; 0)$	другой вариант ответа

5. $y = \log_7 \frac{7}{x-2}$.

6. $y = \frac{\sqrt{(x-2)(x+10)}}{x+8}$.

5.2 Виды функций

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке $(a; b)$ (рис. 5.1), если для любых x_1 и x_2 из $(a; b)$, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на промежутке $(a; b)$ (рис. 5.2), если для любых x_1 и x_2 из $(a; b)$, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

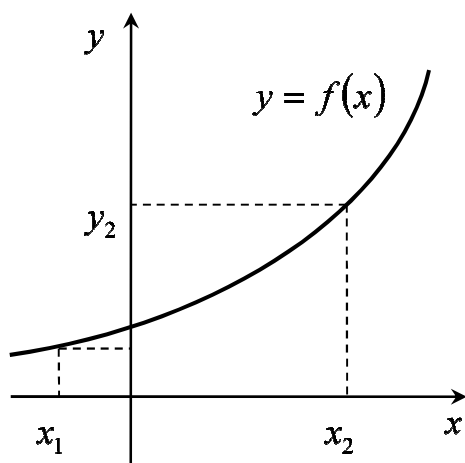


Рисунок 5.1

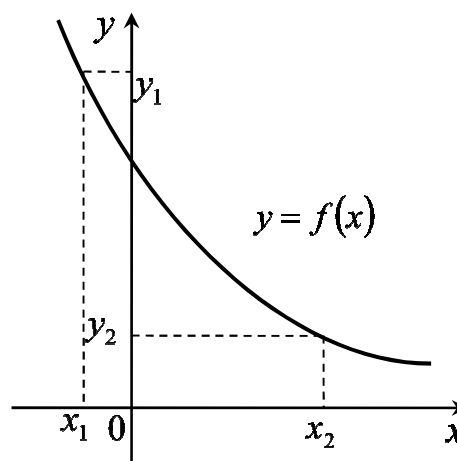


Рисунок 5.2

Например, функция $y = 2x$ всюду возрастающая, так как для любых x_1, x_2 , таких, что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $2x_2 > 2x_1$, то есть $y_2 > y_1$.

Функция $y = f(x)$ называется **четной** (рис. 5.3), если для любого $x \in D$ выполняется $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $y = f(x)$ называется **нечетной** (рис. 5.4), если для любого $x \in D$ выполняется $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

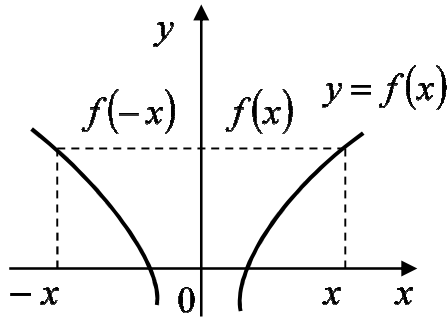


Рисунок 5.3

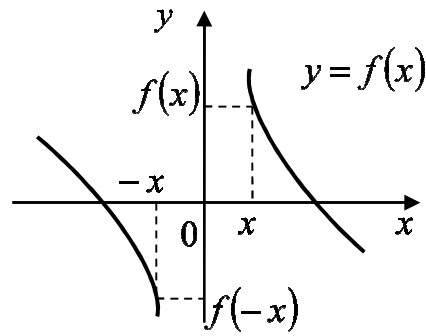


Рисунок 5.4

Функция $y = f(x)$ называется **периодической** (рис. 5.5) с периодом T , если для любого $x \in D$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Например, период функций $\sin x$, $\cos x$ равен 2π , а период функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ равен π .

Если функция $y = f(x)$ имеет период T , то функция $y = Cf(kx + b)$

имеет период $\frac{T}{|k|}$. Например, функция $f(x) = -5\cos(8\pi x + 7)$ имеет пе-

риод $\frac{2\pi}{|8\pi|} = \frac{1}{4}$.

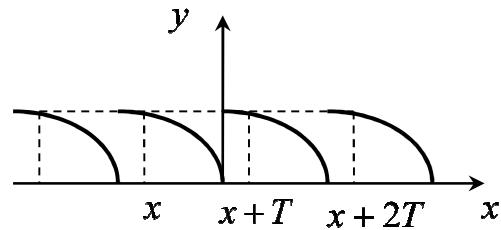


Рисунок 5.5

Пример 1. Исследовать на четность (нечетность) функцию $y = x^{10} - 3x^4$.

Решение.

$f(-x) = (-x)^{10} - 3(-x)^4 = x^{10} - 3x^4 = f(x)$. Выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Ответ: четная.

Пример 2. Исследовать на четность (нечетность) функцию $y = x^9 + 4x^3$.

Решение.

$$f(-x) = (-x)^9 + 4(-x)^3 = -x^9 - 4x^3 = -f(x).$$

Ответ: нечетная.

Пример 3. Исследовать на четность (нечетность) функцию $y = x + 1$.

Решение

$$f(-x) = (-x) + 1 = -x + 1 \neq f(x).$$

$$f(-x) = (-x) + 1 = -(x - 1) \neq -f(x)$$

Ответ: не является ни четной, ни нечетной.

Пример 4 . Найти период функции $f(x) = \operatorname{ctg}(4x + 7)$.

Решение.

$$\text{Функция } f(x) = \operatorname{ctg}(4x + 7) \text{ имеет период } \frac{\pi}{|4|} = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Пример 5 . Найти период функции $f(x) = 3\sin(8\pi x - 10) + 5$.

Решение.

$$\text{Функция } f(x) = 3\sin(80\pi x - 10) + 5 \text{ имеет период } \frac{2\pi}{|80\pi|} = 0,025.$$

Ответ: 0,025.

Задания для самоконтроля

Исследовать на четность (нечетность) функции:

1. $y = 10x^7 - 3x^5$. *Ответ:* нечетная.

2. $y = -4x^6 + 3x^4$. *Ответ:* четная.

3. $y = x^2 - 1$. *Ответ:* четная.

4. $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. *Ответ:* нечетная.

5. $y = \frac{x}{x - 1}$. *Ответ:* не является ни четной, ни нечетной.

Задания для самостоятельного решения

Исследовать на четность (нечетность) функции:

1. $y = x^8 + x^2$.

А	Б	В	Г
нечетная	четная	ни четная, ни нечетная	другой вариант ответа

2. $y = x^3 + 2x$.

А	Б	В	Г
нечетная	четная	ни четная, ни нечетная	другой вариант ответа

3. $y = -x^5 + 2x^2$.

А	Б	В	Г
нечетная	четная	ни четная, ни нечетная	другой вариант ответа

4. $y = x^5 + x^2 + 9$.

А	Б	В	Г
нечетная	четная	ни четная, ни нечетная	другой вариант ответа

5. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

А	Б	В	Г
нечетная	четная	ни четная, ни нечетная	другой вариант ответа

6. $y = \frac{x - 1}{x + 1}$.

А	Б	В	Г
нечетная	четная	ни четная, ни нечетная	другой вариант ответа

Определить период функций (7-11):

7. $f(x) = 3\sin(6\pi x - 12)$

А	Б	В	Г	Д
3π	$\pi/2$	$\pi/3$	3	другой вариант ответа

8. $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x + 2)$

А	Б	В	Г	Д
2π	$\pi/2$	1	π	другой вариант ответа

9. $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + 2\right)$

А	Б	В	Г	Д
2π	$\pi/2$	1	π	другой вариант ответа

10. Функция $y = f(x)$ убывает на интервале $(-\infty; +\infty)$. Указать правильное неравенство. (ВНО11)

А	Б	В	Г	Д
$f(1) > f(-1)$	$f(1) > f(10)$	$f(1) < f(8)$	$f(-1) < f(0)$	$f(1) > f(0)$

11. Функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(-\infty; +\infty)$. Какое из указанных чисел может быть значением этой функции в точке $x = 8$, если $f(1) = -2$, $f(9) = 5$?

А	Б	В	Г	Д
-8	-3	-2	3	8

5.3 Основные функции

Линейная функция это функция вида $y = kx + b$, где $k, b \in \mathbb{R}$.

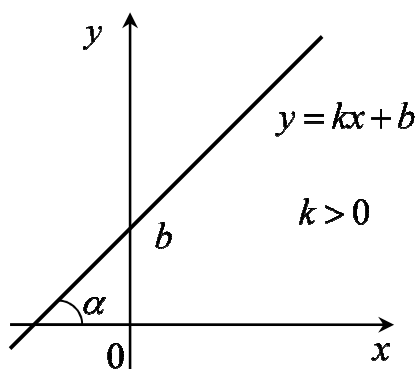


Рисунок 5.6

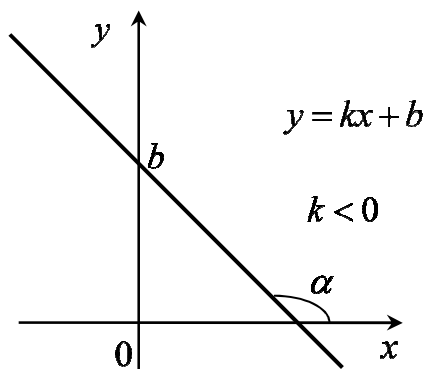


Рисунок 5.7

Свойства

Графиком линейной функции является прямая. Число k называется угловым коэффициентом прямой и равняется тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси Ox . При $k > 0$ функция возрастает на всей числовой оси (рис. 5.6). При $k < 0$ функция убывает (рис. 5.7).

При $b = 0$ имеем функцию $y = kx$ (прямая пропорциональность). График такой функции (рис. 5.8) проходит через начало координат.

При $k = 0$ имеем функцию $y = b$ (постоянная). График такой функции (рис. 5.9) проходит через точку $(0; b)$ и параллелен оси Ox .

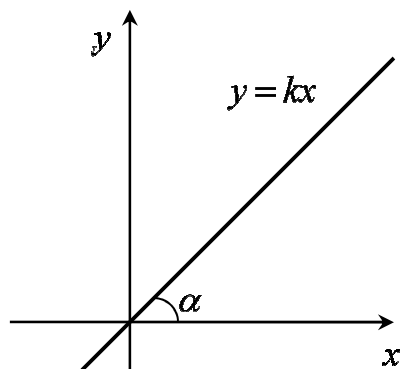


Рисунок 5.8

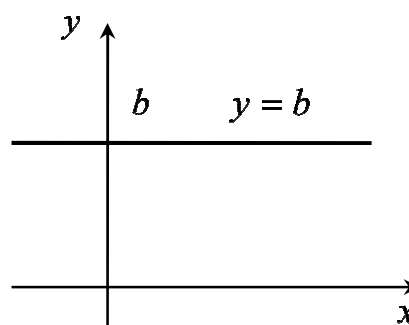


Рисунок 5.9

Обратная пропорциональность – функция вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \in \mathbb{R}$.

Свойства

1. Область определения $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Область значений $E = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3. Нечетная. График этой функции – гипербола.
4. Если $k > 0$, то график (рис. 5.10) размещается в первой и третьей четвертях. Если $k < 0$, то во второй и четвертой (рис. 5.11).
5. Если $k > 0$, то на всей области определения функция убывает.

Если $k < 0$, то на всей области определения функция возрастает.

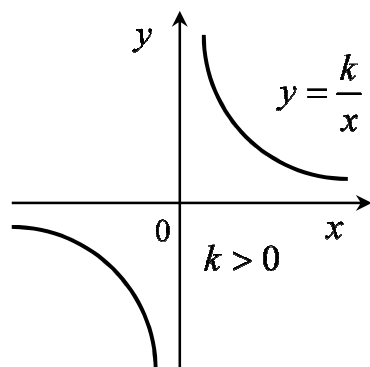


Рисунок 5.10

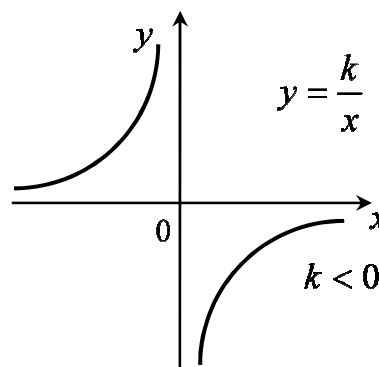


Рисунок 5.11

Функция $y = x^2$.

Свойства

1. Область определения $D = R$.
2. Область значений $E = [0; +\infty)$.
3. Четная. График функции – парабола ветвями вверх (рис. 5.12)
4. Если $x \in (-\infty; 0)$, то функция убывает. Если $x \in (0; +\infty)$, то возрастает.

Функция $y = |x|$.

Свойства

1. Область определения $D = R$.
2. Область значений $E = [0; +\infty)$.
3. Четная. График этой функции на рисунке 5.13.
4. Если $x \in (-\infty; 0)$, то функция убывает. Если $x \in (0; +\infty)$, то возрастает.

Функция $y = \sqrt{x}$.

Свойства

1. Область определения $D = [0; +\infty)$.
2. Область значений $E = [0; +\infty)$.
3. Ни четная, ни нечетная. График функции на рисунке 5.14.
4. При $x \in (0; +\infty)$ функция возрастает.

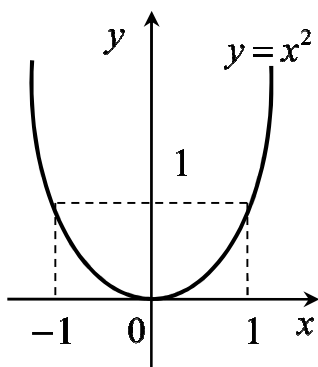


Рисунок 5.12

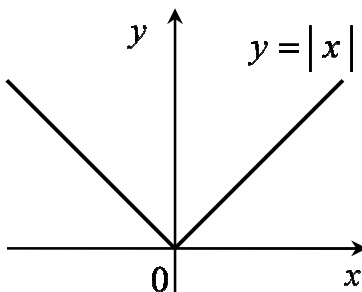


Рисунок 5.13

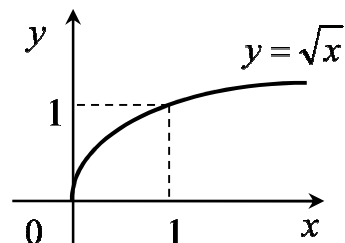


Рисунок 5.14

Функция $y = x^3$.

Свойства

1. Область определения функции $D = R$.
2. Область значений $E = R$.
3. Нечетная. График функции – кубическая парабола (рис. 5.15).
5. Функция возрастает на всей области определения.

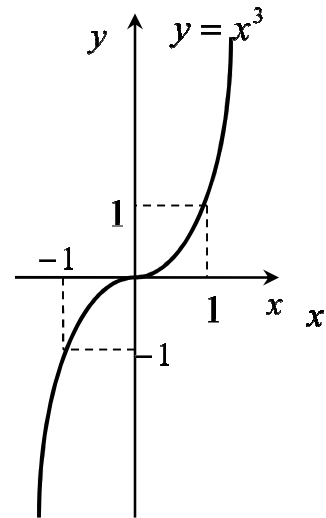


Рисунок 5.15

Показательная функция $y = a^x$

Свойства

1. Область определения $D = R$.
 2. Область значений $E = (0; +\infty)$.
 3. Если $a > 1$, то функция возрастает на всей области определения (рис. 5.16 а).
- Если $0 < a < 1$, то убывает на всей области определения (рис. 5.16 б).

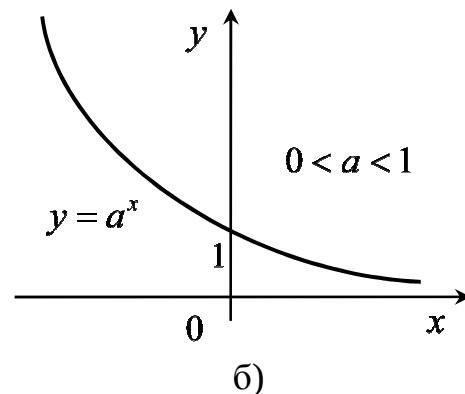
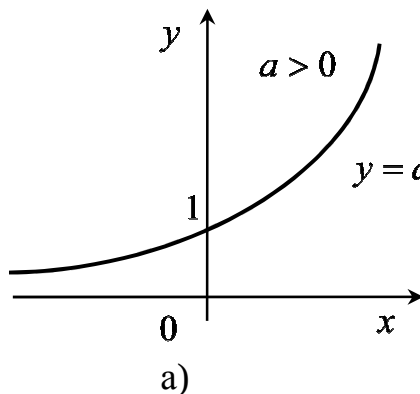


Рисунок 5.16

Логарифмическая функция $y = \log_a x$

Свойства

1. Область определения $D = (0; +\infty)$.
2. Область значений $E = R$.
3. Если $a > 1$, то функция возрастает (рис. 5.17 а) на промежутке $(0; +\infty)$. Если $a < 1$, то функция убывает (рис. 5.17 б) на промежутке $(0; +\infty)$

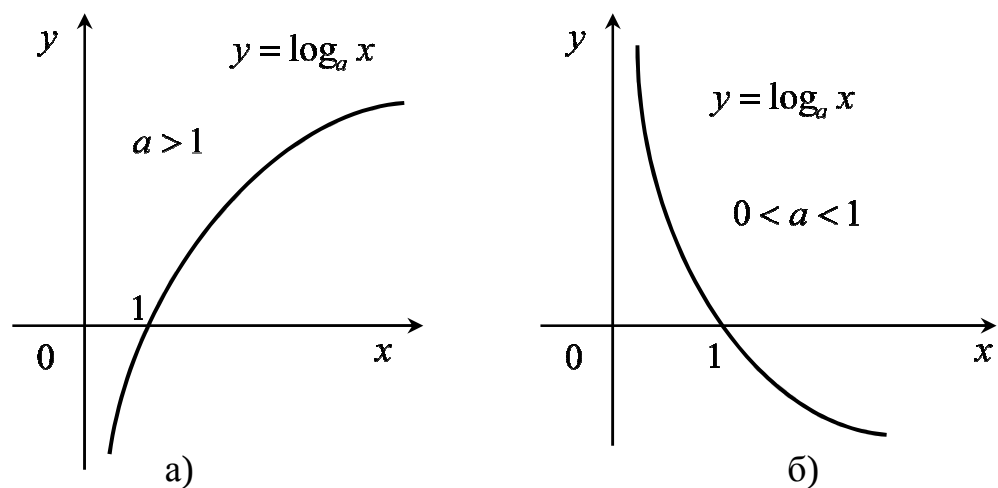


Рисунок 5.17

Функция $y = \sin x$

Свойства

1. Область определения $D = \mathbb{R}$. Область значений $E = [-1; 1]$.
2. Нечетная. График этой функции – синусоида (рис 5.18).
3. Периодическая. Период функции $T = 2\pi$.

