МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КРАМАТОРСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗА РОЗДІЛОМ КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ “СИСТЕМИ КООРДИНАТ. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО ТА ТЕНЗОРНОГО ОБЧИСЛЕННЯ”

(для студентів спеціальностей 1108, 1204)

З а т в е р д ж е н о
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол № 4 від 10.11.92

КРАМАТОРСЬК КІІ 1993

УДК 517.3

Методичні вказівки до самостійної роботи за розділом курсу вищої математики “Системи координат. Елементи векторного та тензорного обчислення” (для студентів спеціальностей 1108, 1204) / Уклад.: В.О. Паламарчук, С.О. Колесніков, Л.Ф. Москаленко. - Краматорськ: КІІ, 1993. – 40 стор.

Містять основні відомості за розділом “Системи координат. Елементи векторного та тензорного обчислення”, велику кількість прикладів, ілюстрацій, вказівок та завдань для самостійної роботи.

Укладачі: В.О. Паламарчук, ст. викладач
С.О. Колесніков, ст. викладач
Л.Ф. Москаленко. асист.

Відп. за випуск Г.С. Буланов

I. Системи координат

I.I. Системи координат на лінії, площині, у просторі

Координатами точки називають такі величини, які визначають положення точки на лінії, поверхні або у просторі.

Положення точки M, вільно обраної та лінії AB (рис. 1.1.), будемо характеризувати слідуючим чином. Відмітимо на лінії будь-яку точку O (початок координат) і обираємо на ній додатній напрям. Обравши масштаб, відкладаємо його від початку координат в обох напрямках. Число X, яке по абсолютній величині дорівнює довжині дуги кривої OM, а за знаком додатне або від'ємне, в залежності від того, додатній чи від'ємний напрям від початкової точки O до точки M, є координатою точки M.

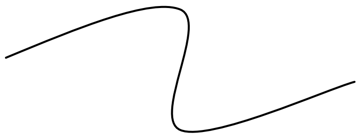
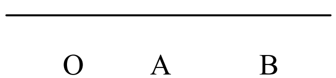


Рис. 1. 1

Найбільш вживаною як система координат є пряма лінія зі встановленими на ній додатнім напрямом, що називаються вісь. Якщо на вісі обрана початкова точка O та одиниця масштабу, вона носить назву вісі координат (рис. 1. 2). Нехай на вісі задані дві вільні точки A і В. Якщо одна з них (наприклад, A) розглядається як початок, а інша (B) як кінець відрізку, то цей відрізок називається спрямованим і позначається символом $\overline{A}\overline{B}$.



Положення точки на площині (а також на кривих поверхнях) визначається двома координатами.

На площині (рис. 1. 3) проводять дві взаємно перпендикулярні прямі і на кожній задають додатній напрям (який позначається стрілкою) і масштаб. Це вісі координат. Одну з них називають віссю X, (віссю абсцис), іншу вісь віссю Y (ординат). Точка O їх перетину називається початком координат. Вона має обидві нульові координати.

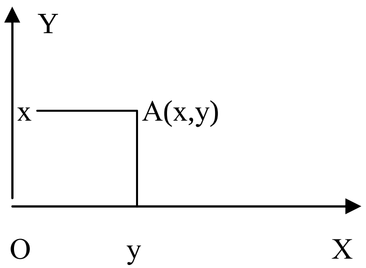


Рис. 1. 3

Кожній точці на площині відповідає пара чисел (x, y). З іншого боку, кожній парі чисел відповідає точка на площині. Описана система координат носить назву прямокутної декартової. При рішенні багатьох задач виявляється більш зручним визначати положення точки на площині не прямокутними декартовими координатами, а так званими полярними координатами. В цьому випадку на площині задаються точка *O*, яку називають полюсом, і вихідну з полюса *O* напівпряму (луч) *OP* полярна вісь (на якій задають масштаб) (рис. 1. 4). Положення точки *M* на площині визначається відстанню $OM = r$ цієї точки від полюса O та кутом ψ (в радіанах), який відрізок *OM* утворює з полярною віссю *OP*. r називається радіус-вектором, ψ - полярним кутом.

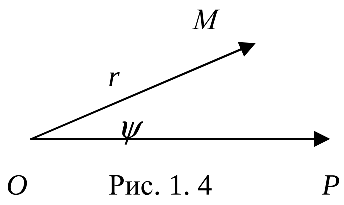


Рис. 1. 4

В полярних координатах точку *M* позначають записом *M* (r, ψ). Формули переходу від декартової до полярної системи і навпаки, у випадку коли початок координат співпадає з полюсом, а полярна вісь з віссю абсцис.

$$x = r\,Cos\,\psi \qquad y = r\,Sin\,\psi \qquad (1.1) \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ Cos\,\psi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad Sin\,\psi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Три взаємо перпендикулярні вісі утворюють прямокутну декартові систему координат у просторі (рис. 1. 5).

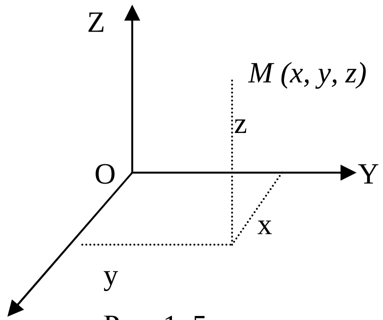


Рис. 1. 5

Точка перетину вісей є початком координат. До вісей абсцис (*x*) та ординат (*y*) додається вісь аплікат (z) XOZ та YOZ називаються координатними площинами. Кожній точці простору *M* можна поставити у взаємо однозначну відповідність трійку чисел (X,Y,Z).

Крім описаної прямокутної декартової системи для розв’язку ряду математичних і технічних просторових задач застосовуються наступні системи координат.

Циліндрична система координат припускає, що положення точки *M* визначається завданням полярних координат (r,ψ) проекції *m* на площину *OXY* (рис. 1. 6) та координати *Z* = *mM*.

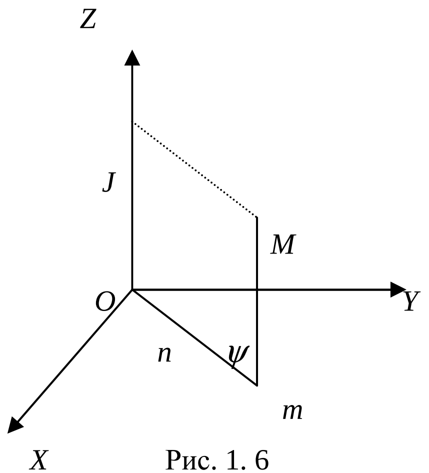


Рис. 1. 6

Перехід від цих координат до прямокутних декартових подається формулами: $x = rCos\psi$,

$y = rSin\psi, \;\; z = z$ (1. 3)

Зворотній перехід здійснюється як легко бачити по формулах (1. 2).

Інша більш використовувана система координат у просторі носить назву сферичної системи координат. Основними елементами є точка *O* (полюс) вісь *OZ* – полярна вісь та півплощина *OZK*, що примикає до полярної вісі OZ .(полярна півплощина) (рис. 1. 7). Координатами точки $M(\rho,\psi,\theta)$ є довжина полярного радіусу $OM=\rho$, кут ψ, що складається півплощиною, яка примикає до вісі *Z*, та кут θ, що проходить через точку *M* з полярною півплощиною *OXZ*, який складається полярним радіусом ρ з полярною віссю *OZ*. Зрозуміло, що достатньо змінювати ρ в межах $(0,\infty)$, θ в межах $(0,\pi)$ та ψ - в межах $(0,2\pi)$, щоб отримати всі точки простору. Приведемо формули переходу від сферичних координат до декартових прямокутних.

$$\begin{cases} x=\rho Sin\theta Cos\psi \\ y=\rho Sin\theta Sin\psi \\ z=\rho Cos\theta \end{cases} \quad (1.\ 4)$$

та навпаки

$$\begin{aligned} &\rho=+\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ &Cos\theta=\frac{z}{\rho} \qquad\qquad (1.\ 5) \\ &Cos\psi=\frac{x}{\rho Sin\theta}; \qquad Sin\psi=\frac{y}{\rho Sin\theta} \end{aligned}$$

Системи декартових, циліндричних та сферичних координат уявляють собою тільки одиничні випадки здійснення загального методу координат, зміст якого полягає в тому, що положення будь-якої точки простору однозначно визначається трьома числами (координатами), що лежать на перетині трьох координатних ліній.

Приклад I. Знайти полярні координати точки $M(1,-\sqrt{3})$, якщо полюс співпадає з початком координат, а полярна вісь – з додатнім напрямом вісі абсцис.

