

Міністерство освіти України
Донбаська державна машинобудівна академія

С. В. Подлесний,
В. Г. Федорченко,
Ю. А. Єрфорт,
Д. Г. Сущенко,
Б. В. Плєскач

Розв'язання задач теоретичної механіки
Розділ «Статика»
Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих технічних учбових закладів

Краматорськ 2005

ББК
УДК
Р64

Рецензенти:

Ю.М.Внуков, д.т.н., проф. Запорізького національного технічного університету, м. Запоріжжя

В.А.Ропай, д.т.н., проф. Дніпропетровського національного гірничного університету, м. Дніпропетровськ

Г.Г.Габузов, д.т.н., проф. Донбаської державної машинобудівної академії.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Лист № 14/18.2-1350 від 17.06.2004

Подлесний С.В., Федорченко В.Г., Єрфорт Ю.А., Сущенко Д.Г., Плєскач Б.В.

Р64 Розв'язання задач теоретичної механіки. Розділ «Статика»: Навчальний посібник. – Краматорськ: ДДМА, 2005. - 200 с.

ISBN 5-7763-1302-3

Навчальний посібник вміщує приклади розв'язання задач теоретичної механіки по основних розділах статички відповідно програми повного курсу для студентів механічних фахів.

ISBN 5-7763-1302-3

©

ББК

С.В. Подлесний,
В.Г. Федорченко,
Ю.А. Єрфорт,
Д.Г. Сущенко,
Б.В. Плєскач 2005

©

ДДМА, 2005

ЗМІСТ

Вступ.....	5
1 Збіжна система сил. Сила як вектор. Властивості векторів.....	6
1.1 Векторні умови рівноваги збіжної системи сил.....	6
1.2 Види в'язей і їхні реакції.....	8
1.3 Розв'язання задач методом складання вільних векторів: геометричний засіб.....	11
1.4 Аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил.....	17
1.5 Розв'язання задач методом проєкцій векторів: аналітичний засіб.....	20
1.6 Контрольні завдання для самостійної роботи.....	25
2 Система паралельних сил.....	44
2.1 Алгебраїчний і векторний моменти сили відносно точки і осі. Момент пари сил.....	44
2.2 Алгебраїчний і векторний моменти пари сил.....	48
2.3 Векторні і аналітичні умови рівноваги системи паралельних сил.....	50
2.4 Контрольні завдання для самостійної роботи.....	55
2.5 Центр паралельних сил. Центр ваги тіл і його визначення.....	68
2.6 Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла.....	82
2.7 Контрольні завдання для самостійної роботи.....	82
3 Довільна система сил.....	91
3.1 Векторні і аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил.....	91
3.2 Контрольні завдання для самостійної роботи.....	100
3.3 Тертя ковзання. Розв'язання задач статички при наявності сил тертя.....	117
3.4 Тертя кочення. Розв'язання задач статички з урахуванням тертя кочення.....	126
3.5 Контрольні завдання для самостійної роботи.....	129
3.6 Умови рівноваги системи тіл під дією плоскої системи.....	140

3.7	Контрольні завдання для самостійної роботи.....	148
3.8	Ферми. Засоби визначення зусиль у стрижнях ферм.....	158
3.9	Контрольні завдання для самостійної роботи.....	165
3.10	Векторні і аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил.....	175
3.11	Контрольні завдання для самостійної роботи.....	185
	Список використаної літератури.....	199

ВСТУП

У методичних вказівках по розв'язанню задач статички наведені приклади їх розв'язання по основним темам.

Короткі теоретичні відомості відповідно темам забезпечують поєднання теорії з практичними діями при розв'язанні задач, що сприяє більш творчому їх зрозумінню.

Розв'язання задач на прикладах виконано з застосуванням різноманітних прийомів.

Показано, що одна і таж задача може бути розв'язана різними методами відповідно плану розв'язання у залежності від використаного методу, який визначається вибором в залежності від конкретних умов задач.

У роботі призначена увага аналогіям фізичного та математичного характеру, що утворює передумови по найбільш глибокому зрозумінню студентами методики розв'язання різноманітних задач статички.

Розглянуті розділи теоретичної механіки закінчується малими задачами і контрольними завданнями для самостійних робіт, що дає змогу студентам за малий час отримати необхідні знання і вміння розв'язання різноманітних задач класичної механіки.

1 ЗБІЖНА СИСТЕМА СИЛ. СИЛА, ЯК ВЕКТОР. ВЛАСТИВОСТІ ВЕКТОРІВ

1.1 Векторні умови рівноваги збіжної системи сил

Звісно, що вектор є спрямований відрізок прямої, орієнтований у просторі. Тобто вектор має дві особливості: розмір і напрямок у просторі. Тому і сила, як фізичне поняття, має всі особливості вектора: розмір і напрямок у просторі. Таким чином, сила є вектор і означають його двома словами: «вектор сили». У літературі частіше слово «вектор» не вживають, а вживають одне слово «сила».

Опираючись на закони векторних перетворень, складаємо дві сили, які прикладені в одній точці тіла (рис. 1.1).

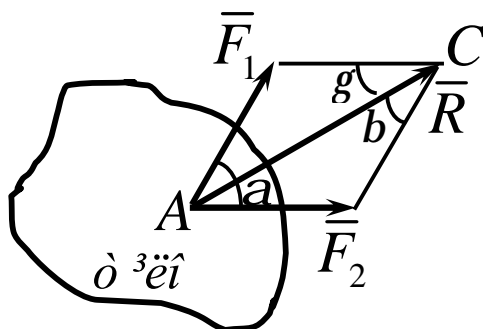


Рисунок 1.1

Геометрична сума \vec{R} двох сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 знаходиться за правилом паралелограма або побудовою силового трикутника (рис.1.2), який зображає одну із половин цього паралелограма.

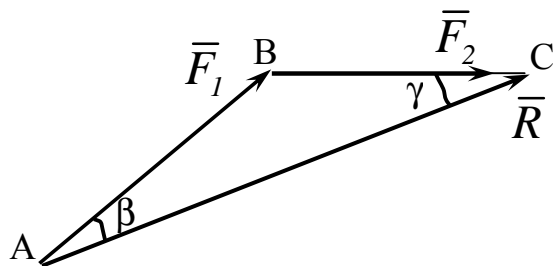


Рисунок 1.2

Якщо кут між силами дорівнює α , то модуль R і кути β і γ , які сила \vec{R} утворює між складовими силами, визначається за формулами:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha},$$

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

Якщо до тіла прикладена плоска система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 1.3), то знаходження їх суми можливо виконати послідовним додаванням однієї сили до другої тим же методом (рис. 1.4).

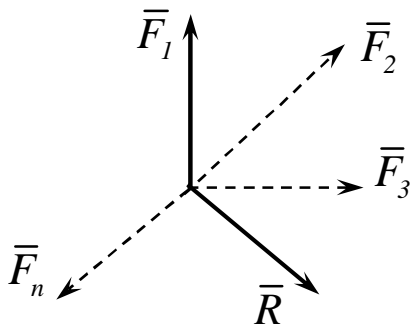


Рисунок 1.3

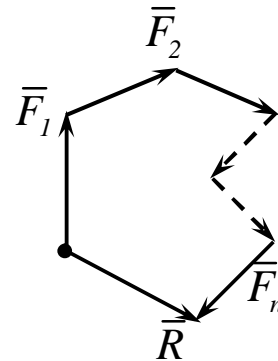


Рисунок 1.4

Таким чином система збіжних сил має рівнодійну, яка дорівнює геометричній сумі \vec{R} (головному вектору) цих сил, прикладену в точці A збігу їх ліній дії.

Математично цей висновок записується:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

або

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Правило складання просторової системи сил не відрізняється від

складання плоскої системи сил. Силовий многокутник у такому випадку буде просторовим. Система збіжних сил буде урівноваженою, коли її головний вектор R буде дорівнювати 0.

Математичний запис цієї умови є таким:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0 \quad \text{або} \quad R = 0 \quad (1.4)$$

Умови (1.4) дають змогу вирішувати задачі статички геометричними методами.

1.2 Види в'язей і їхні реакції

Розглянемо види в'язей, що найчастіше трапляються при розв'язанні задач, і зазначимо, як визначити напрям реакцій цих в'язей. Щодо величин цих реакцій, то їх можна знайти з умов рівноваги, оскільки вони залежать від активних сил.

1 Ідеально гладка поверхня (рис. 1.5). Точка A контакту тіла з поверхнею може вільно ковзати по ній. Тому реакція ідеально гладенької поверхні напрямлена за нормаллю від поверхні. Реакція позначається \bar{N} або \bar{R}_A .

2 Нерозтяжна нитка (рис. 1.6). Реакція нитки напрямлена вздовж нитки до точки її закріплення і позначається \bar{T} .

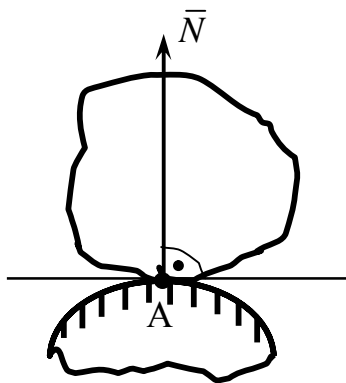


Рисунок 1.5

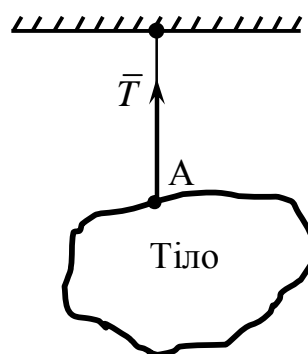


Рисунок 1.6

3 Нерухомий циліндричний шарнір – підшипник (рис. 1.7).

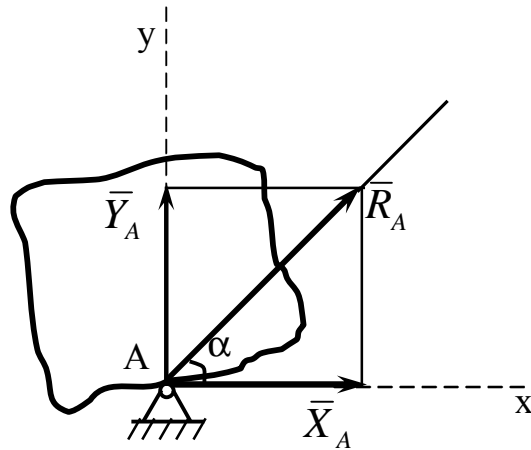


Рисунок 1.7

Напрями таких реакцій в'язей заздалегідь визначити не можна. Реакція такого шарніру \bar{R}_A розміщена в площині, перпендикулярній до його осі Az (на рисунку 1.7 не показана). Тому невідомий вектор \bar{R}_A визначається двома складовими \bar{X}_A і \bar{Y}_A по осях Ax і Ay , величини яких знаходяться з умов рівноваги. Вектор повної реакції \bar{R}_A визначається формулами:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad \cos \alpha = X_A / R_A. \quad (1.5)$$

4 Нерухомий сферичний шарнір (рисунку 1.8).

Невідомий вектор реакції такого шарніра \bar{R}_A визначається трьома складовими \bar{X}_A , \bar{Y}_A і \bar{Z}_A відповідно осям Ax , Ay , Az , величини цих складових знаходяться з умов рівноваги.

Вектор повної реакції визначається формулами:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}, \quad \cos \alpha = X_A / R_A, \quad \cos b = Y_A / R_A, \quad (1.6)$$

де a і b є кути між вектором \bar{R}_A і осями координат Ax і Ay відповідно.

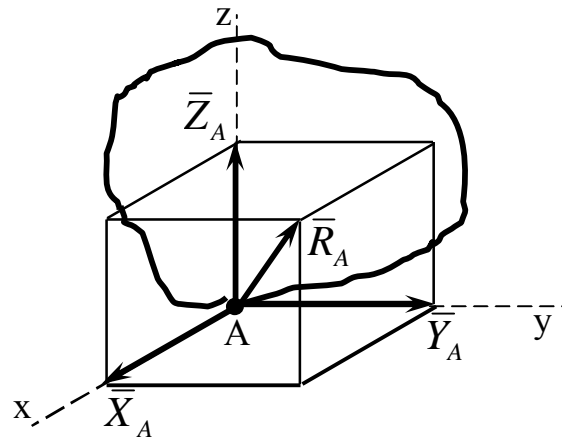


Рисунок 1.8

5 Рухомий циліндричний шарнір.

Рухомий циліндричний шарнір дозволяє зміщувати тіло вздовж осі Ax . Тому в цьому напрямку реакція в'язі спрямована перпендикулярно опорній поверхні.

На рисунках 1.9, 1.10, 1.11 показані схеми рухомого циліндричного шарніра, які зустрічаються в літературі.

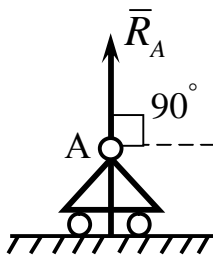


Рисунок 1.9

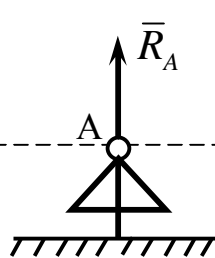


Рисунок 1.10

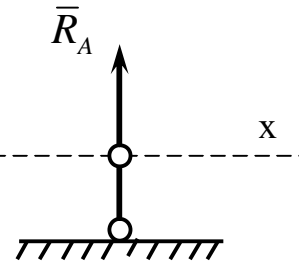


Рисунок 1.11

6 Стрижень шарнірно закріплений на кінця. Невагомий і не навантажений.

Реакція такої в'язі напрямлена вздовж осі стрижня (для прямих стрижнів). Більш конкретний напрямок реакції залежить від того яке навантаження він має (тиск або розтягування). При розв'язанні задач в якості позитивного навантаження приймають розтягування.

1.3 Розв'язання задач методом складання вільних векторів: геометричний засіб

Розглянуті раніше особливості векторів і їх геометричних перетворень дають змогу вирішувати задачі статyki із умов рівноваги тіл під дією трьох збіжних сил.

Розглянемо методи розв'язання таких задач.

Приклад 1

Однорідна куля радіусом $r = 0,2 \text{ м}$ і вагою $P = 120 \text{ Н}$, що дотикається у точці B до гладенької вертикальної стінки (рис. 1.12) утримується в рівновазі мотузкою AC завдовжки $0,8 \text{ м}$. Визначити натяг мотузки и тиск кулі на стінку, якщо відстань від точки B до вертикалі CD дорівнює $0,4 \text{ м}$.

Рішення

Оскільки відома сила \vec{P} , прикладена до кулі, то розглянемо рівновагу кулі. В'язами для кулі є стінка і мотузка AC . Оскільки стінка гладенька, то реакція \vec{R}_B буде перпендикулярною до стінки, а реакція мотузки \vec{T} напрямлена по ній.

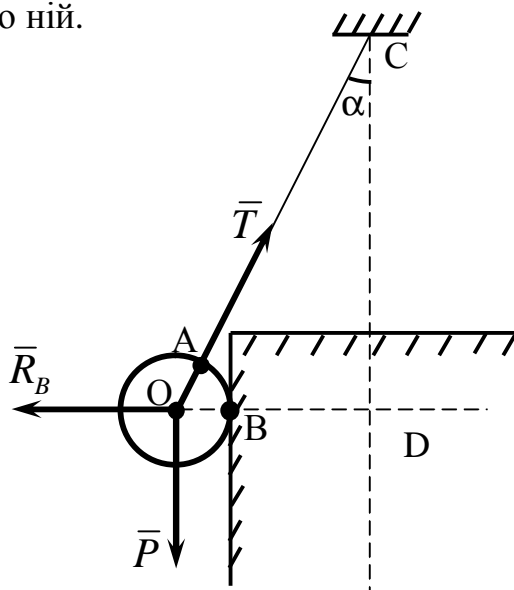


Рисунок 1.12

Оскільки сили \bar{P} , \bar{T} і \bar{R}_B урівноважені, то їх головний вектор дорівнює нулю і силовий трикутник, відбудований на силах як на сторонах буде замкнутим (рис. 1.13) за допомогою трикутника дістанемо:

$$R_B = P \operatorname{tg} \alpha, \quad T = \frac{P}{\operatorname{cosa}}.$$

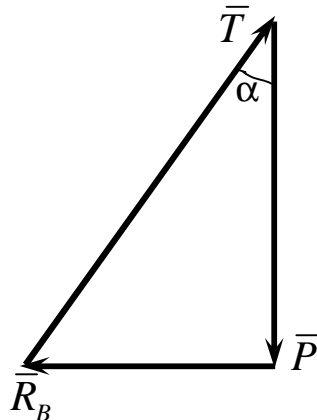


Рисунок 1.13

Із трикутника OCD маємо

$$OD = r + BD = 0,6 \text{ м},$$

$$OC = r + AC = 1 \text{ м}.$$

Тоді

$$CD = \sqrt{(OC)^2 - (OD)^2} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8 \text{ м},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OD}{CD} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75, \quad \operatorname{cosa} = \frac{CD}{OC} = \frac{0,8}{1} = 0,8.$$

Отже,

$$R_B = 120 \cdot 0,75 = 90 \text{ Н}, \quad T = \frac{120}{0,8} = 150 \text{ Н}.$$

Приклад 2

До шарніру A колінчатого преса прикладена горизонтальна сила \bar{P} (рис. 1.14). Нехтуючи вагою стрижнів і поршня, визначити силу тиску поршня на тіло M при заданих кутах a і b .

Рішення

Роздивимось спочатку рівновагу шарніра A , до якого прикладена одна задана сила \bar{P} . На ось шарніра крім сили \bar{P} діють реакції стрижнів \bar{S}_1 і \bar{S}_2 , направлені вздовж стрижнів.

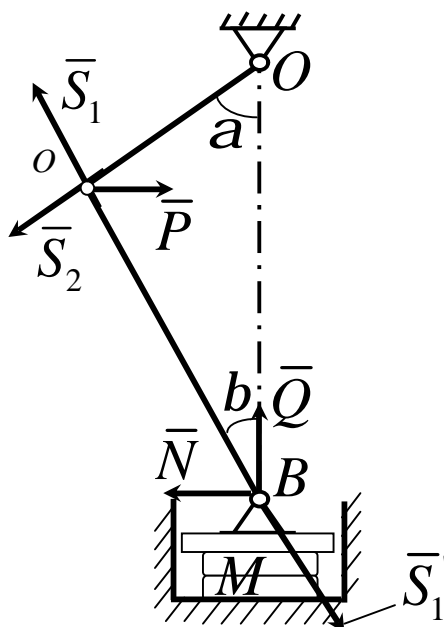


Рисунок 1.14

Відбудуємо силувий трикутник (рис. 1.15). Кути його дорівнюють $j = 90^\circ - a$, $y = 90^\circ - b$, $g = a + b$.

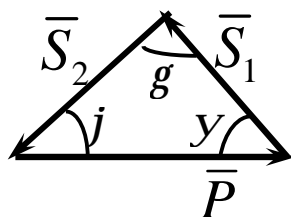


Рисунок 1.15

За допомогою теореми синусів, отримаємо:

$$\frac{S_1}{\sin j} = \frac{P}{\sin g} \quad \text{і} \quad S_1 = \frac{P \cos a}{\sin(a + b)}.$$

Тепер розглянемо рівновагу поршня на поршень діють теж три сили: сила тиску $\bar{S}'_1 = -\bar{S}_1$ стрижня AB , реакція \bar{N} стінки і реакція \bar{Q} тіла, що стискається. Так як сил три, то вони при рівновазі повинні бути збіжними, а силовий трикутник (рис. 1.16) - замкнутим.

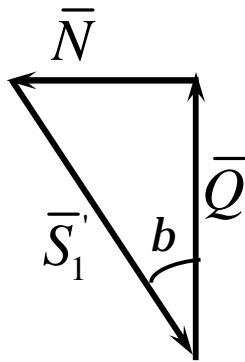


Рисунок 1.16

За допомогою його знаходимо:

$$Q = S'_1 \cos b.$$

Підставляючи замість S'_1 рівну їй S_1 отримаємо:

$$Q = \frac{P \cos a \cos b}{\sin(a + b)} = \frac{P}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}.$$

Сила тиску поршня на тіло M дорівнює по модулю Q і направлена в протилежну сторону.

Приклад 3

Вуличний ліхтар підвішений на маленькому кільці B і закріплений на двох дротах AB і CB , кінці яких A і C знаходяться на одному рівні. Ураховуючи те, що дроти є абсолютно гнучкими і нехтуючи їх вагою, знайти силу натягу в кожному із дротів (рис. 1.17). Вага ліхтаря P , довжина кожного із дротів l , відхилення DB точки підвісу ліхтаря від горизонталі дорівнює a .

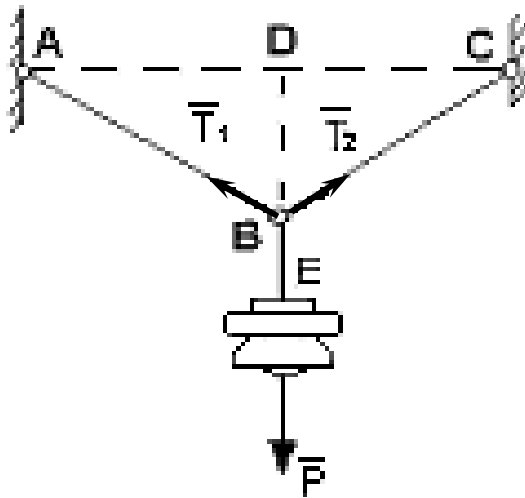


Рисунок 1.17

Рішення

Під дією сили ваги ліхтаря дріт EB буде відтягувати кільце B вниз. Воно, в свою чергу, це зусилля передає на два дроти BA і BC . Отже, кожен з цих дротів розтягається і утворює в кільці B рівну і протилежну реакцію, напрямком якої повинен співпадати з віссю дроту. Таким чином, на кільце як на вільне тіл, діють три сили (рис. 1.17). Оскільки ці сили знаходяться в рівновазі, то вектори \bar{P} , \bar{T}_1 , \bar{T}_2 повинні утворювати замкнутий трикутник (рисунок 1.18). Для відбудови цього трикутника проведемо вектор \overline{ab} , який в визначеному масштабі висловлює вагу ліхтаря, а потім сторони \overline{bc} і \overline{ca} , відповідно паралельні дротам CB і AC , по

яким направлені рівні між собою сили натягу \bar{T}_1 і \bar{T}_2 . Довжина цих векторів визначає величину зусилля розтягування в цих дротах. Якщо силовий трикутник відбудований в масштабі сил, то величина цих сил може бути визначена через довжину векторів \bar{bc} і \bar{ca} .

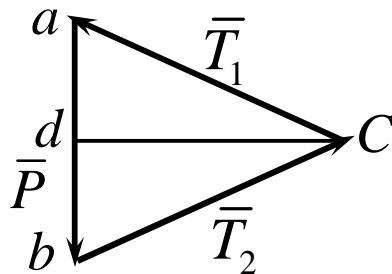


Рисунок 1.18

Трикутник DBC (рис. 1.17) подібний трикутнику dbc (рисунок 1.18), так як вектори \bar{bc} і \bar{ca} по відбудові відповідно паралельні дротам CB і AB . Відкіля отримуємо:

$$\frac{ab}{bc} = \frac{2BD}{BC},$$

де

$$ab = P, \quad bc = ac = T_2 = T_1 = T.$$

Використаємо дані задачі і висновки (1.7, 1.8). Тоді отримаємо:

$$T = \frac{Pl}{2a}. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) показує, що зусилля в дротах зростає, якщо збільшиться довжина дротів l або зменшиться відхилення точки підвісу ліхтаря від горизонталі. Вага ліхтаря теж збільшує натяг дротів.

1.4 Аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил

Аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил виникають із векторної (геометричної) форми її рівноваги. Розглянемо це послідовно. Векторна форма є такою:

$$\bar{R} = 0 \quad (1.10)$$

де

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i.$$

Якщо розглянути систему сил, діючу у просторі, за допомогою декартові системи координат, то рівняння (1.10) буде таким:

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k}, \quad (1.11)$$

де

$$R_x = \sum_i F_{ix}, \quad R_y = \sum_i F_{iy}, \quad R_z = \sum_i F_{iz}. \quad (1.12)$$

Відповідно (1.10) і (1.11) аналітичні суми проєкцій сил отримують вигляд.

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0. \quad (1.13)$$

У разі рівноваги системи збіжних сил, що лежать в одній площині, наприклад Oxy , дістанемо:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0. \quad (1.14)$$

Умови рівноваги (1.13) і (1.14) називають також рівняннями рівноваги.

Аналітичний метод розв'язання задач статки ґрунтується на понятті о проєкції сили на вісь. Проєкція сили на вісь є алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між силою і позитивним напрямом осі. Якщо цей кут гострий - проєкція позитивна, якщо тупий -

негативна, а якщо сила перпендикулярна осі – її проекція на вісь дорівнює нулю.

Так, для сил, зображених на рисунку 1.19,

$$F_x = F \cos \alpha = ab, \quad Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos j = -de, \quad P_x = 0. \quad (1.15)$$

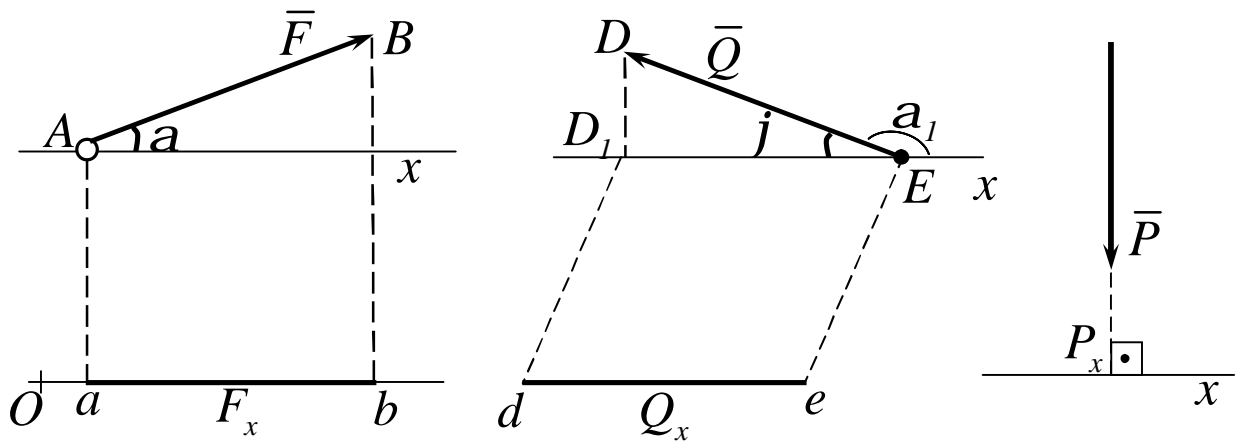


Рисунок 1.19

Проекцією сили \vec{F} на площину Oxy зветься вектор $\vec{F}_{xy} = \overline{OB_1}$, розташований між проекціями початку і кінця сили \vec{F} на цю площину (рис. 1.20).

Таким чином, проекція сили на вісь відрізняється від проекції сили на площину тим, що проекція сили на площину – є величина векторна, так як вона характеризується не тільки своїм числовим значенням, але і напрямком в площині Oxy .

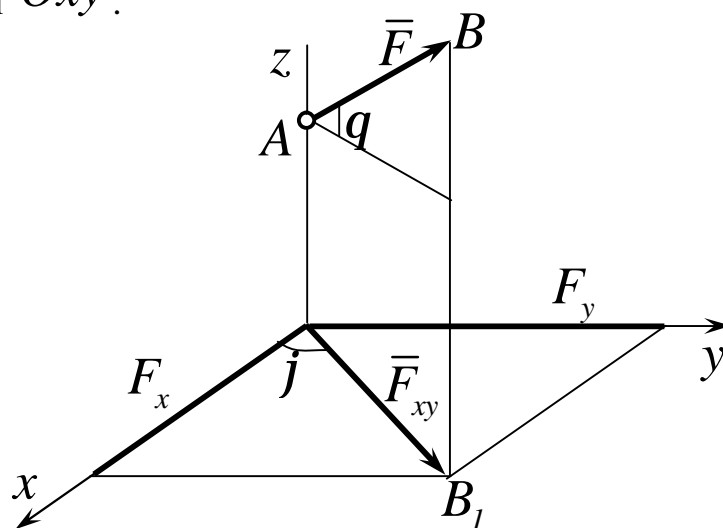


Рисунок 1.20

За модулем

$$F_{xy} = F \cos q, \quad (1.16)$$

де q – кут між напрямком сили \bar{F}_i і її проекцією \bar{F}_{xy} .

У деяких випадках для знаходження проекції сили на вісь зручніше знайти спочатку її проекцію на площину, якій належить ця вісь, а потім знайдену проекцію на площину спроектувати на дану вісь. Наприклад, у випадку, зображеному на рис. 1.20 проекції знайдемо таким способом, що

$$F_x = F_{xy} \cos j = F \cos q \cos j, \quad F_y = F_{xy} \sin j = F \cos q \sin j. \quad (1.17)$$

Вектор, зображаючий силу \bar{F} у просторі, можна відбудувати, якщо звісні модуль F цієї сили і кути a , b , g які задають напрямок сили \bar{F} . Точка A прикладення сили повинна бути задана окремо її координатами x , y , z .

Для розв'язання задач механіки зручніше задавати силу її проекціями F_x , F_y , F_z на координатні осі. Знаючи ці проекції, можна визначити модуль сили і кути, які вона утворює з координатними осями по формулам:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \\ \cos a &= \frac{F_x}{F}, \quad \cos b = \frac{F_y}{F}, \quad \cos g = \frac{F_z}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Якщо всі розглядувані сили розташовані в одній площині, то кожна з сил можна задавати її проекціями на дві осі Ox і Oy . Тоді формули, які визначають силу по її проекціям на осі координат, приймають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \\ \cos a &= \frac{F_x}{F}, \quad \cos b = \frac{F_y}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

1.5 Розв'язання задач методом проекцій векторів: аналітичний засіб

Геометричні методи розв'язання задач статки значно ускладнюють рішення їх в тих випадках, коли на тіло діє складана система сил, яка в своєму складі має кількість сил забагато більше трьох.

Тому аналітичні методи є більш раціональними методами по зрівнянню з векторними (геометричними) прийомами.

Розглянемо приклади розв'язання задач статки аналітичними методами.

Приклад 1

На циліндр вагою \bar{P} лежачий на гладкій горизонтальній площині, діє горизонтальна сила \bar{Q} , притискуючи його до виступу B (рис. 1.21). Визначити реакції в'язей в точках A і B , якщо $BD = h = R/2$, де R – радіус циліндра.

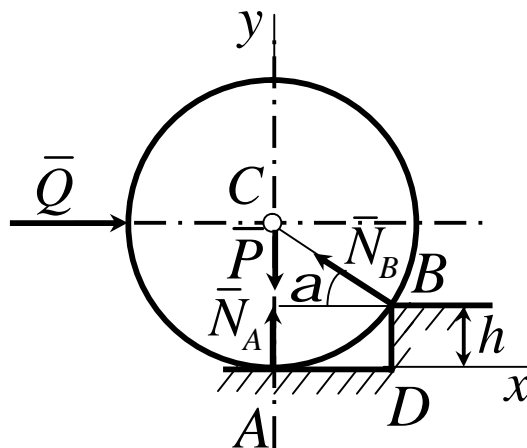


Рисунок 1.21

Рішення

Розглянемо рівновагу циліндра, на який діють задані сили \bar{P} , \bar{Q} і реакції в'язей \bar{N}_A і \bar{N}_B направлені по нормалі до поверхні циліндра. Всі сили знаходяться в одній площині і збігаються в точці С. Оскільки сил чотири, то зручніше використовувати аналітичні умови рівноваги (обрані осі координат показані на рис. 1.21):

$$\left. \begin{aligned} \sum_i F_{ix} = 0, \quad Q - N_B \cos a = 0; \\ \sum_i F_{iy} = 0, \quad N_A - P + N_B \sin a = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

При $h = 0,5R$ отримуємо:

$$\sin a = (R - h) / R = 0,5 \quad \text{і} \quad a = 30^\circ.$$

Тоді із першого рівняння (1.20), отримуємо:

$$N_B = Q / \cos a = 2Q\sqrt{3}/3.$$

Підставивши це значення N_B в друге рівняння (1.20), отримаємо:

$$N_A = P - Q \operatorname{tg} a = P - Q\sqrt{3}/3.$$

При $Q = P\sqrt{3}$ реакція \bar{N}_A обертається в нуль, а якщо $Q > P\sqrt{3}$, то циліндр відірветься від площини і під дією сили \bar{Q} почне повертатися навколо виступу B .

Приклад 2

Стоячий на землі вертикальний стовп OA утримується розтяжками

AB і AD , які утворюють із стовпом рівні кути α ; кут між площинами OAB і OAD дорівнює β (рис. 1.23). До стовпу підвішені два горизонтальних дроти; один паралельний осі Oy , натягнутий з силою \vec{P}_1 а другий, паралельний осі Ox , – з силою \vec{P}_2 . Знайти силу вертикального тиску на стовп і зусилля в дротах, нехтуючи їх масою.

Рішення

Розглянемо рівновагу вузла A , до якого прикріплені дроти. На нього діють сили на тяжіння дротів \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , реакції розтяжок \vec{T}_1 і \vec{T}_2 і реакція стовпа. Система сил є просторовою. В цьому випадку будемо використовуватись тільки аналітичним способом вирішення. Для складання умов рівноваги проводимо координатні осі (рис.1.23) і відрахуємо попередньо проєкції всіх сил на ці осі, заносючи їх до таблиці 1.1.

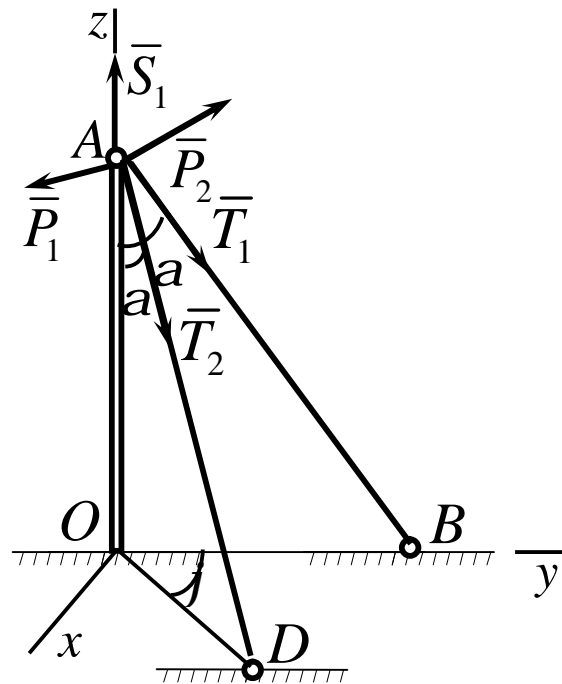


Рисунок 1.22

Таблиця 1.1

\bar{F}_i	\bar{P}_1	\bar{P}_2	\bar{S}_1	\bar{T}_1	\bar{T}_2
\bar{F}_{ix}	0	$-P_2$	0	0	$T_2 \sin a \sin j$
\bar{F}_{iy}	$-P_1$	0	0	$T_1 \sin a$	$T_2 \sin a \cos j$
\bar{F}_{iz}	0	0	S_1	$-T_1 \cos a$	$-T_2 \cos a$

Складемо рівняння рівноваги.

$$\sum_i F_{ix} = 0; \quad -P_2 + T_2 \sin a \sin j = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0; \quad -P_1 + T_1 \sin a + T_2 \sin a \cos j = 0,$$

$$\sum_i F_{iz} = 0; \quad S_1 - T_1 \cos a - T_2 \cos a = 0.$$

Вирішуючи ці рівняння, знайдемо:

$$T_2 = P_2 / \sin a \sin j; \quad T_1 = (P_1 - P_2 \operatorname{ctg} j) / \sin a,$$

$$S_1 = (P_1 + P_2 \operatorname{tg} j / 2) \operatorname{ctg} a.$$

Із отриманих результатів видно, що при

$$P_2 \operatorname{ctg} j > P_1 \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} j < P_2 / P_1$$

отримуємо $T_1 < 0$ і реакція T_1 повинна мати напрямок протилежно показаному на рисунку, що неможливо, так як дріт не може працювати на тиск. Отже, розтяжку AD необхідно розташувати так, щоб кут j задовольняв нерівність $\operatorname{tg} j > P_2 / P_1$.

На основі розглянутих прикладів можна зробити висновок, що розв'язання задач статки зводиться до наступних операцій.

1 *Вибір тіла (або тіл), рівновага якого повинна бути розглянута.* Для вирішення задачі необхідно розглянути рівновагу тіла, до якого прикладені задані і шукані сили, або сили, рівні шуканим (наприклад, якщо необхідно знайти тиск на опору, то можна розглянути рівновагу тіла, до якого прикладена числено рівна цій силі реакція опори).

Коли задані сили діють на одне тіло, а шукані на друге, або коли ті і другі сили діють одночасно на декілька тіл, може виявитися необхідним розглянути рівновагу системи цих тіл, або послідовно рівновагу кожного тіла окремо.

2 *Зображення діючих сил.* Установивши рівновагу кожного тіла, або тіл, слід на рисунку зобразити всі діючі на це тіло (або тіла) зовнішні сили, як задані, так і шукані сили, а також реакції всіх в'язей.

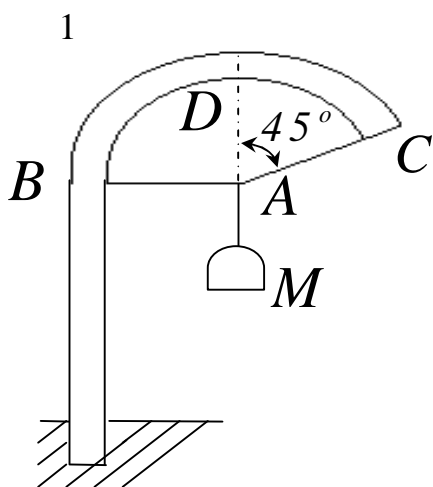
3 *Складання умов рівноваги.* Умови рівноваги складають для сил, діючих на тіло або тіла, рівновага яких розглядається.

4 *Визначення шуканих величин, перевірка вірності рішення і аналіз отриманих результатів.* Велике значення в процесі розв'язання задач має чіткий рисунок. Він допомагає скоріш знайти вірний шлях рішення і запобігти помилок при складанні умов рівноваги і послідовно провести всі викладки.

Усі розрахунки при розв'язанні задач рекомендується, як правило, виконувати в загальному виді (алгебраїчно). Тоді для пошуку величин будуть отримуватись формули, які дають можливість проаналізувати отримані результати. Крім того, розв'язання в загальному вигляді дозволяє іноді виявити зроблені помилки шляхом перевірки розмірностей, так як розмірності із складових в обох частинах рівняння повинні бути однаковими. Числа, якщо розв'язання виконується в загальному вигляді, підставляються тільки в кінцеві результати.

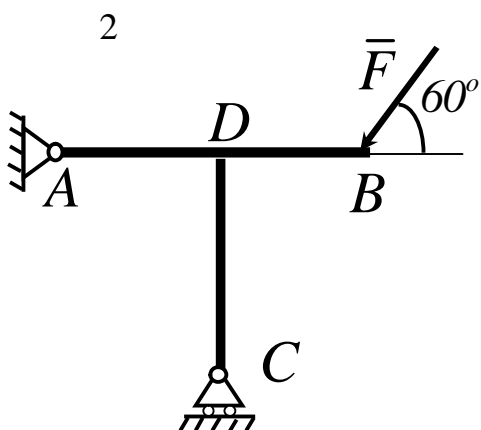
1.6 Контрольні завдання для самостійної роботи .

Плоска система збіжних сил



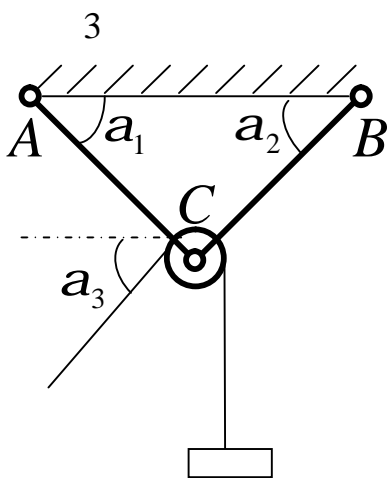
Ліхтар M масою 12 кг утримується дротиною AC , відхиленою від вертикалі на кут 45° , і горизонтальною дротиною AB . Визначити натяг дротин AB і AC , нехтуючи їх масою.

Відповідь: $T_B = 40\sqrt{2}\text{ Н}; T_C = 80\sqrt{2}\text{ Н}.$



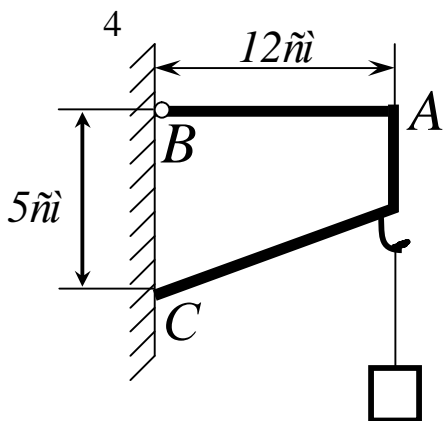
Невагомий стрижень AB жорстко скріплено під прямим кутом з невагомим стрижнем CD . У точці B до стрижня прикладена сила $F = 30\text{ Н}$ під кутом 60° . Визначити реакції рухомої опори C і шарніра A , якщо $AD = BD$.

Відповідь: $R_A = 30\text{ Н}; R_C = 30\sqrt{3}\text{ Н}.$



Блок C удержується двома невагомими стрижнями, прикріпленими до осі блока і стелі в точках A і B шарнірами $a_1 = a_2 = 45^\circ$. Через Z блок перекинута вірвовка, за допомогою якої рівномірно піднімають вантаж масою 160 кг , $a_3 = 15^\circ$. Знайти реакції стрижнів, нехтуючи розмірами та масою блока і вірвовки.

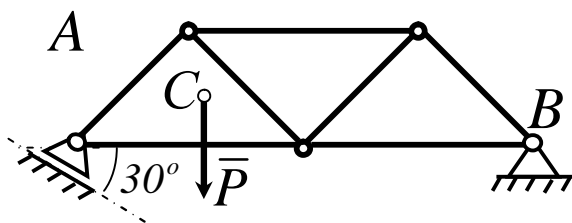
Відповідь: $R_{AC} = 330\text{ Н}; R_{BC} = 2520\text{ Н}.$



До кронштейна BAC підвішене вантаж масою $2,5 \text{ кг}$. У точці B кронштейна є нерухомий шарнір, а в точці C кронштейн опирається на гладеньку стіну. Визначити реакції зв'язків, нехтуючи масою кронштейна, якщо $AB = 12 \text{ см}$, $BC = 5 \text{ см}$.

Відповідь: $R_B = 65 \text{ Н}$; $R_C = 60 \text{ Н}$.

5



Визначити реакції опор ферми, яка в точці B спирається на нерухомий шарнір, а кінцем A на котки установлені під кутом 30° до горизонту. Вага ферми з навантаженням $P = 30 \text{ кН}$, а лінія дії цієї сили віддалена від опори A на 2 м , $AB = 6 \text{ м}$.

Відповідь:

$$R_A = 23,1 \text{ кН}; R_B = 15,3 \text{ кН}.$$

6 Однорідна балка AB масою 21 кН удержується в горизонтальному положенні двома однаковими тросами DC і EC , які прикріплені в точках D і E на балці і з'єднуються в точці C на стелі $DE = DC = CE$; $AD = BE$. Визначити натяг тросу.

Відповідь: $T = 12,1 \text{ кН}$.

7 Через блок з нерухомою віссю обертання O перекинута вірвовка до звисаючого кінця A якої прикріплено вантаж масою 18 кг . Кінець B відведено вбік і закріплено нерухомо так, що вірвовка утворює з вертикал-

лю кут 60° . Нехтуючи масою блока і вірьовки, визначити тиск на вісь O блока.

Відповідь: $N = 180\sqrt{3} \text{ Н}$.

8 На кінці A горизонтальний стрижень AB закріплено шарнірно, до кінця B підвищено вантаж масою 7 кг . Стрижень AB в точці C підпирається нахиленим стрижнем CD з шарнірами на кінцях. $AD \perp AB$, $AD = AC = CB$. Нехтуючи масою стрижнів і тертям, визначити реакції шарніра A і стрижня CD .

Відповідь: $R_A = 70\sqrt{5} \text{ Н}$; $R_C = 140\sqrt{2} \text{ Н}$.

9 До кінця B стрижня AB , відхиленого від горизонтальної осі A_x угору, прикладена горизонтальна сила $F = 21 \text{ Н}$, напрямлена в бік від'ємних значень. У точці C стрижень AB підпирається вертикальним стрижнем CD , кінець D якого розміщений на осі A_x , $AC = CB = 10 \text{ см}$, $CD = 10 \text{ см}$. Нехтуючи масою стрижнів і вважаючи їх кріплення шарнірними, визначити реакції шарніра A і стрижня CD .

Відповідь: $R_A = 27,9 \text{ Н}$; $R_C = 18,3 \text{ Н}$.

10. Однорідний стрижень AB масою 3 кг , відхилений від горизонтальної осі A_x униз на кут 45° утримується в рівновазі шарніром A і вірьовкою BC , яка утворює з вертикаллю кут 45° . Визначити реакцію шарніра A і натяг вірьовки BC .

Відповідь: $R_A = \frac{15}{2}\sqrt{10} \text{ Н}$; $T = \frac{15}{2}\sqrt{2} \text{ Н}$.

11. Однорідний стрижень AB , маса якого $1,6 \text{ кг}$, утримується в горизонтальному положенні нерухомим шарніром A і вірьовкою BC , вер-

хній кінець якої C розміщений на одній вертикалі з шарніром A .
 $AB = 130 \text{ см}$, $AC = 80 \text{ см}$. Визначити реакцію шарніра A і натяг
 вірьовки.

Відповідь: $R_A = T = 14,4 \text{ Н}$.

12. Вантаж масою $0,5 \text{ кг}$ підвішено до кінця B горизонтального
 стрижня AB , який удержується в рівновазі шарніром A і стрижнем
 CD з шарніром D , розміщеним над A на одній вертикалі.
 $AC = CB = 12 \text{ см}$, $AD = 5 \text{ см}$. Нехтуючи масою стрижнів, визначити
 реакції шарнірів A і C .

Відповідь: $R_A = 24,5 \text{ Н}$; $R_C = 26 \text{ Н}$.

13. Однорідний стрижень AB масою 10 кг утримується над гори-
 зонтальною віссю Ax під кутом 30° за допомогою нерухомого шарніра
 A і невагомому стрижня BC . Останній утворює з горизонтальною віссю
 Ax кут 60° . Визначити реакції шарніра A і стрижня BC , якщо в то-
 чках B і C шарнірне з'єднання.

Відповідь: $R_A = 50 \text{ Н}$; $R_B = 50\sqrt{3} \text{ Н}$.

14. У точці O прикладені 4 сили: $P_1 = 10 \text{ Н}$, $P_2 = 20 \text{ Н}$, P_3 ,
 P_4 . Визначити модулі сил P_3 і P_4 , коли відомо, що всі 4 сили лежать у
 площині xOy і зрівноважуються, а кути які вони утворюють з віссю
 Ox ,

дорівнюють

відповідно:

$\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 315^\circ$, $\alpha_3 = 240^\circ$, $\alpha_4 = 150^\circ$.

Відповідь: $P_3 = 3,48 \text{ Н}$; $P_4 = 24,32 \text{ Н}$.

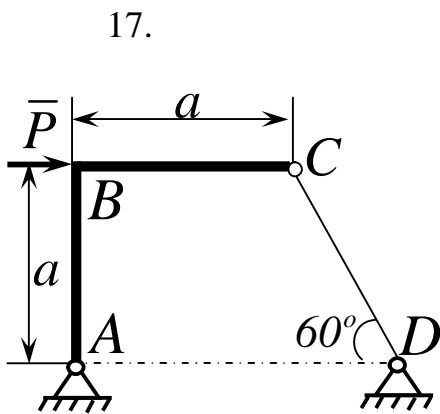
15. Однорідний гладенький циліндр, вага якого 120 Н , утримується
 між вертикальною площиною і площиною, нахиленою до неї під кутом

60° . Визначити тиск циліндра на ці площини.

Відповідь: $N_1 = 69,3 \text{ Н}$, $N_2 = 138,6 \text{ Н}$.

16. Кулька A масою P , розміщена на гладенькій площині, відхиленій від горизонтальної на кут a . Кулька вдержується в рівновазі прикріпленою до неї ниткою, яка з вертикаллю утворює кут b . Визначити натяг нитки і тиск кульки на площину.

Відповідь: $T = P \frac{\sin a}{\sin(a + b)}$; $N = P \frac{\sin b}{\sin(a + b)}$.



Невагомий стрижень ABC зігнуто під прямим кутом у точці B . На кінці A стрижня – нерухомий шарнір, другий кінець C прикріплено до невагомого стрижня CD з шарнірами на кінцях, нахиленого до горизонту під кутом 60° . У точці B прикладена горизонтальна сила $P = 6 \text{ Н}$, $AB = BC$. Визначити реакції шарнірів A і C .

Відповідь: $R_A = 5,4 \text{ Н}$; $R_C = 4,4 \text{ Н}$.

18. Однорідна пластинка масою 100 Н , має форму прямокутного трикутника ABC , в якого вертикальний катет $AB = 10 \text{ см}$, катет $AC = 15 \text{ см}$. Пластинка вдержується в рівновазі нерухомим шарніром A і невагомим горизонтальним стрижнем BB_1 із шарнірами на кінцях. Визначити реакції опор.

Відповідь: $R_A = 118 \text{ Н}$; $R_B = 50 \text{ Н}$.

19. Діагональ BD однорідної квадратної пластинки $ABCD$ масою 180 Н вертикальна (D - внизу). Пластинка вдержується в рівновазі

циліндричним шарніром A і невагомим стрижнем EE_1 , з шарнірами на кінцях; E - на стороні AD пластинки, $EE_1 \parallel AB$. $AB = 12$ см, $AE = 12$ см. Визначити реакції шарніра A і стрижня EE_1 .

Відповідь: $R_A = 134$ Н; $R_E = 169,7$ Н.

20. Однорідний диск, вага якого 300 Н, жорстко прикріплено вздовж хорди до вертикального стрижня AB , вагою якого можна знехтувати. Визначити тиск стрижня на підп'ятник A і на підшипник B , якщо $AB = 54$ см, а відстань від центра C диска до стрижня AB дорівнює 9 см.

Відповідь: $N_A = 304$ Н; $N_B = 50$ Н.

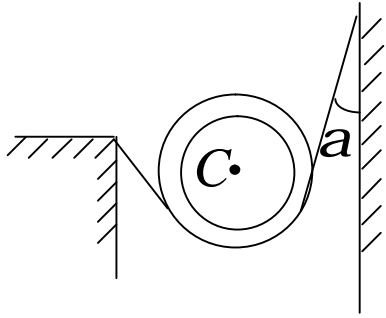
21. Однорідний стрижень OA довжиною $1,2$ м, який відхилено від горизонтальної осі Ox угору, має на кінці O шарнірну опору. Кінець A спирається на гладеньку вертикальну стіну, відстань якої від шарніра O становить $0,4$ м. Вага стрижня 36 Н. Визначити реакції шарнірної опори O і стіни.

Відповідь: $R_O = 36,6$ Н; $R = 6,36$ Н.

22. Стрижневий трикутник ACB складається з горизонтального стрижня AB і стрижнів AC і BC , що скріплені над ним в шарнірі C і прикріплені до нерухомих шарнірних опор A і B . $\angle CAB = a$, $\angle CBA = b$. Визначити зусилля в стрижнях CA і CB , якщо до шарніра C прикладена вертикальна сила P , напрямлена вниз.

Відповідь: $S_{AC} = \frac{P \cos b}{\sin(a + b)}$; $S_{BC} = \frac{P \cos a}{\sin(a + b)}$.

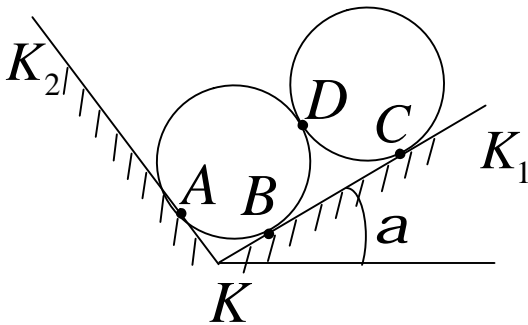
23.



Однорідну гладеньку трубу вагою $P=1\text{кН}$ вільно покладено на два однакових троси, площини яких паралельні і розміщені на однакових відстанях від торців труби. Кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити натяг тросів.

Відповідь: $T_1 = T_2 = 0,58\text{кН}$.

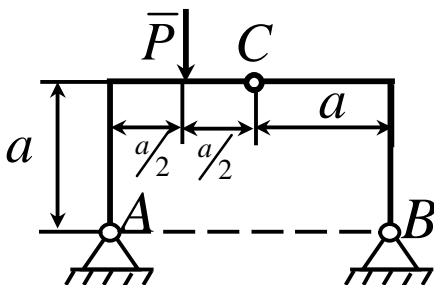
24.



Дві циліндричні труби, що мають однакові радіуси і вагу $P_1 = P_2 = 200\text{кН}$, спираються на гладенькі похилі площини, які утворюють між собою прямий кут. Площина KK_1 утворює з горизонтальною площиною кут $\alpha = 30^\circ$. Знайти реакції похилих площин KK_1 і KK_2 і тиск труб однієї на одну.

Відповідь: $N_A = 200\text{кН}$; $N_B = N_C = 100\sqrt{3}\text{кН}$;
 $N_D = 100\text{кН}$.

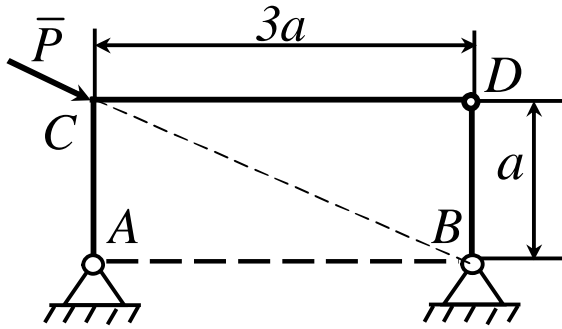
25.



До шарнірноз'єднаної стрижневої системи прикладена вертикальну силу P . Визначити реакції шарнірів A і B . Вагою стрижнів знехтувати.

Відповідь: $N_A = \frac{\sqrt{10}}{4}P$; $N_B = \frac{\sqrt{2}}{4}P$.

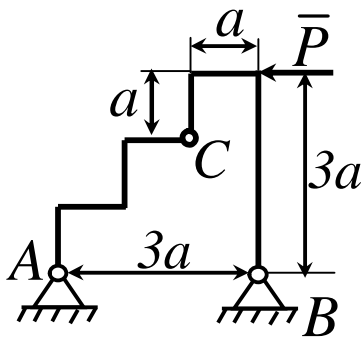
26



До шарнірно зчленованої стрижневої системи прикладена сила P , напрямлена вздовж CB . Визначити реакції шарнірів A і B , якщо $AC = BD = a$, $CD = 3a$. Вагою системи знехтувати.

Відповідь. $R_A = \frac{3\sqrt{10}}{10} P$; $R_B = \frac{\sqrt{10}}{10} P$.

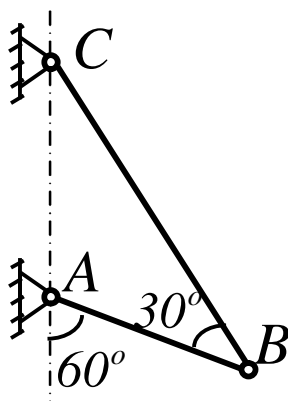
27



До шарнірно зчленованої стрижневої системи прикладена горизонтальна сила $P = 4 \text{ кН}$. Нехтуючи вагою конструкції, визначити реакції опор A і B , розміщених на одній горизонталі. Кріплення в точках A , B і C шарнірні.