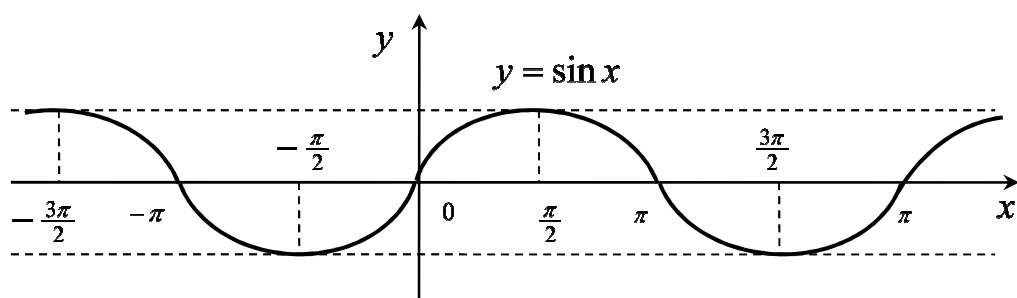


Рисунок 5.18

Функция $y = \cos x$

Свойства

1. Область определения $D = \mathbb{R}$. Область значений $E = [-1; 1]$.
2. Четная. График этой функции – косинусоида (рис 5.19)
3. Периодическая. Период функции $T = 2\pi$.

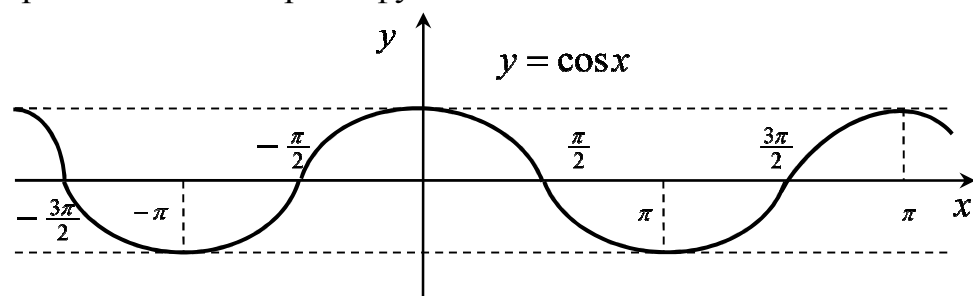


Рисунок 5.19

Функция $y = \operatorname{tg} x$

Свойства

1. Область определения – все x , кроме $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$
2. Область значений $E = \mathbb{R}$.
3. Нечетная.
4. График функции – тангенсоида (рис 5.20).
5. Периодическая. Период $T = \pi$.
6. Возрастает на всей области определения.

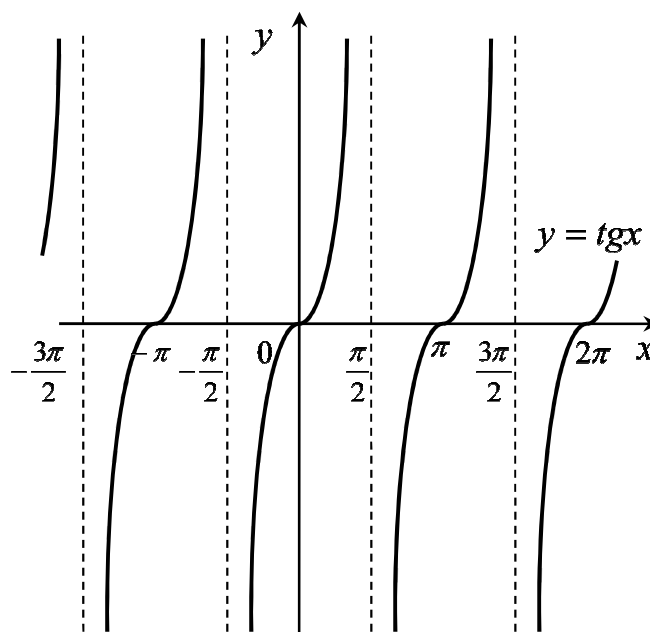


Рисунок 5.20

Функция $y = \operatorname{ctg} x$

Свойства

1. Область определения – все x , кроме πk , где $k \in \mathbb{Z}$.
2. Область значений $E = \mathbb{R}$.
3. Нечетная.
4. График этой функции – котангенсоида (рис 5.21).
5. Периодическая. Период функции $T = \pi$.
6. Убывает на всей области определения.

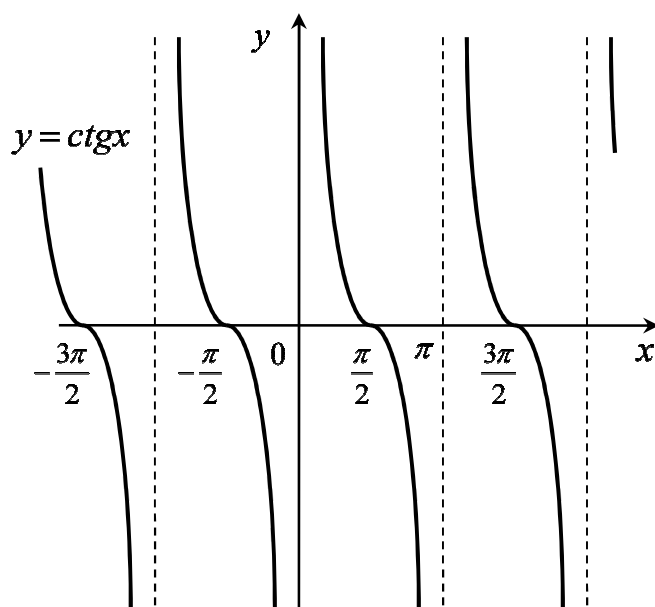


Рисунок 5.21

Пример 1. Проверить принадлежат ли $A(-2; 0)$, $B(-2; 7)$ прямой $y = 4x + 8$

Решение. Подставим координаты точек в уравнение прямой

$0 = 4 \cdot (-2) + 8$. Значит, $A(0; -1)$ принадлежит прямой a .

$7 \neq 4 \cdot (-2) + 8$. Значит, $B(-2; 7)$ не принадлежит прямой a .

Ответ: $A \in a$, $B \notin a$.

Пример 2. Найти точки пересечения графиков функций $y = 4$, $y = x^2$

Решение.

Для нахождения точек пересечения нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Точки пересечения $P_1(-2; 4)$, $P_2(2; 4)$

Ответ: $P_1(-2; 4)$, $P_2(2; 4)$.

Задания для самоконтроля

1. Проверить принадлежат ли точки $A(0; 5)$, $B(3; -2)$ прямой

$a: y = 4x - 14$.

Ответ: $A \notin a$, $B \in a$.

2. Дано уравнение прямой $y = \sqrt{3}x + 5$. Найти угловой коэффициент прямой, и угол, который образует прямая с положительным направлением оси Ox .

Ответ: $k = \sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$.

Задания для самостоятельного решения

1. На рисунке 5.22 изображен график функции $y = f(x)$. Указать соответствующее уравнение.

А	$y = 2x$
Б	$y = 2 - x$
В	$y = 2 - 2x$
Г	$y = 2 + x$
Д	другой вариант ответа

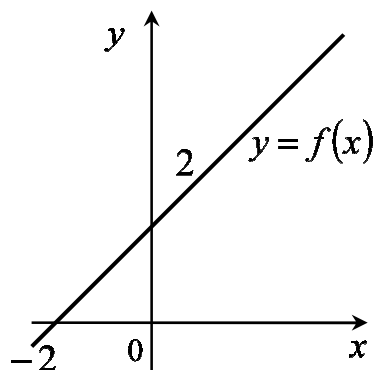


Рисунок 5.22

2. На рисунке 5.23 изображен график функции $y = f(x)$. Указать соответствующее уравнение.

А	$y = -3x$
Б	$y = 3 - x$
В	$y = 3 + 3x$
Г	$y = 3 + x$
Д	другой вариант ответа

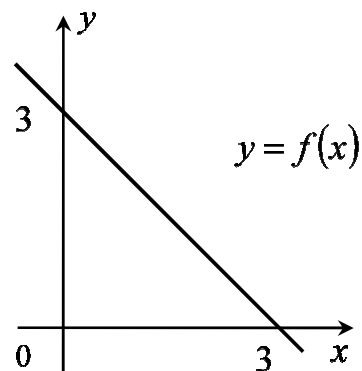


Рисунок 5.23

3. На рисунке 5.24 изображен график функции $y = f(x)$. Указать соответствующее уравнение.

А	$y = 2x$
Б	$y = 2$
В	$x = 2$
Г	$y = -2$
Д	другой вариант ответа

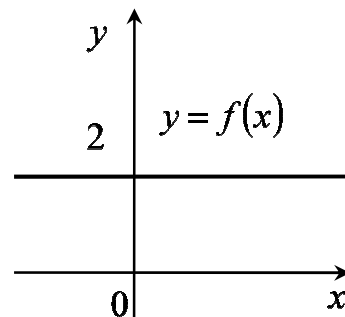


Рисунок 5.24

4. На рисунке 5.25 изображен график функции $y = f(x)$. Указать соответствующее уравнение.

А	$y = 5x$
Б	$y = 5$
В	$x = 5$
Г	$x = 5y$
Д	другой вариант ответа

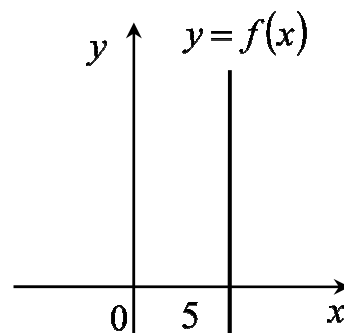


Рисунок 5.25

5. На рисунке 5.26 изображен график функции $y = f(x)$. Указать верную запись для углового коэффициента.

А	$k = 10$
Б	$k < 0$
В	$k > 0$
Г	$k = 0$
Д	другой вариант ответа

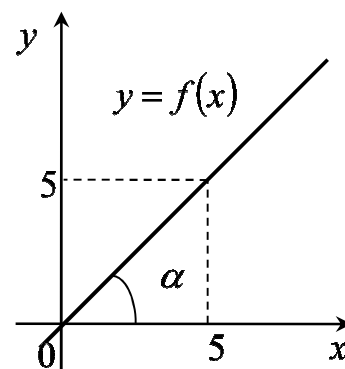


Рисунок 5.26

6. На рисунке 5.27 изображен график функции $y = f(x)$. Найти $\operatorname{tg} \alpha$.

А	1
Б	-1
В	5
Г	не существует
Д	другой вариант ответа

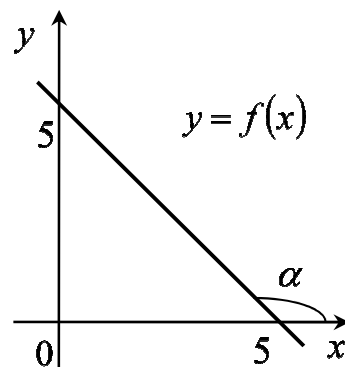


Рисунок 5.27

7. На рисунке 5.28 изображен график функции. Найти $\operatorname{tg} \alpha$.

А	1
Б	0
В	2
Г	не существует
Д	другой вариант ответа

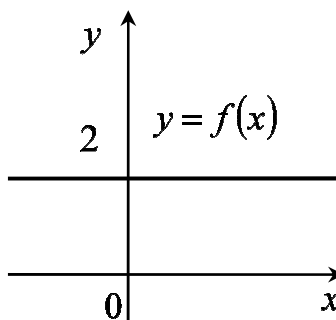


Рисунок 5.28

8. На рисунке 5.29 изображен график функции $y = f(x)$. Найти $\operatorname{tg} \alpha$.

А	5
Б	0
В	2
Г	не существует
Д	другой вариант ответа

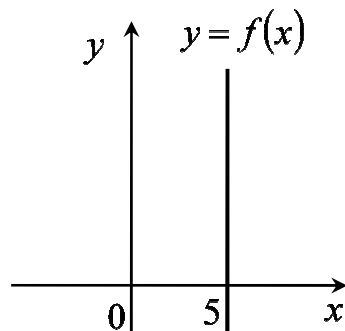


Рисунок 5.29

Найти точки пересечения графиков функций. Построить графики:

10. $y = 2x + 1$, $y = x$

13. $y = \frac{7}{x}$, $y + x = 8$

11. $y = 2x - 1$, $y = 5x + 4$

14. $y = x^3$, $y = 8x$

12. $y = \sqrt{x}$, $y = x$

15. $y = x^2$, $y = 16x$

5.4 Преобразования графиков

1. Преобразование графика $y = f(x)$ в график $y = -f(x)$.

График функции $y = -f(x)$ получается путем симметричного отображения графика $y = f(x)$ относительно оси Ox (рис. 5.30а).

2. Преобразование графика $y = f(x)$ в график $y = f(-x)$.

График функции $y = f(-x)$ получается путем симметричного отображения графика $y = f(x)$ относительно оси Oy (рис. 5.30 б).

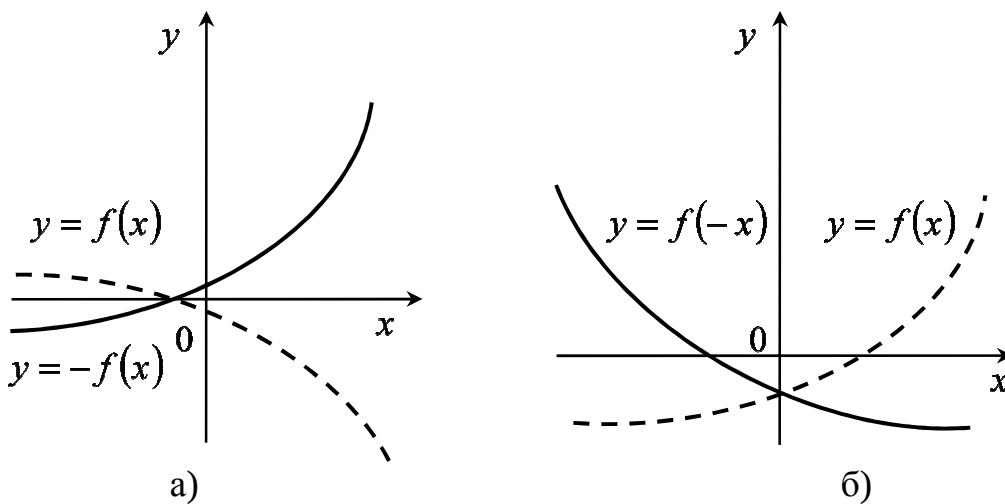


Рисунок 5.30

3. Преобразование графика $y = f(x)$ в график $y = f(x - a)$, $a > 0$

График функции $y = f(x - a)$ получается путем параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на a единиц вправо вдоль оси Ox (рис. 5.31 а).

4. Преобразование графика $y = f(x)$ в график $y = f(x+a)$, $a > 0$

График функции $y = f(x+a)$ получается путем параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на a единиц влево вдоль оси Ox (рис. 5.31 б).

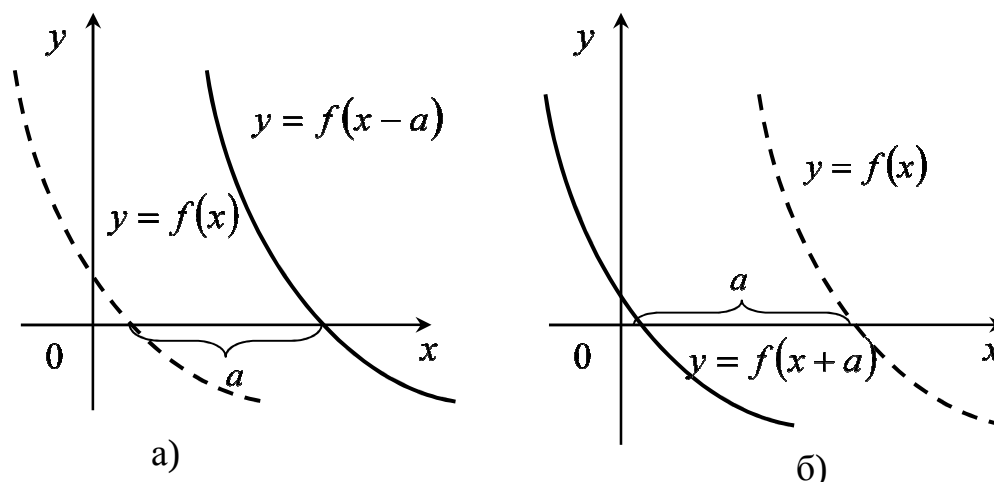


Рисунок 5.31

5. Преобразование графика $y = f(x)$ в график $y = f(x)+a$, $a > 0$

График функции $y = f(x)+a$ получается путем параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на a единиц вверх вдоль оси Oy (рис. 5.32 а).

6. Преобразование графика $y = f(x)$ в график $y = f(x)-a$, $a > 0$

График функции $y = f(x)-a$ получается путем параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на a единиц вниз вдоль оси Oy (рис. 5.32 б).