Рішення згідно з формулою (1. 2)

$$Cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}, \quad Sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\rho = \sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

При визначенні кута θ необхідно врахувати, що точка M знаходиться у 4-й чверті $\theta = \frac{5}{3}\pi$

Отже, $M = (2,\frac{5\pi}{3})$

Приклад 2. Знайти прямокутні координати точки $A\left(2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$, що визначається полярними координатами, розташованими як у попередньому прикладі.

Рішення. Згідно з формулами (1. 1)

$$x = 2\sqrt{2}Cos\frac{3}{4}\pi = -2, \qquad y = 2\sqrt{2}Sin\frac{3}{4}\pi = 2$$

Отже, *A (-2, 2)*.

1. 2. Найпростіші задачі методу координат

Розглянемо деякі простіші задачі на застосування прямокутних координат на площині. Перша з них – визначення відстані між двома точками. Розглянемо систему координат *XOY* (рис. 1. 8) та дві точки $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$. Легко бачити, що відстань $d_{AC} = |x_2 - x_1|$, а відстань $d_{BC} = |y_2 - y_1|$. Тоді очевидно, з трикутника *ABC* має місце формула:

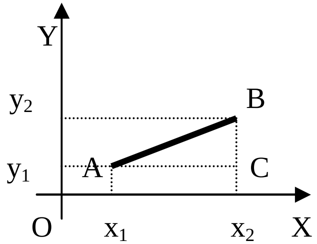


Рис. 1. 8

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (1.6)$$

тобто відстань між двома точками площини дорівнює корню квадратному з суми квадратів різниць однойменних координат цих точок.

Інша подібна задача – визначення відрізку у заданому співвідношенні. Припустимо, що відрізок *AB* поділений точкою *C* на два відрізка *AC* та *CB*, причому відношення АС до ВС дорівнює l ($l \geq 0$)

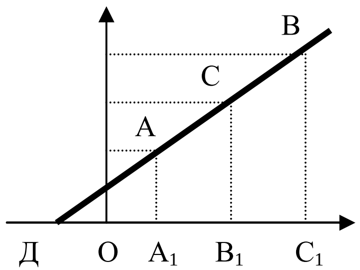


Рис. 1. 9

$$\frac{AC}{CB} = l,$$

треба виразити координати *X* та *Y* точки *C* через координати кінців відрізку $A\ (x_1, y_1)$ та $B\ (x_2, y_2)$. Опустивши перпендикуляри AA_1, CC_1, BB_1 на вісь *X*, отримаємо, що побудовані три паралельні прямі перетинають сторони кута $BДB_1$. Як відомо, паралельними прямими сторони кута поділяються на пропорційні частини. Тому

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{AC}{CB} = l \qquad (1.\ 7)$$

З рис. 1. 9 видно, що $A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x - x_1$, $C_1B_1 = OB_1 - OC_1 = x_2 - x_1$.

Тому рівність (1. 7) матиме вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = l\ .$$

Розв'язуючи це рівняння відносно Х, маємо

$$X = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l} \qquad (1.\ 8)$$

Аналогічно можна отримати:

$$Y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}$$

Якщо точка поділяє відрізок *AB* навпіл, то *AC* = *CB* та, як слідство, $l = 1$. Позначивши координати середини відрізку через $\bar{x}$ та $\bar{y}$, отримаємо:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (1.\ 9)$$

Приклад 3. Визначити відстань між точками *A (3, 8)* та *B (-5, 14).*

Рішення. Скориставшись формулою (1. 6), отримаємо

$$d = \sqrt{(-5-3)^2 + (14-8)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

Приклад 4. Двома точками відрізок *AB* поділимо на три рівні частини. Визначити координати точок розподілу, якщо А (-1), В (5).

Рішення. Нехай $C(x_1)$ та $C(x_2)$ вихідні точки

$$\lambda = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \qquad x_1 = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{-1 + \frac{1}{3} * 5}{1 + \frac{1}{3}} = 1$$

$$x_2 = \frac{x_1 + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{1 + \frac{1}{3} * 5}{1 + \frac{1}{3}} = 3$$

Приклад 5. Серединою відрізку *AB* є точка *C (2, 3)*. Визначити координати точки *A*, якщо *B (7, 5)*.

Рішення. Тут $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 3$, $x_2 = 7$, $y_2 = 5$.

$2 = \frac{x_1 + 7}{2}$, $\quad 3 = \frac{y_1 + 5}{2}$. Отже, $x_1 = -3$, $y_1 = 1$, тобто *A (-3, 1)*.

1. 3 перетворення прямокутної системи координат

При рішенні задач іноді вигідно замість даної прямокутної системи координат *OXY* обрати іншу прямокутну систему координат *O'X'Y'*, певним чином орієнтована відносно першої. Розглянемо задачу переходу від однієї системи координат до іншої.

Випадок 1. Паралельне перенесення системи координат.

Нехай початок нової системи координат точка *O'* має координати *ab* в старій системі координат (рис. 1. 10). Точка *M* площини зі старими координатами *x, y* буде мати нові координати *x', y'*. Очевидно, що

$$x' = x - a, \quad y' = y - b \quad (1.\ 10).$$

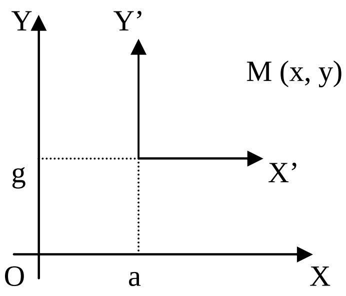


Рис. 1. 10

Випадок 2. Поворот системи координат

Нехай нова система координат *OX'Y'* повернута відносно сторої системи *OXY* на кут α (початки обох систем координат, точка *O* - незмінна). (Рис. 1. 11). Будемо вважати кут α додатнім, коли поворот відбувається проти годинної стрілки та від'ємним у зворотньому випадку.

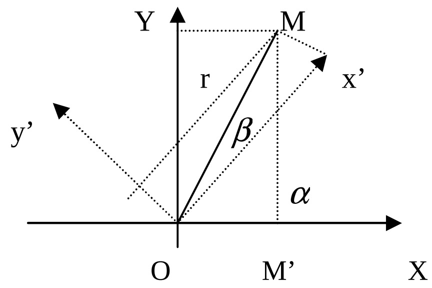


Рис. 1. 11

Позначимо через β кут, утворений відрізком *OM* = *r* з віссю *OX'*. Тоді кут між *OM* та *OX* дорівнюватиме $(\alpha+\beta)$. *OM' = x =r Cos* $(\alpha+\beta)$ =

$$= rCos\alpha Cos\beta - rSin\alpha Sin\beta \quad (1.\ 11.)$$

Аналогічно

$$y = rSin(\alpha+\beta) = rSin\alpha Sin\beta + rCos\alpha Cos\beta .$$

Так як нові координати точки *M*, очевидно, є

$$\begin{aligned} x' &= rCos\beta \\ y' &= rSin\beta \end{aligned} ,$$

то з формул (1. 11) отримаємо

$$\begin{aligned} x &= x'Cos\alpha - y'Sin\alpha \\ y &= x'Sin\alpha + y'Cos\alpha \end{aligned} \qquad (1.\ 12)$$

Прийнявши систему *OX'Y'* як стару, а *OXY* як нову, і враховуючи, що кут повороту α - від'ємний (тобто $Cos(-\alpha) = Cos\alpha$, $Sin(-\alpha) = -Sin\alpha$) отримаємо формули зворотнього переходу

$$x' = xCos\alpha + ySin\alpha , \quad y' = -xSin\alpha + yCos\alpha \qquad (1.\ 13)$$

Поєднавши обидва випадки, отримаємо для одночасного переноса і поворота системи координат з формул (1. 10) та (1. 13)

$$x' = (x-a)Cos\alpha + (y-b)Sin\alpha$$
$$y' = -(x-a)Sin\alpha + (y-b)Cos\alpha$$

Приклад 6. Систему координат повернули на кут $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Визначити нові координати точки $M(\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Рішення. Користуючись формулами (1. 13), виходим, що

$$x' = \sqrt{3}Cos\frac{\pi}{6} + 3Sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$
$$y' = -\sqrt{3}Sin\frac{\pi}{6} + 3Cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Приклад 7. На площині *XOY* Задана точка *M (4, 3)*. Систему координат повернули навколо початку координат так, щоб нова вісь пройшла через точку *M*. Визначити старі координати точки *A*, якщо відомі її нові координати $x' = 5$, $y' = 5$.