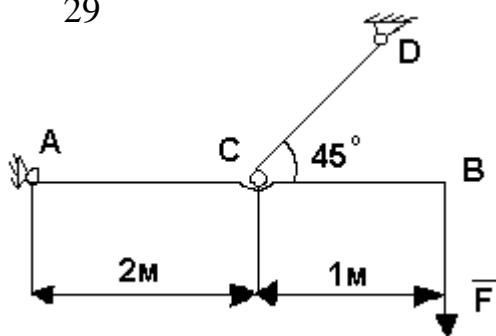
Відповідь. $R_A = 4\sqrt{2} T$; $R_B = 4 T$.

28



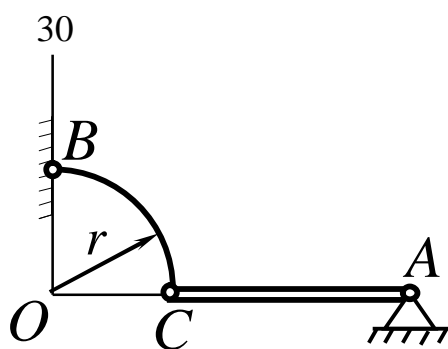
Однорідний стрижень AB прикріплений до вертикальної стіни шарнірно в точці A і утримується під кутом 60° до вертикалі за допомогою троса BC , який утворює з ним кут 30° . Визначити величину і напрямок реакції R шарніра A , якщо відомо, що вага стрижня дорівнює 20 Н .

Відповідь. $R = 10 \text{ Н}$; $\angle(R, AC) = 60^\circ$.



Балка AB підтримується в горизонтальному положенні стрижнем CD ; скріплення в A , C і D шарнірні. Визначити реакції опор A і D , якщо на кінці балки діє вертикальна сила $F = 5 \text{ кН}$. Вагою знехтувати.

Відповідь: $R_A = 7,9 \text{ кН}$; $R_D = 10,6 \text{ кН}$.

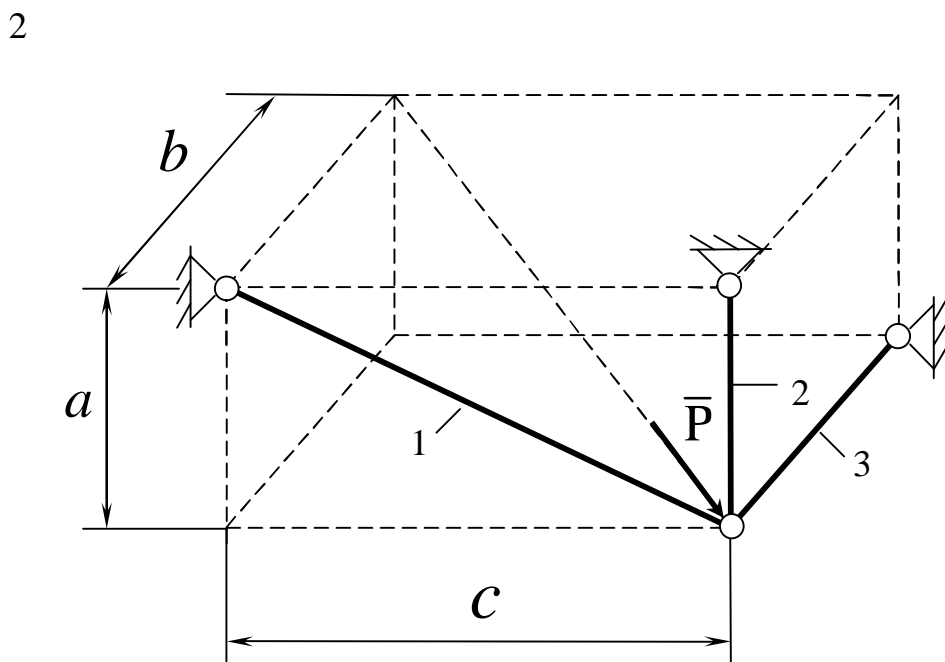
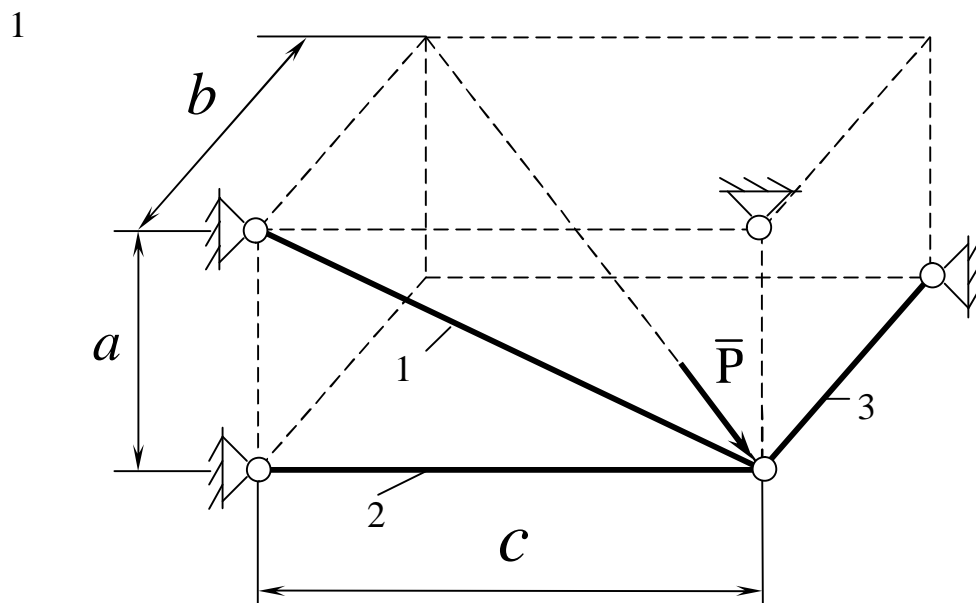


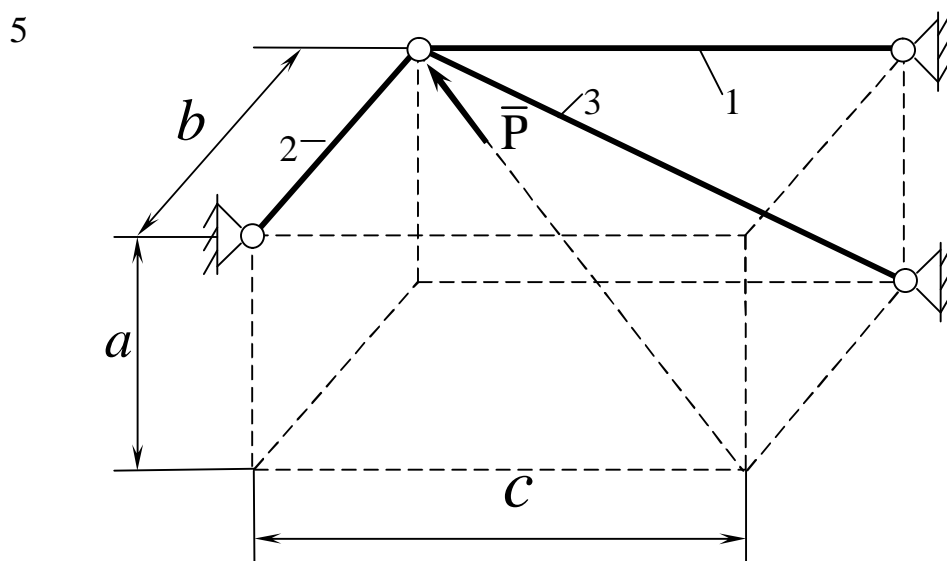
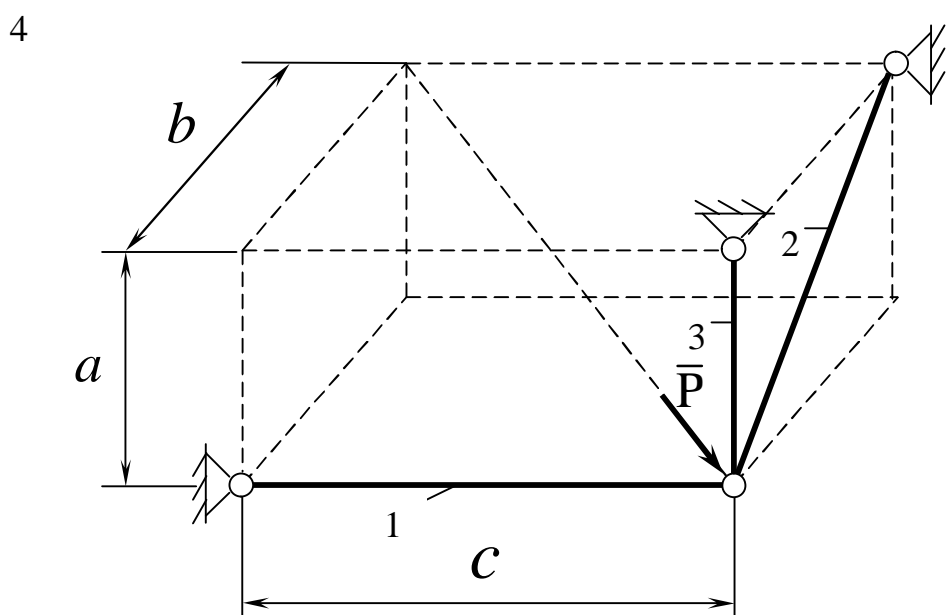
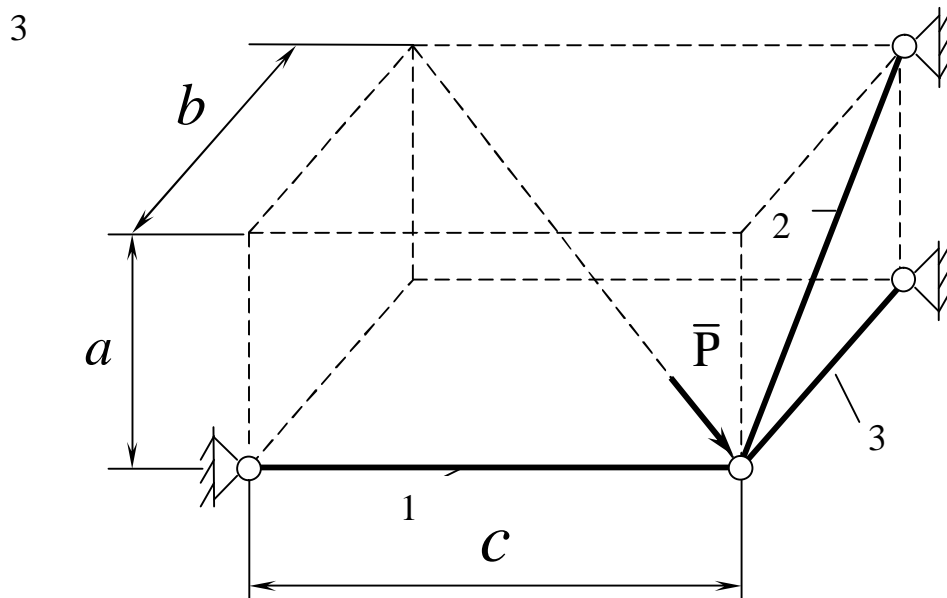
Однорідна балка AC вагою P утримується в рівновазі в горизонтальному положенні за допомогою невагомго стержня BC , зігнутого по радіусу r . Точка A - нерухомий шарнір, $AC = 2r$. Визначити R_A і R_B

Відповідь: $R_A = R_B = \frac{P}{\sqrt{2}}$.

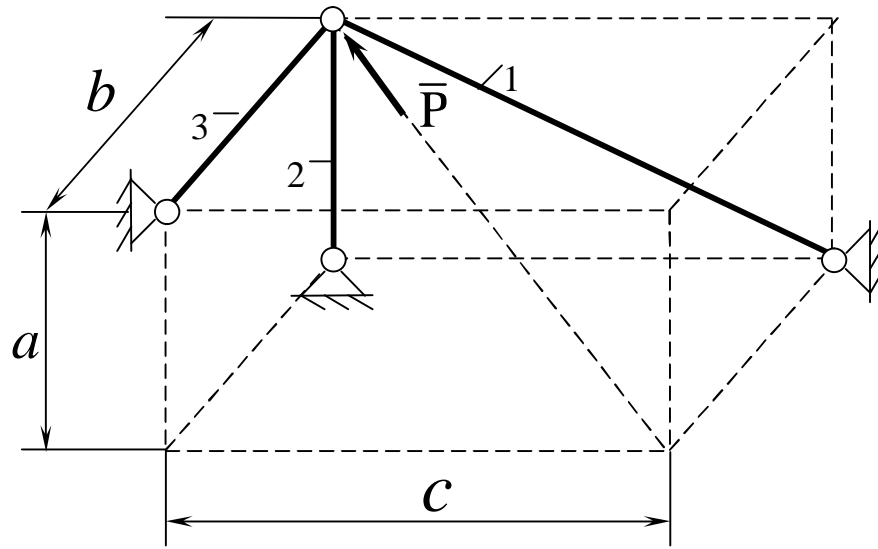
ПРОСТОРОВА СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

Знайти зусилля в стрижнях 1, 2 і 3, шарнірно закріплені на кінцях стрижневої конструкції, на яку діє зовнішня сила $P=10\text{кН}$, якщо $a=4\text{ м}$; $b=5\text{ м}$; $c=6\text{ м}$, задані кути $\alpha=30^\circ$, $\beta=60^\circ$.

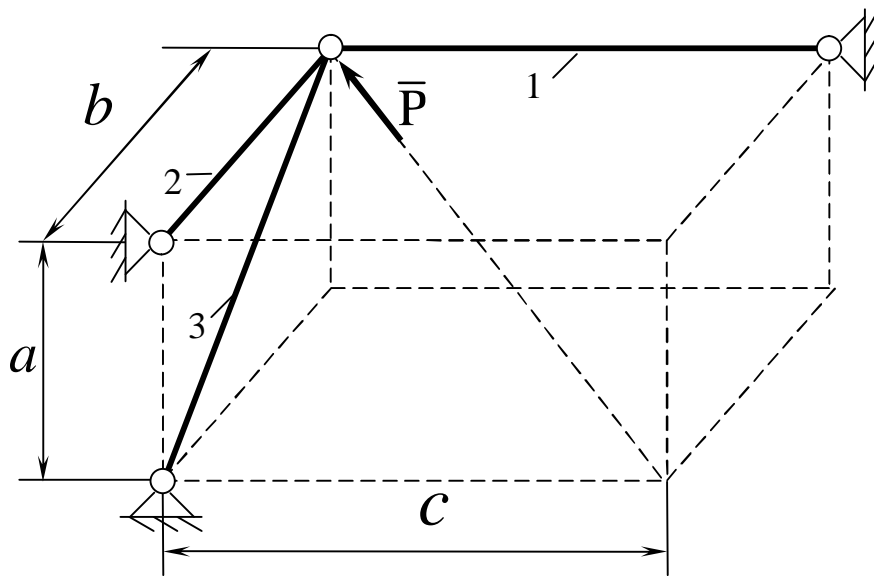




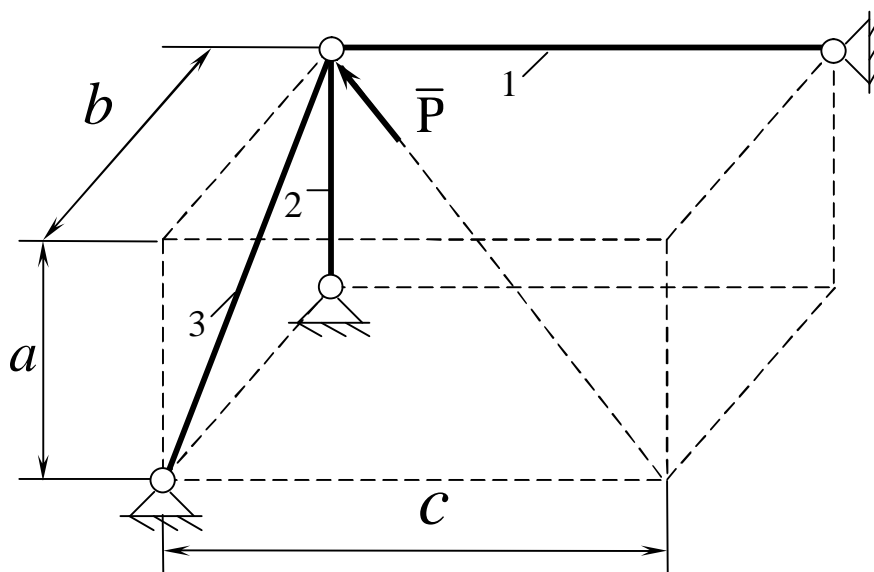
6



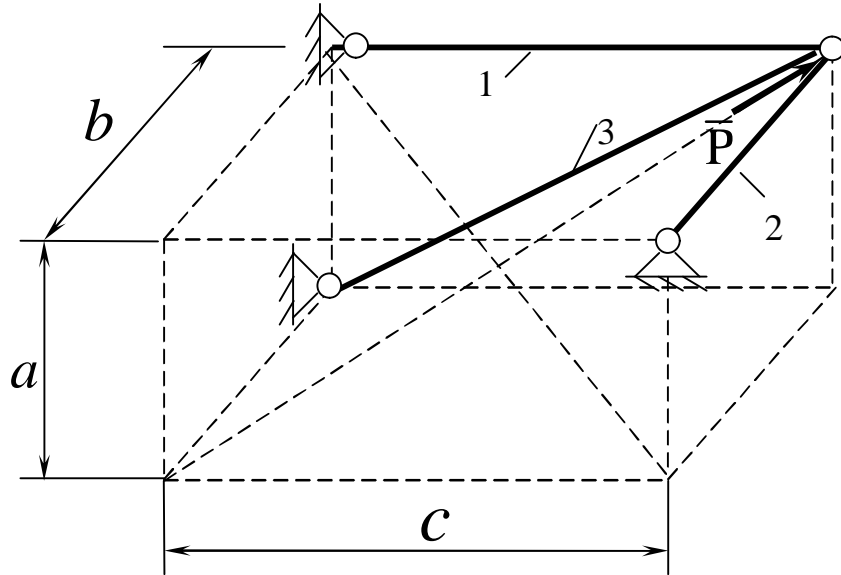
7



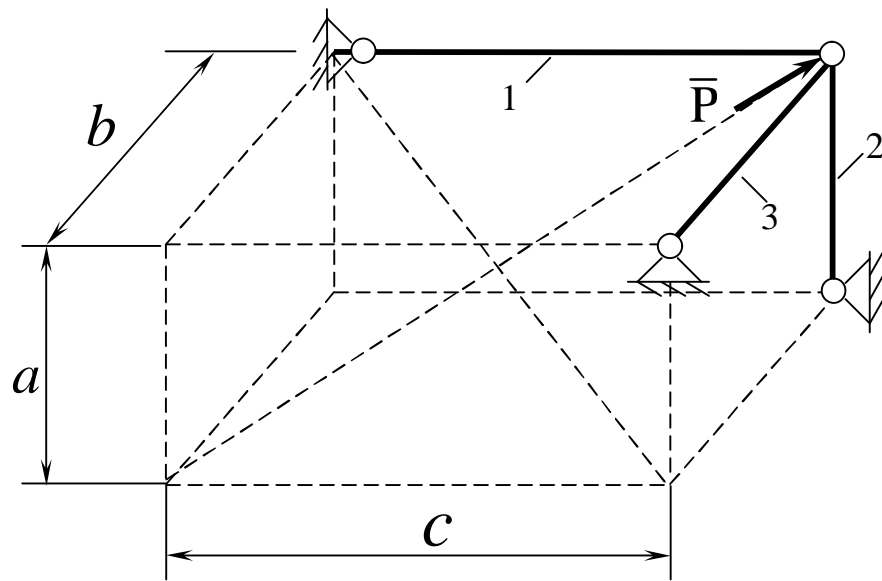
8



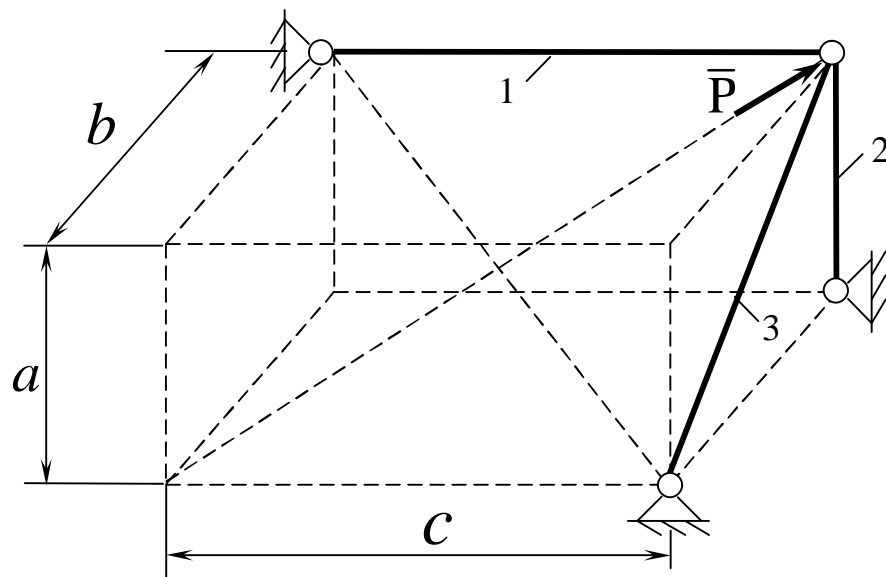
9



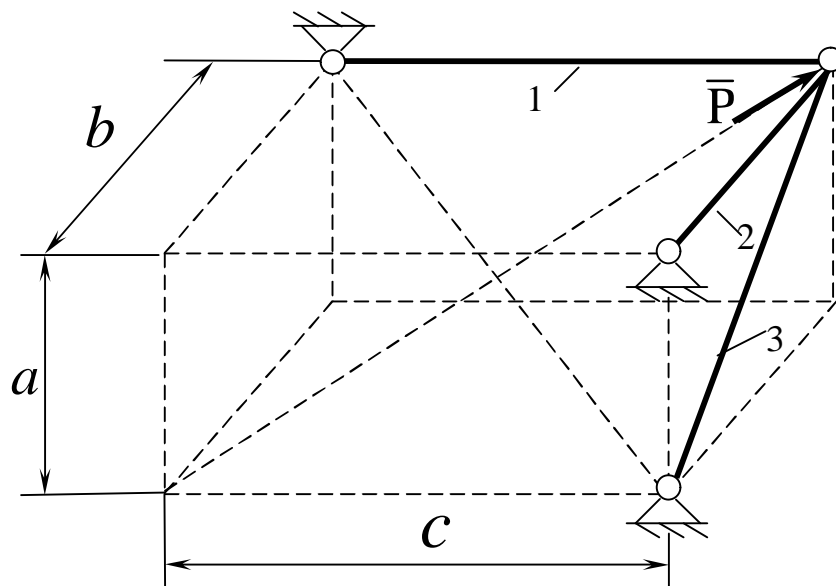
10



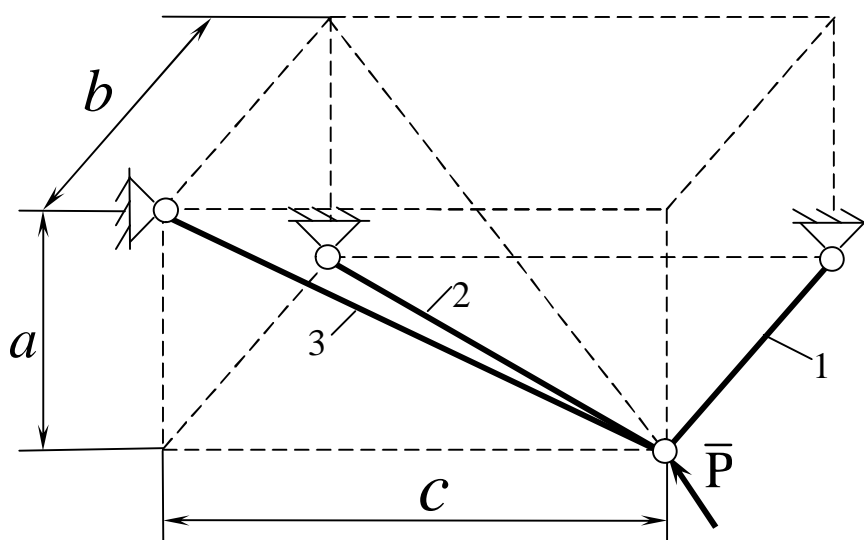
11



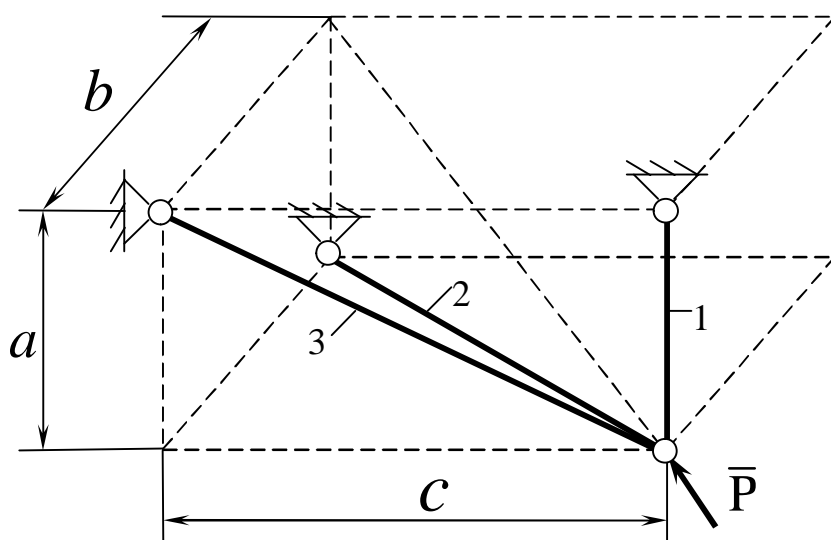
12



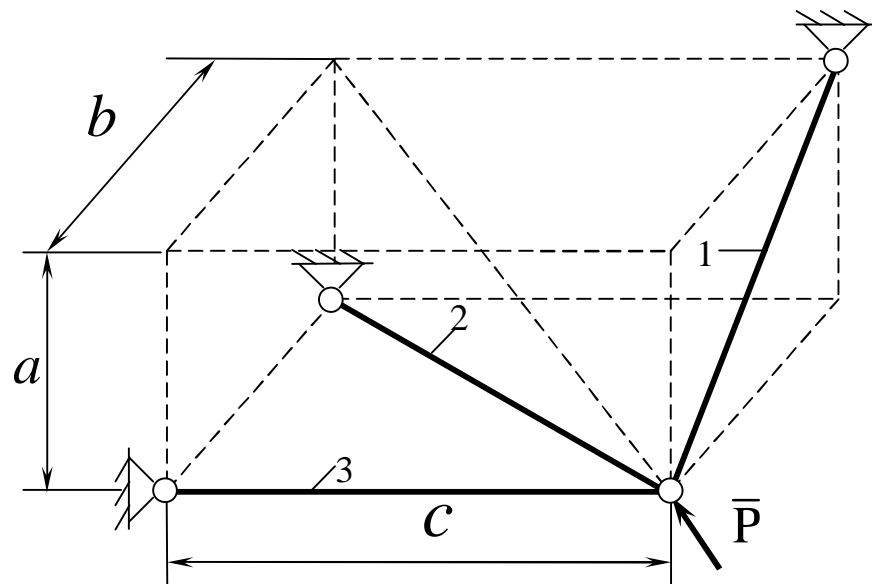
13



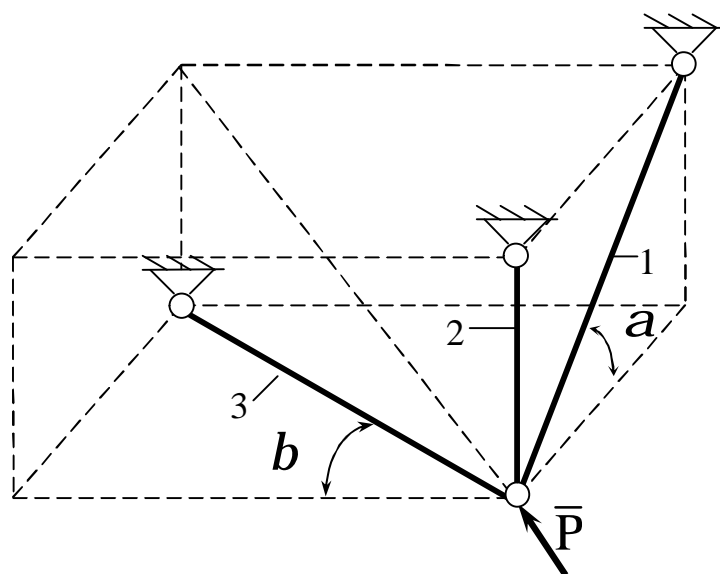
14



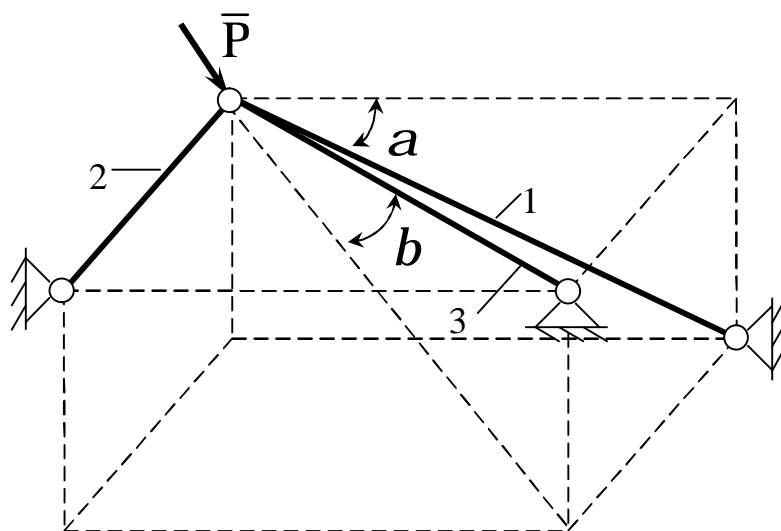
15



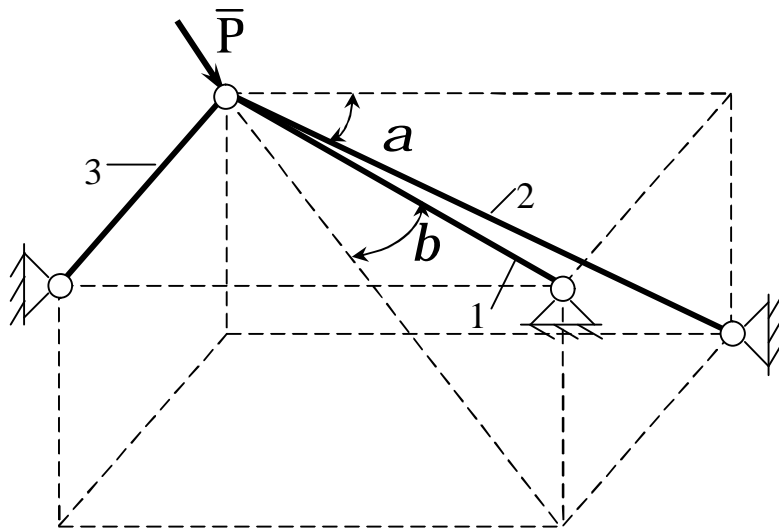
16



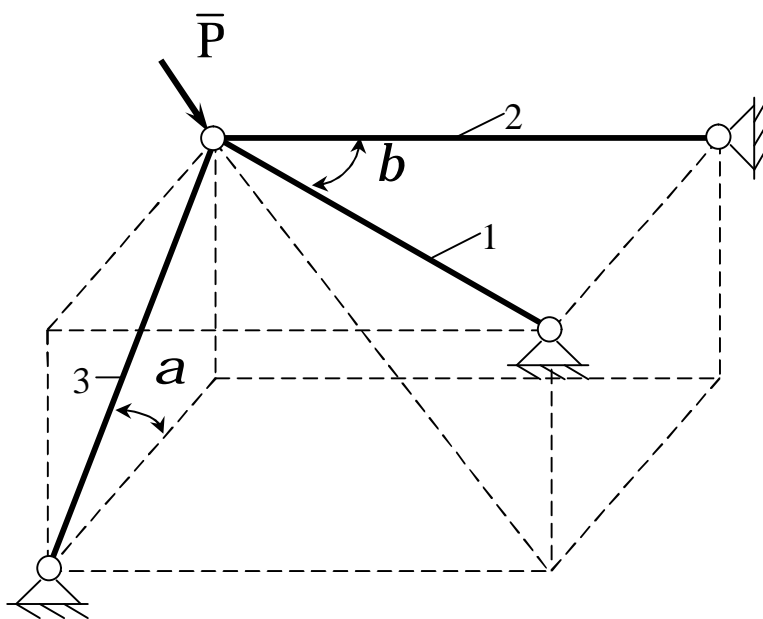
17



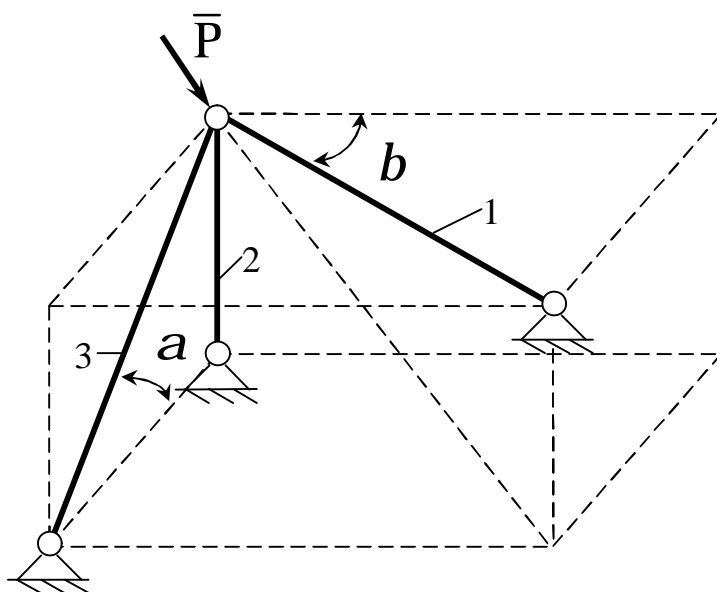
18



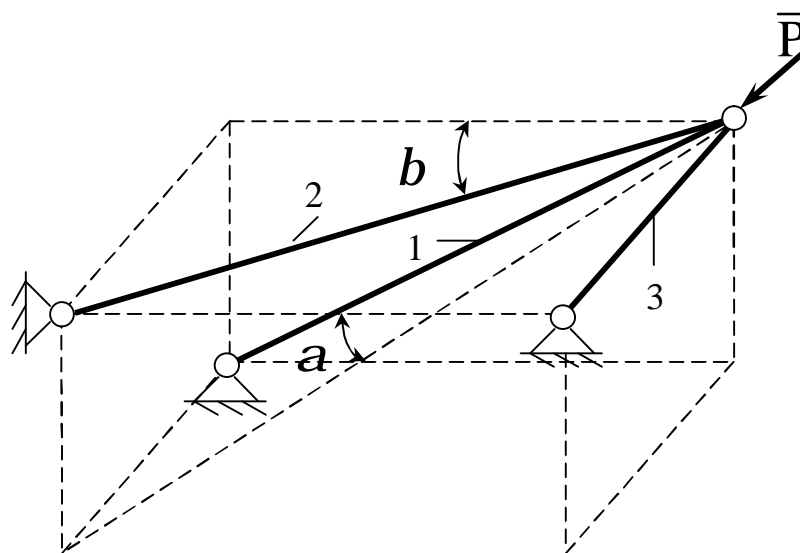
19



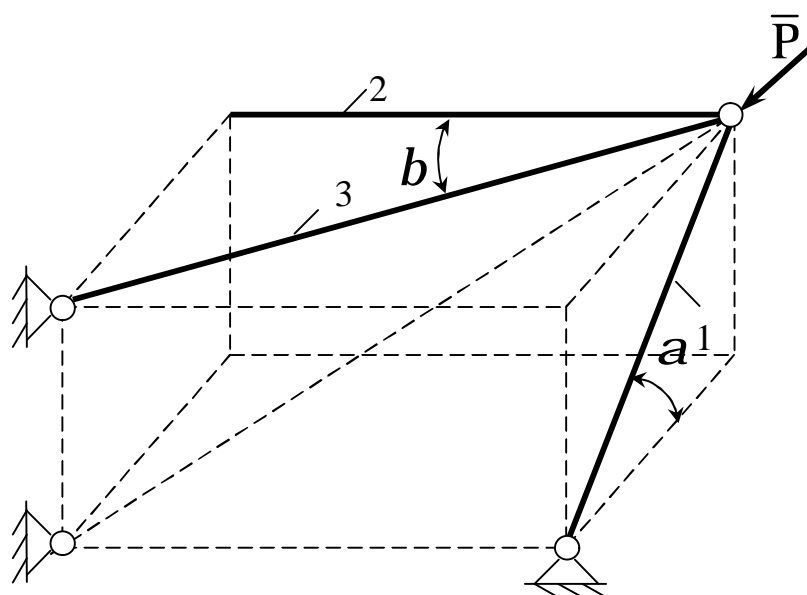
20



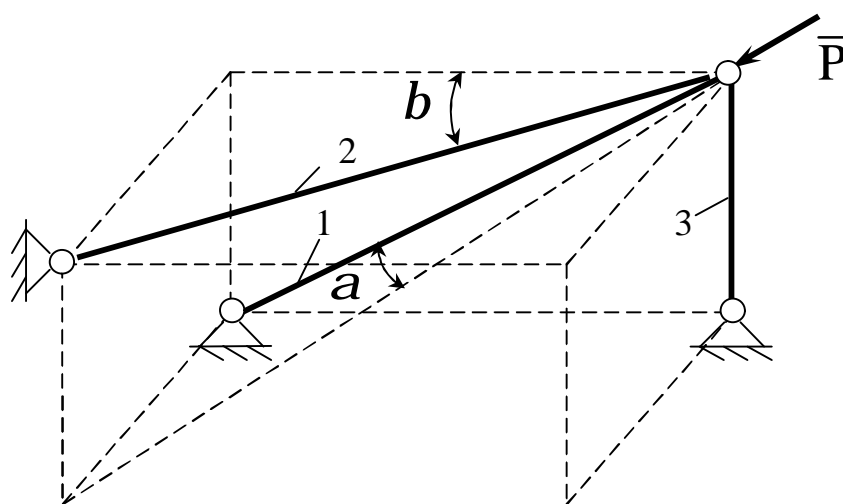
21



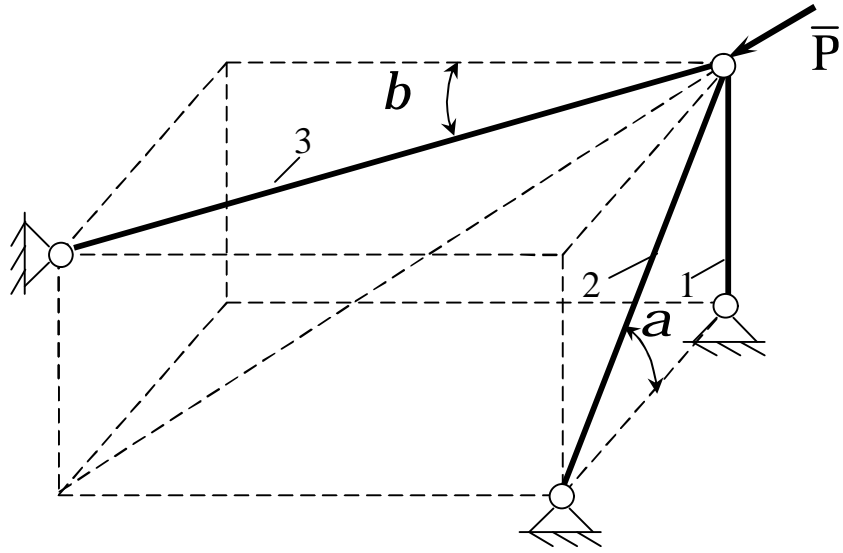
22



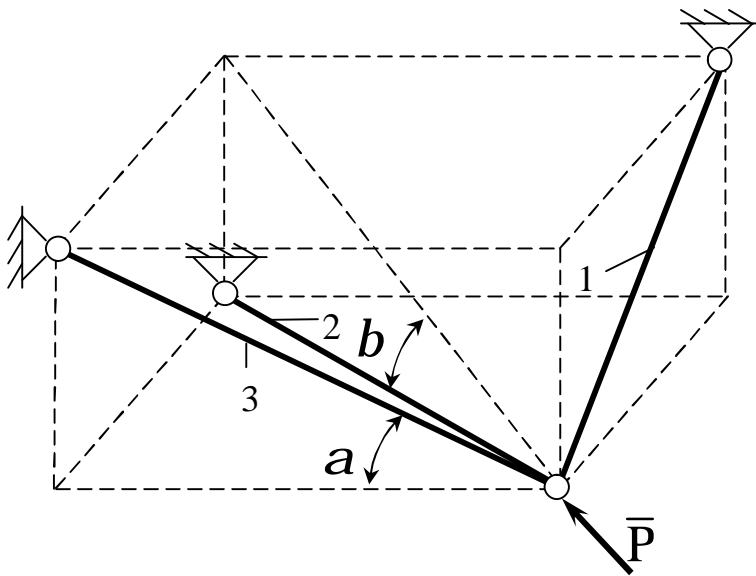
23



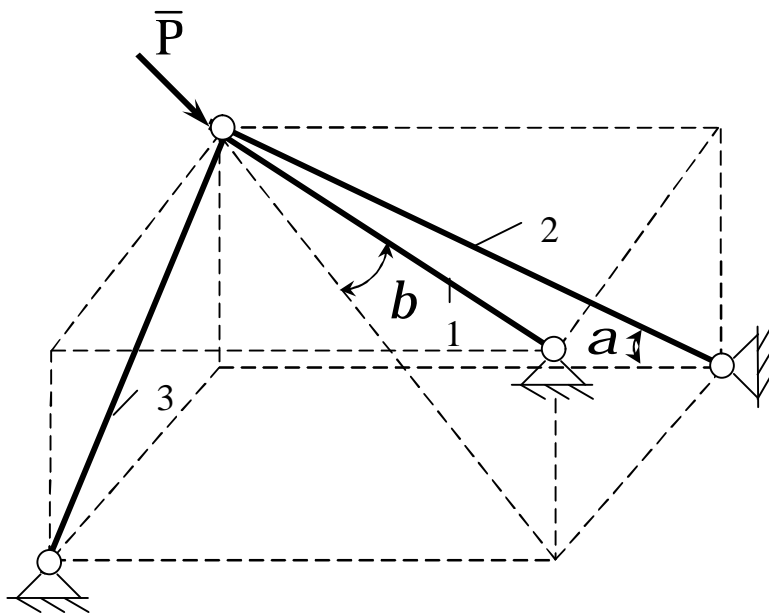
24



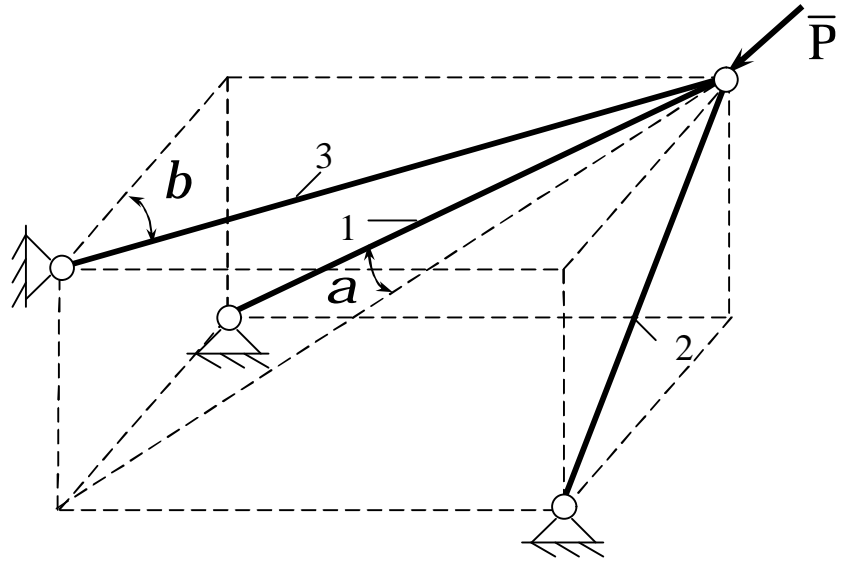
25



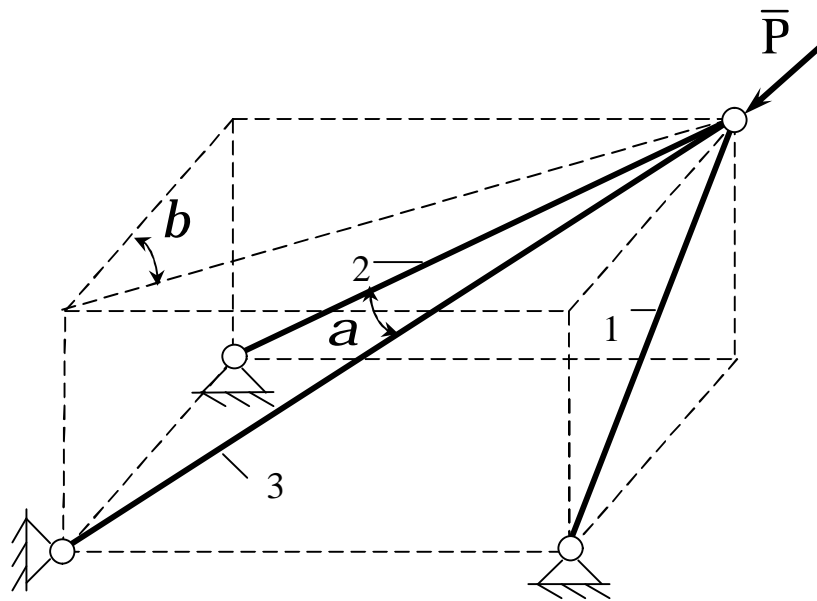
26



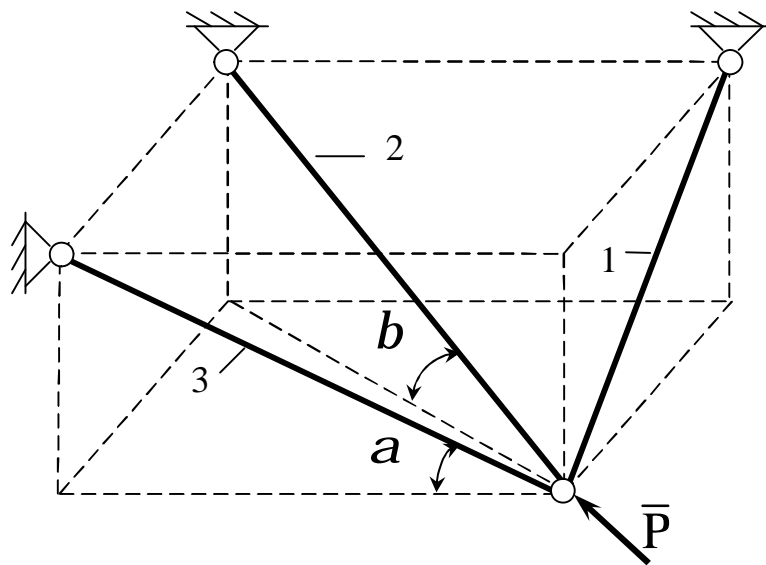
27

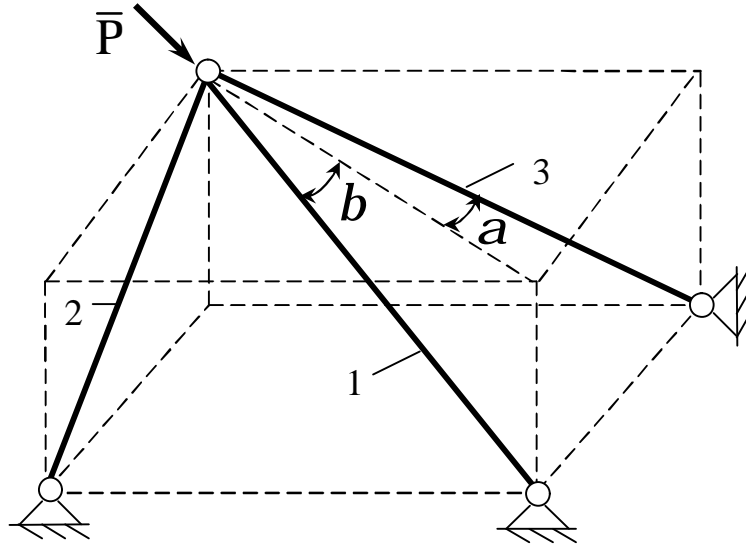


28



29





2 СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНИХ СИЛ

2.1 Алгебраїчний і векторний моменти сили відносно точки і осі. Момент пари сил

Якщо під дією прикладеної сили тіло може здійснювати оберт навколо деякої точки, то момент сили відносно цієї точки характеризує обертальний ефект сили.

Розглянемо силу \vec{F} , прикладену до тілу в точці A (рис. 2.1) із деякого центра O опустимо перпендикуляр на лінію дії сили \vec{F} . Довжину h цього перпендикуляра звать плечем сили \vec{F} відносно точки (центра). Момент сили відносно точки O визначається:

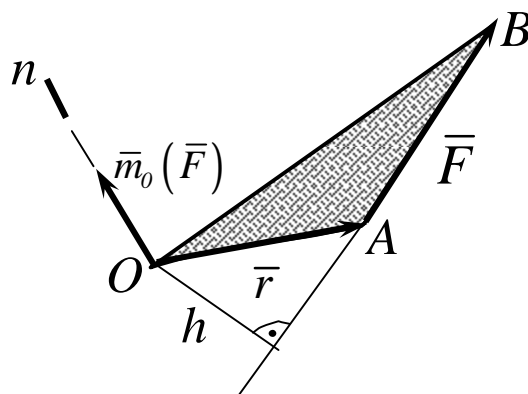


Рисунок 2.1

1. Модулем (величиною) моменту, рівним добутку сили \bar{F} на плече сили відносно моментної точки

$$|\bar{m}_o(\bar{F})| = Fh = 2 \text{ і } \ddot{\Delta}OAB \quad (2.1)$$

де $|\bar{m}_o(\bar{F})|$ – модуль векторного моменту сили \bar{F} відносно точки O – $\bar{m}_o(\bar{F})$.

2. Положенням у просторі площини OAB : “Площини повороту”, яка проходить через центр O і силу \bar{F} .

3. Напрямком повороту в цієї площині.

Таким чином, момент сили відносно центра характеризується не тільки його численним значенням, але і напрямком у просторі, тобто являється величиною векторною.

Напрявлений момент сили відносно центра перпендикулярно до площини, що проходить через точку O і лінію дії сили, в той бік, звідки “обертання” тіла під дією сили навколо точки або найкоротший поворот вектора \bar{r} до напрямку вектора \bar{F} бачить спостерігач, який перебуває на кінці вектора-моменту (рис.2.2, рис.2.3).

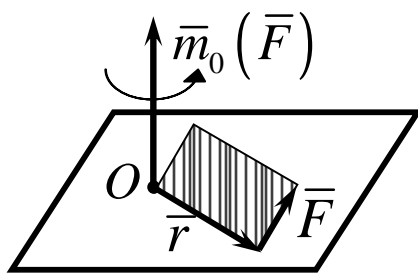


Рисунок 2.2

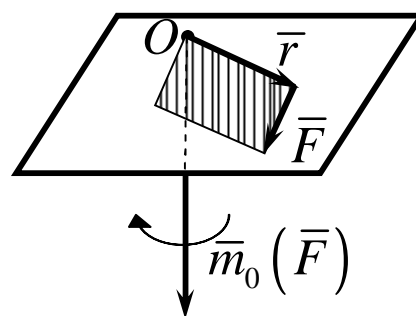


Рисунок 2.3

Алгебраїчним моментом сили відносно точки звать обрану зі знаком плюс або мінус скалярну величину, яка дорівнює добутку модуля сили на плече сили. Тобто алгебраїчний момент являється модулем векторного моменту. Знак алгебраїчного моменту визначається в залежності від напрямку

“оберту” тіла під дією сили навколо моментної точки (рис.2.4, рис.2.5).

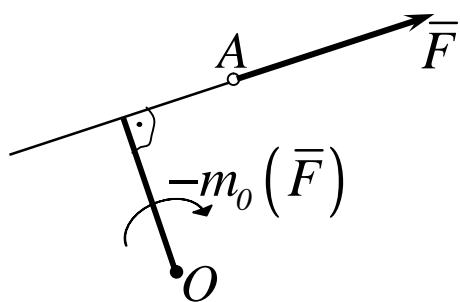


Рисунок 2.4

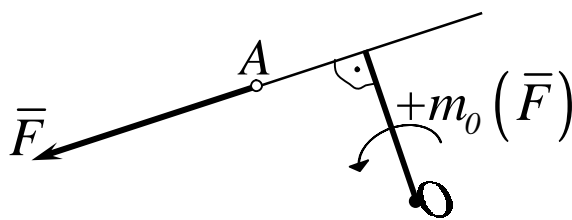


Рисунок 2.5

Моментом сили відносно осі називається проекція на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки, що лежить на цій осі (рис.2.6).

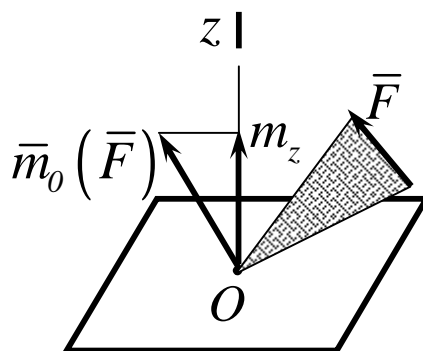


Рисунок 2.6

Другий метод визначення моменту сили відносно осі виникає із наступного приділення цього моменту: моментом сили відносно осі звать алгебраїчний момент проекції цієї сили на площину, перпендикулярну осі, відносно точки перехрещення осі з цією площиною (рис.2.7).

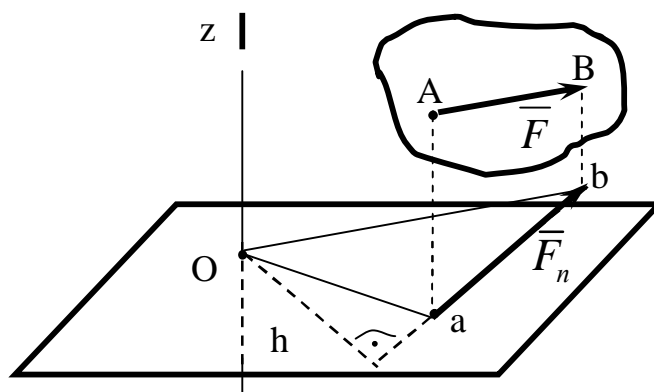


Рисунок 2.7

Відповідно цьому визначенню,

$$m_z(\bar{F}) = m_o(\bar{F}_i) = \pm h F_i, \quad (2.2)$$

де \bar{F}_n - вектор проекції сили \bar{F} на площину Π , перпендикулярну осі Oz , а точка O – точка перехрещення осі Oz з площиною Π .

Із формули (2.2) можна отримати наступні важливі якості моменту сили відносно осі:

- 1 Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила паралельна осі.
- 2 Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила перетинає ось.

Третій засіб визначення моменту сили відносно осі можна залучити за допомогою властивості векторів.

Якщо сила \bar{F} задана своїми проекціями F_x, F_y, F_z на вісі координат і задані координати x, y, z точки прикладення цієї сили (рис.2.8), то векторний момент відносно початку координат відповідає формулі :

$$\bar{m}_o(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} \quad (2.3)$$

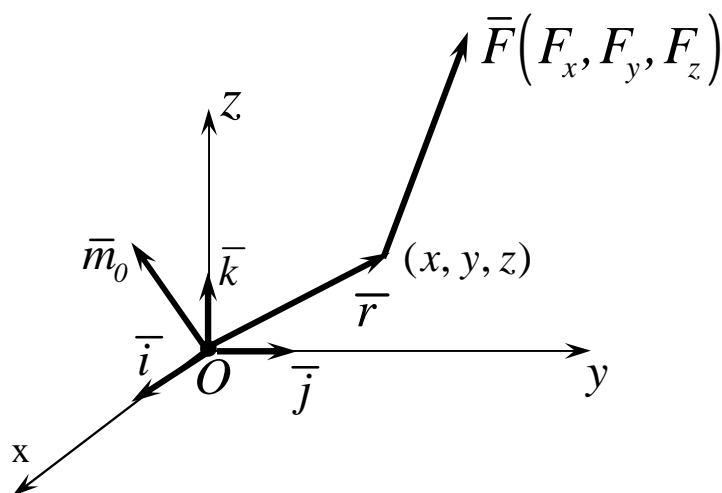


Рисунок 2.8

Розкладемо векторну формулу (2.3) по осям координат

$$\begin{aligned} \bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{m}_0 = \bar{r} \times \bar{F} &= \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \\ &= (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – одиничні вектори, напрямлені по осям координат.