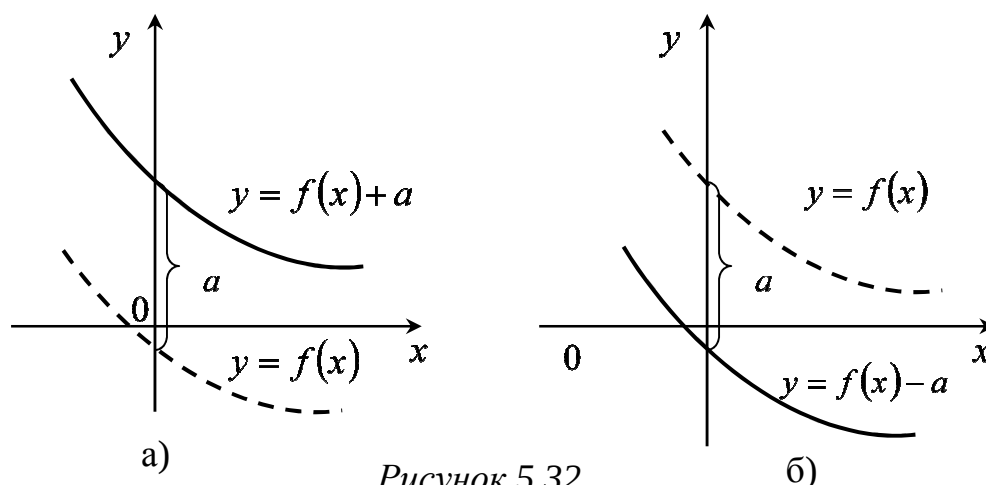


Рисунок 5.32

7. Преобразование графика $y = f(x)$ в график $y = a \cdot f(x)$, $a > 1$

График функции $y = a \cdot f(x)$ получается путем растяжения в a раз графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy (рис. 5.33 а).

8. Преобразование графика $y = f(x)$ в график $y = a \cdot f(x)$, $0 < a < 1$

График функции $y = a \cdot f(x)$ получается путем сжатия в a раз графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy (рис. 5.33 б).

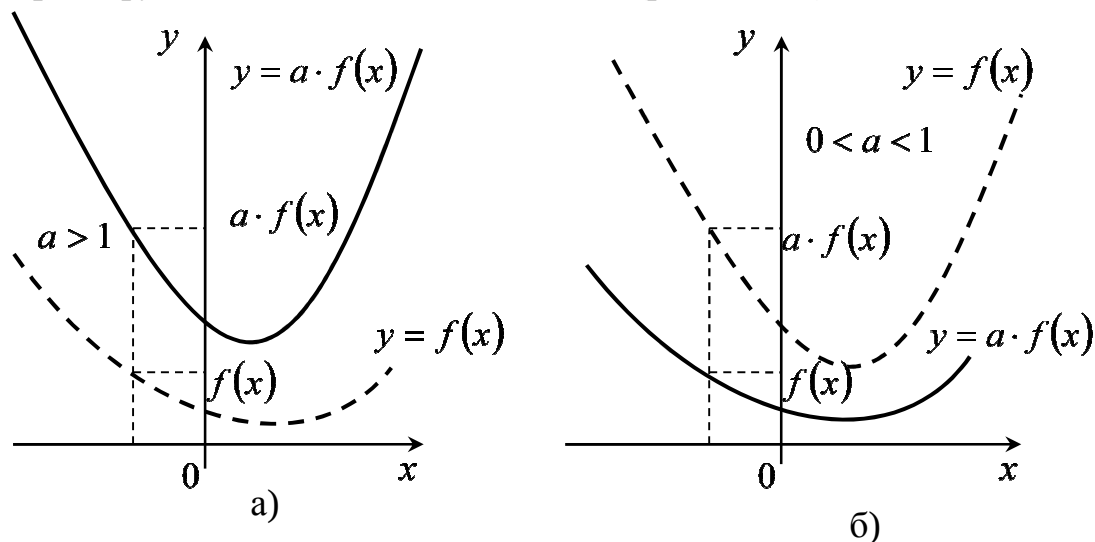


Рисунок 5.33

9. Преобразование графика $y = f(x)$ в график $y = f(ax)$, $a > 1$

График функции $y = f(ax)$ получается путем сжатия в a раз графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox (рис. 5.34 а).

10. Преобразование графика в график $y = f(ax)$, $0 < a < 1$

График функции $y = f(ax)$ получается путем растяжения в a раз графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox (рис. 5.34 б).

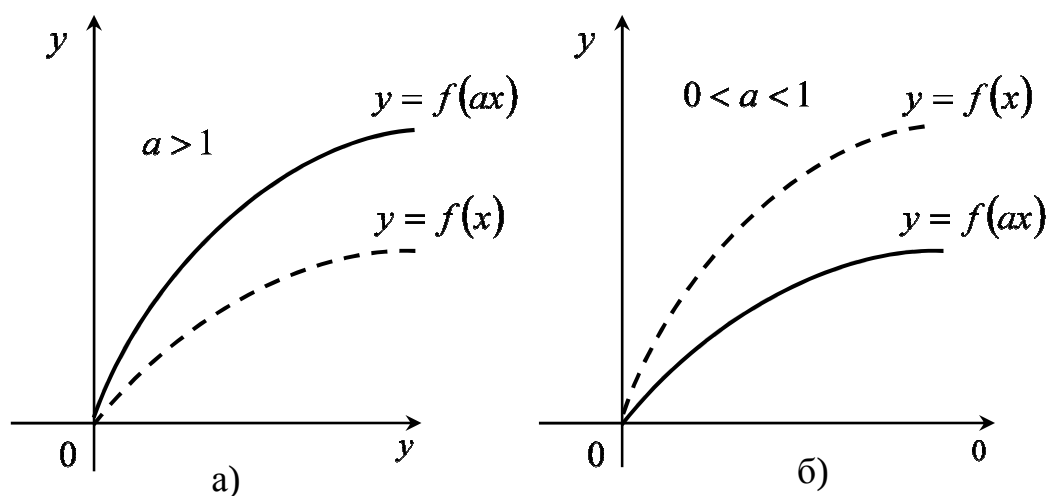


Рисунок 5.34

Пример. Построить график $y = -x^2 + 1$.

Решение.

Выполним построение в несколько этапов:

- Сначала построим базовый график $y = x^2$ (рис. 5.35 а).
- Потом построим график $y = -x^2$, отобразив параболу $y = x^2$ симметрично относительно оси Ox (рис. 5.35 б).
- Смещением вдоль оси Oy на одну единицу вверх вверх графика $y = -x^2$ получим график $y = -x^2 + 1$ (рис. 5.35 в).

Ответ: рис. 5.35 в.

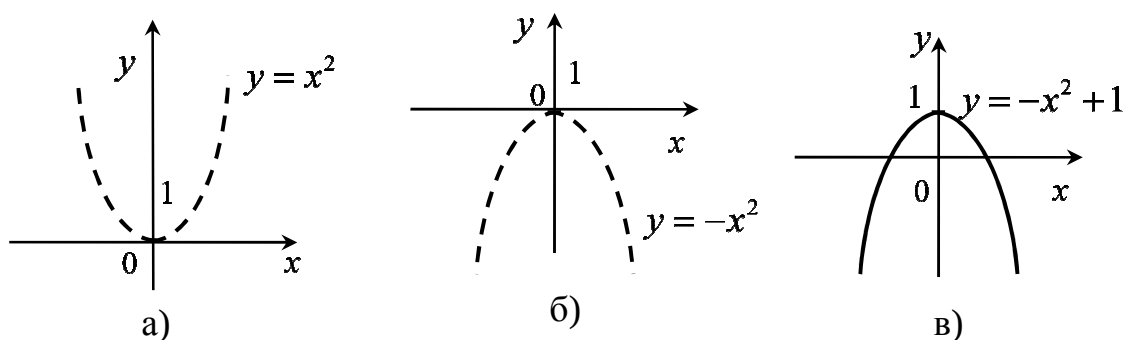


Рисунок 5.35

Задания для самоконтроля

1. Построить график $y = (x - 2)^2 + 1$.

Ответ: рис. 5.36

2. Построить график $y = -(x + 1)^2$.

Ответ: рис. 5.37

3. Построить график $y = -(x - 1)^2 + 1$.

Ответ: рис. 5.38

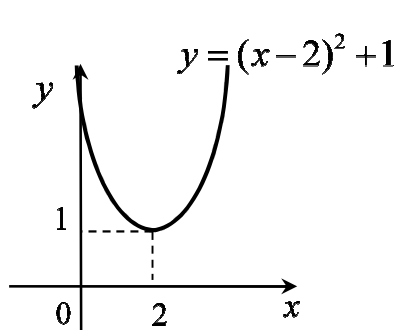


Рисунок 5.36

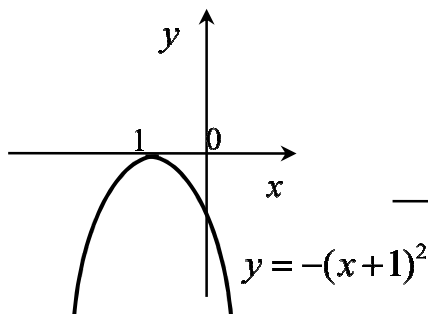


Рисунок 5.37

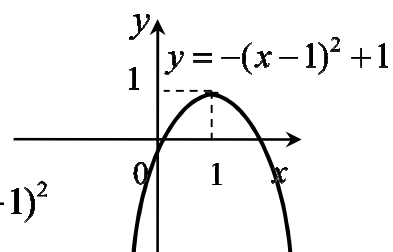


Рисунок 5.38

Задания для самостоятельного решения

Построить графики:

1. $y = (x+2)^2$

6. $y = -2x^2 + 1$

2. $y = -(x+2)^2$

7. $y = -2(x-3)^2 + 1$

3. $y = x^2 - 5$

8. $y = x^3 - 1$

4. $y = -x^2 + 5$

9. $y = (x+2)^3$

5. $y = 2x^2$

10. $y = -(x+2)^3 - 1$

11. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, убывающей на интервале $(-\infty; +\infty)$. Установить соответствие между функцией (1–4) и точкой пересечения ее графика с осью Ox (А–Д). (ВНО-12)

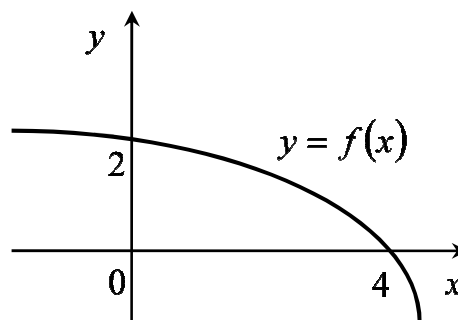


Рисунок 5.39

Функция	Точка пересечения
1 $y = f(x+2)$	А (0;0)
2 $y = f(x-2)$	Б (2;0)
3 $y = 2f(x)$	В (4;0)
4 $y = f(x)-2$	Г (6;0)
	Д (8;0)

6 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

6.1 Производная. Таблица производных. Правила нахождения производных

Возьмем точку x из области определения функции $y = f(x)$. Пусть $x + \Delta x$ – произвольная точка из некоторой окрестности точки x . Тогда Δx – **приращение аргумента**, а разность $f(x + \Delta x) - f(x)$ – **приращение функции** (рис. 6.1).

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента Δx , при стремлении Δx к нулю: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

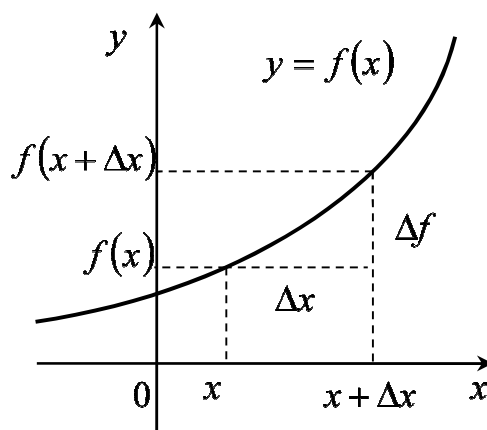


Рисунок 6.1

Таблица производных

1. $C' = 0$, $C - const$

2. $x' = 1$

3. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $(\sin x)' = \cos x$

6. $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9. $(e^x)' = e^x$

10. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила нахождения производной

$$1. (Cu)' = C \cdot u'$$

$$3. (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$2. (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

Пример 1. Найти производную функции $y = 10$.

Решение.

Воспользуемся первой формулой в таблице и получим $y' = 10' = 0$.

Ответ: 0.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^5$.

Решение.

Воспользуемся третьей формулой в таблице и получим

$$y' = (x^5)' = 5x^4.$$

Ответ: $5x^4$.

Пример 3. Найти производную функции $y = x + \sin x$.

Решение.

Применим правило дифференцирования 2 к сумме двух табличных функций и получим $y' = x' + (\sin x)' = 1 + \cos x$.

Ответ: $1 + \cos x$.

Пример 4. Найти производную функции $y = 5x^3 + 7x^2 - 4x + 12$.

Решение.

По правилам дифференцирования 2,1 имеем

$$\begin{aligned} y' &= (5x^3)' + (7x^2)' - (4x)' + 12' = 5(x^3)' + 7(x^2)' - 4x' + 0 = \\ &= 5 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 4 \cdot 1 = 15x^2 + 14x - 4. \end{aligned}$$

Ответ: $15x^2 + 14x - 4$.

Пример 5. Найти производную функции $y = \sin x \cdot \ln x$.

Решение.

По правилу дифференцирования произведения функций получим:

$$y' = (\sin x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot \sin x = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

Ответ: $\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$.

Пример 6. Найти производную функции $y = \frac{x^2}{\cos x}$.

Решение.

$$y' = \frac{(x^2)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x \cdot \cos x + \sin x \cdot x^2}{\cos^2 x}.$$

Ответ: $\frac{2x \cdot \cos x + \sin x \cdot x^2}{\cos^2 x}$.

Задания для самоконтроля

Найти производную функций:

1. $y = x^2 + 4x - 7$.

Ответ: $2x + 4$.

2. $y = \frac{2}{x^5}$.

Ответ: $-\frac{10}{x^6}$.

3. $y = 8\sqrt[4]{x} - 7x + 10$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} - 7$.

4. $y = (x^2 + 1) \cdot e^x$.

Ответ: $(x+1)^2 \cdot e^x$.

5. $y = \frac{2x+4}{2x+1}$.

Ответ: $\frac{-6}{(2x+1)^2}$.

Задания для самостоятельного решения

Найти производную функции:

1. $y = 4\sqrt[5]{x^3} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{3x}$.

5. $y = (3x - 6) \cdot e^x$.

2. $y = \frac{x^3 + 3}{x^3 - 1}$.

6. $y = \frac{2x+13}{2x-3}$.

3. $y = x^3 \cdot \cos x - 3 \ln x$.

7. $y = \frac{2x + 4\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x}}$.

4. $y = (2x - 1)^4$.

8. $y = e^x \cdot \arctg x \cdot \arcsin x$.

6.2 Производная сложной функции

Пусть $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, где $u = \varphi(x)$ – внутренняя функция, $f(u)$ – внешняя. Тогда формула производной сложной функции:

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \sin 3x$.

Решение.

Воспользуемся формулой и получим

$$y' = (\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \cos 3x.$$

Ответ: $3 \cos 3x$.

Пример 2. Найти производную функции $y = (4x + 7)^3$.

Решение.

$$y' = ((4x + 7)^3)' = 3 \cdot (4x + 7)^{3-1} \cdot (4x + 7)' = 3 \cdot (4x + 7)^2 \cdot 4 = 12(4x + 7)^2.$$

Ответ: $12(4x + 7)^2$.

Пример 3. Найти производную функции $y = \sqrt{\cos x}$.

Решение.

$$y' = (\sqrt{\cos x})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Ответ: $\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

Пример 4. Найти производную функции

Решение.

$$\begin{aligned} y &= \ln(\sin(3x - 12)) \quad y' = (\ln(\sin(3x - 12)))' = \frac{1}{\sin(3x - 12)} \cdot (\sin(3x - 12))' = \\ &= \frac{1}{\sin(3x - 12)} \cdot \cos(3x - 12) \cdot (3x - 12)' = 3 \operatorname{ctg}(3x - 12). \end{aligned}$$

Ответ: $3 \operatorname{ctg}(3x - 12)$.

Задания для самоконтроля

Найти производные функции:

1. $y = \cos 5x$.

Ответ: $-5 \sin 5x$.

2. $y = \ln(3x - 4)$.

Ответ: $\frac{3}{3x - 4}$.

$$3. y = \sqrt[3]{\sin 5x}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5 \cos 5x}{3 \cdot \sqrt[3]{\sin^2 5x}}.$$

$$4. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Задания для самостоятельного решения:

Найти производные функций:

$$1. y = \sin(4x - 1).$$

$$4. y = 9e^{-3x}.$$

$$7. y = (2x - 5)^{10}.$$

$$2. y = \ln(3x).$$

$$5. y = \arcsin(2x) \cdot \operatorname{tg}(4x).$$

$$8. y = -7 \sin^3 x.$$

$$3. y = x^2 \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} 8x}.$$

$$6. y = \cos(\ln(3x + 4)).$$

$$9. y = x^{\cos x}.$$

6.3 Геометрический смысл производной

Геометрический смысл.

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке x_0 , т.е. $k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$
 $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ – уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 (рис. 6.2).

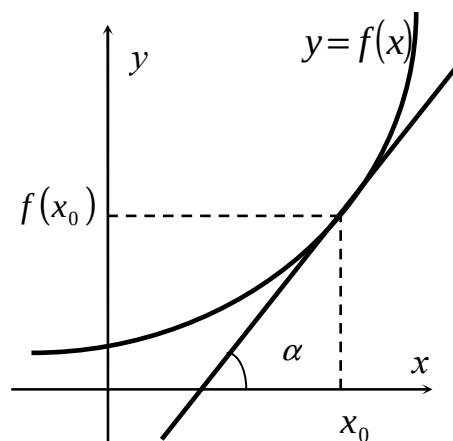


Рисунок 6.2

Пример 1. Найти значение производной функции $y = x^2 + 4x + 3$ в точке $x_0 = -1$.