Рішення. Так як $OM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, то $Sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $Cos\alpha = \dfrac{4}{5}$; отримуємо за формулами (1. 12):

$$x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' = 1$$
$$y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' = 7$$

Приклад 8. Дана точка М (3,5; 4,5). За нові координатні вісі прийняли прямі (вісь O_1Y') $2x - 1 = 0$ та (вісь O_1X') $2y - 5 = 0$.

Знайти координатні точки *M* в новій системі координат.

Рішення. Початок координат O’ розташований в точці перетину прямих (0,5; 2,5). Очевидно, що відбувся паралельний переніс системи координат. Тому

$$x' = x - a = 3.5 - 0.5 = 3$$

$$y' = y - b = 4.5 - 2.5 = 2$$

2 Вектори

2.1 Основні визначення

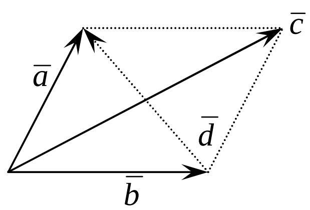
Фізичні величини, для визначення яких достатньо знати одне число, називаються скалярними (температура, щільність, маса). Два скаляра рівні, якщо вони мають однакові розмірності, а їх знаки та чисельні значення однакові.

Величини, для визначення яких, крім чисельного значення, необхідно вказати напрям у просторі, носять найменування векторів (швидкість, сила, момент сили).

Вектор $\overline{a}$ зображується відрізком прямої, напрям якого співпадає з напрямом фізичної величини, а довжина характеризує її чисельне значення (модуль вектора $|\overline{a}|$). Два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ однакової розмірності рівні, якщо модулі їх однакові та напрями цих векторів співпадають.

2. 2 Операції над векторами

Сумою двох векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ є третій вектор $\overline{c}$, який зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на доданках (рис. 2. 1).



Слідством з цього визначення є правило підсумовування декількох векторів.

Сумою декількох $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ... , $\bar{d}$ є вектор $\bar{n}$, що уявляє замикаючу прямокутника, побудованого на доданках вектора (рис.2. 2)

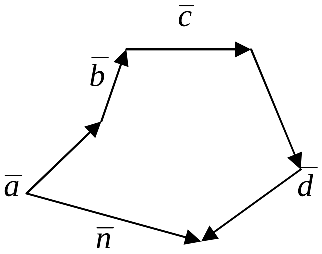


Рис. 2. 2

Додавання векторів володіє наступними властивостями:

1). комутативність

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a},$$

2). асоціативність

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$$

Під різницею векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ розуміють вектор $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$ такий, що $\bar{b} + \bar{d} = \bar{a}$. Відмітимо, що у паралелограмі, побудованому на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$, їх різницею є відповідно спрямована друга діагональ паралелограму (рис. 2. 1).

Добутком вектора $\bar{a}$ на скаляр k називається вектор $\bar{b} = k\bar{a} = \bar{a}k$, що має довжину $|\bar{b}| = |k||\bar{a}|$, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\bar{a}$ якщо $k > 0$. Неважко переконатися, що ця векторна операція володіє наступними властивостями:

1. $(k+l)\bar{a} = k\bar{a} + l\bar{a}$
   $k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$
2. $k(l\bar{a}) = kl\bar{a}$

2.3 Лінійно незалежні системи векторів. Базис. Проекція вектора на вісь

Якщо нульовий вектор помножити на величину, зворотню його довжині, отримаємо одиничний вектор $\bar{l} = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}$. Ортом називається вектор, спрямований у додатній бік вісі та рівний за величиною одиниці.

Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ... , $\bar{n}$ називаються лінійно залежними, якщо існують скаляри $C_1,...,C_n$, не всі рівні нулю, такі, що

$$C_1\bar{a} + C_2\bar{b} + C_3\bar{c} + ... + C_n\bar{n} = 0 \qquad (2.\ 1)$$

Два лінійно залежні вектори паралельні між собою.

Дійсно, нехай $C_1\bar{a} + C_2\bar{b} = 0$ причому $C_2 \neq 0$, позначаючи $\frac{C_1}{C_2} = -m$, отримаємо $\bar{b} = m\bar{a}$, тобто вектори $\bar{b}$ та $\bar{a}$ паралельні. Такі вектори називають <u>колінеарними.</u>

Три лінійно залежні вектори лежать в одній площині (або паралельні одній площині). Дійсно, нехай $C_1\bar{a} + C_2\bar{b} + C_3\bar{c} = 0$, причому $C_3 \neq 0$. Тоді, позначаючи $\frac{C_1}{C_3} = -m$ $\frac{C_2}{C_3} = -n$ отримаємо $\bar{c} = m\bar{a} + n\bar{b}$ (3. 1), (тобто вектор $\bar{c}$ лежить в одній площині з векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$). Такі вектори називаються <u>компланарними</u>.

Якщо два вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ лінійно незалежні, (тобто не є колінеарними), то будь-який вектор $\bar{c}$, компланарний з $\bar{a}$ і $\bar{b}$, може бути єдиним чином розкладений по цих векторах (формула 2. 1). Нехай поряд з (2. 1) існує друге розкладення $\bar{c} = m'\bar{a} + n'\bar{b}$ (2. 2). Вираховуючи (2. 1) з (2. 2), отримаємо

$$O = (m' - m)\bar{a} + (m' - n)\bar{b}$$

Так як $\bar{a}$ та $\bar{b}$ лінійно незалежні вектори, то $m' = m$, $n' = n$. Таким чином, розкладення (3. 1) єдине. Можна довести наступні властивості лінійно незалежних векторів.

1. Якщо три вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - лінійно незалежні (тобто не є компланарними), то будь-який вектор $\bar{d}$ може бути єдиним способом розкладений по цих векторах

$$\bar{d} = m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c}$$

2. Будь-які чотири вектори у трьохмірному просторі лінійно залежні.

Будь-які три лінійно незалежні вектори $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$, $\bar{l}_3$ утворюють <u>базис</u> трьохмірного простору, тобто для будь-якого вектора $\bar{a}$ існує розкладення

$$\bar{a} = m\bar{l}_1 + n\bar{l}_2 + p\bar{l}_3, \qquad (2.\ 3)$$

причому коефіцієнти розкладення визначають єдиним чином.

Як базис зручніше за все використовувати систему ортовой або іншої раніше обраної системи координат.

В прямолінійній декартовій системі координат орти однакові у всіх точках за величиною та напрямом (рис. 2. 3), та мають спеціальні позначення $\bar{l}_1 = \bar{i}$, $\bar{l}_2 = \bar{j}$, $\bar{l}_3 = \bar{k}$.

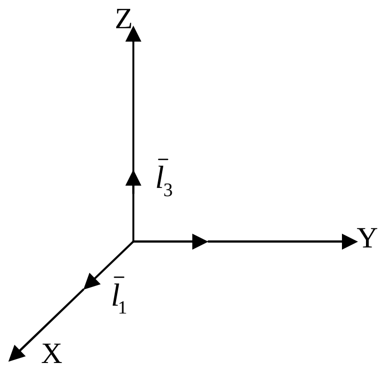


Рис. 2. 3

В криволінійних координатних напрям ортів змінюється від точки до точки. Напрям ортів у циліндричній системі координат показано на рис. 2. 4.

Якщо у деякій точці O обрані два базиса, то будь-який вектор першого базиса можна розкласти по векторах другого та навпаки. Приклад такого розкладу приведено в лекції I (поворот системи координат).

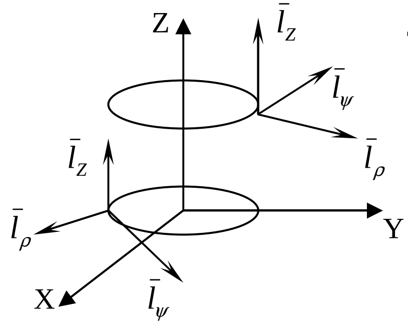
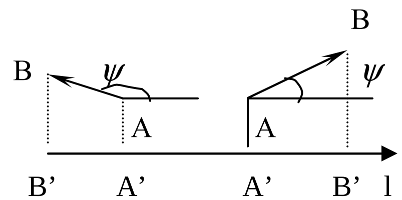


Рис. 2. 4

В основі розкладу вектора по векторах базиса лежить операція виходження проекції вектора на вісь, яка за визначенням дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута між напрямом вектора та напрямом вісі (рис. 2. 5).



$$пр_l \bar{a} = |\bar{a}| Cos\psi$$

Рис. 2. 5

Легко показати, що проекція суми векторів на вісь дорівнює сумі їх проекцій на ту є вісь. Коефіцієнти m, n, p із розкладення вектора $\bar{a}$ (2. 3) є проекціями вектора відповідно на вісі координат.

