



**В.М.Іскрицький, С.В.Подлесний, О.Г.Водолазська,
Ю.О.Єрфорт**

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
Статика і кінематика

**Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія**

**В.М.Іскрицький, С.В.Подлесний, О.Г.Водолазська,
Ю.О.Єрфорт**

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Статика і кінематика

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів механічних спеціальностей
очної та заочної форм навчання ВНЗ

Краматорськ 2007

УДК 531.
ББК 22.21
Т-33

Рецензенти:

В.Б.Малєєв, д-р техн.наук, проф. Донецького національного технічного університету, м. Донецьк

О.К.Морачковський, д-р техн.наук, проф. Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Харків

Л.І.Сердюк, д-р техн.наук, проф. Полтавського національного технічного університету, м. Полтава.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Лист № від 2007

Іскрицький В.М., Подлесний С.В., Водолазська О.Г., Єрфорт Ю.О.
Т-33 Теоретична механіка. Статика і кінематика: Навчальний посібник.
– Краматорськ: ДДМА, 2007. – 204 с.
ISBN

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал, методику та приклади розв'язання задач з першого і другого розділів теоретичної механіки: «Статика та кінематика» у межах навчальної програми вищих технічних навчальних закладів.

УДК 531.
ББК 22.21

ISBN

© В. М. Іскрицький, С. В. Подлесний,
О. Г. Водолазська, Єрфорт Ю. О., 2007
© ДДМА, 2007

ЗМІСТ

ВСТУП	6
СТАТИКА	7
1 Основні поняття і аксіоми. Система збіжних сил.....	7
1.1 Основні поняття статички	7
1.2 Аксіоми статички.....	9
1.3 В'язі та їх реакції	13
1.4 Аналітичний спосіб задавання сили	18
1.5 Система збіжних сил	21
1.6 Умови рівноваги системи збіжних сил.....	23
1.7 Теорема про три сили	24
1.8 Розв'язання задач статички	25
2 МОМЕНТ СИЛИ. ПАРА СИЛ.....	32
2.1 Момент сили відносно точки	32
2.2 Момент сили відносно осі.....	34
2.3 Пара сил та її момент.....	37
2.4 Теорема про пари сил.....	39
2.4.1 Теорема про еквівалентність пар сил, розташованих в одній площині	40
2.4.2 Теорема про перенесення пари сил в паралельну площину.....	42
2.4.3 Теорема про додавання пар сил	43
2.5 Умови рівноваги системи пар сил	45
3 ОСНОВНА ТЕОРЕМА СТАТИКИ І УМОВИ РІВНОВАГИ ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ СИЛ	46
3.1 Теорема про паралельне перенесення сили.....	47
3.2 Основна теорема статички про приведення довільної системи сил до заданого центра.....	47
3.3 Формули для обчислення головного вектора і головного моменту....	49
3.4 Випадки приведення просторової системи сил до найпростіших систем.....	50
3.5 Рівняння рівноваги довільної просторової системи сил та просторової системи паралельних сил	53
3.6 Теорема Варіньона про момент рівнодіючої.....	55
3.7 Розв'язання задач рівноваги тіла під дією просторової системи сил	56
4 ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ	61
4.1 Приведення плоскої системи сил до найпростіших систем	61
4.2 Рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил та плоскої системи паралельних сил.....	63
4.3 Розподілене навантаження	65
4.4 Розв'язання задач рівноваги тіла під дією плоскої системи сил.....	67
4.5 Рівновага системи тіл	70
5 ТЕРТЯ.....	78
5.1 Закони тертя ковзання	78

5.2 Реакція шорсткої поверхні. Кут і конус тертя.....	81
5.3 Тертя кочення.....	83
5.4 Розв'язання задач рівноваги тіла на шорсткій поверхні.....	85
6 ЦЕНТР ВАГИ.....	92
6.1 Центр ваги твердого тіла і його координати	92
6.2 Координати центрів ваги однорідних тіл	94
6.3 Методи визначення координат центрів ваги тіл	95
6.4 Центри ваги деяких однорідних тіл	98
КІНЕМАТИКА.....	102
1 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ.....	102
1.1 Вступ до кінематики. Основні поняття і визначення	102
1.2 Способи задавання руху точки	103
1.3 Визначення швидкості точки	105
1.3.1 Вектор швидкості точки	106
1.3.2 Швидкість точки при координатному способі.....	107
1.3.3 Швидкість точки при натуральному способі задавання руху	107
1.4 Визначення прискорення точки	109
1.4.1 Векторний спосіб визначення прискорення	109
1.4.2 Визначення прискорення в декартовій системі координат	110
1.4.3 Визначення прискорення точки при натуральному способі задавання руху	111
1.5 Окремі випадки руху точки.....	114
1.6 Приклади визначення кінематичних характеристик руху точки	116
2 ПРОСТІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА	124
2.1 Загальні положення кінематики твердого тіла.....	124
2.2 Поступальний рух твердого тіла.....	125
2.3 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Кутова швидкість і кутове прискорення	127
2.4 Окремі випадки обертального руху	130
2.5 Швидкості і прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі.....	131
2.6 Приклад визначення кінематичних характеристик простих рухів тіла.	135
3 ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА	139
3.1 Основні визначення. Рівняння плоско-паралельного руху	139
3.2 Визначення швидкості точок плоскої фігури.....	142
3.3 Теорема про проекції швидкостей двох точок	144
3.4 Миттєвий центр швидкостей. Визначення швидкостей точок плоскої фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей	144
3.5 Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей	147
3.6 Визначення прискорень точок плоскої фігури.....	149
3.7 Приклади розв'язання задач кінематики плоского руху	151
4 РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ. РУХ ВІЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА.....	160

4.1 Кути Ейлера. Рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої точки.....	160
4.2 Миттєва вісь обертання. Кутова швидкість і кутове прискорення тіла при його сферичному русі.....	161
4.3 Швидкості та прискорення точок тіла при його обертанні навколо нерухомої осі.....	164
4.4 Загальний випадок руху вільного твердого тіла	167
5 СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ	171
5.1 Відносний, переносний та абсолютний рухи точки. Абсолютна та відносна похідні від вектора	171
5.2 Теорема про додавання швидкостей при складному русі точки.....	174
5.3 Теорема Коріоліса про додавання прискорень при складному русі точки.....	177
5.4 Визначення модуля і напрямку прискорення Коріоліса. Правило Жуковського	179
5.5 Приклади розв'язання задач складного руху точки.....	180
6 СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА	189
6.1 Додавання поступальних рухів твердого тіла.....	189
6.2 Додавання обертальних рухів навколо осей, що перетинаються.....	190
6.3 Додавання обертальних рухів навколо паралельних осей	192
6.4 Додавання поступального і обертального рухів	196
6.5 Приклади розв'язання задач кінематики складного руху тіла	200
Література	203

ВСТУП

Теоретична механіка – це наука про загальні закони механічного руху і механічної взаємодії матеріальних тіл.

Під механічним рухом розуміють зміну з плином часу взаємного положення тіл або їх частин у просторі.

Механічною взаємодією називається взаємодія між тілами, що призводить до зміни взаємоположення тіл або їх форми.

Теоретична механіка є основою сучасної техніки. Її закони знаходять застосування в машинобудуванні, авіації, кібернетиці, космонавтиці та інших галузях.

На основі теоретичної механіки виникли і успішно розвиваються такі науки, як опір матеріалів, теорія пружності, теорія механізмів і машин, деталі машин та інші, які пов'язані з розрахунками і конструюванням інженерних конструкцій.

Механіка є однією з найдавніших наук. Її виникнення пов'язане з іменами Арістотеля (384 – 322 р. р. до н. е.); Архімеда (287 – 212 р. р. до н. е.). Основи сучасної теоретичної механіки, яка склалась в єдину наукову систему, були закладені Галілеєм (1564 – 1642) та І. Ньютоном (1643 – 1727). Великий вклад в подальший розвиток механіки внесли Л.Ейлер (1707 – 1783), Ж.Даламбер (1717 – 1783), Ж.Лагранж (1736 – 1813) та багато інших вчених.

Теоретична механіка традиційно ділиться на три розділи: статику, кінематику та динаміку.

СТАТИКА

1 Основні поняття і аксіоми. Система збіжних сил

1.1 Основні поняття статички

Статика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються умови рівноваги матеріальних об'єктів (тіл) під дією прикладених сил та методи еквівалентного перетворення систем сил, приведення їх до простішого вигляду.

Під **рівновагою** розуміють стан спокою або рівномірний, прями- ний і поступальний рух по відношенню до нерухомої системи коорди- нат.

Уся різноманітність матеріальних об'єктів моделюється в теоретич- ній механіці матеріальною точкою, системою матеріальних точок та абсо- лютно твердим тілом.

Матеріальною точкою називають просту модель матеріального об'єкта, розміри якого настільки малі, що ними можна нехтувати при ви- вченні того чи іншого руху. Тобто – це геометрична точка, яка має масу.

Система матеріальних точок – це сукупність матеріальних точок, рух і положення кожної з яких залежить від руху і положення всіх інших.

Абсолютно твердим тілом (надалі твердим тілом) називають систе- му матеріальних точок, відстані між якими залишаються весь час незмін- ними.

Будемо називати **вільним** таке тверде тіло, на переміщення якого не накладено ніяких обмежень.

Сила – це векторна величина, яка є мірою механічної взаємодії між матеріальними об'єктами. Вона характеризується модулем, напрямом і то- чкою прикладання. Точка прикладання сили і її напрям визначають лінію її дії.

Сили зображають направленими відрізками прямих. На рис. 1 показана си- ла \vec{F} , прикладена в точці A , а MN – лінія дії сили. Одиницею вимірювання сили у системі СІ є 1 Н.

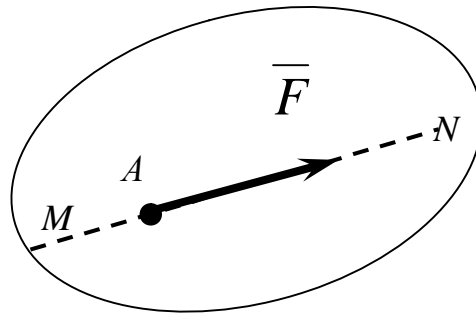


Рисунок 1

Системою сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ називають сукупність декількох сил, що діють на одне тіло або на систему тіл.

Еквівалентними називають такі дві системи сил, які, діючи окремо на вільне тверде тіло, однаково змінюють його кінематичні характеристики (швидкість, напрямок руху і т.ін.).

Умова еквівалентності двох систем сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ і $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$ виражається у формі

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n).$$

Зрівноваженою називають таку систему сил, яка не змінює кінематичного стану твердого тіла. Така система сил еквівалентна нулю:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim 0.$$

Рівнодіючою силою \bar{R}^* даної системи сил називають таку силу, дія якої на тверде тіло або матеріальну точку еквівалентна дії цієї системи сил, тобто

$$\bar{R}^* \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n).$$

Якщо система сил має рівнодіючу, то сила \bar{Q} , яка дорівнює рівнодіючій за модулем і направлена вздовж тієї ж лінії дії в протилежному напрямку, називається **врівноважуючою**. Додавання врівноважуючої сили \bar{Q} до системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ робить одержану нову систему сил зрівноваженою:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{Q}) \sim 0.$$

Надалі переконаємося, що не всяка система сил має рівнодіючу і врівноважуючу сили. Є системи сил, які не знаходяться в рівновазі і не еквівалентні одній силі.

1.2 Аксиоми статички

Статика базується на декількох вихідних положеннях (аксіомах), які беруться без математичних доказів.

Аксиома 1 (про рівновагу системи двох сил).

Для рівноваги системи двох сил необхідно і достатньо, щоб ці сили були рівні за модулем і діяли уздовж однієї прямо в протилежних напрямках (рис.2), тобто

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2; (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0.$$

Цією аксіомою встановлюється найпростіша зрівноважена система сил.

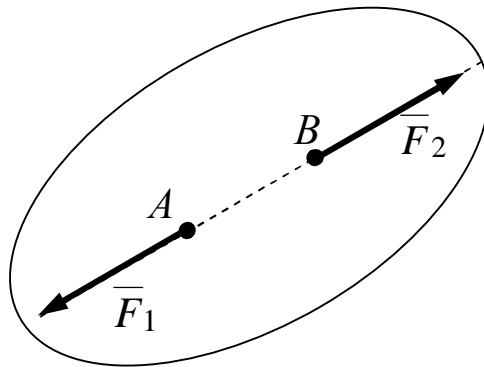


Рисунок 2

Аксиома 2 (про приєднання та відкидання зрівноваженої системи сил).

Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї приєднати або від неї відкинути зрівноважену систему сил.

Ця аксіома встановлює еквівалентність двох систем сил, які відрізняються на зрівноважену систему сил.

Наслідок із аксіом 1 і 2.

Дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо силу перенести вздовж лінії її дії в будь-яку точку тіла.

Для доведення наслідку розглянемо силу \vec{F}_A , прикладену в точці A (рис. 3,а). У точці B на лінії дії сили прикладемо зрівноважену систему сил

$$(\vec{F}_B, \vec{F}'_B) \sim 0, \text{ де}$$

$$\vec{F}_B = \vec{F}_A; \vec{F}'_B = -\vec{F}_A.$$

Тоді відповідно до аксіоми 2 одержимо:

$$\vec{F}_A \sim (\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}'_B)$$

(рис. 3,б). Згідно з аксіомою 1 система сил $(\vec{F}_A, \vec{F}'_B) \sim 0$, а згідно з аксіомою 2 їх можна відкинути (рис. 3,в), тобто $\vec{F}_A \sim \vec{F}_B$. Таким чином, наслідок доведено.

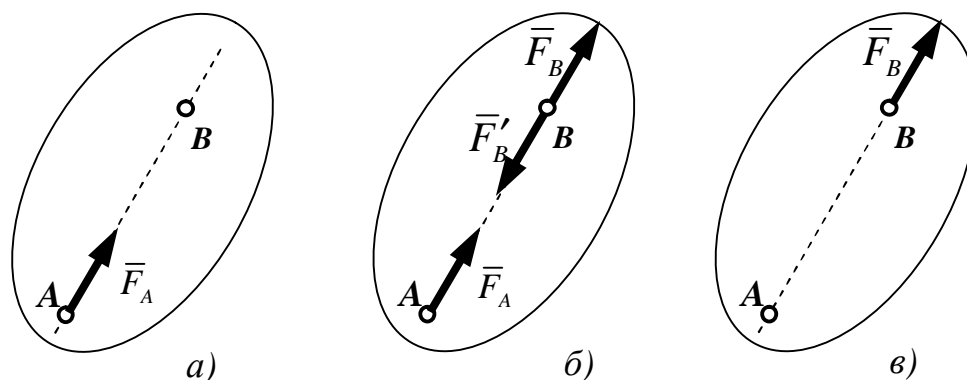


Рисунок 3

З цього наслідку можна зробити висновок, що сила є ковзним вектором.

Аксіома 3 (про паралелограм сил).

Система двох сил, прикладених до тіла в одній точці, має рівнодіючу, яка дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в тій же точці (рис. 4). Ця аксіома не тільки встановлює наявність рівнодіючої $\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ розглядуваної системи сил, але дає також правило її знаходження, як векторної суми сил:

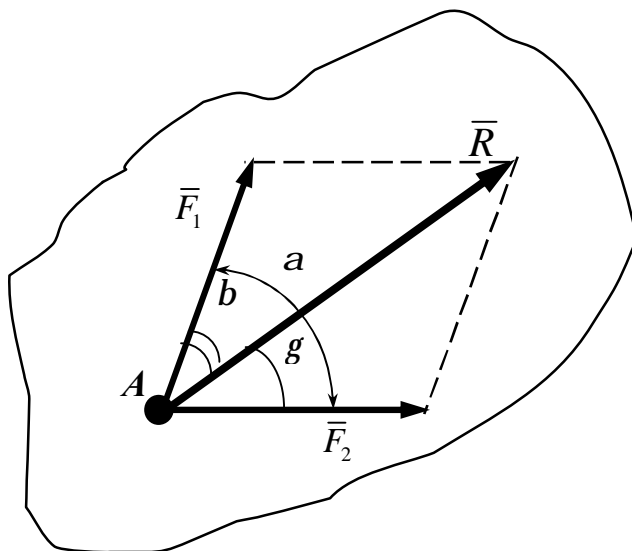


Рисунок 4

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1)$$

Модуль рівнодіючої знаходять як величину діагоналі паралелограма, побудованого на силах, як на сторонах:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos a}, \quad (2)$$

де a - кут, утворений напрямками сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .

Якщо сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 направлені вздовж однієї прямої в одному або протилежних напрямках, то векторне складання переходить в алгебраїчне.

Напрямок рівнодіючої \vec{R}^* можна визначити кутами b і g , які вона утворює із складовими силами \vec{F}_1 і \vec{F}_2 :

$$\sin b = \frac{F_2}{R} \sin a; \quad \sin g = \frac{F_1}{R} \sin a; \quad (a = b + g). \quad (3)$$

Очевидно, що будь-яку силу \vec{R} , взявши її як рівнодіючу, можна розкласти за правилом паралелограма на дві складові сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , які утворюють кути b і g з напрямком цієї сили (рис. 4). Величини складових слід визначати за формулами:

$$F_1 = \frac{R \sin g}{\sin(b + g)}; \quad F_2 = \frac{R \sin b}{\sin(b + g)},$$

які витікають із формули (3).

Аксиома 4 (про рівність сил дії і протидії).

Сили взаємодії двох тіл рівні за величиною і напрямлені вздовж однієї прямої в протилежних напрямках (рис. 5).

Цю аксіому, яку застосовують і в динаміці, називають законом Ньютона про рівність дії і протидії.

Хоч сили \vec{F} і \vec{F}' (рис. 5) взаємодії двох тіл і відповідно умовам аксіоми 1 $\vec{F} = -\vec{F}'$, але вони не створюють зрівноважену систему сил, бо вони прикладені до різних тіл.

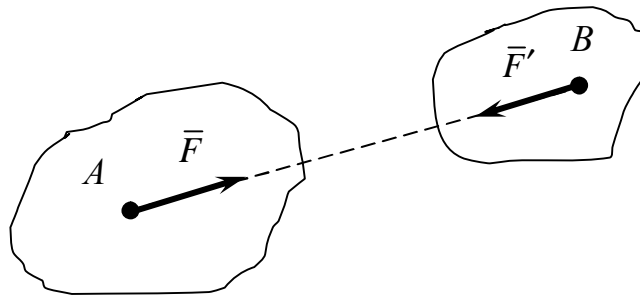


Рисунок 5

Аксиома 5 (принцип затвердіння).

Рівновага тіла, яке деформується, не порушиться, якщо його вважати абсолютно твердим.

Ця аксіома дозволяє застосовувати методи статички абсолютно твердого тіла для тіл, які деформуються, та змінних конструкцій, вважаючи їх абсолютно жорсткими.

Але хибним буде твердження про те, що рівновага твердого тіла обов'язково збережеться, якщо воно перестане бути твердим.

Аксиома 6 (принцип звільнення від в'язей).

Перш ніж сформулювати це положення, слід ввести поняття в'язі та реакції в'язі.

В'яззю називають всі ті матеріальні об'єкти, які обмежують рух даного твердого тіла в просторі.

Сила, з якою в'язь діє на тіло, заважаючи переміщенню цього тіла, називається реакцією в'язі.

Надалі сили, які не є реакціями в'язей (такі, що сприяють руху тіла, як, наприклад, сила ваги), будемо називати активними силами.

Аксиома про звільнення від в'язей стверджує, що невільне тверде тіло можна розглядати як вільне, якщо дію в'язей замінити реакціями в'язей.

1.3 В'язі та їх реакції

При розв'язанні задач на рівновагу невільних тіл необхідно враховувати дію в'язей, приклавши необхідні реакції в'язей, правильно вибравши їх напрям. При цьому треба виходити з того, що кількість реакцій кожного типу в'язі дорівнює кількості обмежених переміщень тіла, і що напрямок реакції в'язі завжди протилежний тому напрямку, в якому в'язь не дозволяє переміщуватися тілу.

Розглянемо основні типи в'язей і покажемо напрямок реакцій цих в'язей.

1 Гладенька поверхня

На рис. 6 подана в'язь – ідеально гладенька поверхня, реакція \bar{N} якої направлена перпендикулярно до спільної дотичної в точці контакту поверхонь, що стикаються (рис. 6,а). Якщо тіло стикається своєю гладенькою поверхнею з точкою в'язі (в точці А на рис. 6,б) або своєю точкою з гладенькою поверхнею в'язі (в точках В і С на рис. 6,б), то реакція направлена перпендикулярно до відповідної поверхні.

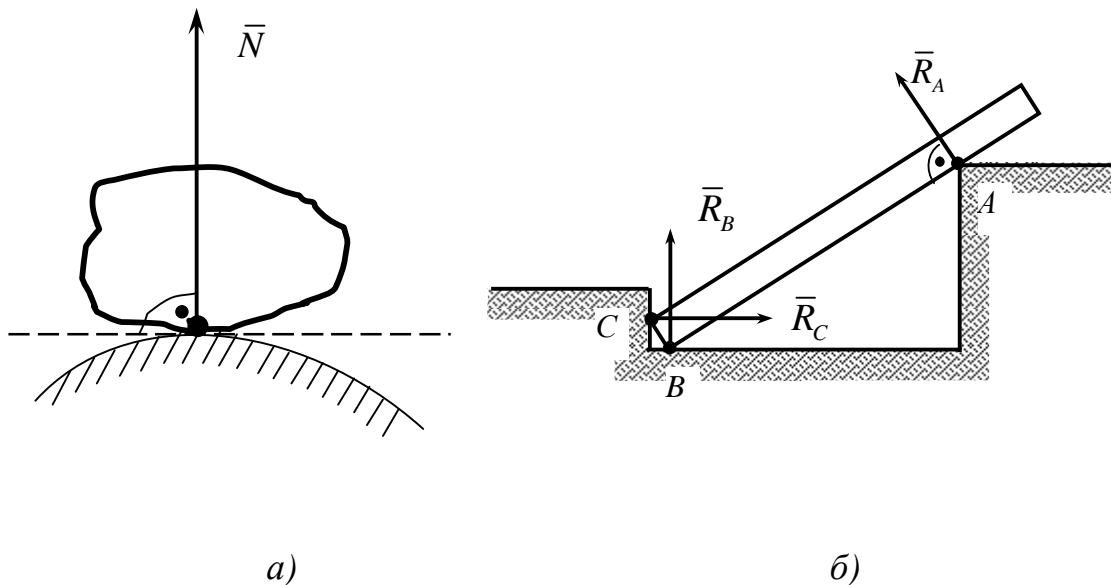


Рисунок 6

2 Шорстка поверхня

Ця в'язь відрізняється від раніше розглянутої гладенької поверхні тим, що шорстка поверхня обмежує переміщення тіла не тільки у напрямку нормалі, а за рахунок тертя – і в дотичному напрямку.

Реакція \bar{R} шорсткої поверхні (рис. 7) розкладається на дві складові: нормальну \bar{R}_n та дотичну \bar{R}_t . Дотична складова реакції \bar{R}_t – це сила тертя, властивості якої будуть розглянуті пізніше.