Решение.

$$y' = 2x + 4, \quad y'(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 2. Найти значение производной функции $y = e^x - \sin x$ при $x_0 = 0$.

Решение.

$$y' = e^x - \cos x, \quad y'(0) = e^0 - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 3. Найти значение x , при котором угловой коэффициент касательной к графику функции $y = -x^2 + 18x + 4$ равен нулю.

Решение.

Поскольку угловой коэффициент касательной $k = y'$, то решим уравнение $y' = 0$: $y' = -2x + 18$ $-2x + 18 = 0$ $x = 9$.

Ответ: 9.

Пример 4. Найти угол, который образует касательная к графику функции $y = \ln(2 - x)$ с положительным направлением оси абсцисс, в точке $x_0 = 1$.

Решение.

Поскольку $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, то найдем значение производной в заданной точке: $y' = (\ln(2 - x))' = \frac{1}{2 - x} \cdot (-1)$

$y'(1) = -\frac{1}{2 - 1} = -1$, то есть $\operatorname{tg} \alpha = -1$, откуда $\alpha = 135^\circ$.

Ответ: 135° .

Пример 5. Составить уравнение касательной к графику функции $y = -x^2 + 4x + 1$ в точке $x_0 = 3$.

Решение.

Найдем $f(x_0)$: $f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 + 1 = 4$

Найдем $f'(x_0)$: $f'(x) = -2x + 4$ $f'(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2$

Подставляя полученные данные в уравнение касательной, получим $y = -2(x - 3) + 4$ или, преобразовав $y = -2x + 10$.

Ответ: $y = -2x + 10$.

Задания для самоконтроля

1. Найти значение производной функции $y = -x^2 + x - 12$ в точке $x_0 = 5$. *Ответ:* $y'(5) = -9$.

2. Найти значение производной функции $y = x \cdot e^x$ в точке $x_0 = 0$ *Ответ:* $y'(0) = 1$.

3. Найти значение x , при котором угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^2 - 22x + 12$ равен нулю. *Ответ:* 11.

4. Найти угол, который образует касательная к графику функции $y = e^x$ с положительным направлением оси абсцисс в точке $x_0 = 0$.

Ответ: $\alpha = 45^\circ$

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти значение производной функции $y = \cos x \cdot e^x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
2. Найти значение производной функции $y = \frac{6x}{5x+9}$ в точке $x_0 = \frac{9}{5}$.
3. Функция в точке $x_0 = 5$ имеет производную $f'(5) = -1$. Вычислить значение производной функции $g(x) = f(x) \cdot x$ в точке x_0 , если $f(5) = 2$. (ВНО-2012)
4. Найти угол, который образует касательная к графику функции $y = \ln x$ с положительным направлением оси абсцисс в точке $x_0 = 1$.
5. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 2$.
6. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x \cdot e^x$ в точке $x_0 = 0$.
7. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x+2}{x^2+1}$ в точке $x_0 = 1$.
8. Составить уравнение касательной к графику функции $y = e^{5x-4}$, которая параллельна прямой $y = 5x - 18$.

6.4 Физический смысл производной

Физический смысл. Пусть $s = s(t)$ – закон прямолинейного движения материальной точки. Тогда $s'(t)$ – есть мгновенная скорость в момент времени t .

$v = s'(t)$ – скорость, $a = v'(t)$ – ускорение.

Пример 1. Материальная точка движется по закону

$s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + 4t + 18$ (t – измеряется в секундах, s – в метрах). Найти скорость и ускорение точки в момент времени $t = 2$ с.

Решение.

Скорость: $v(t) = s'(t) = t^2 + 5t + 4$

Скорость при $t = 2$ с: $v(2) = s'(2) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 4 = 18$ (м/с)

Ускорение: $a(t) = v'(t) = 2t + 5$

Ускорение при $t = 2$ с: $a(2) = v'(2) = 2 \cdot 2 + 5 = 9$ (м/с²).

Ответ: 18(м/с), 9(м/с²).

Пример 2. Материальная точка движется по закону

$s(t) = t^2 + 3t - 1$ (t – измеряется в секундах, s – в метрах). Найти момент времени, при котором скорость точки равна 27(м/с).

Решение.

Найдем скорость в любой момент времени: $v(t) = s'(t) = 2t + 3$

Решаем уравнение $v(t) = 27$

$$2t + 3 = 27$$

$$t = 12 \text{ с}$$

Ответ: 12 с.

Задание для самоконтроля:

Материальная точка движется по закону $s(t) = 2t^2 + 7t$ (t – измеряется в секундах, s – в метрах). Найти момент времени, при котором мгновенная скорость материальной точки равна 60 м/с. (ВНО-2011 года).

Ответ: 13,25 с.

Задания для самостоятельного решения:

1. Материальная точка движется по закону $s(t) = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + t - 1$ (t – измеряется в секундах, s – в метрах). Найти скорость и ускорение точки в момент времени $t = 3$ с.
2. Тело массой 3 кг движется по закону $s(t) = t^3 + t^2 + 24t - 10$ (t – измеряется в секундах, s – в метрах). Найти силу, которая действует на тело в момент времени $t = 1$ с.

6.5 Исследование функции на монотонность и экстремум.

Если в каждой точке промежутка $(a ; b)$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Если в каждой точке промежутка $(a ; b)$ $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

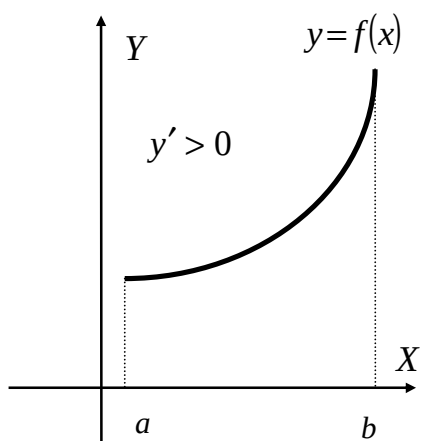


Рисунок 6.3

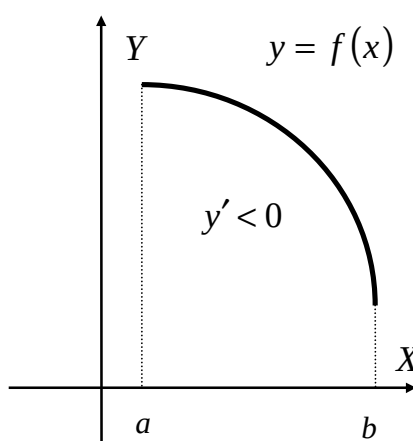


Рисунок 6.4

Критическими точками функции называются точки области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует.

Достаточное условие. Если в точке x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то x_0 является точкой максимума; если в точке x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+», то x_0 — точка минимума.

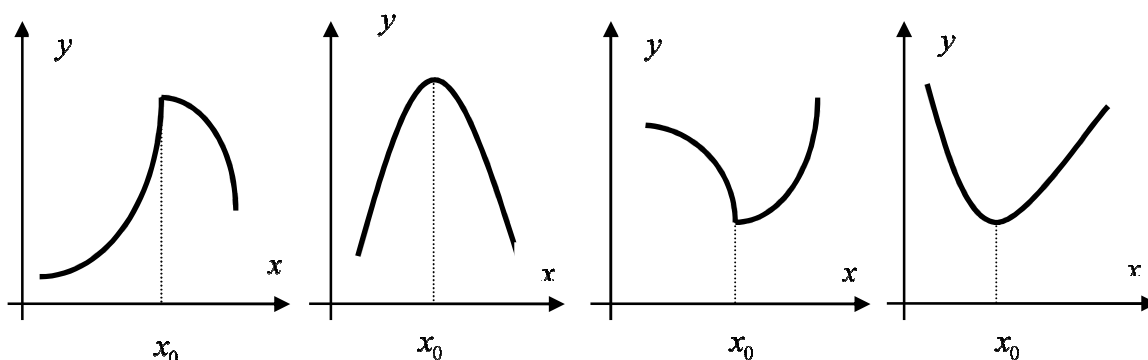


Рисунок 6.5-Виды экстремума

Схема исследования на монотонность и экстремум

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную $f'(x)$.
3. Найти критические точки $f(x)$.
4. Определить знак $f'(x)$ на каждом из промежутков, на которые разбита область определения функции.
5. Выбрать промежутки монотонности, определить какая из критических точек является точкой экстремума.
6. Найти экстремумы функции.

Пример 1. Найти промежутки монотонности, экстремумы функции

$$y = x^3 - 3x + 5$$

Решение.

Область определения $D = R$

Найдем производную $y' = (x^3 - 3x + 5)' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$.

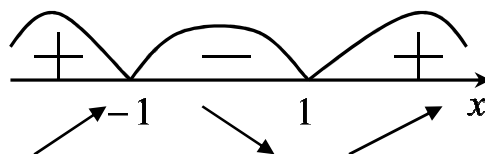
Найдем критические точки, исходя из условия $y' = 0$ (или y' не существует)

Решая уравнение $3(x+1)(x-1) = 0$, получим две критические точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Точки, в которых производная не существует, отсутствуют.

$$f(-2) = 3(-2+1)(-2-1) > 0$$

$$f(-2) = 3(-2+1)(-2-1) < 0$$

$$f(2) = 3(2+1)(2-1) > 0$$



При $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ функция возрастает.

При $x \in (-1; 1)$ функция убывает.

$x_1 = -1$ - точка максимума, $x_2 = 1$ - точка минимума

$$\max y = y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 5 = -1 + 3 + 5 = 7$$

$$\min y = y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 5 = 1 - 3 + 5 = 3.$$

Ответ: При $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ функция возрастает.

При $x \in (-1; 1)$ функция убывает. $\max y = y(-1) = 7$,

$$\min y = y(1) = 3.$$

Пример 2. Найти промежутки монотонности, экстремумы функции

$$y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x + 4.$$

Решение.

Область определения функции $D = R$.

Найдем производную $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2 = \frac{2 - 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

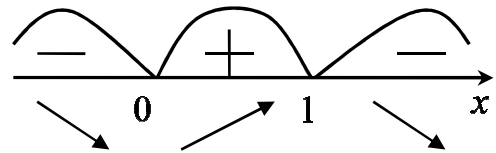
Найдем критические точки, исходя из условия $y' = 0$ (или y' не существует)

Решая уравнение $\frac{2 - 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 0$, получим критическую точку $x_1 = 1$.

В точке $x_2 = 0$ производная не существует. Т.е. имеем вторую критическую точку.

$$f'(-1) = \frac{2 - 2\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{-1}} = -4 < 0$$

$$f'(0,5) > 0, \quad f'(2) < 0$$



При $x \in (0;1)$ функция возрастает. При $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$ функция убывает. $x_1 = 0$ - точка минимума, $x_2 = 1$ - точка максимума.

$$\max y = y(1) = 2 \cdot 1 - 3\sqrt[3]{1^2} + 4 = 3, \quad \min y = y(0) = 2 \cdot 0 - 3\sqrt[3]{0^2} + 4 = 4.$$

Ответ: При $x \in (0;1)$ функция возрастает. При $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$ функция убывает. $\max y = y(1) = 3$. $\min y = y(0) = 4$.

Задания для самоконтроля:

Найти промежутки монотонности, экстремумы функции

1. $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$
функция

Ответ: При $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$

возрастает. При $x \in (0;1)$ функция убывает. $\max y = y(0) = 5$.
 $\min y = y(1) = 4$.

2. $y = x^4 - 2x^2 + 7$

Ответ: При $x \in (-1;0) \cup (1;+\infty)$ функция возрастает. При $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$ функция убывает. $\max y = y(0) = 7$.
 $\min_1 y = y(-1) = 6$. $\min_2 y = y(1) = 6$.

Задания для самостоятельного решения

Найти промежутки монотонности, экстремумы функций:

1. $y = x^3 - 27x + 8$.

4. $y = \frac{x^3}{1-x^2}$.

2. $y = -x^4 + 8x^2 - 3$.

5. $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x-2}}$.

3. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

6. $y = e^{3x}(2x-1)$.

6.6 Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ конечное число критических точек, то она достигает наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке или в критических точках, или на концах отрезка.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + 1 \text{ на отрезке } [-2; 0].$$

Решение.

Область определения функции $D = R$

Найдем производную $y' = x^2 + 4x + 3$.

Найдем критические точки, исходя из условия $y' = 0$ (или y' не существует)

Решая уравнение $x^2 + 4x + 3 = 0$, получим критические точки

$x_1 = -1$, $x_2 = -3$. Проверим, какие из них принадлежат отрезку

$$x_1 = -1 \in [-2; 0], \quad x_2 = -3 \notin [-2; 0]$$

Находим значения функции в точках $-2, -1, 0$.

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} + 2(-2)^2 + 3(-2) + 1 = \frac{1}{3}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)^2 + 3(-1) + 1 = -\frac{1}{3}$$

$$f(0) = \frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 3 \cdot 0 + 1 = 1. \text{ Как видим } f(-1) < f(-2) < f(0)$$

$$\text{Ответ: наиб } f(x) = f(0) = 1, \text{ наим } f(x) = f(-1) = -\frac{1}{3}$$

Задание для самоконтроля:

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 - x^4 + 1$ на отрезке $[-0,5; 2]$.

$$\text{Ответ: наиб } f(x) = f(1) = 2, \text{ наим } f(x) = f(2) = -7$$

Задания для самостоятельного решения

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанном отрезке.

$$1. y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}, [-1; 3].$$

$$2. y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 1, [-2; 1].$$

$$3. y = e^x(2x-1), [-1; 0].$$

6.7 Первообразная. Неопределенный интеграл. Таблица интегралов. Правила интегрирования

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на промежутке $(a; b)$, если для любого $x \in (a; b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Например, функция x^2 является первообразной для функции $2x$, поскольку $(x^2)' = 2x$. Функция $x^2 + 5$ также является первообразной для функции $2x$, т.к. $(x^2 + 5)' = 2x$. Т.е. первообразных – множество, отличаются они друг от друга на постоянное число. Если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$, где C – постоянная, называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Таблица неопределенных интегралов

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

Правила интегрирования

1. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, где k – постоянная

2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

4. $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$

Пример 1. Найти какую-нибудь первообразную функции

$$f(x) = 15\sin 3x + x^2.$$

Решение.

$$F(x) = -15 \cdot \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{x^{2+1}}{2+1} = -5 \cos 3x + \frac{x^3}{3}$$

Ответ: $F(x) = -5 \cos 3x + \frac{x^3}{3}$

Пример 2. Найти интеграл $\int (3x^2 + 2x - 7)dx$. Выполнить проверку.

Решение.

$$\int (3x^2 + 2x - 7)dx = x^3 + x^2 - 7x + C.$$

Проверка. $(x^3 + x^2 - 7x + C)' = 3x^2 + 2x - 7.$

Ответ: $x^3 + x^2 - 7x + C.$

Пример 3. Найти интеграл $\int \left(\frac{2}{3x} + \frac{4}{\sqrt[7]{x^5}} - 5 \cdot \sqrt[4]{x^9} \right) dx$.

Решение.

$$\int \left(\frac{2}{3x} + \frac{4}{\sqrt[7]{x^5}} - 5 \cdot \sqrt[4]{x^9} \right) dx = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x} + 4 \int x^{-\frac{5}{7}} dx - 5 \int x^{\frac{9}{4}} dx = \frac{2}{3} \ln|x| + 4 \cdot \frac{x^{-\frac{5}{7}+1}}{-\frac{5}{7}+1} -$$

$$-5 \cdot \frac{x^{\frac{9}{4}+1}}{\frac{9}{4}+1} + C = \frac{2}{3} \ln|x| + 14 \cdot x^{\frac{2}{7}} - \frac{20 \cdot x^{\frac{13}{4}}}{13} + C.$$

Ответ: $\frac{2}{3} \ln|x| + 14 \cdot x^{\frac{2}{7}} - \frac{20 \cdot x^{\frac{13}{4}}}{13} + C.$

Пример 4. Найти интеграл $\int (5^x + 2 \sin x - e^x - 7 \cos x) dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int (5^x + 2 \sin x - e^x - 7 \cos x) dx &= \int 5^x dx + 2 \int \sin x dx - \int e^x dx - 7 \int \cos x dx = \\ &= \frac{5^x}{\ln 5} - 2 \cos x - e^x - 7 \sin x + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5^x}{\ln 5} - 2 \cos x - e^x - 7 \sin x + C$.

Пример 5. Найти интеграл $\int (5x + 3)^8 dx$.

Решение.

$$\int (5x + 3)^8 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x + 3)^{8+1}}{8+1} + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x + 3)^9}{9} + C = \frac{(5x + 3)^9}{45} + C.$$

Ответ: $\frac{(5x + 3)^9}{45} + C$.

Пример 6. Найти интеграл $\int \cos(2x - 3) dx$.

Решение.

$$\int \cos(2x - 3) dx = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x - 3) + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot \sin(2x - 3) + C$.

Задания для самоконтроля

1. Найти интеграл $\int (4x^3 - 6x^2 + 10) dx$. *Ответ:* $x^4 - 2x^3 + 10x + C$.

2. Найти интеграл $\int \frac{3}{x^{10}} dx$. *Ответ:* $-\frac{1}{3x^9} + C$.

3. Найти интеграл $\int \frac{5}{\sqrt[7]{x^{10}}} dx$. *Ответ:* $-\frac{35}{3 \cdot \sqrt[7]{x^3}} + C$.