Завдяки формулі (2.4), можна виділити проєкції $\bar{m}_0(\bar{F})$ на вісі координат:

$$\left. \begin{aligned} m_x(\bar{F}) &= yF_z - zF_y; \\ m_y(\bar{F}) &= zF_x - xF_z; \\ m_z(\bar{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

2.2 Алгебраїчний і векторний моменти пари сил

Властивості сили як вектора не обмежуються тільки цим поняттям наряду з поняттям сили. В механіці використовують поняття пари сил.

Парою сил називають систему двох рівних по модулю паралельних сил, напрямлених у протилежні боки (рис.2.9, 2.10).

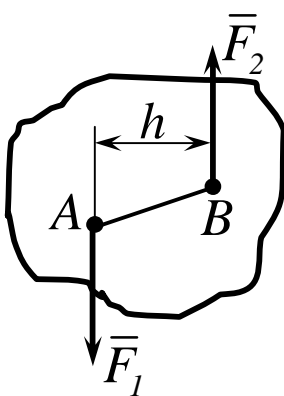


Рисунок 2.9

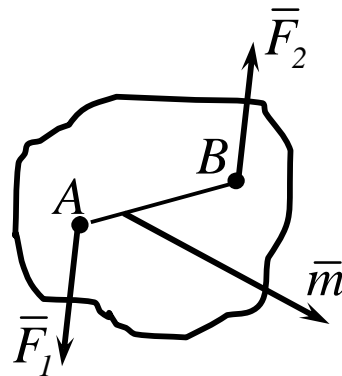


Рисунок 2.10

Система сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , утворюючих пару не знаходиться в рівновазі, тому, що вони не напрямлені вздовж однієї прямої.

Площина, що проходить через лінії дії пари сил, зветься площиною дії пари.

Відстань h між лініями дії сил пари зветься плечем пари. Дія пари сил на тверде тіло зводиться до деякого обертального ефекту, який характеризується величиною, яку звать моментом пари. Цей момент визначається:

1 Модулем, рівним:

$$|\vec{m}| = Fh. \quad (2.6)$$

2 Положенням у просторі площини дії пари.

3 Напрямом повороту пари в цієї площині.

Таким чином, як і момент сили відносно центра, пара теж величина векторна. Пара сил відрізняється від моменту сили тим, що її вектор є вільним і може бути прикладений в любій точці тіла.

Алгебраїчний момент пари сил визначається добутком якої із сил пари на її плече, тобто

$$m = \pm F_1 h = \pm F_2 h. \quad (2.7)$$

На рис. 2.11, 2.12 показано, як обирається знак (плюс або мінус) пари сил.

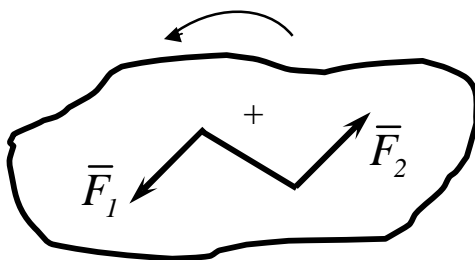


Рисунок 2.11

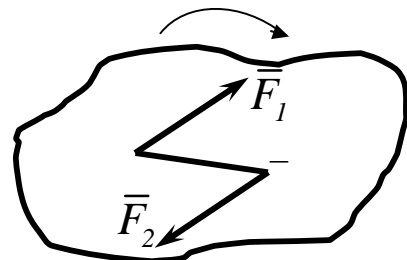


Рисунок 2.12

2.3 Векторні і аналітичні умови рівноваги системи паралельних сил

Умови рівноваги збіжної і паралельної систем сил є окремими випадками по відношенню до загального випадку, коли система сил є простора і довільна.

У випадку просторової системи збіжних сил умови їх рівноваги в векторній формі зводяться до рівняння нулю головного вектора, тобто математично $\bar{R} = 0$.

У цьому разі головний вектор системи сил з'являється водночас рівнодійною системи сил і тому головний момент системи дорівнює нулю. Тому аналітичні умови рівноваги висловлюються проекціями сил на три вісі координат:

$$\sum_i F_{ix} = 0; \quad \sum_i F_{iy} = 0; \quad \sum_i F_{iz} = 0. \quad (2.8)$$

Розглянемо другий окремий випадок, коли всі сили, що діють на тверде тіло, паралельні між собою (рис.2.13). У цьому разі можна напрямити одну з координатних осей (наприклад вісь Oz) паралельно силам.

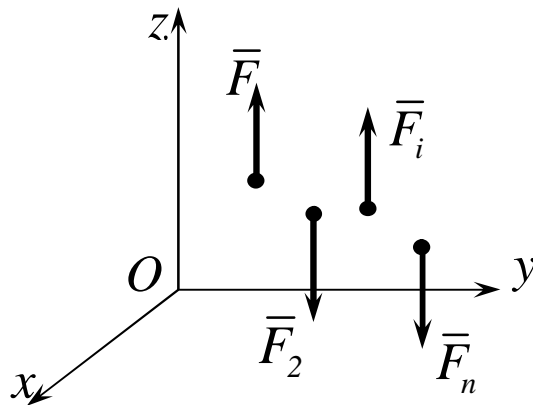


Рисунок 2.13

Тоді головний вектор \bar{R} буде водночас дорівнювати скалярній сумі проєкцій усіх сил на вісь Oz

$$\sum_i F_{iz} = 0. \quad (2.9)$$

Два перших рівняння (2.8) перетворюються в тотожності бо сили перпендикулярні осям Ox і Oy .

Оскільки сили паралельні осі Oz , то їхні моменти відносно цієї осі також дорівнюють нулю, і умови рівноваги системи паралельних сил кінцево зводяться до трьох рівнянь (2.10)

$$\sum_i F_{iz} = 0; \quad \sum_i m_x(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_i m_y(\bar{F}_i) = 0, \quad (2.10)$$

Якщо система паралельних сил плоска, то рівняння (2.10) перетворюються в рівняння (2.11)

$$\sum_i F_{iy} = 0; \quad \sum_i m_o(\bar{F}_i) = 0, \quad (2.11)$$

В рівняннях (2.11) друге рівняння висловлює суму алгебраїчних моментів відносно будь-якої точки (центру) O , яка розташована в площині дії сил.

Розглянемо приклади розв'язання задач на умови рівноваги тіла під дією системи паралельних сил і пар сил.

Приклад 1

Однорідний стрижень AB , довжина якого 1 м , а вага 20 Н , підвішено горизонтально на двох паралельних вірвовках AC і BD . К стрижню в точці E на відстані $AE = 1/4\text{ м}$ підвішено вантаж $P = 120\text{ Н}$. Визначити натяг вірвовок T_A і T_B (рис.2.14).

Рішення

Для вирішення задачі в загальному виді позначимо довжину стрижня – l , а його вагу Q . Вантаж P на рисунку 2.14 не показаний.

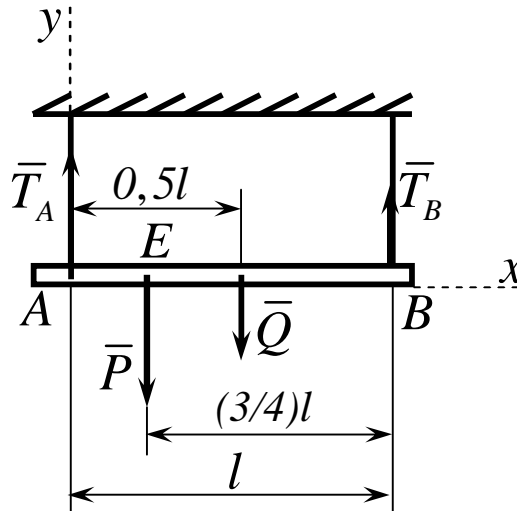


Рисунок 2.14

Так як система сил паралельна і плоска, то умови її рівноваги містять два рівняння. Складемо їх.

$$\sum_i F_{iy} = 0; T_A + T_B - P - Q = 0, \quad (2.12)$$

$$\sum_i m_A(\bar{F}_i) = 0; T_B l - 0,5Ql - 0,25Pl = 0, \quad (2.13)$$

Розрахуємо рівняння (2.13) відносно невідомої T_B , враховуючи те, що l в цьому рівнянні є:

$$T_B = 0,5q + 0,25P = 0,5 \cdot 20 + 0,25 \cdot 120 = 10 + 30,$$

відкіля $T_B = 40 \text{ Н}$.

З рівняння (2.12) отримуємо

$$T_A = P + Q - T_B = 120 + 20 - 40, \text{ відкіля } T_A = 100 \text{ Н}.$$

Приклад 2

На консольну горизонтальну балку діє пара сил з моментом $M = 6 \text{ Н} \cdot \text{м}$, а в точці C вертикальне навантаження $P = 2 \text{ кН}$. Довжина балки $AB = 3,5 \text{ м}$, винос консолі вантажу $P = 2 \text{ кН}$, винос кон-

солі $BC = 0,5$ м. . Визначить реакції опор (рис.2.15).

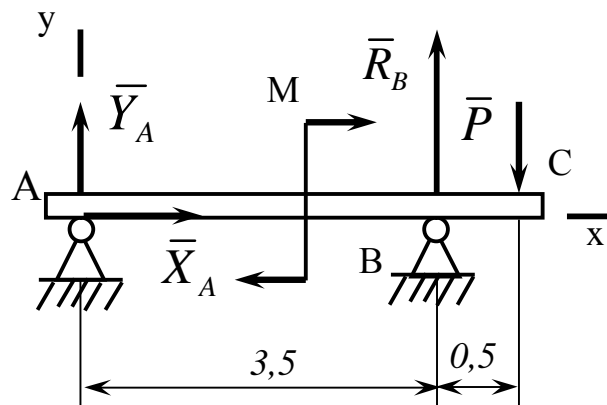


Рисунок 2.15

Рішення

Оскільки на балку діє паралельна система зовнішніх сил, яка напрямлена паралельно осі Y , то горизонтальна реакція нерухомого циліндричного шарніру \bar{X}_A дорівнює нулю. Складемо рівняння рівноваги систем паралельних сил, діючих на балку.

$$\sum_i F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - P = 0, \quad (2.14)$$

$$\sum_i m_A(\bar{F}_i) = 0; \quad R_B \cdot AB - M - P(AB + BC) = 0, \quad (2.15)$$

З рівняння (2.15) отримуємо:

$$R_B = \frac{M + P(AB + BC)}{AB}. \quad (2.16)$$

Розрахуємо рівняння (2.14) відносно невідомої реакції Y_A і підставимо в отримане рівняння значення R_B :

$$Y_A = P - R_B; \quad Y_A = P - \frac{M + P(AB + BC)}{AB}. \quad (2.17)$$

Підставимо чисельні значення в рівняння (2.17):

$$Y_A = 2 - \frac{6 + 2(3,5 + 0,5)}{3,5} = 2 - 4 = -2 \text{ кН}.$$

Реакція Y_A є повною реакцією в'язі A бо X_A дорівнює нулю. Таким чином $R_A = -2 \text{ кН}$, тобто ця реакція направлена вниз. Реакція R_B відповідно рівнянню (2.16) є такою:

$$R_B = \frac{6 + 2(3,5 + 0,5)}{3,5} = 4, \quad R_B = 4 \text{ кН}.$$

Приклад 3

На двоконсольну горизонтальну балку діє пара сил (\bar{P}, \bar{P}) . На ліву консоль – рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q , а в точці D правої консолі – вертикальне навантаження \bar{F} . Визначити реакції опор, якщо $P = 1 \text{ кН}$, $F = 2 \text{ кН}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $a = 0,8 \text{ м}$ (рис.2.16).

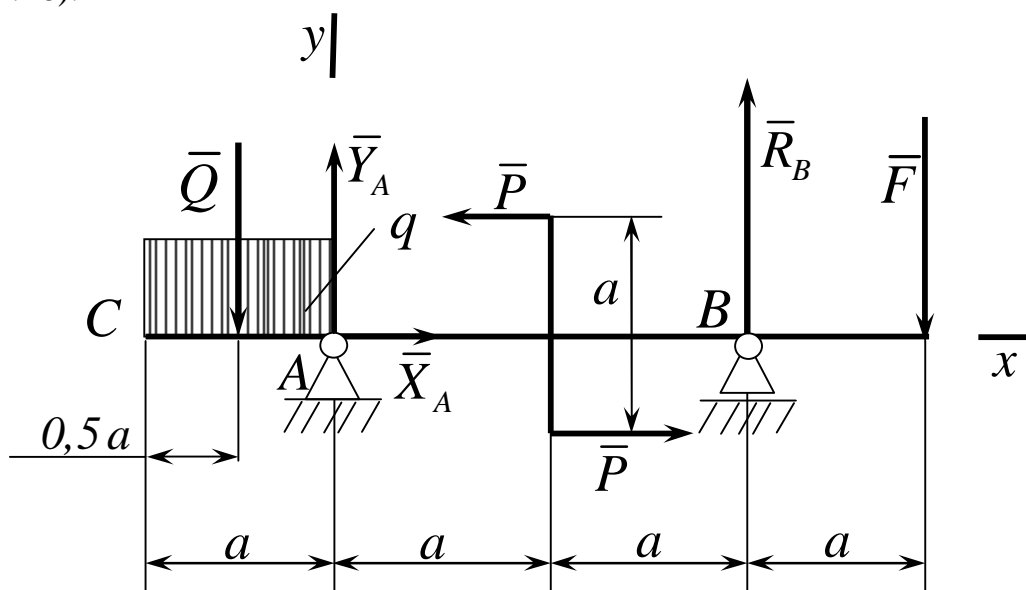


Рисунок 2.16

Рішення

Нанесемо на рис.2.16 реакції в'язей і замінимо розподілене навантаження інтенсивності q рівнодійною \bar{Q} , яка по модулю дорівнює qa і прикладена посередині консолі AC .

Горизонтальна складова реакції нерухомого циліндричного шарніра $A - X_A$ тотожно дорівнює нулю, оскільки система зовнішніх сил є паралельною системою відносно осі Y . Складемо рівняння рівноваги системи паралельних сил зображеної на рис. 2.16.

$$\sum_i F_{iy} = 0; Y_A + R_B - Q - F = 0, \quad (2.18)$$

$$\sum_i m_A(\bar{F}_i) = 0; Q \cdot 0,5a + Pa + R_B \cdot 2a - F \cdot 3a = 0. \quad (2.19)$$

Розрахуємо рівняння (2.19) відносно невідомої реакції в'язі R_B , враховуючи те що a є загальним добутком рівняння (2.19)

$$R_B = (3F - 0,5Q - P)/2. \quad (2.20)$$

Підставимо численні значення в рівняння (2.20)

$$R_B = \frac{3 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2 \cdot 0,8}{2} = 0,5 \cdot 5,2; R_B = 2,6 \text{ кН.}$$

Із рівняння (2.18) маємо:

$$Y_A = R_A = Q + F - R_B = 2 \cdot 0,8 + 2 - 2,6; R_A = 1 \text{ кН.}$$

2.4 Контрольні завдання для самостійної роботи

- 1 Визначити вертикальні реакції опор, на які вільно оперта у своїх кінцях горизонтальна балка довжиною l , інтенсивність рівномірного навантаження дорівнює q . Вагу балки рахувати включеною в рівномірно розпо-

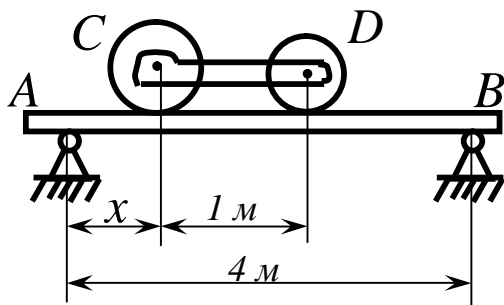
ділене навантаження.

Відповідь: $R_1 = R_2 = \frac{qlH}{2}$.

2 Визначити вертикальні реакції опор горизонтальної балки довжиною l , якщо вантаж P поміщений на ній на відстані x від першої опори.

Відповідь: $R_1 = P \frac{l-x}{l}$; $R_2 = P \frac{x}{l}$.

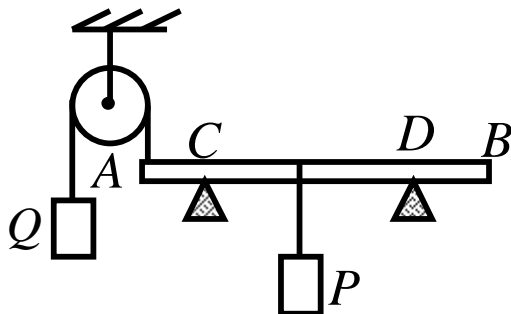
3



На горизонтальній балці, яка лежить на двох опорах, відстань між якими 4 м , розташовані два вантажі. Один C вагою 2 кН , другий D вагою 1 кН , так, що реакція опори A в два рази більше реакції опори B , якщо нехтувати вагою балки. Відстань CD між вантажами 1 м . Яка відстань x вантажу C від опори A ?

Відповідь: $x = 1\text{ м}$.

4



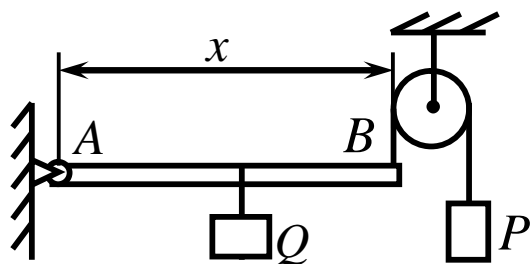
Балка AB довжиною 10 м і вагою 2 кН лежить на двох опорах C і D . Опора C відстоїть від кінця A на 2 м , опора D від кінця B - на 3 м .

Кінець балки A відтягується вверх за допомогою перекинутого че-

рез блок троса, на якому підвішений вантаж Q вагою 3 кН . На відстані 3 м від кінця A до балки підвішено вантаж P вагою 8 кН . Визначити реакції опор, нехтуючи тертям на блоці.

Відповідь: $R_C = 3 \text{ кН}; R_D = 4 \text{ кН}$.

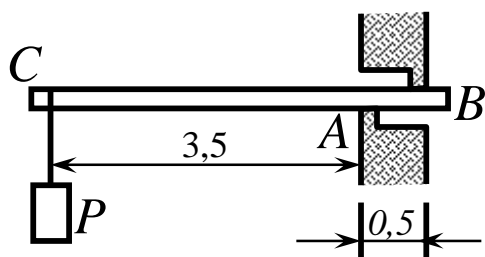
5



Горизонтальний стрижень AB вагою 100 Н може обертатися навколо нерухомої осі шарніра A . Кінець B відтягується до гори за допомогою перекинутої через блок нитки, на яку підвішена гиря вагою $P = 150 \text{ Н}$. На відстані 20 см від кінця B , підвішений вантаж Q вагою 500 Н . Визначити довжину x стрижня AB , якщо він знаходиться в рівновазі?

Відповідь: $x = 25 \text{ см}$.

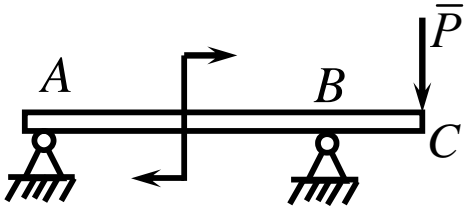
6



Однорідна горизонтальна балка довжиною 4 м і вагою 5 кН закладена в стіну, товщина якої дорівнює $0,5 \text{ м}$, так, що опирається на неї в точках A і B . Визначити реакції в цих точках, якщо до вільного кінця балки підвішено вантаж P вагою 40 кН .

Відповідь: $R_A = 340 \text{ кН}$ – ввєрх; $R_B = 295 \text{ кН}$ – ввниз.

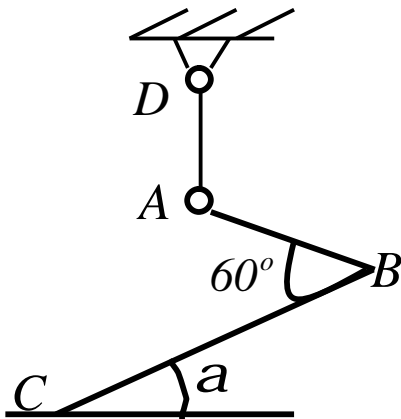
7



На консольну горизонтальну балку діє пара сил з моментом $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, а в точці C вертикальне навантаження $P = 2 \text{ кН}$. Довжина прольоту балки $AB = 3,5 \text{ м}$, винос консолі $BC = 0,5 \text{ м}$. Визначити реакції опор.

Відповідь: $R_A = 2 \text{ кН}$ – вниз; $R_B = 4 \text{ кН}$ – вверх.

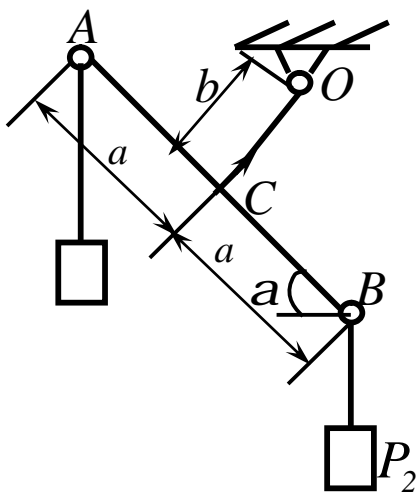
8



Два однакових стрижня AB і BC однакового перетину, із яких AB двічі коротше BC , з'єднані своїми кінцями під кутом 60° , утворюють ломаний важіль ABC . У кінця A важіль підвішено на нитці AD . Визначити кут a , що утворює стержень BC із горизонтом.

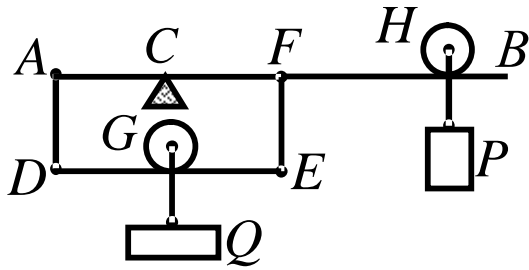
Відповідь: $\text{tga} = \frac{\sqrt{3}}{5}$; $a = 19^\circ 5'$.

9



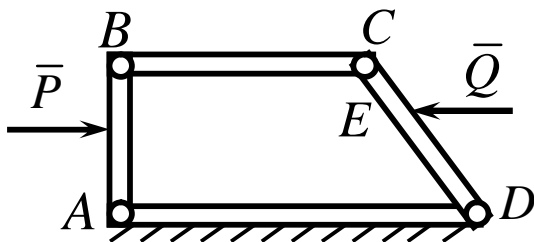
Два стрижня AB і OC , вага одиниці довжини яких дорівнює $2p$, скріплені під прямим кутом в точці C . Стрижень OC може обертатись навколо горизонтальної осі O . $AC = CB = a$, $OC = b$. В точках A і B підвішені гирі, вага яких P_1 і P_2 ($P_2 > P_1$). Визначити кут a нахилу стрижня AB до горизонту в стані рівноваги.

Відповідь: $\text{tga} = \frac{a}{b} \cdot \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1 + (4a + b)p}$.



Диференціальний важіль складається із стержня AB , який має нерухому опорну призму в точці C , і перекладини DE , з'єднані з важелем AB за допомогою стержнів AD і EF із шарнірами на кінцях. Вантаж $Q = 1 \text{ кН}$ підвішено до перекладки в точці G за допомогою призми. Відстань між вертикалями, проведеними через точки C і G , дорівнює 1 м . Визначити вагу гирі P , яку необхідно підвісити в точці H на відстані $CH = 1 \text{ м}$ для того, щоб зрівноважити вантаж Q . Тертям знехтувати.

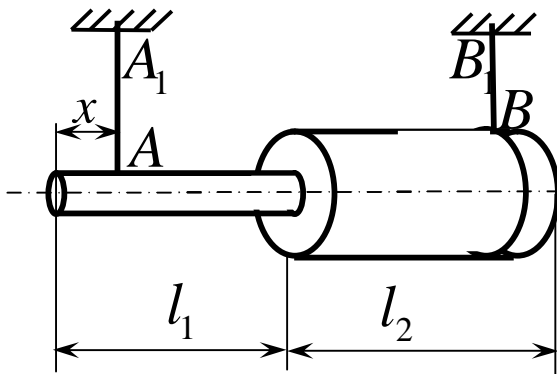
Відповідь: $P = 10 \text{ Н}$.



У шарнірному чотирланковому механізмі ланка BC паралельна нерухомій ланці AD . Ланка $AB = h$ перпендикулярна AD . Посередині AB прикладена горизонтальна сила \bar{P} . Яку горизонтальну силу \bar{Q} слід прикласти до ланки CD в точці E , якщо $CE = CD/4$, щоб механізм був у рівновазі? Знайти реакцію в шарнірі D . Вагою ланок знехтувати.

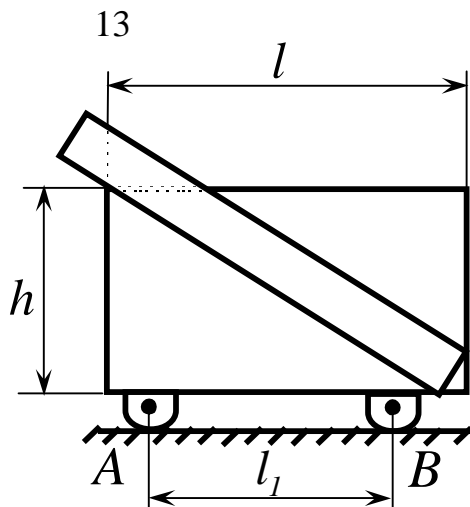
Відповідь: $Q = \frac{2P}{3}$; $R_D = \frac{P}{6}$ і напрямлені вправо за AD .

12



Бетонний стовп, складений з двох частин підвішена на вертикальних тросах AA_1 і BB_1 так, що вісь стовпа горизонтальна. Вага лівої частини стовпа $P_1 = 2 \text{ тН}$, довжина $l_1 = 1,5 \text{ м}$, вага правої частини $P_2 = 3 \text{ тН}$, довжина $l_2 = 1,25 \text{ м}$. Визначити, на якій відстані x від лівого кінця стовпа має бути трос AA_1 , щоб натяг тросів був однаковий.

Відповідь:
$$x = \frac{P_2 l_1 - P_1 l_2}{P_1 + P_2} = 0,4 \text{ м.}$$



На вагонетці вагою Q лежить однорідна балка, довжина якої L , вага P , при цьому частина балки виступає за кузов вагонетки. Визначити тиск кожного з чотирьох коліс вагонетки на рейки, якщо відстань осями вагонетки дорівнює l_1 , висота кузова h , а довжина l .

Відповідь:
$$R_A = \frac{1}{4}(P + Q) + \frac{Pl}{4l_1} \left[\frac{L}{\sqrt{h^2 + l^2}} - 1 \right],$$

$$R_B = \frac{1}{4}(P + Q) - \frac{Pl}{4l_1} \left[\frac{L}{\sqrt{h^2 + l^2}} - 1 \right].$$

14 Однорідна прямокутна пластина $ABCD$ масою 100 г , сторони якої $AB = 3 \text{ см}$, $AD = 18 \text{ см}$, розміщена у вертикальній площині над горизонтальною віссю Ax так, що ребро AD піднято на кут 15° від осі Ax . Пластина вдержується в рівновазі шарнірною опорою A і вертикальним стрижнем BB_1 . Визначить реакції цих опор.

Відповідь: $R_A = 11,7 \text{ Н}$, $R_B = 10,7 \text{ Н}$.

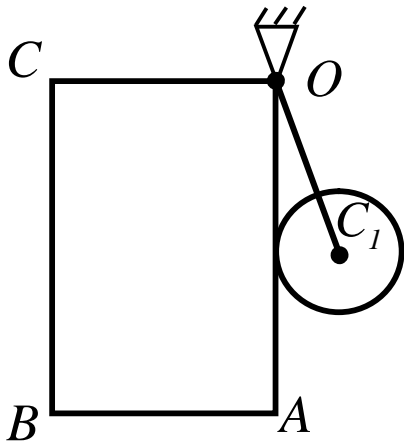
15 Однорідна пластинка має форму трапеції $ABCD$, верхня сторона якої AB і нижня DC горизонтальні, $\angle BAD = 90^\circ$, $DC = a$, $AB = a + b$. Визначити положення гладенької горизонтальної осі обертання O на стороні AB пластинки при її рівновазі.

Відповідь: $OA = \frac{3a^2 + 3ab + b^2}{3(2a + b)}$.

16 Однорідний стрижень AOB зігнуто в точці O під прямим кутом. $OA = a_1$, $OB = a_2$. Стрижень AOB підвісили до гладенької горизонтальної осі Ox , перпендикулярній до його площини. Визначити, під яким кутом α відхилена від вертикалі сторона OA .

Відповідь: $\alpha = \arctg \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2$.

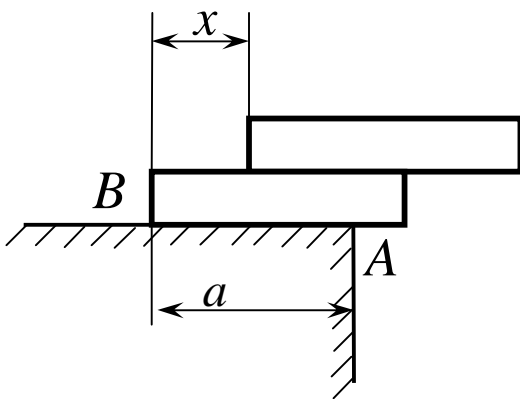
17



Однорідна прямокутна пластинка і однорідний диск радіуса R , які мають однакову товщину і виготовлені з одного матеріалу, підвішені до горизонтальної осі O . Диск підвішений за допомогою стрижня OC_1 . При цьому сторона OA пластинки стала вертикальною. Визначити довжину OA , якщо $AB = a$.

Відповідь: $AO = \frac{2pR^3}{a^2}$.

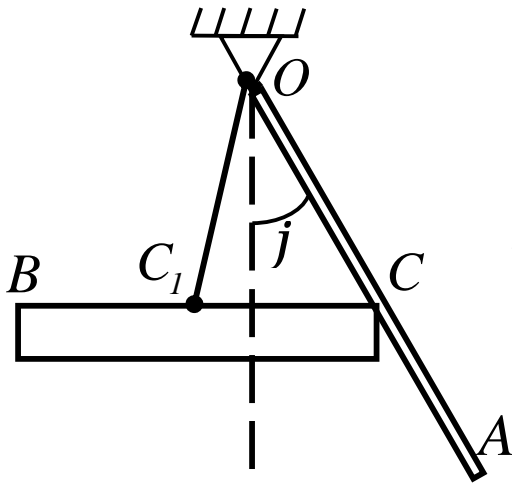
18



Частина однорідної горизонтальної плити, вага якої P_1 і довжина l_1 , нависає над Щр підлогою. На цій плиті лежить друга плита, вага якої P_2 і довжина l_2 . Визначити, на якій відстані x від лівого кінця нижньої плити розміщений лівий кінець верхньої плити при їх рівновазі, якщо $AB = a$.

Відповідь: $x \leq \frac{l}{P_2} \left[a(P_1 + P_2) - \frac{l}{2}(P_1 l_1 + P_2 l_2) \right]$.

19

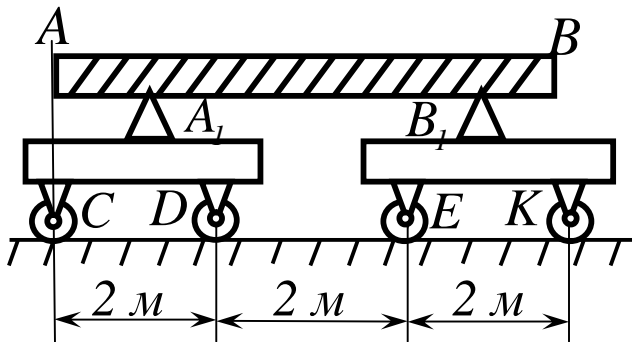


Однорідний стержень BC , довжина якого $2l_1$ і вага P_1 , підвішений в точці C за допомогою невагомго стержня OC_1 так, що виконується умова $BC_1 = C_1C$. Кінцем C стержень BC упирається в однорідний стержень OA , довжина якого $2l_2$, вага P_2 . Визначити кут j при якому система знаходиться в рівновазі, якщо кінець C стержня BC , розташованого горизонтально, збігається з центром ваги стержня OA .

$$\sin j = \frac{P_1 l_1}{l_2 (P_1 + P_2)}$$

Відповідь:

20



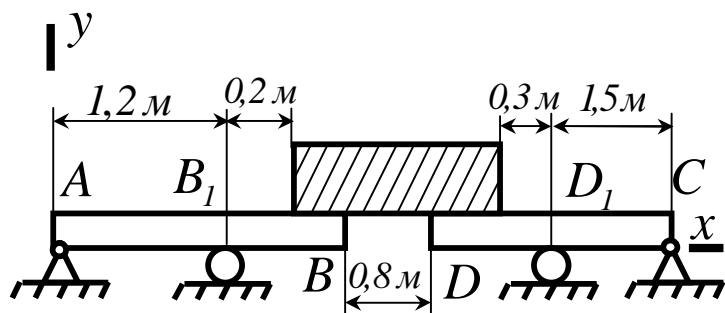
Однорідна балка AB , довжина якої 8 м і вага $3,6\text{ Т}$, лежить вільно на двох опорах A_1 і B_1 , розміщених на двох візках. Вага кожного візка дорівнює $0,4\text{ Т}$. Визначити тиск пар коліс C, D, E, K на рейки.

$$AA_1 = 0,8\text{ м}, \quad B_1B = 2,8\text{ м}$$

кінець балки і вісь C колеса розміщені на одній вертикалі.

$$N_C = 5,89\text{ кН}, \quad N_D = 3,93\text{ кН},$$

$$\text{Відповідь: } N_E = 10,47\text{ кН}, \quad N_K = 15,71\text{ кН}.$$

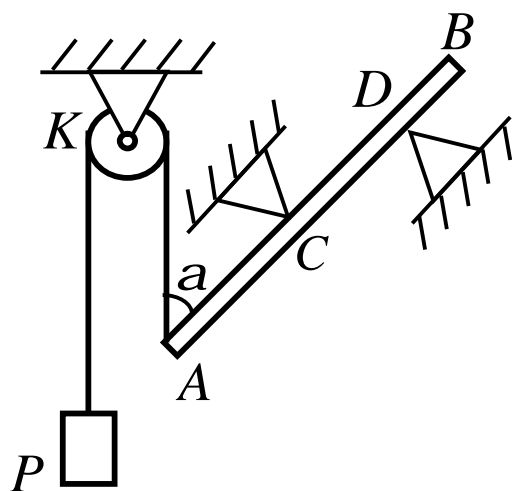


Балки AB і DC , вагою яких можна знехтувати, шарнірно прикріплені до опор A і C і підтримуються гладенькими опорами B_1 і D_1 . На балках стоїть ящик, вага якого 6êI . Визначити реакції опор балок, вважаючи, що центр ваги ящика однаково віддалений від B і D .

Відповідь:

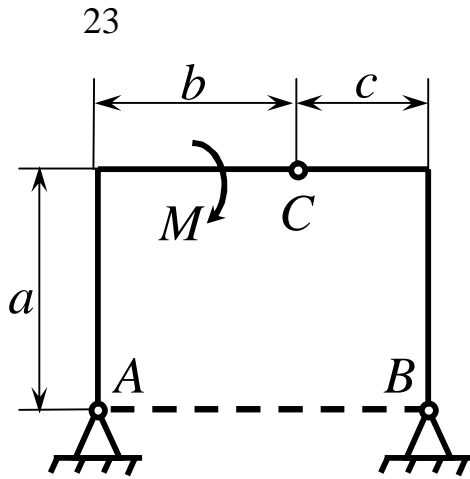
$$X_A = X_C = 0, Y_A = -0,5\text{êI} ; Y_C = -0,6\text{êI} ;$$

$$R_{B_1} = 3,5\text{êI} ; R_{D_1} = 3,6\text{êI} .$$



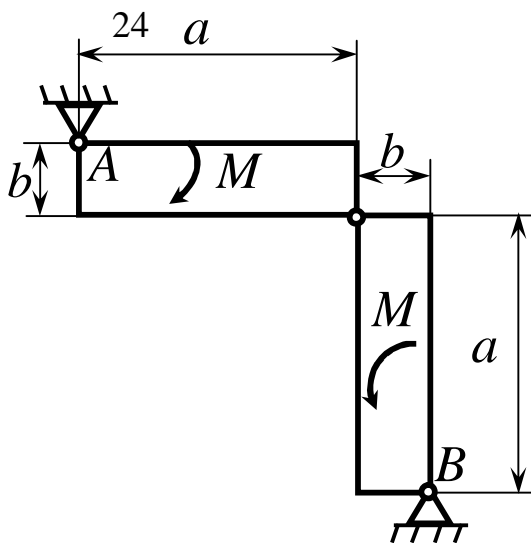
Однорідний гладенький стрижень AB , довжина якого l і вага P , затиснутий між опорами C і D . До кінця A стрижня прикріплено нитку, перекинуту через блок K . До другого кінця нитки прив'язано вантаж вагою P . Визначити реакції опор C і D при рівновазі стрижня, якщо $CD = l/3$, $\angle BAK = a$, частина нитки AK вертикальна.

Відповідь: $R_D = R_C = \frac{3}{2} P \sin a$.



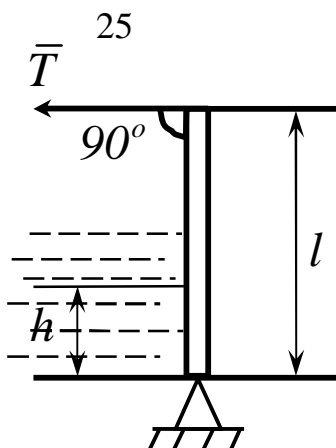
До лівої частини тришарнірної арки прикладена пара сил, момент якої за модулем дорівнює M . Нехтуючи вагою арки, визначити реакції шарнірних опор A і B .

Відповідь: $R_A = R_B = \frac{M\sqrt{a^2 + c^2}}{a(b+c)}$.

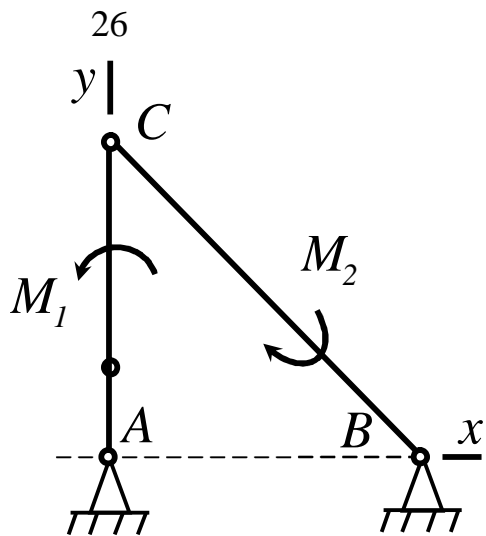


Дві однакові прямокутні пластинки скріплені між собою шарніром C і шарнірно прикріплені до опор A і B . У площині цих пластинок діють пари сил, напрями обертання яких протилежні. Момент кожної пари сил за модулем дорівнює M ; $a \geq b$. Нехтуючи вагою пластинок, визначити реакції шарнірних опор A і B .

Відповідь: $R_A = \frac{M\sqrt{2}}{a-b}$ напрямлена вздовж AB вниз; $R_B = -R_A$.

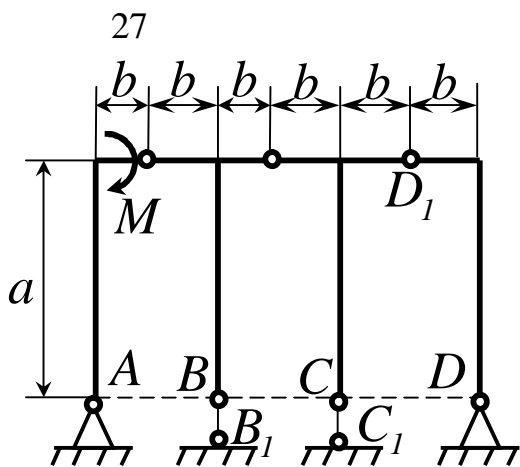


Визначити силу T натягу тросів, яка потрібна для того, щоб утримувати у вертикальному положенні прямокутний щит висотою $l=0,8\text{ м}$ і шириною $b=2\text{ м}$, якщо рівень води $h=0,6\text{ м}$.
Відповідь: $\bar{O} = 900\text{ Н}$.



Стрижні AC і BC , вагою яких можна знехтувати, шарнірно прикріплені до опор A і B і також шарнірно скріплені на кінцях C . До стрижнів AC і BC прикладені пари сил, моменти яких дорівнюють за модулем відповідно M_1 і M_2 , а напрями обертання протилежні. Визначати реакції опор A і B , якщо $AB = l, AC = l_1$.

Відповідь: $X_A = -X_B = -\frac{M_1}{l_1}; Y_A = -Y_B = \frac{M_1 - M_2}{l}$.

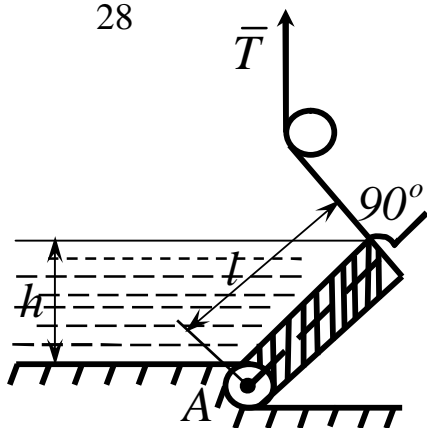


Дано систему, що складається з трьох однакових тришарнірних арок. До крайньої половини лівої арки прикладена пара сил, момент якої за модулем дорівнює M . Нехтуючи вагою системи, визначити реакції опор A, B, C, D .

$$R_A = \frac{M\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}, R_B = \frac{M}{b},$$

Відповідь: $R_C = -R_B, R_D = -R_A$.

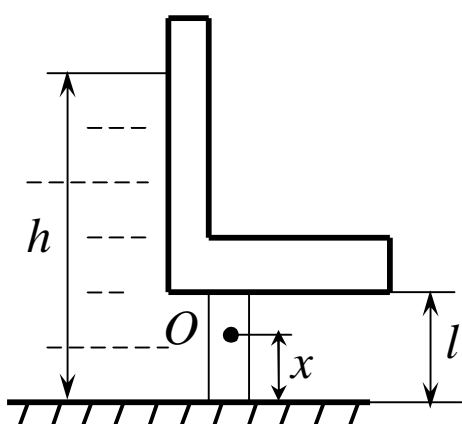
28



Клапановий затвор AB , що має плоску поверхню $l \times b = 2,5\text{ м} \times 12\text{ м}$, стримує напір води $h = 2\text{ м}$. Нехтуючи вагою затвору і тертям, визначити реакцію цапф A і силу T натягу тросів, що вдержують затвор у такому положенні.

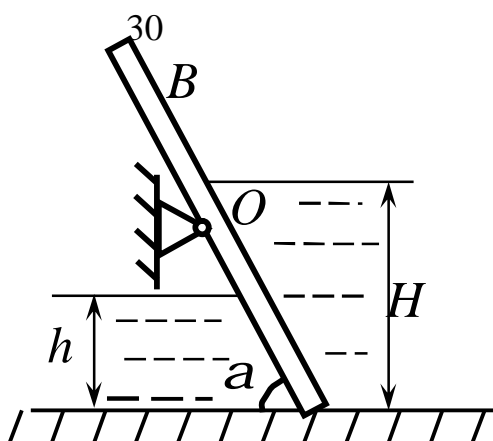
Відповідь: $R_A = 200\text{ кН}$, $T = 100\text{ кН}$.

29



Прямокутний поворотний затвор висотою $l = 1,5\text{ м}$ перекриває вихід з резервуара. Визначити, на якій відстані x від дна резервуара слід розмістити його вісь повороту O , щоб для відкривання затвора треба було подолати тільки момент сил тertia в цапфах O , якщо рівень води $h = 4,5\text{ м}$.

Відповідь: $x = \frac{l}{3} \cdot \frac{3h - 2l}{2h - l} = 0,7\text{ м}$.



Прямокутний щит AB іригаційного каналу може обертатися навколо осі O . Рівень води зліва від щита h . Нехтуючи тертям і вагою щита, знайти положення осі O , при якому підйом рівня води вище \dot{H} зумовив би автоматичне перекидання щита. Кут a вважати відомим.

Відповідь: $OA = \frac{H^3 - h^3}{3(H^2 - h^2) \sin a}$.

2.5 Центр паралельних сил. Центр ваги тіл і його визначення

Припустимо, що до твердого тіла в точках A і B прикладені дві паралельні сили \bar{P} і \bar{Q} (рис. 2.17). Тоді рівнодійна \bar{R} цих сил буде паралельна даним силам і буде дорівнювати їх алгебраїчній сумі, а лінія її дії розділить пряму AB в точці C так, що $BC/AC = P/Q$. Якщо сили \bar{P} і \bar{Q} повернути в площині їх дії на будь-який кут навколо точок їх прикладення, як показано пунктиром на рис. 2.17, то рівнодійна \bar{R} теж повернеться на кут a , і її лінія дії буде проходити знову через точку C . Таким чином, видно, що точка C буде єдиною точкою, через яку проходить рівнодійна прикладених в точках A і B сил \bar{P} і \bar{Q} , незалежно від їх напрямку. Така точка зветься центром двох паралельних сил.

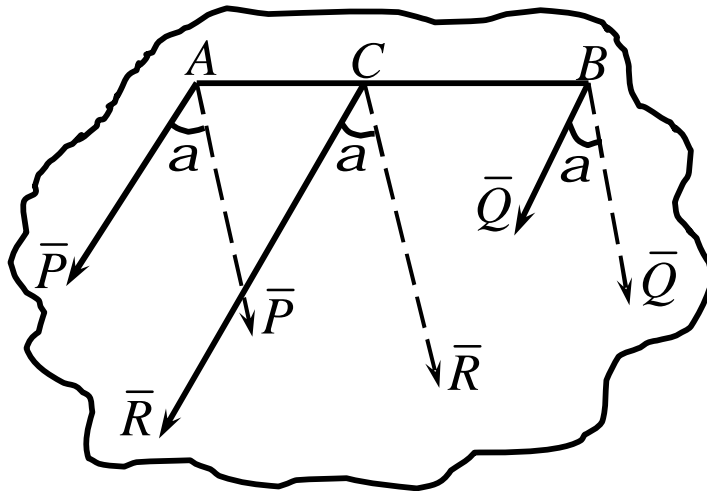


Рисунок 2.17

Якщо маємо три паралельні сили $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ (рис. 2.18), прикладені відповідно в точках A_1, A_2, A_3 то тоді знаходимо спочатку центр C_1 для сил \bar{F}_1 і \bar{F}_3 як було показано раніше. Прикладаємо рівнодійну \bar{R}_1

сил \bar{F}_1 і \bar{F}_2 в точці C_1 . Потім таким же чином знаходимо центр C_1 двох паралельних сил \bar{R}_1 і \bar{F}_3 . Ця точка і буде з'являється шуканим центром паралельних сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, діючих відповідно в точках A_1, A_2, A_3 . Очевидно, таке складання можна виконати з будь-якою кількістю паралельних сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ прикладених відповідно в точках A_1, A_2, \dots, A_n . Відкіля слідує, що існує одна і тільки одна точка, через яку проходить рівнодійна сила незалежно від напрямку дії паралельних сил. Така точка зветься центром паралельних сил.

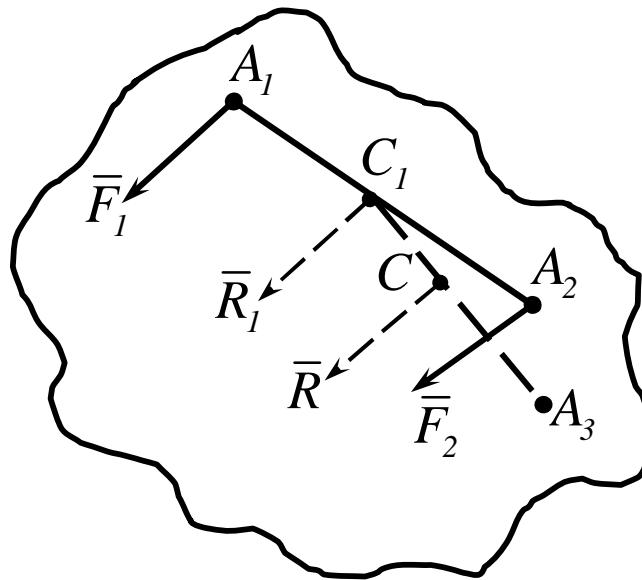


Рисунок 2.18

Визначають радіус – вектор центра паралельних сил:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (2.21)$$

У проекціях на вісі координат із (рис.2.18) отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i}, \\ y_C &= \frac{\sum_i y_i F_i}{\sum_i F_i}, \\ z_C &= \frac{\sum_i z_i F_i}{\sum_i F_i}. \end{aligned} \right\}$$

(2.22)

Якщо тверде тіло, розмірами якого можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, знаходиться в полі сил тяжіння, наприклад, поблизу земної поверхні, то з великим ступенем точності можна вважати, що сили ваги

$\square \bar{P}_i$ окремих часток (рис.2.19) тіла складають систему паралельних сил.

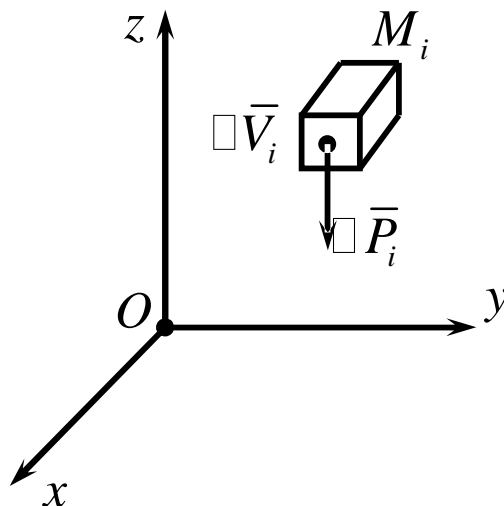


Рисунок 2.19

Нехай V - об'єм елементарного паралелепіпеда з центром у точці

M_i , а $\square \bar{P}_i$ – сила ваги, що діє на цей елемент ваги $\square m_i$. Тоді середньою густиною елемента цього об'єму називається відношення $\square m_i / \square V_i$.

Стягуючи паралелепіпед у точку M_i , дістанемо густину $g(x_i, y_i, z_i)$ в цій точці тіла як граничну середньої густини.

$$g(x_i, y_i, z_i) = \lim_{\square v_i \rightarrow 0} \frac{\square m_i}{\square v_i}. \quad (2.23)$$

Припустимо, що в центрі кожного паралелепіпеда прокладена сила ваги $\square \bar{P}_i$, модуль якої $\square \bar{P}_i = g g_i \square V_i$ тоді сила ваги $\square \bar{P}_i$, утворює систему паралельних сил, центр яких визначиться на основі формули 2.21, та формули 2.22 у вигляді:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_i \square P_i \bar{r}_i}{\sum_i \square P_i}. \quad (2.24)$$

За допомогою рівнянь (2.23) і (2.24) отримуємо

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(V)} g g(x, y, z) \bar{r} dv}{P} \quad (2.25)$$

або в проєкціях на координатні осі:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\int_{(V)} x g g dv}{P}, \\ y_C &= \frac{\int_{(V)} y g g dv}{P}, \\ z_C &= \frac{\int_{(V)} z g g dv}{P}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

У разі однорідного твердого тіла ($\mathbf{g} = \text{const}$) тому:

$$P = g g V, dP = g g dV. \quad (2.27)$$

Підставивши значення (2.27) у формулу (2.26), знайдемо:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\int_{(V)} x dv}{V}, \\ y_C &= \frac{\int_{(V)} y dv}{V}, \\ z_C &= \frac{\int_{(V)} z dv}{V}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

У разі, якщо паралельні сили розподілені по деякій однорідній ($\mathbf{g} = \text{const}$) поверхні S , то $P = gS$, а сила ваги dP елемента поверхні dS буде $dP = g g dS$. За допомогою формул (2.28) у цьому разі дістанемо:

$$x_C = \frac{\int_{(S)} x ds}{S}, \quad y_C = \frac{\int_{(S)} y ds}{S}, \quad z_C = \frac{\int_{(S)} z ds}{S}. \quad (2.29)$$

Для визначення центра ваги лінії справедливій формули:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(l)} \bar{r} dl}{l},$$

$$x_C = \frac{\int_{(l)} x dl}{l}, \quad y_C = \frac{\int_{(l)} y dl}{l}, \quad z_C = \frac{\int_{(l)} z dl}{l}, \quad (2.30)$$

де l – довжина лінії.

Використовуючи властивості лінійних, поверхневих і об'ємних інтегралів легко встановити наступні положення:

- 1) якщо однорідне тверде тіло має площину геометричної симетрії, то центр тяжіння цього тіла знаходиться в цій же площині;
- 2) якщо однорідне тверде тіло має ось геометричної симетрії, то центр ваги знаходиться на цій осі;
- 3) якщо однорідне тверде тіло має центр геометричної симетрії, то центр ваги співпадає з цим центром симетрії.

Положення центра ваги тіла можна визначати, якщо розбити його на такі кінцеві частини, центри ваги яких відомі. Хай маються три такі частини t_1, t_2, t_3 . Центри ваги частин C_1, C_2, C_3 (рис.2.20). Вага кожного тіла розподілиться на три окремі сили.

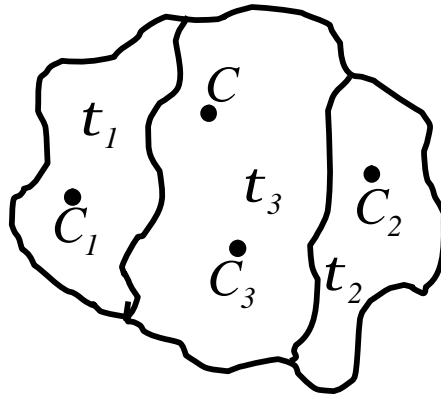


Рисунок 2.20

Положення центра ваги всього тіла можна визначати за формулою:

$$\bar{r}_C = (\bar{r}_1 t_1 + \bar{r}_2 t_2 + \bar{r}_3 t_3) / t, \quad (2.31)$$

де $t = t_1 + t_2 + t_3$.

Аналогічні формули можливо отримати для координат x_C, y_C, z_C центра ваги.

Розглянемо тіло, яке має порожнини (рис.2.21). Хай пуста порожнина має об'єм t_2 . Координати умовного центра її ваги $C_2(x_2, y_2, z_2)$ і \bar{r}_{C_2} – радіус-вектор і її центра ваги (якщо цю порожнину заповнити речовиною) центр ваги тіла, фактично заповненого матерією (без t_2) визначимо C , а об'єм тіла t .

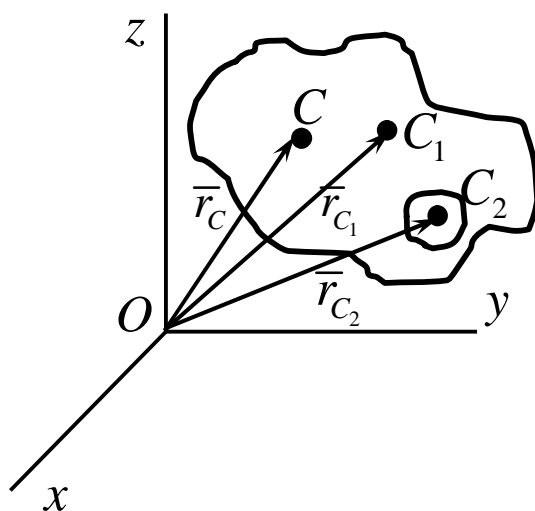


Рисунок 2.21

Суцільне тіло (без пустоти) матиме об'єм.

$$t_1 = t + t_2.$$

Центр ваги цього тіла позначимо C_1 .