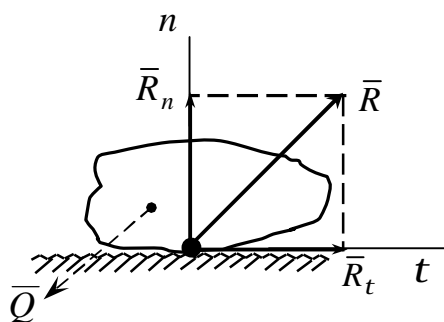


Рисунок 7

3 Нитка

В'язь, що подана на рисунку 8, яка здійснюється нерозтяжною гнучкою ниткою (тросом, канатом, ланцюгом), не дає змоги віддалятися від точки підвісу. Реакція \bar{T}_A і \bar{T}_B нерозтяжної гнучкої нитки направлена вздовж нитки до точки її закріплення.

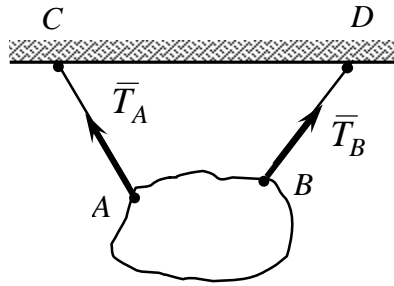


Рисунок 8

4 Циліндричний шарнір

На рис. 9 зображена в'язь – нерухомий циліндричний шарнір, яка здійснюється за допомогою болта або пальця, що проходить через отвори тіла і нерухомої опори (рис.9,а). Схематичні зображення циліндричного шарніра подані на рис. 9,б,в,г.

За допомогою циліндричного шарніра з'єднуються також тіла складеної конструкції, наприклад стріла та башта баштового крану (рис. 9,д).

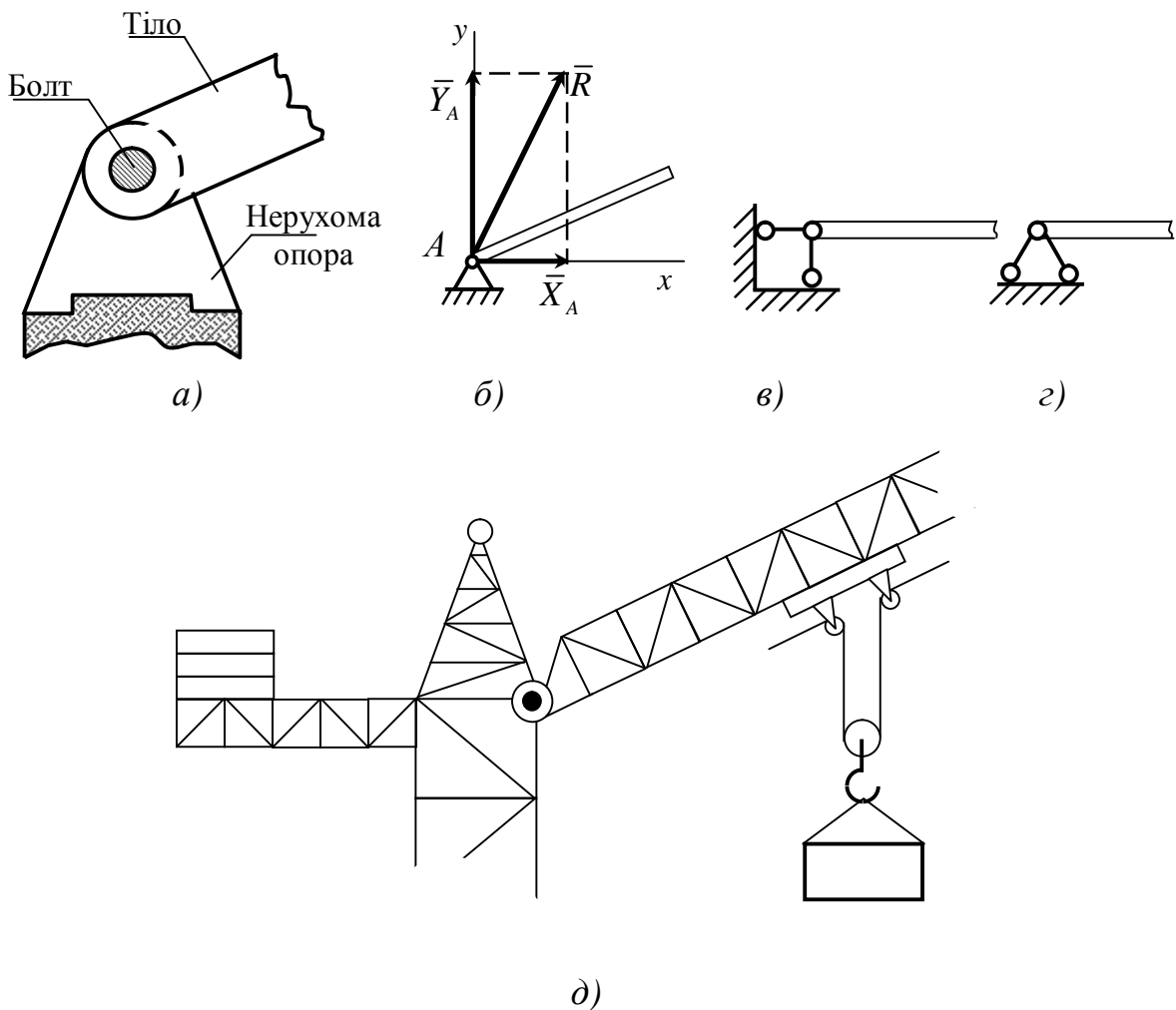


Рисунок 9

Циліндричним шарніром є також подані на рисунку 10 в'язі: підшипник A та петля B , виконані в вигляді зв'язаного з тілом циліндричного вала (шипа), розміщеного в отворі нерухомої втулки (обойми).

Циліндричний шарнір дозволяє тілу обертатися навколо нерухомої осі та ковзати вздовж неї, але обмежує переміщення тіла в напрямках, перпендикулярних до осі шарніра.

Реакція циліндричного шарніра (\bar{R} на рис. 9, \bar{R}_A та \bar{R}_B на рис. 10) лежить в площині, перпендикулярній осі шарніра, її напрям наперед вказати не можна. Тому реакцію циліндричного шарніра виражають у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових (\bar{X}_A, \bar{Y}_A на рис. 9, \bar{X}_A, \bar{Z}_A та \bar{X}_B, \bar{Z}_B на рис. 10).

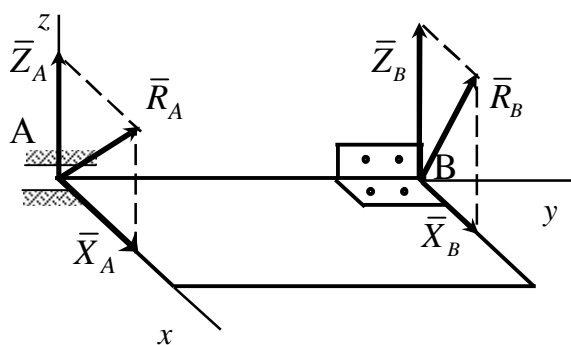


Рисунок 10

5 Рухомий циліндричний шарнір

У техніці така в'язь реалізується у вигляді опори на котках, якою в точці A закріплена мостова конструкція на рис. 11.

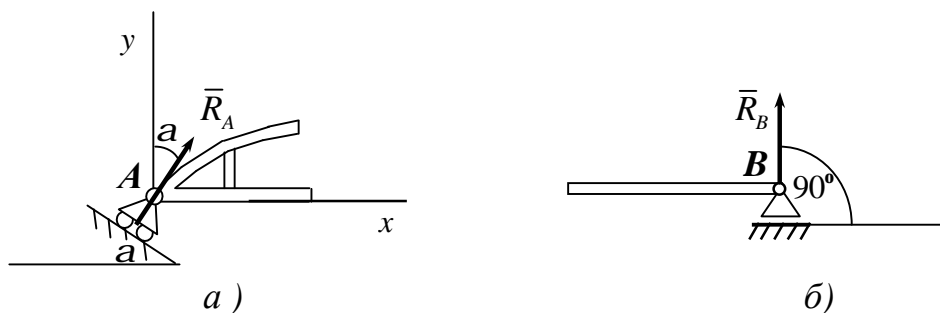


Рисунок 11

У деяких випадках рухомий циліндричний шарнір зображають без

зображення котків між опорою та опорною поверхнею, як показано на рис. 11,б.

Рухомий циліндричний шарнір, як і гладенька поверхня, обмежує переміщення тіла вздовж нормалі до опорної поверхні, тому його реакція направлена перпендикулярно опорній поверхні, проходячи через центр шарніра.

6 Стрижень

Така в'язь здійснюється тонким невагомим стрижнем, закріпленим на кінцях шарнірами. При цьому стрижень навантажений зусиллями, направленими вздовж прямої, яка з'єднує його шарнірні кінці. Тому реакція \bar{S} стрижня (рис. 12) направлена вздовж осі стрижня в той чи інший бік. Якщо стрижень не є прямолінійним, то його реакція також направлена вздовж лінії, що проходить через точки шарнірного закріплення стрижня (рис.12,б).

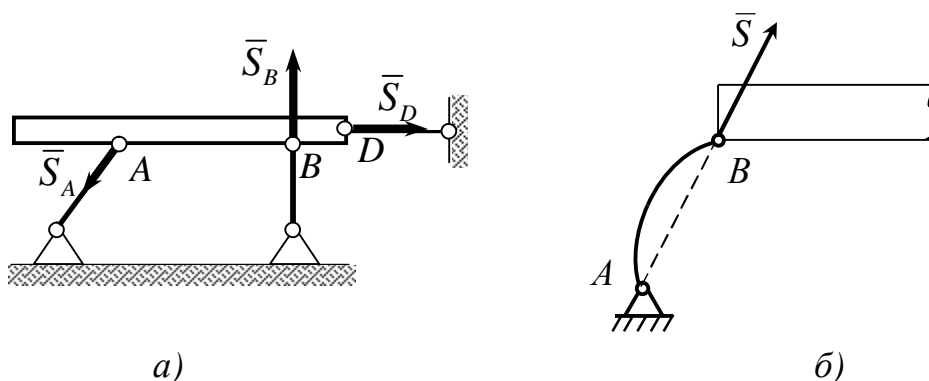


Рисунок 12

Напрямок реакції стрижня залежить від виду навантаження і якщо стрижень розтягнутий, то реакція стрижня спрямована до його середини.

7 Сферичний шарнір і підп'ятник

Приклади здійснення таких в'язей представлені на рисунку 13.

Сферичний шарнір (рис. 13,а) та підп'ятник (рис. 13,б) дозволяють тілу обертатися навколо точки закріплення, але обмежують його переміщення в просторі. Тому реакція сферичного шарніра, як і реакція підп'ятника, має три взаємно перпендикулярні складові:

$$\bar{R} = \bar{X}_A + \bar{Y}_A + \bar{Z}_A; \quad R = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}. \quad (5)$$

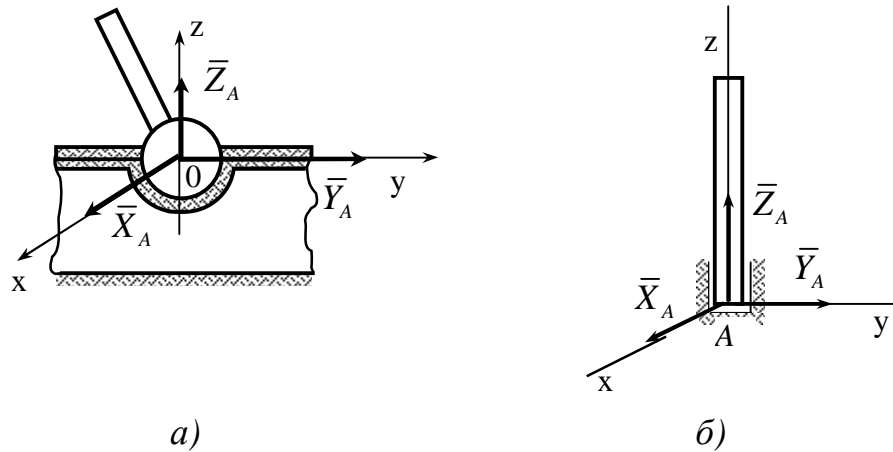


Рисунок 13

8 Жорстке защемлення

Така в'язь (рис. 14,а) здійснюється вмуровуванням тіла в нерухому поверхню. При цьому обмежується переміщення тіла в площині його розміщення та обертання тіла навколо точки закріплення.

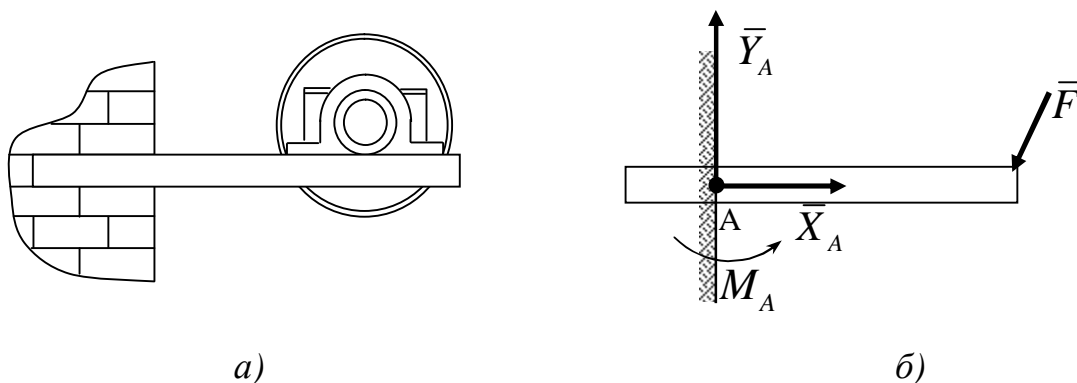


Рисунок 14

Реакція жорсткого защемлення визначається трьома складовими: двома складовими \bar{X}_A, \bar{Y}_A сили реакції ($\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$) та пари сил з моментом M_A (рис. 14,б).

1.4 Аналітичний спосіб задавання сили

Силу можна задавати як векторно, так і аналітично через її проекції на осі координат.

Проекція сили на вісь – це взята з відповідним знаком величина, яка чисельно дорівнює відстані між проекціями на цю вісь початку і кінця вектора сили. При цьому проекція буде додатною, якщо кут між напрямком сили і додатним напрямком осі буде гострим, і від’ємною, якщо цей кут – тупий. Тоді для сил, зображених на рис. 15, одержимо:

$$F_x = ab = F \cdot \cos \alpha; Q_x = ed = -Q \cdot \cos \beta.$$

Якщо сила перпендикулярна до осі, то її проекція на цю вісь дорівнює нулю.

Коли сила і вісь не лежать в одній площині, то для знаходження проекції сили на вісь застосовують подвійне проектування: спочатку проектують силу на площину, в якій лежить вісь, а потім знайдену проекцію на площину проектують на дану вісь.

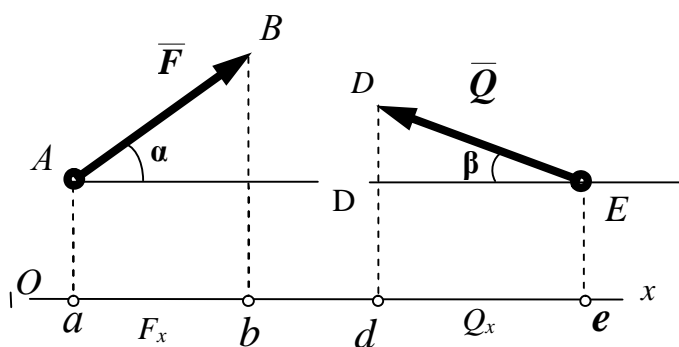


Рисунок 15

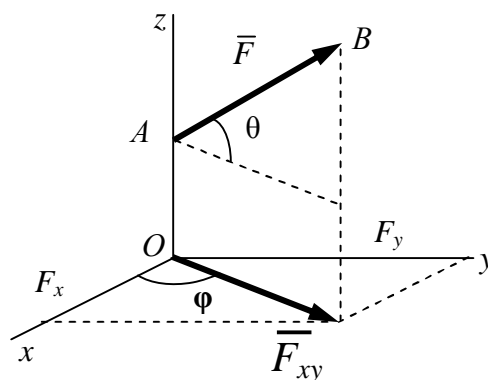


Рисунок 16

Проекцією сили \vec{F} на площину Oxy називається вектор \vec{F}_{xy} , розміщений між проекціями на цю площину початку та кінця вектора сили \vec{F} (рис. 16). Модуль вектора проекції сили на площину $F_{xy} = F \cdot \cos \theta$, де θ – кут між напрямком сили та площиною. Отже, у випадку, зображеному на рис.16, в результаті подвійного проектування знайдемо

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi; \quad F_y = F_{xy} \cdot \sin \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi$$

Для задавання вектора сили аналітичним способом у вибраній системі координат необхідно знати модуль цієї сили, кути її нахилу до координатних осей та положення точки прикладання сили. Подана на рис.17 сила

\vec{F} має складові \vec{F}_x , \vec{F}_y та \vec{F}_z в напрямках осей координат, величини яких є проєкціями вектора сили на відповідні осі координат. Величина цих проєкцій визначається залежностями:

$$F_x = F \cdot \cos a; \quad F_y = F \cdot \cos b; \quad F_z = F \cdot \cos g,$$

де α, β, γ –кути нахилу вектора сили до координатних осей.

Якщо величини F_x , F_y та F_z проєкцій сили задані, то сила, як вектор визначається залежністю

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z, \quad (5)$$

модуль сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (6)$$

а напрямок сили визначається направляючими косинусами кутів нахилу вектора сили до координатних осей:

$$\cos a = \cos(\vec{i}, \vec{F}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos b = \cos(\vec{j}, \vec{F}) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos g = \cos(\vec{k}, \vec{F}) = \frac{F_z}{F}, \quad (7)$$

$$\text{причому } \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g = 1.$$

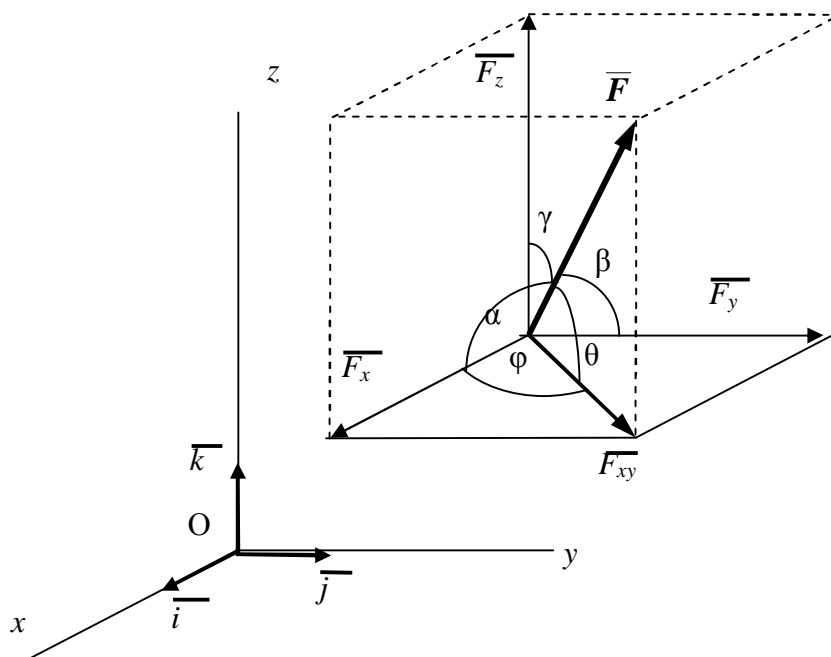


Рисунок 17

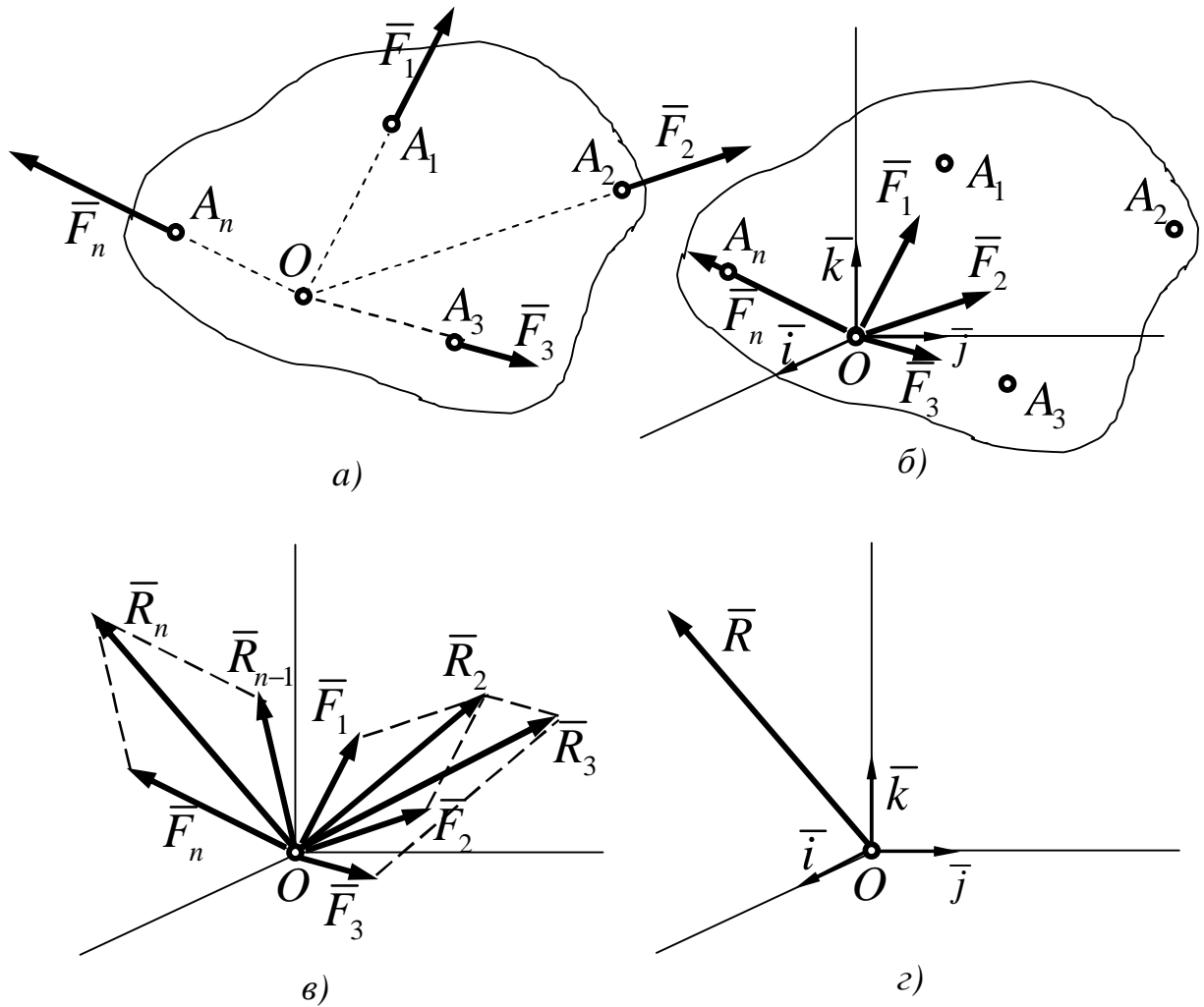


Рисунок 18

Геометричне складання сил системи можна здійснювати не тільки за аксіомою паралелограма сил, а і шляхом побудови силового багатокутника, прибудовуючи початок вектора наступної сили до кінця вектора попередньої (рис. 19). Тоді замикаючий вектор \bar{R} цього багатокутника буде вектором рівнодіючої даної системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$

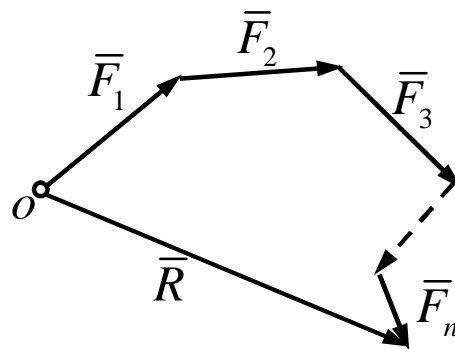


Рисунок 19

Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої полягає в обчисленні її проєкцій на осі координат (див. рис. 18,г).