4. Найти интеграл $\int e^{\frac{x}{2}} dx$. *Ответ:* $-2e^{\frac{x}{2}} + C$.

5. Найти интеграл $\int (7x - 2)^3 dx$. *Ответ:* $\frac{(7x - 2)^4}{28} + C$.

Задания для самостоятельного решения

Найти интегралы

1. $\int (x^2 - 3x + 5) dx$.

6. $\int \left(\frac{x}{3} - 4 \right)^7 dx$.

2. $\int \frac{5}{x^2} dx$.

7. $\int 5 \cos \frac{x}{3} dx$

3. $\int \frac{4}{\sqrt[5]{x^{13}}} dx$.

8. $\int \left(3 \sin \frac{x}{5} + 12 \cos(5x - 8) \right) dx$.

4. $\int e^{5x-9} dx$.

9. $\int \frac{dx}{4x+7}$

5. $\int \sin 2x dx$

10. $\int \frac{x - \sqrt{x} + 4}{\sqrt[7]{x^{10}}} dx$

11. Функция $F(x) = 6 \sin 2x - 1$ является первообразной для функции $f(x)$. Найти $f(x)$. (ВНО-11)

А	$f(x) = -12 \cos 2x$
Б	$f(x) = 12 \cos 2x$
В	$f(x) = 6 \cos 2x$
Г	$f(x) = -3 \cos 2x - x + C$
Д	$f(x) = -6 \cos 2x - x + C$

6.8 Определенный интеграл. Правила интегрирования

Определенным интегралом на промежутке $[a; b]$ от непрерывной на этом промежутке функции называется приращение $F(b) - F(a)$ первообразной $F(x)$ этой функции на промежутке $[a; b]$. Формула Ньютона – Лейбница имеет вид $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Например, $\int_1^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} =$

$$= \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$$

Правила интегрирования

$$1. \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$2. \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a; b]$$

Пример 1. Найти интеграл $\int_1^2 (3x^2 + 2x - 7)dx$.

Решение.

$$\int_1^2 (3x^2 + 2x - 7)dx = (x^3 + x^2 - 7x) \Big|_1^2 = (2^3 + 2^2 - 7 \cdot 2) - (1^3 + 1^2 - 7 \cdot 1) = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 2. Найти интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(3\cos \frac{x}{2} + 2\sin 3x \right) dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(3\cos \frac{x}{2} + 2\sin 3x \right) dx &= \left(6 \cdot \sin \frac{x}{2} - \frac{2}{3} \cdot \cos 3x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(6 \cdot \sin \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \cdot \cos \pi \right) - \\ &- \left(6 \cdot \sin 0 - \frac{2}{3} \cdot \cos 0 \right) = \left(3 + \frac{2}{3} \right) - \left(0 - \frac{2}{3} \right) = 4\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $4\frac{1}{3}$.

Задания для самоконтроля

1. Найти интеграл $\int_0^1 (3x^2 + 4x^3)dx$.

Ответ: 2.

2. Найти интеграл $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Ответ: 3.

Задания для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int_0^1 5x^4 dx$.

3. $\int_1^3 (x^2 + 4x - 5) dx$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$.

4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx$.

6.9 Криволинейная трапеция. Площадь фигуры

Криволинейная трапеция – это фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$ (где $f(x) \geq 0$), $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс (рис. 6.6).

Площадь криволинейной трапеции, вычисляется как $S = \int_a^b f(x) dx$.

В случае $f(x) < 0$ можно использовать формулу $S = -\int_a^b f(x) dx$.

Если фигура ограничена графиками функций $f(x)$ и $g(x)$ (причем $f(x) \geq g(x)$), $x = a$, $x = b$ (рис. 6.7), то ее площадь находится с помощью формулы $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

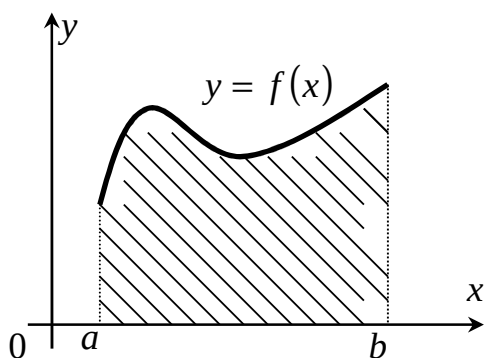


Рисунок 6.6

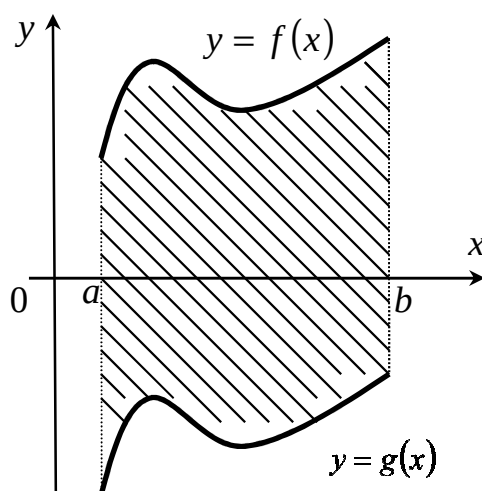


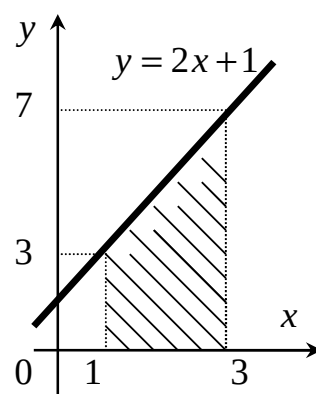
Рисунок 6.7

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$. Сделать чертеж.

Решение.

$$S = \int_1^3 (2x + 1) dx = (x^2 + x) \Big|_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 10$$

Ответ: 10 .



Задание для самоконтроля:

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -2x + 10, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0.$$

Ответ: 12 .

Задания для самостоятельного решения

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями (1-3):

1. $y = x + 2, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0.$

2. $y = 4x - x^2, \quad y = x^2.$

3. $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x.$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$ и касательной, проведенной к данной параболе в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

7 КОМБИНАТОРИКА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

7.1 Комбинаторика (теория соединений)

Перестановками из n элементов называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, причем отличается каждое от других порядком следования элементов.

Число перестановок из n элементов равняется $P_n = n!$, где $n!$ - «эн факториал» и вычисляется как $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, причем $0! = 1$.

Например, если даны три различных элемента a, b, c , то все перестановки

$a b c$
 $a c b$
 $b a c$
 $b c a$
 $c a b$
 $c b a$

Непосредственный подсчет числа перестановок дает 6.

Или, по формуле $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Размещениями из n элементов по m называются соединения, каждое из которых содержит m элементов, взятых из данных n элементов, причем отличается каждое от других как наличием элементов, так и их порядком следования. Число размещений из n по m равняется

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Например, если даны три различных элемента a, b, c , то все размещения из 3 по 2:

$a b$
 $b a$
 $a c$
 $c a$
 $b c$
 $c b$

Непосредственный подсчет числа размещений дает 6.

Или, по формуле $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$.

Сочетаниями из n элементов по m называются соединения, каждое из которых содержит m элементов, взятых из данных n элементов, причем отличается каждое от других только наличием элементов.

Число размещений из n по m равняется $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$

Например, если даны три различных элемента a, b, c , то все сочетания из 3 по 2:

$a\ b$
 $a\ c$
 $b\ c$

Непосредственный подсчет числа сочетаний дает 3.

Или, по формуле $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$.

Пример 1. На полке нужно разместить 5 различных учебников. Определить количество способов, которыми это можно сделать.

Решение.

Число способов, которыми можно разместить 5 различных учебников на полке равно числу перестановок из 5 элементов. $P_5 = 5! = 120$

Ответ: 120.

Пример 2. Для участия в комиссии необходимо выбрать председателя, заместителя и секретаря из группы, насчитывающей 8 человек. Определить количество способов, которыми это можно сделать.

Решение.

Число способов, которыми можно выбрать 3 человека из 8, с учетом различия в видах деятельности, равно числу размещений из 8 по 3.

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$$

Ответ: 336.

Пример 3. Для охраны объекта необходимо выбрать 3 человека из 5. Определить количество способов, которыми это можно сделать.

Решение

Число способов, которыми можно выбрать 3 человека из 5, равно числу сочетаний из 5 по 3.

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$$

Ответ: 336.

Задания для самоконтроля

1. Определить количество способов, которыми можно набрать три последние цифры номера телефона. *Ответ:* 720.

2. За столом должны разместиться 4 человека при таком же количестве стульев. Определить количество способов, которыми это можно сделать.

Ответ: 24.

Задания для самостоятельного решения:

1. В заплыве участвуют 8 равнозначных пловцов. Определить количество способов, которыми могут распределиться призовые места.
2. Для дежурства на участке необходимо выбрать 4 человека из 7. Определить количество способов, которыми это можно сделать.
3. Задумано двухзначное число. Определить количество способов, которыми это можно сделать.
4. Из 11 фотографий выбирают 5. Определить количество способов, которыми это можно сделать.
5. Для участия в эстафете должны выстроиться 5 бегунов. Определить количество способов, которыми это можно сделать.
6. В командировку должны поехать 4 женщины и 3 мужчин. Отбор ведется в отделе, в котором насчитывается 7 женщин и 5 мужчин. Определить количество способов, которыми это можно сделать.
7. Найти количество всех различных двузначных чисел, которые можно создать из цифр 1, 5, 7, 8 таким образом, чтобы в каждом числе все цифры не повторялись.

7.2 Теория вероятностей

Вероятность события определяется равенством

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где $P(A)$ – вероятность события A

m – число исходов, благоприятствующих событию A ,

n – число всех равновозможных исходов, образующих полную группу.

Под **равновозможными** событиями следует понимать такие события, каждое из которых не имеет преимуществ появиться перед остальными. Согласно этого формулу вероятности можно в «словесном» виде представить как

$$P(A) = \frac{\text{число благоприятствующих исходов}}{\text{число всех исходов}}$$

Например, при подбрасывании монеты, вероятность появления «герба» равна $\frac{1}{2}$, т.к. $m = 1$ – число исходов, благоприятствующих появлению «герба», а $n = 2$ – число всех исходов («герб» и «решка»)

Суммой событий A и B называется событие $A + B$, которое заключается в появлении события A или события B

Несовместными называются события, если появление одного из них исключает появление других в одном и том же испытании.

Вероятность появления суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Произведением событий A и B называется событие $A \cdot B$, которое заключается в совместном появлении событий A и B .

Независимыми событиями называют события A и B , если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого. Если A и B независимые, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Зависимыми событиями называют события A и B , если вероятность одного из них зависит от появления или не появления другого. В этом случае

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B),$$

где $P_A(B)$ – условная вероятность события B , которая вычисляется в предположении, что событие A уже наступило.

Пусть проводится n независимых экспериментов, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p , или не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда вероятность того, что событие A появится ровно k раз вычисляется по **формуле Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Пример 1. Брошены три монеты. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них выпадет «гербом».

Решение.

Всех возможных вариантов выпадения для двух монет равно 8.

Вариантов, в которых хотя бы один герб равно 7.

Вероятность события $P = \frac{7}{8}$.

Ответ: $\frac{7}{8}$.

Пример 2. В двух ящиках находится по 3 белых и 2 черных шара. Из каждого наудачу извлекли по одному. Найти вероятность того, что оба шара оказались белыми.

Решение.

Пусть событие A : «Из первого ящика извлечен белый шар».

$$\text{Тогда } P(A) = \frac{3}{5}.$$

Событие B : «Из второго ящика извлечен белый шар». $P(B) = \frac{3}{5}$.

Событие C : «Из обоих ящиков извлечены белые шары». $C = AB$.

События A и B независимые. Значит

$$P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{9}{25}.$$

Пример 3. В ящике находятся 7 белых и 4 черных шара. Из ящика наудачу извлекли один шар, не возвращая обратно. После этого извлекают шар из ящика. Найти вероятность того, что оба шара оказались белыми.

Решение

Пусть событие A : «При первом извлечении из ящика появился белый шар». $P(A) = \frac{7}{11}$.

Событие B : «При втором извлечении из ящика появился белый шар». $P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Событие C : «Оба извлеченных шара - белые». Причем $C = AB$.

События A и B зависимые. Значит

$$P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{7}{11} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{55}$$

$$\text{Ответ: } \frac{21}{55}.$$

Пример 4. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны 0,7 и 0,8 сделали по одному выстрелу по мишени. Найти вероятности того, что:

а) оба поразили мишень (событие A)

б) ни один не поразил (событие B)

в) только один из стрелков поразил мишень (событие C)

г) только первый поразил (событие D)

д) хотя бы один из стрелков поразил мишень (событие E)

Решение.

Пусть E_1 : «первый стрелок поразил мишень». $p(E_1) = 0,7$

E_2 : «второй стрелок поразил мишень». $p(E_2) = 0,8$

$\bar{E}_1$: «первый стрелок не поразил мишень». $p(\bar{E}_1) = 1 - 0,7 = 0,3$

$\bar{E}_2$: «второй стрелок не поразил мишень». $p(\bar{E}_2) = 1 - 0,8 = 0,2$

а) $p(A) = p(E_1 \cdot E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$

б) $p(B) = p(\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2) = p(\bar{E}_1) \cdot p(\bar{E}_2) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$

в) $p(C) = p(E_1) \cdot p(\bar{E}_2) + p(\bar{E}_1) \cdot p(E_2) = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,38$

г) $p(D) = p(E_1) \cdot p(\bar{E}_2) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$

д) $p(E) = p(E_1) \cdot p(\bar{E}_2) + p(\bar{E}_1) \cdot p(E_2) + p(E_1) \cdot p(E_2) =$
 $= 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,8 = 0,94$

Задания для самоконтроля

1. Брошены две монеты. Найти вероятность того, что:

а) хотя бы одна из них выпадет «гербом»

б) все выпадут «гербом»

в) только одна из них выпадет «гербом»

Ответ: а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{2}$

2. Брошена монета и кость. Найти вероятность того, что монета выпадет «гербом», а кость числом очков «пять».

Ответ: $\frac{1}{12}$

3. Из всех натуральных чисел, больших 1 и меньших 12, наугад выбирают одно число. Найти вероятность того, что оно делится на 4.

Ответ: $\frac{1}{5}$

Задания для самостоятельного решения

1. В отделе работает определенное количество мужчин и женщин.

Для анкетирования наугад выбрали одного из сотрудников. Вероят-

ность того, что это мужчина, равна $\frac{2}{7}$. Найти отношение количества

мужчин к количеству женщин, которые работают в этом отделе.

(ВНО- 2011)

2. В автобусном парке насчитывается n автобусов, шестую часть которых было оснащено информационными табло. Позже информационные табло установили еще на 5 автобусов из числа имеющихся в парке. После проведенного переоборудования наугад выбирают один из n автобусов парка. Вероятность того, что это будет автобус с информационным табло, равна 0,25. Определите n . Считается, что каждый автобус оснащен лишь одним табло. (ВНО- 2013)

3. Из всех натуральных чисел, больших 9 и меньших 20, наугад выбирают одно число. Установите соответствие между событием (1–4) и вероятностью его появления (А–Д)

1 Выбранное число будет простым	А	0
2 Выбранное число будет двузначным	Б	0,2
3 Выбранное число будет делителем числа 5	В	0,3
4 Сумма цифр выбранного числа будет делиться на 3	Г	0,4
	Д	1

4. В коробке 10 белых, 4 черных, 7 зеленых шаров. Наудачу вынут шар. Найти вероятности следующих событий:

а) шар оказался белым, б) шар оказался зеленым, в) шар оказался синим, г) шар оказался цветным.

5. Брошены два кубика. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков равно четырем.

6. Три стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7, 0,8 и 0,9 делают по одному выстрелу по одной мишени. Найти вероятности того, что:

- а) все три стрелка поразили мишень
- б) только первый стрелок поразил мишень
- в) только один из стрелков поразил мишень
- г) только два стрелка поразили мишень
- д) только первый и второй поразили мишень
- д) только первый и третий поразили мишень
- д) хотя бы один из стрелков поразил мишень
- е) ни один из стрелков не поразил мишень

7.3 Элементы статистики

Генеральной совокупностью называется совокупность, из которой делают отбор единиц для наблюдения.

Выборочной совокупностью (выборкой) называется совокупность единиц, отобранных для выборочного наблюдения.

Рядом распределения называют ряд чисел, которые характеризуют распределение единиц исследуемой совокупности.

Вариационным рядом называют ряд чисел, которые характеризуют распределение единиц исследуемой совокупности в зависимости от величин признака

Размах – разность между максимальным и минимальным значениями признака $r = x_{\max} - x_{\min}$

Мода – значение признака, которое встречается наиболее часто в ряде распределения.

Медиана – значение признака, которое размещается в середине ряда, расположенного в порядке возрастания значений признака.

– если количество чисел нечетное, то медиана размещается посередине.

– если количество чисел четное, то медиана есть полусумма двух чисел размещенных посередине.