Використавши метод розбивки тіла на частини, можна визначити радіус-вектор центра ваги всього об'єму t_1 в такому вигляді:

$$\bar{r}_1 = (t_1 \bar{r}_1 + t_2 \bar{r}_2) / t_1.$$

Відкіля $\bar{r}_1 = (t_1 \bar{r}_1 - t_2 \bar{r}_2) / (t_1 - t_2)$.

(2.31)

Таким чином, визначено радіус-вектор центра ваги тіла з порожниною. Для координат центра ваги маємо:

$$x_c = \frac{x_1 t_1 - x_2 t_2}{t_1 - t_2}, \quad y_c = \frac{y_1 t_1 - y_2 t_2}{t_1 - t_2},$$

$$z_c = \frac{z_1 t_1 - z_2 t_2}{t_1 - t_2}.$$

Приклад 1

Визначити координати центра ваги площі фігури (рис.2.22), якщо $a = 0,1\text{м}$; $b = 0,6\text{м}$; $c = 0,4\text{м}$; $d = 1\text{м}$; $l = 0,4\text{м}$.

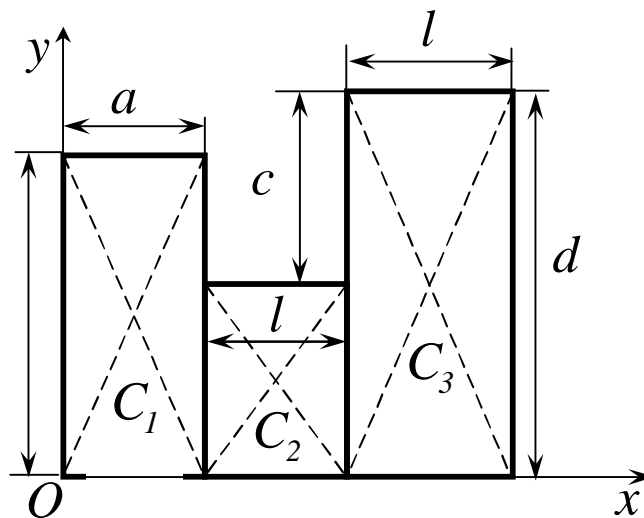


Рисунок 2.22

Рішення

Розіб'ємо фігуру на три прямокутники. Дані про площі елементарних фігур, а також координати їхніх центрів ваги запишемо в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

i	S_i	x_i	y_i
1	0,06	0,05	0,3
2	0,24	0,3	0,3
3	0,4	0,7	0,5

Координати центра ваги всієї фігури знайдемо за формулами (2.22)

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i S_i}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} =$$

$$= \frac{0,003 + 0,072 + 0,28}{0,7} = \frac{0,355}{0,7};$$

$$x_C = 0,5 \text{ м};$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^3 y_i S_i}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} =$$

$$= \frac{0,018 + 0,072 + 0,2}{0,7} = \frac{0,29}{0,7};$$

$$y_C = 0,4 \text{ м}.$$

Приклад 2

Визначити координати центра ваги площі колового сектора AOB з

центральним кутом $\angle AOB$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ і радіусом $r = 0,2 \text{ м}$ (рис.2.23).

Рішення

Оскільки коловий сектор має вісь симетрії Ox , то центр ваги знаходимо на цій самій осі. Тому слід визначити лише координату x_C . За пер-

шою формулою (2.29):

$$x_c = \frac{\int_{(S)} x dS}{S}.$$

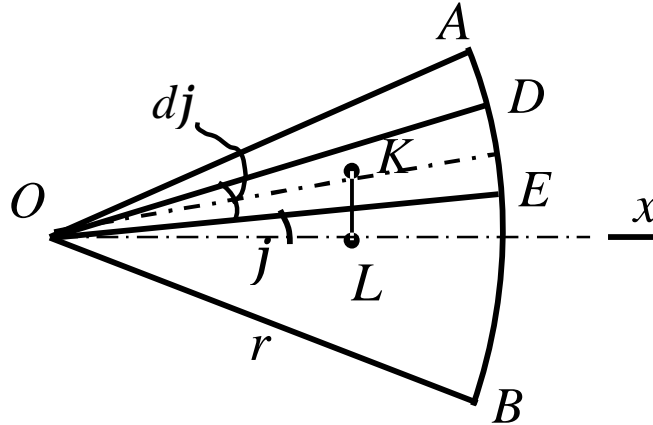


Рисунок 2.23

Площа сектора буде $S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$. Виділивши елементарний сектор

ODE , знайдемо $dS = \frac{1}{2} r^2 dj$; $\angle KOL = j$, $OK = \frac{2}{3} r$,

$x = OL = OK \cos j = \frac{2}{3} r \cos j$. Визначимо статичний момент:

$$\int_{(S)} x dS = \frac{2}{3} r \frac{1}{2} r^2 2 \int_0^{\frac{p}{8}} \cos^j dj = \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{p}{8}.$$

Остаточно дістанемо:

$$x_c = \frac{\frac{2}{3} r^3 \sin \frac{p}{8}}{\frac{1}{2} r^2 \frac{p}{4}} = \frac{16}{3} r \frac{\sin \frac{p}{8}}{p}.$$

Приклад 3

Знайти центр ваги трапеції $ABDK$ (рис.2.24).

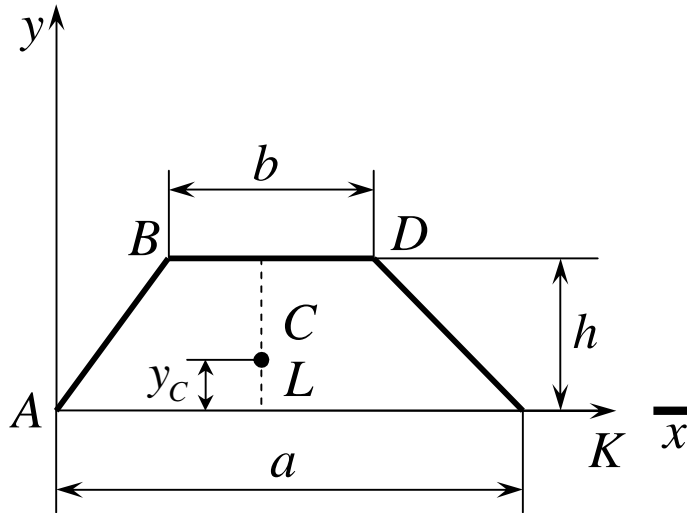


Рисунок 2.24

Рішення

Розіб'ємо трапецію на трикутники ABD , ADK . Для кожного з них маємо:

$$y_1 = \frac{2}{3}h, \quad y_2 = \frac{1}{3}h.$$

Бо центр ваги трикутника знаходиться в точці перетину його медіан.

$$S_1 = \frac{bh}{2}, \quad S_2 = \frac{ah}{2}.$$

Після чого отримуємо:

$$y_c = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{h}{3} \cdot \frac{(a+2b)}{(a+b)} = \frac{h}{3} \left(1 + \frac{b}{a+b} \right).$$

Приклад 4

Визначити центр ваги заштрихованої площини деталі (рис.2.25).

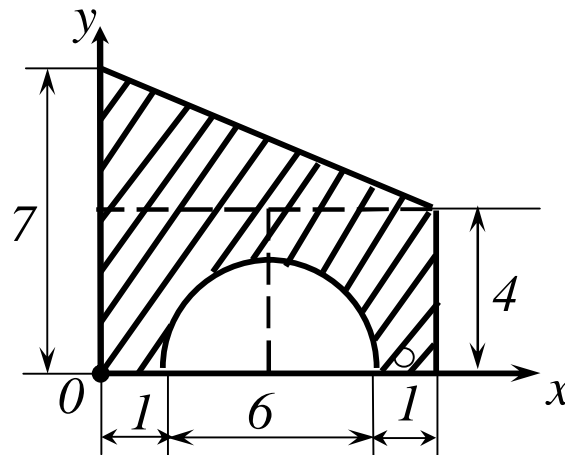


Рисунок 2.25

Рішення

Цю площину можна розглядати як фігуру, складену із прямокутника з висотою 8 см і основою 4 см , із якого знизу вирізана площа півкола радіуса 3 см , а зверху додано трикутник, маючий висоту 8 см і основу 3 см . Залишаємо площі фігур і координати їх центрів:

$$S_1 = 32 \tilde{m}^2, \quad x_1 = 4\tilde{m}, \quad y_1 = 2 \tilde{m};$$

$$S_2 = 12 \tilde{m}^2, \quad x_2 = 8/3 \tilde{m}, \quad y_2 = 14/3 \tilde{m};$$

$$S_3 = \frac{\rho R^2}{2} = 4,5\rho \tilde{m}^2, \quad x_3 = 4 \tilde{m}, \quad y_3 = R(\sin a/a) = \frac{6}{\rho} \tilde{m}.$$

Для координат центра ваги заштрихованої площі маємо:

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 - S_3 x_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{32 \cdot 4 + 12 \cdot 8/3 - 4,5p \cdot 4}{32 + 12 - 4,5p} = 3,4 \text{ м} .$$

$$y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 - S_3 y_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{32 \cdot 2 + 12 \cdot 14/3 - 4,5p \cdot 6/p}{32 + 12 - 4,5p} = 3,3 \text{ м} .$$

Приклад 5

Визначити шляхом інтегрування координати x_C і y_C центра ваги C дуги чверті кола радіуса R (рис.2.26).

Рішення

Візьмемо початок координат в центрі кола і направимо осі x і y як показано на рисунку. Тоді рівняння кривої AB буде:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

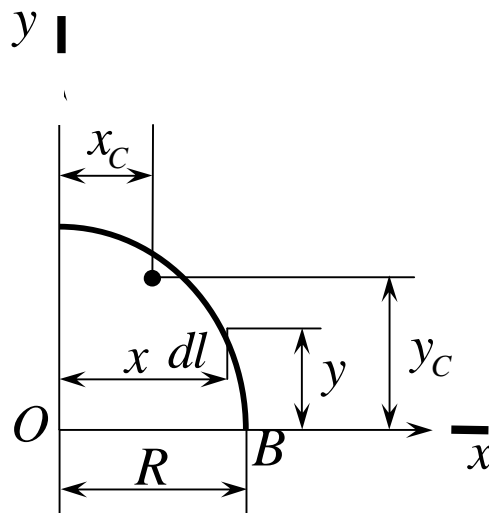


Рисунок 2.26

Розділимо дугу AB на елементи нескінченно малої довжини dl довжина такого елемента буде:

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{R}{y} dx.$$

Відкіля

$$y_C = \frac{\int y dl}{\int dl} = \frac{\int_0^R y \frac{R}{y} dx}{\int dl} = \frac{R^2}{\frac{pR}{2}} = \frac{2R}{p}.$$

З питаннями про визначення положення центрів ваги ліній і площ пов'язані дві елементарні теореми, які називаються теоремами Паппа – Гульдїна.

Теорема 1. Площа поверхні тіла, утвореного обертанням плоскої кривої навколо осі, що лежить в її площині та її не перетикає, дорівнює добутковій довжини цієї кривої на довжину дуги кола, описаного її центром ваги. Тобто:

$$S = 2p x_C l, \quad (2.33)$$

де S – площа поверхні тіла,

x_C – координата центра ваги,

l – довжина кривої.

Теорема 2. Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі, що лежить в її площині і не перетинається з її контуром, дорівнює добутковій площі цієї фігури на довжину кола, описаного її центром ваги. Тобто:

$$V = 2p x_C S, \quad (2.34)$$

де V – об'єм тіла,

x_C – координата центра ваги,

S – площа фігури.

2.6 Статична стійкість положення рівноваги твердого тіла

Положення статичної рівноваги твердого тіла називають стійким, якщо при невеликих відхиленнях тіла від цього положення, момент який повертає тіло в положення рівноваги, буде більшим за збурюючий момент, що відхиляє тіло від цього положення.

Якщо тверде тіло не прикріплене до основи, то умова його статичної рівноваги така, що сила ваги не повинна виходити за межі основи (рис.2.27).

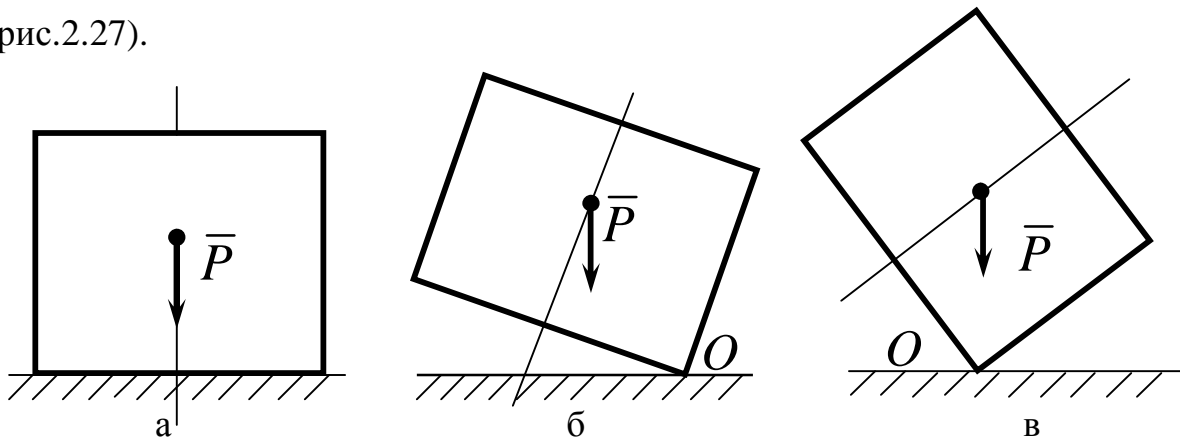
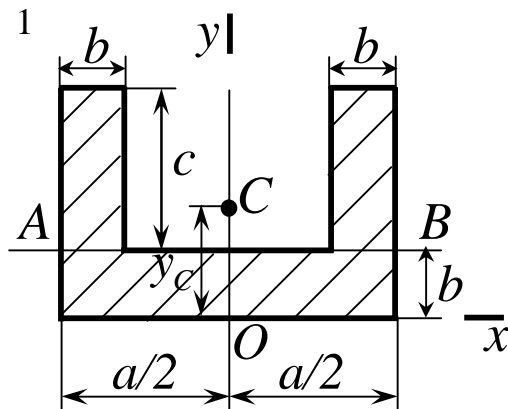


Рисунок 2.27

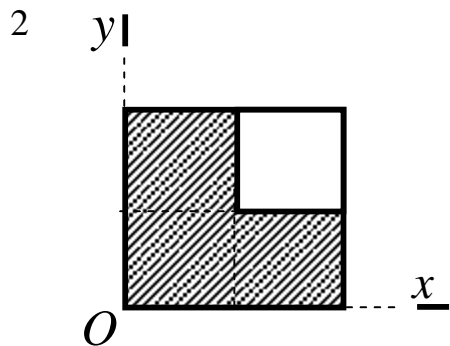
У положенні а) і б) на рис.2.27 конструкція є стійкою, а в положенні в) – нестійкою.

2.7 Контрольні завдання для самостійної роботи



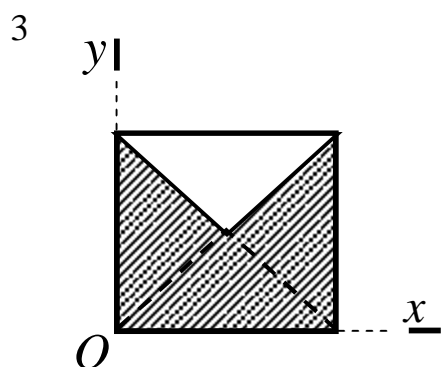
Визначити координату y_C заштрихованої площі перерізу. Дані розміри: $a = 6$ см, $b = 1$ см, $c = 2$ см.

Відповідь: $y_C = 1,1$ см.



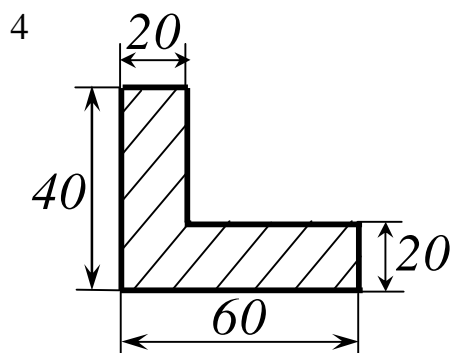
Визначити положення центра ваги заштрихованих $\frac{3}{4}$ квадрату з стороною a .

Відповідь: $x_c = y_c = \frac{5}{12}a$.



Визначити положення центра ваги заштрихованих $\frac{3}{4}$ квадрату з стороною a .

Відповідь: $x_c = \frac{a}{2}$, $y_c = \frac{7}{18}a$.



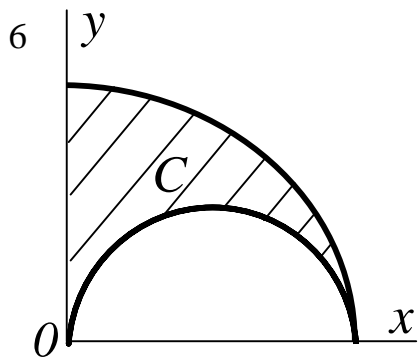
Визначити положення центра ваги заштрихованого сiчення.

Відповідь: $x_c = 2,5$ см, $y_c = 1,5$ см.

по розмірам, які вказані на рисунку визначити положення центра ваги середньої лінії скоби.

Відповідь: $x_c = -0,78$ см,

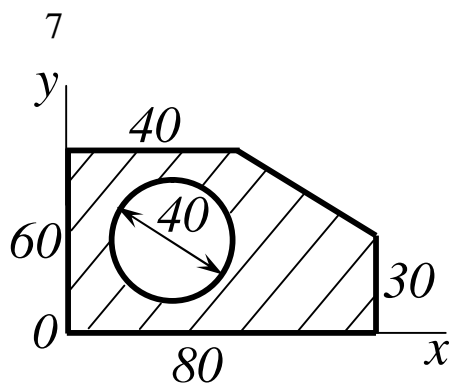
$y_c = -4,78$ см.



Визначити положення центра ваги C заштрихованої площі, отриманої вирізанням із чверті кола радіусом a півкола з діаметром a .

Відповідь:

$$x_c = 0,35a, y_c = 0,64a.$$

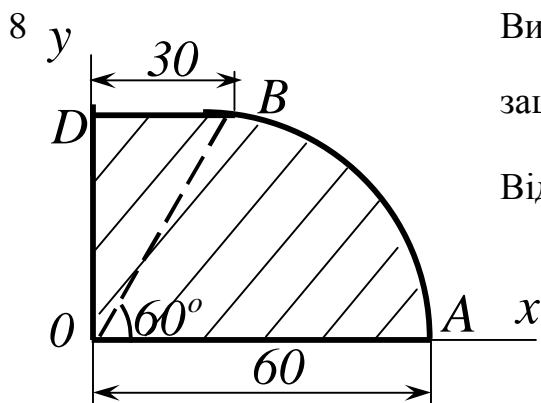


Із тонкої пластинки вирізане коло діаметром 4 см так, що центр ваги отриманого перетину співпадає з центром кола. Визначити координати

x_c і y_c центра кола.

Відповідь:

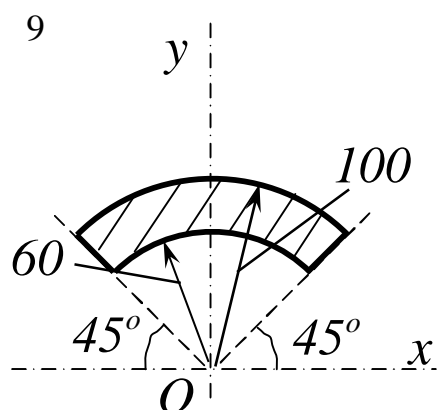
$$x_c = 3,62\text{ см}, y_c = 2,72\text{ см}.$$



Визначити положення центра ваги C заштрихованої площі $OABD$.

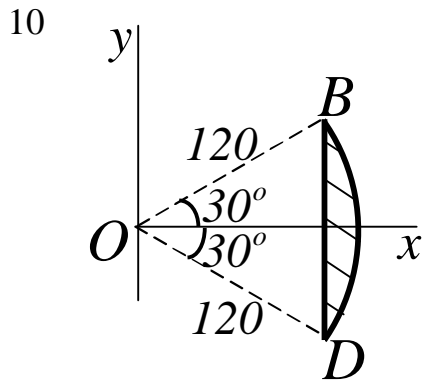
Відповідь: $x_c = 2,63\text{ см},$

$$y_c = 2,36\text{ см}.$$



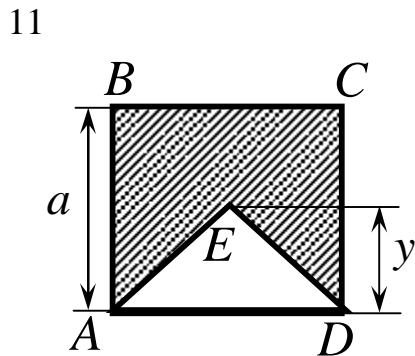
Визначити положення центра ваги C заштрихованого сектора кільця з центральним кутом в 90° , симетричного відносно осі y .

Відповідь: $x_c = 0, y_c = 7,35\text{ см}.$



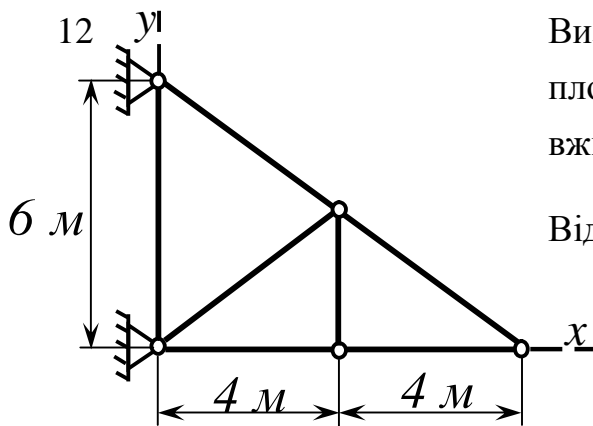
Визначити положення центра ваги S заштрихованої площі колового сегмента BD .

Відповідь: $x_c = 11,04$ см, $y_c = 0$.



Із квадрата $ABCD$ з стороною a вирізаний рівнобедрений трикутник ADE так, що його вершина E є центром ваги заштрихованої площі. Визначити висоту y цього трикутника.

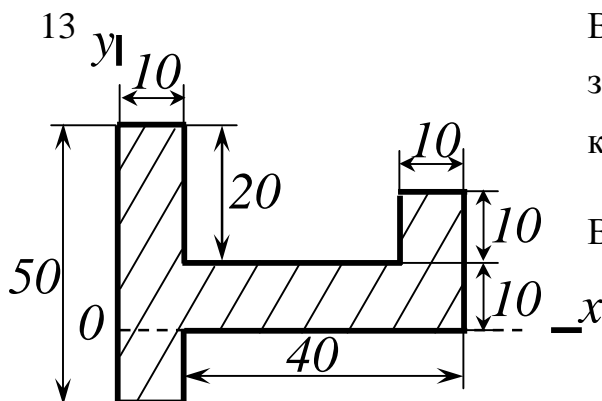
Відповідь: $y_c = 0,634a$.



Визначити положення центра ваги плоскої ферми, якщо вага одиниці довжини всіх стрижнів однакова.

Відповідь: $x_c = 2,94$ м,

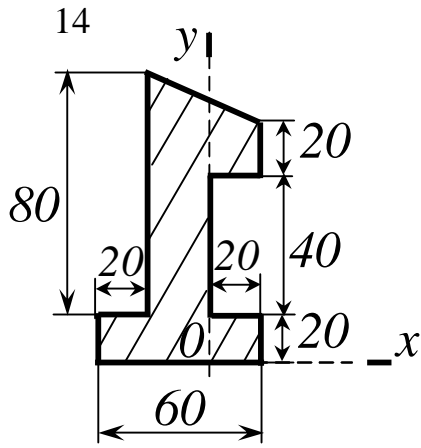
$y_c = 1,88$ м.



Визначити положення центра ваги заштрихованої площини відносно координатних осей x і y .

Відповідь: $x_c = 1,9$ см,

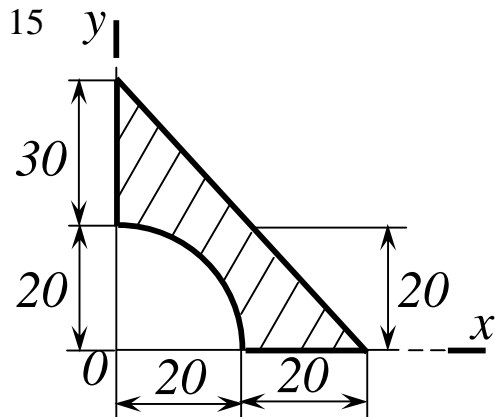
$y_c = 0,6$ см.



Визначити положення центра ваги заштрихованої площини плоскої фігури відносно координатних осей x і y .

Відповідь: $x_c = -0,71$ см,

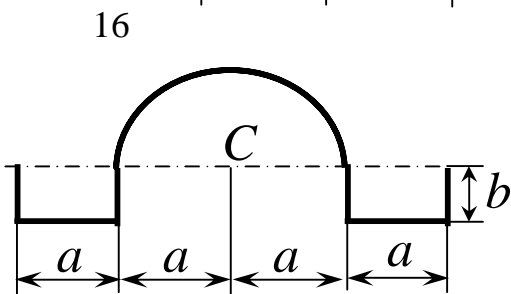
$y_c = 4,21$ см.



Визначити положення центра ваги заштрихованої площини відносно координатних осей x і y .

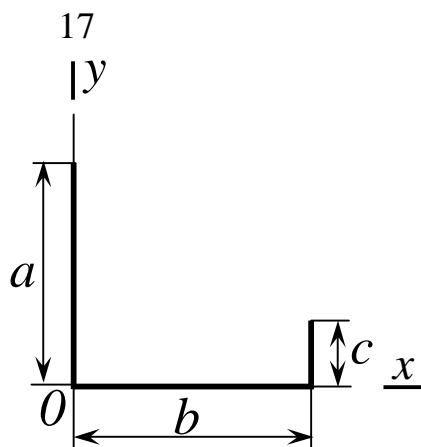
Відповідь: $x_c = 1,92$ см,

$y_c = 1,91$ см.



Тонка однорідна проволока з однаковим по довжині перетином зогнута, як показано на рисунку. При даному розмірі a , визначити розмір b , щоб центр ваги проволочки співпадав з центром її колової ділянки.

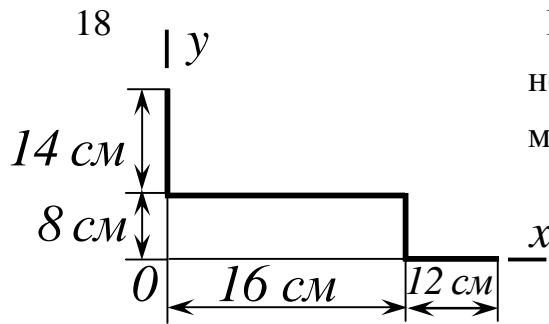
Відповідь: $b = 0,62a$.



Однорідну тонку дrottину зігнуто під прямими кутами. Знайти положення її центра ваги.

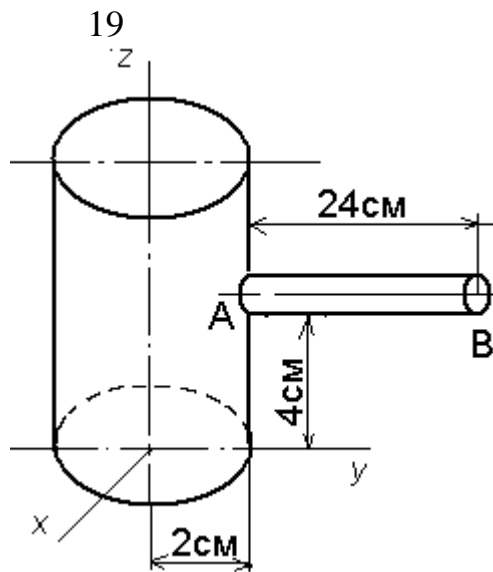
Відповідь: $x_c = \frac{b(b+2c)}{2(a+b+c)}$,

$y_c = \frac{a^2 + c^2}{2(a+b+c)}$.



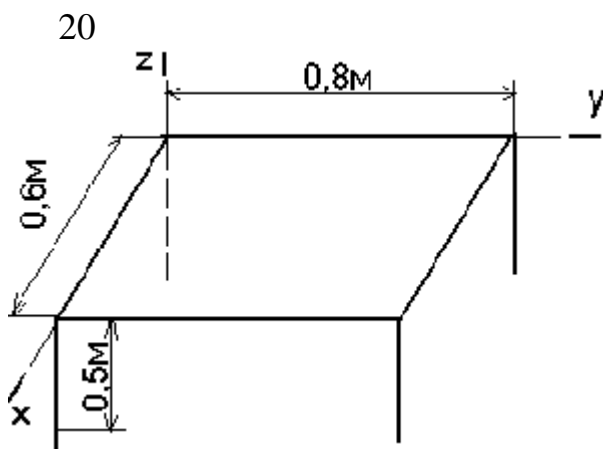
Визначити положення центра ваги однорідної тонкої дротини, зігнутої під прямими кутами.

Відповідь: $x_c = 10,4 \text{ см}$,
 $y_c = 7,4 \text{ см}$.



Визначити положення центра ваги молотка, що складається з однорідної циліндричної головки масою 300 г , і однорідного тонкого стержня AB вагою 50 г .

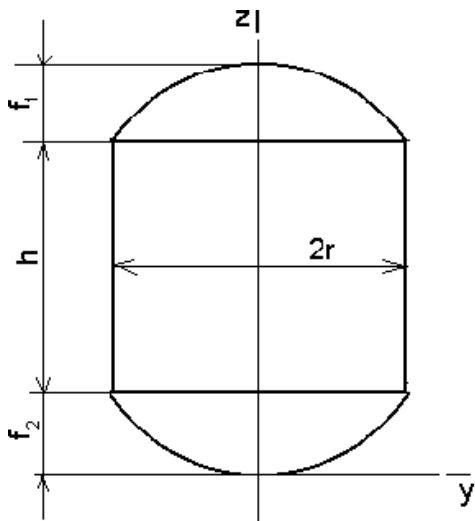
Відповідь: $x_c = 0$, $y_c = 2 \text{ см}$,
 $z_c = 4 \text{ см}$.



Визначити положення центра ваги прямокутного столика. Усі ніжки і дошка однорідні. Маса кожної ніжки дорівнює 1 кг , маса дошки – 4 кг .

Відповідь: $x_c = 0,3 \text{ м}$,
 $y_c = 0,4 \text{ м}$, $z_c = -0,13 \text{ м}$.

21

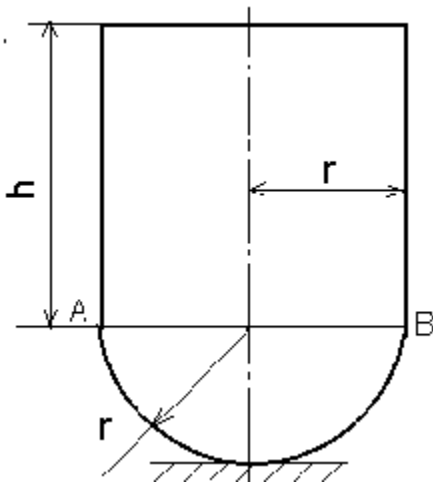


Корпус якірної підводної міни має форму циліндра з випуклими сферичними днищами. Висота циліндричного поясу $h = 2r$. Висоти сферичних сегментів відповідно дорівнюють: $f_1 = 0,5r$ і $f_2 = 0,2r$. Знайти центр ваги поверхні корпусу міни.

Відповідь: $x_c = y_c = 0$,

$$z_c = 1,28r.$$

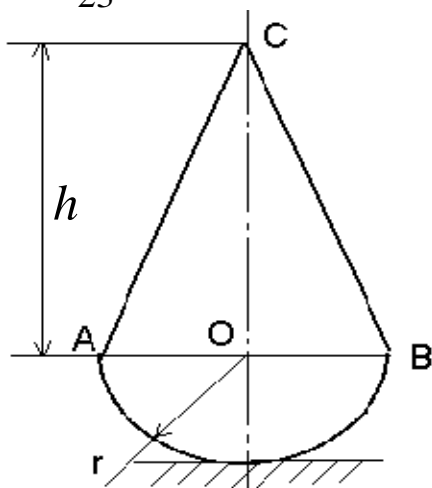
22



Знайти граничну висоту h циліндра, при якій тіло, яке складається із циліндра і півкулі однакового радіусу r , втрачає стійкість в стані рівноваги, коли воно спирається поверхнею півкулі на гладеньку горизонтальну площину. Центр ваги усього тіла повинен співпадати з центром півкулі. Відстань центра ваги однорідної півкулі від його основи дорівнює $3/8r$.

Відповідь: $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

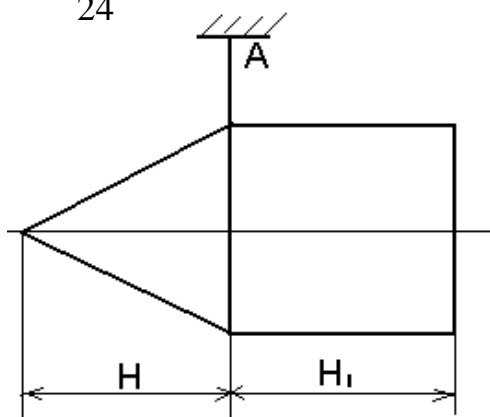
23



Знайти граничну висоту h конуса, при якій тіло, яке складається із конуса і півкулі однакової густини і радіуса r втрачає стійкість в стані рівноваги (центр ваги усього тіла повинен співпадати з центром півкулі. Відстань центра ваги однорідної півкулі від його основи дорівнює $3/8r$).

Відповідь: $h = r\sqrt{3}$.

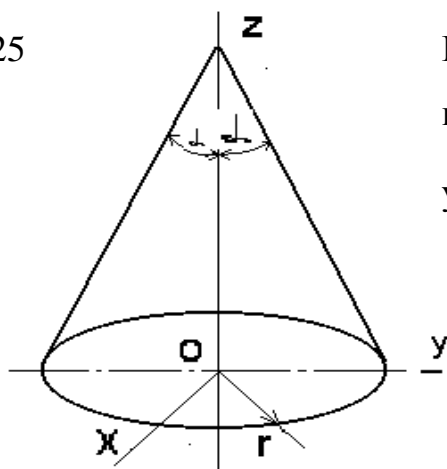
24



Визначити висоту H однорідного конуса, при якій ось симетрії тіла, складеного із конуса і однорідного циліндра і підвішеного в точці A , буде горизонтальною. Висота $H_1 = 0,3 \text{ м}$.

Відповідь: $H = 0,74 \text{ м}$.

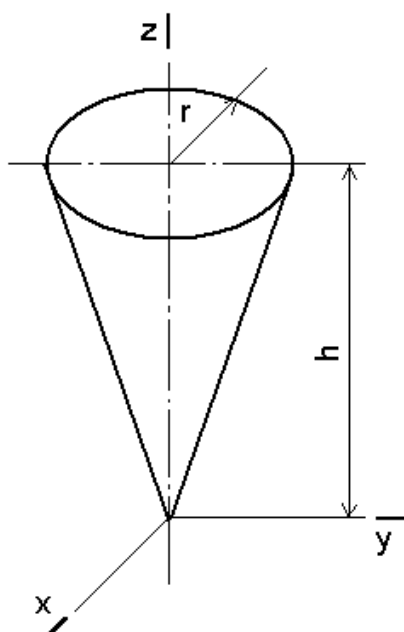
25



Визначити координату z_c центра ваги круглого однорідного конуса, якщо радіус основи $r = 0,4 \text{ м}$, кут $\alpha = 45^\circ$.

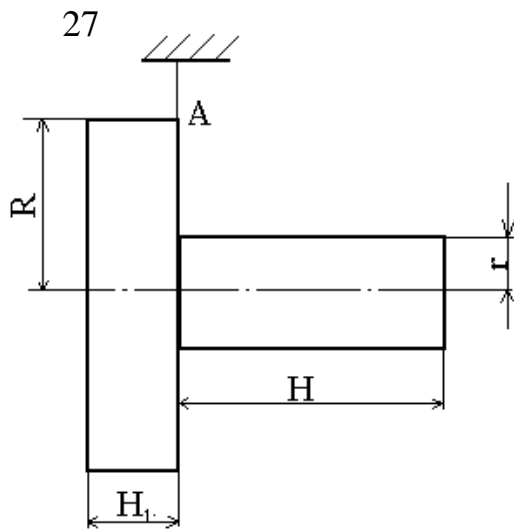
Відповідь: $z_c = 0,1 \text{ м}$.

26



Визначити статичний момент круглого однорідного конуса відносно координатної площини O_{xy} , якщо висота конуса $h = 0,8 \text{ м}$, а радіус його основи $r = 0,4 \text{ м}$. (Статичним моментом відносно площини O_{xy} називають інтеграл $\int_{(v)} z dv$).

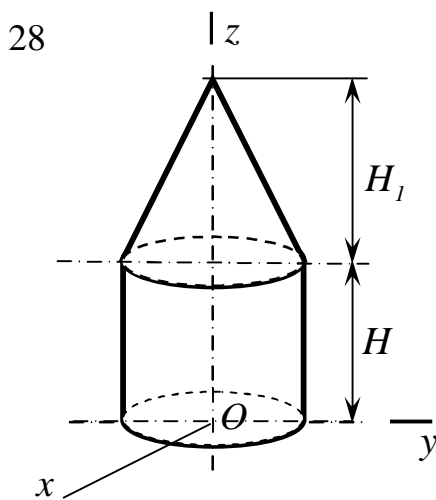
Відповідь: $\int_{(v)} z dv = 8,04 \cdot 10^{-2} \text{ м}^4$.



Визначити висоту H однорідного циліндра, при якій вісь симетрії тіла, складеного з двох циліндрів і підвішеного в точці A , буде горизонтальною.

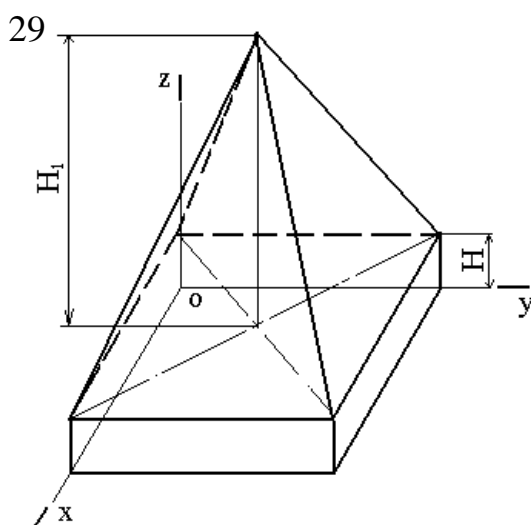
Висота циліндра $H_1 = 0,5 \text{ м}$, радіус $R = 3r$.

Відповідь: $H = 1,5 \text{ м}$.



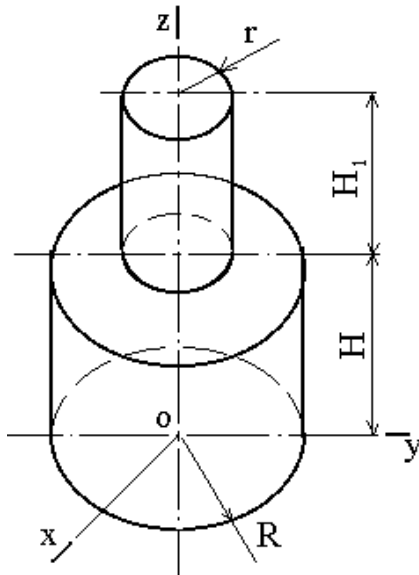
Визначити координату z_c центра ваги однорідного тіла, складеного із конуса і циліндра, якщо висота $H_1 = 3H = 0,4 \text{ м}$.

Відповідь: $z_c = 0,18 \text{ м}$.



Визначити координату z_c центра ваги однорідного тіла, складеного із прямокутного паралелепіпеда і призми, якщо висота $H_1 = 3H = 1,2 \text{ м}$.

Відповідь: $z_c = 0,45 \text{ м}$.



Визначити координату z_c центра ваги однорідного тіла, складеного із двох циліндрів, якщо висота $H_1 = 2H$, радіус $R = 2r$. Висота $H = 0,5$ м.

Відповідь: $z_c = 0,5$ м.

3 ДОВІЛЬНА СИСТЕМА СИЛ

3.1 Векторні і аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил.

Довільна плоска система сил зводиться до більш простої системи сил, складеної із сили і пари сил.

Геометрична сума всіх сил зветься головним вектором системи сил. Він має такий вираз

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i. \quad (3.1)$$

Отримана пара від зведення системи сил зветься головним алгебраїчним моментом відносно точки зведення. Він має вираз:

$$M_0 = \sum_i m_0(\bar{F}_i). \quad (3.2)$$

Якщо система сил знаходиться в рівновазі, то умови рівноваги записуються відповідно формулам (3.1) і (3.2)

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= 0, \\ M_o &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Головний вектор сил, які знаходяться в одній площині можна записати в системі координат xOy .

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j}, \quad (3.4)$$

де

$$R_x = \sum_i F_{ix}, R_y = \sum_i F_{iy}. \quad (3.5)$$

Тоді умови рівноваги записані в векторній формі (3.3) із врахуванням формул (3.4) і (3.5) можна записати в аналітичній формі.

$$\left. \begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0, \\ \sum_i F_{iy} &= 0, \\ \sum_i m_o (\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Рівняння (3.6) називають основними рівняннями рівноваги довільної плоскої системи сил.

Існують і дві другі системи трьох рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил: друга і третя. Приводимо їх послідовно.

$$\left. \begin{aligned} \sum_i m_A (\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum_i m_B (\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum_i m_C (\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_i m_A (\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum_i m_B (\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum_i \bar{F}_{ix} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Другу форму (3.7) звать теоремою трьох моментів. Вона справедлива тоді, коли моментні точки A , B , C не знаходяться на одній прямій.

При використанні третьої форми (3.8) слід пам'ятати, що вісь Z не повинна бути перпендикулярна прямій, що проходить через моментні точки A і B .

Приклад 1

Однорідний брус AB вагою P опирається кінцем A на гладеньку горизонтальну площу і виступ D , а кінцем B на нахилену гладеньку площу, яка утворює з горизонтальною площиною кут a (рис 3.1). Брус нахилений під кутом b . Визначити сили тиску бруса на обидві площі і виступ D .

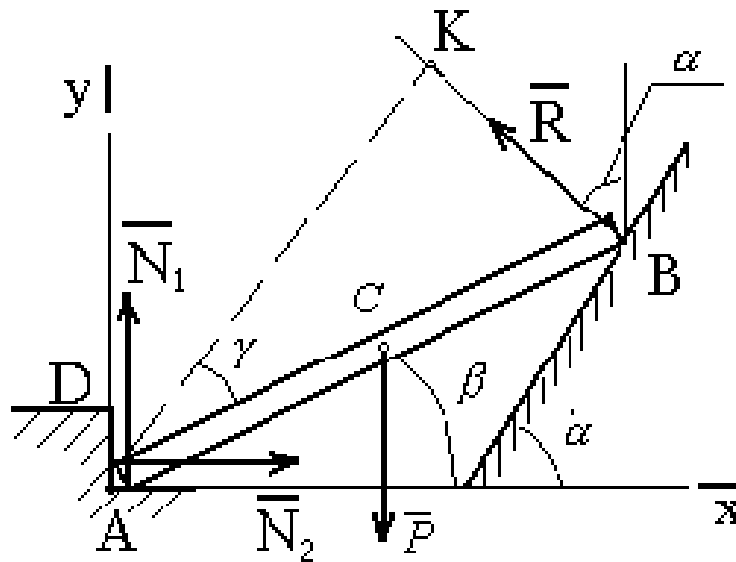


Рисунок 3.1

Рішення

Розглянемо рівновагу бруса AB . На брус діє задана сила \bar{P} , прикладена в середині бруса, і реакції в'язей $\bar{R}, \bar{N}_1, \bar{N}_2$ напрямлені перпендикулярно відповідним площинам. Проведемо координатні осі (рис. 3.1) і складемо умови рівноваги, взявши моменти відносно центра A , де перетинаються дві невідомі сили. Попередньо визначимо проекції кожної із сил на координатні осі і їх моменти відносно центра A і внесемо ці данні в таблицю 3.1. При цьому введемо наступні означення: $AB = 2a$, $\angle KAB = g$ (AK – плече сили \bar{R} відносно центра A).

Таблиця 3.1

\bar{F}_i	\bar{N}_1	\bar{N}_2	\bar{P}	\bar{R}
\bar{F}_{ix}	0	N_2	0	$-R \sin \alpha$
\bar{F}_{iy}	N_1	0	$-P$	$R \cos \alpha$
$m_a(\bar{F}_i)$	0	0	$-P a \cos \beta$	$R 2a \cos g$

Складемо умови рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0, & N_2 - R \sin a &= 0, \\ \sum_i F_{iy} &= 0, & N_1 - P + R \cos a &= 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_i) &= 0, & P \cos b + 2R \cos g &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Із останнього рівняння знаходимо:

$$R = \frac{P \cos b}{2 \cos g}.$$

Так як пряма AK паралельна нахиленій площині, то $\angle KAx = a$,
відкіля $g = a - b$.

Остаточно:

$$R = \frac{P \cos b}{2 \cos(a - b)}.$$

Із перших двох рівнянь, отримуємо:

$$N_1 = P \left(1 - \frac{\cos a \cdot \cos b}{2 \cos(a - b)} \right),$$

$$N_2 = P \frac{\sin a \cdot \cos b}{2 \cos(a - b)}.$$

Для перевірки вірності отриманих результатів можна скласти рівняння моментів відносно точок, де перетинаються лінії дії сил \bar{R} і \bar{N}_2 і сил \bar{R} і \bar{N}_1 .

Приклад 2

Симетрична арка (рис. 3.2) навантажена системою сил, яка приводиться до сили $Q = 40 \text{ кН}$, прикладеної в точці D , і пари сил з моментом $M_D = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Вага арки $P = 80 \text{ кН}$.

Дано: $AB = a = 10 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$, $h = 3 \text{ м}$, $\alpha = 60^\circ$.

Визначити реакції нерухомої шарнірної опори B і рухомої опори A .

Розглянемо рівновагу арки. На неї діють задані сили \bar{P} і \bar{Q} , пара сил з моментом M_D і реакції опор \bar{N}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B . Реакцію нерухомої шарнірної опори B зображаємо двома її складовими (рис. 3.2).

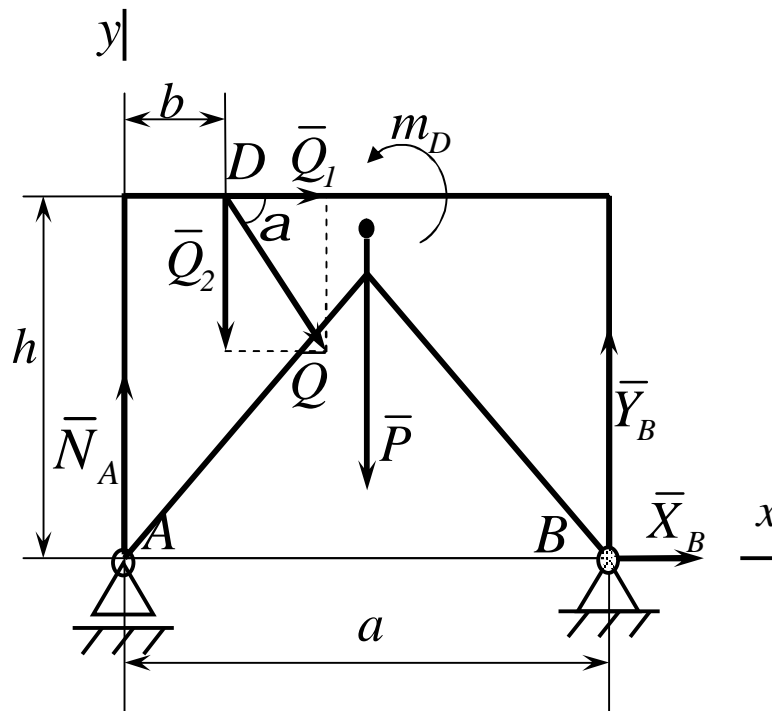


Рисунок 3.2

У цій задачі зручно скористатися умовами рівноваги, взявши моменти відносно точок A і B і проєкції на вісь Ax . Тоді в кожне рівняння ввійде по одній невідомій силі. Для визначення моментів сили \bar{Q} розкла-

демо її на складові \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 , модулі яких $Q_1 = Q \cos \alpha$, $Q_2 = Q \sin \alpha$, і скористаємося теоремою Варіньона. Тоді отримаємо:

$$\sum_i F_{ix} = X_B + Q \cos \alpha = 0, \quad (3.9)$$

$$\sum_i m_A(\bar{F}_i) \equiv Y_B a - Pa/2 - hQ \cos \alpha - bQ \sin \alpha + m_D = 0, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \sum_i m_B(\bar{F}_i) \equiv Pa/2 - N_A a - hQ \cos \alpha + \\ + (a-b)Q \sin \alpha + m_D = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Вирішуючи рівняння (3.9), (3.10), (3.11), знайдемо:

$$\begin{aligned} X_B &= -Q \cos \alpha = -20 \text{ кН}, \\ Y_B &= P/2 + Q(b \sin \alpha + h \cos \alpha) / a - m_D / a \approx 40,9 \text{ кН}, \\ N_A &= P/2 + Q((a-b) \sin \alpha - h \cos \alpha) / a + m_D / a \approx 73,7 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Так як X_B є негативною величиною, то складова \bar{X}_B має напрямок протилежний показаному на рисунку 3.2.

Повна реакція шарніра B знайдеться як геометрична сума \bar{X}_B і \bar{Y}_B . По модулю $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} \approx 45,5 \text{ кН}$.

Для перевірки можна скласти рівняння проєкцій сил на вісь Ay :

$$\sum_i F_{iy} \equiv N_A + Y_B - P - Q \sin \alpha = 0.$$

Підставивши в це рівняння знайдені раніше сили \bar{N}_A і \bar{Y}_B прихо-

димо до висновку, що вони відповідають цьому рівнянню.

Слід мати на увазі, що при такій перевірці можна не знайти помилок, пов'язаних з невірним визначенням проекцій або моментів сил, перпендикулярних осі Ay . У зв'язку з цим необхідно або додатково перевірити цю частину розрахунків, або скласти ще одне рівняння, наприклад рівняння моментів відносно центра D .

Приклад 3

До стовпа з перекладиною прикріплені два блока C і D через які перекинута вірвовка, яка утримує вантаж вагою $Q = 240 \text{ Н}$. Нижній кінець вірвовки закріплений в точці B . Стовп утримується в рівновазі розтяжкою EE_1 . Нехтуючи вагою стовпа з перекладиною і тертям в блоках, визначити натяг розтяжки і реакцію кріплення в точці A , розглядаючи її як шарнірну тобто вона дозволяє стовпу обертатись навколо точки A . Всі розміри вказані на рис. 3.3 в метрах. Розмірами блоків знехтувати.

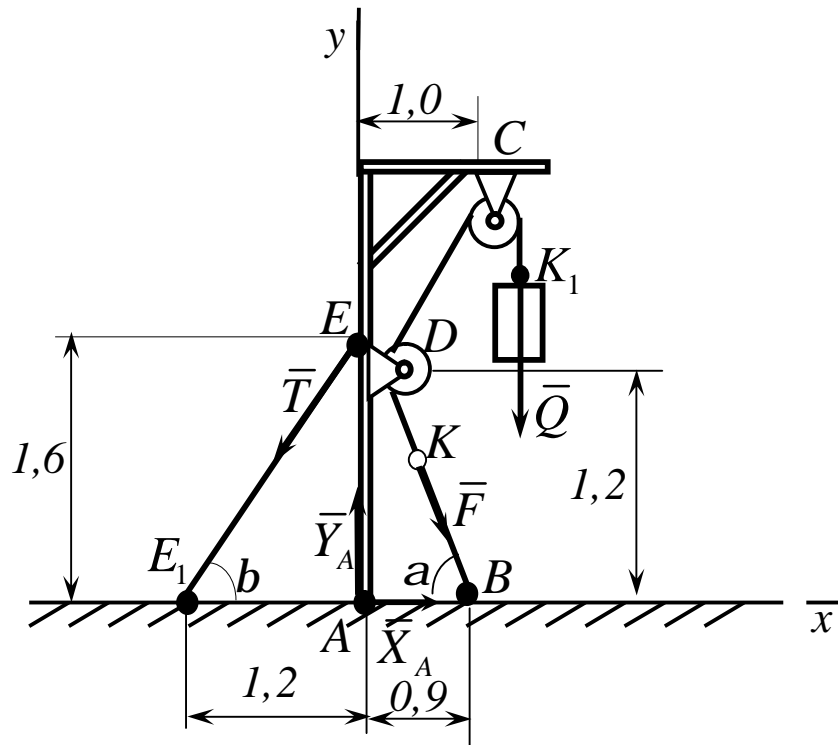


Рисунок 3.3

Рішення

Розглянемо рівновагу усієї конструкції, тобто стовпа з перекладиною, блоками і частиною вірьовки $KDCK_1$, яка обіймає блоки.

На конструкцію діють такі зовнішні сили: прикладена в точці K_1 сила \bar{Q} , прикладена в точці K сила натягу \bar{F} вірьовки і реакції в'язей \bar{T} , \bar{X}_A , \bar{Y}_A . Внутрішні сили, які не входять в рівняння рівноваги, не зображаємо.

Так як при відсутності тертя в блоках натяг вірьовки скрізь однаковий, то $F = Q$. Складемо для діючих сил наступні умови рівноваги:

$$\sum_i F_{ix} \equiv F \cos a - T \cos b + X_A = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} \equiv -Q - F \sin a - T \sin b + Y_A = 0,$$

$$\sum_i m_A(\bar{F}_i) \equiv -Q \cdot 1,0 - F \cdot 0,9 \sin a + T \cdot 1,2 \sin b = 0.$$

Із прямокутних трикутників AEE_1 і ADB знаходимо, що $EE_1 = 2,0$ м, $DB = 1,5$ м. Відкля $\sin a = \sin b = 0,8$ і $\cos a = \cos b = 0,6$. Отже, у даному випадку $a = b$. Підставивши у відповідні рівняння знайдені значення тригонометричних функцій і враховуючи що $F = Q$, отримаємо:

$$0,6 \cdot Q - 0,6 \cdot T + X_A = 0,$$

$$-Q - 0,8 \cdot Q - 0,8 \cdot T + Y_A = 0,$$

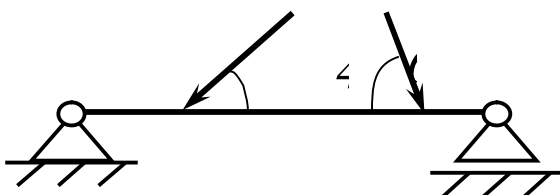
$$-1,0 \cdot Q - 0,72 \cdot Q + 0,96 \cdot T = 0.$$

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо кінцево:

$$T = 430 \text{ Н}, X_A = 114 \text{ Н}, Y_A = 776 \text{ Н}.$$

3.2 Контрольні завдання для самостійної роботи

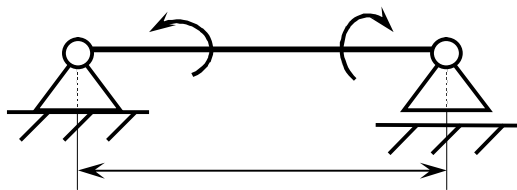
1



Визначити реакцію опори D , якщо сили $F_1 = 84,6 \text{ Н}$, $F_2 = 208 \text{ Н}$, розміри $AB = 1 \text{ м}$, $BC = 3 \text{ м}$, $CD = 2 \text{ м}$.

Відповідь: $R_D = 130 \text{ Н}$.