Проецюючи залежність (8) на осі x, y, z , одержимо:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (9)$$

Модуль рівнодіючої

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (10)$$

її направляючі косинуси:

$$\cos(\bar{i}, \bar{R}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\bar{j}, \bar{R}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\bar{k}, \bar{R}) = \frac{R_z}{R}. \quad (11)$$

1.6 Умови рівноваги системи збіжних сил

Так як система збіжних сил зводиться до рівнодіючої, то для її рівноваги необхідно і достатньо, щоб ця рівнодіюча дорівнювала нулю:

$$\bar{R} = 0. \quad (12)$$

За умови, що $\bar{R} = 0$ кінець вектора останньої сили системи при побудові силового многокутника співпадає з початком вектора першої сили.

Звідси можна зробити висновок: *система збіжних сил буде знаходитись у стані рівноваги тоді і тільки тоді, коли силовий многокутник цієї системи сил буде замкнутим.*

При виконанні умови (12) із формули (10) одержимо:

$$R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0,$$

звідки з урахуванням (9) впливають рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (13)$$

Рівняння (13) виражає аналітичні умови: для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил системи на кожну з трьох осей координат дорівнювала нулю.

У випадку плоскої системи збіжних сил використовують тільки два з трьох рівнянь рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (14)$$

1.7 Теорема про три сили

Якщо тіло під дією трьох непаралельних сил знаходиться у стані рівноваги, то всі сили лежать в одній площині, а їх лінії дії перетинаються в одній точці.

Доведення.

Нехай із трьох непаралельних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim 0$, що діють на зрівноважене тіло (рис. 20), лінії двох сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , прикладених в точках A і B , перетинаються в точці O (рис. 20,а).

Перенесемо сили в цю точку і замінимо їх рівнодіючою $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (рис. 20,б). При цьому одержана система двох сил $(\vec{R}, \vec{F}_3) \sim 0$ буде зрівноваженою, тому, на підставі аксіоми 1, сили \vec{R} та \vec{F}_3 направлені вдовж однієї прямої.

Отже, лінії дії всіх трьох сил перетинаються в точці O , а самі сили лежать в одній площині.

За допомогою цієї теореми в деяких випадках можна визначити напрямки реакції нерухомого шарніра, не представляючи її в вигляді двох взаємно перпендикулярних складових. Наприклад, для балки AB , яка закріплена в точці A і опирається в точці D на виступ (рис. 21), лінія дії реакції

ції \bar{R}_A нерухомого шарніра буде проходити через центр шарніра та точку E перетину сили \bar{P} ваги балки та реакції \bar{N}_D гладенької поверхні.

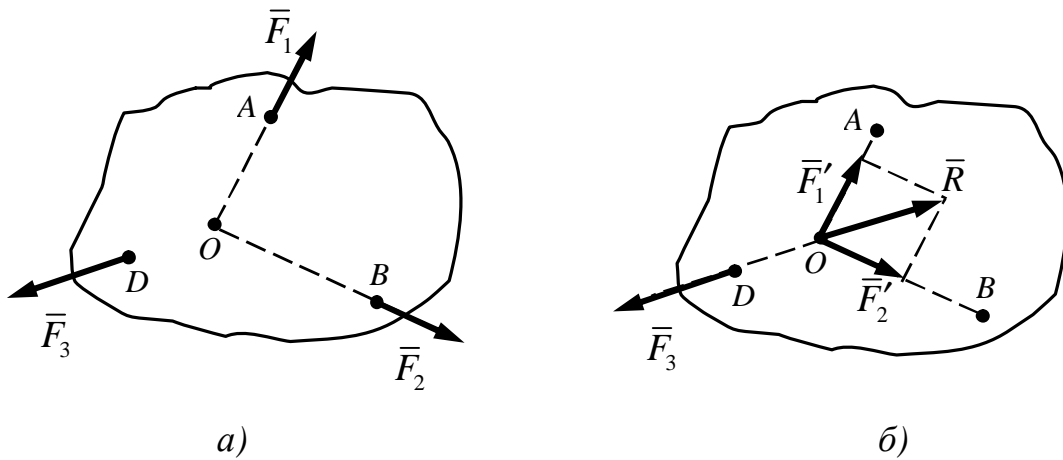


Рисунок 20

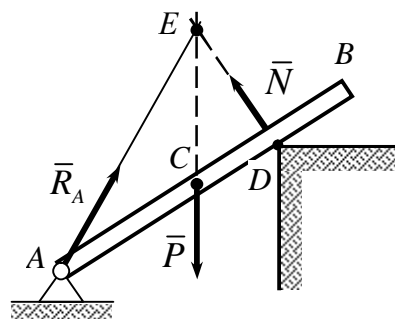


Рисунок 21

1.8 Розв'язання задач статички

Розв'язання задач з рівноваги матеріального об'єкта проводиться за таким алгоритмом:

- 1) вибрати об'єкт (тверде тіло, окрему точку), рівновагу для якого слід розглядати (в подальшому – тіло);
- 2) прикласти активні сили, що діють на це тіло;
- 3) застосувавши аксіому в'язей, звільнити тіло від в'язей і показати їх реакції;
- 4) для одержаної зрівноваженої системи сил скласти рівняння рівноваги;
- 5) визначити з цих рівнянь невідомі величини.

Коли в задачі кількість невідомих величин перевищує кількість рівнянь рівноваги, то задача є статично неозначеною. Для усунення статичної неозначеності необхідно або зменшити кількість невідомих величин, застосувавши, наприклад, теорему про три сили для системи збіжних сил, або шукати спосіб збільшення кількості рівнянь рівноваги до кількості невідомих величин, розглянувши, наприклад, рівновагу частини елементів складеної конструкції чи добавивши до рівнянь рівноваги залежність сили тертя від нормальної реакції при накладанні на об'єкт рівноваги шорсткої поверхні, як в'язі.

Приклад 1

Електрична лампочка вагою $P = 20\text{Н}$ підвішена за допомогою двох шнурів АВ і АС, прикріплених до стіни і до стелі (рис. 22). Визначити реакції шнурів \bar{T}_{AB} і \bar{T}_{AC} , якщо кути нахилу шнурів до стелі та стіни відповідно дорівнюють $a = 60^\circ$; $b = 135^\circ$. Вагою шнурів знехтувати.

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вузла А, на який діють: сила ваги \bar{P} (активна сила) та реакції \bar{T}_{AB} і \bar{T}_{AC} шнурів (рис.22,а) направлені вздовж шнурів до точок В і С закріплення.

На рис. 22,б показана схема розміщення у вибраній системі координат зрівноваженої збіжної системи сил, які діють на вузол А.

Складемо рівняння рівноваги цієї системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad T_{AB} \sin 30^\circ - T_{AC} \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad T_{AB} \cos 30^\circ + T_{AC} \cos 45^\circ - P = 0.$$

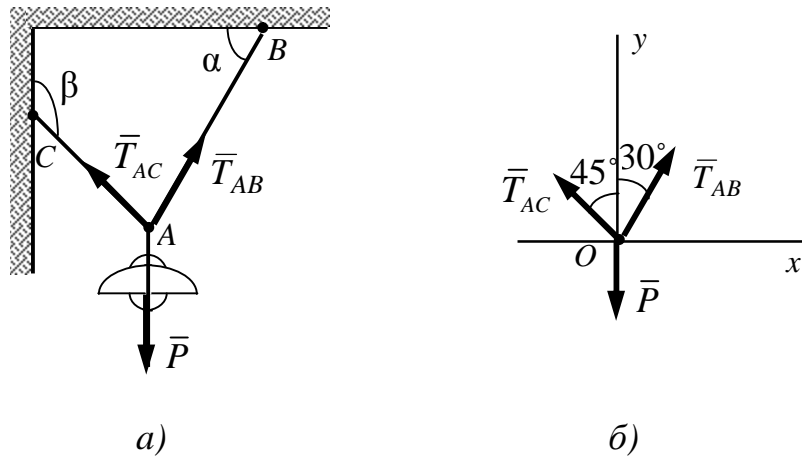


Рисунок 22

Розв'язуючи ці рівняння, знайдемо:

$$T_{AB} = \frac{P}{\sin 30^\circ + \cos 30^\circ} = \frac{20}{0,5 + 0,866} = 14,64 \text{ Н};$$

$$T_{AC} = T_{AB} \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 14,64 \frac{0,5}{0,707} = 10,35 \text{ Н}.$$

Приклад 2

Котел з рівномірно розподіленою за довжиною вагою $P = 40$ кН та радіусом $R = 1$ м лежить на виступах кам'яної кладки (рис. 23). Відстань між стінками кладки $l = 1,6$ м. Нехтуючи тертям, знайти тиск котла на кладку в точках A і B .

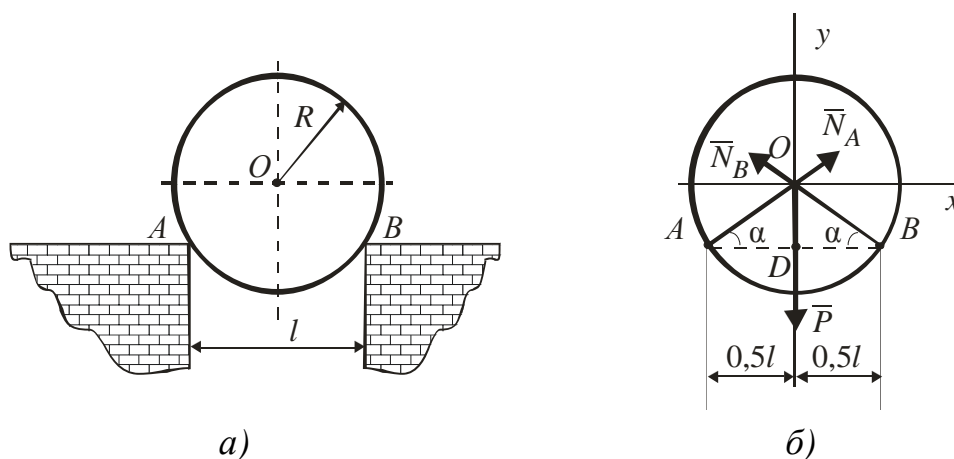


Рисунок 23

Розв'язання

Котел знаходиться у стані рівноваги під дією трьох сил: сили ваги котла \bar{P} та реакцій \bar{N}_A і \bar{N}_B гладенької поверхні прикладених в точках і напрямлених перпендикулярно дотичним до кругової поверхні котла в точках A і B (рис. 23,б). Реакції \bar{N}_A , \bar{N}_B проходять через центр O кола котла і нахилені до горизонталі під кутами a (див. рис. 23,б)

Для зрівноваженої плоскої системи збіжних сил складемо рівняння рівноваги (обрані осі координат показані на рис. 23,б):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad N_A \cos a - N_B \cos a = 0;$$
$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_A \sin a + N_B \sin a - P = 0.$$

Тригонометричні функції кута a знайдемо, розглянувши трикутник AOD (рис. 22,б):

$$\cos a = \frac{AD}{OA} = \frac{0,5l}{R} = 0,8; \quad \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6.$$

Розв'язуючи систему рівнянь рівноваги, знайдемо з першого рівняння $N_A = N_B = N$, а з другого одержимо:

$$N_A = N_B = \frac{2P}{\sin a} = \frac{2 \cdot 40}{0,6} = 33,3 \text{ кН.}$$

Приклад 3

Балка AB закріплена в точці A за допомогою нерухомого шарніра і утримується в горизонтальному положенні рухомим циліндричним шарніром в точці B (рис. 24). У середині балки діє сила $P=2$ кН під кутом 45° до горизонту. Визначити реакції опор, взявши розміри з рисунка і нехтуючи вагою балки.

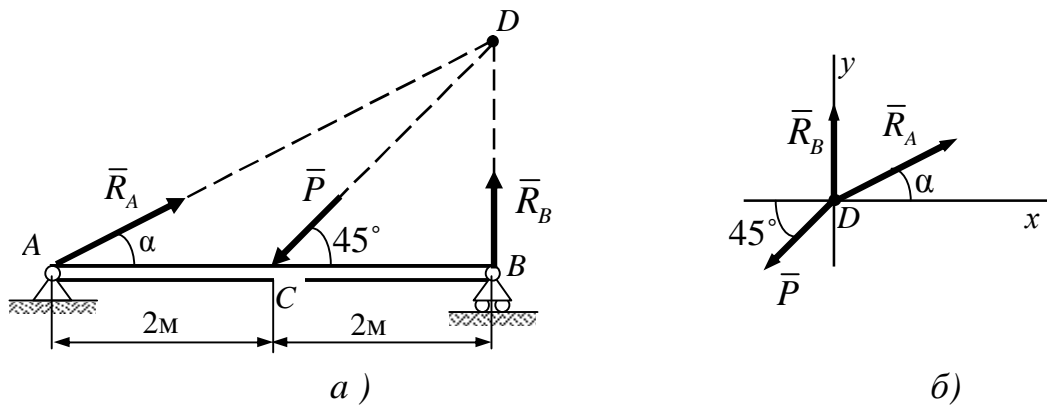


Рисунок 24

Розв'язання

Балка знаходиться у рівновазі під дією трьох сил: активної сили \bar{P} та реакцій \bar{R}_A і \bar{R}_B . Реакція \bar{R}_B рухомого шарніра B напрямлена перпендикулярно опорній поверхні за вертикаллю. Реакція \bar{R}_A шарніра A згідно з теоремою про три сили пройде через точку D перетину сил \bar{P} та \bar{R}_B , створивши кут a з горизонталлю.

Величину кута a знайдемо, розглянувши прямокутний трикутник ABD , в якому катет $BD = 2$ м (як катет рівнобедреного трикутника BCD , а гіпотенуза

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ м.}$$

$$\text{Тоді } \sin a = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447; \quad \cos a = \frac{AB}{AD} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894.$$

Перенесемо всі сили в точку D (рис. 24,б) і складемо рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_A \cos a - P \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_A \sin a + R_B - P \sin 45^\circ = 0.$$

Звідси одержимо:

$$R_A = \frac{\cos 45^\circ}{\cos \alpha} = 2 \frac{0,707}{0,897} = 1,58 \text{ кН};$$

$$R_B = P \sin 45^\circ - R_A \sin \alpha = 2 \cdot 0,707 - 1,58 \cdot 0,447 = 0,71 \text{ кН}.$$

Приклад 4

Вантаж Q вагою 1 кН підвішений в точці D , як показано на рис. 25. Кріплення стрижнів в точках A , B , C і D шарнірні. Визначити реакції опор A , B і C .

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вузла D , де сходяться три стрижні, які утримують вантаж. На нього діє просторова система збіжних сил, яка складається з активної сили \bar{Q} та реакцій стрижнів $\bar{S}_A, \bar{S}_B, \bar{S}_C$ (рис. 25). Реакції стрижнів направимо вздовж стрижнів від вузла D , вважаючи стрижні розтягнутими.

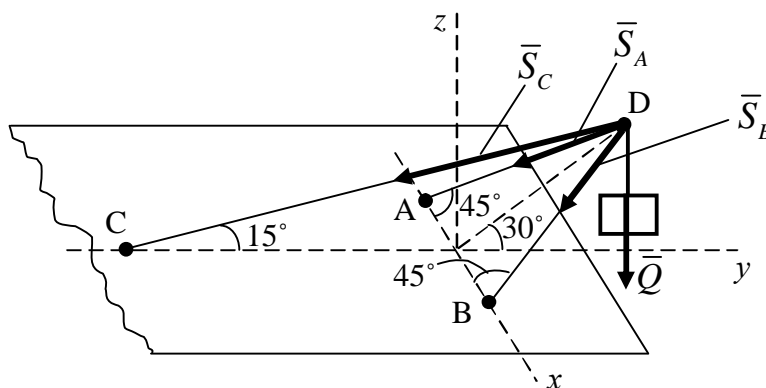


Рисунок 25

Складемо рівняння рівноваги цієї системи сил:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad S_B \cos 45^\circ - S_A \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -S_A \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - S_B \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - S_C \cos 15^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad -S_A \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ - S_B \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ - S_C \sin 15^\circ - Q = 0.$$

Із першого рівняння випливає, що $S_A = S_B$, тому два інші рівняння набудуть вигляду:

$$2S_A \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + S_C \cos 15^\circ = 0;$$

$$2S_A \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ + S_C \sin 15^\circ + Q = 0.$$

Помноживши перше рівняння на $\sin 30^\circ$, а друге на $\cos 30^\circ$ і взявши їх різницю, знайдемо:

$$S_C = \frac{Q \cdot \cos 30^\circ}{\cos 15^\circ \cdot \sin 30^\circ - \sin 15^\circ \cdot \cos 30^\circ} = Q \frac{\cos 30^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{1 \cdot 0,866}{0,2588} = 3,35 \text{ (кН)}.$$

Тоді

$$S_A = S_B = -\frac{S_C \cdot \cos 15^\circ}{2 \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ} = -\frac{3,35 \cdot 0,9659}{2 \cdot 0,707 \cdot 0,866} = -2,64 \text{ (кН)}.$$

Знаки показують, що стрижень DC розтягнутий, а стрижні AD і BD стиснуті.

Питання для самоконтролю

1 Що вивчає теоретична механіка? Які задачі розглядаються в статичці?

2 Що являється мірою механічної взаємодії матеріальних тіл? В яких одиницях вимірюється ця величина?

3 Під дією яких двох сил вільне тіло буде знаходитись у стані спокою?

4 Чи можна переносити силу вздовж лінії дії, не змінюючи її дію на тіло? Обґрунтуйте відповідь.

5 Що називають системою сил? Які системи сил називають еквівалентними?

6 Яка сила називається рівнодіючою системи сил? Чому дорівнює рівнодіюча система сил, прикладених до матеріальної точки?

7 Що називають в'яззю? У чому полягає принцип звільнення від в'язей?

8 Назвіть основні типи в'язей. Як направлені їх реакції?

9 Що називають системою збіжних сил? Чому дорівнює рівнодіюча системи збіжних сил? Які умови і рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил?

2 МОМЕНТ СИЛИ. ПАРА СИЛ

2.1 Момент сили відносно точки

Раніше було встановлено, що проекція сили на вісь або площину характеризує здатність сили переміщувати тіло в деякому напрямку. Але дія сили на тіло не обмежується таким зміщувальним ефектом. При певних умовах сила здатна обертати тіло навколо точки або осі. Для врахування обертальної дії сили вводиться поняття моменту сили.

Векторним моментом сили \vec{F} відносно точки O називають прикладений в цій точці вектор $\vec{M}_0(\vec{F})$, який визначається векторним добутком радіуса-вектора \vec{r} точки прикладання сили відносно моментної точки O та вектора сили \vec{F} (рис. 26):

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (15)$$

Цей вектор, направлений перпендикулярно площині, в якій лежать вектори \vec{r} і \vec{F} , в тому напрямку, звідки обертання тіла під дією сили на менший кут видно проти ходу годинникової стрілки.

Модуль векторного моменту сили відносно точки обчислюють за правилами векторної алгебри:

$$|\vec{M}_0(\vec{F})| = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot h, \quad (16)$$

де $h = OC = r \sin \alpha$ – плече сили \vec{F} відносно моментної точки, яке являє собою найкоротшу відстань між цією точкою і лінією дії сили.

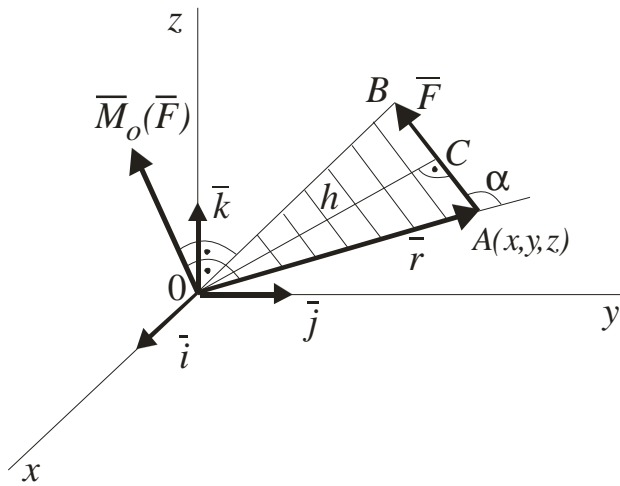


Рисунок 26

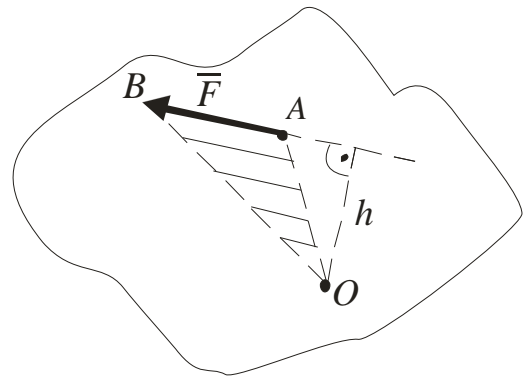


Рисунок 27

При розгляданні плоскої системи сил, коли лінії дії сил та моментна точка лежать в одній площині, вводять поняття алгебраїчного моменту сили відносно точки.

Алгебраїчним моментом сили відносно точки називають взятую з певним знаком величину, що дорівнює добутку модуля сили на плече (рис. 27):

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (17)$$

Знак алгебраїчного моменту вибирають у залежності від напрямку повороту тіла під дією сили: момент сили вважається додатним, якщо сила намагається повернути тіло відносно точки проти ходу годинникової стрілки і від'ємним – при повороті за годинниковою стрілкою.

Так на рис. 27 маємо, що $M_O(\vec{F}) > 0$.

Властивості моменту сили відносно точки:

- 1) момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника OAB , побудованого на силі і моментній точці;
- 2) момент сили не залежить від переносу сили вздовж лінії її дії;
- 3) момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через моментну точку (тоді $h = 0$), або коли сама сила дорівнює нулю.