Всі операції над векторами зводяться до відповідних операцій над їх проекціями.

Нехай $\begin{matrix} \overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k} \\ \overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k} \end{matrix}$ в декартовій системі координат. Тоді

$$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2)\overline{i} + (y_1 + y_2)\overline{j} + (z_1 + z_2)\overline{k}$$
$$\lambda\overline{a} = \lambda x_1\overline{i} + \lambda y_1\overline{j} + \lambda z_1\overline{k}$$

Приклад 1. У трикутнику *ABC* сторону *AB* точками *M* та *N* поділимо на три рівні частини *AM* = *MN* = *NB*. Знайти вектор $\overline{CM}$, якщо $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$.

Рішення. $\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$. Як слідство, $\overline{AM} = \dfrac{\overline{b} - \overline{a}}{3}$. Так як

$\overline{CM} - \overline{CA} + \overline{AM}$, то $CM = a + \dfrac{\overline{b} - \overline{a}}{3} = \dfrac{2\overline{a} + \overline{b}}{3}$.

Приклад 2. Задані проекції сили *F* на координатні вісі $x = 4$, $y = 4$, $z = -4\sqrt{2}$. Знайти величину сили *F*.

Рішення. Сила *F* – вектор. $\overline{F} = 4\overline{i} + 4\overline{j} - 4\sqrt{2}\overline{k}$. Величина сили *F* - довжина вектора $\overline{F}$.

$$\left|\overline{F}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 3$$

Приклад 3. На площині задані два вектори $\overline{p}$ *(3, 2)* та $\overline{q}$ *(2, 1)*. Розкласти вектор $\overline{a}$ *(4, 5)* за базисом $\overline{p}$ та $\overline{q}$.

Рішення за формулою (2. 3) можна записати $\overline{a} = m\overline{p} + n\overline{q}$. Так як вектори $\overline{a}$, $\overline{p}$, $\overline{q}$ задані в деякому базисі $\overline{l}_1$, $\overline{l}_2$, $\overline{l}_3$, то застосуємо до цієї рівності правила лінійних операцій над векторами (властивості 1 та 2).

$$4\bar{l}_1 + 5\bar{l}_2 = m\left(3\bar{l}_1 + 2\bar{l}_2\right) + n\left(2\bar{l}_1 + \bar{l}_2\right)$$

Таким чином, для визначення коефіцієнтів розкладення вектору $\bar{a}$ за базисом $\bar{p}$, $\bar{q}$, отримуємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3m + 2n = 4 \\ 2m + n = 5 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $m = 6$, $n = -7$.

Як слідство, розкладення вектора $\bar{a}$ за базисом $\bar{p}$, $\bar{q}$ має вигляд $\bar{a} = 6\bar{p} - 7\bar{q}$.

2. 4 Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком $\left(\bar{a} * \bar{b}\right)$ двох векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називається добуток їх модулів на косинус кута між векторами (рис. 2. 6)

$$\left(\bar{a} * \bar{b}\right) = \left|\bar{a}\right| * \left|\bar{b}\right| * Cos\,\psi \qquad (2.\ 4)$$

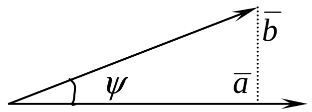


Рис. 2. 6

Звідси витікає, що скалярний добуток дорівнює добутку модуля одного вектора та проекції одного вектора на напрям першого.

$$\left(\bar{a} * \bar{b}\right) = \left|\bar{a}\right| np_b \bar{a} = \left|\bar{b}\right| np_{\bar{a}} b\,.$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\left(\bar{a} * \bar{b}\right) = (\bar{b} * \bar{a})$

2. $\lambda(\overline{a} * \overline{b}) = (\lambda\overline{a} * \overline{b})$

3. $(\overline{a} * (\overline{b} + \overline{c})) = (\overline{a} * \overline{b}) + (\overline{a} * \overline{c})$

Необхідна і достатня умова перпендикулярності двох векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ виражається наступною рівністю $(\overline{a} * \overline{b}) = 0$.

Запишемо скалярний добуток векторів через їх координати. Нехай $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z\overline{k}$, $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$. Тоді $(\overline{a} * \overline{b}) = (x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z\overline{k})(x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

У одиничному випадку $(\overline{a} * \overline{a}) = |\overline{a}||\overline{a}|Cos\,\psi = |\overline{a}|^2$ або у координатній формі $|\overline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Кут між векторами, на підставі формули (2. 4) має вигляд

$$Cos\,\psi = \frac{(\overline{a} * \overline{b})}{|a| * |b|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Для перпендикулярних векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ маємо $\psi = \frac{\pi}{2}$, а, як слідство, $Cos\,\psi = 0$ або $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Фізичний зміст скалярного добутку. Нехай постійна сила $\vec{F}$ забезпечує прямолінійне переміщення $\overline{S} = \overline{MN}$ матеріальної точки. Якщо сила $\vec{F}$ утворює кут ψ з переміщенням $\overline{S}$ (рис. 2. 7), то з фізики відомо, що робота сили $\vec{F}$ на переміщення $\overline{S}$ дорівнює $A = |\overline{F}| * |\overline{S}| * Cos\,\psi$.

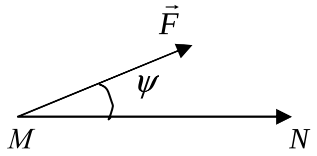


Рис. 2. 7

На підставі формули (2. 4) $A = \left(\overline{F} * \overline{S}\right)$, тобто робота постійної сили при прямолінійному переміщенні її точки прикладки дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення.

2. 5 Векторний добуток векторів

Під векторним добутком $\left[\overline{a} \times \overline{b}\right]$ векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ будемо розуміти вектор $\overline{c}$, який визначається за правилом

$$\overline{c} = \left[\overline{a} \times \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Геометрично векторним добутком $\left[\overline{a} \times \overline{b}\right]$ двох векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, який направлений перпендикулярно площині векторів-співмножників у той бік, звідки поворот від першого співмножника до другого на менший кут видний проти руху годинної стрілки, та рівний за величиною площині паралелограму, побудованого на цих векторах (рис. 2. 8).

$$\left|\overline{c}\right| = \left|\left[\overline{a} \times \overline{b}\right]\right| = \left|\overline{a}\right| * \left|\overline{b}\right| * Sin\,\psi \qquad (2.\ 5)$$

Властивості скалярного добутку.

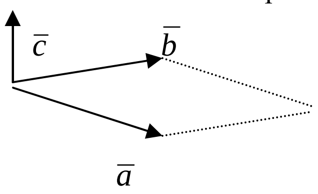


Рис. 2. 8

1. $\left[\bar{a}\times\bar{b}\right] = -\left[\bar{b}\times\bar{a}\right]$
2. $\lambda\left[\bar{a}\times\bar{b}\right] = \left[\lambda\bar{a}\times\bar{b}\right]$
3. $\left[\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})\right] = \left[\bar{a}\times\bar{b}\right] + \left[\bar{a}\times\bar{c}\right]$

Фізичний зміст векторного добутку виражається у понятті моменту сили $\bar{F}$ відносно деякої точки *O*.

$$M_O = \bar{r}\times\bar{F},$$

де $\bar{r}$ - вектор, проведений з точки *O* до початку вектора $\bar{F}$ (точки прикладення сили).

2.6 Змішаний добуток векторів

Змішаним добутком векторів $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)*\bar{c}$ називається скалярний добуток векторного добутку векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ на $\bar{c}$, тобто

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = \left(\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]*\bar{c}\right)$$

В силу визначення скалярного добутку

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = \left|\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]\right| np_{\bar{a}\times\bar{b}}\bar{c} = \left|\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]\right|\times h$$

Тут $np_{\bar{a}\times\bar{b}}\bar{c} = h$ - проекція вектора $\bar{c}$ на напрям вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ (рис. 2. 9) – є висотою паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Оскільки $\left|\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]\right|$ - площина основания цього паралелепіпеда, то змішаний добуток уявляє собою об'єм паралелепіпеда зі знаком (+)

або (-), в залежності від того, чи буде гострим чи тупим кут між векторами $\bar{c}$ та $\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]$.