Если, например, $n = 21$, то медиана $M_e = x_{11}$

Если $n = 22$, то медиана $M_e = \frac{x_{11} + x_{12}}{2}$

Среднее значение величины X это есть среднее арифметическое всех ее значений $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

Если случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_k$ соответственно с частотами $n_1, n_2, \dots, n_k$, то $\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n}$,

где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Среднее квадратическое отклонение находится как

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i}{n}}$$

Пример. Дана выборка. 12;13;14;12;15;12;11;13;14;13 . Найти размах, моду, медиану, среднее значение, среднее квадратическое отклонение.

x_i	11	12	13	14	15
n_i	1	3	3	2	1

Решение

Размах $r = 15 - 11 = 4$, количество $n = 1 + 3 + 3 + 2 + 1 = 10$

Распределение бимодальное (две моды) $M_{o_1} = 12$, $M_{o_2} = 13$

Число $n = 10$ четное, значит медиана $M_e = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{13 + 13}{2} = 13$

Среднее значение

$$\bar{X} = \frac{11 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 13 \cdot 3 + 14 \cdot 2 + 15 \cdot 1}{1 + 3 + 3 + 2 + 1} = \frac{11 + 36 + 39 + 28 + 15}{10} = 12,9$$

x_i	11	12	13	14	15
n_i	1	3	3	2	1
$x_i - \bar{X}$	-1,9	-0,9	0,1	1,1	2,1
$(x_i - \bar{X})^2$	3,61	0,81	0,01	1,21	4,41
$(x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i$	3,61	2,43	0,03	2,42	4,41

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\frac{3,61 + 2,43 + 0,03 + 2,42 + 4,41}{10}} = \sqrt{\frac{12,9}{10}} = \sqrt{1,29} \approx 1,14$$

Ответ: $r = 4$, $M_{o_1} = 12$, $M_{o_2} = 13$, $M_e = 13$, $\bar{X} = 12,9$, $\sigma \approx 1,14$.

Задание для самоконтроля

Дана выборка. 2;10;10;6;5;6;8;5;5. Найти размах, моду, медиану, среднее значение, среднее квадратическое отклонение.

Ответ: $r = 8$, $M_o = 5$, $M_e = 6$, $\bar{X} \approx 6,33$, $\sigma \approx 2,4$.

(При подсчете σ в качестве среднего взято значение 6,3).

Задания для самостоятельного решения

1. Дана выборка 2;3;4;2;5;2;1;3;4;3. Найти размах, моду, медиану, среднее значение выборки.
2. Дана выборка 5;5;4;2;5;1;3;3;1;3. Найти размах, моду, медиану, среднее значение, среднее квадратическое отклонение.
3. В шесть часов утра определена температура на десяти метеостанциях. Полученные данные отображены в таблице.

Температура (в градусах)	1	3	4	x
Количество метеостанций	2	3	4	1

Найти x , если среднее арифметическое всех этих данных равно $3,5^\circ$. (ВНО-2011)

8 ГЕОМЕТРИЯ

8.1 Площади фигур

Площадь фигуры – это неотрицательная величина, числовое значение которой имеет следующие свойства:

1. Равные фигуры имеют равные площади.
2. Площадь фигуры равна сумме составляющих ее и не перекрывающихся друг друга частей.
3. Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.

Площадь квадрата со стороной a

$$S = a^2$$

Площадь прямоугольника со сторонами a и b

$$S = ab$$

Площадь параллелограмма со сторонами a и b или с основанием a и высотой h

$$S = ah$$

$$S = ab \cdot \sin \alpha$$

Площадь ромба со стороной a , углом между сторонами α диагоналями d_1, d_2

$$S = ab \cdot \sin \alpha$$

или

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 d_2$$

Площадь треугольника с основанием a и высотой h

$$S = \frac{1}{2} \cdot ah$$

Площадь трапеции с основанием a, b и высотой h

$$S = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$$

Площадь круга

$$S = \pi R^2$$

8.2 Треугольники

Высота треугольника – опущенный из вершины треугольника перпендикуляр, проведенный на противоположающую вершине сторону или на ее продолжение.

Все три высоты треугольника (проведенные из трех вершин) пересекаются в одной точке, которая называется **ортоцентром**. Для того, чтобы

найти точку пересечения высот, достаточно провести две высоты (две прямые пересекаются только в одной точке).

Расположение ортоцентра определяется видом треугольника.

У остроугольного треугольника точка пересечения высот находится в плоскости треугольника (рис. 8.1).

У прямоугольного треугольника точка пересечения высот совпадает с вершиной прямого угла (рис. 8.2).

У тупоугольного треугольника точка пересечения высот находится за плоскостью треугольника (рис. 8.3).

У равнобедренного треугольника медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию треугольника, совпадают.

У равностороннего треугольника все три «замечательные» линии (высота, биссектриса и медиана) совпадают и три «замечательных» точки (точки ортоцентра, центра тяжести и центра вписанной и описанной окружностей) находятся в одной точке пересечения «замечательных» линий, т.е. тоже совпадают.

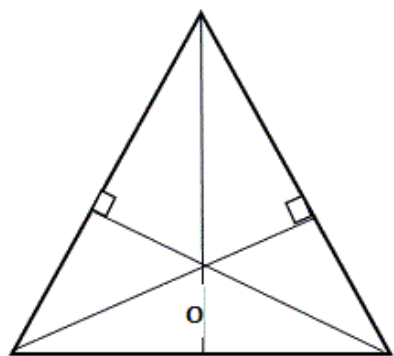


Рисунок 8.1

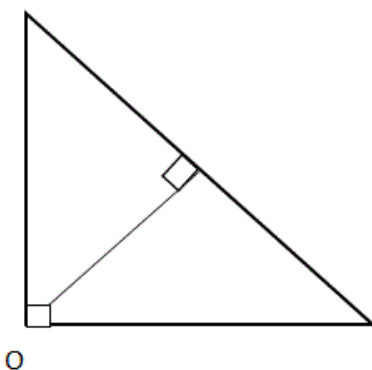


Рисунок 8.2

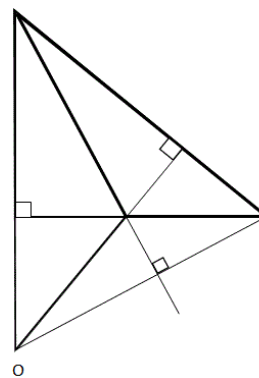


Рисунок 8.3

Пример 1. В прямоугольном треугольнике ABC (угол $C = 90^\circ$) проведена высота CD . Определите CD , если $AD = 10$ см, $BD = 16$ см.

Решение.

Треугольники ABC , ACD и CBD подобны между собой. Это непосредственно следует из второго признака подобия (равенство углов в этих треугольниках очевидно).

Прямоугольные треугольники - единственный вид треугольников, которые можно разрезать на два треугольника, подобных между собой и исходному треугольнику.

Обозначения этих трех треугольников в таком порядке следования вершин: ABC , ACD и CBD . Тем самым мы одновременно показываем и соответствие вершин. (Вершине A треугольника ABC соответствует также вершина A треугольника ACD и вершина C треугольника CBD и т. д.)

Треугольники ABC и CBD подобны. Значит:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{BD}$$

то есть

$$DC^2 = AD \cdot BD$$

$$DC^2 = 9 \cdot 16$$

$$DC = 12 \text{ см}$$

Ответ: 12 см.

Задания для самоконтроля

1. Из вершины прямого угла треугольника ABC проведена высота CD . Найти угол BCD , если угол A равен 65° . *Ответ:* 65° .
2. Стороны треугольника равны 29 см, 25 см и 6 см. Найдите высоту, проведенную к меньшей стороне. *Ответ:* 20 см.
3. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки 16 см и 9 см. Найдите периметр треугольника. *Ответ:* 60 см.
4. Катеты прямоугольного треугольника относятся 3:4, а гипотенуза равно 50 см. Найдите на какие отрезки делит гипотенузу высота, проведенная к ней. *Ответ:* 18 см, 32 см.

Задания для самостоятельного решения

1. Длина окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника, равна 50π см, боковая сторона треугольника равно 40 см. Определите площадь треугольника.
2. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит прямой угол в отношении 1:2 и равна 16 см. Вычислите стороны треугольника.
3. Основание равнобедренного треугольника равно 60 см, а боковая сторона 90 см. К боковым сторонам проведены биссектрисы. Вычислите длину отрезка, концами которого является основание биссектрис.

Площадь треугольника

Ниже приведены формулы нахождения площади произвольного треугольника. Площадь треугольника можно найти по следующим формулам:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bh$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{4R}$$

$$S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

Пояснения к формулам:

a, b, c – длины сторон треугольника, площадь которого мы хотим найти

r – радиус вписанной окружности

R – радиус описанной окружности

h – высота треугольника, опущенная на сторону

p – полупериметр треугольника, $\frac{1}{2}$ суммы его сторон

Пример 1. Стороны треугольника равны 5 см и 6 см. Угол между ними составляет 60° . Найдите площадь треугольника.

Решение.

Площадь треугольника равна $S = \frac{1}{2}ab\sin C$,

Соответственно

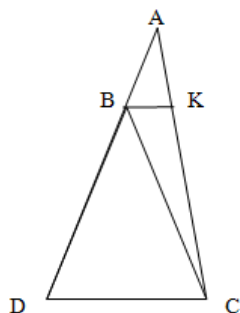
$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ$$

$$S = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $S = 7,5\sqrt{3}$.

Пример 2. На стороне AD треугольника ADC отмечена точка B так, что $BC = BD$. Докажите, что прямая DC параллельна биссектрисе угла ABC .

Решение.



Поскольку по условию задачи $BC = BD$, то треугольник DBC - равнобедренный.

Для данного треугольника угол CBA является внешним. Таким образом, решение задачи сводится к доказательству утверждения, что биссектриса внешнего угла равнобедренного треугольника параллельна его основанию.

Угол DBA - развернутый и равен 180° . Сумма углов треугольника также DBC равна 180° . Поскольку в состав развернутого угла DBA входит угол DBC , то градусная мера угла ABC равна сумме остальных углов равнобедренного треугольника, которые равны между собой. Таким образом, угол ABC равен удвоенной градусной мере угла DCB . Исходя из того, что BK - биссектриса угла ABC , то угол равен углу DCB .

Рассмотрим прямые BK и DC . Их внутренние накрест лежащие углы равны, KBC равен углу DCB . Таким образом, прямые параллельны.

Задания для самоконтроля

1. Найти площадь равностороннего треугольника со стороной 3 см.

$$\text{Ответ: } \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2$$

2. Во сколько раз увеличится площадь треугольника, если стороны увеличить в 4 раза?

Ответ: в 16 раз.

3. Одна из сторон треугольника равна 20 см, а медианы, проведенные к двум другим сторонам равны 18 см и 24 см. Вычислите площадь этого треугольника.

Ответ: 288 см^2

4. Периметр прямоугольного треугольника равен 60 см. Высота проведенная к гипотенузе равна 12 см. Вычислите площадь этого треугольника.
Ответ: 150 см²

Задания для самостоятельного решения

1. В прямоугольном треугольнике катеты равны 15 см и 20 см. Вычислите площади частей треугольника, на которые его делит высота, проведенная к гипотенузе.
2. Биссектриса угла A треугольника ABC делит сторону BC на отрезки $BK = 8$ см и $KC = 18$ см. Определите длину стороны AC , если длина стороны $AB = 12$ см.
3. Стороны треугольника равны 8, 9 и 13 сантиметров. К наибольшей стороне треугольника проведена медиана. Определите медиану треугольника исходя из размеров его сторон.
4. В треугольнике ABC медианы CD и BE пересекаются в точке K . Найдите площадь четырехугольника $ADKE$, если $BC = 20$ см, $AC = 12$ см, а угол ACE равен 135° .

8.3 Четырехугольники

Параллелограмм – четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, то есть лежат на параллельных прямых. Частными случаями параллелограмма являются прямоугольник, квадрат и ромб.

Свойства параллелограмма:

Противоположные стороны параллелограмма равны. Противоположные углы параллелограмма равны.

Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° .

Сумма всех углов равна 360° .

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон

Признаки параллелограмма:

Четырёхугольник $ABCD$ является **параллелограммом**, если выполняется одно из следующих условий:

- Противоположные стороны попарно равны
- Противоположные углы попарно равны
- Диагонали делятся в точке их пересечения пополам
- Сумма соседних углов равна 180°
- Две стороны равны и параллельны
-

Площадь параллелограмма

Формулы нахождения площади параллелограмма приведены ниже:

$$S_{ABCD} = AD \cdot h_{AD}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \alpha$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \beta$$

То есть:

1. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна произведению длины одной из его сторон на высоту, опущенную на эту сторону.
2. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.
3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Пример 1. Высоты параллелограмма равны 5 см и 4 см, а периметр равен 42 см. Найдите площадь параллелограмма.

Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, опущенную на эту сторону. Обозначим стороны параллелограмма как a и b .

Следовательно, площадь и периметр будут равны:

$$S = 4a \quad S = 5b \quad P = 2a + 2b$$

$$\text{Откуда } 4a = 5b, \quad a = \frac{5}{4}b$$

Поскольку периметр параллелограмма равен 42 см, то

$$2\left(\frac{5}{4}b\right) + 2b = 42$$

$$b = 9\frac{1}{3}$$

Откуда $a = 11\frac{2}{3}$

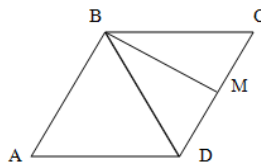
Теперь находим площадь параллелограмма:

$$S = 4 \cdot 11\frac{2}{3} = 5 \cdot 9\frac{1}{3} = 46\frac{2}{3} \text{ см}^2$$

Ответ: $46\frac{2}{3} \text{ см}^2$.

Пример 2. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $BD = 6$ см, и образует со сторонами AD и DC углы по 60° . Определите углы и периметр параллелограмма $ABCD$.

Дополнительно: определите вид четырехугольника $ABMD$, где точка M - середина DC , определите углы четырехугольника $ABMD$.



Решение.

Поскольку нам дана величина угла ADB (диагональ параллелограмма образует со сторонами AD и DC углы по 60°), то величина угла DBC также равна 60° , поскольку противоположные стороны параллелограмма параллельны, соответственно диагональ является секущей для двух параллельных прямых AD и BC , а для любой секущей внутренние накрест лежащие углы равны.

Таким образом, в треугольнике BCD нам известны два угла из трех, и они оба равны 60° . Соответственно, поскольку сумма углов треугольника равна 180° , то угол BCD также равен 60° , из чего следует, что треугольник BCD - равносторонний.

Поскольку треугольник BCD - равносторонний, то $BC = CD = BD = 6$ см.

Таким образом, поскольку противолежащие стороны параллелограмма равны, периметр его равен 24 см. Параллелограмм является ромбом.

Дополнительно:

Поскольку точка M лежит на стороне CD , то AB и MD - параллельны, следовательно, $ABMD$ - трапеция.

Угол DAB трапеции равен 60° , исходя из решения, изложенного выше, как угол параллелограмма.

Угол ADM равен 120° , так как по условию диагональ BD образует со сторонами AD и DC углы по 60° , а ADM равен сумме данных углов.

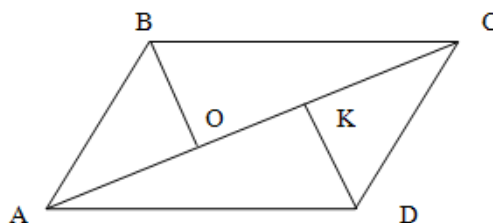
Поскольку по условию точка M - середина DC , $CM = MD$. Значит BM - медиана треугольника DBC . Как указано выше, тре-

угольник DBC - равносторонний, а в равностороннем треугольнике медиана является, одновременно, биссектрисой и высотой. Значит, угол DBM равен половине угла DBC и равен $\frac{60}{2} = 30^\circ$. Откуда угол $ABM = 60 + 30 = 90^\circ$ градусов. Поскольку BM - высота, то угол BDM равен также 90° .

Исходя из сказанного, $ABMD$ - прямоугольная трапеция.
Ответ: 24 см, 60° , 90° , 90° , 120° - прямоугольная трапеция.

Задания для самоконтроля

1. В параллелограмме $ABCD$ на диагональ опущен перпендикуляр BO . Найдите площадь параллелограмма, если $AO = 8$, $OC = 6$ и $BO = 4$.



Ответ: 56 см^2

2. Перпендикуляр, проведенный из вершины тупого угла параллелограмма на его диагональ, делит эту диагональ на отрезки 41 см и 57 см. Разность длин сторон равна 14 см. Вычислите длины диагоналей параллелограмма.

Ответ: 56 см, 98 см

3. Две высоты параллелограмма, проведенные из вершины острого угла, соответственно равны 10 см и 24 см. Угол между этими высотами 150° . Вычислите площадь параллелограмма.

Ответ: 480 см^2

Задания для самостоятельного решения

1. В параллелограмме меньшая высота и меньшая сторона равны 9 см и $\sqrt{82}$ соответственно. Большая диагональ 15 см. Найти площадь параллелограмма.
2. Диагонали параллелограмма равны 13 см и 11 см, а его периметр равен 34 см. Вычислите стороны параллелограмма.
3. В прямоугольнике $CKMN$ проведена биссектриса угла C , которая пересекает сторону KM в точке E , причём длина отрезка KE на 3 см меньше длины ME . Найдите MN , если периметр $CKMN$ равен 51 см.

4. Периметр прямоугольника равен 32 см, а сумма площадей квадратов, построенных на каждой из его сторон - 26 см^2 . Найдите стороны прямоугольника.
5. Периметр прямоугольника 26 см, а сумма площадей квадратов, построенных на двух его смежных сторонах, равна 89 см^2 . Найдите стороны прямоугольника.
6. Найти площадь прямоугольника, если его периметр равен 26 см, а стороны пропорциональны как 2 к 3.
7. Существует ли четырехугольник, если длины сторон 1 см, 3 см, 5 см, 9 см?
8. Существует ли четырехугольник, если длины сторон 5 см, 17 см, 3 см, 7 см?
9. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 66 см, а одна из сторон больше второй на 8 см и на столько же меньше третьей, а четвертая - в три раза больше второй.
10. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5.
11. У ромба $ABCD$ диагональ BD равна 14 см, длина диагонали AC равна 48 см. Найти длину стороны AB .

Трапеция

Трапеция – четырёхугольник, у которого пара противоположащих сторон параллельна.

Примечание. В этом случае параллелограмм является частным случаем трапеции.

Трапеции бывают:

- разносторонние (рис. 8.4);
- равнобокие (рис. 8.5);
- прямоугольные (рис. 8.6);

У разносторонней трапеции все стороны разной длины, а основания параллельны.