Позначимо координати точки прикладання сили через x, y, z , а проєкції сили на осі координат через F_x, F_y, F_z . Тоді векторний момент сили можна подати так:

$$\bar{M}_o(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \bar{i}(yF_z - zF_y) + \bar{j}(zF_x - xF_z) + \bar{k}(xF_y - yF_x), \quad (18)$$

а його проєкції на координатні осі визначаються за формулами:

$$M_{ox}(\bar{F}) = yF_z - zF_y; M_{oy}(\bar{F}) = zF_x - xF_z; M_{oz}(\bar{F}) = xF_y - yF_x. \quad (19)$$

Модуль моменту

$$|\bar{M}_o(\bar{F})| = M_o(\bar{F}) = \sqrt{[M_{ox}(\bar{F})]^2 + [M_{oy}(\bar{F})]^2 + [M_{oz}(\bar{F})]^2}. \quad (20)$$

Напрямок вектора $M_o(\bar{F})$ визначається направляючими косинусами:

$$\begin{aligned} \cos[\bar{M}_o(\bar{F}), \bar{i}] &= \frac{M_{ox}(\bar{F})}{M_o(\bar{F})}; \quad \cos[\bar{M}_o(\bar{F}), \bar{j}] = \frac{M_{oy}(\bar{F})}{M_o(\bar{F})}; \\ \cos[\bar{M}_o(\bar{F}), \bar{k}] &= \frac{M_{oz}(\bar{F})}{M_o(\bar{F})}. \end{aligned} \quad (21)$$

2.2 Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називають алгебраїчний момент проєкції сили на площину, перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з цією площиною. Відповідно для цього визначення для знаходження моменту сили відносно осі необхідно (рис.28):

- провести площину Π , перпендикулярну осі z ;
- знайти точку O перетину осі z з площиною Π ;
- спроеціювати силу \bar{F} на площину Π ;
- знайти момент проєкції \bar{F}_{Π} відносно точки O .

Тоді

$$M_z(\bar{F}) = M_o(\bar{F}_{\Pi}) = \pm F_{\Pi} \cdot h, \quad (22)$$

де \vec{F}_{Π} – вектор проекції сили \vec{F} на площину Π , перпендикулярну осі Oz ;

h – плече проекції \vec{F}_{Π} відносно точки O перетину осі Oz із площиною Π .

Момент сили відносно осі вважають додатним, якщо з додатного напрямку осі видно намагання сили повернути тіло відносно осі проти ходу годинникової стрілки. При повороті за ходом годинникової стрілки момент сили відносно осі треба брати із знаком «мінус». Так, на рис. 28 маємо, що $M_z(\vec{F}) > 0$.

Моменту сили відносно осі можна виразити через площу трикутника, побудованого на проекції сили \vec{F}_{Π} і точці O перетину осі з площиною (див. рис.28)

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{\Pi} \cdot h = 2nл\Delta OA_1B_1. \quad (23)$$

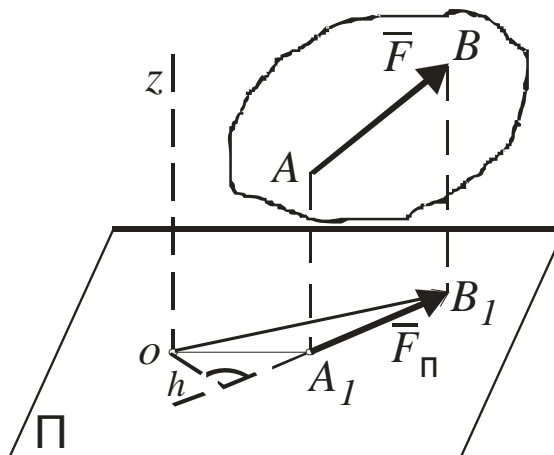


Рисунок 28

Із формули (22) можна встановити умови, коли момент сили відносно осі дорівнює нулю:

- 1) момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила паралельна осі (тоді дорівнює нулю проекція сили на площину, перпендикулярну осі);
- 2) момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо лінія дії сили перетинає цю вісь (в цьому випадку дорівнює нулю плече проекції сили на площину, перпендикулярну осі).

Об'єднуючи ці два випадки, можна зробити висновок: момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині.

Аналіз властивостей моментів сили відносно точки та відносно осі дозволяє встановити таку залежність між цими двома характеристиками обертальної дії сили, яка характеризується теоремою:

Момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь векторного моменту сили відносно будь-якої точки на осі.

Справедливість цього твердження встановимо, розглянувши дію на тіло сили \vec{F} , прикладеної в точці A (рис. 29).

Векторний момент сили \vec{F} відносно центра O зображається вектором $\vec{M}_O(\vec{F})$, перпендикулярним до площини трикутника OAB , а його модуль

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = 2 \text{пл.} \Delta OAB. \quad (24)$$

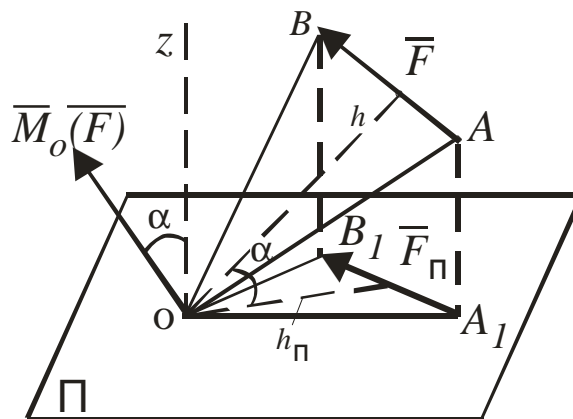


Рисунок 29

Величина моменту сили відносно осі, відповідно до формули (23), дорівнює $M_z(\vec{F}) = 2 \text{пл.} \Delta OA_1B_1$. Але трикутник OA_1B_1 являє собою проекцію на площину Π трикутника OAB . Кут α між площинами цих трикутників дорівнює куту між перпендикулярами до цих площин. Тоді за відомою з геометрії формулою маємо:

$$\text{пл.} \Delta OA_1B_1 = \text{пл.} \Delta OAB \cdot \cos \alpha,$$

де α – кут між вектором $\vec{M}_O(\vec{F})$ та віссю Oz . Звідси за формулами (23) і (24)

$$M_z(\bar{F}) = |\bar{M}_0(\bar{F})| \cdot \cos \alpha = M_{oz}(\bar{F}). \quad (25)$$

Використовуючи цю залежність та формулу (19) одержимо аналітичні формули для обчислення моментів сили відносно координатних осей:

$$M_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y; M_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z; M_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x, \quad (26)$$

де x, y, z - координати точки прикладання сили, F_x, F_y, F_z - проєкції сили на координатні осі.

2.3 Пара сил та її момент

Парою сил називають систему двох рівних за модулем сил, направлених вздовж паралельних прямих у протилежних напрямках (рис. 30). Площина, в якій розміщені сили пари – це площина дії пари сил, а найкоротша відстань d між лініями дії сил називається плечем пари.

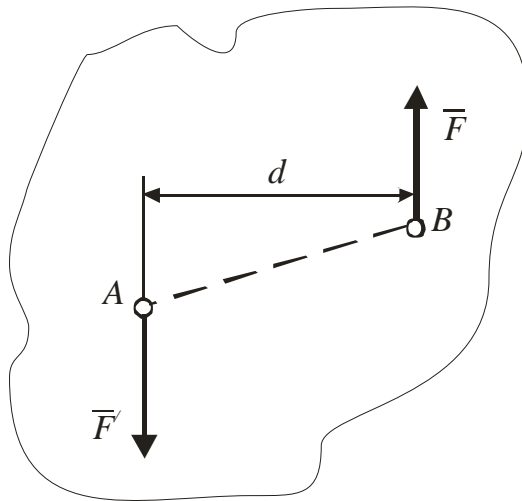


Рисунок 30

Сили пари не складають зрівноважену систему сил, бо не мають спільної лінії дії, та не зводяться до рівнодіючої, так як їх геометрична сума дорівнює нулю. Дія пари сил зводиться до обертового ефекту, який характеризується моментом пари.

Алгебраїчний момент пари – це взята з відповідним знаком величина, яка дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на плече пари:

$$M = M(\vec{F}, \vec{F}') = \pm F \cdot d. \quad (27)$$

Алгебраїчний момент пари сил буде додатним, якщо пара сил намагається обернути тіло проти ходу годинникової стрілки.

Відповідно до визначення, алгебраїчний момент пари сил чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на силах пари (рис. 31):

$$M = M(\vec{F}, \vec{F}') = \text{пл} \square ABCD = 2 \text{пл} \triangle ABC = 2 \text{пл} \triangle ABD.$$

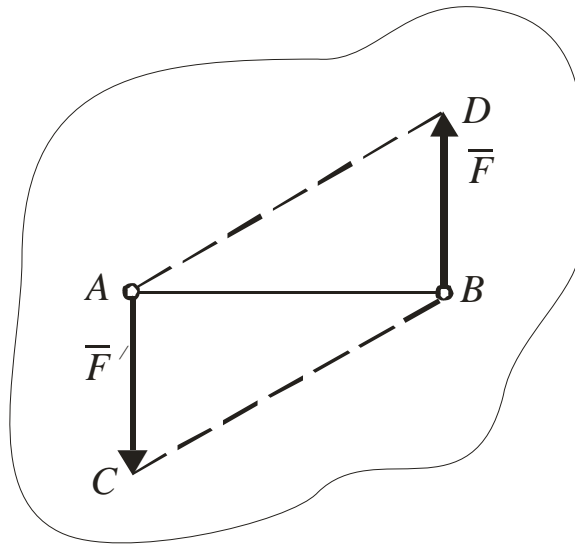


Рисунок 31

Векторним моментом пари сил називається вектор \vec{M} , модуль якого дорівнює добутку модуля однієї із сил на плече пари, і який напрямлений перпендикулярно площині дії пари в той бік, звідки напрямок повороту тіла під дією пари видно проти ходу годинникової стрілки (рис.32).

Із цього визначення можна встановити, що момент пари сил дорівнює моменту однієї із сил пари відносно точки прикладання другої сили, тобто

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{M}_A(F) \text{ або } \vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F}' = \vec{M}_B(F'). \quad (28)$$

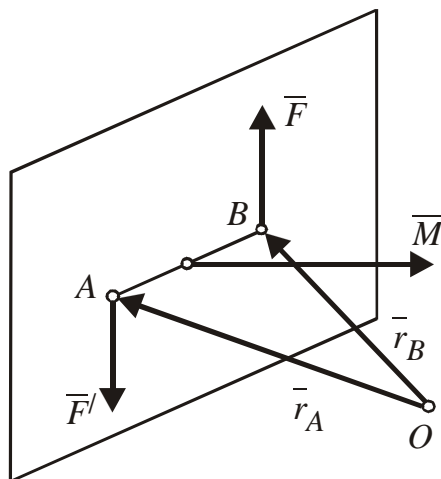


Рисунок 32

Покажемо справедливість висновку (теорема):

Сума моментів сил пари відносно будь-якої точки не залежить від положення цієї точки і дорівнює моменту пари сил. Обчислимо суму сил пари відносно довільно вибраної точки O (див. рис. 32), враховуючи, що $\vec{F} = -\vec{F}'$:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') &= (\vec{r}_B \times \vec{F}) + (\vec{r}_A \times \vec{F}') = (\vec{r}_B \times \vec{F}) - (\vec{r}_A \times \vec{F}) = \\ &= (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{M}. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким чином, дія пари сил на тверде тіло повністю визначається моментом пари сил. Оскільки положення точки O вибране довільно, то вектор \vec{M} моменту пари можна прикладати у будь-якій точці, тобто цей вектор є вільним вектором.

2.4 Теорема про пари сил

Теорема про пари сил встановлюють умови еквівалентного перетворення пар сил без зміни їх дії на тверде тіло, які дозволяють приводити системи пар до простішого вигляду.

2.4.1 Теорема про еквівалентність пар сил, розташованих в одній площині

Пару сил, що діє на тверде тіло, можна замінити іншою парою сил, яка розташована в тій же площині і має однаковий з першою парою алгебраїчний момент.

Хай на тверде тіло діє пара сил (\bar{F}_1, \bar{F}') з алгебраїчним моментом $M = F \cdot d$ (рис. 33). Покажемо, що стан тіла не зміниться, якщо на тіло замість цієї пари сил діятиме інша пара сил з таким же алгебраїчним моментом, сили якої будуть прикладені в довільно вибраних точках A_1 і B_1 на відстані $A_1B_1 = d_1$ (рис. 33,а).

Для цього прикладемо в точках A_1 і B_1 зрівноважені системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim 0$ та $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2) \sim 0$, лінії дії яких перпендикулярні до відрізка A_1B_1 , вибравши величини цих сил рівними $\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = \bar{F}'_1 = \bar{F}'_2 = \frac{F \cdot d}{d_1}$ (рис. 33,б).

Тоді $(\bar{F}, \bar{F}') \sim (\bar{F}, \bar{F}'; \bar{F}_1, \bar{F}'_1; \bar{F}_2, \bar{F}'_2)$, оскільки $(\bar{F}_1, \bar{F}'_1; \bar{F}_2, \bar{F}'_2) \sim 0$.

Перенесемо сили \bar{F} і \bar{F}_2 в точку C перетину лінії їх дії, а сили \bar{F}' і \bar{F}'_2 - відповідно в точку D . Рівнодіючі цих сил $\bar{R} = \bar{F} + \bar{F}_2$ та $\bar{R}' = \bar{F}' + \bar{F}'_2$ мають рівні модулі і направлені вздовж діагоналі CD паралелограма $CKDL$ в протилежних напрямках (рис. 33,в), тому вони створюють зрівноважену систему сил, яку можна відкинути.

Одержана в результаті таких еквівалентних перетворень пара сил (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) з моментом $M_1 = F_1 \cdot d_1$ (рис. 33,г), замінила задану пару сил (F_1, F') з моментом $M = F \cdot d$ (рис. 33,а), причому

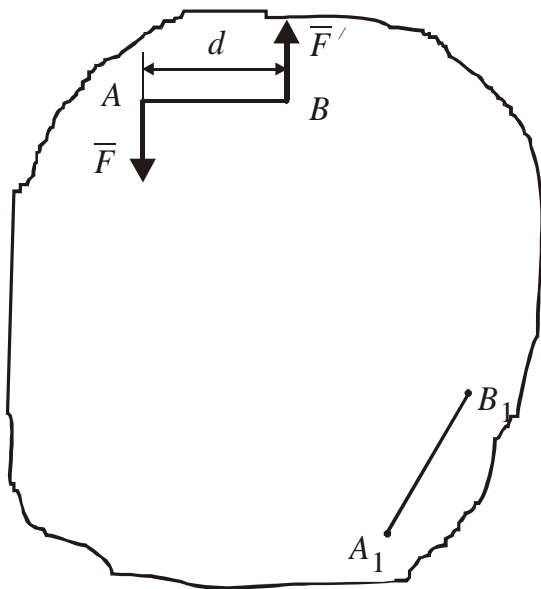
$$M_1 = F_1 \cdot d_1 = F \frac{d}{d_1} d_1 = F_1 d = M, \text{ тобто алгебраїчні моменти цих пар сил}$$

однакові.

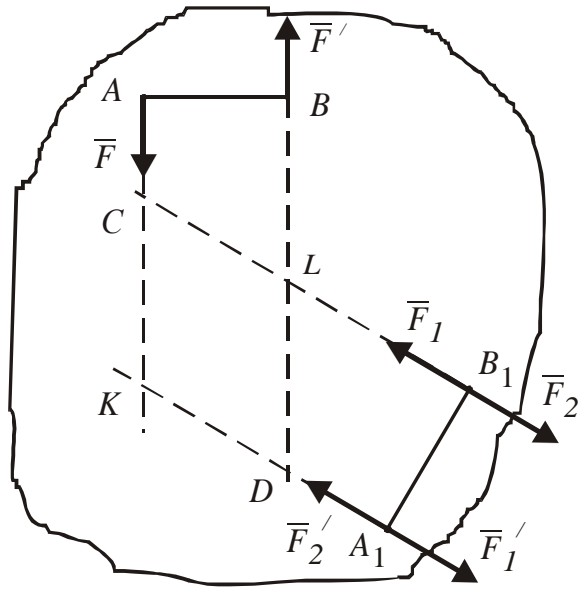
Із доведеної теореми випливають такі властивості пар сил:

а) пару сил можна як завгодно повертати та переносити в площині дії пари;

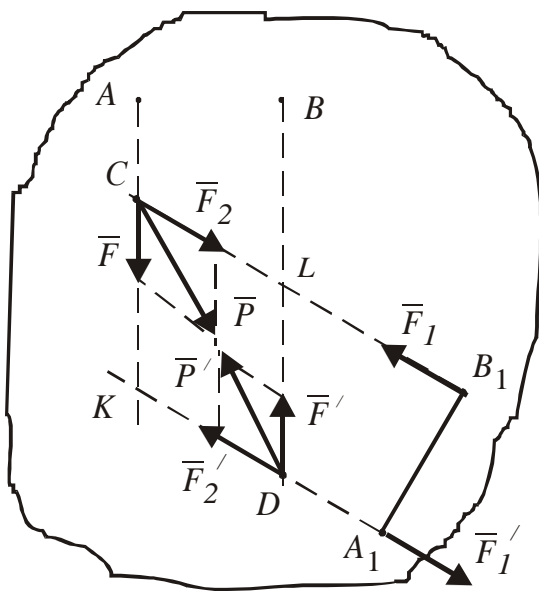
б) у пари сил можна змінювати плече і сили, зберігаючи незмінним її алгебраїчний момент і площину дії.



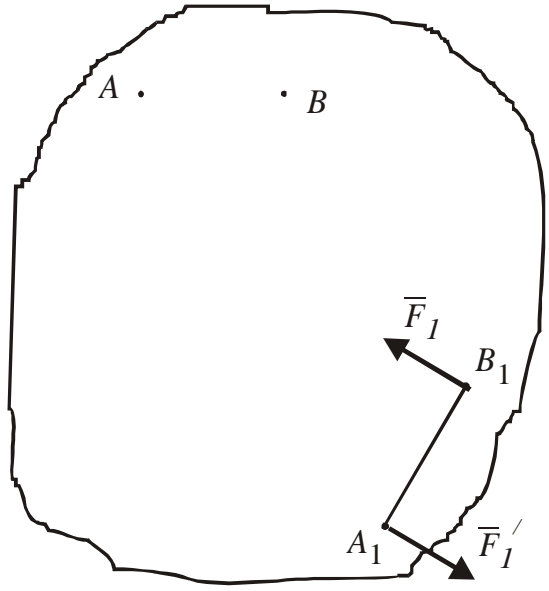
a)



б)



в)



г)

Рисунок 33

2.4.2 Теорема про перенесення пари сил у паралельну площину

Дія пари сил на тверде тіло не зміниться, якщо її перенести в будь-яку площину, паралельну площині дії пари.

Розглянемо пару сил (\vec{F}, \vec{F}') , яка діє на тверде тіло в площині Π_1 (рис. 34). Проведемо площину Π_2 , паралельну площині Π_1 (рис. 34,а).

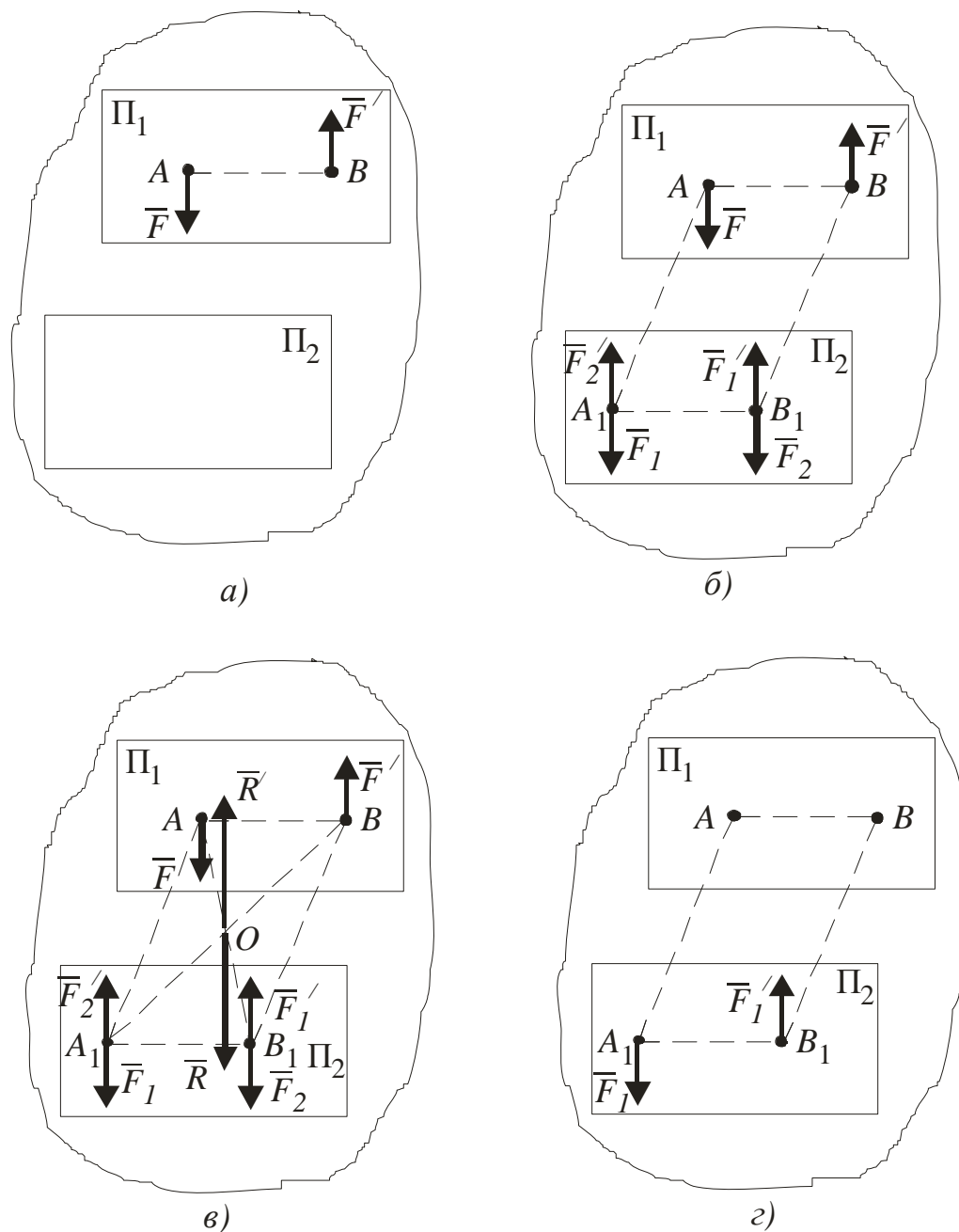


Рисунок 34

У площині Π_2 , паралельній площині Π_1 , відкладемо відрізок A_1B_1 так, що $AB \parallel A_1B_1$ і $AB = A_1B_1$. Прикладемо в точках A_1 та B_1 зрівноважені системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim 0$ та $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2) \sim 0$, вибираючи сили такими, щоб $\bar{F} = \bar{F}_1 = \bar{F}_2$; $\bar{F}' = \bar{F}'_1 = \bar{F}'_2$ (рис. 34,б).

Складемо рівні паралельні сили (\bar{F}, \bar{F}_2) і (\bar{F}', \bar{F}'_2) , замінивши їх рівнодіючою

$$\bar{R} = \bar{F} + \bar{F}_2,$$

прикладеною в середині відрізка AB_1 та рівнодіючою

$$\bar{R}' = \bar{F}' + \bar{F}'_2,$$

прикладеною в середині відрізка BA_1 . Ці дві рівнодіючі прикладені в одній точці O перетину діагоналей прямокутника ABA_1B_1 , рівні за модулем і направлені протилежно, тому складають зрівноважену систему сил $(\bar{R}, \bar{R}') \sim 0$, яку можна відкинути.