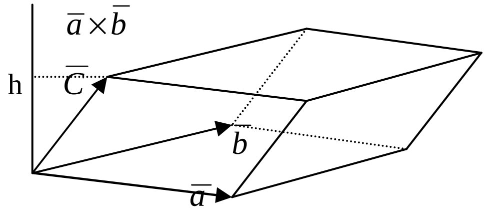


Рис. 2. 9

Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ представити у координатному вигляді, тобто

$$\begin{aligned}\bar{a} &= x_1\bar{i} + y_1\bar{l} + z_1\bar{k}\\ \bar{b} &= x_2\bar{i} + y_2\bar{l} + z_2\bar{k}\ ,\\ \bar{c} &= x_3\bar{i} + y_3\bar{l} + z_3\bar{k}\end{aligned}$$

то змішаний добуток матиме вигляд:

$$\left[\bar{a}\times\bar{b}\right]*\bar{c} = \left(\bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)*\left(x_3\bar{i} + y\ \bar{j} + z_3\bar{k}\right) =$$

$$= x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Приклад 4. Задані вектори $\bar{a} = m\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ та $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} - 7\bar{k}$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Рішення. Знайдемо скалярний добуток цих векторів.

$\bar{a}*\bar{b} = 4m + 3m - 28$, так як $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $\bar{a}*\bar{b} = 0$. Звідси $7m - 28 = 0$ $m = 4$.

Приклад 5. Вирахувати площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a} = 6\overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$ та $\overline{b} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k}$.

Рішення. Знаходимо векторний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

$$\overline{a} * \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 14\overline{i} - 42\overline{j} - 21\overline{k}$$

Так як модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі побудованого на них паралелограма, то

$$S = \left|\overline{a} * \overline{b}\right| = \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = 49$$

Приклад 6. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами *A (2, 2. 2), B (4, 3, 3), C (4, 5, 4), D (5, 5, 6).*

Рішення. Знайдемо вектори $\overline{A}\overline{B}$, $\overline{A}\overline{C}$ та $\overline{A}\overline{D}$, співпадаючі з ребрами піраміди, які сходяться у вершині *A*.

$\overline{A}\overline{B} = 2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{A}\overline{C} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{A}\overline{D} = 3\overline{i} + 3\overline{i} + 4\overline{k}$

Знаходимо змішаний добуток векторів $\overline{A}\overline{B}$, $\overline{A}\overline{C}$ та $\overline{A}\overline{D}$ (це ж – об'єм паралелепіпеда, побудованого на даних векторах).

$$\overline{A}\overline{B} * \overline{A}\overline{C} * \overline{A}\overline{D} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

Так як об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ частини об'єму паралелепіпеда, то $V = \frac{7}{6}$.

3 Тензори

3.1 Перетворення компонент вектора при зміні системи координат

У попередньому розділі були надані приклади скалярних та векторних величин. Було відмічено, що скалярні величини визначаються одним числом, вектори потребують для свого визначення трьох чисел (компонент). Скалярна величина не змінюється при зміні системи координат (наприклад, довжина відрізка). Вектор – це не просто набір декількох скалярів. Наприклад, двома числами (щільність та температура) можна повністю охарактеризувати стан ідеального газу, але цей набір не є вектором. Найважливіша властивість вектора полягає у тому, що при зміні системи координат його компоненти змінюються, але за таким законом, що в будь-якій з координатних систем вони визначають один і той же вектор (рис. 3.1). В системі координат OXYZ вектор $\overline{O}\overline{M}$ має координати *(x_1, y_1, z_1)*. В системі OX'Y'Z' той же вектор має координати *(x_2, y_2, z_2)*. Можна вказати, що:

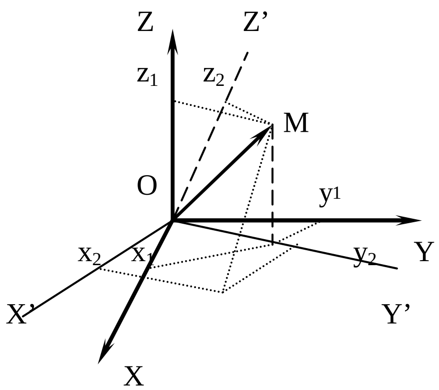


Рис. 3. 1

$$x_2 = x_1 Cos(\hat{x}_1 \hat{x}_2)$$
$$y_2 = y_1 Cos(\hat{y}_1 \hat{y}_2) \qquad (3.\ 1)$$
$$z_2 = z_1 Cos(\hat{z}_1 \hat{z}_2)$$

Тобто, якщо компоненти вектора задані в одній якійсь системі координат, то, використовуючи закон (3. 1), можна визначити компоненти вектора в будь-якій іншій системі.

Деякі фізичні об'єкти потребують для своєї характеристики більше ніж три функції Ця обставина призвела до поняття величин, властивості яких складніші, ніж у векторів тобто тензорів.

3. 2 Поняття тензора. Тензор напруг

Розглянемо класичний приклад, приведший до виникнення поняття тензора (tensio – по-латински - напруга) фізичне тіло, що піддається дії сил, знаходиться в напруженому стані, тобто в ньому виникають внутрішні зусилля. Кожна крапка в напруженому тілі знаходиться під дією всіх її навколишніх крапок, а тому в будь-якій площині, проведеної через дану крапку, на нее буде діяти напруга, що залежить від орієнтації площини. Тобто для характеристики напруженого стану в крапці необхідно розглянути нескінченну сукупність векторів- сил на всіляких площах, що проходять через крапку (мал. 3.2). Виявилось можливим визначити таку величину, яка однозначно зв'язана з точкою тобто не залежить від орієнтації площинки і в той же час дозволяє вирахувати напругу на будь-якій площинці.

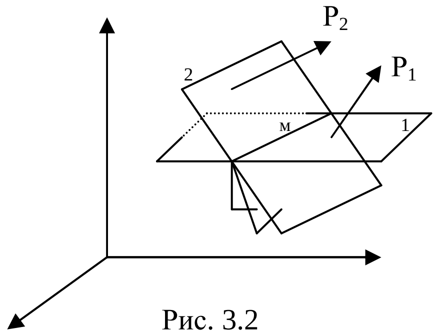


Рис. 3.2

Розглянемо напругу на трьох перпендикулярних площинках біля точки *M* (рис. 3.3.)

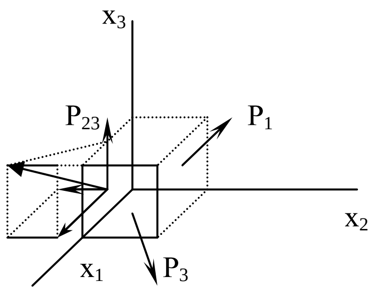


Рис. 3. 3

Напруги P_{21}, P_{22}, P_{23} уявляють собою розкладення напруги P_2 по вісям x_1, x_2 та x_3 відповідно.

Аналогічно напруга P_1 розкладається по вісях координат на напруги P_{31}, P_{32}, P_{33}.

Ці дев'ять величин Pij на трьох взаємо перпендикулярних площинках біля точки *M* ніяк не пов'язані з орієнтацією площинки, а лише з положенням точки. У той же час знання величин Pij дозволяє вирахувати напругу $\overline{P}$ на будь-якій площинці, якщо відома її орієнтація.Таким чином, у кожній точці середовища однозначно визначена одна фізична величина, що визначається дев'ятьма числами Pij, яка слугує повною характеристикою напруженого стану середовища у точці.

Ця величина носить найменування тензора 2-го рангу, а саме тензора напруг.

$$\left\| P_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{matrix} \right\| \qquad (3.\ 2)$$

Тобто тензором 2-го рангу є величина, обумовлена в будь-якій системі координат дев'ятьма числами Pij. Величини Pij є компонентами тензора 2-го рангу.

Розглянемо, як змінюються компоненти тензора при зміні декартовой системи координат.

Нехай $\overline{I_1, I_2, I_3}$ - одиничні вектори (орти) вихідної системи координат (мал. 3.4), а $\overline{I_1'}$, $\overline{I_2'}$, $\overline{I_3'}$ -орти нової системи координат.

Позначимо $Cos(\bar{i}_1\bar{i}_1') = \alpha_{1'1} = Cos(\bar{i}_1\bar{i}_2') = \alpha_{1'2^{z}} \ldots$ У загальному вигляді косинус кута між K-й віссю нової системи координат і L-й віссю вихідної системи. Знайдемо проекції векторів $\overline{I'_{к}}$ на $L_{ю}$ вісь вихідної системи.