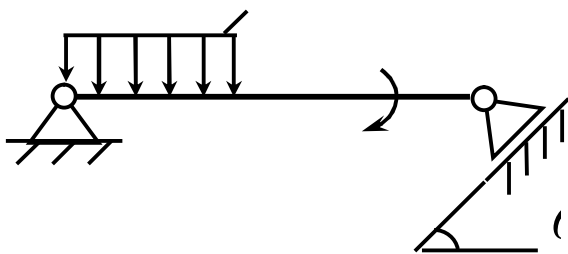
2



На балку, довжина якої $l = 3 \text{ м}$, діють пари сил з моментами $M_1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ і $M_2 = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Визначити в кН модуль реакції опори B .

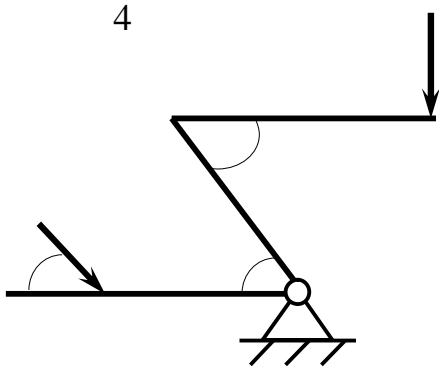
Відповідь $R_B = 2 \text{ кН}$.

3



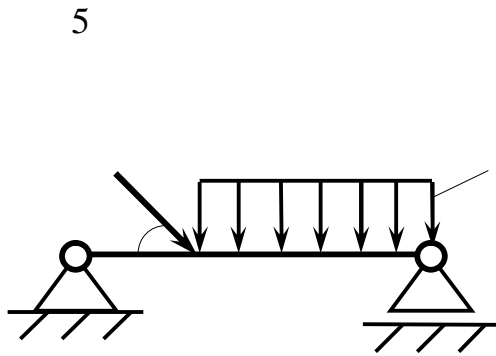
Визначити момент M пари сил, при якому реакція опори B дорівнює 250 Н , якщо інтенсивність розподіленого навантаження $q = 150 \text{ Н/м}$, розміри $AC = CB = 2 \text{ м}$.

Відповідь $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$.



На важіль діють сили $F_1 = 50 \text{ кН}$ і F_2 . Визначити в кН силу F_2 , при якій важіль в показаному стані знаходиться в рівновазі, якщо кут $\alpha = 60^\circ$, а довжини $AO = 3 \text{ м}$, $OB = BC = 4 \text{ м}$.

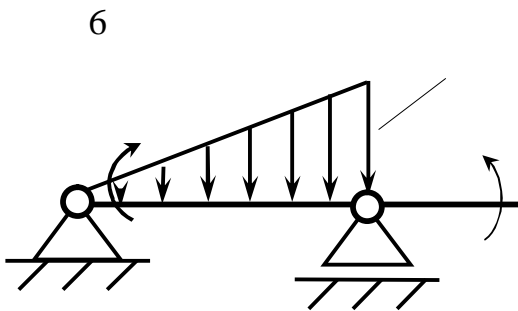
Відповідь: $F_2 = 65 \text{ кН}$.



На балку AB діють розподілене навантаження інтенсивністю $q = 2 \text{ Н/м}$ і сила $F = 6 \text{ Н}$.

Визначити реакцію опори B , якщо довжина $AC = 1/3 AB$, кут $\alpha = 45^\circ$.

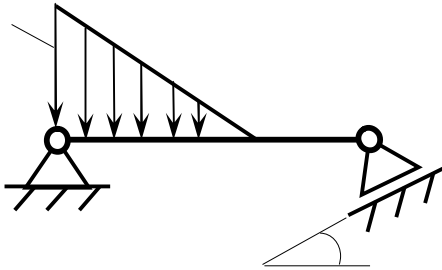
Відповідь: $R_B = 4,1 \text{ Н}$.



На балку AC діють розподілене навантаження інтенсивністю $q_{max} = 2,5 \text{ кН/м}$ і пари сил з моментами $M_1 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і $M_2 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Визначити реакцію опори B , якщо довжина $AB = 4 \text{ м}$.

Відповідь: $R_B = 3,83 \text{ кН}$.

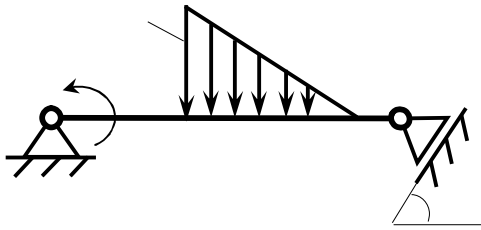
7



Визначити інтенсивність q_{max} розподіленого навантаження, при якому реакція шарніра B дорівнює $346\hat{I}$, якщо розміри $AB = 8i$, $AC = 6i$.

Відповідь: $q_{max} = 400\hat{I} / i$.

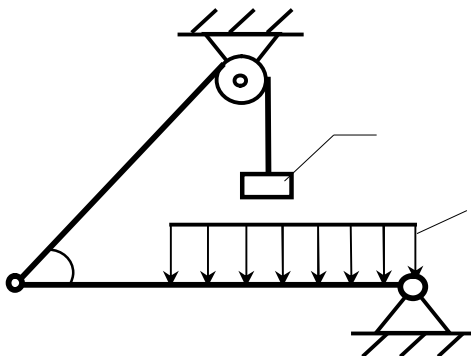
8



Визначити реакцію опори D в \hat{I} , якщо момент пари сил $M = 13\hat{eI} \cdot i$, інтенсивність розподіленого навантаження $q_{max} = 8\hat{eI} / i$, розміри $AB = BC = 3i$, $CD = 1i$.

Відповідь: $R_D = 10\hat{eI}$.

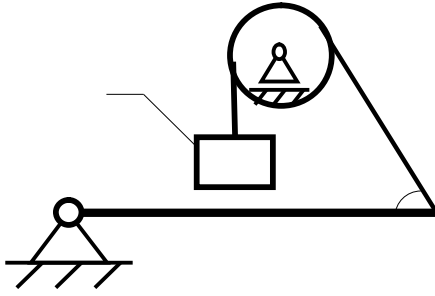
9



Балка AC закріплена в шарнірі C і підтримується в горизонтальному стані вірьовкою AD , яка перекинута через блок. Визначити інтенсивність розподіленого навантаження q , якщо довжини $BC = 5i$, $AC = 8i$, кут $\alpha = 45^\circ$, а вага вантажу 1 дорівнює $20\hat{eI}$.

Відповідь: $q = 9,05\hat{eI} / i$.

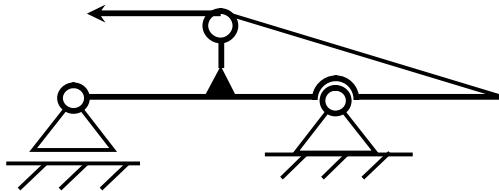
10



Визначити вагу вантажу 1 , необхідну для утримання однорідної балки AB в рівновазі в горизонтальному стані, якщо її вага дорівнює 346 kN .

Відповідь: $P_1 = 200\text{ kN}$.

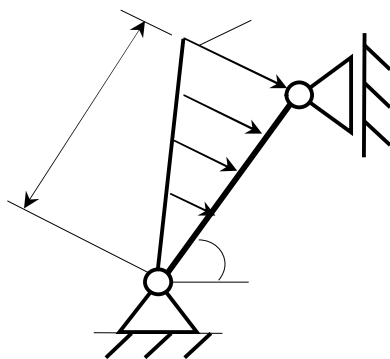
11



Визначити горизонтальну складову реакції нерухомого шарніра A балки, якщо натяг у троса $F = 35\text{ kN}$.

Відповідь: $X_A = 35\text{ kN}$.

12

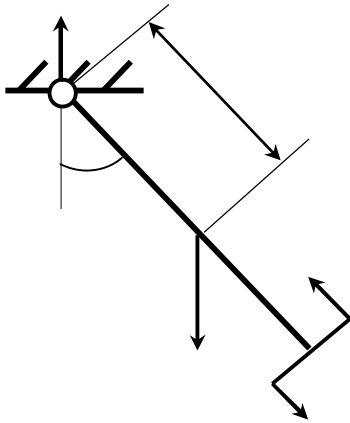


Визначити реакцію опори A , якщо $l = 0,3\text{ m}$, інтенсивність розподіленого навантаження

$q_{max} = 20\text{ kN/m}$, кут $\alpha = 60^\circ$.

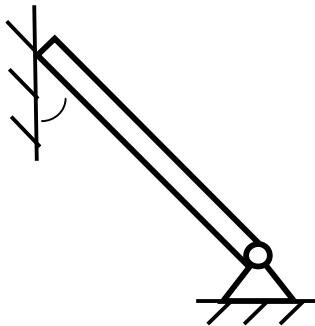
Відповідь: $R_A = 2,0\text{ kN}$.

13



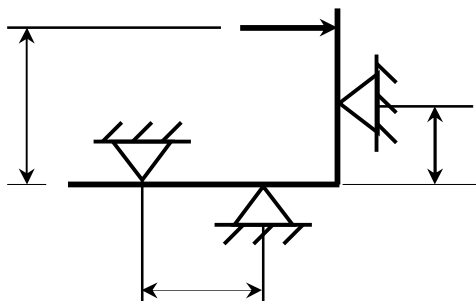
Маятник перебуває в рівновазі під дією пари сил з моментом $M = 0,5H \cdot l$ і другої пари сил, утвореної вагою \bar{P} і опорною реакцією \bar{R} . Знайти значення кута j , відхилення маятника в градусах, якщо $P = 10\acute{I}$ і відстань $l = 0,1l$.
Відповідь: $j = 30^\circ$.

14



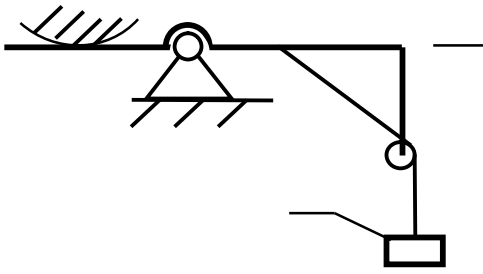
Кінець B однорідного бруса вагою $100\acute{e}l$, закріпленого в шарнірі A , опирається на гладеньку стіну. Визначити в $\acute{e}l$ тиск бруса на стіну, якщо кут $a = 60^\circ$.
Відповідь: $R_B = 86,6\acute{e}l$.

15



На косинець діє горизонтальна сила \bar{F} . На якій відстані h_2 необхідно розмістити опору B , для того, щоб реакції опор A і B були однакові, якщо розміри $l = 0,3l$, $h_1 = 0,4l$.
Відповідь: $h_2 = 0,1l$.

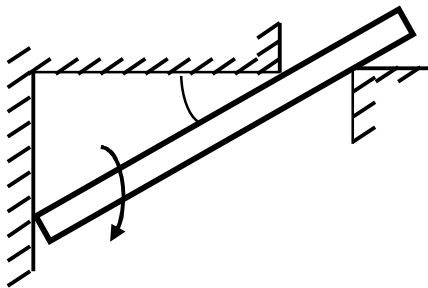
16



Визначити горизонтальну складову реакції C рами AB , якщо до неї підвішене вантаж 1 вагою 18 кН .

Відповідь: $X_C = 0$.

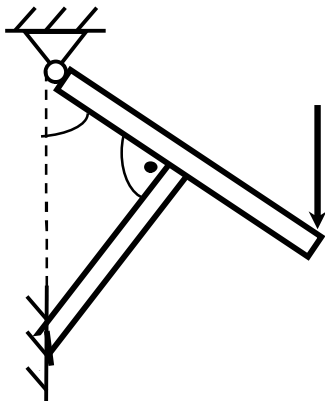
17



Стрижень утримується під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Визначити реакцію опори A , якщо момент пари сил $M = 25\text{ кН} \cdot \text{м}$.

Відповідь: $R_A = 0$.

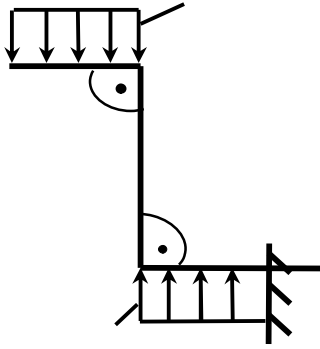
18



Балка AB опирається на стрижень CD . Визначити реакцію стрижня CD , якщо довжина $AB = 2\text{ м}$, $BD = 1/3 AB$, сила $F = 4\text{ кН}$, кут $\alpha = 60^\circ$.

Відповідь: $R_{CD} = 5,20\text{ кН}$.

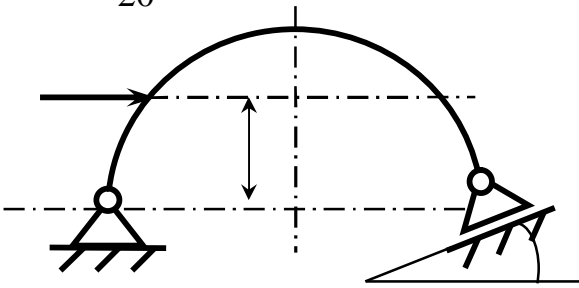
19



На зогнуту балку AB , защемлену в стіну, діють розподіленні навантаження інтенсивністю $q_1 = 5I/i$ і $q_2 = 3I/i$. Визначити реактивний момент жорсткого кріплення, якщо $BC = 3i$, $AD = 5i$.

Відповідь: $M_A = -60,0I \cdot i$.

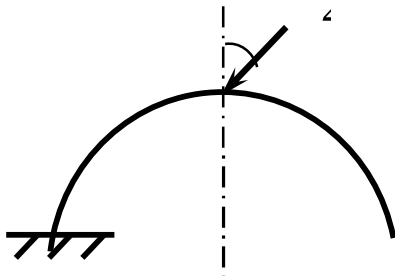
20



Визначити горизонтальну силу \bar{F} , при якій реакція опори B арки AB дорівнює $200I$, якщо розміри $a = 1i$, $AB = 4i$.

Відповідь: $F = 693I$.

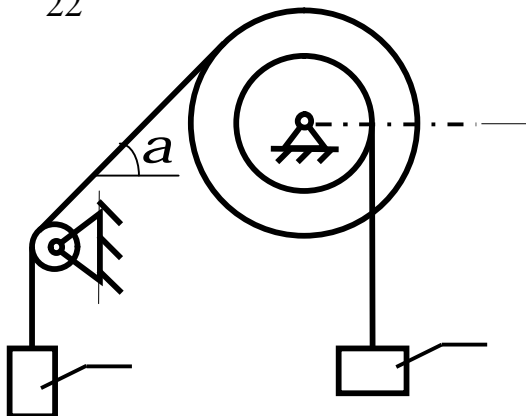
21



Арка, яка має форму півкола, жорстко защемлена в точці A . Визначити момент в защемленні, якщо сила $F = 100H$.

Відповідь: $M_A = 0$.

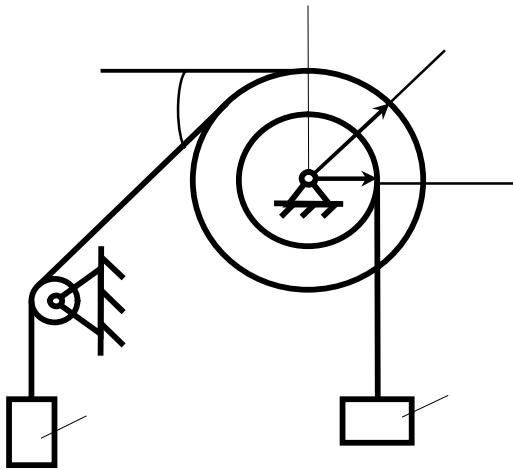
22



Вантажі 1 і 2 підвішені на канатах, намотаних на ступінчатий барабан. Визначити в eI горизонтальну складову реакції шарніра A , якщо кут $a = 60^\circ$, вага вантажу 1 дорівнює $30eI$. Система знаходиться в рівновазі.

Відповідь: $X_A = 15eI$.

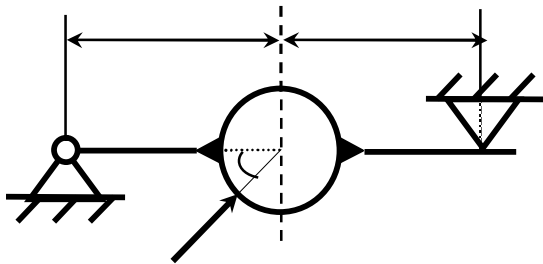
23



Вантажі 1 і 2 висять на канатах, намотаних на ступінчатий барабан. Визначити в \hat{e}_I вертикальну складову реакції шарніра A , якщо радіус $R = 2r$, кут $\alpha = 30^\circ$, вага вантажу 1 дорівнює $20\hat{e}_I$. Система перебуває в рівновазі.

Відповідь: $Y_A = 50\hat{e}_I$.

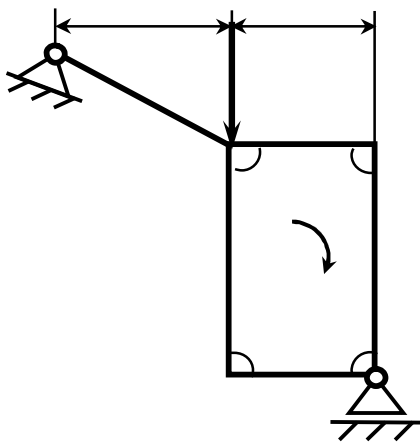
24



Стрижень AB жорстко зв'язаний з диском визначити в \hat{e}_I реакцію опори B , якщо сила $F = 24\hat{e}_I$, кут $\alpha = 30^\circ$.

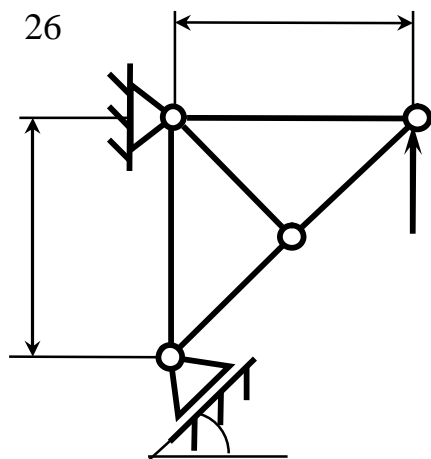
Відповідь: $R_B = 6,0\hat{e}_I$.

25



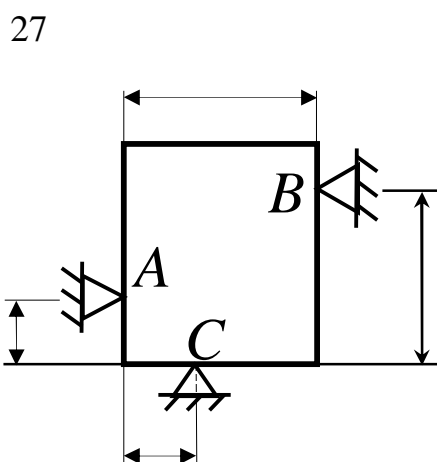
Стрижень AC жорстко зв'язаний з рамою. Визначити в \hat{e}_I реакцію опори B , якщо сили $F_1 = F_2 = 20\hat{e}_I$, момент пари сил $M = 80\hat{I} \cdot \hat{i}$, відстань $l = 2\hat{i}$.

Відповідь: $R_B = 50\hat{e}_I$.



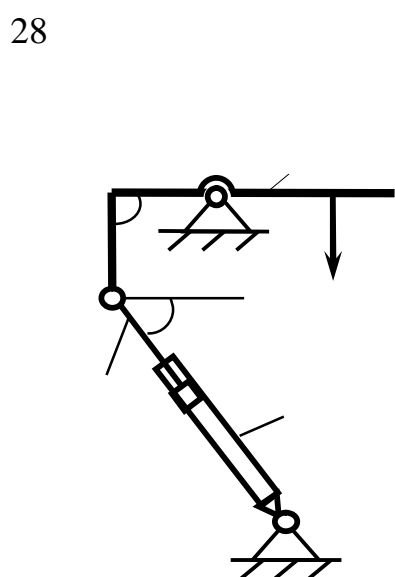
На ферму діє вертикальна сила F . При якому значенні в градусах кута α реакція опори $R_A = 2F$.

Відповідь: $\alpha = 30^\circ$.



Однорідна квадратна пластина вагою $10H$ закріплена в вертикальній площині на трьох опорах. Визначити реакцію опори A , якщо розміри $l_1 = 0,3i$, $l_2 = 0,1i$, $h_1 = 0,1i$, $h_2 = 0,2i$.

Відповідь: $R_A = 5,0H$.



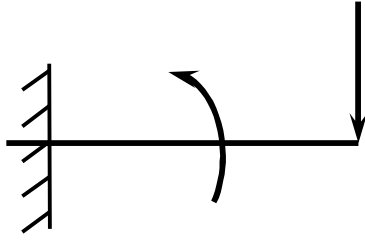
Драбина 1 вагою $G = 2\hat{e}\hat{I}$ утримується в горизонтальному стані за допомогою силового гідроциліндра 2.

Визначити в $\hat{e}\hat{I}$ силу, діючу на шток гідроциліндра, якщо момент сили $M_o(\bar{G}) = 2\hat{e}\hat{I} \cdot i$, кут $\alpha = 30^\circ$, відстань

$AO = AB = 0,5i$.

Відповідь: $S = 2,93\hat{e}\hat{I}$.

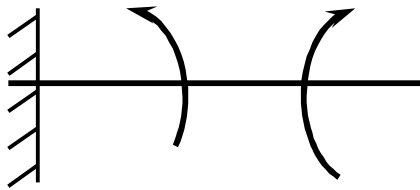
29



На консольну балку AB , защемлену в стіну, діє сила $F = 40\text{ kN}$ і пара сил з моментом $M = 20\text{ kN} \cdot \text{m}$. Визначити момент в защемленні, якщо довжина $AB = 4\text{ m}$.

Відповідь: $M_A = 140\text{ kN} \cdot \text{m}$.

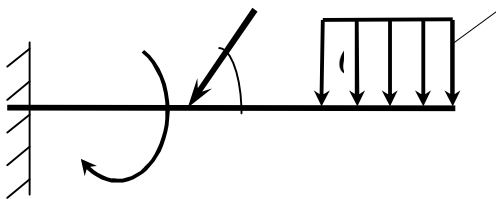
30



Консольна балка навантажена парами сил з моментами $M_1 = 1790\text{ kN} \cdot \text{m}$ і $M_2 = 2135\text{ kN} \cdot \text{m}$. Визначити момент в защемленні.

Відповідь: $M_A = -345\text{ kN} \cdot \text{m}$.

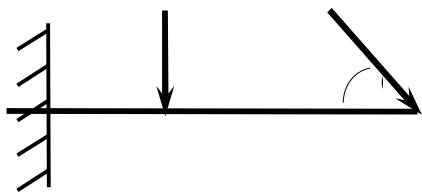
31



До балки AD прикладена пара сил з моментом $M = 200\text{ kN} \cdot \text{m}$, розподілене навантаження інтенсивністю $q = 20\text{ kN/m}$ і сила \bar{F} . Якою повинна бути ця сила, для того щоб момент в защемленні дорівнював $650\text{ kN} \cdot \text{m}$, якщо розміри $AB = BC = CD = 2\text{ m}$?

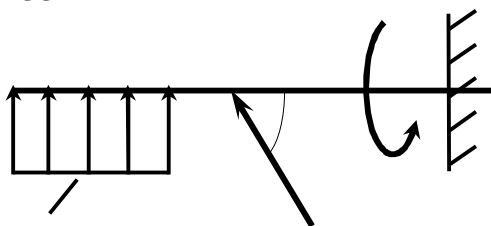
Відповідь: $F = 144\text{ kN}$.

32



Визначити момент в защемленні A , якщо $F_1 = 50\text{Í}$, $F_2 = 100\text{Í}$, розміри $AB = BC = 2i$.
Відповідь: $M_A = 446\text{Í} \cdot i$.

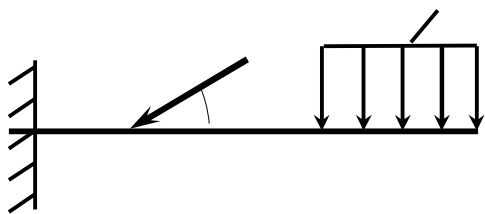
33



Визначити інтенсивність q розподіленого навантаження, при якому момент в защемленні A дорівнює $546\text{Í} \cdot i$, якщо сила $F = 173\text{Í}$, момент пари сил $M = 42\text{Í} \cdot i$, розміри $AB = CD = 2i$, $BC = 1i$.

Відповідь: $q = 36,0\text{Í} / i$.

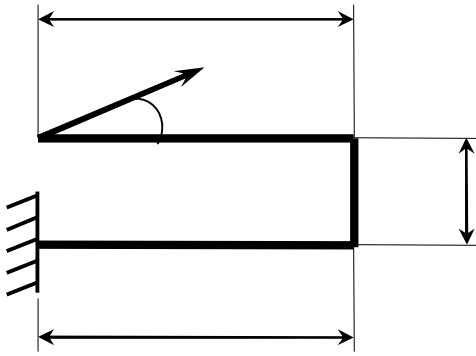
34



Визначити силу \bar{F} , при якій момент в защемленні A дорівнює $3700\text{Í} \cdot i$, якщо інтенсивність розподіленого навантаження $q = 200\text{Í} / i$, розміри $AB = BC = 2i$, $CD = 3i$.

Відповідь: $F = 400\text{Í}$.

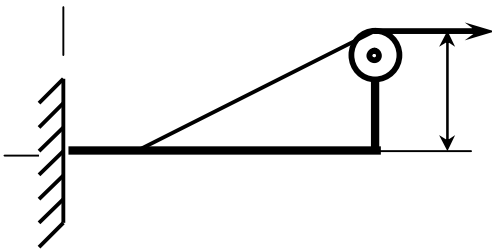
35



Визначити в $\hat{e}\hat{I} \cdot \hat{i}$ момент в за-
щемленні A , якщо сила
 $F = 80\hat{e}\hat{I}$, кут $\alpha = 30^\circ$, від-
стані $l_1 = 1,8\hat{i}$, $l_2 = 2\hat{i}$,
 $h = 0,4\hat{i}$.

Відповідь: $M_A = 35,7\hat{e}\hat{I} \cdot \hat{i}$.

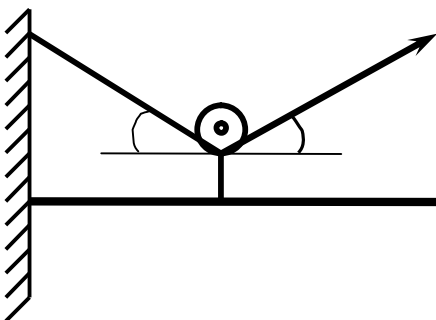
36



Визначити в $\hat{e}\hat{I} \cdot \hat{i}$ момент в жор-
сткому защемленні A консольної
балки, якщо сила натягу троса
 $F = 50\hat{e}N$ і відстань $h = 0,5\hat{i}$.

Відповідь: $M_A = 25,0\hat{e}N \cdot \hat{i}$.

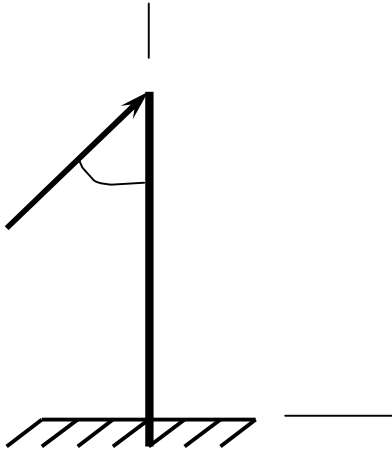
37



Визначити в $\hat{e}\hat{I}$ горизонтальну
складову реакції в жорсткому зачеп-
ленні A консольної балки, якщо си-
ла натягу троса $F = 25kN$, кут
 $\alpha = 30^\circ$.

Відповідь: $X_A = 0$.

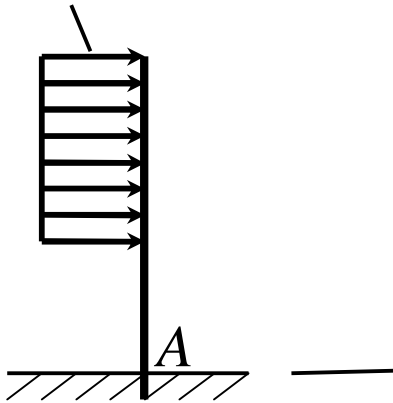
38



Визначити силу F в \hat{e}_l , при якій момент в жорсткому зачепленні A дорівнює $56kH \cdot l$, якщо відстань $AB = 5,66l$

Відповідь: $F = 14,0\hat{e}H$.

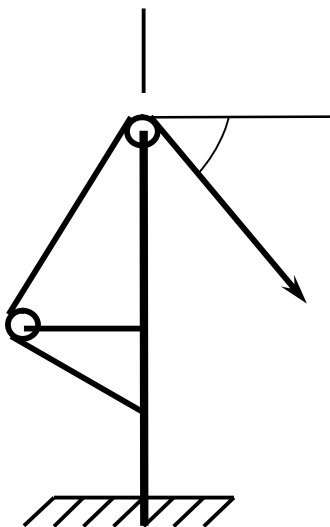
39



Визначити інтенсивність q розподіленого навантаження, при якому момент в жорсткому зачепленні A дорівнює $480H \cdot l$, якщо розміри $AB = 3l$, $BC = 2l$.

Відповідь: $q = 60,0 \hat{I} \hat{l}$.

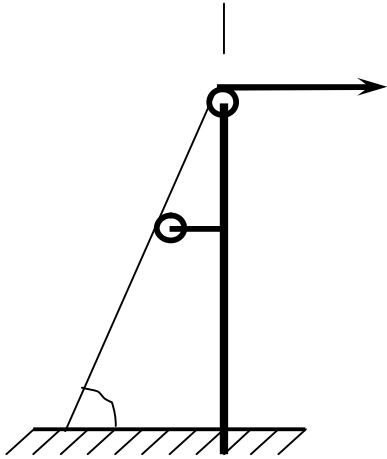
40



Визначити в \hat{e}_l вертикальну складову реакції в жорсткому зачепленні A консольної балки, якщо сила натягу троса $F = 10\hat{e}H$ і кут $\alpha = 30^\circ$.

Відповідь: $y_A = 5\hat{e}H$.

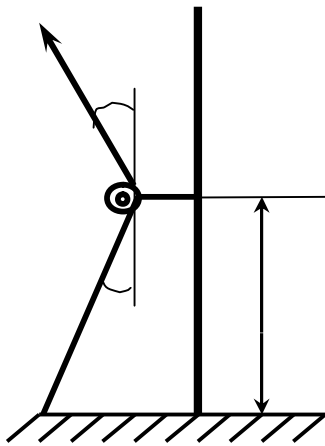
41



Визначити в \hat{e}_I вертикальну складову реакції в жорсткому зачепленні A консольної балки, якщо сила натягу троса $F = 4\hat{e}H$ і кут $\alpha = 60^\circ$.

Відповідь: $Y_A = 3,46\hat{e}H$.

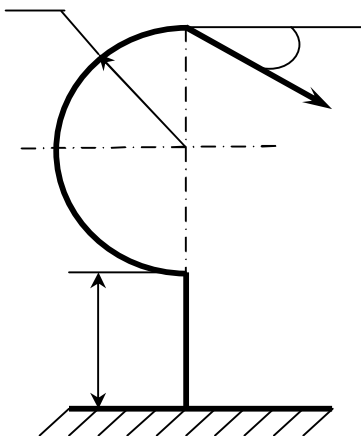
42



Визначити в $\hat{e}H \cdot \hat{i}$ момент в жорсткому зачепленні A консольної балки, якщо сила натягу троса $F = 40\hat{e}H$, відстань $h = 3\hat{i}$, кут $\alpha = 30^\circ$.

Відповідь: $M_A = 120\hat{e}H \cdot \hat{i}$.

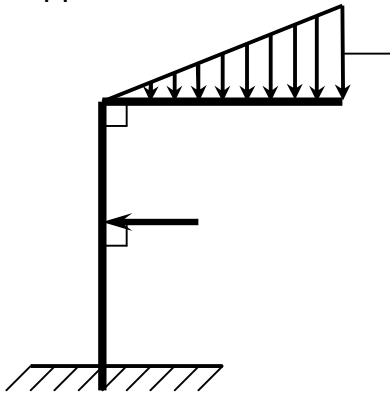
43



На кронштейн діє сила $F = 10H$. Знайти максимальну довжину l балки, при якій момент пари сил, виникаючий в жорсткому зачепленні A , не перевищує $1H \cdot \hat{i}$, якщо радіус $r = 0,05\hat{i}$, кут $\alpha = 60^\circ$.

Відповідь: $l = 0,10\hat{i}$.

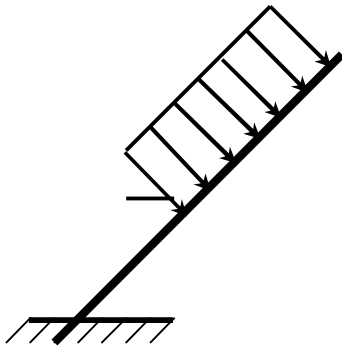
44



Визначити модуль сили \bar{F} при якій момент в жорсткому защемленні A дорівнює $300\text{Í} \cdot \text{ì}$, якщо інтенсивність розподіленого навантаження $q_{\max} = 400\text{Í} \text{ ñ}$, розміри $AB = 3\text{ì}$, $BC = 2,4\text{ì}$, $BD = 1\text{ì}$.

Відповідь: $F = 234\text{H}$.

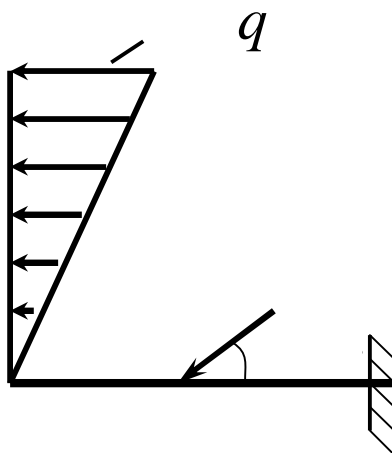
45



Визначити довжину ділянки BC , при якій момент в жорсткому защемленні A дорівнює $180\text{H} \cdot \text{ì}$, якщо розмір $AC = 2\text{ì}$ і інтенсивність розподіленого навантаження $q = 30\text{Í} \text{ ñ}$.

Відповідь: $BC = 2,0\text{ì}$.

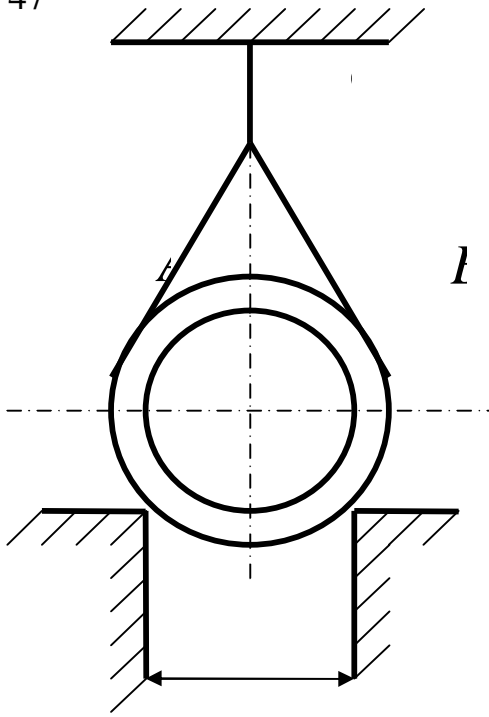
46



Визначити модуль моменту в жорсткому защемленні A , якщо сила $F = 150\text{H}$, інтенсивність q_{\max} розподіленого навантаження дорівнює $40\text{Í} \text{ ñ}$, розміри $AD = BD = 1\text{ì}$, $BC = 3\text{ì}$.

Відповідь: $M_A = 195\text{H} \cdot \text{ì}$.

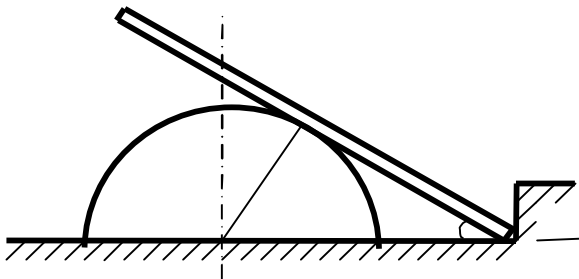
47



Трубу, вага якої $2\epsilon H$ і радіус $R = 0,5l$, охоплюють два канати до кожної з чотирьох частин канатів прикладена сила $250H$. Визначити тиск труби на горизонтальні паралельні ребра виступів, якщо відстань між стінками цих виступів $l = 0,6l$, $AO = OB = 1,2l$.

Відповідь: $N_1 = N_2 = 673H$.

48



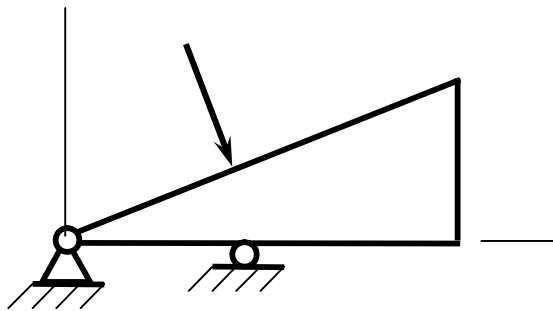
Однорідний стрижень AB вагою $10H$ упирається кінцем A у виступ і вільно лежить на гладенькій поверхні півциліндра. Визначити реакцію опор, якщо стрижень AB нахилений до горизонту під кутом 30° , і $AC = 3/4 AB$.

Відпо-

відь: $X_A = -2,9H$, $Y_A = 5H$,

$R_C = 5,8H$.

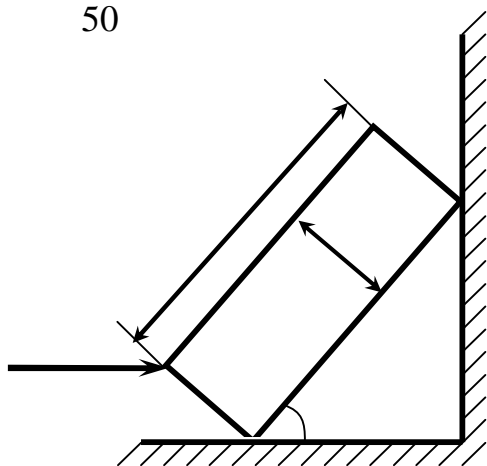
49



Однорідна пластинка, вага якої $5H$, має форму прямокутного трикутника. Вона шарнірно прикріплена до опори O і вільно спирається на гладеньку опору C . Перпендикулярно до сторони OA на пластинку діє сила, що дорівнює $10,4H$. $OD = BD$. Визначити реакції опор, якщо $AB = 10\text{ м}$, $OA = 24\text{ м}$, $OC = 8\text{ м}$.

Відповідь: $X_D = -4H$, $Y_D = -12,3H$, $R_C = 26,9H$.

50



Однорідна прямокутна плита $ABCD$, вага якої $400H$, одним ребром упирається на гладеньку стіну, а другим – на гладеньку підлогу. Грань AB нахилена під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. До середини одного з ребер прикладена горизонтальна сила \bar{Q} , лінія дії якої перетинає лінію дії ваги плити. $a = 0,5\text{ м}$, $b = 1,5\text{ м}$. Визначити силу \bar{Q} при рівновазі плити.

Відповідь: $Q = 661,8H$.

3.3 Тертя ковзання. Розв'язання задач статички при наявності сил тертя

Припущення про ідеально гладеньку поверхню суперечить досліду. Дійсно, дотик двох тіл відбувається не в одній лише точці. Обидва тіла зазнають при цьому малі деформації, внаслідок яких вони дотикаються по певній поверхні. Дослід переконує в тому, що крім нормальної складової реакції \bar{N} виникає ще дотична \bar{F}_t , яка називається силою тертя $\bar{F}_{тр}$ (рис.3.4).

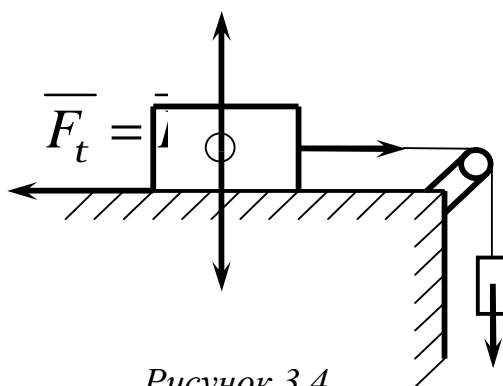


Рисунок 3.4

Розрізняють тертя спокою, або статичне тертя, що відбувається при відносному спокої статичних тіл, і тертя руху, що відбувається при відносному русі цих тіл. Наближені закони тертя ковзання або закони тертя першого роду встановили Г. Амонтон і Ш. Кулон. Ці закони відповідають простим дослідом, на основі яких вони встановлені. У теоретичній механіці тертям ковзання цікавляться лише у зв'язку з визначенням реакцій в'язей.

Найпростіші властивості тертя можна встановити, користуючись простим приладом, який називається трибометром. Прилад складається зі стола, по якому рухається тіло вагою \bar{P} (рис.3.4), це тіло починає рухатися за допомогою нитки, перекинutoї через нерухомий блок A , до кінця якої підвішений вантаж вагою \bar{Q} . Нехай у початковий момент тіло перебувало у спокої. Якщо поступово збільшувати силу \bar{Q} , то тіло все одно залишається у спокої. Отже, горизонтальна складова реакції стола $\bar{F}_t = \bar{F}_{тр}$.

врівноважує прикладену силу \bar{Q} і зростає разом з нею доти, доки рівновага не порушиться. Це відбудеться тоді, коли сила тертя досягне свого максимального значення \bar{F}_{max} .

Досліди показали, що максимальне значення сили тертя пропорційне нормальній реакції поверхні тіла:

$$F_{max} = fN . \quad (3.12)$$

Коефіцієнт пропорційності f називається коефіцієнтом тертя ковзання (або коефіцієнтом тертя першого роду) і визначається дослідним шляхом. Значення його для різних матеріалів наведено у довідниках.

Механізм тертя є досить складним фізичним процесом. Як показують досліди, коефіцієнт тертя першого роду є сталою величиною лише в обмеженому діапазоні швидкостей відносного руху і сил стискання поверхонь тіл. При збільшенні відносної швидкості руху тіл коефіцієнт тертя спочатку зменшується, а потім починає зростати. У деяких аномальних випадках тертя руху може бути не меншим ніж тертя спокою (наприклад, матеріали з високою пружністю – гума тощо). Коли сила тертя досягає значення \bar{F}_{max} , настає стан граничної рівноваги. Досить незначного приросту сили \bar{Q} , щоб тіло зрушилося з місця. Як тільки тіло почне рухатися, сила тертя відразу зменшиться. Важливо зазначити, що сила тертя завжди напрямлена у бік, протилежний напрямку відносної швидкості тіл.

Коефіцієнт тертя залежить від матеріалу стичних поверхонь, чистоти оброблення їх, фізичного стану. Він не залежить від площі стичних поверхонь тіл.

Зауважимо, що коли тіло перебуває на горизонтальній площині (рис. 3.5), то значення нормальної складової реакції N дорівнює вазі тіла P . Якщо тіло перебуває на похилій площині (рис. 3.6), то

$$N = P \cos \alpha .$$

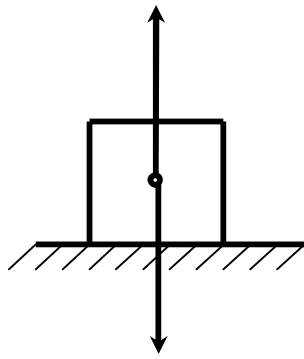


Рисунок 3.5

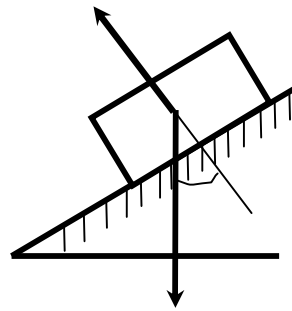


Рисунок 3.6

Викладені питання про тертя ковзання стосуються тільки сухого тертя. Якщо є мастило, то існують свої закони тертя. Основоположником теорії тертя про наявність мастила є учений М. Петров. Подальший розвиток ця теорія дістала у працях М. Жуковського та інших дослідників.

Зазначимо, що при терті відбувається розсіювання енергії, тобто перетворення механічної енергії в теплову, тому у вузлах із тертям температура тіл підвищується.

У багатьох випадках сили тертя розглядають як джерела шкідливих опорів руху машин чи приладів. Проте в ряді інших випадків, навпаки, без сил тертя неможливий рух. Наприклад, саме така роль тертя при ходьбі людини, русі всіх видів колісних транспортних машин, прокатних станів, та в інших випадках.

Розглянемо деякі випадки застосування законів тертя ковзання.

Приклад 1

Тіло, сила ваги якого $P = 100H$ утримується в рівновазі силою \bar{T} на шорсткій похилій площині, яка має кут нахилу $\alpha = 45^\circ$. Коефіцієнт тертя ковзання між тілом і площиною $f = 0,6$. Сила \bar{T} діє на тіло під кутом $\beta = 15^\circ$ до лінії найбільшого скату (рис 3.7). Визначити числове значення сили \bar{T} при рівновазі тіла на шорсткій похилій площині.

Рішення

До тіла прикладені сили $\bar{N}, \bar{P}, \bar{T}$ і сила тертя \bar{F} . Можливі два випадки граничної рівноваги тіла і відповідно два граничних значення \bar{T} при двох напрямках сили тертя по похилій площині вниз і вгору в залежності від напрямлення можливого ковзання вздовж похилої площини. Для складення рівнянь рівноваги тільки один раз введемо $f_1 = kf$, де $k = \pm 1$.

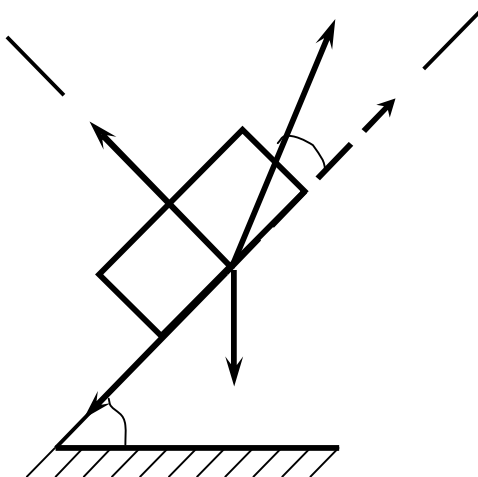


Рисунок 3.7

Складемо умови рівноваги у вигляді суми проекцій сил на координатні осі для обох випадків:

$$T \cos b - F - P \sin a = 0 \quad ;$$

$$T \sin b + N - P \cos a = 0 \quad .$$

За законом Кулона

$$F = f_1 N = kfN .$$

Вирішуючи це рівняння відносно T отримуємо

$$T = P(\sin a + kf \cos a) / (\cos b + kf \sin b) .$$

Відкіля при $k = +1$

$$T_1 = P(\sin a + f \cos a) / (\cos b + f \sin b) \approx 102H ,$$

при $k = -1$

$$T_2 = P(\sin a - f \cos a) / (\cos b - f \sin b) \approx 35H .$$

Таким чином, сила \bar{T} при рівновазі тіла повинна відповідати умові $35 \leq T \leq 102H$.

Приклад 2

Однорідний важкий стрижень AB довжиною l опирається кінцем A на гладеньку вертикальну стіну, а другим B на шершаву вертикальну стіну (рис 3.8). Відстань між стінами h , притому $h < l$. Визначити коефіцієнт тертя стіни f при якому можлива рівновага стрижня.

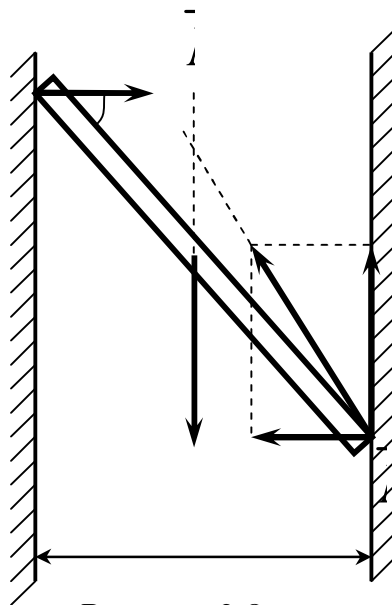


Рисунок 3.8

Рішення

Розглянемо випадок, коли точка A стрижня знаходиться вище точки B . Рівновага стрижня неможлива, якщо точка A розташована нижче точки B . На стрижень діє сила ваги P , прикладена посередині стрижня, нормальна реакція гладенької стіни \bar{N}_A і реакція шершавої стінки \bar{R}_B , яку розкладемо на нормальну реакцію \bar{N}_A і силу тертя \bar{F}_B .

Складемо умови рівноваги плоскої системи сил:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad N_A - N_B = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad F_B - P = 0,$$

$$\sum_i M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad Ph/2 - Nlsina = 0.$$

До цих умов слід додати нерівність для сили тертя:

$$F_B \leq fN_B.$$

Із рівнянь рівноваги знаходимо

$$N_A = N_B = N, \quad F_B = P, \quad N = N_A = Ph/(2lsina).$$

Із геометричних умов задачі

$$sina = \sqrt{l^2 - h^2} / l.$$

Таким чином, для сили тертя F_B маємо рівність і нерівність

$$F_B = P, \quad F_B \leq fPh/(2\sqrt{l^2 - h^2}).$$

Виключимо з них силу тертя F_B , після скорочення на P , отримуємо

$$1 \leq fh / (2\sqrt{l^2 - h^2}).$$

Шукана умова для коефіцієнта тертя f при рівновазі стрижня набуває такого вигляду

$$f \leq 2\sqrt{l^2 - h^2} / h.$$

Приклад 3

Однорідний тонкий брусок AB вагою \bar{G} опирається кінцем A на вертикальну стіну і точкою D на ребро. На кінці B підвішений вантаж $G_1 = G/2$. Відомі відстані за горизонталлю і вертикаллю: $AE = 2a$ і $DE = a$, а також коефіцієнти тертя між бруском і стіною $f_A = 0,3$ і бруском і ребром $f_D = 0,2$.

Визначити найменшу довжину бруска AB , при якій кінець A не ковзне униз, а також нормальні реакції опор A і D (рис. 3.9).

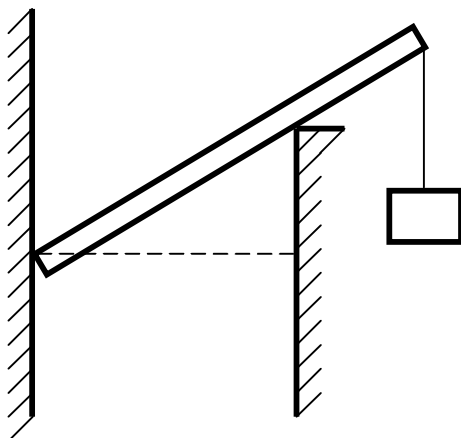


Рисунок 3.9

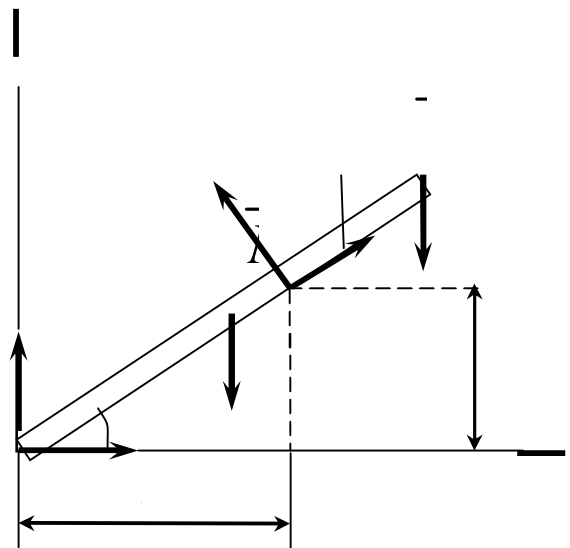


Рисунок 3.10

Рішення

Розглянемо систему сил прикладених до бруска AB , який знаходиться у граничному стані спокою. На брусок діють задані сили \bar{G} і \bar{G}_1 , нормальні реакції \bar{N}_A і \bar{N}_D в точках A і D і максимальні сили тертя в цих же точках \bar{F}_A і \bar{F}_D , напрямлені протилежно напрямленню можливого ковзання цих точок бруска (рис. 3.10). Модулі цих сил тертя мають такий вираз:

$$F_A = f_A N_A, \quad F_D = f_D N_D.$$

Позначимо довжину бруска: $AB = l$.

Визначимо відстань AD , $\cos a$, $\sin a$:

$$AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = a\sqrt{5},$$

$$\cos a = \frac{AE}{AD} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin a = \frac{ED}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Складемо три рівняння рівноваги плоскої системи сил, прикладених до бруска:

$$\sum_i M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad -G \cos a / 2 + N_D a \sqrt{5} - G_1 \cos a = 0, \quad (3.13)$$

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad N_A - N_D \sin a + F_D \cos a = 0, \quad (3.14)$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad F_A - G + N_D \cos a + F_D \sin a - G_l = 0. \quad (3.15)$$

Ці рівняння мають три невідомі величини: l , N_A і N_D , так як залежність сил тертя від нормальних реакцій зв'язна.

Виразимо в рівняннях (3.14) і (3.13) сили тертя через нормальні реакції:

$$\begin{aligned} N_A - N_D \sin a + f_D N_D \cos a &= 0, \\ f_A N_A - G + N_D \cos a + f_D N_D \sin a - G/2 &= 0. \end{aligned}$$

Визначимо з цих рівнянь N_A і N_D .

З першого рівняння:

$$N_A = N_D (\sin a - f_D \cos a).$$

Підставивши цей вираз в друге рівняння, знайдемо N_D :

$$f_A N_D (\sin a - f_D \cos a) - G + N_D \cos a + f_D N_D \sin a - G/2 = 0,$$

відкіля

$$N_D = \frac{3G/2}{(f_A + f_D) \sin a + (1 - f_A f_D) \cos a}.$$

Підставивши значення коефіцієнтів тертя і функцій кута a , отримаємо:

$$N_D = \frac{3G/2}{(0,3 + 0,2) \frac{1}{\sqrt{5}} + (1 - 0,3 \cdot 0,2) \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot 2,38} G = 0,63\sqrt{5}G$$

Визначимо N_A :

$$N_A = 0,63\sqrt{5}G \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 0,2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 0,38G.$$

Підставивши знайдені значення N_D і $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ у рівняння моментів (3.13), отримаємо:

$$-G \frac{l}{2} \frac{2}{\sqrt{5}} + 0,63\sqrt{5}Ga\sqrt{5} - \frac{G}{2}l \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,$$

відкіля довжина бруска $l = 1,575a\sqrt{5}$, тобто $AB = 1,575AD$.

Визначимо довжину ділянки DB :

$$DB = AB - AD = 0,575AD.$$

3.4. Тертя кочення. Розв'язання задач статки, з урахуванням тертя кочення

Крім тертя ковзання, розглянемо ще один вид тертя, що виникає при коченні тіл (тертя кочення).

У теоретичній механіці тертям кочення цікавляться лише з точки зору визначення реакцій опори. Більш повне його вивчення виходить за рамки механіки твердого тіла. Нехай до катка радіусом r перпендикулярно до його осі O_z прикладена горизонтальна сила \bar{F} (рис. 3.11) крім того, на каток діє сила тяжіння \bar{P} .

Внаслідок деформації катка і горизонтальної опори поверхні, на якій міститься каток, вони торкаються один одного не в одній точці, а за деякою ділянкою контакту. Нормальна реакція опори \bar{N} зміститься на певну відстань b .

Сила тертя \bar{F}_m виникає у тому місці, де каток торкається опорної поверхні, тобто в точці C . У разі рівноваги катка сила \bar{F}_m дорівнює за модулем силі \bar{F} , але напрямлена у протилежний бік. Отже \bar{F} і \bar{F}_m утво-

рюють пару сил, що врівноважується парою \bar{N} і \bar{P} (рис.3.11). Момент пари (\bar{N} , \bar{P}) називається моментом тертя кочення. Плечем цієї пари є величина d , яка називається коефіцієнтом тертя ковзання, і на відміну від коефіцієнта тертя кочення має розмірність довжини.