У результаті залишаються сили \bar{F}_1 і \bar{F}'_1 , які утворюють пару сил, що діє на тіло в площині Π_2 (рис. 34,г), еквівалентну початково діючій парі сил (\bar{F}, \bar{F}') (рис. 34,а). Так як

$$\overline{B_1A_1} \times \bar{F}_1 = \overline{BA} \times \bar{F},$$

то векторні моменти пар сил (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) та (\bar{F}, \bar{F}') рівні між собою.

Отже, дві пари сил еквівалентні, якщо вони мають однакові векторні моменти.

2.4.3 Теорема про додавання пар сил

Система пар сил, діючих на тверде тіло, еквівалентна одній парі сил, векторний момент якої дорівнює геометричній сумі векторних моментів всіх пар системи.

Розглянемо дві пари сил (\bar{P}_1, \bar{P}_1') та (\bar{P}_2, \bar{P}_2') , які лежать в площинах Π_1 і Π_2 , що перетинаються під деяким кутом α (рис. 35). Векторні моменти \bar{M}_1 і \bar{M}_2 цих пар сил направлені перпендикулярно до відповідних площин (рис. 35,а).

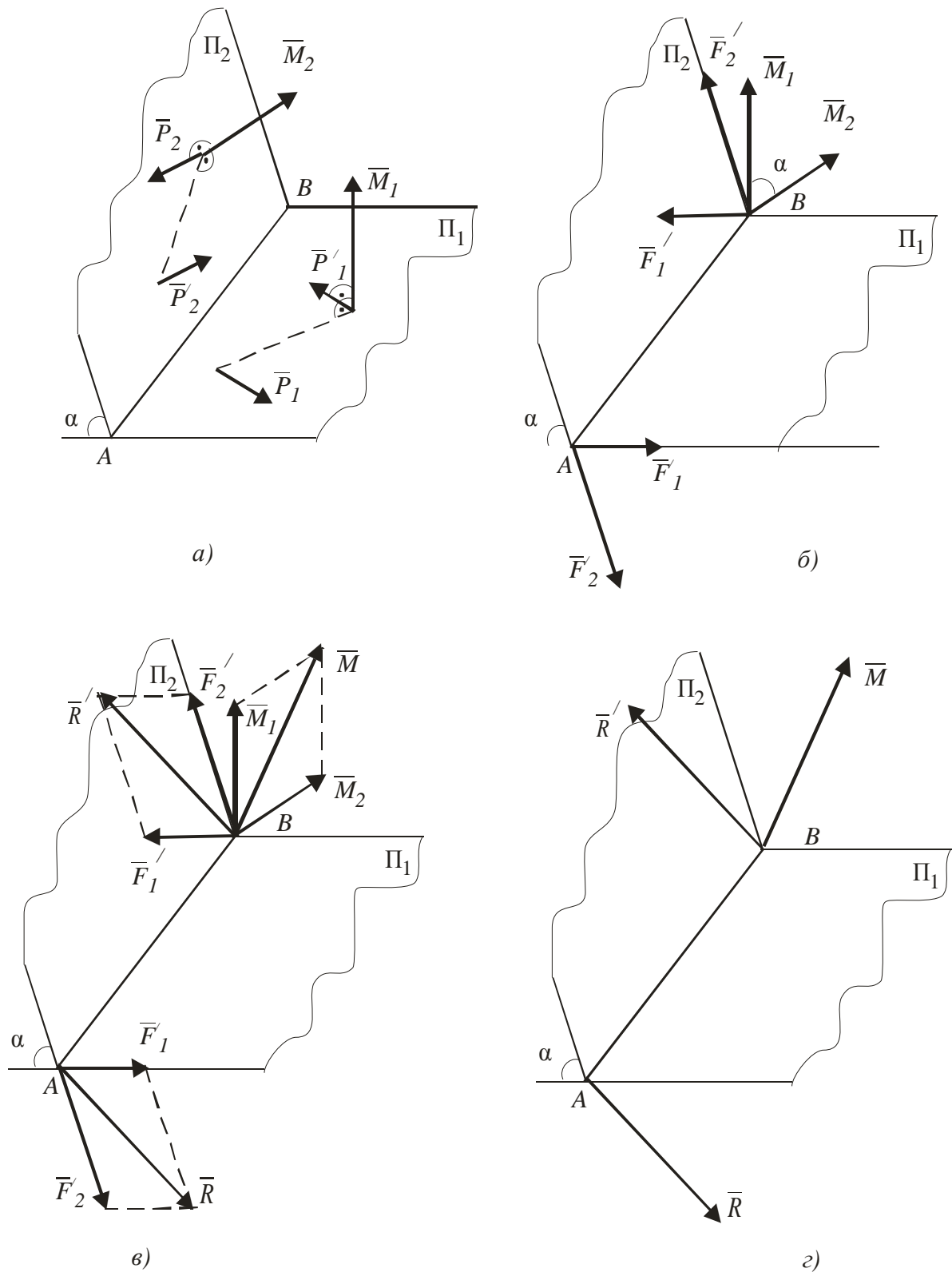


Рисунок 35

Відповідно до теореми про еквівалентність пар сил перенесемо розглядані пари сил в свої площини до лінії перетину площин, привівши їх до плеча AB , так, щоб моменти перетворених пар сил (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) та (\bar{F}_2, \bar{F}'_2) були рівними моментам початково діючих пар сил (\bar{P}_1, \bar{P}'_1) і (\bar{P}_2, \bar{P}'_2) (рис. 35,б):

$$\bar{M}(P_1, P'_1) = \bar{M}(\bar{F}_1, \bar{F}'_1) = \overline{BA} \times \bar{F}_1 = \bar{M}_1; \quad \bar{M}(P_2, P'_2) = \bar{M}(\bar{F}_2, \bar{F}'_2) = \overline{BA} \times \bar{F}_2 = \bar{M}_2.$$

Складемо сили, прикладені в точці A та в точці B (рис. 35, в):

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2; \quad \bar{R}' = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2.$$

Одержана результуюча пара сил (\bar{R}, \bar{R}') має момент

$$\bar{M} = \overline{BA} \times \bar{R} = \overline{BA} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \overline{BA} \times \bar{F}_1 + \overline{BA} \times \bar{F}_2 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2. \quad (30)$$

Отже, дві пари сил (\bar{P}_1, \bar{P}'_1) і (\bar{P}_2, \bar{P}'_2) з моментами \bar{M}_1 і \bar{M}_2 , які лежать в площинах, що перетинаються (рис. 35,а), можна замінити однією парою сил (\bar{R}, \bar{R}') (рис. 35,г) з моментом $\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$. У випадку розміщення пар сил в одній площині чи в паралельних площинах, коли векторні моменти пар сил паралельні між собою, векторне додавання моментів пар переходить в алгебраїчне додавання.

Якщо на тіло діє система пар сил з моментами $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$, то послідовно складаючи моменти пар, можна зробити висновок, що дана система пар еквівалентна одній парі сил з моментом

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k. \quad (31)$$

2.5 Умови рівноваги системи пар сил

Враховуючи, що систему діючих на тіло пар сил завжди можна замінити однією еквівалентною парою сил, для рівноваги системи пар необхідно і достатньо, щоб момент результуючої пари сил дорівнював нулю. Тоді, відповідно до формули (31) одержимо умову рівноваги системи пар:

$$\sum_{k=1}^n \overline{M}_k = 0. \quad (32)$$

Проеціюючи векторне рівняння (32) на координатні осі, одержимо три алгебраїчних рівняння умов рівноваги системи пари сил:

$$\sum_{k=1}^n M_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{kz} = 0. \quad (33)$$

Для системи пар сил, що лежать в одній площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів цих пар дорівнювала нулю.

Питання для самоконтролю

- 1 Дайте визначення моменту сили відносно точки. За яких умов момент сили відносно точки додатний, від'ємний, дорівнює нулю?
- 2 Як визначити момент сили відносно осі. Коли момент сили відносно осі дорівнює нулю?
- 3 Яка залежність існує між моментом сили відносно осі та векторним моментом сили відносно точки на осі?
- 4 Яку систему сил називають парою сил? Як визначається її момент?
- 5 Які перетворення пари сил не змінюють її дії на тіло?
- 6 Як складаються пари сил, що лежать в одній площині? У площинах, що перетинаються?
- 7 Які умови рівноваги системи пар сил?

3 ОСНОВНА ТЕОРЕМА СТАТИКИ І УМОВИ РІВНОВАГИ ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ СИЛ

Для довільної системи сил, лінії дії якої можуть бути розташовані в просторі або в одній площині, необхідно також, як і для раніше розглянутої системи збіжних сил, одержати умови рівноваги. Еквівалентне перетворення довільної системи сил здійснюють, застосовуючи теорему про паралельне перенесення сили.

3.1 Теорема про паралельне перенесення сили

Силу можна перенести паралельно самій собі в будь-яку точку твердого тіла, додаючи при цьому пару сил, векторний момент якої дорівнює векторному моменту сили, що переноситься, відносно нової точки її прикладання.

Розглянемо силу \vec{F} , прикладену в точці A (рис. 36,а). У довільно вибраній точці B прикладемо зрівноважену систему сил $(\vec{F}', \vec{F}'') \sim 0$, де $\vec{F} = \vec{F}' = -\vec{F}''$. Тоді $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ (рис. 36,б).

Розглянемо систему цих трьох сил, як одну силу \vec{F}' та пару сил (\vec{F}, \vec{F}'') (рис. 36,в), момент якої

$$M(\vec{F}, \vec{F}'') = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}.$$

Теорема доведена.

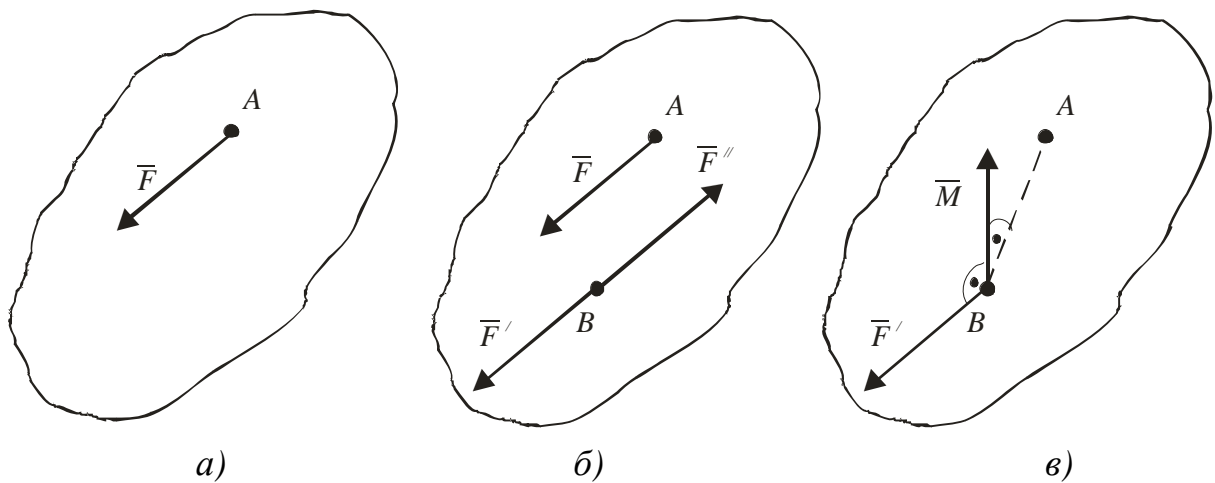


Рисунок 36

3.2 Основна теорема статички про приведення довільної системи сил до заданого центра

Для довільної системи сил введемо такі визначення.

Головним вектором системи сил є вектор, який дорівнює геометричній сумі всіх сил системи. Тобто для системи n сил маємо

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k . \quad (34)$$

Головним моментом системи сил відносно деякого центра називається величина, яка дорівнює сумі моментів сил системи відносно даного центра. Тобто

$$\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k) . \quad (35)$$

Доведемо основну теорему статички (теорему Пуансо):

Будь-яка система сил еквівалентна силі, яка дорівнює головному вектору системи і прикладена в деякій точці (центр приведення) та парі сил з моментом, який дорівнює головному моменту системи відносно центра приведення.

Розглянемо систему сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$, прикладених в точках A_1, A_2, \dots, A_n (рис.37,а). Виберемо деяку точку O за центр приведення і перенесемо кожен із сил в цю точку, додаючи згідно з теоремою про паралельне перенесення відповідні пари сил. У результаті цього одержимо (рис.37,б):

- систему збіжних сил $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n)$, прикладених в точці O , де

$$\bar{F}'_k = \bar{F}_k ;$$

- систему добавлених пар сил, моменти яких $(\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n)$, де

$$\bar{M}_k = \bar{M}_0(\bar{F}_k) .$$

Замінімо (рис.37,в) систему збіжних сил рівнодіючою $\bar{R} = \sum \bar{F}'_k = \sum \bar{F}_k$, що дорівнює головному вектору системи, а систему пар сил – однією парою з моментом $\bar{M}_0 = \sum \bar{M}_k = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k)$, який дорівнює головному моменту системи відносно центра приведення O .

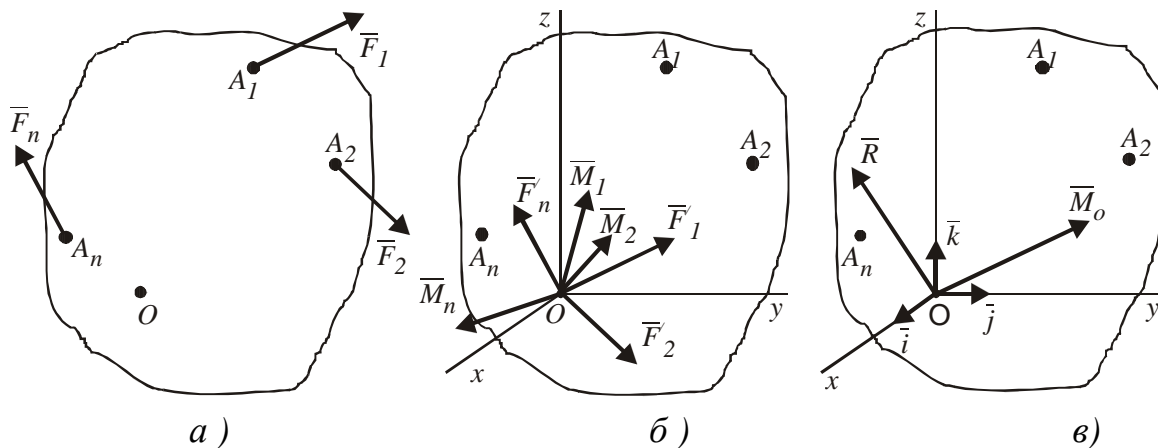


Рисунок 37

Таким чином одержали, що $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{R}, \bar{M}_0)$. Отже, теорема доведена.

3.3 Формули для обчислення головного вектора і головного моменту

Як відомо, головний вектор та головний момент системи визначаються рівностями $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$, $\bar{M}_0 = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k)$.

Значення \bar{R} та \bar{M}_0 розраховують аналітично через їх проекції на координатні осі:

$$\bar{R} = \bar{i}R_x + \bar{j}R_y + \bar{k}R_z; \quad \bar{M}_0 = \bar{i}M_x + \bar{j}M_y + \bar{k}M_z, \quad (36)$$

де проекції головного вектора системи на осі координат визначаються за відомими формулами (розд.1.5):

$$R_x = \sum F_{kx}; \quad R_y = \sum F_{ky}; \quad R_z = \sum F_{kz}, \quad (37)$$

а проекції на координатні осі головного моменту системи відносно центра O знаходять з застосуванням залежності між моментом сили відносно осі і векторним моментом сили відносно центра на осі, тобто

$$M_x = \sum M_x(\bar{F}_k); \quad M_y = \sum M_y(\bar{F}_k); \quad M_z = \sum M_z(\bar{F}_k). \quad (38)$$

За відомими проекціями визначають:

модуль головного вектора і косинуси кутів його нахилу до осей координат:

$$|\bar{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$\cos\left(\hat{i}, \bar{R}\right) = \frac{R_x}{R}; \cos\left(\hat{j}, \bar{R}\right) = \frac{R_y}{R}; \cos\left(\hat{k}, \bar{R}\right) = \frac{R_z}{R}, \quad (39)$$

та модуль головного моменту і косинуси його кутів з осями координат:

$$|\bar{M}_0| = M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};$$

$$\cos\left(\hat{i}, \bar{M}_0\right) = \frac{M_x}{M_0}; \cos\left(\hat{j}, \bar{M}_0\right) = \frac{M_y}{M_0}; \cos\left(\hat{k}, \bar{M}_0\right) = \frac{M_z}{M_0}. \quad (40)$$

Порівнюючи формули (37, 39) з раніше одержаними формулами (9, 10, 11), можна встановити, що головний вектор довільної системи сил і рівнодіюча збіжних сил обчислюються за однаковими залежностями. Але ці величини не ідентичні, так як головний вектор системи не завжди еквівалентний цій системи сил.

3.4 Випадки приведення просторової системи сил до найпростіших систем

Аналізуючи значення головного вектора та головного моменту, можна встановити такі окремі випадки:

1) Якщо для даної системи сил $\bar{R} = 0$, а $\bar{M}_0 \neq 0$, то система зводиться до однієї пари сил з моментом \bar{M}_0 , що дорівнює головному моменту системи. У цьому випадку значення головного моменту системи від вибору центра O не залежить.

2) Якщо для даної системи $\bar{R} \neq 0$, а $\bar{M}_0 = 0$, то система сил зводиться до рівнодіючої, яка дорівнює головному вектору системи і лінія дії якої проходить через центр O приведення.

Така сукупність сил називається динамічним гвинтом або динамою, а лінія, вздовж якої напрямлений головний вектор та головний момент системи (рис. 39, а) – це вісь динами. Подальше спрощення даної системи сил неможливе, тому система сил в цьому випадку зводиться до динами, вісь якої проходить через центр O приведення.

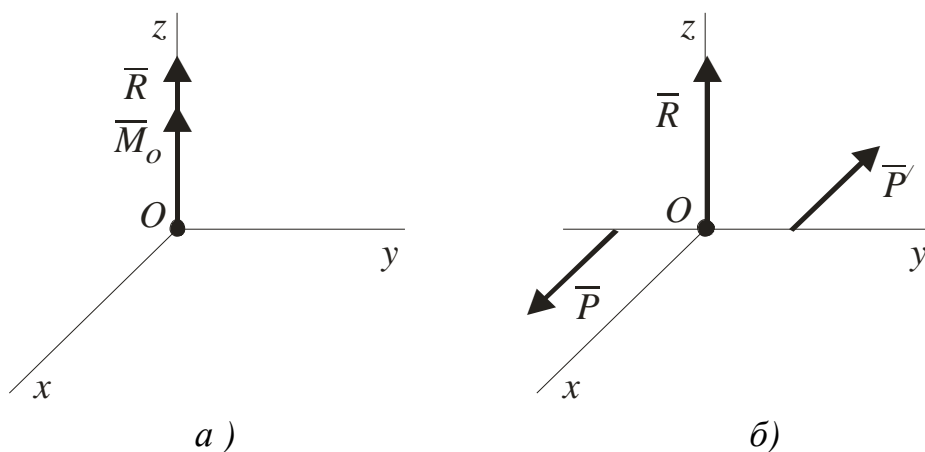


Рисунок 39

в) головний вектор і головний момент системи не перпендикулярні один до одного і не паралельні між собою (рис. 40) – система сил зводиться до динами, вісь якої не буде проходити через центр O .

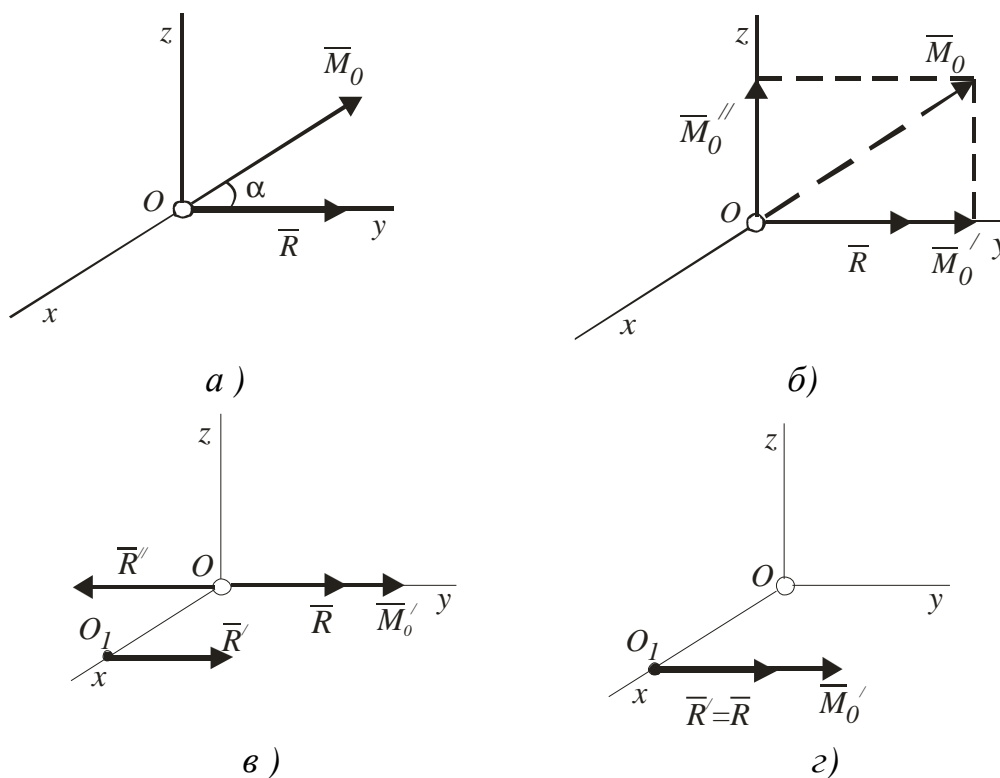


Рисунок 40

Поступовий перехід від такого завантаження (рис. 40, а) до динамічного гвинта зі зміщеною віссю здійснюється розкладанням вектора \bar{M}_0 на складові \bar{M}'_0 і \bar{M}''_0 (рис. 40, б), заміною вектора \bar{M}''_0 парою сил (\bar{R}', \bar{R}'') , плече якої

$$OO_1 = \frac{|M''_0|}{|\bar{R}|},$$

а сили пари чисельно дорівнюють головному вектору (рис. 40, в), відкиданням зрівноваженої системи сил $(\bar{R}, \bar{R}'') \sim 0$, перенесенням вектора \bar{M}'_0 в точку O_1 як вільного вектора (рис. 40, г).

4) Якщо для даної системи сил $\bar{R} = 0$ і $\bar{M}_0 = 0$, то така система сил буде знаходитись у стані рівноваги.