У равнобокой трапеции боковые стороны равны, а основания параллельны.

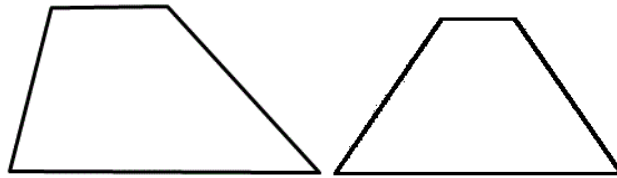


Рисунок 8.4 – Разнобокая

Рисунок 8.5 – Равнобокая

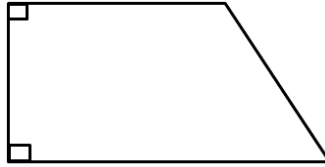


Рисунок 8.6 – Прямоугольная

У прямоугольной трапеции основания параллельны, одна боковая сторона перпендикулярна основаниям, а вторая боковая сторона - наклонная к основаниям.

Углы трапеции бывают острые, прямые и тупые. Прямыми бывают только два угла. У прямоугольной трапеции два угла прямые, а два других – острый и тупой. У других видов трапеций бывают: два острых угла и два тупых. Тупые углы принадлежат меньшему по длине основанию, а острые – большему основанию.

Любую трапецию можно рассматривать как усеченный треугольник, у которого линия сечения параллельна основанию треугольника

Площадь трапеции

$$S = \frac{(a + b)h}{2}$$

$$S = mh$$

$$S_{\text{равноб}} = 8r^2$$

где: a и b – параллельные основания трапеции

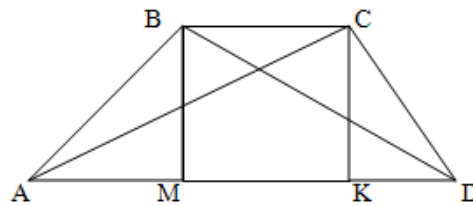
c и d – боковые стороны трапеции

m – средняя линия трапеции

r – радиус вписанной в трапецию окружности

S – площадь трапеции

Пример 1. У трапеции $ABCD$ угол ABC равен углу ACD . При этом величина основания AD равна 18 см, а диагональ AC равна 12 см. Найти величину основания BC .



Решение.

Поскольку $ABCD$ - трапеция, то углы CAD и BCA равны, исходя из свойств секущей для двух параллельных прямых.

Так как углы CAD и BCA равны, углы ABC и ACD равны по условию, то в треугольниках ABC и ACD , в которых два угла равны, третьи углы также равны - угол BAC равен CDA (сумма углов треугольника равна 180° , а два из трех углов равны, поэтому и оставшиеся углы равны).

Так как все углы треугольников ABC и ACD попарно равны, то такие треугольники подобны.

Поскольку треугольники ABC и ACD подобны, то соотношения всех их сторон равны одному и тому же числу.

Откуда:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

(AC - сторона, противолежащая углу B треугольника ABC , AD - сторона, противолежащая соответствующему углу треугольника ACD , аналогично и правой стороной равенства), таким образом:

$$\frac{12}{18} = \frac{BC}{12}$$

$$BC = 8$$

Ответ: $BC = 8$ см.

Задания для самоконтроля

1. В прямоугольной трапеции большая боковая сторона равна сумме оснований, высота равна 12 см. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны основаниям трапеции. *Ответ:* 36 см^2
2. Найдите углы равнобокой трапеции, если один угол на 30° больше второго. *Ответ:* $75^\circ, 105^\circ$
3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ проведена диагональ AC равная 15 см и задан угол CAD . Найти высоту трапеции.

Ответ: $15 \sin \angle CAD$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите углы равнобокой трапеции, если один угол на 30° больше второго.
2. Основания равнобедренной (равнобокой) трапеции равны 8 см и 20 см. Боковая сторона равна 10 см. Найдите площадь трапеции, подобной данной, которая имеет высоту 12 см.
3. В равнобокой трапеции большее основание 36 см, боковая сторона 25 см, диагональ 29 см. Найти площадь трапеции.
4. Вокруг окружности описана равнобедренная трапеция, угол при основании которой равен 30° . Высота трапеции равна 4 см. Найдите сумму длин оснований трапеции.

Многоугольники

Многоугольник — это геометрическая фигура, представляющая собой замкнутую ломаную линию.

Существуют три варианта определения многоугольников:

- **Многоугольник** - это плоская замкнутая ломаная линия;
- **Многоугольник** - это плоская замкнутая ломаная линия без самопересечений;
- **Многоугольник** - это часть плоскости, которая ограничена замкнутой ломаной.

Вершины ломаной называются **вершинами** многоугольника, а отрезки — **сторонами** многоугольника.

Вершины многоугольника называются **соседними**, если они являются концами одной из его сторон.

Отрезки, соединяющие несоседние вершины многоугольника, называются **диагоналями**.

Углом (или **внутренним углом**) многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине, и находящийся во внутренней области многоугольника.

Сумма углов многоугольника

Для выпуклого n -угольника сумма углов равна $180^\circ(n - 2)$.

Пример 1. В выпуклом многоугольнике три угла по 80° , а остальные - 150° . Сколько углов в выпуклом многоугольнике?

Решение.

Для решения данной задачи воспользуемся теоремой о сумме углов выпуклого многоугольника.

Теорема гласит: Для выпуклого n -угольника сумма углов равна $180^\circ(n-2)$. Значит, для нашего случая: $180^\circ(n-2) = 3 \cdot 80 + x \cdot 150$, где 3 угла по 80° нам даны по условию задачи, а количество остальных углов нам пока неизвестно, значит обозначим их количество как x .

Однако, из записи в левой части мы определили количество углов многоугольника как n , поскольку из них величины трех углов мы знаем по условию задачи, то очевидно, что $x = n - 3$.

Таким образом уравнение будет выглядеть так:

$$180^\circ(n-2) = 240 + 150(n-3)$$

Решаем полученное уравнение

$$180n - 360 = 240 + 150n - 450$$

$$180n - 150n = 240 + 360 - 450$$

$$30n = 150$$

$$n = 5$$

Ответ: 5 вершин.

Задания для самоконтроля

1. Найдите количество сторон правильного многоугольника, центральный угол которого равен:

1) 120°

Ответ: 3.

2) 60°

Ответ: 6.

3) 72°

Ответ: 5.

2. Найдите углы выпуклого пятиугольника, если они пропорциональны числам 1, 3, 5, 7, 11. *Ответ:* $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ, 140^\circ, 220^\circ$

3. Сколько сторон имеет выпуклый n -угольник, если сумма его внутренних углов равна 1260° . *Ответ:* 9 сторон.

Задания для самостоятельного решения

1. Какое количество вершин может иметь многоугольник, если величина каждого из углов менее 120° ?
2. В многоугольнике три угла по 113° , а остальные равны между собой и их градусная мера - целое число. Найти количество вершин многоугольника.
3. Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трех острых углов.

8.4 Многогранники

Выпуклый многогранник называется **правильным**, если его грани – правильные многоугольники с одним и тем же количеством сторон, а в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Правильные многогранники называются телами Платона.

Существует пять типов правильных выпуклых многогранников:

Призма – многогранник, основаниями которого являются равные многоугольники, соответствующие боковые грани которого представляют собой параллелограммы.

Равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** призмы.

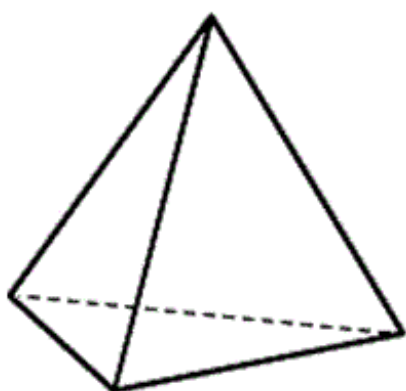


Рисунок 8.7 – Тетраэдр

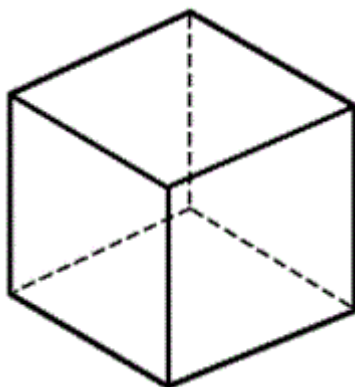


Рисунок 8.8– Куб

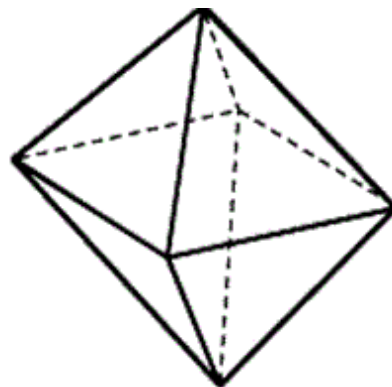


Рисунок 8.9– Октаэдр

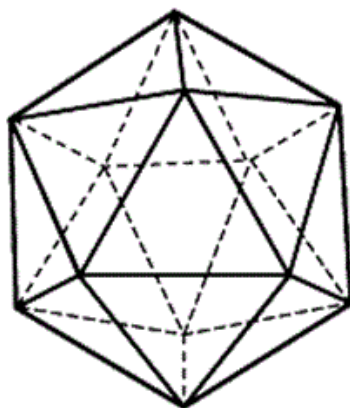


Рисунок 8.10– Икосаэдр

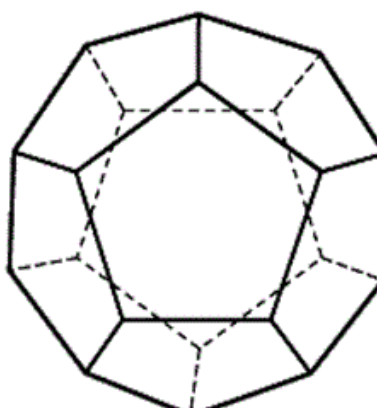


Рисунок 8.11 – Додекаэдр

Грани призмы, соединяющие ее основания призмы называются **боковыми гранями** ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$).

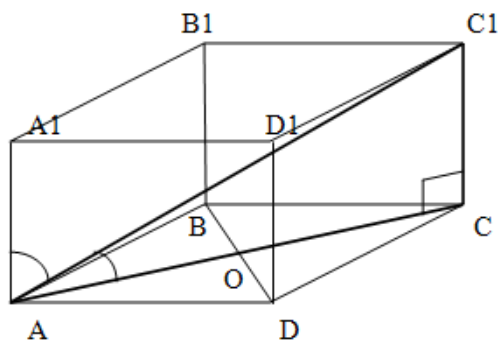
Площадь (объединение, совокупность) всех боковых граней призмы называется **боковой поверхностью**.

Общие грани параллелограммов, соединяющие основания призмы, называются **боковыми ребрами** (AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 и т.д.).

Длина отрезка, соединяющего основания призмы и перпендикулярного одновременно обоим основаниям, является (называется) **высотой** призмы.

Отрезок проведенный между двумя вершинами многогранника, представляющего собой призму, так, чтобы он не принадлежал ни одной плоскости призмы (основаниям или боковым граням) называется **диагональю** призмы. (AC_1)

Плоскость, проходящая через боковое ребро призмы и диагональ основания (не путать с диагональю призмы!) называется **диагональной плоскостью** (AA_1CC_1).



Свойства призмы

- Основания призмы равны
- Каждая из боковых граней обязательно является параллелограммом
- Боковые ребра призмы параллельны и равны между собой
- Боковые грани правильной призмы представляют собой равные прямоугольники
- При пересечении призмы и диагональной плоскости сечение представляет собой параллелограмм

Специальные случаи призм

Параллелепипед – это призма, основанием которой является параллелограмм.

Прямая призма – призма, у которой боковые ребра перпендикулярны плоскости основания.

Прямоугольный параллелепипед – прямая призма, основанием которой является прямоугольник и все грани являются прямоугольниками

Правильная призма – это прямая призма, основаниями которой является правильный многоугольник

Объем призмы

Формула нахождения объема призмы выглядит следующим образом:

$$V = Sh,$$

где V – объем призмы, S – площадь основания призмы,

h – высота призмы

Пример 1. Площадь полной поверхности куба равна 24 см^2 . Найдите его объем.

Решение.

Поскольку куб имеет шесть одинаковых сторон, найдем площадь одной из них.

$\frac{24}{6} = 4 \text{ см}^2$ Зная площадь стороны (основания) куба,

найдем величину ребра $a = \sqrt{4} = 2 \text{ см}$. Откуда его объем равен

$$S = a^3 = 2^3 = 8 \text{ см}^3$$

Ответ: 8 см^3 .

Задания для самоконтроля

1. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 см, 7 см и 8 см. Боковые ребра равны $\frac{8}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы. *Ответ:* 200 см^2
2. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. высота призмы 10 см. Найдите площадь полной поверхности. *Ответ:* 132 см^2
3. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна площади основания. Вычислите длину бокового ребра, если сторона основания 7 см. *Ответ:* $\frac{7\sqrt{3}}{12} \text{ см}^2$
4. Найти площадь правильной треугольной призмы, сторона основания которой 6 см, а высота – 10 см. *Ответ:* $18\sqrt{3} + 180 \text{ см}^2$

Задания для самостоятельного решения

1. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник, в котором высота, проведенная к основанию, равняется 8 см. Высота призмы равняется 12 см. Найдите полную поверхность призмы, если боковая грань, что содержит основание треугольника – квадрат.

2. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна площади основания. Вычислите длину бокового ребра, если сторона основания 7 см.
3. В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 8 см и 6 см. Найти боковое ребро призмы, если ее боковая поверхность равна 120 см^2 .
4. Основание прямой призмы - треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2 , найти площадь боковой поверхности.
5. В правильной четырёхугольной призме площадь основания 144 см^2 , а высота 14 см. Найти диагональ призмы и площадь полной поверхности.
6. Определите полную поверхность правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ равна 5 см, а диагональ боковой грани равна 4 см.
7. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 4 см и $4\sqrt{3}$ см и углом, равным 30° . Диагональ AC_1 призмы образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите площадь боковой поверхности призмы.
8. Основание прямой призмы - ромб с углом 120° . Большая диагональ призмы равна 8 см и составляет с боковым ребром угол 60° . Найти сторону ромба и меньшую диагональ призмы.
9. Диагональным сечением правильной четырехугольной призмы является квадрат, площадь которого равен 144 см^2 . Найдите объем призмы.

Параллелепипед

Параллелепипед — призма, основание которой — параллелограмм.

Пример 1. Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин его верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Определите высоту параллелепипеда, если диагональ основания равна 8 см, а боковое ребро равно 5 см.

Решение.

Поскольку одна из вершин основания параллелепипеда (обозначим ее F) одинаково удалена от всех вершин нижнего основания параллелепипеда, то вместе с диагональю нижнего основания (обозначим ее AC) она образует равнобедренный треугольник AFC . $AF = AC$ по условию. Одновременно, AF - это ребро параллелепипеда.

Таким образом, в равнобедренном треугольнике AFC стороны равны следующим величинам $AF = FC = 5$ см, $AC = 8$ см. Высота равнобедренного треугольника AFC одновременно, будет являться высотой параллелепипеда. Пусть она опущена в точке K . Кроме того, высота равнобедренного треугольника делит его основание пополам. Откуда, по теореме Пифагора высота будет равна:

$$FK^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = FC^2$$

$$FK^2 + 16 = 25$$

$$FK^2 = 9$$

$$FK = 3$$

Ответ: высота параллелепипеда равна 3 см.

Задания для самоконтроля

1. Основание прямоугольного параллелепипеда - ромб. Площади диагональных сечений равны 6 см и 8 см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда. *Ответ:* 20 см²

2. В прямом параллелепипеде стороны основания 10 см и 17 см, одна из диагоналей основания равна 21 см. Большая диагональ параллелепипеда равна 29 см. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: 3360 см³

3. В прямом параллелепипеде стороны основания $2\sqrt{2}$ см и 5 см. Они образуют угол 45° , меньшая диагональ равна 7 см. Определите его полную поверхность. *Ответ:* $8(10 + 3\sqrt{2})$ см²

Задания для самостоятельного решения

1. Основание прямоугольного параллелепипеда – ромб. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площади его диагональных сечений равны P и Q .
2. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб с острым углом γ . Диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом α , а площадь этой грани Q . Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.
3. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α , а с боковой гранью – угол β . Высота параллелепипеда равна H . Найдите объем параллелепипеда.

Пирамида

Свойства правильной пирамиды

Пирамида называется **правильной**, если основанием её является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания. Правильная пирамида имеет следующие свойства:

- боковые ребра правильной пирамиды равны;
- в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники;
- в любую правильную пирамиду можно как вписать сферу
- около любой правильной пирамиды можно описать сферу;
- если центры вписанной и описанной сферы совпадают, то сумма плоских углов при вершине пирамиды равна π , а каждый из них соответственно, где n — количество сторон многоугольника основания;
- площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Определение правильной пирамиды

Определение 1. Пирамида называется **правильной**, если её основанием является правильный многоугольник, при этом вершина такой пирамиды проецируется в центр ее основания.

Определение 2. Пирамида называется **правильной**, если ее основание — правильный многоугольник, а высота проходит через центр основания.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины называется **апофемой**, обозначена как отрезок ON (Рисунок 8.12).

Точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания, называется **вершиной** пирамиды (O)

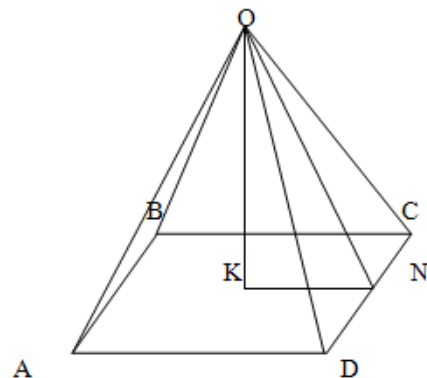


Рисунок 8.12 – Пирамида

Треугольники, имеющие общую сторону с основанием пирамиды и одну из вершин, совпадающую с вершиной пирамиды, называются **боковыми гранями** (AOD , DOC , COB , AOB)

Отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания называется **высотой** пирамиды (OK)

Диагональное сечение пирамиды - это сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания (AOC , BOD)

Многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды, называется **основанием** пирамиды ($ABCD$).