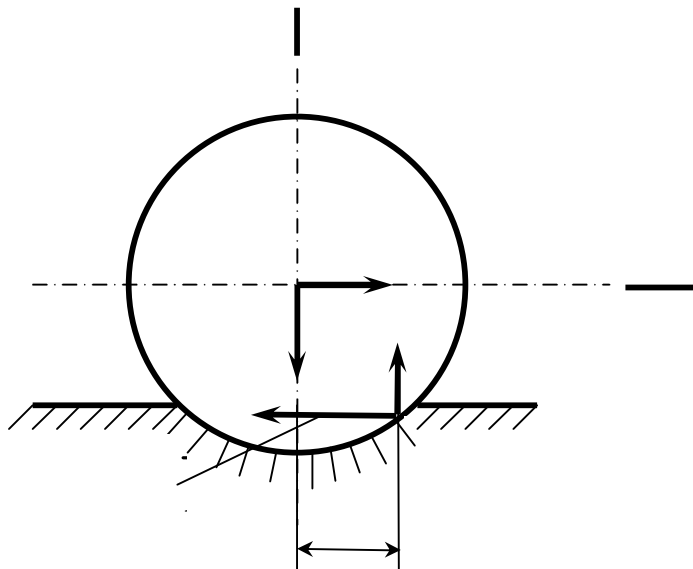


Рисунок 3.11

Прирівнявши момент зазначених пар

$$Fr = Pd, \quad (3.16)$$

знайдемо вираз для визначення коефіцієнта тертя кочення d :

$$d = \frac{Fr}{P}. \quad (3.17)$$

Досвід показує, що величина d у досить широкому діапазоні не залежить від радіуса циліндра (катка) і різна для різних матеріалів. Очевидно, що тіло буде в рівновазі, якщо момент активної сили відносно точки C не більший від моменту тертя, тобто

$$Fr \leq Pd.$$

Наявність тертя не змінює методу розв'язання задач статки. Реакції в'язей при наявності тертя ковзання визначають за формулою (3.12), а у разі тертя кочення – за формулами (3.16, 3.17).

Розглянемо розв'язання задач статки, з урахуванням тертя кочення на такому прикладі.

Приклад

Визначити, при яких значеннях кута α (рис.3.12) циліндр радіуса R , лежачи на похилій площині, залишається в спокою, якщо коефіцієнт тертя кочення дорівнює d .

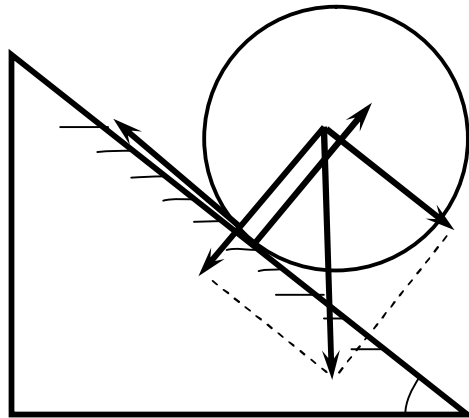


Рисунок 3.12

Рішення

Розглянемо граничне положення рівноваги, коли $\alpha = \alpha_1$. Розклавши силу \bar{P} на складові \bar{P}_1 і \bar{P}_2 (рис. 3.12), знаходимо, що в цьому випадку здвигаюча сила $Q_{i\delta} = P_1 = P \cdot \sin \alpha_1$, а нормальна реакція $N = P_2 = P \cdot \cos \alpha_1$.

Тоді

$$P \cdot \sin \alpha_1 = \left(\frac{d}{R} \right) \cdot P \cdot \cos \alpha_1,$$

або

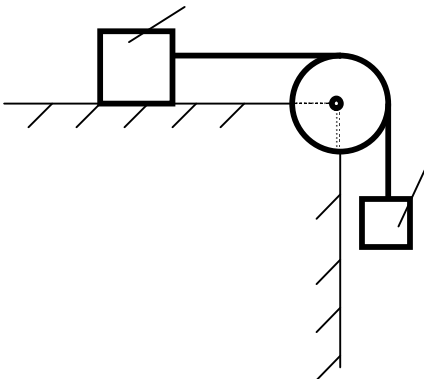
$$\operatorname{tg} a_1 = d/R.$$

При зменшенні d до нуля кут a_1 , теж зменшується до нуля. Звідки заключаємо, що рівновага утримується при будь-якому куті $a < a_1$. Отриманим результатом можна скористатися для експериментального визначення коефіцієнта d .

Циліндр при $a = a_1$ буде в спокою, якщо одночасно коефіцієнт тертя ковзання f_0 циліндра буде такий, що $f_0 \geq \operatorname{tg} a_1$, тобто якщо $f_0 > d/R$, що звичайно має місце. Але якщо $f_0 < d/R$, то при $a = a_1$ циліндр не буде в спокою і почне ковзати по площині.

3.5 Контрольні завдання для самостійної роботи

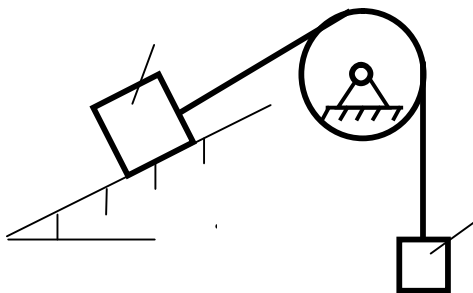
1



Якою має бути найменша вага 2, для того щоб тіло 1 вагою $200H$ почало ковзати по горизонтальній площині, якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$.

Відповідь: $P_2 = 40H$.

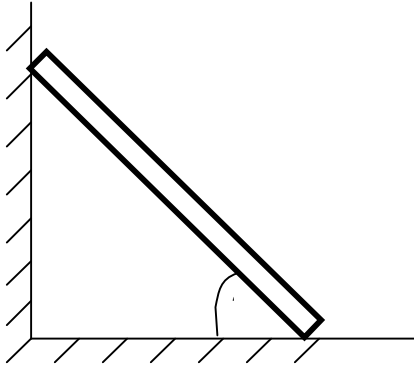
2



Визначити найменшу вагу тіла 1, при якій воно ковзає донизу по площині DE , якщо вага вантажу 2 дорівнює $320H$. Коефіцієнт тертя ковзання між тілом 1 і площиною DE дорівнює $0,2$.

Відповідь. $P_1 = 979H$.

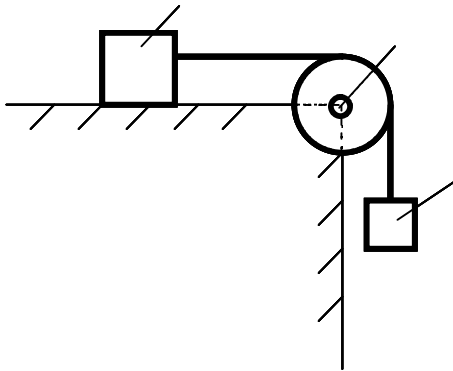
3



Однорідний брус AB спирається в точці A на гладеньку стіну, а в точці B на негладку підлогу. Визначити найменший коефіцієнт тертя ковзання між брусом і підлогою при якому брус залишається в указаному положенні в покої.

Відповідь: $f = 0,5$.

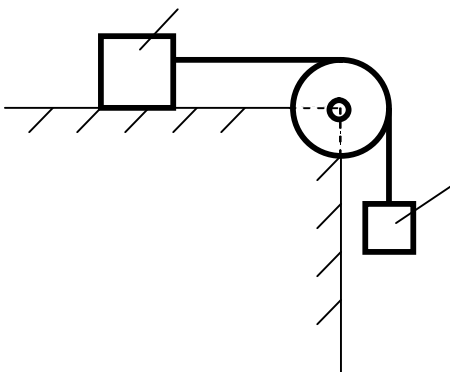
4



Визначити найменший коефіцієнт тертя ковзання між вантажем 1 вагою $400H$ і площиною DC , при якому вантаж 1 залишається в спокою, якщо вага вантажу 2 дорівнює $96H$.

Відповідь: $f = 0,24$.

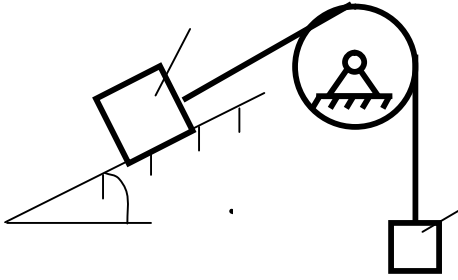
5



Визначити найменшу вагу вантажу 1, при якій він залишається в спокою, якщо вага вантажу 2 дорівнює $140H$, а коефіцієнт тертя ковзання між вантажем 1 і площиною дорівнює $0,2$.

Відповідь: $P_1 = 700H$.

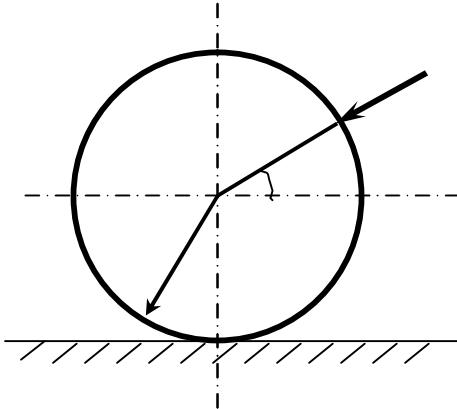
6



Якою має бути вага вантажу 2 для того щоб вантаж 1 вагою 100H залишався в спокою на похилій площині, якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,3$?

Відповідь: $P_2 = 76\text{H}$.

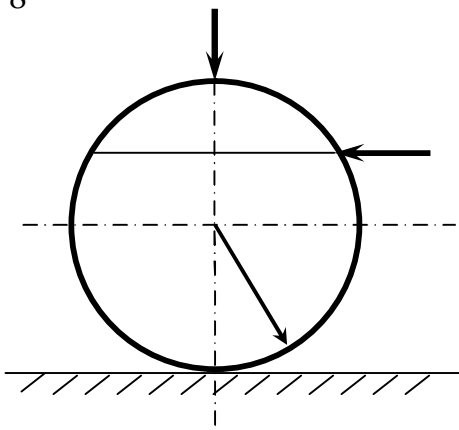
7



До однорідного катка вагою 700H прикладена сила \vec{F} . Визначити найменший модуль цієї сили, для того щоб каток почав котитися з ковзанням, якщо радіус $R = 1\text{м}$, коефіцієнти тертя ковзання і кочення відповідно дорівнюють $f = 0,2$, $d = 0,008\text{м}$.

Відповідь: $F = 183\text{H}$.

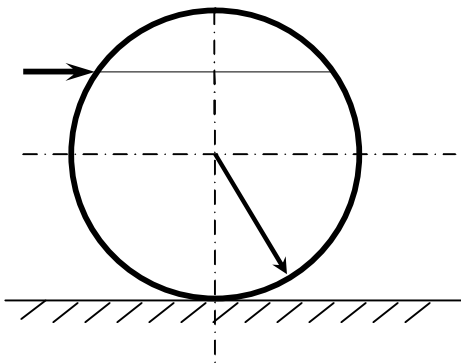
8



На однорідний каток вагою 2kH діє горизонтальна сила $F_2 = 10\text{H}$ і вертикальна сила \vec{F}_1 . Яким повинен бути найбільший модуль сили \vec{F}_1 , для того, щоб почалось кочення катка, якщо коефіцієнт тертя кочення $d = 0,005\text{л}$, радіус $R = 0,8\text{м}$, розмір $OA = 0,4\text{м}$?

Відповідь: $F_1 = 400\text{л}$.

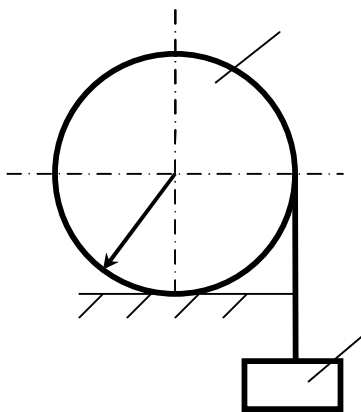
9



До однорідного катка вагою 2кН прикладена горизонтальна сила \bar{F} . Визначити найбільший модуль сили \bar{F} , при якому каток ковзає і не ковтається, якщо коефіцієнт тертя кочення $d = 0,006\text{м}$, коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,2$, радіус $R = 0,6\text{м}$, розмір $OA = 0,4\text{м}$.

Відповідь: $F = 12,0\text{кН}$.

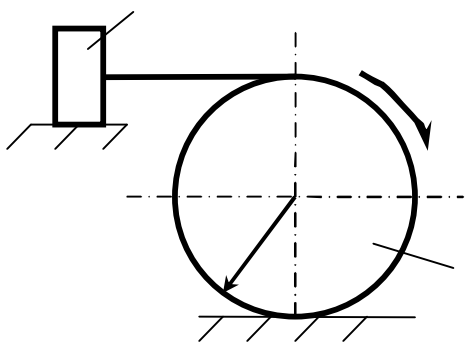
10



До катка 1 за допомогою нерозтяжної нитки підвішений вантаж 2. Визначити найбільшу вагу цього вантажу, при якій каток 1 вагою $3,2\text{кН}$ залишається в спокою, якщо коефіцієнт тертя кочення $d = 0,004\text{м}$, радіус $R = 32,4\text{см}$.

Відповідь: $P_2 = 40\text{кН}$.

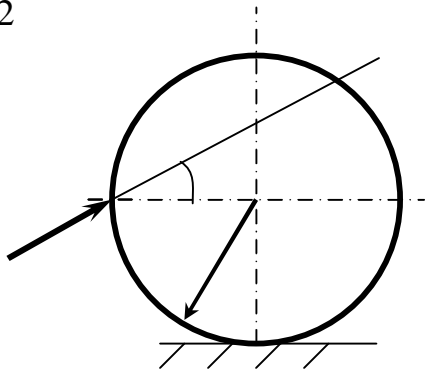
11



Однорідний каток 2 вагою 4кН зв'язаний з тілом 1 нерозтяжною ниткою. Радіус $R = 0,5\text{м}$, коефіцієнт тертя кочення $d = 0,005\text{м}$, момент пари сил $M = 50\text{Н} \cdot \text{м}$. Визначити найбільшу вагу вантажу 1, при якій він почне ковзати, якщо коефіцієнт тертя ковзання для катка і тіла $f = 0,2$.

Відповідь: $P_1 = 150\text{Н}$.

12



Визначити найменшу силу \bar{F} , необхідну для кочення катка радіуса $R = 0,3\text{м}$, якщо граничний момент тертя кочення дорівнює $3,46\text{Н}$ кут $\alpha = 30^\circ$, відстань $OA = 0,2\text{м}$.

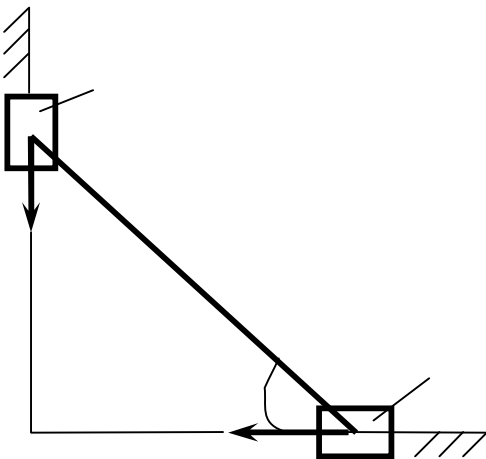
Відповідь: $F = 7,99\text{Н}$.

Основні зауваження до наступних прикладів 13 – 18.

На рисунках зображені два повзуни, які поєднані шарнірно за допомогою стрижнів, напрямлених під різними кутами.

За заданими умовами до рисунків необхідно знайти коефіцієнти тертя ковзання (завдання 13-16) або прикладені до повзунів сили (завдання 17,18) із умов рівноваги всієї системи.

13



Дано:

$$Q_1 = 60$$

$$Q_2 = 50$$

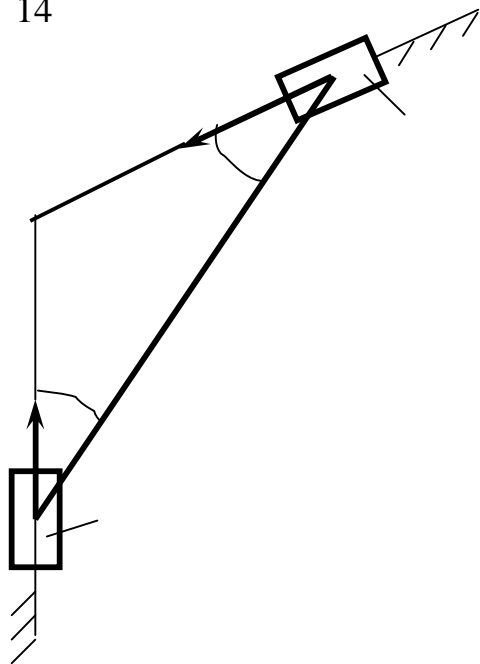
$$f_2 = 0,2$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Знайти:

.

14



Дано:

$$Q_1 = 60$$

$$Q_2 = 50$$

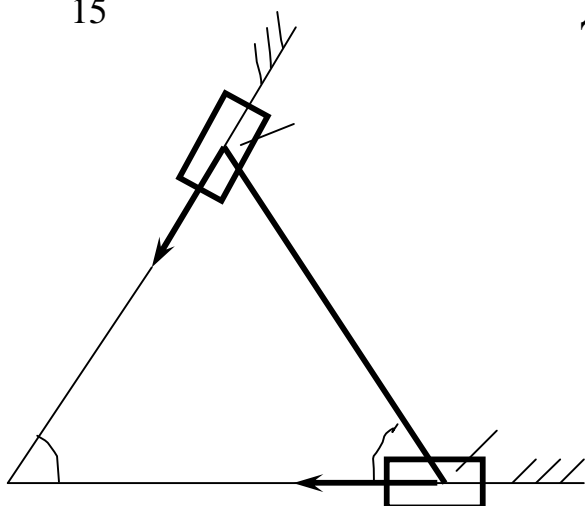
$$f_2 = 0,2$$

$$a = 30^\circ$$

Знайти:

.

15



Дано:

$$Q_1 = 50$$

$$Q_2 = 60$$

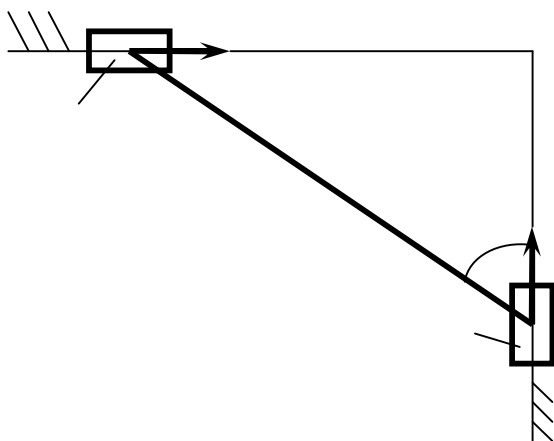
$$f_1 = 0,1$$

$$a = 60^\circ$$

Знайти:

.

16



Дано:

$$Q_1 = 60$$

$$Q_2 = 50$$

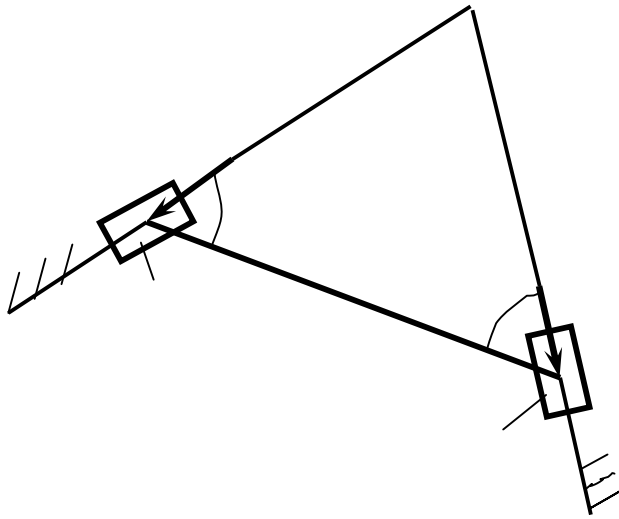
$$f_1 = 0,1$$

$$a = 60^\circ$$

Знайти:

 f_2 .

17



Дано:

$$Q_1 = 60$$

$$f_1 = 0,$$

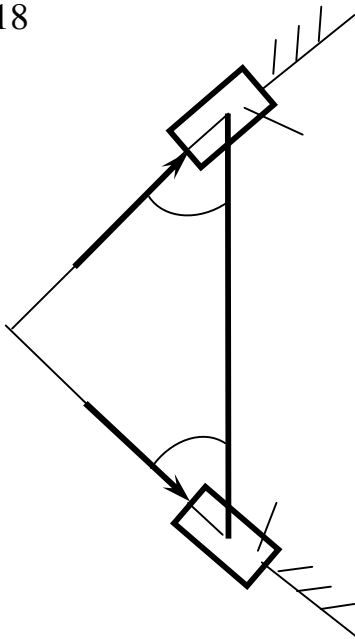
$$f_2 = 0,$$

$$a = 60^\circ$$

Знайти:

.

18



Дано:

$$Q_2 = 60$$

$$f_1 = 0,$$

$$f_2 = 0,$$

$$a = 45^\circ$$

Знайти:

.

Зауваження до прикладів 19-24.

Два шківів радіусами R і r жорстко скріплені між собою і з валом O .

На шків меншого радіуса намотаний гнучкий дріт. До другого кінця дроту прив'язаний вантаж.

За допомогою важеля до шківу більшого радіуса притиснута гальмова колодка.

За заданими умовами необхідно знайти силу тиску (на рисунках сила \bar{F}) на важіль для рівноваги системи.

19

Дано:

$$P = 10 \text{ кН}$$

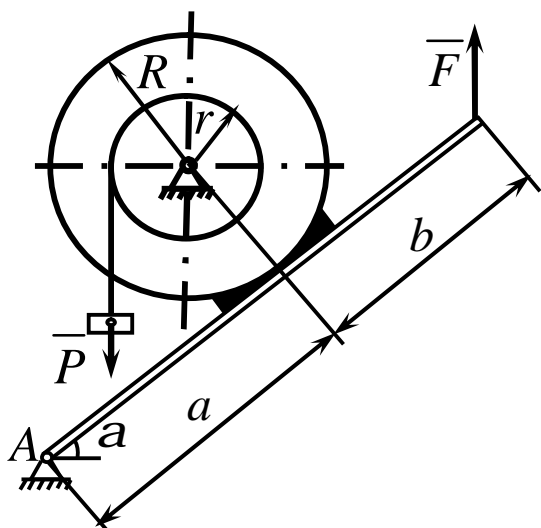
$$r/R = 0$$

$$a = 0,2$$

$$b = 0,1$$

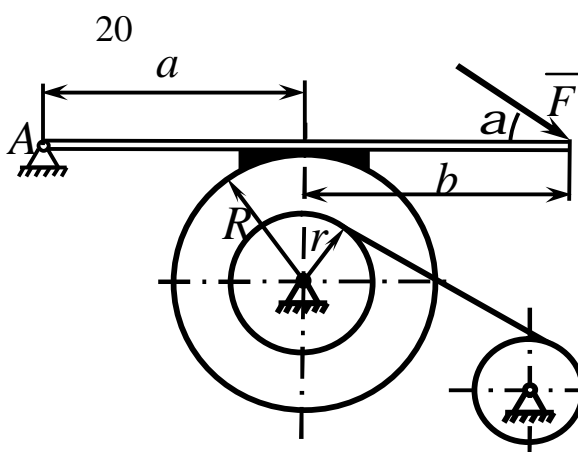
$$\alpha = 60^\circ$$

$$f = 0,1$$



Знайти:

.



Дано:

$$P = 15 \text{ кН}$$

$$r/R = 0$$

$$a = 0,2$$

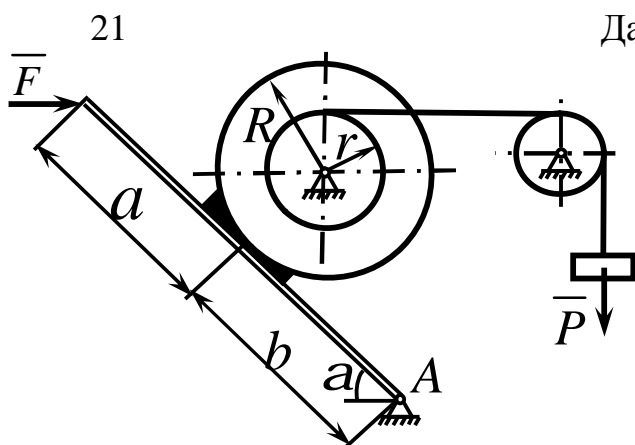
$$b = 0,3$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$f = 0,3$$

Знайти:

.



Дано:

$$P = 20 \text{ кН}$$

$$r/R = 0$$

$$a = 0,3$$

$$b = 0,4$$

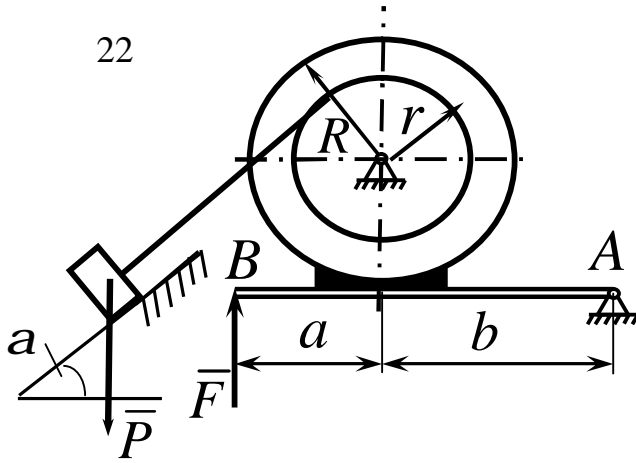
$$\alpha = 45^\circ$$

$$f = 0,2$$

Знайти:

.

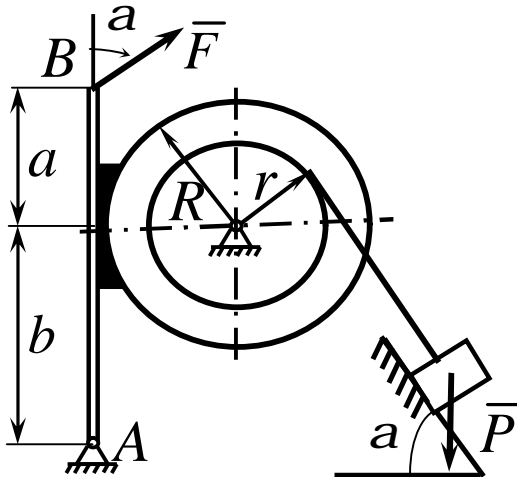
22



Дано: $P = 25\epsilon$
 $r/R = 0$
 $a = 0,40$
 $b = 0,50$
 $\alpha = 60^\circ$
 $f = 0,2$

Знайти: .

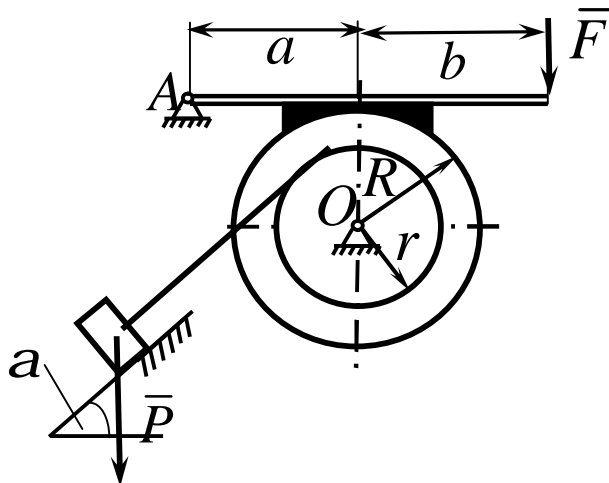
23



Дано: $P = 25k$
 $r/R = 0$
 $a = 0,10$
 $b = 0,20$
 $\alpha = 60^\circ$
 $f = 0,1$

Знайти: .

24



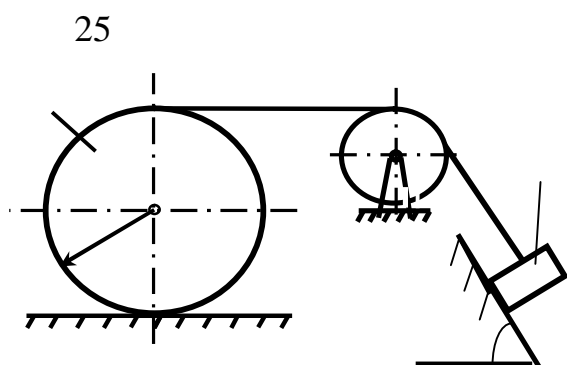
Дано: $P = 15k$
 $r/R = 0$
 $a = 0,20$
 $b = 0,30$
 $\alpha = 30^\circ$
 $f = 0,3$

Знайти: .

У завданнях 25-30 на рисунках зображені системи, складені із декількох тіл, два із яких вагомі.

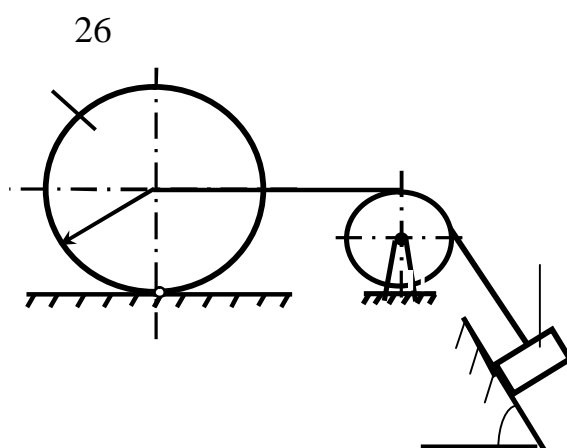
Одне із тіл може поступально ковзати по поверхні, а друге - котитись по ній.

Необхідно визначити вагу одного із тіл за даними задачі із умов рівноваги всієї системи. Літерою d позначено коефіцієнт тертя кочення.



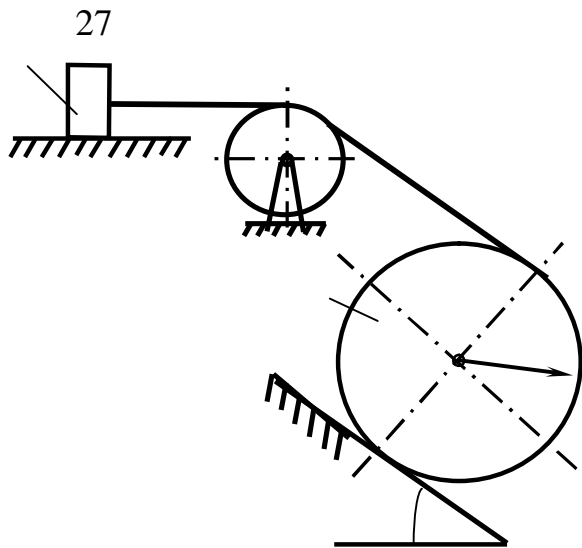
Дано: $P_1 = 150$
 $f = 0,1$,
 $d = 0,01$
 $R = 1\text{ м}$,
 $\alpha = 60^\circ$.

Знайти: .



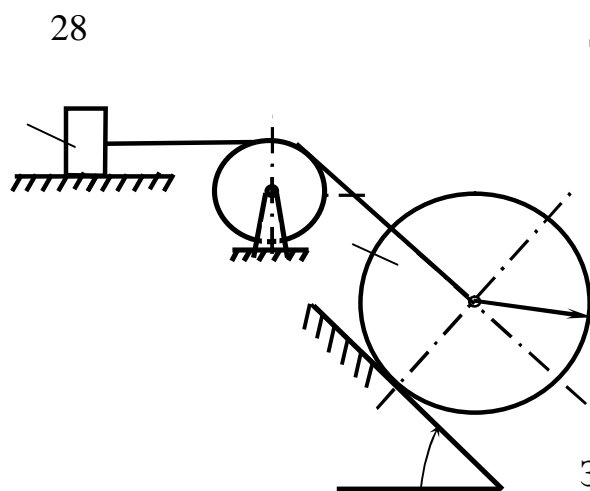
Дано: $P_2 = 150$
 $f = 0,1$,
 $d = 0,01$
 $R = 1\text{ м}$,
 $\alpha = 60^\circ$.

Знайти: .



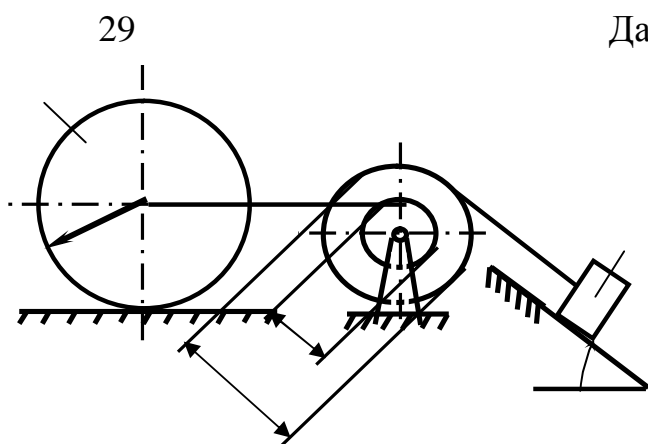
Дано: $P_2 = 150$
 $f = 0,1$,
 $d = 0,01$
 $R = 1\text{ м}$,
 $\alpha = 30^\circ$.

Знайти: .



Дано: $P_2 = 150$
 $f = 0,1$,
 $d = 0,01$
 $R = 1\text{ м}$,
 $\alpha = 60^\circ$.

Знайти: .



Дано: $P_1 = 150$
 $f = 0,1$,
 $d = 0,01$
 $R = 1\text{ м}$,
 $\alpha = 30^\circ$
 $D/d = 2$

Знайти: .

30

Дано:

$$P_2 = 150$$

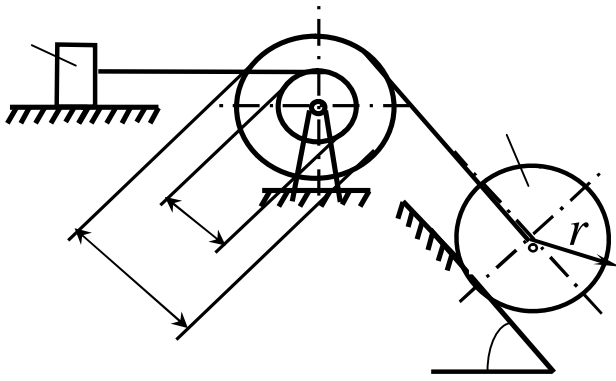
$$f = 0,1,$$

$$d = 0,01$$

$$R = 1i ,$$

$$a = 60^{\circ},$$

$$D/d = 2$$



Знайти:

.

3.6 Умови рівноваги системи тіл під дією плоскої системи сил

Статичний розрахунок інженерних споруд у багатьох випадках зводиться до розглядання умов рівноваги конструкції, яка складається з декількох тіл, пов'язаних між собою будь-якими в'язями. Такі в'язи звать внутрішніми. Вони відрізняються від зовнішніх в'язей, бо зовнішні закріплюють конструкцією з тілами які до неї не входять (наприклад, з опорами).

Якщо після відкидання зовнішніх в'язей (опор) конструкція залишається жорсткою, то для неї задачі статички вирішуються як для абсолютно твердого тіла.

Однак зустрічаються такі інженерні конструкції, які після відкидання зовнішніх в'язей не зостаються жорсткими. Прикладом такої конструкції являється тришарнірна арка (рис. 3.13).

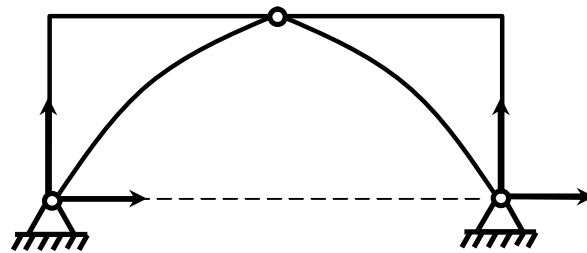


Рисунок 3.13

Якщо відкинути опори A і B , то арка не буде жорсткою, бо її частини зможуть обертатися навколо шарніра C .

При розв'язанні таких задач необхідно додатково розглянути рівновагу будь-якої однієї або декількох частин конструкції.

Наприклад, складаючи умови рівноваги для сил, діючих на тришарнірну арку (рис. 3.13), ми отримаємо три рівняння з чотирма невідомими \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B .

Розглянувши додатково умови рівноваги лівої (або правої) її половини, отримаємо три рівняння, які містять дві нові невідомі \bar{X}_C , \bar{Y}_C (на рис. 3.13 не показані). Вирішуючи отриману систему шести рівнянь, знайдемо всі шість невідомих.

Другий засіб вирішення подібних задач складається в тому, щоб конструкцію зразу розчленити на окремі тіла і скласти умови рівноваги кожного із тіл окремо. При цьому реакції внутрішніх в'язей будуть попарно рівні за модулем і протилежні за напрямком. Для конструкції із n тіл, на кожне із яких діє довільна плоска система сил, отримаємо таким шляхом $3n$ рівнянь, дозволяючи знайти $3m$ невідомих (при інших системах сил кількість рівнянь відповідно зміниться). Якщо для даної конструкції кількість всіх реакцій в'язей буде більше кількості рівнянь, до яких ці реакції входять, то така конструкція буде статично невизначеною.

Розглянемо розв'язання задач статички для складених конструкцій під дією довільної плоскої системи сил на прикладах.

Приклад 1

Кронштейн складається із горизонтального бруса AD (рис.3.14) вагою $P_1 = 150H$, прикріпленого до стіни шарніром, і підкоса CB вагою $P_2 = 120H$, який з брусом AD і зі стіною теж з'єднаний шарнірами. Всі розміри показані на рис 3.14. До кінця D бруса підвішений вантаж вагою $Q = 300H$.

Визначити реакції шарнірів A і C , вважаючи брус і підкіс однорідними.

Рішення

Розглянемо спочатку рівновагу всього кронштейна. На нього діють сили: задані сили $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{Q}$ і реакції в'язей $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$.

Кронштейн, звільнений від зовнішніх в'язей, не утворює жорсткої конструкції (бруси можуть повертатися навколо шарніра B), але за принципом отвердіння діючи на нього сили при рівновазі повинні задовольняти умовам рівноваги.

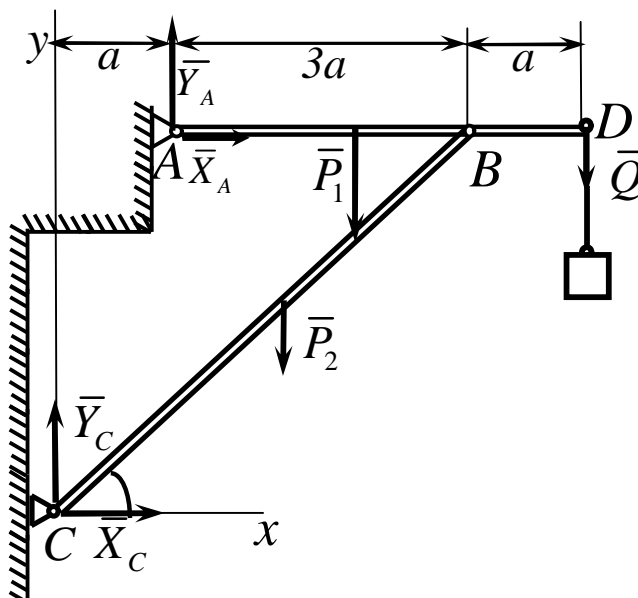


Рисунок 3.14

Склавши ці умови, запишемо:

$$\sum F_{ix} \equiv X_A + X_C = 0,$$

$$\sum F_{iy} \equiv Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0,$$

$$\sum M_A(\bar{F}_i) \equiv X_C \cdot 4a - Y_C \cdot a - P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot a - Q \cdot 4a = 0.$$

Отриманні три рівняння містять, як бачимо, чотири невідомі \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{X}_C , \bar{Y}_C . Для вирішення задачі розглянемо додатково рівновагу бруса AD (рис. 3.15).

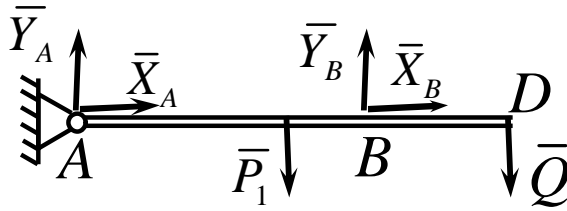


Рисунок 3.15

На нього діють сили \bar{P}_1, \bar{Q} , реакції $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$, які для бруса AD (коли розглядається його рівновага), будуть силами зовнішніми. Четверте рівняння, якого недостає, складемо, взявши моменти діючих на брус AD сил відносно центра B (тоді в рівняння не ввійдуть нові невідомі \bar{X}_B, \bar{Y}_B).

$$\sum M_B(\bar{F}_i) \equiv -Y_A \cdot 3a + P_1 \cdot a - Q \cdot a = 0.$$

Вирішуючи тепер систему чотирьох складених рівнянь (починаючи з останнього), знайдемо:

$$Y_A = (P_1 - Q)/3 = -50\text{H},$$

$$Y_C = 2P_1/3 + P_2 + 4Q/3 = 620\text{H},$$

$$X_C = 2P_1/3 + P_2/2 + 4Q/3 = 560\text{H},$$

$$X_A = -X_C = -560\text{H}.$$

Із отриманих результатів видно, що сили \bar{X}_A , і \bar{Y}_A мають напрями, протилежні показаним на рисунку. Реакції шарніра B , якщо їх необхідно

визначити, знайдуться із рівнянь проекцій на осі X і Y сил, діючих на брус AD і будуть дорівнювати:

$$X_B = -X_A,$$

$$Y_B = P_l + Q - Y_A = 500H.$$

Як бачимо при розв'язанні задач статички не всюди необхідно складати всі умови рівноваги. Якщо в задачі не потребується визначати реакції деяких в'язей, то необхідно складати такі рівняння, в які ці невідомі реакції не входять. Так і було зроблено в даній задачі при розгляданні рівноваги бруса AD , коли складалося тільки одне рівняння моментів відносно центра B .

Приклад 2

Конструкція складена з двох стрижнів AC і BC шарнірно закріплених в точках A , B і C (рис.3.16), які утворюють рівносторонній трикутник, сторони якого дорівнюють l . До стрижня AC прикладена пара сил з моментом M , а до середини стрижня BC - сила \bar{F} напрямлена перпендикулярно до стрижня. Визначити реакції в опорах A і B .

Рішення

Розглянемо рівновагу конструкції в цілому (рис.3.16). Прикладемо в шарнірних опорах A і B реакції $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$. Як видно на рисунку, невідомі $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B$ перетинаються в точці A . Тому, якщо обрати цю точку в якості моментної точки, то отримаємо рівняння з однією невідомою \bar{Y}_B .

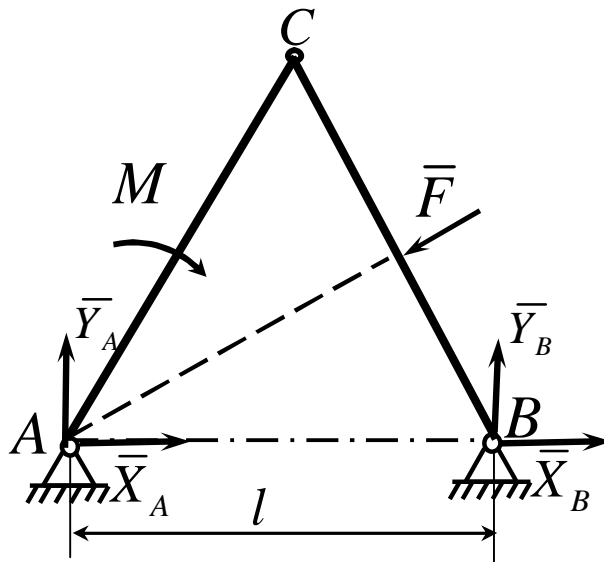


Рисунок 3.16

Складемо це рівняння.

$$\sum_i M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad Y_B \cdot l - M = 0,$$

відкіля

$$Y_B = M/l. \tag{3.18}$$

Зовнішня відома сила \bar{F} не ввійшла в рівняння рівноваги, бо проходить через моментну точку A .

Якщо тепер обрати в якості моментної точки B , то отримаємо рівняння рівноваги з однією невідомою реакцією \bar{Y}_A .

Складемо це рівняння

$$\sum_i M_B(\bar{F}_i) = 0,$$

$$-Y_A \cdot l - M + F \cdot 0.5 \cdot l = 0,$$

Відкіля

$$Y_A = \frac{0,5 \cdot F \cdot l - M}{l} = 0,5F - M/l. \quad (3.19)$$

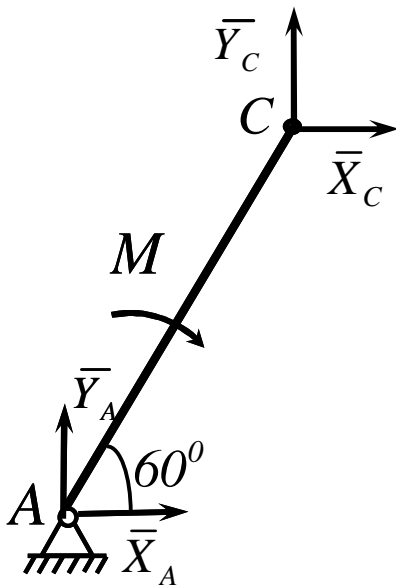


Рисунок 3.17

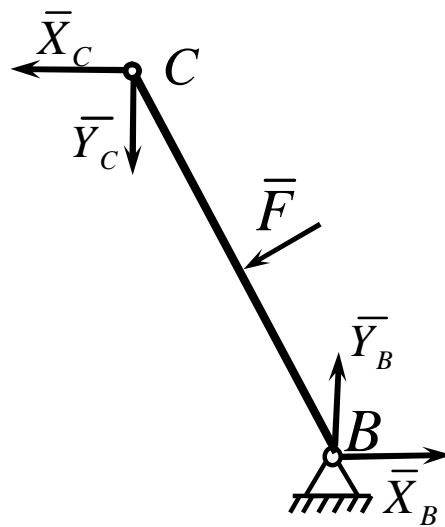


Рисунок 3.18

Для визначення невідомих реакцій \bar{X}_A і \bar{X}_B розкладемо конструкцію на дві частини AC і BC (рис. 3.17, 3.18) і складемо умови рівноваги цих частин. Для того, щоб невідомі \bar{X}_C і \bar{Y}_C не попали в рівняння рівноваги, в обох випадках оберемо в якості моментної точки C .

Складемо послідовно ці рівняння і розрахуємо їх відносно невідомих \bar{X}_A і \bar{X}_B .

$$\sum_i M_C(\bar{F}_i) = 0,$$

$$X_A \cdot l \sin 60^\circ - Y_A \cdot l \cos 60^\circ - M = 0,$$

відкіля

$$X_A = \frac{Y_A \cdot l \cos 60^\circ + M}{l \sin 60^\circ} = Y_A \operatorname{ctg} 60^\circ + M/l \sin 60^\circ. \quad (3.20)$$

Підставимо в отриману формулу (3.20) значення Y_A відповідно результату (3.19).

Тоді

$$X_A = (0,5F - M/l) \operatorname{ctg} 60^\circ + M/l \sin 60^\circ.$$

Для знаходження останньої невідомої X_B використовуємо рис 3.18 і складаємо відповідне рівняння рівноваги

$$\sum_i M_C(\bar{F}_i) = 0,$$

$$X_B \cdot l \sin 60^\circ + Y_B l \cos 60^\circ - F \cdot 0,5 \cdot l = 0,$$

Відкіля

$$X_B = \frac{0,5Fl - Y_B \cdot l \cos 60^\circ}{l \sin 60^\circ} = 0,5 F / \sin 60^\circ - Y_B \operatorname{ctg} 60^\circ. \quad (3.21)$$

Підставимо в отриману формулу (3.21) значення Y_A відповідно результату (3.18).

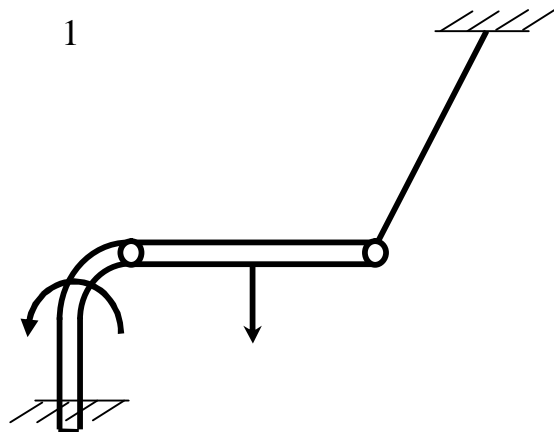
Тоді

$$X_B = 0,5F / \sin 60^\circ - M \operatorname{ctg} 60^\circ / l. \quad (3.22)$$

Відзначимо, що всі чотири невідомих були здобуті тільки із рівнянь моментів, тому, що вони забезпечували кожний раз отримання рівняння з однією невідомою.

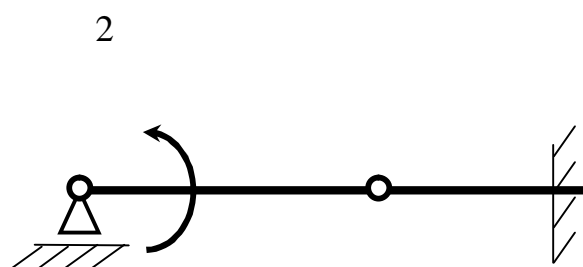
Якщо визначати далі реакції X_C і Y_C тоді в даному випадку краще записати рівняння проєкцій сил на вісі координат за допомогою рис. 3.17 або рис.3.18.

3.7 Контрольні завдання для самостійної роботи



Система тіл складається із стрижнів OA , AB і троса BC . Яка мінімальна кількість рівнянь рівноваги необхідно скласти для визначення реакцій в жорсткому защемленні O , шарнірі A і тросові BC ?

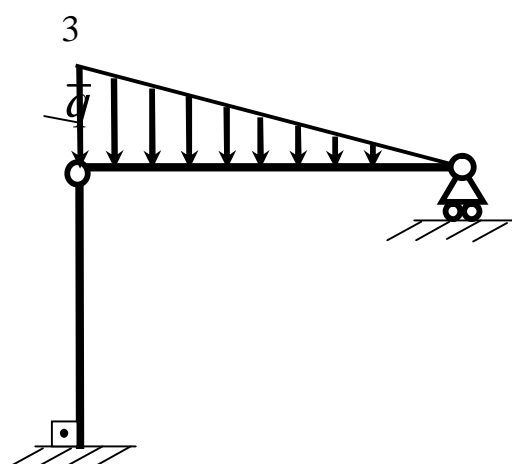
Відповідь: 6.



На балку AB діє пара сил з моментом $M = 800\acute{I} \cdot i$. Визначити момент в жорсткому защемленні C , якщо $AB = 2i$, $BC = 0,5i$

Відповідь:

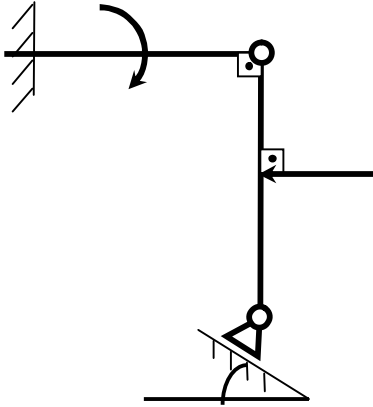
$$M_{\tilde{N}} = 200\acute{I} \cdot i$$



На валу AB діє лінійно розподілене навантаження інтенсивністю $q_{max} = 3\acute{e}\acute{I} / i$. Визначити реакцію опори B в $\acute{e}\acute{I}$, якщо відстань $AB = 2i$.

Відповідь: $R_{\hat{A}} = 1\acute{e}\acute{I}$.

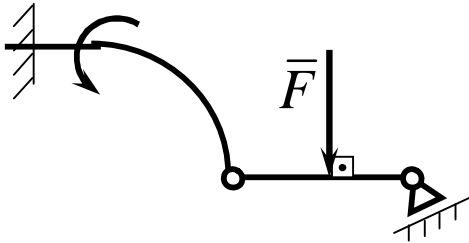
4



Визначити реакцію опори A в \hat{e}_I , якщо сила $F = 3\hat{e}_I$, кут $\alpha = 30^\circ$, розміри $AB = BC$.

Відповідь: $R_A = 3\hat{e}_I$.

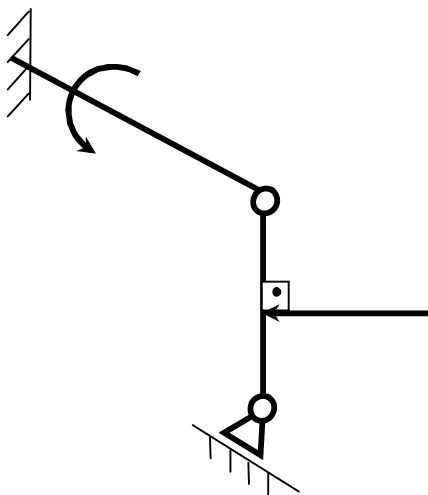
5



Знайти вертикальну складову реакції в шарнірі A , якщо сила $F = 900\hat{I}$, розміри $AB = BC$.

Відповідь: $Y_A = 450\hat{I}$.

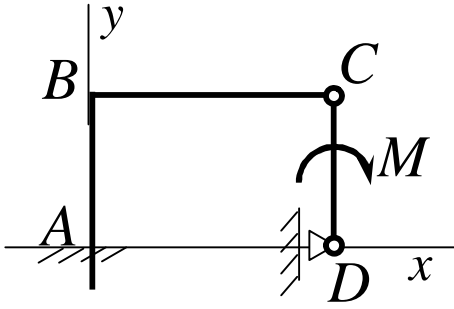
6



Знайти горизонтальну складову реакції в шарнірі C , якщо сила $F = 800\hat{I}$, розмір $AB = BC$

Відповідь: $X_C = 400\hat{I}$.

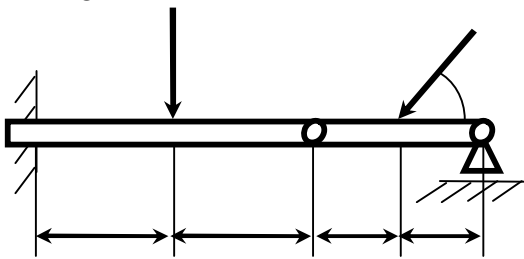
7



Стрижні ABC і CD з'єднані між собою шарніром C . На стрижень CD діє пара сил з моментом $M = 400\text{І} \cdot i$. Визначити складову X_C реакції шарніра C , якщо довжина $CD = 2i$.

Відповідь: $X_C = 200\text{І}$.

8

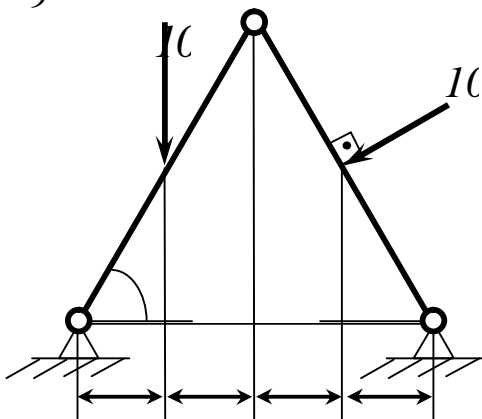


Два стрижня з'єднані в шарнірі B . Визначити момент в закріпленні A , якщо сили $F_1 = 60\text{І}$, $F_2 = 50\text{І}$.

Відповідь:

$M_A = 240\text{І} \cdot i$.

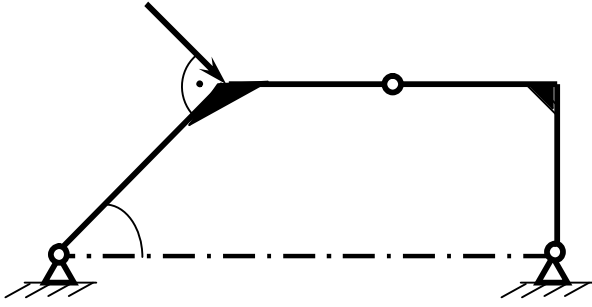
9



Визначити вертикальну складову реакції в шарнірі A .