3.5 Рівняння рівноваги довільної просторової системи сил та просторової системи паралельних сил

Як було встановлено в попередньому розділі, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор системи сил та її головний момент відносно будь-якого центра приведення дорівнювали нулю, тобто

$$\bar{R} = 0 ; \bar{M}_0 = 0. \quad (41)$$

Але вектори \bar{R} та \bar{M}_0 дорівнюватимуть нулю тільки тоді, коли їх проекції на кожну з осей координат будуть дорівнювати нулю, тобто коли $R_x = 0; R_y = 0; R_z = 0; M_x = 0; M_y = 0; M_z = 0$. Із врахуванням формул (37), (38) ці шість рівнянь будуть справедливими, коли діючі сили задовольняють умовам:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad (42)$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0.$$

Таким чином, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил системи на кожну з трьох осей координат та сума моментів всіх сил системи відносно цих осей дорівнювали нулю.

Із загальних умов рівноваги довільної просторової системи сил одержують умови рівноваги більш простих систем сил.

Якщо всі сили просторової системи паралельні між собою, то можна розмістити осі координат таким чином, що одна з них, наприклад вісь Oz , буде паралельна напрямкам сил (рис. 41).

Тоді проекції кожної із сил на осі Ox та Oy і їх моменти відносно осі Oz дорівнюватимуть нулю тотожно. Відкидаючи у формулах (42) рівняння рівноваги, які виконуються тотожно, одержимо такі три рівняння рівноваги просторової системи паралельних сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0. \quad (43)$$

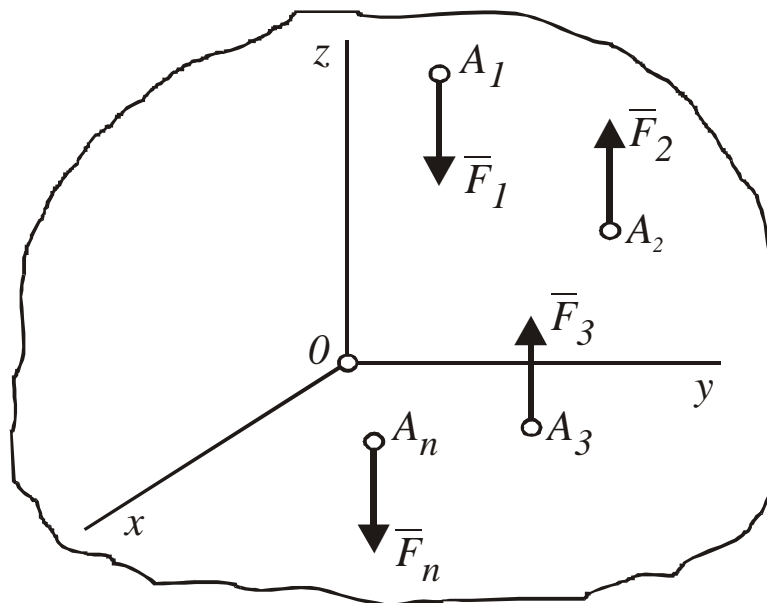


Рисунок 41

Отже, для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил на вісь, паралельну силам, та сума їх моментів відносно двох інших координатних осей дорівнювали нулю.

3.6 Теорема Варіньона про момент рівнодіючої

Якщо система сил має рівнодіючу, то момент рівнодіючої відносно будь-якої точки дорівнює сумі моментів сил системи відносно цієї ж точки.

Нехай задано систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, рівнодіюча якої $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$ прикладена в точці A (рис. 42). Додамо до системи врівноважуючу силу $\vec{R}' = -\vec{R}$, прикладену в тій же точці A , і одержимо зрівноважену систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{R}')$ ~ 0 .

Головний момент цієї зрівноваженої системи сил

$$\vec{M}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_k) + \vec{M}_0(\vec{R}') = 0. \quad (44)$$

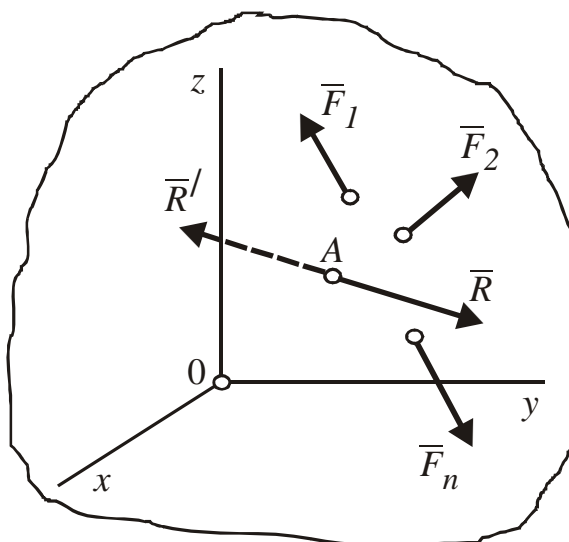


Рисунок 42

Зважаючи на те, що $\vec{M}_0(\vec{R}') = -\vec{M}_0(\vec{R})$, із виразу (44), одержимо

$$\sum_{k=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_k) - \vec{M}_0(\vec{R}) = 0,$$

звідки випливає

$$\bar{M}_0(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k). \quad (45)$$

Теорема доведена.

Теорема Варіньона справедлива і для моментів сил відносно осей координат. Дійсно, проєціюючи векторний вираз (45) на координатні осі, одержимо:

$$M_x(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k); \quad M_y(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k); \quad M_z(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k), \quad (46)$$

тобто момент рівнодіючої відносно деякої осі дорівнює сумі моментів сил системи відносно цієї осі.

Застосовуючи теорему Варіньона для обчислення моменту сили відносно точки або осі, розкладають силу на складові, для яких плече відносно точки або осі відоме із умов задачі, що полегшує обчислення моменту.

3.7 Розв'язання задач рівноваги тіла під дією просторової системи сил

При розв'язанні задач на рівновагу твердого тіла під дією просторової системи сил необхідно дотримуватись алгоритму, наведеного в розділі 1.8. При цьому задача рівноваги тіла під дією довільної просторової системи сил буде статично визначеною тоді, коли кількість невідомих величин становитиме не більше шести, а під дією просторової системи паралельних сил – не більше трьох.

Приклад 5

За допомогою ворота, схематично зображеного на рис.43, утримується вантаж $Q = 1000\text{H}$. Радіус барабана $R = 0,05\text{м}$, довжина рукоятки $KD = 0,4\text{м}$, відстані $AD = 0,3\text{м}$, $AC = 0,4\text{м}$, $CB = 0,6\text{м}$. Вірówka сходить з барабана за дотичною, нахиленою до горизонту під кутом 60° . Визначити тиск P на рукоятку і реакції опор A і B в тому положенні ворота, коли рукоятка KD горизонтальна.

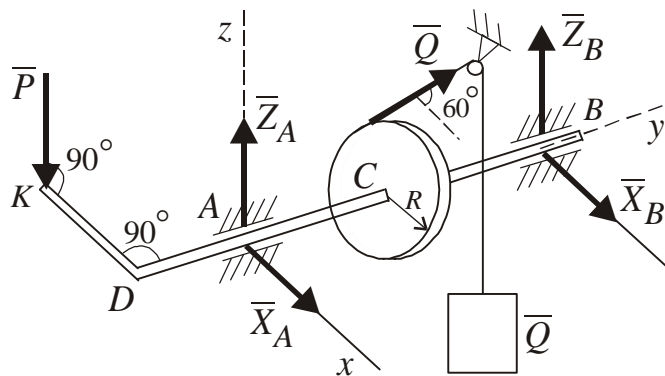


Рисунок 43

Розв'язання

Розглянемо рівновагу ворота, на який діють активні сили \bar{P} і \bar{Q} . Силу \bar{Q} ваги вантажу прикладаємо до ворота в точці збігу вірвовки з ворота, направивши її вздовж вірвовки. В'язями для ворота є підшипники A і B , реакції \bar{R}_A і \bar{R}_B яких представимо складовими \bar{X}_A і \bar{Z}_A та \bar{X}_B і \bar{Z}_B , розміщеними в площинах, перпендикулярних осі підшипників. Для цієї просторової системи сил складаємо шість рівнянь (42) рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + Q \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad 0 \equiv 0 \text{ (жодна із сил на вісь } y \text{ не проєцюється);}$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B - P + Q \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad Z_B(AC + CB) + P \cdot AD + Q \sin 60^\circ \cdot AC = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0; \quad Q \cdot R - P \cdot KD = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0; -X_B(AC + CB) - Q \cos 60^\circ \cdot AC = 0;$$

При обчисленні моментів сили \bar{Q} відносно осей Ax та Az була застосована теорема Варіньона, згідно з якою сила Q була розкладена на складові \bar{Q}_x та \bar{Q}_z . Чисельні значення цих складових такі: $Q_x = Q \cos 60^\circ$, а $Q_z = Q \sin 60^\circ$.

Момент відносно осі Ax дає тільки складова \bar{Q}_z , оскільки складова \bar{Q}_x паралельна осі Ax , а відносно осі Az – тільки складова \bar{Q}_x .

Розв'язуючи ці рівняння, знайдемо:

$$P = \frac{Q \cdot R}{KD} = \frac{1000 \cdot 0,05}{0,4} = 125H;$$

$$X_B = \frac{Q \cos 60^\circ \cdot AC}{AC + CB} = -\frac{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,4}{0,4 + 0,6} = -200H;$$

$$Z_B = \frac{P \cdot AD + Q \sin 60^\circ \cdot AC}{AC + CB} = -\frac{125 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,866 \cdot 0,4}{0,4 + 0,6} = -384H;$$

$$Z_A = P - Z_B - Q \sin 60^\circ = 125(-384) - 1000 \cdot 0,866 = -357H;$$

$$X_A = -X_B - Q \cos 60^\circ = 200 - 1000 \cdot 0,5 = -300H.$$

Приклад 6

Однорідна прямокутна рама вагою $G = 200H$ прикріплена до стіни за допомогою шарового шарніра A і петлі B , і утримується в горизонтальному положенні вірвовкою DH , прив'язаною в точці D до рами та до гвіздка H , вбитого в стіну на одній вертикалі з петлею B (рис. 44). На раму в точці E у напрямку CE діє сила. Обчислити опорні реакції в точках A , B і натяг вірвовки DH , якщо розміри рами $a = 0,8m$; $b = 0,4m$; $c = 0,8m$, а вірвовка нахилена до площини рами під кутом $\alpha = 30^\circ$.

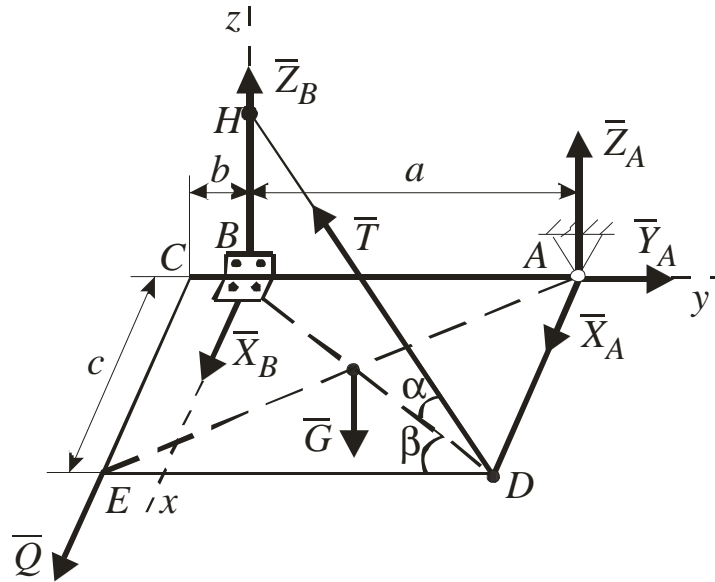


Рисунок 44

Розв'язання

Рама знаходиться в стані рівноваги під дією активних сил \bar{G} , \bar{Q} та реакцій $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ шарового шарніра, \bar{X}_B, \bar{Z}_B петлі та реакції \bar{T} вірьовки DH . Це довільна просторова система сил, умови рівноваги якої включають шість рівнянь (42), містить шість невідомих реакцій, тому задача є статично визначеною. Для даної задачі рівняння рівноваги будуть такими:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + Q - T \cos \alpha \cdot \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - T \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B - G + T \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad Z_A \cdot a + T \sin \alpha \cdot a - G \left(a - \frac{a+b}{2} \right) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0; \quad G \cdot \frac{a}{2} - T \sin \alpha \cdot c = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0; \quad Q \cdot b - X_A \cdot a = 0.$$

При складанні цих рівнянь сила \bar{T} , згідно з теоремою Варіньона, розкладалась на три складові $\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z$, рівні її проєкціям на координатні осі. Складові \bar{T}_x, \bar{T}_y не входять до рівняння моментів відносно осей Vx і

B_y , так як вони або паралельні цим осям, або перетинають їх. У рівнянні моментів відносно осі B_z відсутні кожна із цих складових, так як сила \bar{T} перетинає вісь B_z , і її момент відносно цієї осі дорівнює нулю.

Розв'язуючи рівняння рівноваги, одержимо:

$$X_A = \frac{Q \cdot b}{a} = 400 \cdot \frac{0,2}{0,8} = 100 \text{ Н};$$

$$T = \frac{G}{2 \sin \alpha} = \frac{200}{2 \cdot 0,5} = 200 \text{ Н};$$

$$Z_A = G \left(\frac{a-b}{2a} \right) - T \sin \alpha = 200 \left(\frac{0,8-0,2}{2 \cdot 0,8} \right) - 200 \cdot 0,5 = 75 \text{ Н};$$

$$Z_B = G - Z_A - T \sin \alpha = 200 - 75 - 200 \cdot 0,5 = 25 \text{ Н};$$

$$Y_A = T \cos \alpha \cos \beta = 200 \cdot 0,866 \cdot 0,707 = 122,45 \text{ Н};$$

$$X_B = T \cos \alpha \sin \beta - Q - X_A = 200 \cdot 0,866 \cdot 0,707 - 400 - 100 = -377,55 \text{ Н};$$

У наведених розрахунках взято значення кута $b = 45^\circ$ нахилу вертикальної площини розміщення сили \bar{T} до координатної площини, виходячи з того, що в трикутнику ABD (див. рис. 44) маємо $\operatorname{tg} b = \frac{AD}{AB} = \frac{c}{a} = 1$.

Питання для самоконтролю

- 1 Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили. Що треба додати при паралельному перенесенні сили, щоб не змінити її дію на тіло?
- 2 Чим замінюють довільну систему сил при її зведенні до заданого центра? Сформулюйте основну теорему статки (теорему Пуансо).
- 3 Чому дорівнює головний вектор і головний момент системи сил? Що мають спільного і чим відрізняються головний вектор системи сил та рівнодіюча?
- 4 В яких випадках просторова система сил зводиться до рівнодіючої?
- 5 В яких випадках просторова система сил зводиться до однієї пари сил?
- 6 Що таке динамічний гвинт (динама)? В яких випадках просторова система сил зводиться до динами?

- 7 Сформулюйте необхідні і достатні умови рівноваги та запишіть аналітичні рівняння рівноваги довільної просторової системи сил, просторової системи паралельних сил.

4 ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

4.1 Приведення плоскої системи сил до найпростіших систем

Плоскою системою сил називають таку систему сил, лінії дії яких лежать в одній площині.

Згідно з основною теоремою статички плоску систему сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ можна також привести в загальному випадку до однієї сили \bar{R} , яка прикладена в довільно вибраному центрі O і дорівнює головному вектору системи, та однієї пари сил з моментом \bar{M}_0 , який дорівнює головному моменту системи. Оскільки всі сили системи лежать в одній площині, то головний вектор $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ також лежить у цій площині. У цій же площині будуть розміщені і приєднані пари сил, моменти яких складаються алгебраїчно. Тому для плоскої системи сил замість векторного головного моменту системи, направлено перпендикулярно площині розташування сил (рис. 45, а) використовують поняття алгебраїчного головного моменту M_0 системи, що лежить в площині дії сил (рис. 45, б) і дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил системи відносно центра приведення:

$$M_0 = \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k).$$

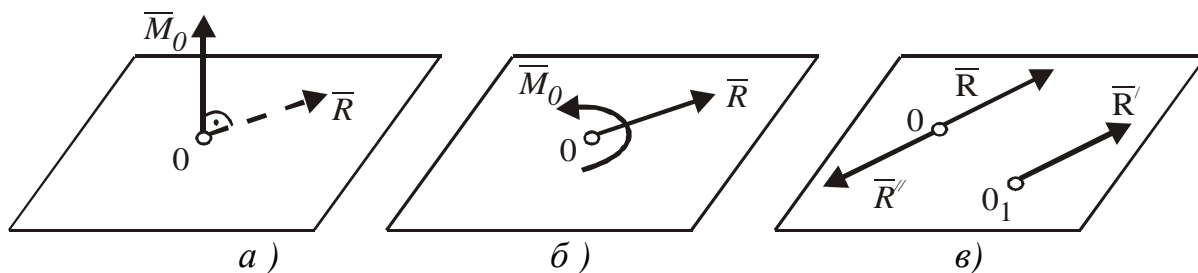


Рисунок 45

У залежності від значень \bar{R} та M_0 можливі такі окремі випадки подальшого спрощення плоскої системи сил.

1) Якщо $\bar{R} \neq 0; M_0 \neq 0$, то пару сил з моментом M_0 можна подати у вигляді двох сил \bar{R}' та \bar{R}'' , вибираючи ці сили такими, щоб $\bar{R}' = \bar{R} = -\bar{R}''$ (рис. 45, в). При цьому силу \bar{R}'' прикладемо у центрі приведення O і спрямуємо її протилежно силі \bar{R} . Тоді сила \bar{R}' направлена так, як і сила \bar{R} , буде прикладена в точці O_1 , на відстані $OO_1 = d$. Ця відстань знаходиться з умови $M_0 = Rd$, звідки

$$d = \frac{M_0}{R}.$$

Відкинувши прикладену в точці O зрівноважену систему сил (\bar{R}, \bar{R}'') ~ 0 , дістанемо висновок: якщо головний вектор та головний момент плоскої системи сил не дорівнюють нулю ($\bar{R} \neq 0; M_0 \neq 0$), то така система сил зводиться до однієї рівнодіючої \bar{R} , рівної головному вектору системи, лінія дії якої зміщена від попереднього центра зведення на відстань.

$$OO_1 = d = \frac{M_0}{R}. \quad (47)$$

2) Якщо головний вектор $\bar{R} \neq 0$, а головний момент $M_0 = 0$, то така система сил також зводиться до рівнодіючої, що дорівнює головному вектору системи $\left(\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \right)$, але лінія дії рівнодіючої проходить через центр приведення O .

3) Якщо головний вектор системи $\bar{R} = 0$, а головний момент $M_0 \neq 0$, то система сил зводиться до однієї пари сил з моментом

$$M_0 = \sum M_0(\bar{F}_k).$$

У цьому випадку значення M_0 не залежить від положення центра приведення.

4) Якщо головний вектор $\bar{R} = 0$ і головний момент $M_0 = 0$, то система сил буде зрівноваженою.

4.2 Рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил та плоскої системи паралельних сил

Необхідні і достатні умови рівноваги будь-якої плоскої системи сил визначаються рівняннями:

$$\bar{R}_0 = 0; \quad M_0 = 0. \quad (48)$$

Величина головного вектора плоскої системи сил визначається залежностями:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky},$$

а головного моменту $M_0 = \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k)$.

Головний вектор \bar{R} буде дорівнювати нулю тільки тоді, коли одночасно $R_x = 0$; $R_y = 0$. Отже, умови рівноваги (48) виконуються при виконанні таких аналітичних умов

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (49)$$

Ці рівняння є основною (*першою*) формою аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил, які формулюються так: *для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил на кожну з двох координатних осей та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь-якої точки на площині дії сил дорівнювали нулю.*

Існують ще дві форми рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил, виконання яких виражає умови рівноваги (48).

Друга форма аналітичних умов рівноваги передбачає: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил відносно двох точок A і B та сума проєкцій цих сил на вісь Ox , неперпендикулярну до прямої AB , дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad AB \not\perp Ox. \quad (50)$$

Необхідність цих умов випливає з того, що при невиконанні будь-якої із рівностей (50) або головний вектор $\bar{R} \neq 0$, або головний момент $M \neq 0$, і рівноваги не буде.

Достатність умов (50) доводиться від зворотного, допускаючи, що при виконанні перших двох рівнянь система сил не знаходиться в стані рівноваги, а має рівнодіючу $\bar{R} \neq 0$, лінія дії якої проходить через точки A і B . Але при такому допущенні не виконується третє рівняння $\sum F_{kx} = 0$, оскільки вісь Ox проведена неперпендикулярно до AB . Отже останнє рівняння виконується тільки тоді, коли рівнодіюча $\bar{R} = 0$, тобто має місце рівновага.

Сформулюємо *третю* форму умов рівноваги розглядуваної системи сил: для рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів сил системи відносно будь-яких трьох точок A, B і C , що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0 \quad (A; B; C \rightarrow D). \quad (51)$$

Необхідність цих умов очевидна. Достатність умов (51) випливає з неможливості приведення системи до рівнодіючої при виконанні кожної з умов (51), бо лінія дії цієї рівнодіючої повинна була б проходити через три точки A, B і C , не розміщені на одній прямій, що неможливо. Отже, при виконанні умов (51) має місце рівновага.

У випадку плоскої системи паралельних сил, можна спрямувати вісь Oy паралельно силам системи. Тоді проєкції кожної з сил системи на вісь

Ох будуть дорівнювати нулю. У результаті для плоскої системи паралельних сил залишаються дві форми умов рівноваги.

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума проєкцій усіх сил на паралельну їм вісь та сума моментів всіх сил відносно будь-якої точки дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (52)$$

Ця перша форма аналітичних умов рівноваги для плоскої системи паралельних сил випливає з рівнянь (49).

Другу форму умов рівноваги плоскої системи паралельних сил одержимо з рівнянь (50). *Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума моментів всіх сил системи відносно двох точок, які не лежать на прямій, паралельній силам, дорівнювали нулю:*

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad (AB \nparallel \bar{F}_k). \quad (53)$$

4.3 Розподілене навантаження

В інженерних розрахунках поряд з зосередженими силами, які прикладені до твердого тіла в деякій точці, зустрічаються сили, дія яких розподілена певною ділянкою об'єму тіла, його поверхні або лінії.

Оскільки всі аксіоми і теореми статички формулюються для зосередження сил, то необхідно розглянути способи переходу від розподіленого навантаження до зосереджених сил.

Розглянемо деякі прості випадки розподіленого навантаження паралельними силами, що лежать в одній площині вздовж відрізка прямої.

Плоска система розподілених сил характеризується її інтенсивністю q , тобто величиною сили, що припадає на одиницю довжини навантаженого відрізка. Одиницею виміру інтенсивності є Ньютон, поділений на метр (Н/м). Інтенсивність може бути постійною (рівномірно розподілене навантаження) або змінюватись за лінійним та довільним законами.

Рівномірно розподілене навантаження (рис. 46, а), коли інтенсивність q є постійною величиною, при статичних розрахунках замінюється однією зосередженою силою \bar{Q} , модуль якої

$$Q = l \cdot q, \quad (54)$$

де l – довжина навантаженого відрізка.