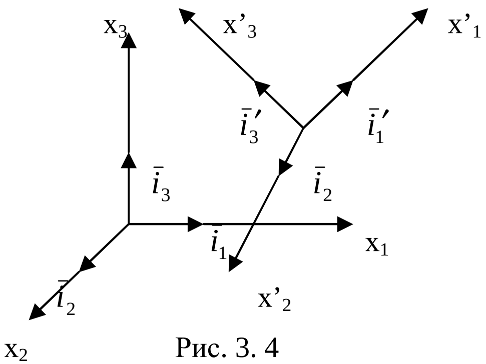


Рис. 3. 4

Будь-який вектор $\bar{p}_e$ вихідної системи координат може бути представлений його проекціями p_{em} на вісі x_m (аналогічно 2.3)

$$Пр_{\bar{i}_1}\bar{i}_1' = |\bar{i}_1||\bar{i}_1|Cos(\bar{i}_1 * \bar{i}_1) = \alpha_{1'1}$$

……………………………………………………

$$Пр_{i_l}\bar{i}_k' = |\bar{i}_k'||\bar{i}_l'|Cos(\bar{i}_{k'}i_l) = \alpha_{к'l}$$

$$\overline{P_l} = P_{l1}\bar{i}_1 + P_{l2}\bar{i}_2 + P_{l3}\bar{i}_3 = \sum_{n=1}^{3} P_{lm}\bar{i}_m \qquad (*)$$

Відповідно будь-який вектор $\overline{P}_{k'}$ нової системи координат може бути представлений проекціями P'_{ki} на вісі x'_i.

$$\overline{P}_{k'} = P'_{k1}\bar{i}_1' + P'_{k2}\bar{i}_2' + P'_{k3}\bar{i}_3' = \sum_{n=1}^{\infty} P'_{ki}\bar{i}_i'$$

Знайдемо зв’язок між величинами P_{lm} та P'_{ki}, тобто між компонентами тензора в новій та старій системі координат.

Вектор P'_k може бути представлений у вигляді лінійної комбінації векторів P_l.

$$P_{k'} = P_1 Cos(k',1) + P_2 Cos(k',2) + P_3 Cos(k',3) = \sum_{n=1}^{3} \alpha_{k'l}\, p_l \quad (**)$$

Кінцево, підставляючи $(*)$ у $(**)$, отримаємо

$$P_k' = \sum_{l=1}^{3} \alpha_{k'l} \sum P_{lm} \bar{i}_m \tag{3. 3}$$

Спроектувавши цю рівність на і-ту вісь нової системи координат, отримаємо:

$$P_k' \bar{i}_l' = (\sum_{l=1}^{3} \alpha_{k'l} \sum_{m=1}^{3} P_{lm} \bar{i}_m) \bar{i}_i'$$

Враховуючи, що $\bar{i}_m * i_i' = Cos(i_{m1} i_i') = \alpha_{mi'}$, кінцево отримаємо:

$$P_{ik}' = \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \alpha_{k'l} \alpha_{mi'} P_{lm} \tag{3. 4}$$

Нами отримано закон переутворення дев'яти величин P_{ik} при зміні декартової системи координат.

Приклад 1.

У системі координат k заданий тензор

$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{Vmatrix}$$

Знайти компоненти P_{11}' та P_{21}' тензора у новій системі координат k', зображеній на рис. 3. 5.

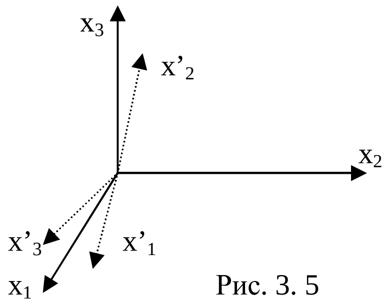


Рис. 3. 5

Рішення.

Складемо таблицю косинусів

$$d_{11} = Cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad d_{21} = Cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$d_{12} = Cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad d_{22} = Cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$d_{23} = Cos 0 = 1$$

$$d_{13} = Cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$d_{31} = Cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$d_{32} = Cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d_{33} = Cos\frac{\pi}{2} = 0$$

У вихідній системі k: $P_{11} = 2$, $P_{22} = 4$, $P_{33} = 8$, $P_{ij} = 0 \quad i \neq j$.

Застосовуємо формулу (3. 4):

$$P'_{11} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}\alpha_{1l}\alpha_{m1}P_{lm} = \sum_{l=1}^{3}\alpha_{1l}(\alpha_{11}P_{l1} + \alpha_{12}P_{l2} + \alpha_{13}P_{l3}) =$$

$$= \sum_{l=1}^{3}\alpha_{1l}(\frac{\sqrt{3}}{2}P_{l1} + \frac{1}{2}P_{l2}) = \alpha_{11}(\frac{\sqrt{3}}{2}P_{11} + \frac{1}{2}P_{12}) + \alpha_{12}(\frac{\sqrt{3}}{2}P_{21} + \frac{1}{2}P_{22}) +$$

$$+ \alpha_{13}(\frac{\sqrt{3}}{2}P_{31} + \frac{1}{2}P_{32}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}4 = \frac{5}{2}.$$

$$P'_{21} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\alpha_{2l}\alpha_{m1}P_{lm} = \sum_{l=1}^{3}\alpha_{2l}(\frac{\sqrt{3}}{2}P_{l1} + \frac{1}{2}P_{l2}) =$$

$$= \alpha_{23}(\frac{\sqrt{3}}{2}P_{31} + \frac{1}{2}P_{32}) = 0$$

Зауваження про скорочені позначення. У зв’язку з тим, що кожний літерний індекс, який зустрічається у виразі один раз, може приймати значення 1, 2, 3, то прийнято слідуюче:

- запис x_i передбачає сукупність величин x_1, x_2, x_3.
- запис A_{ij} передбачає сукупність дев'яти величин A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}.

Крім того, якщо в одночленііндекс повторюється (т.я. німий індекс), то передбачається сумування за нимвід 1 до 3. Тобто формула (3. 4) у скороченому позначенні має вигляд

$$P'_{ik} = \alpha_{k'l}\alpha_{mi'}P_{lm}, \qquad (3.\ 5)$$

т.я. індекси *l* та *m* повторюються, то розуміється сумування.

3.3 Операції над тензорами

Тензори одного й того ж рангу можна додавати. Сумою тензорів називається тензор, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонент доданків.

Приклад 2. Додати тензори

$$A \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad B \begin{Vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$$

Рішення.

$$A + B = \begin{Vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 10 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \end{Vmatrix}$$

Добутком тензорів називається тензор, компоненти якого рівні добуткам компонент співмножників, а ранг добутку дорівнює сумі співмножників.

Приклад 3.
Помножити два тензори 1-го рангу A = (3, 2,1) та B (1, 4, 5)
Рішення.

$$Cij = \begin{Vmatrix} 3.1 & 2.1 & 1.1 \\ 3.4 & 2.4 & 2.4 \\ 1.1 & 1.4 & 1.5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$$

Отримали тензор 2-го рангу Cij. Неважко побачити, що A * B $\neq$ B * A.

В тензорному обчисленні часто застосовується операція звертання, тобто додавання компонентів тензора по двом будь-яким індексам.

Приклад 4.

Звернути тензор 2-го рангу.

$$Aij = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$$

Рішення.

$$Aii = \sum_{i=1}^{3} Aii = 1 + 5 + 9 = 15$$

Тензор третього рангу можна звернути по першому та другому індексам, другому та третьому індексам, першому та третьому індексам.

При такому звертанні виходить, що тензори 1-го рангу, тобто вектори:

(к = 1, 2, 3)

$C_{11к} + C_{22к} + C_{33к}$;

$C_{к11} + C_{к22} + C_{к33}$;

$C_{1к1} + C_{2к2} + C_{3к3}$.

Приклад 5.

Тензор

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$$ помножити на тензор B (1, 0, 1)

та результат повернути по другому та третьому індексам.

Рішення

Т.я. тензор 3-го рангу, отримуємий при добутку А на В має 27 компонент

$$C_{ijk} = A_{ij} * B_k \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, \end{array}$$

, то запишемо спочатку

Формулу звертання по 2-му та 3-му індексам, а в добутку АВ будемо обчислювати тільки ті компоненти, котрі використовуються при звертанні.

$C_{к11} + C_{к22} + C_{к33} = A_{к1}B_1 + A_{к2}B_2 + A_{к3}B_3 =$
$= (C_{111} + C_{122} + C_{133}, C_{211} + C_{222} + C_{233}, C_{311} + C_{322} + C_{333}) =$
$= (1 + 0 – 4,\ 2 + 0 –2,\ -4 + 0 + 1) = (-3, 0, -3).$

3.4. Головні вісі тензору. Приведення тензору до головних вісей.

Розглянемо вільний тензор 2-го рангу $T_{ік}$.