Відповідь: $Y_A = 110\text{І}$.

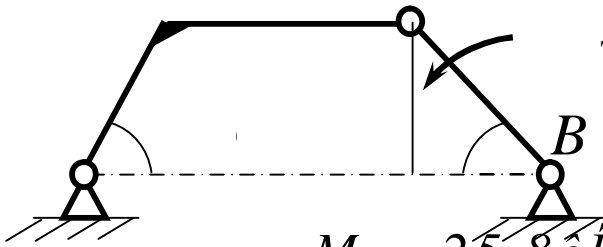
10



Визначити вертикальну складову реакції в шарнірі B , якщо сила $F = 850\text{ kN}$, а розміри $CD = CE = BE$.

Відповідь: $Y_B = 401\text{ kN}$.

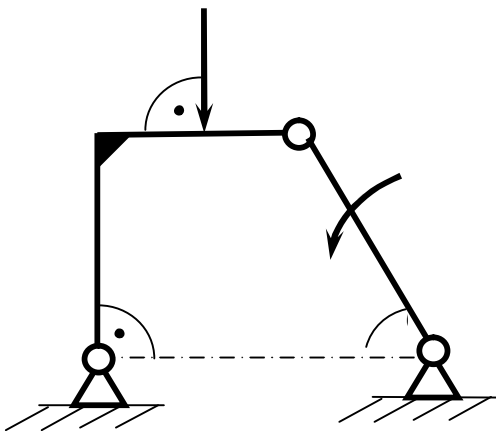
11



Визначити в $\text{kN} \cdot \text{m}$ момент M пари сил при якому вертикальна складова реакції опори A дорівнює 10 kN , якщо розміри $BC = CE = l$.

Відповідь: $M = 25,8\text{ kN} \cdot \text{m}$.

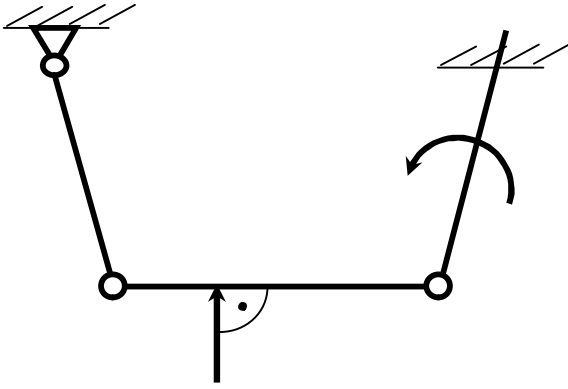
12



Визначити в kN силу F , при якій вертикальна складова реакції в шарнірі A дорівнює 9 kN , якщо розміри $AB = BD = l$, $h = DE$, момент пари сил $M = 6\text{ kN} \cdot \text{m}$.

Відповідь: $F = 4\text{ kN}$.

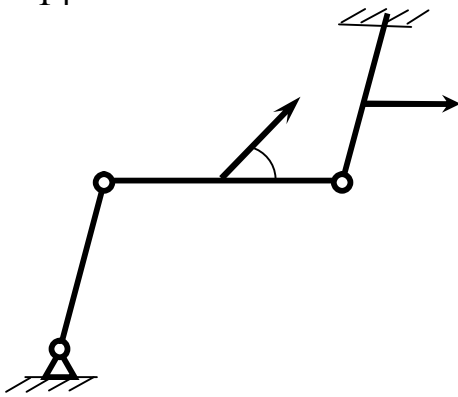
13



Знайти вертикальну складову реакції в шарнірі C , якщо сила $F = 600\text{Í}$, розміри $BC = 2AB$.

Відповідь: $Y_C = 200\text{Í}$.

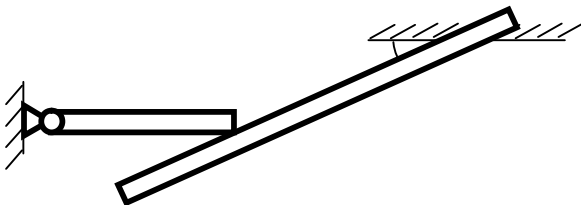
14



Знайти вертикальну складову реакції в шарнірі C , якщо до горизонтального стрижню AC прикладена сила $F_1 = 800\text{Í}$, до стрижня DC – сила F_2 , кут $\alpha = 30^\circ$, розміри $AB = BC$.

Відповідь: $Y_C = 200\text{Í}$.

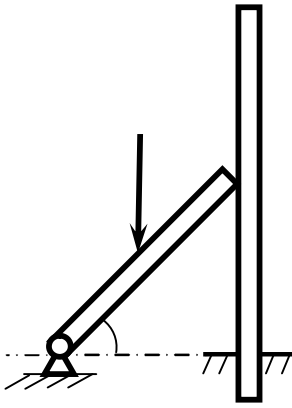
15



Однорідний горизонтальний стрижень AC , вага якого 180Í , вільно опирається в точці C на балку BD . Визначити реакцію балки BD на стрижень AC .

Відповідь: $R_C = 104\text{Í}$.

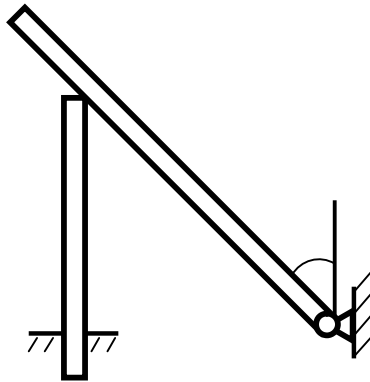
16



Стрижень AB кінцем B вільно спирається на вертикальний стрижень CD , один кінець якого защемлений жорстко в точці C . До середини стрижня AB прикладена вертикальна сила $F = 2\hat{e}\hat{I}$. Визначити в $\hat{e}\hat{I}$ реакцію в точці B .

Відповідь: $R_B = 1,73\hat{e}\hat{I}$.

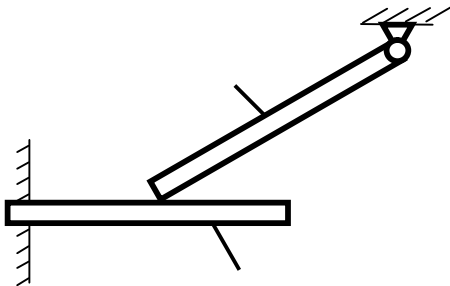
17



Однорідний стрижень CD вагою $346\hat{I}$ опирається на вертикальний стоек AB . Визначити момент в защемленні A , якщо розміри $BD = 2\hat{i}$, $BC = 1\hat{i}$, $AB = 2\hat{i}$.

Відповідь: $M_A = 225\hat{I} \cdot \hat{i}$.

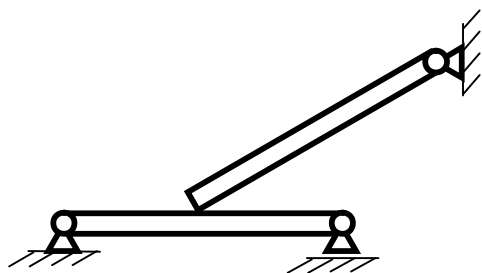
18



Однорідний брус 2 вагою $400\hat{I}$ вільно опирається в точці B на однорідну балку 1. Чому має бути рівною вага балки 1, для того, щоб момент в защемленні A дорівнював $265\hat{I} \hat{i}$, якщо розміри $AB = 1\hat{i}$, $BC = 0,8\hat{i}$.

Відповідь: $P_1 = 72,2\hat{I}$.

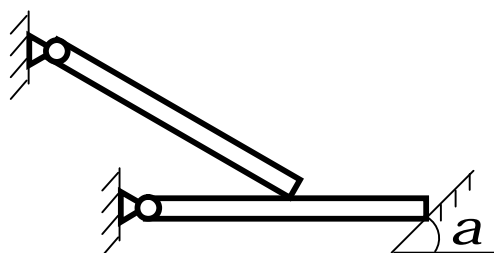
19



Однорідна балка AB , вага якої $4\hat{e}\hat{l}$, в точці B вільно спирається на горизонтальний стрижень CD . Визначити в $\hat{e}\hat{l}$ реакцію рухомого циліндричного шарніра D , якщо розміри $BC = BD$. Вагою стрижня CD знехтувати.

Відповідь: $R_D = 1\hat{e}\hat{l}$.

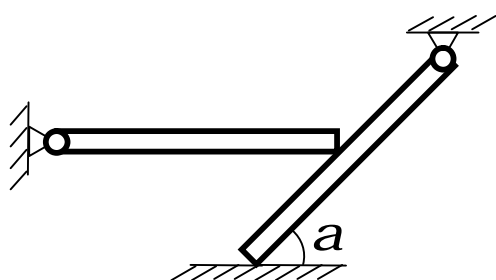
20



Однорідна балка AB , вага якої $200\hat{l}$ вільно спирається в точці B на горизонтальну балку CD . Визначити, з якою силою балка CD діє на опорну площину в точці D , якщо відстань $CB = BD$, $a = 60^\circ$. Вагою балки CD знехтувати.

Відповідь: $R_D = 100\hat{l}$.

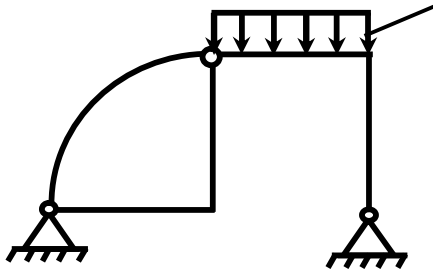
21



Однорідна горизонтальна балка AB , Вага якої $3\hat{e}\hat{l}$, в точці B вільно спирається на балку CD . Визначити в $\hat{e}\hat{l}$ силу дії балки CD на поверхню в точці D , якщо відстань $CB = BD$, кут $a = 60^\circ$. Вагою балки CD знехтувати.

Відповідь: $R_D = 3\hat{e}\hat{l}$.

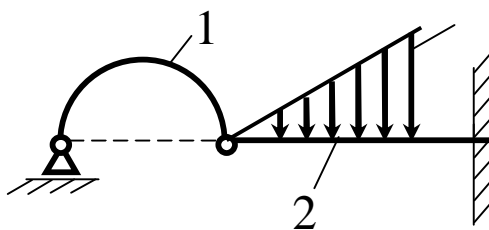
22



Визначити довжину BC , для того, щоб вертикальна складова реакції шарніра D дорівнювала $6\hat{e}\hat{I}$, якщо інтенсивність розподіленого навантаження $q=6\hat{e}\hat{I}/\hat{l}$ і розміри $DE = AE = CE = BC$.

Відповідь: $BC = 4\hat{i}$.

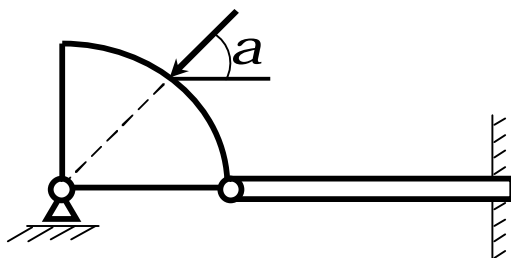
23



Вага однорідної арки 1 дорівнює \bar{q} $100\hat{I}$. Нехтуючи вагою балки 2, визначити максимальну інтенсивність q_{max} розподіленого навантаження, для того, щоб момент в защемленні A дорівнював $70\hat{I} \cdot \hat{i}$, якщо арка 1 має форму півкола і розміри $BC = 3AC = 0,5\hat{i}$.

Відповідь: $q_{max} = 440\hat{I} / \hat{i}$.

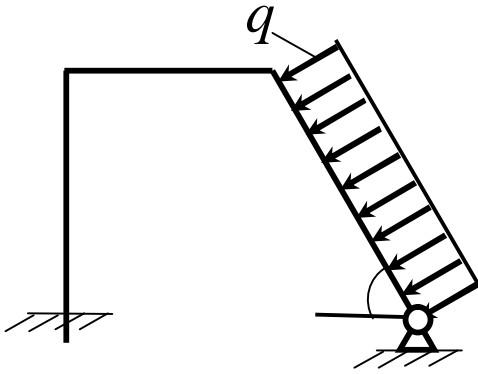
24



Нехтуючи вагою конструкції, визначити реакцію опори A , якщо сила $F = 400\hat{I}$, кут $a = 45^\circ$.

Відповідь: $R_A = 283\hat{I}$.

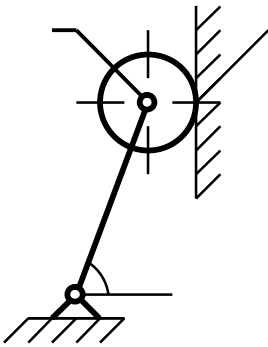
25



Стрижень AB , довжина якого $2i$, навантажений рівномірно розподіленим вантажем інтенсивності $q = 100 \text{ } \acute{I} / i$. Визначити реакцію опори A .

Відповідь: $R_A = 141 \acute{I}$.

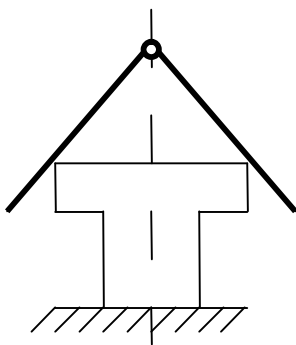
26



На кінці однорідного стрижня AB вагою $80 \acute{I}$ за допомогою шарніра B встановлено однорідний диск вагою $200 \acute{I}$. Диск спирається на вертикальну гладеньку стінку. Визначити силу дії диска на стінку.

Відповідь: $R_C = 240 \acute{I}$.

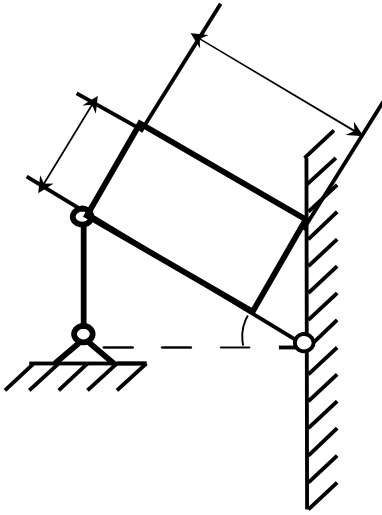
27



Два однорідних гладеньких стрижні, вага кожного з яких $40H$, скріплені шарнірно на кінцях B . Вони підтримуються в точках M , N і перебувають у рівновазі. Визначити реакції опор M і N , якщо $AB = BC = 160\tilde{i}$, $MN = 20\tilde{i}$.

Відповідь: $R_M = R_N = 8 \acute{I}$.

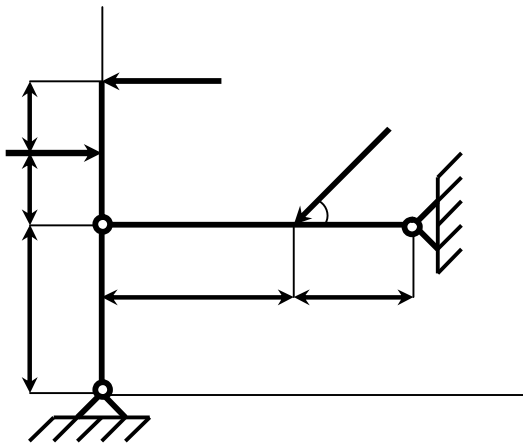
28



Бетонний блок, вага якого $16\hat{e}\hat{I}$, підтримується двома паралельними однорідними балками, нахиленими під кутом α до горизонту. Вага кожної балки $4\hat{e}\hat{I}$, довжина $AB = 2,5\hat{i}$, $AB_1 = 2\hat{i}$. Визначити реакції вертикальних стрижнів, якими утримуються похилі балки, якщо кріплення стрижнів і балок шарнірні; $h = 0,8\hat{i}$, $\alpha = 1,6\hat{i}$.

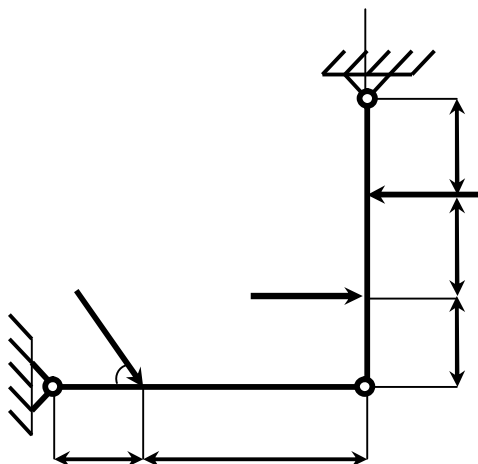
Відповідь: $R_A = 8,5\hat{e}\hat{I}$.

29



Стрижні AB і CD шарнірно скріплені під прямим кутом у точці C і шарнірно прикріплені до опор A і D . До стрижнів прикладені три сили, кожна з яких дорівнює Q . Нехтуючи вагою стрижнів, визначити горизонтальну реакцію опори A .

Відповідь: $X_A = -Q/2$.



Стрижні AB і AC скріплені під прямим кутом шарніром A і шарнірно прикріплені до опір B і C . До стрижня AC прикладена пара сил. $P = 20H$. Під кутом 60° до стрижня AB прикладена сила $Q = 30H$. Нехтуючи вагою стрижнів, визначити горизонтальну реакцію опори B .

Відповідь: $X_B = -21,2H$.

3.8 Ферми. Засоби визначення зусиль у стрижнях ферм

Фермами називаються конструкції, що складаються з прямолінійних стрижнів, які з'єднані між собою шарнірами і утворюють незмінну геометричну фігуру (приклади ферм наведені на рисунках 3.19, 3.20).

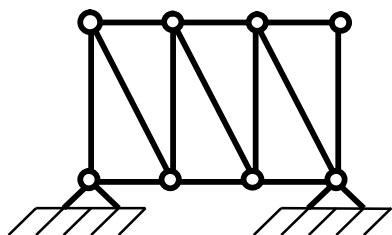


Рисунок 3.19

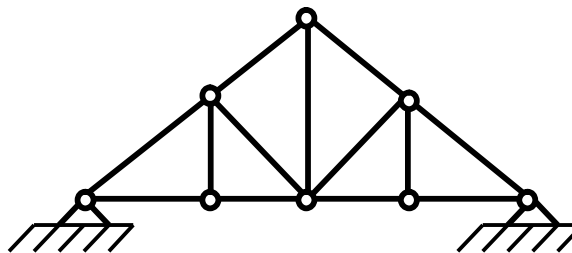


Рисунок 3.20

При розрахунку ферм вагою стрижнів нехтують і вважають, що шарніри розміщені тільки на кінцях стрижнів; навантаження, що діють на ферму, прикладені в шарнірах (тобто в вузлах ферми). У цьому разі кожен стрижень ферми зазнає зусиль, що діють у вздовж осі стрижня, тобто він буде розтягнутий, або стиснутий.

З усього класу геометрично незмінних ферм без зайвих стрижнів виділимо прості ферми. Їх побудова відбувається так: розглядається основний трикутник, до нього двома стрижнями приєднується новий шарнір (вузол) і т.д.

За своєю ознакою ферми поділяються на мостові, кроквяні й кранові. Основною задачею розрахунку простих ферм є визначення зусиль у стрижнях ферми, які є внутрішніми силами, що виникають в стрижнях під дією зовнішніх сил. Цю задачу можна розв'язати методами теоретичної механіки.

Обмежимося двома способами визначення зусиль у стрижнях простої ферми: спосіб вирізання вузлів і спосіб Ріттера.

Спосіб вирізання вузлів. Цей спосіб полягає у тому, що у кожному вузлі діє плоска система збіжних сил, яка перебуває у рівновазі; отже, силовий багатокутник, побудований з цих сил, має бути замкнутим. Побудову силових багатокутників (трикутників) слід починати з вузла, в якому сходяться два стрижні. Тоді побудовою замкнутого трикутника (третья сторона відповідає відомій заданій силі, прикладеній у вузлі) знайдуться зусилля в цих двох стрижнях. Після цього можна переходити до наступного вузла і т.д. Кожний наступний вузол вибирається так, щоб у ньому сходилося не більше ніж два стрижні з невідомими зусиллями.

Формально умови рівноваги вузлів ферми включають в собі умови рівноваги ферми в цілому, тобто дають змогу знайти і зовнішні реакції. Більше того, попереднє визначення зовнішніх реакцій ферми суттєво спрощує розв'язання задачі.

Розглянемо спосіб вирізання вузлів на прикладі розрахунку зусиль у стрижнях ферми, показаної на рисунку 3.21.

Приклад 1

У вузлі B ферми прикладена сила $F_1 = 800\text{І}$. Опорами ферми є шарнір A і каток C . Визначити реакції опор R_A , R_C ; зусилля стрижнів у вузлах A і D .

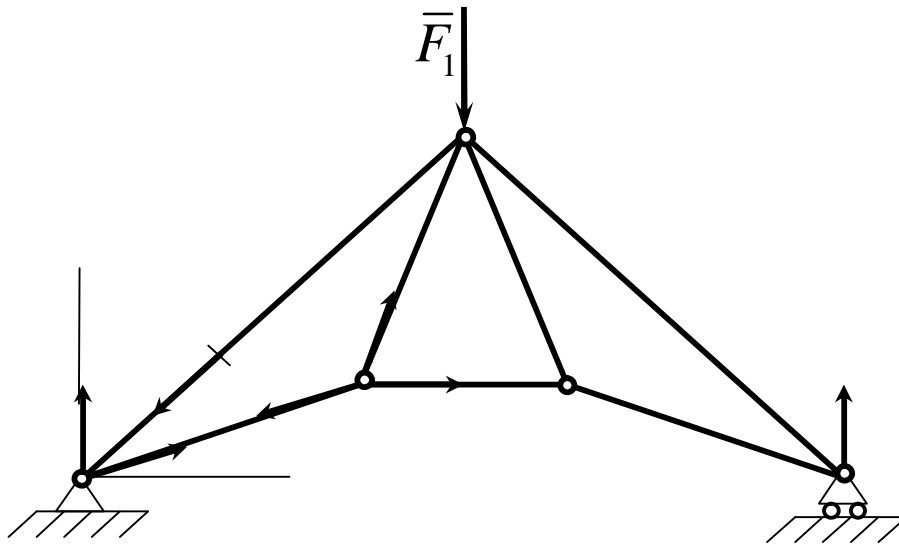


Рисунок 3.21

Рішення

Розглянемо ферму, як тверде тіло, що перебуває у рівновазі під дією плоскої системи паралельних сил (R_A , R_C , F_1). У цьому разі реакція шарніра R_A паралельна силам R_C и F_1 , бо інакше сама ферма не буде у рівновазі. Проведемо вісь Y і складемо умови рівноваги у вигляді:

$$\sum_3 F_{iy} = R_A + R_C - F_1 = 0,$$

$$\sum_3 m_A(F_i) = R_C \cdot AC - F_1 \cdot \frac{AC}{2} = 0.$$

Звідки знайдемо $R_A = R_C = 400 \text{êÍ}$.

Визначення зусиль у стрижнях почнемо з розгляду вузла A , в якому сходяться два стрижні 1 і 7. Будуємо замкнутий трикутник із сил R_A , S_1 и S_7 (рисунок 3.22). Для цього у відповідному масштабі будуємо вектор, що дорівнює вектору реакції R_A , з кінця якого проводимо пряму, паралельну стрижню AB , а з початку – пряму, паралельну стрижню AD . З по-

будованого трикутника знаходимо зусилля S_1 і S_7 . Зображуючи ці зусилля у вузлі A , бачимо, що S_1 напрямлене до вузла A за стрижнем AB , отже, стрижень – стиснутий, а зусилля S_7 напрямлене від вузла A по стрижню AD , тобто він – розтягнутий. Розтяжне зусилля позначається знаком плюс, а стискальне – знаком мінус.

Вузол A

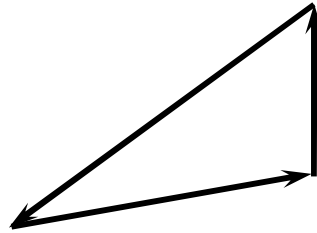


Рисунок 3.22

Тепер розглянемо рівновагу сил у вузлі D , в якому залишаються тільки дві невідомі сили: S_2 і S_6 . Реакція стрижня 7, що виходить з вузла D , дорівнює і протилежна за знаком його ж реакції, але прикладена у вузлі A . Знову будуємо замкнутий трикутник (рис. 3.23). Відкладаємо силу S_7 , з її кінця проводимо пряму, паралельну стрижню 2, з початку – пряму, паралельну стрижню 6, і визначаємо величини та напрямки зусиль S_2 і S_7 . Аналогічно можна визначити інші зусилля S_3 , S_4 , S_5 .

Вузол D

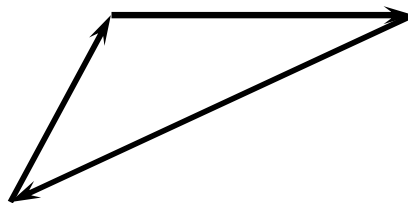


Рисунок 2.23

Незручність цього способу полягає у його громіздкості, оскільки доводиться будувати стільки багатокутників, скільки вузлів у фермі. Об'єднання розрізаних багатокутників сил в одну діаграму здійснили незалежно один від одного англійський фізик Максвел та італійський геометр Кремона, на честь яких цю діаграму названо діаграмою Максвела-Кремони.

Спосіб Ріттера. Цей спосіб дає змогу знайти зусилля у будь-якому стрижні ферми незалежно від зусиль в інших стрижнях. Проте попередньо треба визначити реакції опор ферми.

Спосіб Ріттера полягає у тому, що ферма розсікається на дві частини так, щоб у перерізі було не більше ніж три стрижні з невідомими зусиллями, які не сходяться в одному вузлі. Відкидаючи відсічену частину ферми і розглядаючи рівновагу тієї частини, що залишилася, під дією прикладених зовнішніх сил і зусиль, які змінюють дію розсічених стрижнів, дістанемо для цієї частини ферми три рівняння рівноваги з трьома невідомими зусиллями. Найчастіше ці рівняння є умовами рівності нулю алгебраїчних сум моментів сил відносно трьох різних центрів моментів, за які вибирають точки попарного перетину розсічених стрижнів з числа перерізаних. Ці точки називаються точками Ріттера.

Якщо два стрижні з трьох розсічених паралельні, то одна точка Ріттера віддаляється у нескінченність. Тоді складають два рівняння моментів сил і одне рівняння проєкцій на вісь, перпендикулярну до паралельних стрижнів.

Приклад 2

Визначити зусилля в стрижнях 1, 2, 3 ферми, якщо $F_1 = 45\hat{e}I$, $F_2 = 20\hat{e}I$, $\hat{E}D = 2i$, а інші розміри показано на рисунку 3.24.

Рішення

Знайдемо реакції в опорах ферми R_A і R_B . Реакція катка B напрямлена за нормаллю до опорної площини, а оскільки на ферму діє система паралельних сил \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{R}_B , то і реакція R_A шарніра A буде паралельною цим силам.

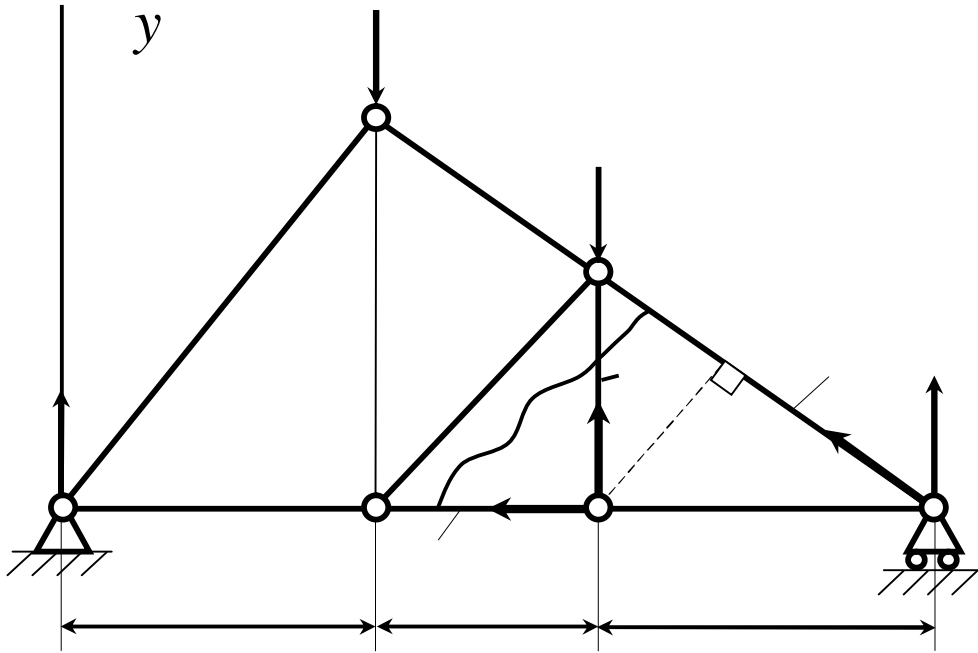


Рисунок 3.24

Щоб визначити ці реакції, складемо умови рівноваги системи паралельних сил, які лежать в одній площині, у вигляді

$$\sum_i F_{iy} = R_A - F_1 - F_2 + R_B = 0,$$

$$\sum_i m_A(F_i) = R_B \cdot \text{Ч}AB - F_1 \cdot \text{Ч}AE - F_2 \cdot \text{Ч}AK = 0.$$

Звідки знаходимо $R_A = 40 \text{êÍ}$ і $R_B = 25 \text{êÍ}$.

Проведемо переріз через стрижні 1, 2, 3 і розглянемо рівновагу тієї частини розсіченої ферми, в якій прикладена менша кількість сил. У розглядуваному випадку – це права частина ферми.

Зусилля в розсічених стрижнях умовно вважаємо розтяжними і напрямимо їх у бік частин, що відкидаються. Отже, у відсіченій частині ферми зрівноважується плоска система сил $\bar{R}_B, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$.

Для визначення зусилля \bar{S}_1 відповідною точкою Ріттера буде точка

K , а рівняння рівноваги набере вигляду

$$\sum_i m_k(\bar{F}_i) = R_B \Psi + S_1 \Psi_{KL} = 0.$$

Для визначення зусилля \bar{S}_2 точкою Ріттера є точка B , для визначення зусилля \bar{S}_3 – точка D , а відповідні рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\sum_i m_B(\bar{F}_i) = -6 \Psi S_2 = 0,$$

$$\sum_i m_D(\bar{F}_i) = R_B \Psi - S_3 \Psi_{KD} = 0.$$

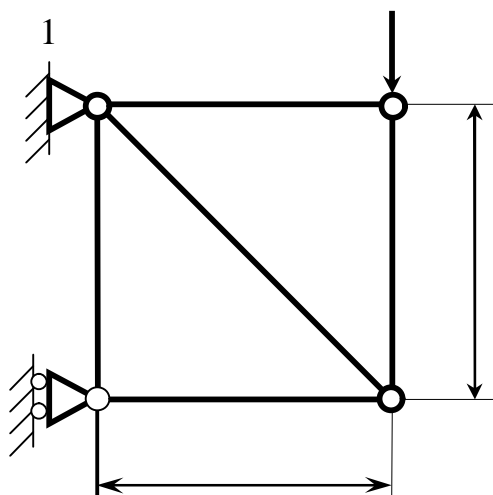
Підставляючи необхідні дані, знаходимо

$$S_3 = 3 \Psi R_B = 75 \text{ êÍ}, \quad S_1 = \frac{6 \Psi R_B}{KL} = -79 \text{ êÍ}, \quad S_2 = 0.$$

Отже зусилля S_3 – розтяжне, S_1 – стискальне, S_2 – нульове (при заданому навантаженні стрижень 2 не працює, але з конструкції його вилучати не можна, оскільки порушиться жорсткість конструкції.)

Найкраща методика визначення зусиль у стрижнях ферми полягатиме в поєднанні методів Максвелла-Кремони та Ріттера. Наприклад, усі зусилля визначаються за методом Максвелла-Кремони і деякі з них перевіряються за методом Ріттера.

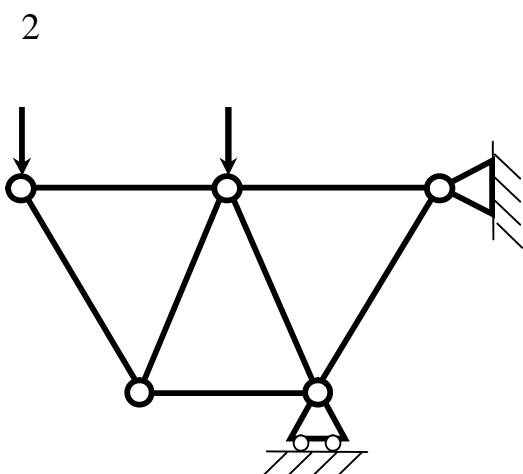
3.9 Контрольні завдання для самостійної роботи



Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 600\text{Í}$.

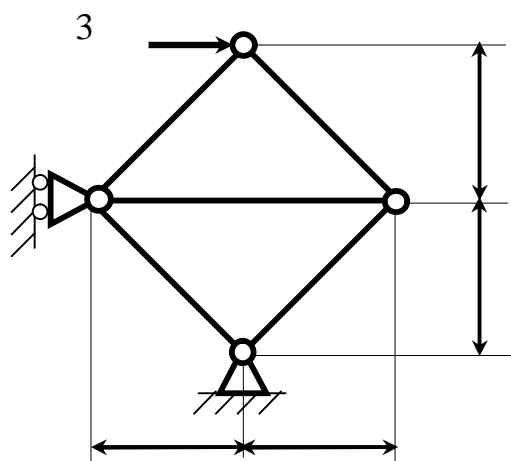
Відповідь: $S_{AB} = 849\text{H}$.



Ферма складається із стрижнів однакової довжини. Визначити зусилля в

стрижні AB . Сили $F_1 = 100\text{Í}$,
 $F_2 = 200\text{Í}$.

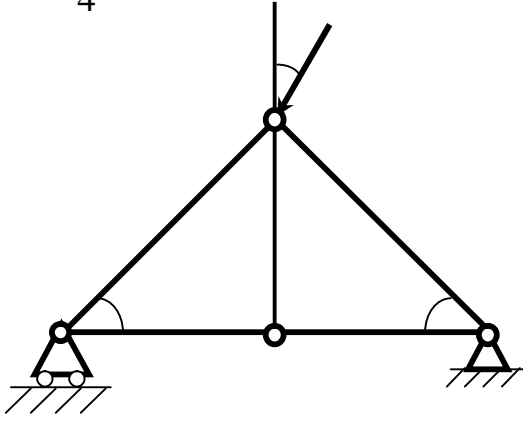
Відповідь: $S_{AB} = -115\text{H}$.



Визначити зусилля в стрижні AB ,
якщо $l = 0,4i$. Сила $F = 30\text{Í}$.

Відповідь: $S_{AB} = -21,2\text{Í}$.

4

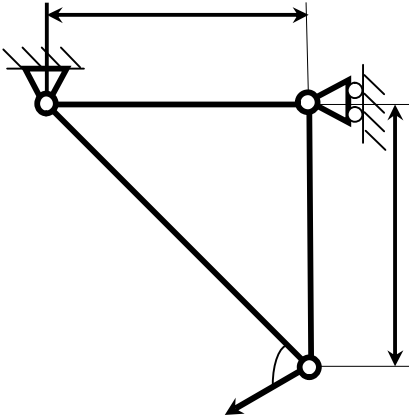


Визначити зусилля в стрижні

AB . Сила $F = 40\text{ kN}$.

Відповідь: $S_{AB} = -10,4\text{ kN}$.

5

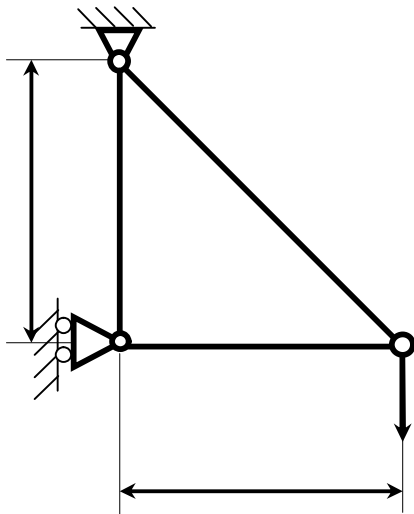


Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 700\text{ kN}$.

Відповідь: $S_{AB} = -857\text{ kN}$.

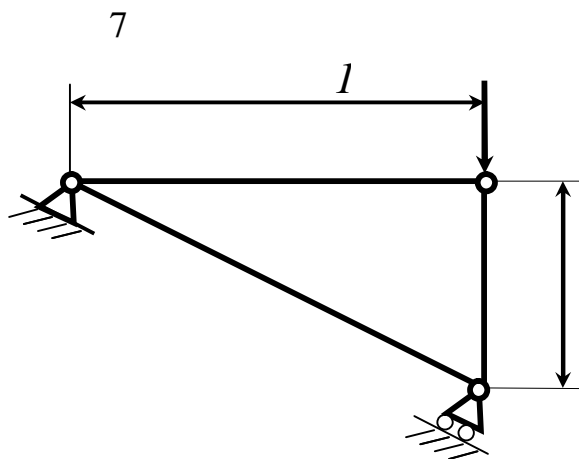
6



Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 580\text{ kN}$.

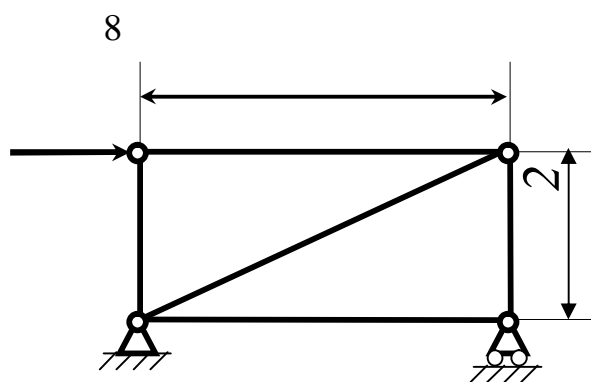
Відповідь: $S_{AB} = 998\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 750\text{ kN}$.

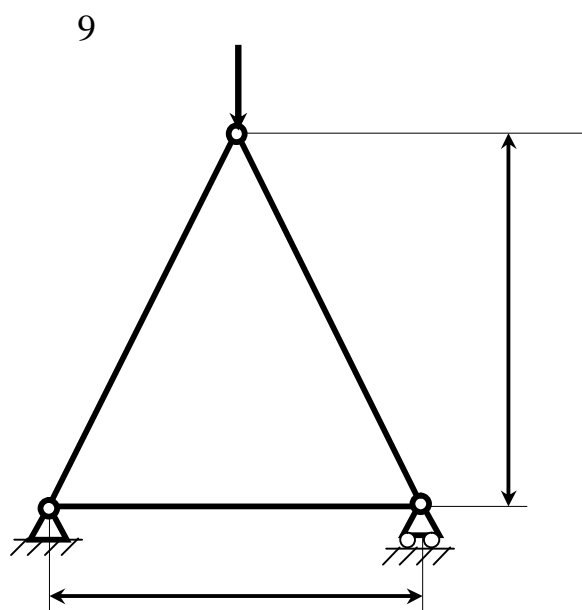
Відповідь: $S_{AB} = 335\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 450\text{ kN}$.

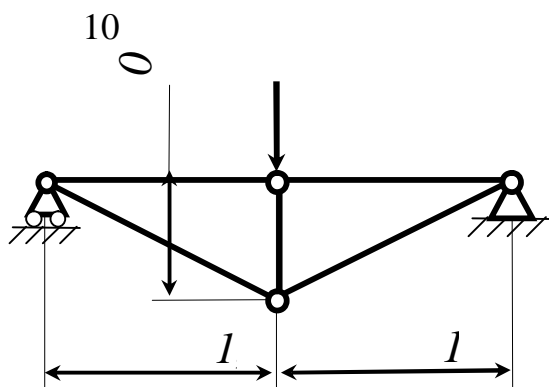
Відповідь: $S_{AB} = 450\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 400\text{ kN}$.

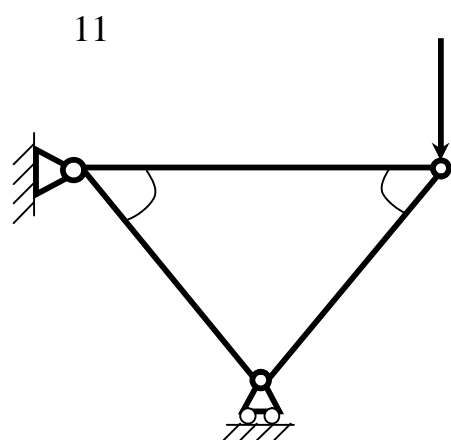
Відповідь: $S_{AB} = 100\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 60\text{ kN}$.

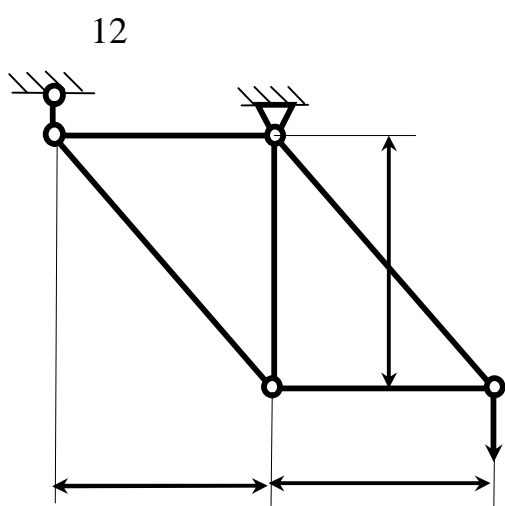
Відповідь: $S_{AB} = 78,0\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 60\text{ kN}$.

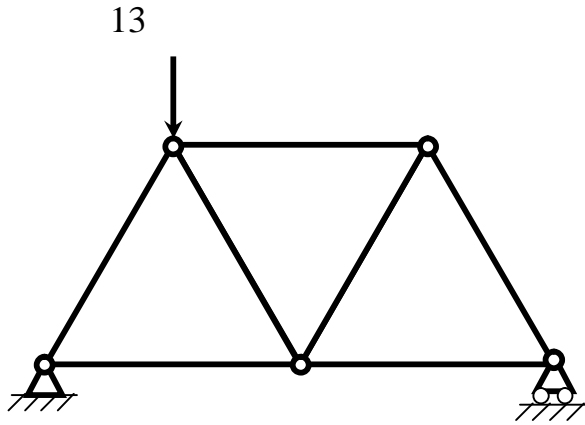
Відповідь: $S_{AB} = -78,3\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні AB .

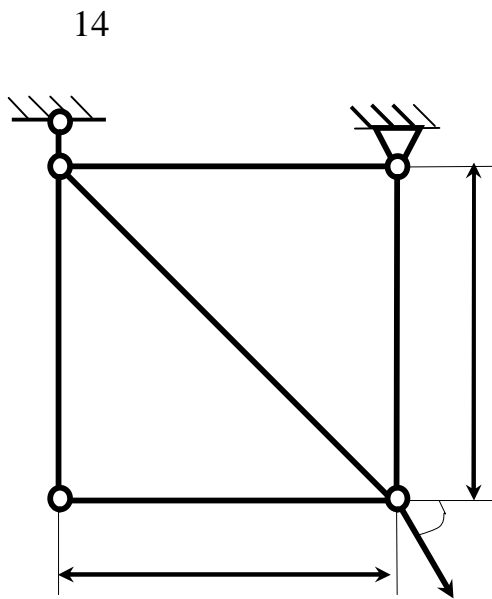
Сила $F = 300\text{ kN}$.

Відповідь: $S_{AB} = -424\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні AB , якщо сила $F = 80\text{ kN}$, а довжини усіх стрижнів рівні.

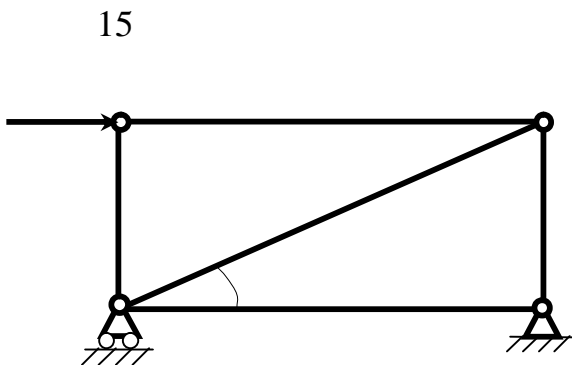
Відповідь: $S_{AB} = -23,1\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 550\text{ kN}$.

Відповідь: $S_{AB} = 232\text{ kN}$.

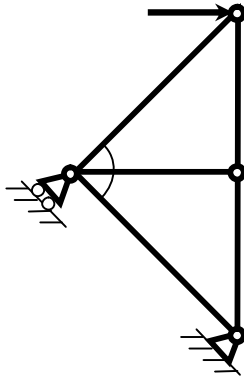


Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 346\text{ kN}$.

Відповідь: $S_{AB} = -200\text{ kN}$.

16

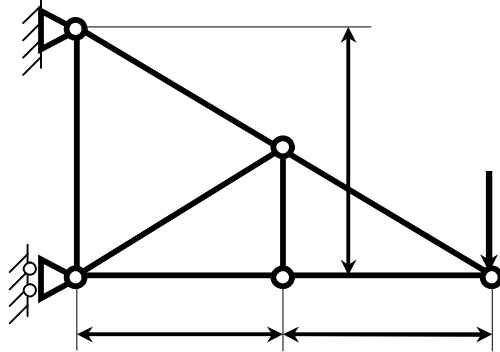


Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 400\text{ kN}$.

Відповідь: $S_{AB} = -400\text{ kN}$.

17

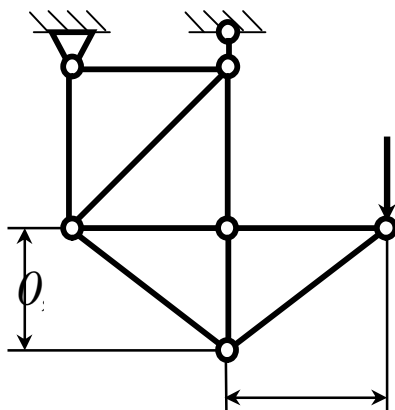


Визначити зусилля в стрижні 6. Сила

$F = 360\text{ kN}$.

Відповідь: $S_6 = -720\text{ kN}$.

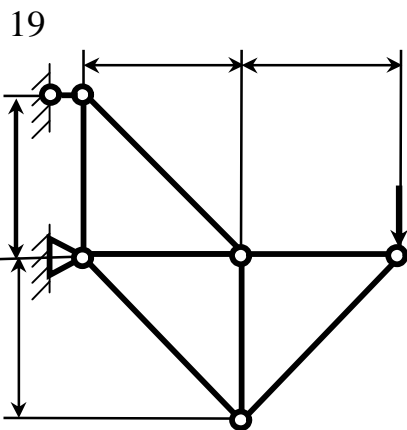
18



Визначити зусилля в стрижні 5. Си-

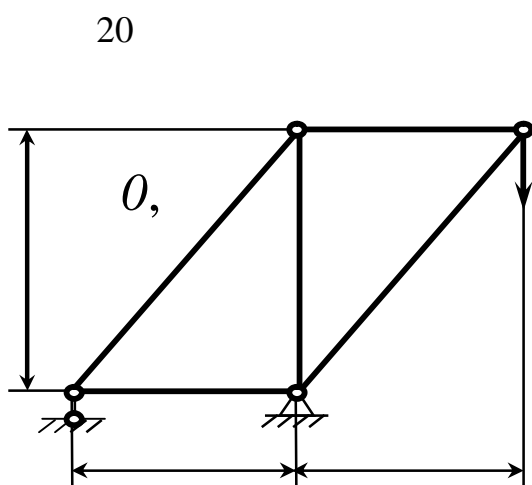
ла $F = 480\text{ kN}$.

Відповідь: $S_5 = 800\text{ kN}$.



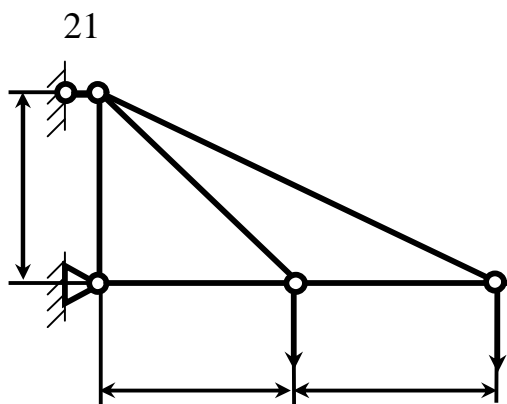
Визначити зусилля в стрижні 3. Сила $F = 460\text{ kN}$.

Відповідь: $S_3 = -460\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні 3. Сила $F = 540\text{ kN}$.

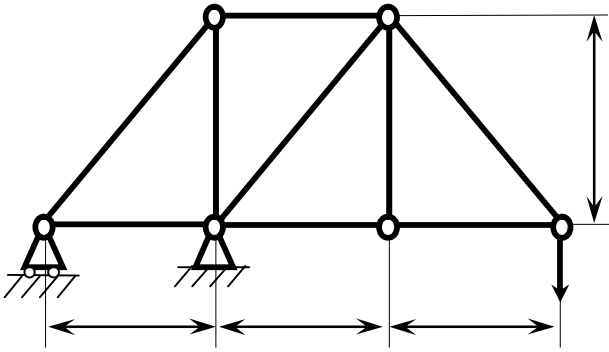
Відповідь: $S_3 = -540\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні 2. Сила $F_1 = F_2 = 520\text{ kN}$.

Відповідь: $S_2 = 735\text{ kN}$.

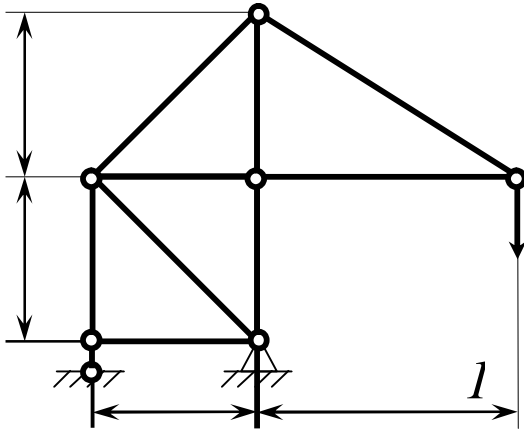
22



Визначити зусилля в стрижні 4. Сила $F = 340\text{ kN}$.

Відповідь: $S_4 = -481\text{ H}$.

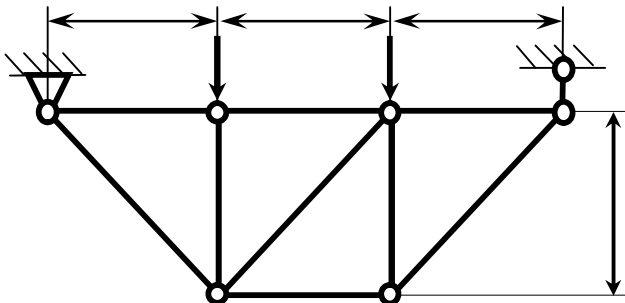
23



Визначити зусилля в стрижні 1. Сила $F = 380\text{ kN}$.

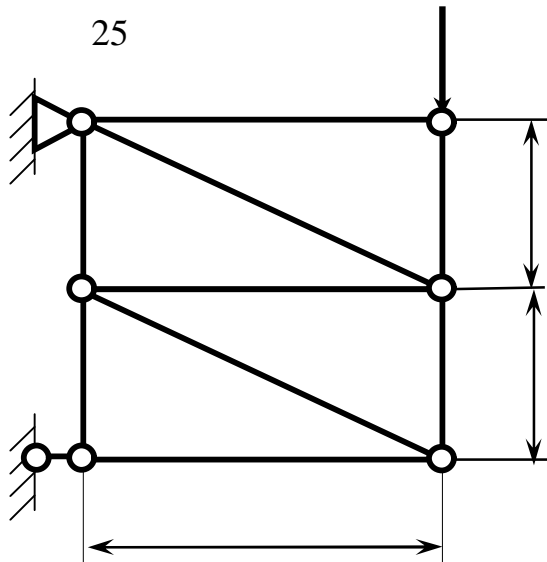
Відповідь: $S_1 = 806\text{ H}$.

24



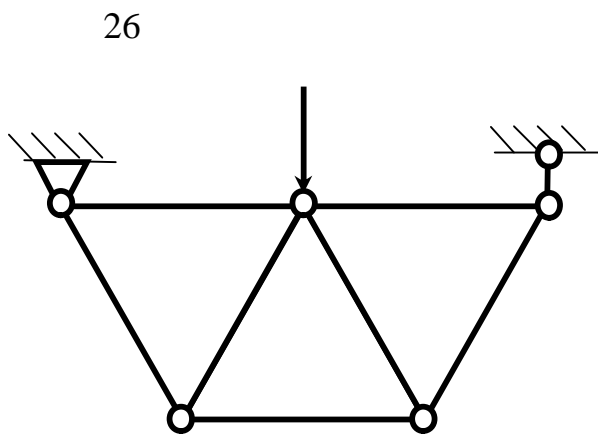
Визначити зусилля в стрижні 6. Сила $F_1 = F_2 = 380\text{ H}$.

Відповідь: $S_6 = 0$.



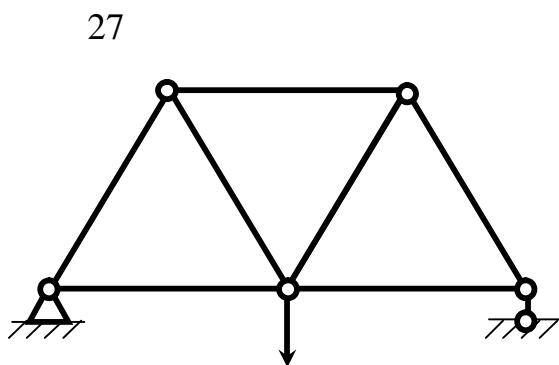
Визначити зусилля в стрижні 8. Сила $F = 260\text{ kN}$.

Відповідь: $S_8 = -130\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні 5. Сила $F = 160\text{ kN}$. Довжини всіх стрижнів однакові.

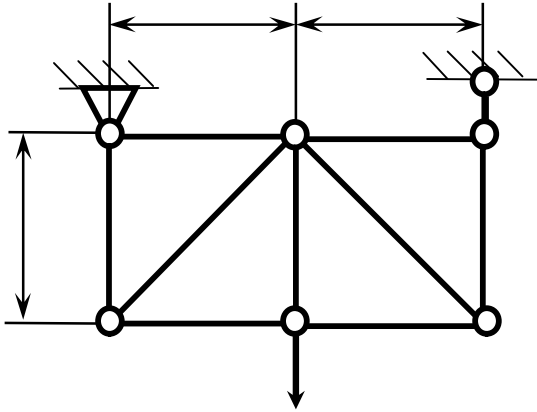
Відповідь: $S_5 = -92,4\text{ kN}$.



Визначити зусилля в стрижні 1. Сила $F = 120\text{ kN}$. Довжини всіх стрижнів однакові.

Відповідь. $S_1 = -69,3\text{ kN}$.

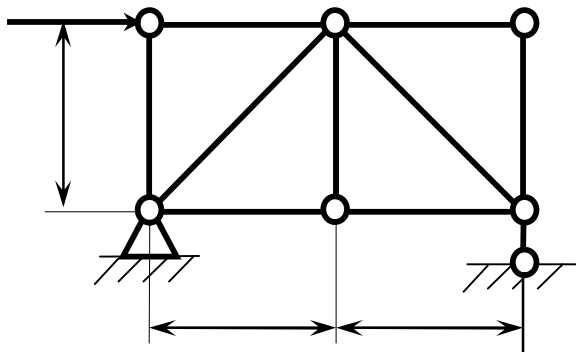
28



Визначити зусилля в стрижні 6. Сила $F = 220\text{ kN}$.

Відповідь: $S_6 = -156\text{ kN}$.

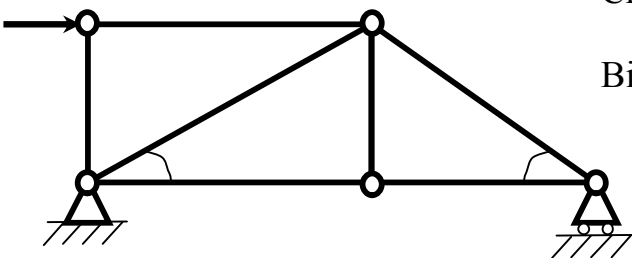
29



Визначити зусилля в стрижні 2. Сила $F = 180\text{ kN}$.