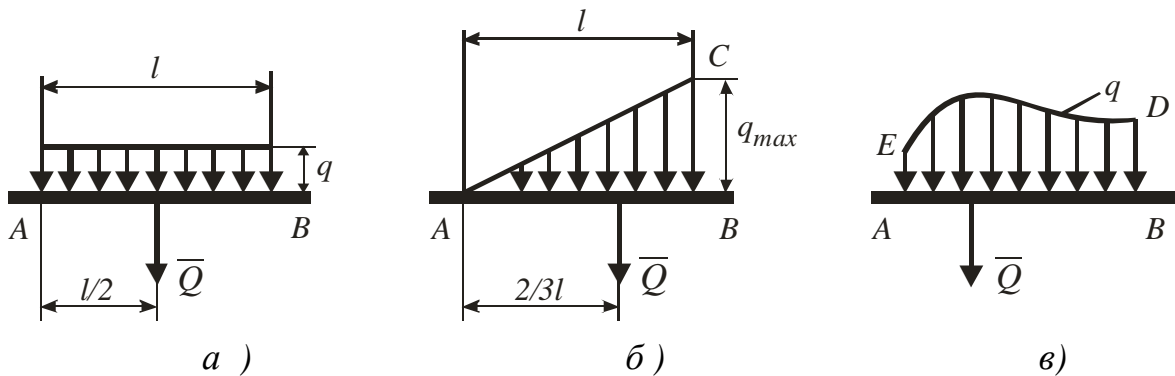


Рисунок 46

Ця рівнодіюча сила \bar{Q} , паралельна силам розподіленого навантаження, спрямована у напрямку розподілених сил і прикладена всередині навантаженого відрізка AB .

Таке навантаження має місце при розміщенні на тілі однорідної балки довжиною l з питомою вагою q .

Розподілене навантаження з інтенсивністю, що змінюється за лінійним законом (рис. 46, б), з'являється, наприклад, під дією тиску води на греблю, коли інтенсивність найбільша біля дна водоймища і є нульовою біля поверхні води. При цьому величина q інтенсивності зростає від нульового до найбільшого значення q_{max} . Рівнодіюча Q такого навантаження визначається як вага трикутної однорідної пластинки ABC , яка пропорційна її площі, тобто за модулем:

$$Q = \frac{1}{2} l q_{max}. \quad (55)$$

Лінія дії сили \bar{Q} проходить через центр трикутника ABC на відстані $\frac{2}{3}l$ від його вершини A .

Прикладом дії сил, розподілених вздовж відрізка прямої за довільним законом (рис. 46, в), є навантаження плоского перекриття кучугурою снігу. Рівнодіюча \bar{Q} таких сил за аналогією з силою ваги буде числено дорівнювати площі фігури $ABDE$, виміряної в відповідному масштабі, а лінія дії цієї рівнодіючої проходить через центр площі цієї фігури.

4.4 Розв'язання задач рівноваги тіла під дією плоскої системи сил

Приклад 7

Однорідна балка AB (рис. 47, а) вагою $G=1$ кН, до якої в точці D на відстані $AD=0,75AB$ підвішений вантаж P вагою 2 кН, закріплена в точці A за допомогою нерухомого шарніра і утримується в стані рівноваги під кутом $a=45^\circ$ до вертикалі прикріпленою в точці B ниткою, перекинutoю через нерухомий блок E з підвішеним на її кінці вантажем Q . Визначити опорні реакції шарніра A та вагу вантажу Q , якщо нахил нитки до вертикалі складає кут $b=30^\circ$.

Розв'язання

Розглянемо рівновагу балки AB , на яку діють активні сили \bar{G}, \bar{P} та сила \bar{Q} , прикладена в точці B і направлена вздовж нитки (див. рис. 47, б).

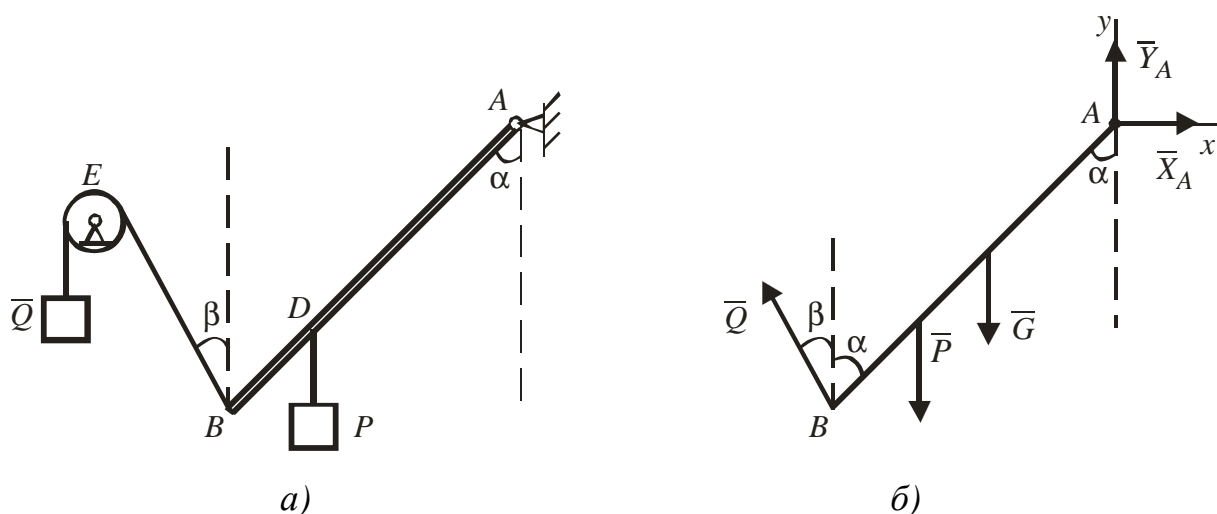


Рисунок 47

Дію нерухомого шарніра замінимо двома складовими \bar{X}_A, \bar{Y}_A реакції і для зрівноваженої довільної плоскої системи сил $(\bar{G}, \bar{P}, \bar{Q}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A) \sim 0$ складемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0; X_A - Q \sin b = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A - G - P + Q \cos b = 0;$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; G \cdot 0,5AB \cdot \sin \alpha + P \cdot 0,75 \cdot AB \cdot \sin \alpha - Q \cdot AB \cdot \sin(\alpha + \beta) = 0.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо з третього рівняння системи:

$$Q = \frac{(0,5 \cdot G + 0,75 \cdot P) \cdot AB \cdot \sin a}{AB \cdot \sin(a + b)} = \frac{(0,5 \cdot 1 + 0,75 \cdot 2) \cdot 0,707}{0,965} = 1,46 \text{ (кН)}.$$

З першого рівняння системи знайдемо:

$$X_A = Q \sin b = 1,46 \cdot 0,5 = 0,73 \text{ (кН)}.$$

З другого рівняння системи маємо:

$$Y_A = G + P - Q \cos b = 1 + 2 - 1,46 \cdot 0,866 = 1,73 \text{ (кН)}.$$

Приклад 8

Визначити реакції жорстко закріпленої Т-подібної балки, зображеної на рис.48,а, яка знаходиться в стані рівноваги під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивності $q = 5 \text{ кН/м}$, зосередженої сили $F = 10 \text{ кН}$, нахиленої під кутом $a = 60^\circ$ до вертикалі, і пари сил з моментом $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

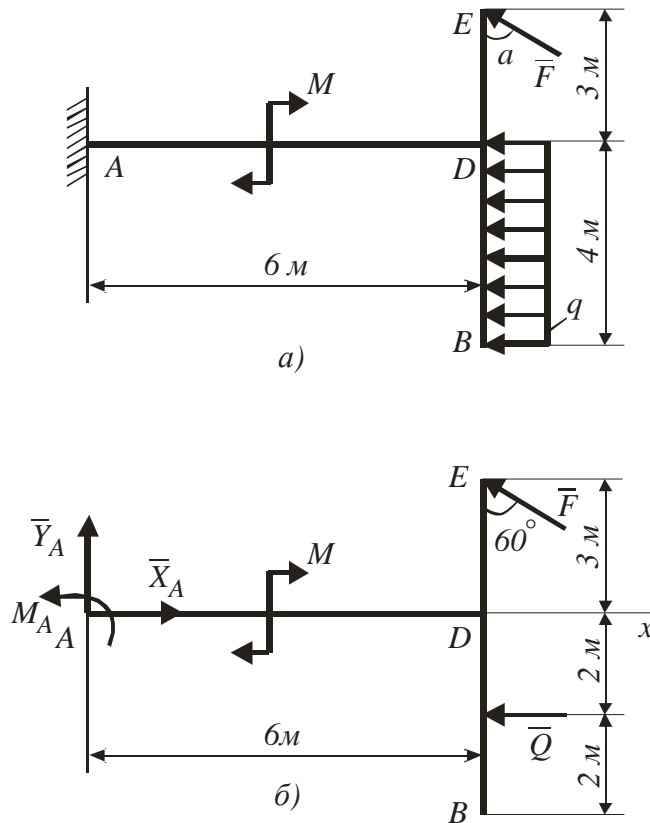


Рисунок 48

Розв'язання

Розглянемо рівновагу консольної Т-подібної балки $ADBE$. Рівномірно розподілене навантаження замінимо зосередженою силою \bar{Q} , яку прикладемо посередині ділянки BD , спрямувавши її паралельно силам розподіленого навантаження в тому ж напрямку. Обчислимо, що $Q = q \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ кН}$. Дію жорсткого кріплення на балку замінимо двома силами \bar{X}_A, \bar{Y}_A та парою сил з моментом M_A (рис. 48, б). Складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил, діючих на балку:

$$\sum F_{kx} = X_A - Q - F \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + F \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = M_A - M - Q \cdot 2 + F \sin 60^\circ \cdot 3 + F \cos 60^\circ \cdot 6 = 0.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо:

$$X_A = Q + F \sin 60^\circ = 20 + 10 \cdot 0,866 = 28,66 \text{ кН};$$

$$Y_A = -F \cos 60^\circ = -10 \cdot 0,5 = -5 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} M_A &= M + 2Q - F(\sin 60^\circ \cdot 3 + \cos 60^\circ \cdot 6) = 8 + 2 \cdot 20 - 10(0,866 \cdot 3 + 0,5 \cdot 6) = \\ &= -7,98 \text{ (кН} \cdot \text{м)}. \end{aligned}$$

4.5 Рівновага системи тіл

Для будь-якої плоскої системи сил існує тільки три незалежних рівняння рівноваги, із яких можна визначити не більше трьох невідомих величин.

Задачі, в яких кількість невідомих величин не перевищує кількості рівнянь рівноваги для даної системи сил, є статично визначеними. При розрахунку інженерних конструкцій зустрічаються і статично невизначені задачі, в яких кількість невідомих перевищує кількість рівнянь рівноваги діючої на конструкцію системи сил. Такі конструкції називають статично невизначуваними. Наприклад, статично невизначуваними будуть закріплені на нерухомих шарнірах балка АВ (рис. 49,а) і Г-подібна рама, закріплена жорстким кріпленням в точці А та рухомих шарніром в точці В (рис. 49,б). Для розв'язання задач з визначення реакцій в'язей цих конструкцій необхідно або враховувати їх деформацію, що не узгоджується з принципом затвердіння, або зробити задачі статично визначеними, замінивши для балки один з нерухомих шарнірів опорою на котках, та звільнивши Г-подібну раму від опори в точці В.

Статично невизначеними на перший погляд представляються задачі рівноваги складеної конструкції (системи тіл), в яких декілька тіл з'єднані між собою внутрішніми в'язями; зовнішніми будуть в'язі, які утримують від переміщення всю складену конструкцію.

Сили, що діють на складену конструкцію (систему тіл), також розділяють на зовнішні та внутрішні. Зовнішні – це сили (активні та реакції в'язей), з якими тіла, які не належать до конструкції, діють на дану систему тіл. До внутрішніх сил (внутрішніх реакцій) відносяться сили взаємодії між тілами даної конструкції.

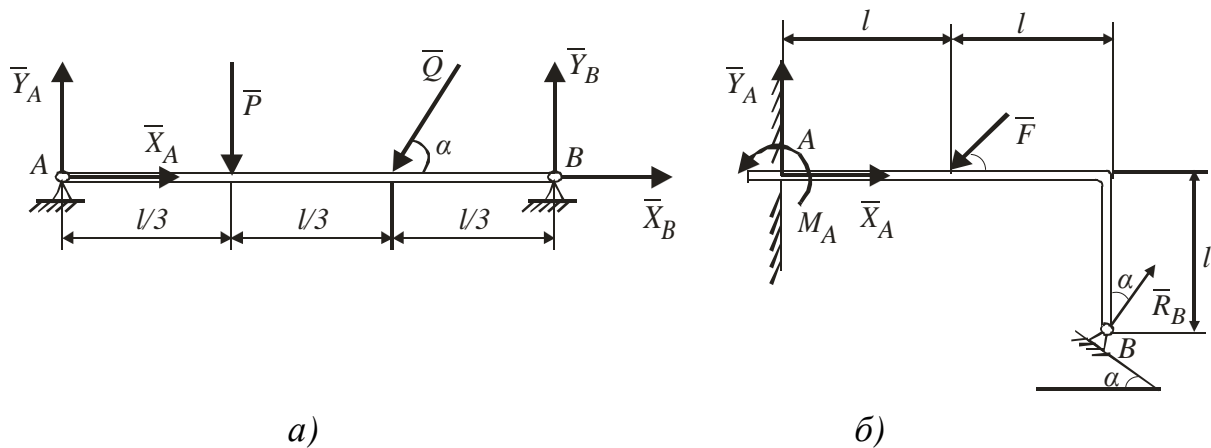


Рисунок 49

Для усунення статичної невизначеності при розв'язанні задач рівноваги системи тіл треба збільшити кількість незалежних рівнянь рівноваги до кількості невідомих. Це досягається такими двома способами.

За одним із них розглядається окремо рівновага кожного з тіл системи під дією прикладених до нього активних сил і реакцій в'язей з боку зовнішніх опор та з боку відокремлених тіл. При цьому реакції внутрішніх в'язей, як сили взаємодії між тілами, прикладають до кожного з тіл системи в точках з'єднання тіл, направляють їх в протилежних напрямках, враховуючи їх чисельну рівність між собою.

Інший спосіб передбачає складання рівнянь рівноваги всієї складеної конструкції замість рівнянь рівноваги одного з тіл системи. При цьому складену конструкцію вважають абсолютно твердим тілом, на яке діють зовнішні активні сили і реакції зовнішніх в'язей. Внутрішні реакції в рівняннях рівноваги всієї системи тіл не враховуються, так як вони становлять зрівноважену систему сил.

Застосовуючи ці способи, треба в першу чергу складати рівняння рівноваги тих тіл, для яких задача розрахунку невідомих є статично визначеною. Це полегшить розв'язання системи $3n$ алгебраїчних рівнянь рівноваги (тут n - кількість тіл системи).

Розглянемо приклади розв'язання задач рівноваги системи тіл з застосуванням вказаних способів.

Приклад 9

Знайти реакції опор і тиск в проміжному шарнірі C заданої на рис. 50 конструкції, яка складається з невагомих кутника AC і стрижня CB . На конструкцію діють пара сил з моментом $M = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$, розподілене нава-

нтаження з інтенсивністю $q = 10 \text{ кН/м}$, сили $F = 20 \text{ кН}$ та $P = 30 \text{ кН}$. Відомі розміри $a = 4 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$, $c = 1 \text{ м}$, $d = 3 \text{ м}$.

Розв'язання

При розгляданні рівноваги всієї конструкції, як абсолютно твердого тіла, три рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил, що діють на систему тіл, будуть містити чотири невідомі реакції: $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B, M_A$ (див. рис. 50, а).

Для усунення статичної невизначеності розділимо систему в точці з'єднання C і розглянемо рівновагу кожної частини конструкції окремо.

Спочатку розглянемо в стані рівноваги стрижень BC , так як на нього крім відомої активної сили \bar{P} , діє три невідомі реакції \bar{X}_C, \bar{Y}_C шарніра C та \bar{R}_B гладенької поверхні в точці B (див. рис. 50, б), тобто задача рівноваги стрижня є статично визначеною.

Складемо три рівняння рівноваги діючої на стрижень довільної плоскої системи сил, скористувавшись основною формою умов рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_C + P \cos 30^\circ - R_B = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_C + P \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_c(\bar{F}_k) = 0; \quad R_B(b + d) \sin 30^\circ - P \sin 60^\circ \cdot b = 0.$$

Складаючи останнє рівняння, при знаходженні $M_c(\bar{P})$ скористуємося теоремою Варіньона про момент рівнодіючої, розклавши силу \bar{P} на складові, одна з яких $P'' = P \cos 60^\circ$ паралельна стрижню, тобто лінія її дії проходить через точку C і її момент $M_c(\bar{P}'') = 0$, а інша $P' = P \sin 60^\circ$ перпендикулярна до стрижня і має плече відносно точки, що дорівнює відстані b ; її момент $M_c(\bar{P}') = M_c(\bar{P}) = P \sin 60^\circ \cdot b$.

Розглянемо тепер рівновагу кутника (рис. 50, в), до якого крім активних сил прикладемо реакції $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, M_A$ жорсткого защемлення в точці A , та реакції \bar{X}'_C, \bar{Y}'_C шарніра C , направивши останні протилежно реакціям \bar{X}_C, \bar{Y}_C балки BC . Дію розподіленого навантаження замінимо зосередженою силою \bar{Q} ($Q = q \cdot b = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН}$), приклавши її посередині ділянки

дії навантаження. Для плоскої системи, що діє на кутник, складемо також три рівняння рівноваги:

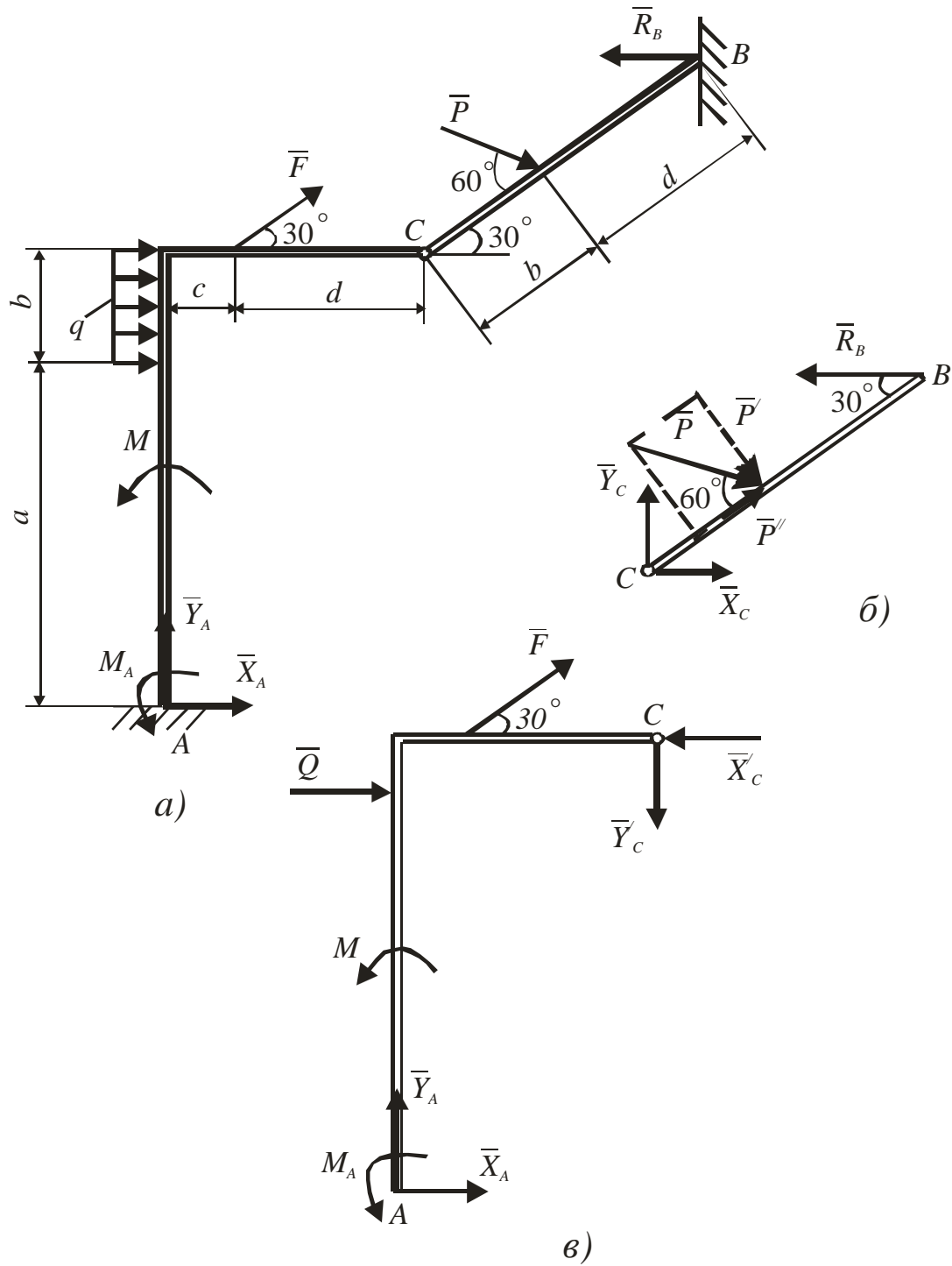


Рисунок 50

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + Q + F \cos 30^\circ - X'_C = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A + F \sin 30^\circ - Y'_C = 0;$$

$$\sum M_A(F_k) = 0;$$

$$M_A + M - Q\left(a + \frac{b}{2}\right) - F \cos 30^0 (a + b) + F \sin 30^0 \cdot c + X_C (a + b) - Y'_C (c + d) = 0.$$

Враховуючи, що $X_C = X'_C$ та $Y_C = Y'_C$, як сили взаємодії, встановимо, що системи шести складених рівнянь містять шість невідомих реакцій, тобто задача статично визначена.

Розв'язуючи систему цих рівнянь, знайдемо з третього рівняння:

$$R_B = \frac{P \sin 60^0 \cdot b}{(b + d) \sin 30^0} = \frac{30 \cdot 0,866 \cdot 2}{(2 + 3) \cdot 0,5} = 20,8 \text{ (кН)}.$$

Тепер з першого та другого рівняння маємо:

$$X_C = R_B - P \cos 30^0 = 20,8 - 30 \cdot 0,866 = -5,2 \text{ кН};$$

$$Y_C = P \sin 30^0 = 30 \cdot 0,5 = 15 \text{ (кН)}.$$

Розв'язуємо рівняння системи рівноваги кутника, підставляючи туди замість X'_C, Y'_C значення X_C та Y_C з одержаними знаками:

$$X_A = X_C - Q - F \cos 30^0 = -5,2 - 20 - 20 \cdot 0,866 = -42,5 \text{ кН};$$

$$Y_A = Y_C - F \sin 30^0 = 15 - 20 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} M_A &= -M + Q\left(a + \frac{b}{2}\right) + F \cos 30^0 (a + b) - F \sin 30^0 \cdot c - X_C (a + b) + \\ &+ Y_C (c + d) = -50 + 20(4 + 1) + 20 \cdot 0,866(4 + 2) - 20 \cdot 0,5 \cdot 1 - \\ &- (-5,2)(4 + 2) + 15(1 + 3) = 235,1 \text{ (кН} \cdot \text{м)}. \end{aligned}$$

Відповідно до знаків реакцій встановлюємо, що реакції \bar{X}_A та \bar{X}_C направлені протилежно зображеним на розрахункових схемах напрямкам.