Якщо цей тензор помножити на вектор A_i та здійснити звертання по індексу тензора, то в результаті отримаємо деякий вектор з компонентами

$$B_i = T_{ік}A_к = \sum T_{ik} A_k$$

Можна відмітити, що тензор, являючись помноженим на деякий вектор, перетворює його в новий вектор (такий добуток з наступним звертанням носить найменування скалярного добутку тензора на вектор). В загальному випадку вектор В відрізняється від вектору А. Але іноді вектор В може бути колінеарним вектору А (як трапилося у прикладі 5).

Тобто, в деяких випадках тензор при добутку на вектор змінює довжину цього вектора, але не повертає його. Іншими словами, виконується

$$T_{ік} * A_к = \lambda A_i ,$$

де λ - скаляр.

При цьому $\overline{A}$ носить найменування власного вектора, а λ - власного числа. Нехай

$$T_{ік} = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix} \qquad \overline{A} = (x_1, x_2, x_3), \quad \overline{B} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

Помножимо $T_{ік}$ на A , але запишемо, як і в **прикладі 5**, тільки необхідні нам компоненти звернутого тензора 3-го рангу

$C_{111} + C_{122} + C_{133} = T_{11}*x_1 + T_{12}*x_2 + T_{13}*x_3 = \lambda x_1$

$C_{211} + C_{222} + C_{233} = T_{21}* x_1 + T_{22}*x_2 +T_{23}*x_3 = \lambda x_2$

$C_{311} + C_{322} + C_{333} = T_{31}*x_1 + T_{32}*x_2 + T_{33}*x_3 = \lambda x_3$

Перетворимо цю систему

$(T_{11} - \lambda)x_1 + T_{12}x_2 + T_{13} x_3 = 0$ (3.6)

$T_{21}x_1 + (T_{22} - \lambda)x_2 - T_{23}x_3 = 0$

$T_{31}x_1T_{32}x_2 + (T_{33} - \lambda)x_3 = 0$

Ця однорідна система має ненульове рішення тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.7)$$

Рівняння (3.7) називається характеристичним рівнянням тензора.

Приклад 6.

Знайти власні числа тензора $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$

Рішення. Записуємо систему (3.6)

$(2 - \lambda)x_1 + x_2 + 0*x_3 = 0$

$x_1 + (2- \lambda)x_2 + 00*x_3= 0$

$0*x_1 + 0*x_2 + (5 - \lambda)x_3 = 0$

Характеристичне рівняння (3.7)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda) \left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0$$

Відповідь : $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 1$.

Підставляючи кожне із значень λ в систему (3. 6), отримаємо три однорідні рівняння, у кожної з яких головний визначник за відомо дорівнює нулю. Як відомо, такі системи мають безліч рішень, які визначають лише напрямок власного вектора.

Розглянемо процес визначення власних векторів для тензора з прикладу 6.

При $\lambda_1 = 5$. Система (3. 6) має вигляд:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо $x_1 = x_2 = 0$ $x_3 = t$.

Власний вектор $\overline{B}_1$ буде дорівнювати $\{0, \ 0.1\}$.

Аналогічно, при $\lambda_2 3$, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 0 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

отримаємо власний вектор $\overline{B}_2$ = (1, 1, 0)

При $\lambda_3 = 0$ система приймає вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Звідси $\overline{B}_3$ = (1, -1, 0).

Легко бачити, що всі три головні вектори $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$ та $\overline{B}_3$ взаємо перпендикулярні. Можна сказати, що властивість взаємної ортогональності власних векторів справедливо і для випадку, коли два або три власних числа рівні між собою. Внаслідок ортогональності вони можуть скласти декартову систему координат.

З'ясуємо зв'язок між коренями характеристичного рівняння (3. 7) λ_1, λ_2, λ_3 та компоненти тензора. Для цього приведемо тензор до головних вісей, тобто знайдемо вираження компонент тензора в системі координат, вісі якої є головними вісями тензора.

Нехай $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}$ - орти головних вісей тензора, тобто

$$\overline{N}^{(1)} = \frac{\overline{B}_1}{\left|\overline{B}_1\right|}, \quad \overline{N}^{(2)} = \frac{\overline{B}_2}{\left|\overline{B}_2\right|}, \quad \overline{N}^{(3)} = \frac{\overline{B}_3}{\left|\overline{B}_3\right|}$$

т.я. $\overline{x}_1'$, $\overline{x}_2'$, $\overline{x}_3'$ головні вісі (рис. 3. 6), то

$$T_{ik} N_k^{(1)} = \lambda_1 N_i^{(1)}$$

$$T_{ik} N_k^{(2)} = \lambda_2 N_i^{(2)}$$

$$T_{ik} N_k^{(3)} = \lambda_3 N_i^{(3)}$$

Запишемо ці рівності у новій системі координат $\overline{x}_1'$, $\overline{x}_2'$, $\overline{x}_3'$, тобто в системі головних вісей тензорів.

$$T_{ik}' N_k^{(1)\prime} = \lambda_1 N_i^{(1)\prime}$$

$$T_{ik}' N_k^{(2)\prime} = \lambda_2 N_i^{(2)\prime}$$

$$T_{ik}' N_k^{(3)\prime} = \lambda_3 N_i^{(3)\prime}$$

Звідси, думаючи i = 1, 2, 3 та враховуючи, що

$N_1^{(1)^1} = N_2^{(2)^1} = N_3^{(3)^1} = 1$, та $N_m^{(n)^1}$ при $м \neq n$,

Отримаємо

$T_{11}^1 = \lambda_1$, $T_{22}^1 = \lambda_2$, $T_{33}^1 = \lambda_3$, $Tij^1 = 0$ $(i \neq j)$

Отже, тензор в системі своїх головних осей має вид

$$T_{ik} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}$$

Таким чином, корені λ_1, λ_2, λ_3 характеристичного рівняння зображують діагональні компоненти (тільки відрізнені від нуля) тензора в системі головних осей.

Фізичний зміст власних чисел та власних векторів для тензора напруги наступний.

Власні вектори позначають ті площадки, на котрих є тільки нормальні напруги , а дотичні рівні нулю.

Власні числа вказують на розмір цих нормальних напруг, котрі носять назву головних напруг.

3.5. Інварианти тензора

Поняття інваріанта легко пояснити на прикладі вектора. Незважаючи на те, що компоненти вектора змінюються при зміні системи координат, розмір довжини вектора при цьому залишається незмінним. Тобто для вектора $\{x_{1,} x_{2,} x_3\}$ розмір $I = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ буде інваріантом.

Аналогічно інваріанти можна скласти з компонент тензора будь-якого рангу.

Для отримання інваріантів тензора другого рангу у загальному виді розпишемо характеристичне рівняння (3.7), розкриваючи зухвалювач

$$\lambda^3 - \lambda^2 (T_{11} + T_{22} + T_{33}) +$$

$$+ \lambda \left(\begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Оскільки $\lambda, \lambda^2, \lambda^3$ являються скалярними й тому не залежать від вибору системи координат, коефіцієнт цього рівняння також не повинен мінятися при зміненні системи координат.

Таким чином, інваріантними є величини :

$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \qquad (3.\ 9)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

Обчислюючи інваріанти тензора, приведеного до головних вісей, отримуємо

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \qquad (3.\ 10)$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Приклад 7. Знайти інваріанти тензора

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$$ та записати вид тензора в головних вісях.

Рішення

$I_1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -27$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 54$$

Рівняння (3. 8) має вигляд $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$.

Звідси $\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 6$

$$A = \begin{Vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{Vmatrix}$$

3.6 Властивості симетрії тензорів

Тензор 2-го рангу Aij називається симетричним, якщо компоненти, які отримуються при перестановці індексів, дорівнюють одне одному

Tij = Tji

Тензор 2-го рангу називається антисиметричним, якщо при перестановці індексів компоненти змінюють знак

Tij = - Tji

такий тензор носить назву бівектора.

Властивість симетрії або анти симетрії не залежать від вибору системи координат.

Легко бачити, що симетричний вектор 2-го рангу має вигляд

$$\begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{Vmatrix}$$, а

антисиметричний вектор 2-го рангу має вигляд

$$\begin{Vmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{Vmatrix}$$

Будь-який тензор Tij може бути представлений у вигляді суми симетричного Sij та антисиметричного Aij.

Доведення витікають з очевидної рівності

Tij = $\frac{1}{2}(Tij + Tji) + \frac{1}{2}(Tij - Tji)$

Тензор Sij = $\frac{1}{2}(Tij + Tji)$ - симетричний тензор, т.я. Sij = Sji.