Відповідь: $S_2 = -90\text{ kN}$.

30



Визначити зусилля в стрижні AB .

Сила $F = 346\text{ kN}$.

Відповідь: $S_{AB} = 173\text{ kN}$.

3.10 Векторні і аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил

Виведення умов рівноваги довільної просторової системи сил засновано на лемі, яка має таке формулювання:

Не змінюючи статичного стану твердого тіла, силу, прикладену до цього тіла, можна перенести в будь-яку його точку паралельно самій собі, додаючи при цьому приєднану пару. Момент приєднаної пари дорівнює моменту цієї сили відносно центра зведення.

Нехай задано довільну систему сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$, що діють на тверде тіло. Головним вектором \bar{R} цієї системи сил називаються векторна система всіх сил, які входять до системи:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i.$$

Головним моментом такої системи сил відносно точки O (центра зведення) називається векторна сума моментів усіх сил, що входять у систему, відносно того самого центра:

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_i), \quad (3.24)$$

де

$$\sum_{i=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i. \quad (3.25)$$

Тут \bar{r}_i - радіус-вектор, проведений з центра O в точку прикладення сили \bar{F}_i . Проектуючи ліві та праві частини виразів (3.23) і (3.24) на осі де-

картової системи координат $Oxyz$, легко встановити аналітичні вирази для головного вектора і головного моменту у вигляді:

$$R_x = \sum_i^n F_{ix}; R_y = \sum_i^n F_{iy}; R_z = \sum_i^n F_{iz}, \quad (3.26)$$

$$M_x = \sum_i^n m_x(\bar{F}_i); M_y = \sum_i^n m_y(\bar{F}_i); M_z = \sum_i^n m_z(\bar{F}_i), \quad (3.27)$$

де

$$\sum_i^n m_x(\bar{F}_i) = \sum_i^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}),$$

$$\sum_i^n m_y(\bar{F}_i) = \sum_i^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}),$$

$$\sum_i^n m_z(\bar{F}_i) = \sum_i^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}).$$

Тут F_{ix} , F_{iy} , F_{iz} , і M_x , M_y , M_z , - проєкції відповідно головного вектора \bar{R} і головного моменту \bar{M}_0 на осі координат. Тоді модулі і напрямні косинуси відповідно головного вектора та головного моменту визначаються виразами:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \\ \cos(\bar{R}, x) &= \frac{R_x}{R}; \cos(\bar{R}, y) = \frac{R_y}{R}; \\ \cos(\bar{R}, z) &= \frac{R_z}{R}; \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
M_0 &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \\
\cos(\vec{M}_0, x) &= \frac{M_x}{M_0}; \cos(\vec{M}_0, y) = \frac{M_y}{M_0}; \\
\cos(\vec{M}_0, z) &= \frac{M_z}{M_0}.
\end{aligned}
\tag{3.29}$$

Приведемо основну теорему статички.

Довільну систему сил, що діють на тверде тіло, можна замінити однією з еквівалентних систем, яка:

1) складається з однієї сили, що прикладена в довільно обраному центрі зведення і дорівнює головному вектору цієї системи сил, і приєднаної пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно обраного центра зведення;

2) складається з двох, у загальному випадку, мимобіжних сил, одна з яких прикладена в центрі зведення, а інша – в певній точці.

Якщо обмежитися першою частиною сформульованої теореми, то дійдемо до відомої теореми Пуансо. За допомогою основної теореми статички отримуються умови рівноваги довільної просторової системи сил.

Нехай задано довільну просторову систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, прикладених до твердого тіла.

Для того щоб довільна просторова система сил була в рівновазі (еквівалентна нулю), необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи відносно довільного центра зведення дорівнювали нулю, тобто:

$$\vec{R}_0 = \sum_i \vec{F}_i = 0; \quad \vec{M}_0 = \sum_i \vec{m}_0(\vec{F}_i) = 0.
\tag{3.30}$$

Умови (3.30) називаються умовами рівноваги довільної системи сил у векторній (геометричній) формі.

Проектуючи векторні рівності (3.30) на осі координат, дістаємо умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_i F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0, \\ R_y = \sum_i F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0, \\ R_z = \sum_i F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0, \\ M_x = \sum_i m_x(\bar{F}_i) = m_x(\bar{F}_1) + m_x(\bar{F}_2) + \dots + m_x(\bar{F}_n) = 0, \\ M_y = \sum_i m_y(\bar{F}_i) = m_y(\bar{F}_1) + m_y(\bar{F}_2) + \dots + m_y(\bar{F}_n) = 0, \\ M_z = \sum_i m_z(\bar{F}_i) = m_z(\bar{F}_1) + m_z(\bar{F}_2) + \dots + m_z(\bar{F}_n) = 0. \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Отже, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій усіх сил на координатні осі та суми моментів цих сил відносно осей координат дорівнювали нулю. Таким чином, при розв'язанні задач про рівновагу просторової системи сил, прикладених до твердого тіла, з рівнянь (3.31) можна визначити шість невідомих величин.

Якщо на тверде тіло діє система пар сил, то необхідна і достатня умова рівноваги такої системи набирає виду:

$$\sum_i \bar{M}_i(\bar{F}_i, -\bar{F}_i) = 0. \quad (3.32)$$

Отже, для рівноваги пар сил необхідно і достатньо, щоб геометрична сума моментів пар дорівнювала нулю:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \sum_i \bar{M}_i(\bar{F}_i, -\bar{F}_i) = \bar{M}_1(\bar{F}_1, -\bar{F}_1) + \bar{M}_2(\bar{F}_2, -\bar{F}_2) + \dots + \\ &+ \bar{M}_n(\bar{F}_n, -\bar{F}_n) = 0. \end{aligned}$$

Умови рівноваги довільної просторової системи сил (3.30) і (3.31) являють собою найбільш загальний випадок рівноваги тіла.

Тому, всі ті випадки рівноваги тіла під дією сил, які було розглянуто раніше в розділах 1 і 2 являють собою часткові вигляди рівнянь рівноваги тіла відносно рівноваги довільної просторової системи сил.

З цього виходить, що завдяки рівнянням (3.30) і (3.31) всі часткові випадки рівноваги сил (збіжні сили, паралельні сили, плоска система сил), можна отримати із загальних умов (3.30) і (3.31).

Наприклад, розглянемо окремий випадок, коли всі сили, що діють на тверде тіло, паралельні між собою (рис.3.25).

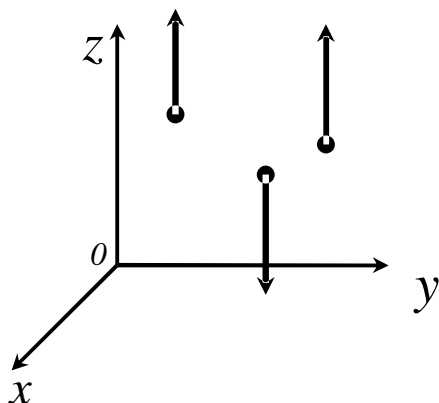


Рисунок 3.25

У цьому разі можна напрямити одну з координатних осей (наприклад, вісь Y) паралельно цим силам. Тоді з умов рівноваги (3.31) залишаться лише три рівняння, а три перетворяться в тотожності. Дійсно, проекції сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ на осі x і y дорівнюють нулю. Оскільки сили паралельні осі z , то їхні моменти відносно осі z також дорівнюють нулю. Тоді з шести рівнянь (3.31) залишаються лише три:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \sum_i m_x (\bar{F}_i) = 0, \sum_i m_y (\bar{F}_i) = 0 .$$

Розглянемо використання умов рівноваги довільної просторової системи сил на прикладах.

Приклад 1

На горизонтальний вал (рис.3.26), встановлений у підшипниках A і B , діє вантаж вагою $Q = 25H$, прив'язаний тросом до шківа с радіусом $r = 0,2l$. Вантаж вагою $P = 100l$, насаджений на стрижень ED , незмінно з'єднаний з валом AB під прямим кутом. Дано розміри: $AC = 0,2l$, $CD = 0,7l$, $BD = 0,1l$. У стані рівноваги стрижень ED відхилений від вертикалі на кут 30° . Визначити відстань l центра ваги вантажу вагою P від осі вала AB , а також реакції підшипників A і B .

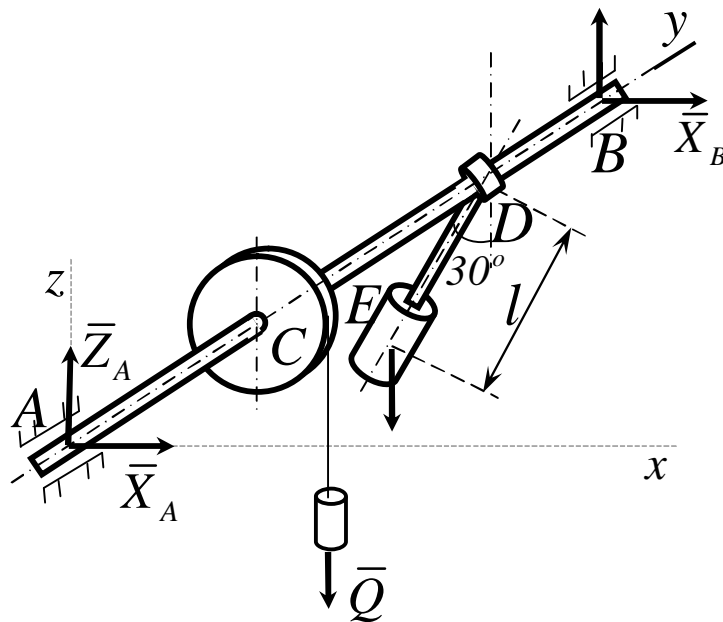


Рисунок 3.26

Рішення

Розглянемо рівновагу вала, на які діють активні сили \bar{P} і \bar{Q} . В'язами для нього є підшипники A і B . Згідно з аксіомою про в'язі, звільняємо вал від в'язей і замінюємо їх реакціями \bar{R}_A і \bar{R}_B , що лежать у площинах, перпендикулярних до осі підшипників A і B . Візьмемо сис-

тему координат, як показано на рис. 3.26. Невідомі реакції \bar{R}_A і \bar{R}_B подамо складовими $\bar{X}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Z}_B$ (рис.3.26), які треба визначити.

Для розв'язання задачі скористаємося умовами рівноваги (3.31). У цьому разі друга умова виконується тотожно, оскільки проекції всіх сил, у тому числі й реакцій в'язей, на вісь y дорівнюють нулю. З п'яти умов рівноваги, що залишилися, слід визначити п'ять невідомих величин X_A, Z_A, X_B, Z_B, l - задача статично визначена. Щодо заданої задачі, умови рівноваги (3.31) мають вигляд:

$$\begin{aligned}\sum_i F_{ix} &= X_A + X_B = 0, \\ \sum_i F_{iz} &= Z_A + Z_B - P - Q = 0, \\ \sum_i m_x(\bar{F}_i) &= -Q \cdot AC - P(AC + CD) + Z_B \cdot AB = 0, \\ \sum_i m_y(\bar{F}_i) &= -P \cdot l \sin 30^\circ + Qr = 0, \\ \sum_i m_z(\bar{F}_i) &= -X_B \cdot AB = 0.\end{aligned}$$

Звідки

$$X_A = X_B = 0;$$

$$l = \frac{Q \cdot r}{P \cdot \sin 30^\circ} = \frac{25 \cdot 0,2}{100 \cdot 0,5} = 0,1 \text{ м};$$

$$Z_B = \frac{l}{AB} (Q \cdot AC + P(AC + CD)) = 25 \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,9 = 95 \text{ Н.}$$

$$Z_A = P + Q - Z_B = 100 + 25 - 95 = 30 \text{ Н.}$$

Приклад 2

Прямокутна кришка вагою $P = 120\text{Í}$, яка утворює з вертикаллю кут $\alpha = 60^\circ$, закріплена на горизонтальній осі AB в точці B циліндричним підшипником, а в точці A підшипником з упором (рис.3.27.). Кришка удержується в рівновазі вірвовкою DE і відтягується перекинutoю через блок O ниткою з вантажем вагою $Q = 200\text{Í}$ на кінці (лінія KO паралельна AB).

Дано: $BD = BE$, $AK = a = 0,4\text{ì}$, $AB = b = 1\text{ì}$.

Визначити натяг вірвовки DE і реакції підшипників A і B .

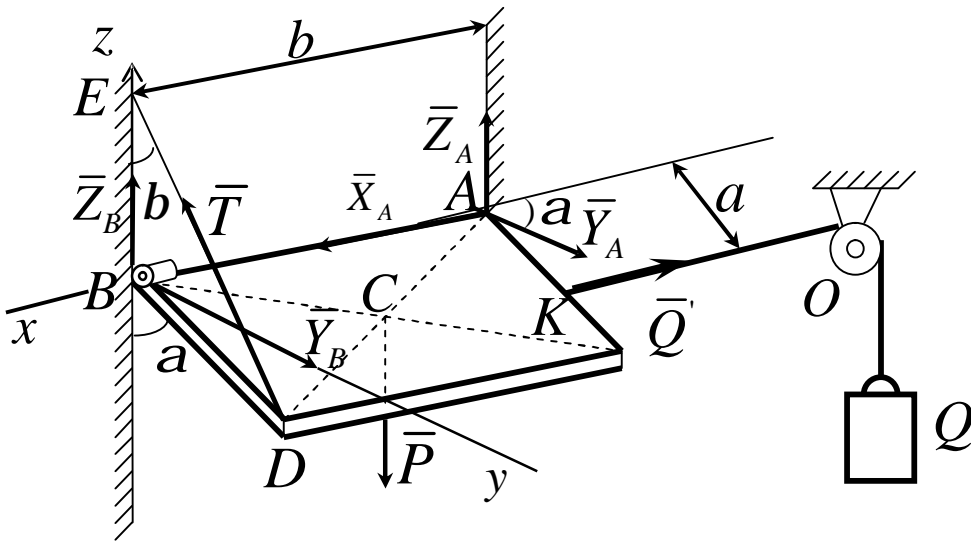


Рисунок 3.27

Рішення.

Розглянемо рівновагу кришки. Проведемо координатні осі, взявши початок в точці B (при цьому сила \vec{T} перетинає осі Y і Z , що спрощує вигляд рівнянь моментів).

Потім зобразимо всі діючі на кришку задані сили і реакції в'язей: силу ваги \vec{P} , прикладену в центрі ваги C кришки, силу \vec{Q} , рівну за модулем Q , реакцію \vec{T} вірвовки і реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ і \vec{Y}_B, \vec{Z}_B підшипни-

ків A і B . Для складання умов рівноваги введемо кут b і означимо $BD = BE = d$. Підрахунок моментів деяких сил пояснимо на рисунках 3.28 і 3.29.

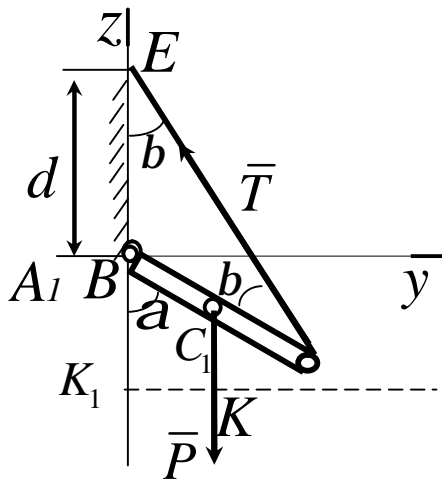


Рисунок 3.28

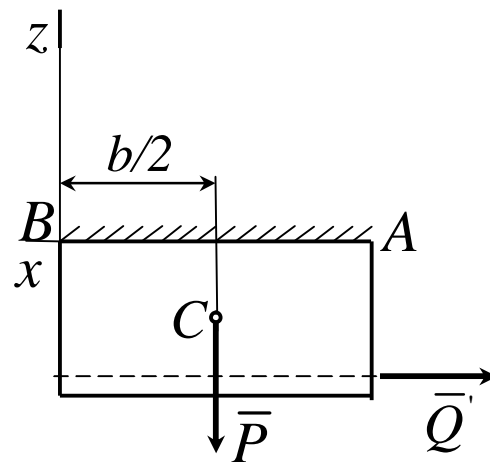


Рисунок 3.29

На рис.3.28 показано вигляд у проекції на площину Byz з позитивного кінця осі x . Цей рисунок допомагає відрахувати моменти сил \bar{P} і \bar{T} відносно осі x . Із нього видно, що проекції цих сил на площину yz (площину, перпендикулярну осі x) рівні самим силам, а плече сили \bar{P} відносно точки B дорівнює $BC_1 \cdot \sin a = (d/2) \sin a$; плече сили \bar{T} відносно цієї точки дорівнює $BD \cdot \sin b = d \sin b$.

На рисунку 3.29 показано вигляд в проекції на площину Bxz з позитивного кінця осі y . Цей рисунок (разом з рисунком 3.28) допомагає вирахувати моменти сил \bar{P} і \bar{Q} відносно осі y . Із нього видно, що проекції цих сил на площину xz рівні самим силам, а плече сили \bar{P} відносно точки B дорівнює $AB/2 = b/2$; плече ж сили \bar{Q} відносно цієї точки дорівнює AK_1 , тобто $AK \cos a$, або $a \cos a$, що видно з рис.3.28.

Склавши з урахуванням зроблених пояснень умови рівноваги 3.31 і

ураховуючи водночас $Q' = Q$, отримуємо:

$$\sum_i F_{ix} = -Q + X_A = 0, \quad (3.28)$$

$$\sum_i F_{iy} = -T \sin b + Y_A + Y_B = 0, \quad (3.29)$$

$$\sum_i F_{iz} = -P + T \cos b + Z_A + Z_B = 0, \quad (3.30)$$

$$\sum_i m_x(\bar{F}_i) = -(Pd/2) \sin a + Td \sin b = 0, \quad (3.31)$$

$$\sum_i m_y(\bar{F}_i) = -Pb/2 + Qa \cos a + Z_A b = 0, \quad (3.32)$$

$$\sum_i m_z(\bar{F}_i) = Qa \sin a - Y_A b = 0. \quad (3.33)$$

Враховуючи, що $b = a/2 = 30^\circ$, знаходимо із рівнянь (3.28), (3.31), (3.32) і (3.33):

$$X_A = Q = 200\text{H}, T = (P \sin a) / 2 \sin b \approx 104\text{H},$$

$$Z_A = P/2 - (Qa \cos a) / b = 20\text{H},$$

$$Y_A = (Qa \sin a) / b \approx 69\text{H}.$$

Підставивши ці значення в рівняння (3.29) і (3.30), отримаємо:

$$Y_B = T \sin b - Y_A = -17\text{H},$$

$$Z_B = P - T \cos b - Z_A = 10\text{H}.$$

Кінцево:

$$T \approx 104\text{H},$$

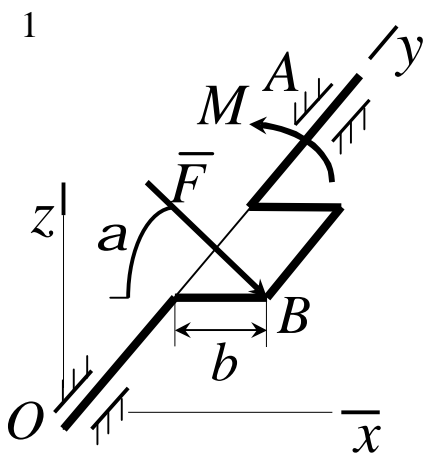
$$X_A \approx 200\text{H},$$

$$Y_A \approx 69\text{H},$$

$$Y_B \approx -17\text{H},$$

$$Z_B \approx 10\text{H}.$$

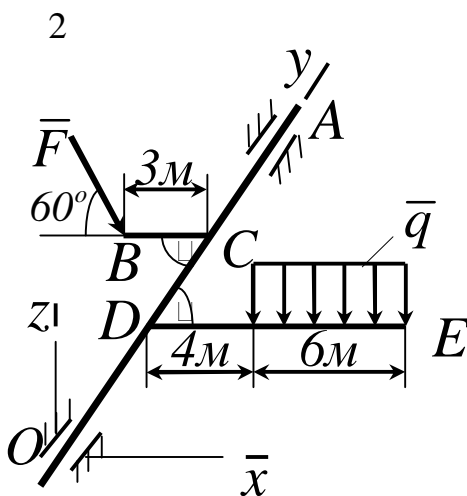
3.11 Контрольні завдання для самостійної роботи



До колінчатого валу OA в точці B під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту прикладена сила $F = 10\text{Í}$, яка врівноважується парою сил з моментом M . Визначити модуль моменту, якщо $\bar{F} \perp Oxyz$ і $b = 0,9\text{ í}$.

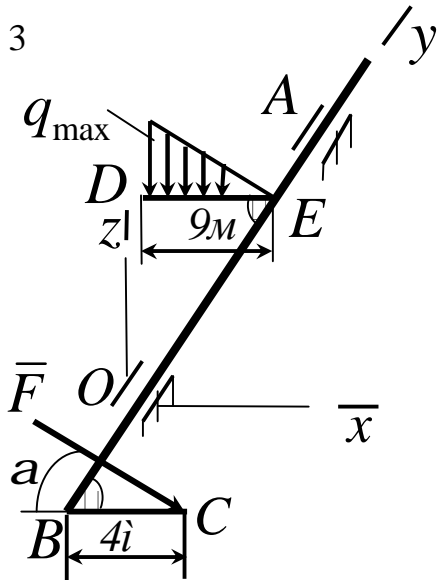
Відповідь:

$$M = 7,8\text{H} \cdot \text{í}.$$



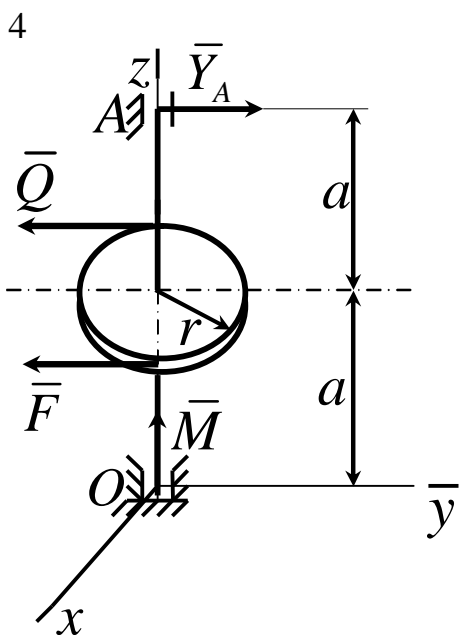
До вала OA під прямим кутом прикріплені стрижні BC і DE . До стрижня DE прикладене розподілене навантаження $q = 0,5\text{Í/л}$. Визначити модуль сили \bar{F} , яка врівноважує це навантаження, якщо $\bar{F} \perp Oxyz$.

Відповідь: $F = 8,1\text{H}$.



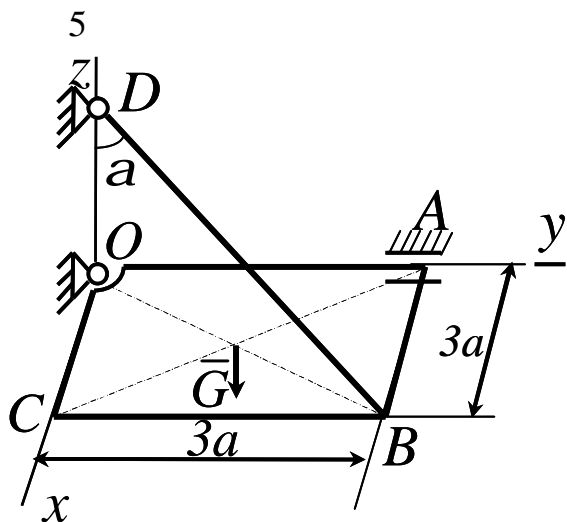
До вала AOB під прямим кутом прикріплені стрижень DE , який несе розподілене навантаження $q_{\max} = 0,5 \text{ Ї/л}$ і стрижень BC . Навантаження врівноважується силою $\bar{F} \in Oxz$, прикладеною в точці C під кутом $\alpha = 30^\circ$. Визначити модуль цієї сили.

Відповідь: $F = 6,75 \text{ Ї}$.



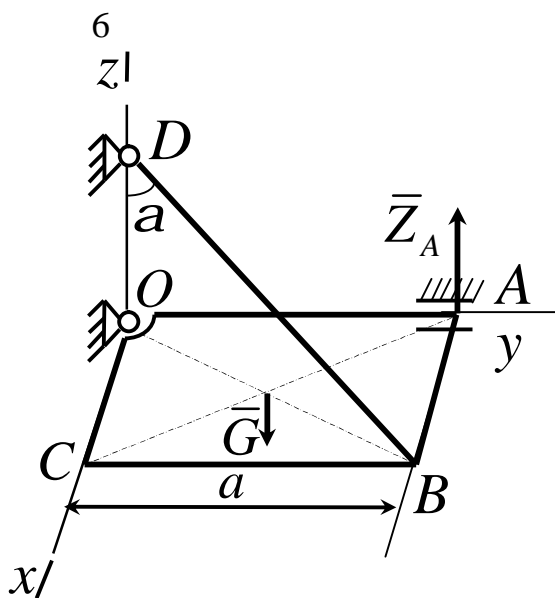
Сила $F = 2Q = 120 \text{ Ї}$, яка прикладена до шківa, врівноважується парою сил з моментом $M = 18 \text{ Н} \cdot \text{л}$. Склавши рівняння моментів сил відносно осі Ox , визначити реакцію \bar{Y}_A підшипника A , якщо радіус шківa $r = 0,3 \text{ л}$, $a = 0,3 \text{ л}$ і сила $\bar{F} \in \bar{Q} \in Oy$.

Відповідь: $Y = 90 \text{ Ї}$.



Однорідна плита $OABC$ вагою $G = 30H$ утримується в горизонтальному стані шарнірами O, A і тросом BD . Визначити натяг троса, якщо $a = 2i$ і кут $\alpha = 60^\circ$.

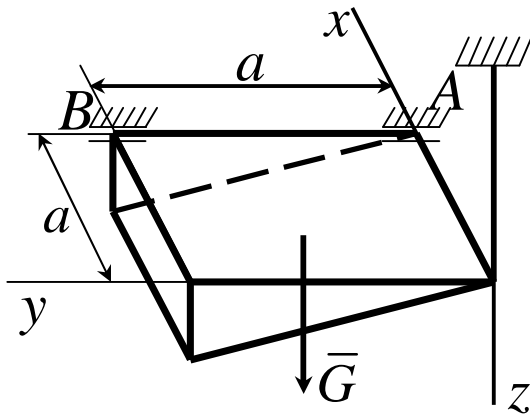
Відповідь: $T = 30H$.



Однорідна квадратна рама $OABC$ зі стороною $a = 0,5i$ і вагою $G = 140H$ під дією накладених в'язей утримується в горизонтальному стані. Скласти рівняння моментів сил відносно лінії OB і визначити реакцію \bar{Z}_A шарніра A , якщо кут $\alpha = 60^\circ$.

Відповідь: $Z_A = 0$.

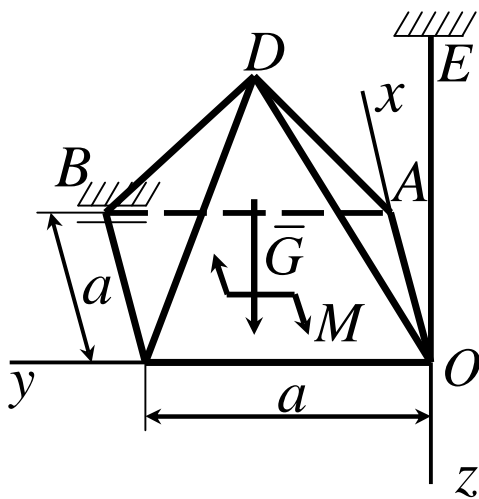
7



Однорідне тіло вагою $G = 60\text{H}$ під дією накладених в'язей знаходиться в рівновазі. Склавши рівняння моментів сил відносно осі Ox , визначити вертикальну складову реакції шарніра B , якщо розмір $a = 0,1\text{ м}$.

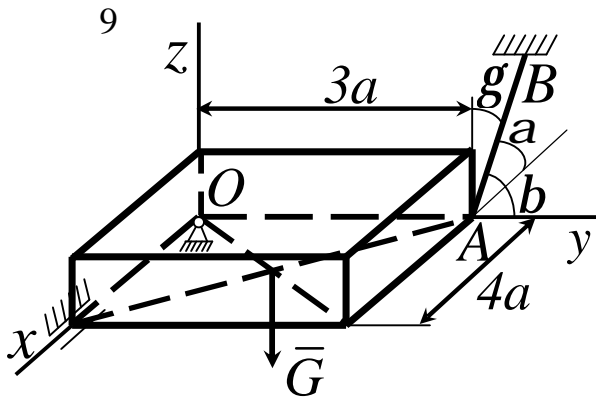
Відповідь: $Z_A = 40\text{H}$.

8



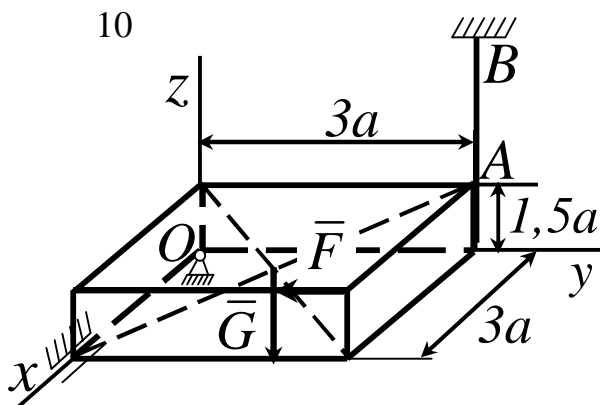
Однорідна піраміда $OABCD$ вагою $G = 60\text{H}$ під дією пари сил з моментом $M = 150\text{H} \cdot \text{м}$ і накладених в'язей знаходиться в рівновазі. Визначити складову реакції шарніра B , паралельну осі Ox , якщо розмір $a = 3\text{ м}$, а пара сил лежить у площині Oxy .

Відповідь: $X_B = 50\text{H}$.



Однорідна плита вагою $G = 400\text{Н}$ під дією накладених в'язей знаходиться в рівновазі. Склавши рівняння моментів відносно осі Ox , визначить натяг троса AB , якщо $a = 20\text{см}$ і кути $\alpha = 61^\circ$, $\beta = 44^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

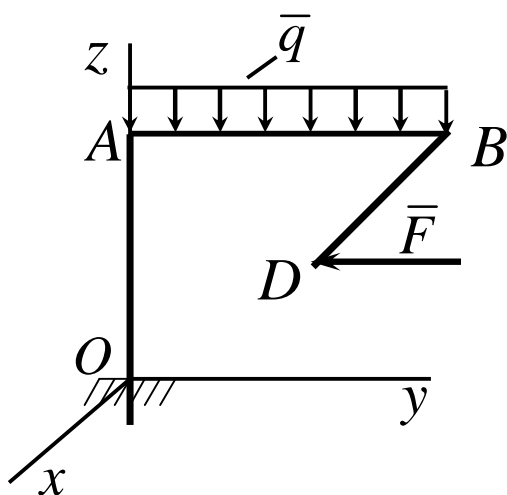
Відповідь: $T_{AB} = 400\text{Н}$.



Тіло вагою $G = 11\hat{e}_1$ під дією накладених в'язей і прикладеної сили $F = 3\hat{e}_1$ знаходиться в рівновазі. Скласти рівняння моментів сил відносно осі Ox , потім визначити натяг троса AB , якщо розмір $a = 0,2\hat{i}$.

Відповідь $T_{AB} = 4 \cdot 10^3 \hat{e}_1\text{Н}$.

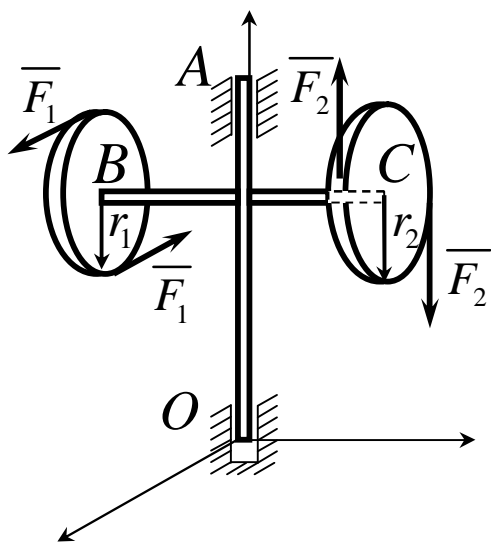
11



Фігурна балка $OABD$ знаходиться в рівновазі. Визначити складову реакції в защемленні вздовж осі Oz , якщо дано:
 $OA = 1,7i$, $AB = 2i$,
 $BD = 3,4i$, $BD \perp Ox$, сила
 $F = 10eI$ і інтенсивність розподіленого навантаження $q = 20eI \text{ } \hat{N}$.

Відповідь: $Z_0 = 40eI$.

12



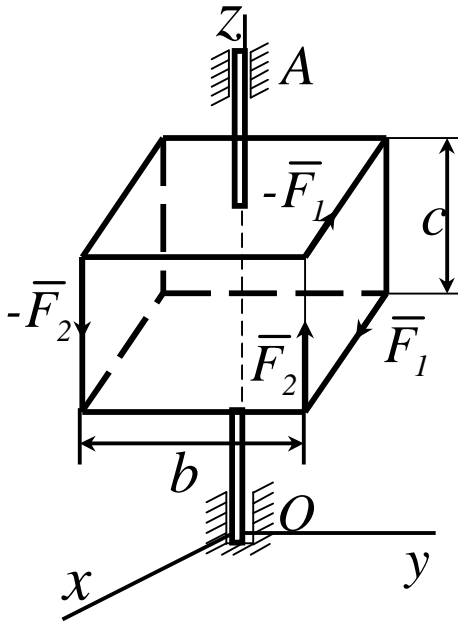
Два диска, радіуси яких $r_1 = 0,25i$ і $r_2 = 0,3i$ розміщені в площинах, паралельних площині Oxz . Диска прикріплені до горизонтального стрижня BC , який так само жорстко прикріплений до вертикального стояка OA . У площині кожного диска діють пари, сили яких напрямлені по дотичних до обводів.

$F_1 = 30H$, $F_2 = 50H$. Відстань між під'ятником O і підшипником A

дорівнює $0,75i$. Нехтуючи вагою системи, визначити реакцію під'ятника X_0 .

Відповідь: $X_0 = -20H$.

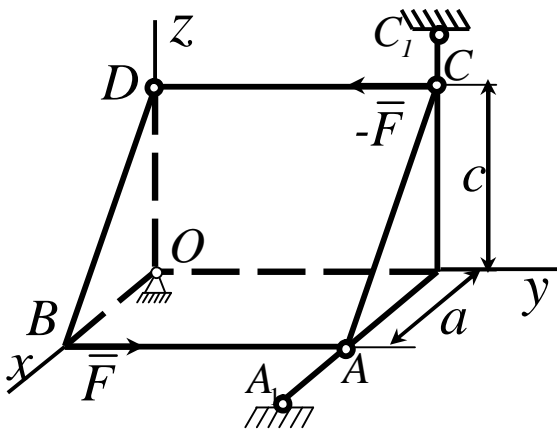
13



Вздовж ребер прямокутної коробки, яку жорстко прикріплено до вертикального стрижня, прикладені дві пари сил площини Oxz , а пари сил $(\bar{F}_2, -\bar{F}_2)$ – площині Oyz . Визначити реакцію підп'ятника O X_0 , якщо відстань між ним і підшипником A дорівнює h . Вагою коробки знехтувати.

Відповідь: $X_0 = -\frac{c}{h}F_1$.

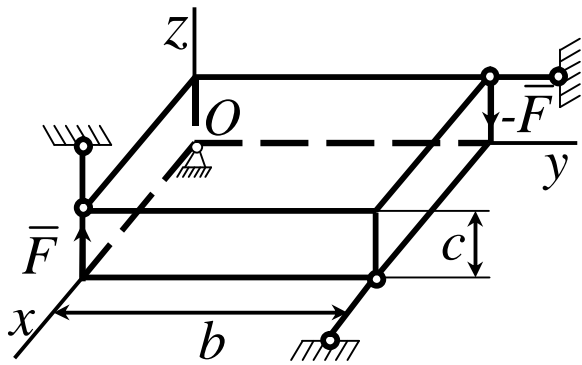
14



Призматичне тіло вагою якого можна знехтувати, прикріплено до нерухомих опор кульовим шарніром O , невагомим стрижнем AA_1 , паралельним осі Ox і стрижнем CC_1 , паралельним осі Oz . У площині грані ABC діє пара сил, сила якої дорівнює F . Визначити реакцію Z_0 шарніра O .

Відповідь: $Z_0 = \frac{c}{a}F$.

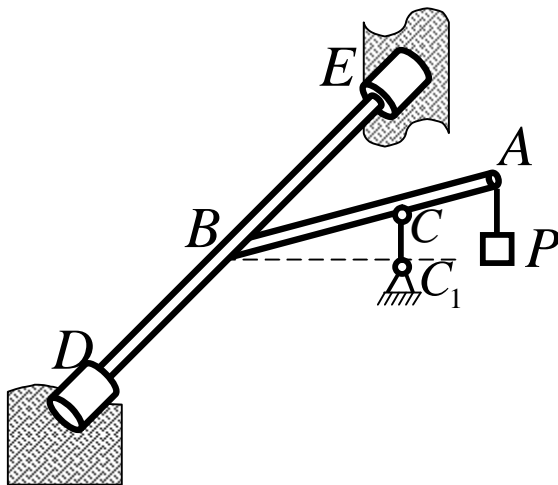
15



Уздовж двох ребер прямокутного паралелепіпеда діють дві сили, кожна з яких дорівнює за модулем \bar{F} . Паралелепіпед прикріплено до опор кульовим шарніром O і трьома невагомими стрижнями з шарнірними кріпленнями на кінцях. Визначити реакцію кульового шарніра Y_0 , якщо стрижні паралельні координатним осям.

Відповідь: $Y_0 = \frac{b}{c} F$.

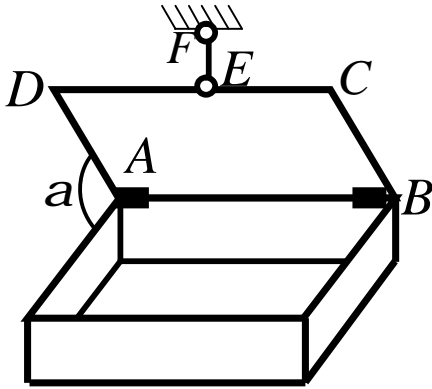
16



Стрижень AB жорстко прикріплено до горизонтального вала, який спирається на втулки D і E . До кінця A стрижня підвішений вантаж вагою $P = 390\text{H}$, а в точці C стрижень AB підтримується вертикальним стрижнем CC_1 . Нехтуючи вагою стрижнів, знайти реакцію стрижня CC_1 , якщо $DB = BE$, $BC = 3AC$ і $AB \perp DE$.

Відповідь: $R_C = 520\text{H}$.

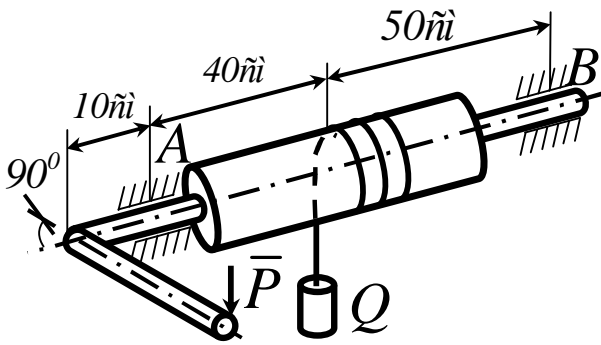
17



Однорідна кришка ящика, вага якої $100H$ утримується в рівновазі вертикальною вірвовкою EF . Визначити реакції петлі A , якщо $CE = 20cì$, $ED = 80cì$.

Відповідь: $R_A = 40H$.

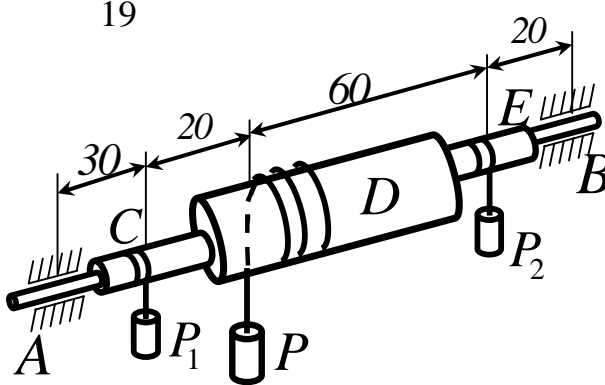
18



Вантаж $Q = 1êH$ рівномірно піднімається за допомогою коловорота. Нехтуючи вагою коловорота, визначити реакцію підшипника A , якщо сила P прикладається перпендикулярно до рукоятки CD , довжина якої $50cì$, при її горизонтальному положенні. Радіус вала $r = 11cì$.

Відповідь: $R_A = 800H$.

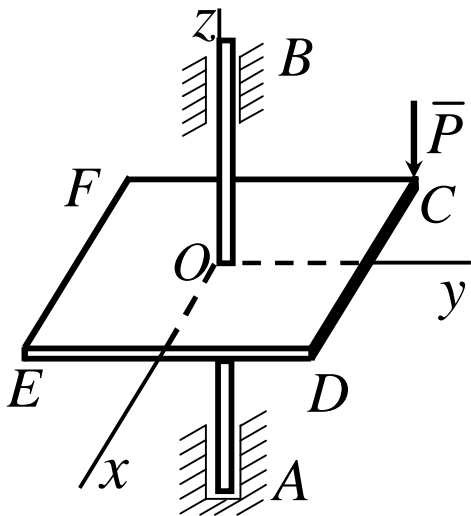
19



До горизонтальної осі AB жорстко прикріплені барабани C , D , E . Нехтуючи вагою барабанів, визначити, при рівновазі системи барабанів, реакцію підшипника B , якщо вага вантажів $P_1 = 1\text{êН}$, $P_2 = 2\text{êН}$, радіуси барабанів $r_D = 2r_C = 2r_E$.

Відповідь: $R_B = 2,5\text{êН}$.

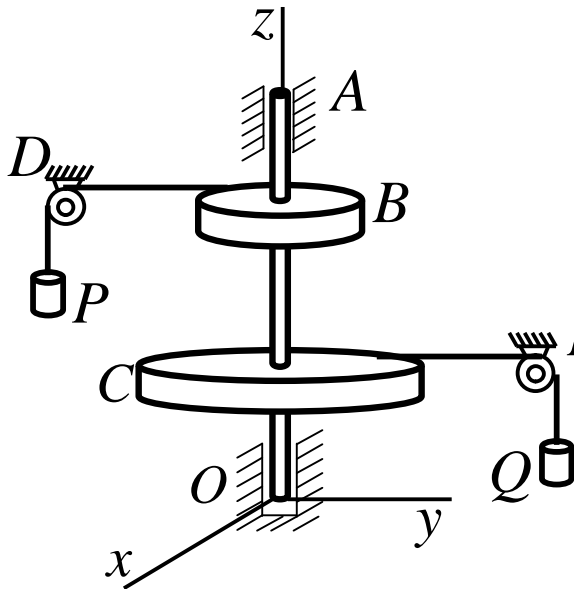
20



Горизонтальна полиця жорстко прикріплена до вертикальної осі, довжина якої 100см . У точці C , координата якої $x = -60\text{см}$, $y = 50\text{см}$, на полицю діє вертикальна сила $P = 100\text{Н}$. Визначити реакцію X_B підшипника B , яка зумовлена силою P .

Відповідь: $X_B = 60\text{Н}$.

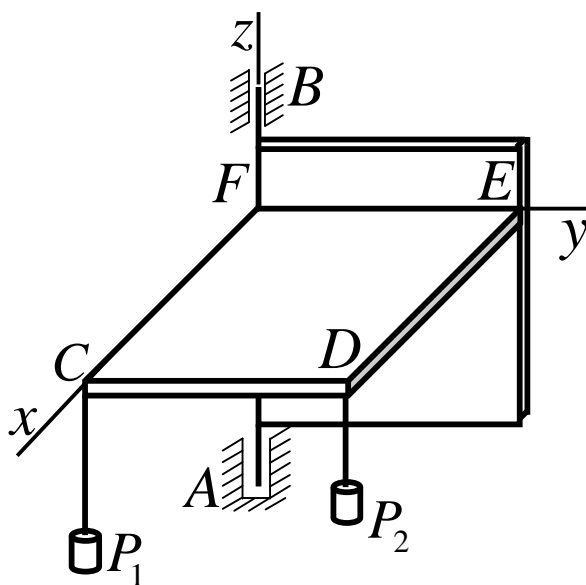
21



Однорідні горизонтальні блоки B і C прикріплені до вертикального вала OA . На блоки намотані вірвовки, перекинуті через блоки D і E . До кінців вірвовок прикріплені вантажі P і Q . Загальна вага вала і горизонтальних блоків дорівнює $60H$. Нехтуючи тертям у блоках D і E , визначити вагу вантажу Q при рівновазі системи, а також реакцію в'язі Y_A , якщо $P=100H$, $AB=30\text{см}$, $BC=55\text{см}$, $CO=45\text{см}$ і радіуси блоків $r_B=10\text{см}$, $r_C=50\text{см}$.

Відповідь $Q=20H$, $Y_A=70H$.

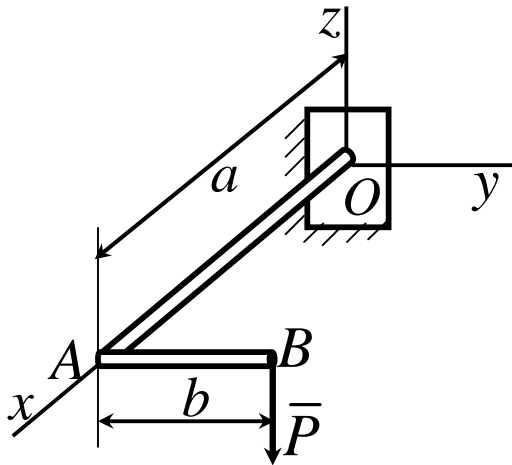
22



Однорідна горизонтальна полиця $CDEF$, вага якої $50H$, жорстко прикріплена до прямокутної рами, вага якої $40H$. Визначити реакцію X_B підшипника B , якщо $AB=90\text{см}$, $CD=FE=60\text{см}$, $CF=DE=40\text{см}$ і вага вантажів $P_1=80H$, $P_2=120H$.

Відповідь: $X_B=100H$.

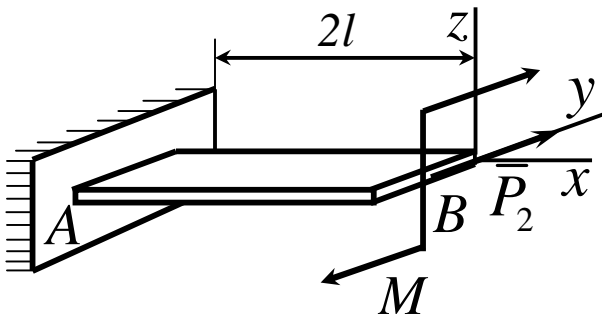
23



Горизонтальний колінчастий стрижень OAB навантажений вертикальною силою \bar{P} . $OA \perp AB$. Нехтуючи вагою стрижня, визначити реактивний момент відносно осі x жорсткого закріплення.

Відповідь: $M_{Ox} = Pb$.

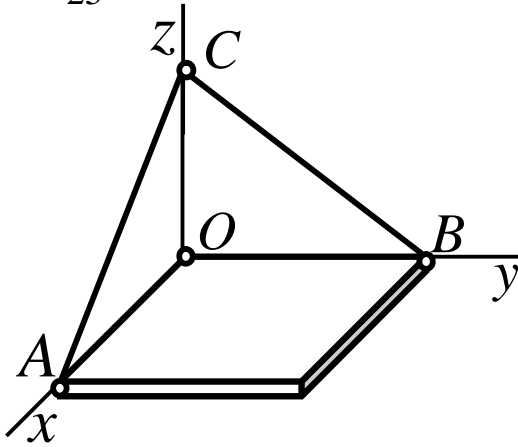
24



На консольну балку AB , вага якої P_1 і довжина $2l$, діють горизонтальна сила P_2 і пара сил з моментом M . Визначити реактивний момент жорсткого закріплення A відносно осі y .

Відповідь: $M_{Ay} = -P_1 l$.

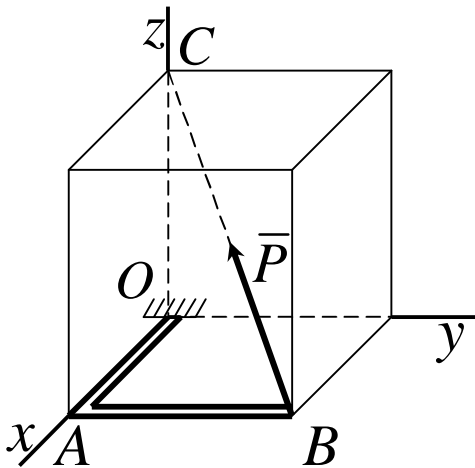
25



Однорідна плита, вага якої P , утримується в горизонтальному положенні сферичним шарніром O і невагомими тросами AC і BC . OA . Визначити натяг троса BC , якщо $OA = OB = OC$.

Відповідь: $T_{BC} = P \frac{\sqrt{2}}{2}$.

26

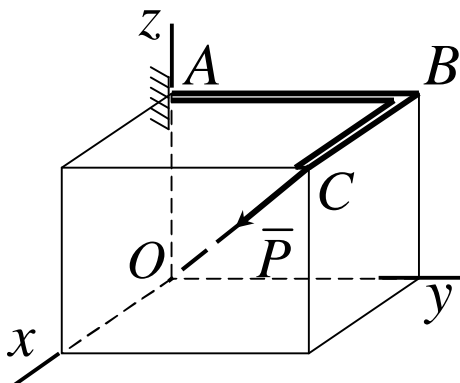


Колінчатий стрижень OAB навантажений силою $P = 580\text{H}$, направленою за діагоналлю BC прямокутного паралелепіпеда. $OA = 12\text{сi}$, $AB = 16\text{сi}$, $OC = 21\text{сi}$. Нехтуючи вагою стрижня, визначити складову M_y реакції жорсткого закріплення в точці O .

Відповідь:

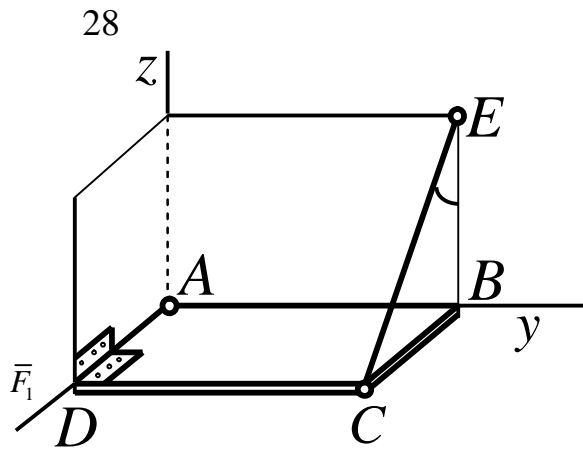
$$M_y = 5,04\text{H} \cdot \text{i}$$

27



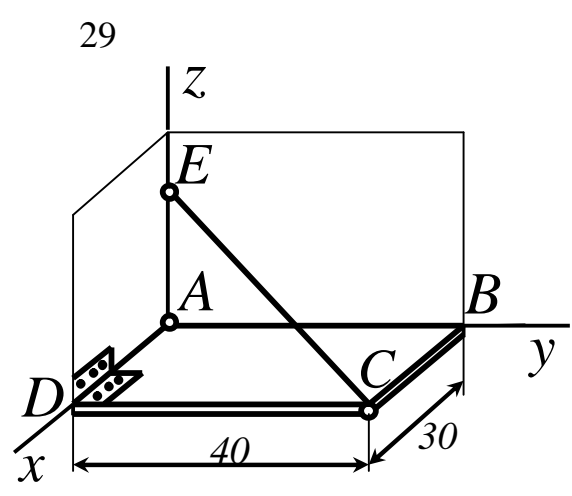
На колінчатий стрижень ABC діє сила $P = 680\text{H}$, направлена за діагоналлю CO прямокутного паралелепіпеда $OA = 16\text{сi}$, $AB = 24\text{сi}$, $BC = 18\text{сi}$. Нехтуючи вагою стрижня, знайти реакцію M_y жорсткого закріплення A .

Відповідь: $M_y = -5,76\text{H} \cdot \text{i}$.



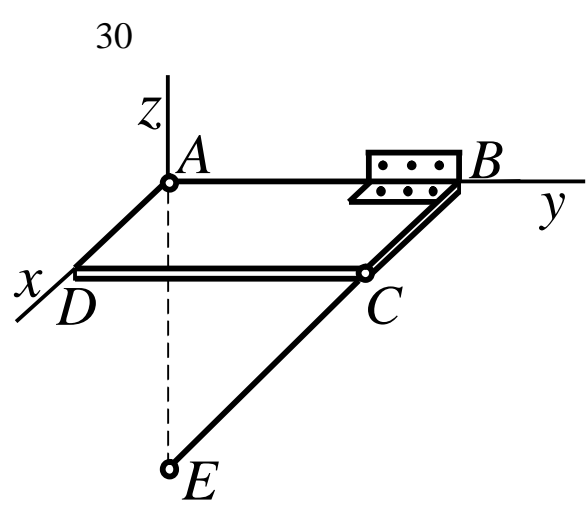
Однорідна прямокутна полиця, вага якої $100H$, утримується в горизонтальному положенні сферичним шарніром A , петлею D і невагомою вірвовкою CE , що утворює з вертикаллю BE кут 60° . Визначити натяг вірвовки.

Відповідь: $T = 100H$.



Однорідна прямокутна плита, вага якої $300H$, утримується у горизонтальному положенні сферичним шарніром A , петлею D і невагомою вірвовкою CE , довжина якої li . $BC = 30\text{cm}$, $CD = 40\text{cm}$. Визначити натяг вірвовки CE .

Відповідь: $T = 100\sqrt{3}H$.



Однорідна прямокутна полиця, вага якої $260H$, утримується в горизонтальному положенні сферичним шарніром A , петлею B і підперта невагомим стрижнем CE . Визначити зусилля в стрижні, якщо $AB = 120\text{cm}$, $AD = 50\text{cm}$ і $AE = 65\text{cm}$. В точках C і E шарніри.

Відповідь: $S_{CE} = 130\sqrt{5}H$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
- 2 Добронравов В.В. Курс теоретической механики/ В.В.Добронравов, Н.Н.Микитин. – М.: Высш. шк., 1983. – 575с.
- 3 Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1981. – 480 с.
- 4 Збірник задач з теоретичної механіки/ О.А.Березова, З.В.Солодовников, Г.Ю. Друшляк. – Київ: Вища школа, 1975. – 323 с.
- 5 Тарг С. М. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания. – М.: Высш. шк., 1989. – 110с.
- 6 Веселовский И.Н. Очерки по истории механики. – М.: Высш. шк., 1974. – 286с.
- 7 Космодемьянский А.А. Теоретическая механика и современная техника. – М.: Просвещение, 1969. – 254с.
- 8 Збірник розрахунково-графічних завдань з теоретичної механіки. Статика і кінематика / О.Г.Водолазська, Ю.О.Єрфорт, Л. В. Кутовий та ін. – Краматорськ: ДДМА, 2004. – Ч.1. – 128 с.

Навчальне видання

Сергій Володимирович Подлесний
Володимир Григорович Федорченко
Юрій Олександрович Єрфорт
Дмитро Георгійович Сущенко
Борис Володимирович Плєскач

Розв'язання задач теоретичної механіки

Розділ «Статика»

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Редактор

Ірина Іванівна Дьякова

Підп. до друку

Формат 60x84/16.

Ризограф. друк. Ум.друк. арк.

Обл.-вид. арк..

Тираж прим. Зам. №

ДДМА. 84313, м.Краматорськ, вул..Шкадінова, 72