Если в основании правильной пирамиды лежит треугольник, четырехугольник и т.д. то такая пирамида называется **правильной треугольной, четырехугольной** и т.д.

Треугольная пирамида есть четырехгранник — **тетраэдр**.

Правильная усеченная пирамида

Если провести сечение, параллельное основанию пирамиды, то тело, заключённое между этими плоскостями и боковой поверхностью, называется **усеченной** пирамидой. Это сечение для усеченной пирамиды является одним из её оснований.

Высота боковой грани правильной усеченной пирамиды, называется — **апофемой** правильной усеченной пирамиды.

Усечённая пирамида называется **правильной**, если пирамида, из которой она была получена – правильная.

- Расстояние между основаниями усеченной пирамиды называется высотой усеченной пирамиды
- Все грани правильной усеченной пирамиды являются равнобокими (равнобедренными) трапециями

Свойства правильной пирамиды

- боковые ребра равны
- апофемы равны
- боковые грани равны
- в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать около неё сферу
- если центры вписанной и описанной сферы совпадают, то сумма плоских углов при вершине пирамиды равна π , а каждый из них соответственно $\frac{\pi}{n}$, где n — количество сторон многоугольника основания
- площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему
- около основания правильной пирамиды можно описать окружность
- все боковые грани образуют с плоскостью основания правильной пирамиды равные углы
- все высоты боковых граней равны между собой
-

Формулы для правильной пирамиды

Формула объема пирамиды и площади боковой поверхности правильной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

$$V_b = \frac{1}{2} Ph = \frac{n}{2} b^2 \sin \alpha$$

Обозначения:

V – объем пирамиды

S – площадь основания

h – высота пирамиды

Sb – площадь боковой поверхности пирамиды

α – апофема (не путать с a)

P – периметр основания

n – число сторон основания

b – длина бокового ребра

α – плоский угол при вершине пирамиды

Данная формула нахождения объема может применяться только для правильной пирамиды:

$$V = \frac{hna^2}{12tg\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} = \frac{hna^2}{12tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}, \text{ где}$$

V – объем правильной пирамиды

h – высота правильной пирамиды

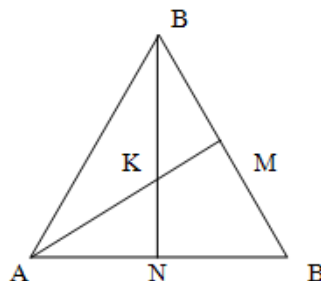
n – число сторон правильного многоугольника, который является основанием для правильной пирамиды

a – длина стороны правильного многоугольника

Пример 1. Найдите угол между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра.

Решение.

Поскольку медианы скрещиваются, они лежат в одной плоскости. Поскольку они проведены к боковым граням правильного тетраэдра, то эта плоскость лежит на боковой грани. Поскольку тетраэдр является правильным, то каждая из его граней представляет собой правильный треугольник.



Все углы равностороннего треугольника равны 60° . Поскольку в равностороннем треугольнике каждая медиана является одновременно и биссектрисой и высотой, то:

$$\angle KMB = 30^\circ$$

$$\angle ANK = 90^\circ$$

$$\text{Откуда } \angle ANK = 180 - 90 - 30 = 60^\circ.$$

Ответ: Медианы пересекаются под углом 60°

Задания для самоконтроля

1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого 8 см, а радиус описанной около него окружности равен 5 см. Основанием высоты этой пирамиды является середина гипотенузы. Высота пирамиды равна 12 см. Вычислить боковые ребра пирамиды.

Ответ: 13 см

2. Основание пирамиды прямоугольный треугольник, катеты которого равны 8 см и 6 см. высота пирамиды равна 10 см. Вычислить объем пирамиды.

Ответ: 80 см^3

3. Вычислите объем пирамиды, основанием которого служит прямоугольник со сторонами 4 дм и 3 дм, а каждое боковое ребро равно 6,5 дм.

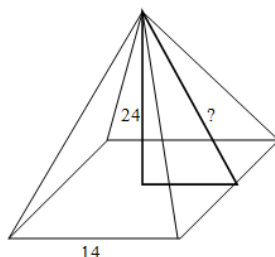
Ответ: 24 дм^3

Задания для самостоятельного решения

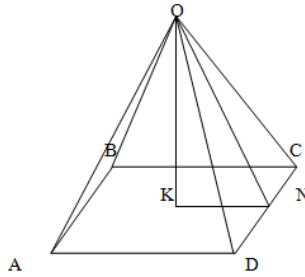
1. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при основании равен 60° . Найдите объем пирамиды.

2. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а боковая грань образует с основанием угол 60° . Найдите объем пирамиды.

3. Высота и сторона основания правильной четырехугольной пирамиды соответственно равны 24 и 14. Найдите апофему пирамиды.



4. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Двугранные углы при основании равны α . Найти площадь полной поверхности пирамиды.



5. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10 см, а боковое ребро 13 см. Найти площадь боковой поверхности и высоту пирамиды.

6. Высота боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см. Определите полную поверхность пирамиды, если боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60° .

7. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна a , высота равна $3a$. Найдите углы наклона боковых рёбер и боковых граней к плоскости основания.

8. Найти величину двугранного угла при основании правильной четырехугольной пирамиды, если её боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45° .

9. $ABCD$ - квадрат с стороной 4 см. Точка M отдалена от каждой вершины квадрата на 7 см. Найти расстояние от середины отрезка MA до вершин и сторон квадрата.

Сфера (шар)

Пример 1. Коническая воронка, радиус основания которой R , а высота H , наполнена водой. В воронку опущен тяжелый шар. Каким должен быть радиус шара, чтобы объем воды, вытесненный из воронки погруженной частью шара, был максимальным?

Решение.

Мысленно проведем сечение через центр конуса. Данное сечение образует равнобедренный треугольник.

Если в воронке находится шар, то максимальный размер его радиуса будет равен радиусу вписанной в получившийся равнобедренный треугольник окружности.

Радиус вписанной в треугольник окружности равен:

$$r = \frac{S}{p}, \text{ где}$$

S – площадь треугольника

p – его полупериметр

Площадь равнобедренного треугольника равна половине высоты, умноженной на основание. Но, поскольку, основание - удвоенный радиус конуса, то

$$S = RH$$

Полупериметр равен

$$p = \frac{1}{2}(2R + 2m)$$

m – длина каждой из равных сторон равнобедренного треугольника

R – радиус окружности, составляющей основание конуса m найдем

по теореме Пифагора как $m = \sqrt{(H^2 + R^2)}$, откуда

$$p = \frac{1}{2}(2R + 2\sqrt{(H^2 + R^2)}) = R + \sqrt{(H^2 + R^2)}$$

Кратко это выглядит следующим образом:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{RH}{p}$$

$$r = \frac{RH}{\frac{1}{2}(2R + 2\sqrt{(H^2 + R^2)})}$$

$$r = \frac{RH}{R + \sqrt{(H^2 + R^2)}}$$

Задания для самоконтроля

1. Объемы двух шаров относятся как 27 : 64. Как относятся площади их поверхностей? *Ответ:* 9:16.

2. Найдите диаметр шара, если его объем равен $\frac{2048\pi}{3}$? *Ответ:* 16 см.

3. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза? *Ответ:* в 27 раз.

Задания для самостоятельного решения

1. В сферу вписан конус, образующая которого равна 1, а угол при вершине осевого сечения равен 60° . Найдите площадь сферы.
2. Емкость имеет форму полусферы (полушара). Длина окружности основания равна 46 см. На 1 квадратный метр расходуется 300 граммов краски. Сколько необходимо краски, чтобы покрасить емкость?

3. Определите объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара 75 см.
4. Радиус шара равен R . Определите объем шарового сектора, если дуга в осевом сечении сектора равна 60° .

Цилиндр

Пример 1. В цилиндр вписана призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катет которого равен $2a$, а прилежащий угол равен 60° . Диагональ большей боковой грани призмы составляет с плоскостью ее основания угол в 35° . Найдите объем цилиндра.

Решение.

Объем цилиндра найдем по формуле:

$$V = \pi R^2 h$$

где: R – радиус основания прямого цилиндра,
 h – высота.

Найдем основание цилиндра. 1-й способ.

Основание цилиндра одновременно является окружностью, описанной вокруг прямоугольного треугольника, являющегося основанием призмы. Радиус окружности, описанной вокруг треугольника, найдем по формуле:

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

где: a – сторона треугольника

α – угол, противолежащий стороне a .

Противолежащий угол найдем следующим образом. Поскольку треугольник прямоугольный, то противолежащий катету угол будет равен $180 - 60 - 90 = 30^\circ$. Таким образом, радиус описанной окружности (он же радиус цилиндра) равен:

$$R = \frac{2a}{2 \sin 30} = 2a$$

Найдем основание цилиндра. 2-й способ. У прямоугольного треугольника гипотенуза одновременно является диаметром описанной окружности. Половина гипотенузы будет равна ее радиусу.

Таким образом, найдем гипотенузу для прямоугольного треугольника, зная угол и его катет через тригонометрическую функцию:

$$2R = \frac{2a}{\cos 60} = \frac{2a}{0,5} = 4a$$

$$R = 2a$$

Найдем высоту цилиндра. Диаметр описанной окружности образует с диагональю призмы прямоугольный треугольник, один катет которого является диаметром описанной окружности, второй -

высотой цилиндра и призмы, а гипотенуза является диагональю большей стороны призмы и одновременно цилиндра.

Поскольку угол диагонали с основанием составляет 45° , то второй угол равен $180 - 45 - 90 = 45^\circ$ градусов. Исходя из того, что прямоугольный треугольник равнобедренный, то высота цилиндра и призмы равна диаметру окружности. Таким образом:

$$V = \pi R^2 h$$

$$V = \pi 4a^2 4a$$

$$V = \pi 16a^3$$

Ответ: $\pi 16a^3$.

Задания для самоконтроля

1. Осевым сечением цилиндра есть квадрат, диагональ которого равна $4\sqrt{2}$ см. Вычислите объем цилиндра. *Ответ:* 16π см³

2. Площадь боковой поверхности цилиндра 24π см², а его объем равен 48π см³. Найдите его высоту. *Ответ:* 3 см. *Ответ:* 3 см

3. В цилиндре на расстоянии 8 см от его оси и параллельно ей проведено сечение, диагональ которого равна 13 см. Вычислите радиус основания цилиндра, если его высота равна 5 см.

Ответ: 10 см

Задания для самостоятельного решения

1. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, диагональ которого равна 17 см, высота цилиндра равна 15 см, а радиус основания 5 см. На каком расстоянии от оси проведено это сечение?

2. Осевое сечение цилиндра - квадрат, диагональ которого равна $4\sqrt{2}$. Вычислить объем цилиндра.

3. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ его осевого сечения, равная 8 см, составляет с образующей цилиндра угол величиной 30° .

Конус

Пример 1. Объем цилиндра равен 48 см³. Найти объем конуса, радиус основания которого равен радиусу основания цилиндра, а высота вдвое меньше высоты цилиндра.

Решение.

Формула объема цилиндра $V = \pi R^2 h$

А формула объема вписанного конуса ($V = \frac{1}{3}hm^2$) для "нашего" случая, учитывая, что высота конуса равна половине высоты цилиндра, будет равна:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} m^2$$

но, по условию задачи, объем цилиндра составляет 48, то есть $hm^2 = 48$. Значит, подставим в формулу объема конуса вместо hm^2 известное нам значение. Получаем:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{48}{2}$$

$$V = 8 \text{ см}^3$$

Ответ: 8 см³.

Задания для самоконтроля

1. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник с углом при вершине 120° и боковой стороной 8 см. Вычислите радиус конуса.

Ответ: $4\sqrt{3}$ см

2. Образующая конуса равна 14 см, угол при вершине осевого сечения равен 60°. Найдите полную поверхность конуса.

Ответ: 147π см²

3. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол 45°, высота конуса равна $3\sqrt{2}$ см. Найдите боковую поверхность конуса.

Ответ: $18\sqrt{2}\pi$ см²

Задания для самостоятельного решения

1. Площадь основания конуса 36π см², а его образующая 10 см. Вычислить боковую поверхность конуса.

2. В цилиндр вписаны шар и конус, причём высота цилиндра равна диаметру его основания. Найти отношение объёма конуса к объёму шара, и к объёму цилиндра.

3. Объем конуса равен 27. На высоте конуса лежит точка и делит её в отношении 2:1 считая от вершины. Через точку проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

4. Образующая конуса равна 12 см. Угол между образующей и плоскостью основания равен 30° . Найти объем конуса.

5. Из центра основания конуса к образующей проведен перпендикуляр, который образует с высотой угол β . Образующая конуса равна 1. Определить объем конуса.

6. Через вершину конуса проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания. Эта плоскость пересекает основание в хорде, расстояние до которой от вершины 6 см. Найдите объем конуса, если длина радиуса 5 см.

7. Образующая усеченного конуса равна 5 см, а радиусы оснований 3 см и 6 см. Найдите площадь осевого сечения.

8.5 Декартовы координаты и векторы

Декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием линейной единицы для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-либо порядке (рис. 8.13).

Точка пересечения осей называется началом координат, а сами оси – координатными осями. Первая координатная ось называется осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат.

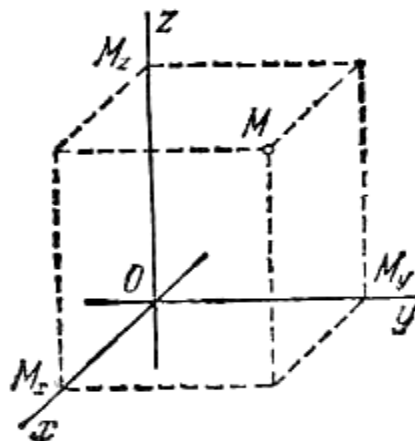


Рисунок 8.13

Расстояние между точками:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Координаты середин отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Координаты вектора

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3), \text{ где } a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1.$$

Модуль вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Суммой вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ называется вектор $\vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ называется число

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi \\ a \perp b \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

Пример 1. На оси аппликат найти точку A , равноудаленную от точек $M(-2; 3; 5)$ и $N(3; -5; 1)$.

Решение.

Пусть точка A имеет координаты $A(0; 0; z)$. По условию $AM = AN$, отсюда $AM^2 = AN^2$. Поскольку $AM^2 = 4 + 9 + (z - 5)^2$, $AN^2 = 9 + 25 + (z - 1)^2$, то $13 + (z - 5)^2 = 34 + (z - 1)^2$, $8z = 3$, $z = \frac{3}{8}$.

Значит, $A\left(0; 0; \frac{3}{8}\right)$

Ответ: $A\left(0; 0; \frac{3}{8}\right)$.

Задания для самоконтроля

1. Концы отрезка $A(5; -2; 1)$ и $B(5; 3; 6)$. Найти точку, симметричную середине отрезка относительно плоскости xz .

Ответ: $M_1(5; -0,5; 3,5)$

2. Точка $M(2; 6; 3)$ - середина отрезка, концы которого находятся на оси Ox и в плоскости yz . Найти координаты концов и длину отрезка.

Ответ: $A(4; 0; 0)$, $A(0; 12; 6)$, $AB = 14$.

3. Даны векторы $\vec{a}(-2; 2; -3)$ и $\vec{b}(3; 1; 2)$. Найдите $\vec{S} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Ответ: $S(5; 7; 0)$

Задания для самостоятельного решения

1. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}(2; 3; 6)$ и $\vec{b}(3; 2; -1)$?
2. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}(2; 3; 8)$ и $\vec{b}(-4; 6; -16)$?
3. Дан вектор $\vec{a}(1; 2; 3)$. Найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке $A(-1; -1; -1)$ и концом в точке B на плоскости xy .

ЛИТЕРАТУРА

1 Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5–12 класи. – Київ, Ірпінь, 2005.

2 Програма зовнішнього незалежного оцінювання 2013 року (ЗНО 2013) з математики.

3 Алгебра начала анали за : учебн. для 10– 11 кл.средн. шк. / А. Н. Колмогоров [и др.] ; под ред. А. Е. Колмогорова. – М. : Просвещение, 1990.

4 **Погорелов, А. В.** Геометрия : учебн. для 7–11 кл. средн. шк. / Погорелов А. В. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 1991. – 384 с.: ил. – ISBN 5-09-003385-4.

5 Методическое пособие по элементарной математике к тестовым испытаниям в ДГМА / Сост. : Астахов В. Н., Буланов Г. С.– Краматорск : ДГМА, 2007. – 60 с. – ISBN 987-966-379-181-4.

6 **Литвиненко, В. Н.** Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. –2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1991. – 352 с.: ил.– ISBN 5-09-003393-5.

7 **Роганін, О. М.** Математика : практичний довідник / Роганін О. М., Каплун О. І. – 2-ге вид., зі змінами. – Харків : ФОП Співак В. Л., 2011. – 380 с. + с. вкладка ISBN 978-966-8896-77-4.

Навчальне видання

МАТЕМАТИКА

Посібник
(Російською мовою)

Укладачі : **ЗОЗУЛЯ Євген Сергійович,**
 СКАРЛАТ Тетяна Василівна

За авторським редагуванням

136/2014. Формат 60 × 84/16. Ум. друк. арк. 7,9.
Обл.-вид. арк. 2,61. Тираж 10 пр. Зам. № 66.

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК №1633 від 24.12.2003