Тензор Aij = $\frac{1}{2}(Tij - Tji)$ - антисиметричний, т.я. Aij = - Aji.

Приклад 8. Розкласти на симетричний та антисиметричний тензори тензор

$$T = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$$

Рішення

Симетричний тензор

$$S = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

Антисиметричний тензор

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. На вісі *OX* знайти точку, рівновіддалену від точок *A (2, -4, 5)* та *B (-3, 2, 7)*.
2. Даний трикутник *A (1, 1, 1)*, *B (5, 1, -2)*, *C (7, 9, 1)*. Знайти координати точки *Д* перетину бісектриси кута *A* зі стороною *CB*.

3. Дані три сили $\overline{F_1} = 5\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$, $\overline{F_2} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k}$, $\overline{F_3} = 1\bar{i} + 7\bar{j} + 3\bar{k}$, які докладені до однієї точки. Вирахувати, яку роботу виконує рівнодійна цих сил, коли точці прикладення, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення M_1 *(4, 4, 6)* до положення M_2 *(7, 5, 2)*.
4. Сила $\overline{F} = 4\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ докладена до точки *В (3, 2, 4)*. Знайти момент цієї сили відносно точки *А (5, -1, 6)*.
5. Довести, що точки *А (1, 2, -1), В (0, 1, 5), С (-1, 2, 1)* та *Д (2, 1, 3)* лежать в одній площині.
6. Дані вершини тетраедра *А (-5, -4, 8), В (2, 3, 1), С (4, 1, -2)* та *Д (6, 3, 7)*. Знайти довжину висоти, проведеної з вершини *А* до грані *ВСД*.
7. Дані три вектори $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$. Знайти вектор $\bar{x}$, що задовольняє умовам: $\bar{x} * \bar{a} = -5$, $\bar{x} * \bar{b} = -11$, $\bar{x} * \bar{c} = 20$.
8. Об'єм тетраедра *V = 5*. Три його вершини знаходяться у точках *А (2, 1, -1), В (3, 0, 1), С (2, -1, 3)*. Знайти координати четвертої вершини *Д*, якщо відомо, що вона лежить на вісі *OY*.
9. Знайти інші компоненти тензора T_σ прикладу 1 розділу 3 в системі k'.
10. Розкласти суму тензорів *A* + *B* на симетричний та антисиметричний тензори.

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$$

11. Помножений тензор $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$ на тензор $B = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$

звернути за 1, 3 індексами.

12. Помножений тензор $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$ на тензор $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$

звернути за 2, 3 індексами.

13. Помножити скалярно тензор $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$ на тензори

$B_1 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$, $B \ = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

14. Знайти головні вектори тензору $A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$

15. Привести до головних вісей тензори напруги

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{Vmatrix}$$

16. Знайти інваріанти тензорів

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Записати їх характеристичні рівняння.

Для індивідуальних домашніх завдань рекомендуються завдання 1-6 глави IX збірки задач / 8 / та ІДЗ 2.1, ІДЗ 2.2 глави 2 збірки задач / 9 /, а також приведені нижче.

Завдання 1. Помножений тензор A на тензор B звернути за i, j індексам.

1. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & \end{Vmatrix}$ I = 1, j = 3

2. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 1, & 0 \end{Vmatrix}$ I = 1, j = 3

3. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 2, & 1 \end{Vmatrix}$ I = 2, j = 3

4. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 1, & 2 \end{Vmatrix}$ I =2, j = 3

5. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 2, & 1, & 1 \end{Vmatrix}$ I =1, j = 3

6. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 2, & 1, & 1 \end{Vmatrix}$ I = 2, j = 3

7. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 1 \end{Vmatrix}$ i = 1, j = 3

8. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 1 \end{Vmatrix}$ $i = 2,\ j = 3$

9. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 1 \end{Vmatrix}$ $i = 2,\ j = 3$

10. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 1, & 0 \end{Vmatrix}$ $i = 2,\ j = 3$

11. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 2, & 1 \end{Vmatrix}$ $i = 1,\ j = 3$

12. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 2, & 1 \end{Vmatrix}$ $i = 1,\ j = 3$

13. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 2, & 1 \end{Vmatrix}$ $i = 2,\ j = 3$

14. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 2, & 1 \end{Vmatrix}$ $i = 2,\ j = 3$

15. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1, & 2 & 1 \end{Vmatrix}$ $i = 2\quad j = 3$

16. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$, i = 1, j = 3

17. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$, i = 2, j = 3

18. $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, i = 1, j = 3

19. $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, i = 2, j = 3

20. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$, i = 1, j = 3

21. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$, i = 2, j = 3

22. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$, i = 1, j = 3

23. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$, i = 1, j = 3

24. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$, i = 2, j = 3

25. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$ $B = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$, i = 2, j = 3

Завдання 2. Привести до головних вісей, знайти інваріанти тензорів.

1. $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & 2 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{Vmatrix}$ 2. $\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -7 \\ -4 & 4 & 6 \end{Vmatrix}$ 3. $\begin{Vmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -6 & -4 \end{Vmatrix}$

4. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \end{Vmatrix}$ 5. $\begin{Vmatrix} 1 & 9 & 6 \\ -2 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \end{Vmatrix}$ 6. $\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 8 & -3 & -10 \\ -6 & 3 & 8 \end{Vmatrix}$

7. $\begin{Vmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$ 8. $\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 7 & -2 & -4 \\ -11 & 5 & 7 \end{Vmatrix}$ 9. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$

10. $\begin{Vmatrix} -8 & -3 & 6 \\ 10 & 3 & -8 \\ -4 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$ 11. $\begin{Vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$ 12. $\begin{Vmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 6 & -6 & -10 \\ -6 & 6 & 9 \end{Vmatrix}$

13. $\begin{Vmatrix} 8 & -2 & -10 \\ -3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 7 \end{Vmatrix}$ 14. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -8 & 3 & 10 \\ 6 & -3 & -8 \end{Vmatrix}$ 15. $\begin{Vmatrix} -7 & -7 & 2 \\ 6 & 4 & -4 \\ -6 & -6 & 2 \end{Vmatrix}$

16. $\begin{Vmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 8 & -8 & -6 \end{Vmatrix}$ 17. $\begin{Vmatrix} -7 & -6 & 6 \\ 7 & 6 & -5 \\ -2 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$ 18. $\begin{Vmatrix} -6 & 4 & 4 \\ -7 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$

19. $\begin{Vmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -4 & 5 & 7 \\ 2 & -2 & -4 \end{Vmatrix}$ 20. $\begin{Vmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$ 21. $\begin{Vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$

22. $\begin{Vmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 2 & 7 & -5 \\ 4 & 10 & -8 \end{Vmatrix}$ 23. $\begin{Vmatrix} 5 & 8 & 2 \\ -4 & -7 & -2 \\ 4 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$ 24. $\begin{Vmatrix} -4 & -6 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$

25. $\begin{Vmatrix} 5 & 0 & -6 \\ -4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & -4 \end{Vmatrix}$

Завдання 3. Розкласти суму тензорів із завдань 1 та 2 на симетричний та антисиметричний тензори.

Перелік рекомендованої літератури

1. Кудрявцев В.А., Демидрович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656с.
2. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1966. – 662с.
3. Борисенко А.И., Таранов И.Е. Векторный аналіз и начало тензорного исчисления. – М.: Высш. шк., 1963. – 260с.
4. Мак-Коппел А.Д. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 410с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. – М.: Высш. шк., 1967. – 298с.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1987. – 352с.
7. Руководство к решению задач по высшей математике. Ч.1. / под ред. Е.И. Гурского – Минск: Вышэйш. шк., 1989. – 345с.
8. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты. – М.: Высш. шк., 1983.
9. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.1. / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Высш. шк., 1990. – 270с.

Зміст

Учбове видання
Методичні вказівки
до самостійної роботи з розділу курсу
вищої математики “Системи координат
Елементи векторного та тензорного обчислення”
(для студентів спеціальностей 1108, 1204)

Укладачі: Паламарчук Віктор Олександрович
Колесніков Сергій Олексійович
Москаленко Леонід Філіппович

Редактор Н.М. Воробйова

Техн. Редактор С.Х. Аніськова

Пл. изд. № 76 1993г.

Подп. в печать Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага Офсетная печать
Усл. печ. л. Усл. кр.-отт. Уч.-изд. л. Тираж экз.
Заказ №
КИИ, 343916, Краматорск, ул.Шкадинова, 76

ДМАПП, 340050, Донецк, ул. Артема, 96