З метою перевірки правильності рішення складемо і розв'яжемо одне з рівнянь рівноваги системи сил, діючих на всю конструкцію:

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad M + M_A + X_A(a+b) + Q \cdot \frac{b}{2} - Y_A(c+d) - \\ - F \sin 30^\circ \cdot d + P \sin 60^\circ \cdot b - P \cos 60^\circ \cdot b + R_B(b+d) \sin 30^\circ = 0;$$

$$50 + 235,1 + (-42,5)(4+2) - 5(1+3) + 20 \cdot 0,5 \cdot 2 - 20 \cdot 0,5 \cdot 3 - 30 \cdot 0,866 \cdot 2 + \\ + 20,8(2+3) \cdot 0,5 = 50 + 235,1 - 255 - 20 + 20 - 30 - 51,96 + 52 = \\ = 347,1 - 346,96 = 0,14 \approx 0.$$

Отже, розрахунки виконані правильно.

Приклад 10

На гладенькій горизонтальній поверхні стоїть пересувна драбина, яка складається з двох частин AB та BC , довжиною 3м та вагою $P = 120$ Н кожна, з'єднаних шарніром C і вірьовкою EF так, що відстань $BF = AE = 1$ м. Центр ваги кожної з частин AC , BC знаходиться в її середині. У точці D на відстані $CD = 0,6$ м стоїть людина вагою 720 Н. Визначити реакції підлоги і шарніра та натяг T вірьовки EF , якщо кут $BAC = ABC = 45^\circ$.

Розв'язання

Розглядаючи драбину як одне тверде тіло (рис. 51,а), встановимо, що ця конструкція знаходиться в стані рівноваги під дією активних сил \bar{P} ваги кожної з частин драбини і \bar{Q} ваги людини, та реакцій \bar{R}_A, \bar{R}_B гладенької поверхні підлоги.

Ці сили складають плоску систему паралельних сил, для якої умови рівноваги містять два рівняння. Так, як до цієї системи сил входять дві невідомі реакції \bar{R}_A, \bar{R}_B , то задача рівноваги драбини є статично визначеною. Складемо рівняння рівноваги цих сил:

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0;$$

$$R_B(3+3)\cos 45^\circ - P \cdot 1,5\cos 45^\circ - Q \cdot 3,6\cos 45^\circ - P \cdot 4,5\cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-R_A(3 + 3)\cos 45^0 + P \cdot 4,5\cos 45^0 + Q \cdot 2,4 \cdot \cos 45^0 + P \cdot 1,5\cos 45^0 = 0.$$

Із цих рівнянь знаходимо:

$$R_B = \frac{P(1,5 + 4,5) + Q \cdot 3,6}{6} = \frac{120 \cdot 6 + 720 \cdot 3,6}{6} = 552 \text{ H};$$

$$R_A = \frac{P(4,5 + 1,5) + Q \cdot 2,4}{6} = \frac{120 \cdot 6 + 720 \cdot 2,4}{6} = 408 \text{ H}.$$

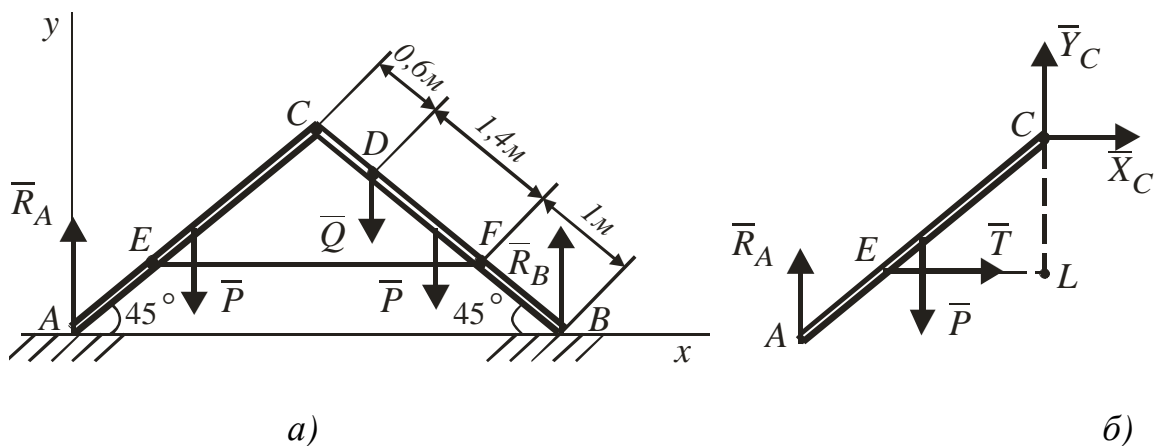


Рисунок 51

Тепер розглянемо рівновагу частини AC драбини (рис. 51,б), на яку окрім активної сили \bar{P} ваги діють реакції \bar{R}_A гладенької поверхні, \bar{T} вірьовки, \bar{X}_C, \bar{Y}_C шарніра. Для довільної плоскої системи сил складемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_C - P + R_A = 0;$$

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad P \cdot 1,5\cos 45^0 + T \cdot 2 \cdot \sin 45^0 - R_A \cdot 3\cos 45^0 = 0;$$

$$\sum M_L(\bar{F}_k) = 0; \quad P \cdot 1,5\cos 45^0 - R_A \cdot 3 \cdot \cos 45^0 - X_C \cdot 2 \cdot \sin 45^0 = 0.$$

Тут застосована друга форма рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил, що забезпечує спрощення їх розв'язання, так як до кожного з рівнянь входить лише одна невідома величина.

Визначимо невідомі реакції, враховуючи, що $\sin 45^0 = \cos 45^0 = 0,707$.

$$Y_C = P - R_A = 120 - 408 = -288 \text{ H};$$

$$T = \frac{3 \cdot R_A \cos 45^\circ - 1,5P \cos 45^\circ}{2 \sin 45^\circ} = \frac{3 \cdot 408 - 1,5 \cdot 120}{2} = 522 \text{ H};$$

$$X_C = \frac{3 \cdot R_A \cos 45^\circ - 1,5P \cos 45^\circ}{2 \sin 45^\circ} = \frac{3 \cdot 408 - 1,5 \cdot 120}{2} = 522 \text{ H}.$$

Виконаємо перевірку, переконавшись, що виконується рівняння рівноваги для сил, прикладених до всієї конструкції:

$$\begin{aligned} \sum M_D(\vec{F}_k) = 0; & \quad R_B \cdot 2,4 \cdot \cos 45^\circ - P \cdot (1,5 - 0,6) \cos 45^\circ + \\ & \quad + P \cdot (1,5 + 0,6) \cos 45^\circ - R_A(3 + 0,6) \cos 45^\circ = 0. \end{aligned}$$

Звідси, з врахуванням того, що $\cos 45^\circ \neq 0$, обчислюємо:

$$\begin{aligned} R_B \cdot 2,4 - P \cdot 0,9 + P \cdot 2,1 - R_A \cdot 3,6 &= 552 \cdot 2,4 - 120 \cdot 0,9 + \\ + 120 \cdot 2,1 - 408 \cdot 3,6 &= 1576,8 - 1576,8 = 0. \end{aligned}$$

Отже, розрахунки виконані правильно.

Питання для самоконтролю

- 1 Як обчислюються головний вектор та головний момент плоскої системи сил? Запишіть формули.
- 2 За яких умов плоска система сил приводиться до рівнодіючої?
- 3 За яких умов плоска система сил приводиться до пари сил?
- 4 Скільки існує форм умов рівноваги довільної плоскої системи сил? Запишіть кожну з них.
- 5 Запишіть рівняння рівноваги плоскої системи паралельних сил.
- 6 Чому дорівнює рівнодіюча рівномірно розподіленого навантаження? Як вона направлена і де прикладається?
- 7 Чому дорівнює рівнодіюча розподіленого навантаження з інтенсивністю, що змінюється за лінійним законом? Де вона прикладається?

5 ТЕРТЯ

У результаті механічної взаємодії між шорсткими поверхнями тіл в місцях їх стикання виникає сила тертя, яка перешкоджає відносному ковзанню тіл. Розрізняють тертя спокою (статичне тертя) між взаємно нерухомими тілами і тертя руху (кінематичне тертя), яке відбувається при відносному русі тіл.

Тертя між тілами, поверхні яких не змащені, називають сухим тертям, а тертя при значному змащенні поверхонь – рідинним тертям. У теоретичній механіці розглядають тільки сухе тертя.

Розгляд всіх особливостей тертя є досить складною фізико-механічною проблемою. Точне визначення сил тертя проводять за достатньо складними формулами, де враховуються не тільки механічні, а і електричні, термічні, внутрішньомолекулярні та інші характеристики. В інженерних розрахунках користуються установленими дослідним шляхом закономірностями, які з достатньою для практики точністю відображають основні особливості явища тертя.

5.1 Закони тертя ковзання

Наближені закони для сухого тертя ковзання були встановлені ще у XVIII ст. французьким фізиком Ш.Кулоном (1736-1806).

Основні особливості сил тертя можна установити за допомогою приладу, схема якого зображена на рис. 52.

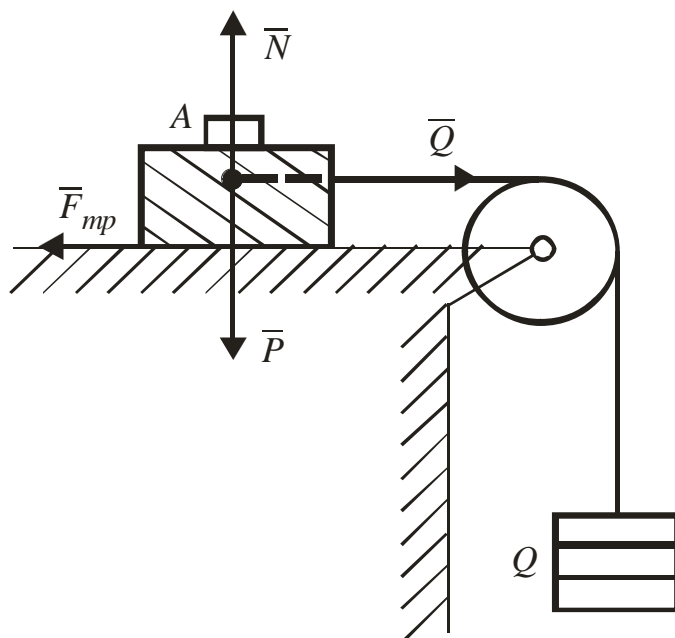


Рисунок 52

При рівновазі тіла A , розміщеного на шорсткій поверхні, рушійна сила \bar{Q} врівноважується силою тертя \bar{F}_{mp} , поява якої обумовлена шорсткістю поверхні і наявністю зчеплення з поверхнею тіла, притиснутого силою ваги \bar{P} до поверхні. Поступово нарощуючи вагу вантажу Q і таким чином збільшуючи силу \bar{Q} при одному і тому ж нормальному тиску \bar{P} , можливо досягти того навантаження Q_{max} , при якому тіло A зрушиться з місця. Очевидно, буде досягнуто граничне положення, при якому сила тертя стане найбільшою ($F_{mp} = F_{max}$) і не зможе зрівноважувати силу \bar{Q} при її подальшому збільшенні. Змінюючи нормальний тиск \bar{P} шляхом навантаження тіла A допоміжними гирьками можна дослідити, як змінюється при цьому гранична сила тертя F_{max} .

Ці та інші досліди дозволяють підтвердити такі закони Кулона для сухого тертя ковзання:

1) При намірі зрушити одне тіло по поверхні іншого в площині стикання тіл виникає сила тертя, спрямована протилежно напрямку зрушення тіла, яка набуває будь-якого значення від нуля до максимальної сили тертя, при досягненні якої починається рух тіла, тобто:

$$0 \leq F_{mp} \leq F_{max} . \quad (56)$$

2) Максимальна сила тертя ковзання пропорційна силі нормального тиску (нормальній реакції \bar{N}), тобто

$$F_{\max} = f \cdot N, \quad (57)$$

де f – статичний коефіцієнт тертя ковзання.

3) Величина максимальної сили тертя в досить широких межах не залежить від розмірів стичних поверхонь.

4) Коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалів і фізичного стану стичних поверхонь, тобто від чистоти обробки поверхонь, вологості, температури та інших умов.

Коефіцієнт тертя визначається дослідним шляхом, його значення для різних матеріалів наводиться у довідниках. Для ряду матеріалів величина статичного коефіцієнта сухого тертя має такі значення: для сталі по сталі – 0,15; для сталі по чавуну – 0,3; для дерева по дереву – 0,4 ... 0,6; для цегли по бетону – 0,76.

Закони тертя з достатньою точністю справедливі і для тертя руху. При русі сила тертя протилежна напрямку руху і визначається співвідношенням

$$F_{mp} = f' \cdot N, \quad (58)$$

де f' – коефіцієнт тертя руху, або динамічний коефіцієнт тертя ковзання, при чому $f' < f$.

Динамічний коефіцієнт тертя ковзання f' залежить не тільки від матеріалу і стану поверхні, але в деякій мірі і від швидкості ковзання. Для більшості матеріалів він зменшується при збільшенні відносної швидкості, а для деяких матеріалів (шкіра по металу) – збільшується.

У наближених технічних розрахунках вважають, що динамічний коефіцієнт тертя ковзання не залежить від відносної швидкості і приблизно дорівнює статичному коефіцієнту тертя ковзання.

5.2 Реакція шорсткої поверхні. Кут і конус тертя

Як уже відзначалось раніше (див. розділ 1.3), реакція \bar{R} шорсткої поверхні складається із двох складових: нормальної реакції \bar{N} та перпендикулярної до неї сили тертя \bar{F}_{mp} (рис. 53).

Повна реакція шорсткої поверхні $\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_{mp}$ буде відхиленою від нормалі на деякий кут ψ . При зміні сили тертя від нуля до \bar{F}_{max} повна реакція шорсткої поверхні змінюється від \bar{N} до \bar{R}_{max} , а кут її нахилу до нормалі зростає від 0 до деякого значення j . У граничному стані рівноваги (рис. 54) повна реакція шорсткої поверхні \bar{R}_{max} відхилена від нормалі на найбільший кут j , який називають кутом тертя.

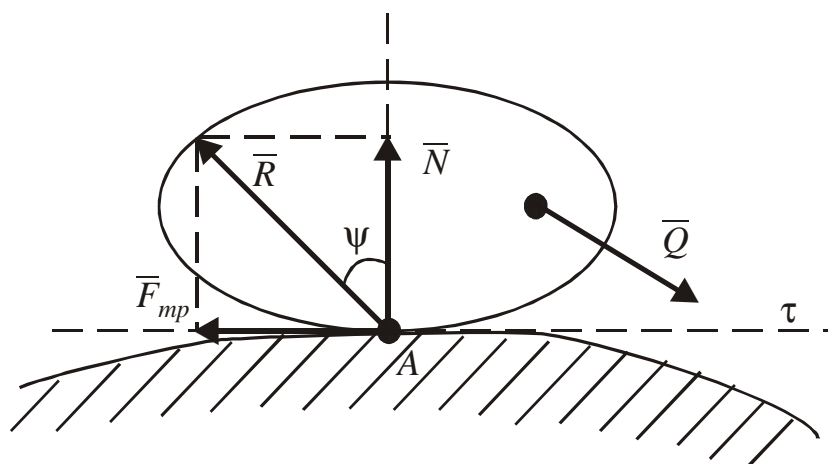


Рисунок 53

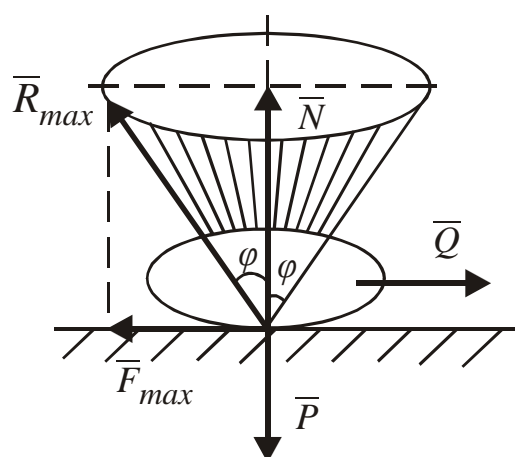


Рисунок 54

Отже найбільший кут j між повною реакцією шорсткої поверхні, побудованою на граничній силі тертя при даній нормальній реакції, і напрямком нормальної реакції називають кутом тертя.

Як впливає з рис. 54, $\operatorname{tg} j = \frac{F_{\max}}{N}$. Але, відповідно до закону Кулона, маємо $F_{\max} = f \cdot N$, тому

$$\operatorname{tg} j = f . \quad (59)$$

Отже тангенс кута тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання.

Конусом тертя називається конічна поверхня з кутом $2j$ при вершині, яку описує при повороті навколо напрямку нормалі повна реакція шорсткої поверхні, побудована на максимальній силі тертя (див. рис. 54).

Поняття кута тертя, конуса тертя дозволяє дати геометричну інтерпретацію стану рівноваги тіла на шорсткій поверхні.

Нехай рівнодіюча \bar{Q} активних сил, прикладених до тіла, розміщеного на шорсткій поверхні (рис. 55), нахилена під кутом a до спільної нормалі стичних поверхонь. Розкладемо цю рівнодіючу на складові $\bar{Q} = \bar{Q}_n + \bar{Q}_t$, так, що $Q_n = Q \cos a$, а $Q_t = Q \sin a$.

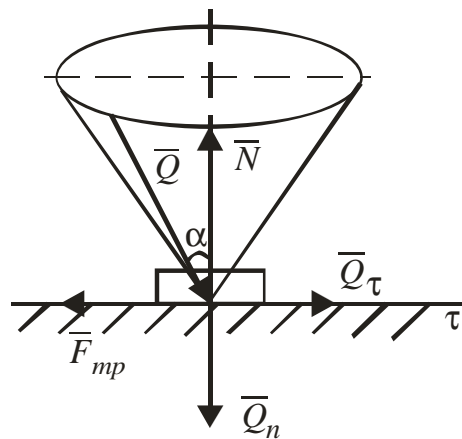


Рисунок 55

Нормальна складова \bar{Q}_n притискує тіло до поверхні в'язі і врівноважується нормальною реакцією \bar{N} , а дотична складова \bar{Q}_t намагається зрушити тіло по поверхні.

Тіло на шорсткій поверхні буде знаходитись в стані рівноваги до тих пір, поки дотична складова $Q_t = Q \sin a$ не буде перевищувати максималь-

но можливу силу тертя $F_{\max} = f \cdot N = f \cdot Q \cos \alpha$, тобто за умов $Q \sin \alpha \leq f \cdot Q \cos \alpha$.

Розділяючи обидві частини нерівності на $Q \cos \alpha$ з врахуванням виразу (59), одержимо таку необхідну умову рівноваги тіла на шорсткій поверхні:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} j, \text{ або } \alpha \leq j.$$

До цієї умови не входить значення сили Q , тому слід зробити такий висновок (див. рис. 55): *тіло на шорсткій поверхні не можна вивести із стану рівноваги ніякою силою, якщо її лінія дії проходить всередині кута (конуса) тертя.*

Цим пояснюються відомі явища самогальмування або заклинювання рухомих деталей машин у деяких положеннях. Виходячи з цієї умови, назначають крок різьби гвинта (гайки) різьбових з'єднань та різьбових передач.

5.3 Тертя кочення

У задачах механіки іноді необхідно враховувати тертя кочення – опір, який виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого.

Розглянемо циліндричний коток радіуса r вагою \bar{P} , який спирається на горизонтальну площину і знаходиться під дією горизонтальної сили \bar{Q} (рис. 56).

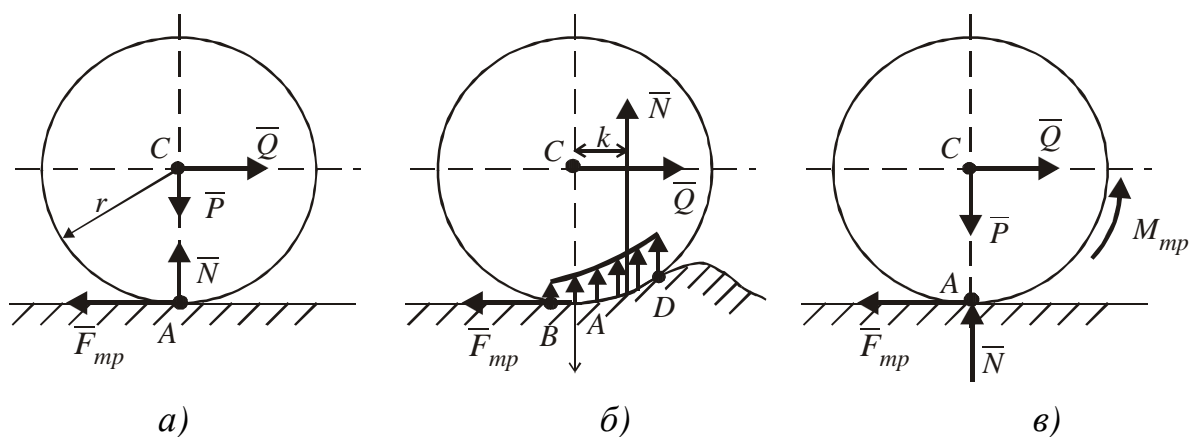


Рисунок 56

Якщо $Q < F_{\max}$, то в точці A контакту тіла з поверхнею виникає сила тертя $F_{mp} = Q$, яка перешкоджає ковзанню котка поверхнею.

При схемі навантаження котка, виконаній відповідно до положення теоретичної механіки про абсолютно тверде тіло (рис. 56, а), нормальна реакція \bar{N} , прикладена в точці A контакту, зрівноважена силою \bar{P} ваги котка, а сили F_{mp} і Q створюють пару сил, яка спричиняє кочення. При такій розрахунковій схемі коток почне рухатися при будь-якому малому значенні сили \bar{Q} , що не відповідає дійсності.

Істинне уявлення про тертя кочення дає розрахункова схема з врахуванням деформації опорної поверхні і котка (рис. 56, б), коли дотик котка до нерухомої площини відбувається не в точці A , а вздовж дуги BD , яка визначає поверхню контакту. При цьому нормальна реакція \bar{N} , як результуюча розподілених на ділянці AB сил нормальних реакцій, буде зміщеною від центра в напрямку дії сили \bar{Q} на деяку відстань, яка збільшується зі збільшенням величини рушійної сили \bar{Q} . При цьому пара сил (\bar{Q}, \bar{F}_{mp}) врівноважується парою (\bar{P}, \bar{N}) , момент якої називають моментом тертя кочення M_{mp} .

У граничному стані рівноваги, коли нормальна реакція зміщується на найбільшу відстань k (див. рис. 56, б), момент тертя досягає максимальної величини M_{\max} , і коток починає котитись поверхнею.

Це найбільше зміщення k нормальної реакції від центра котка в напрямку дії рушійної сили, при якому коток починає кочення, **називається коефіцієнтом тертя кочення**. Він має розмірність одиниці довжини і його виражають у міліметрах. Для випадку кочення вагонного колеса сталлю рейкою $k = 0,5 \text{ мм}$.

Для уявлення явища тертя кочення у межах статичної абсолютно твердого тіла розрахункова схема виконується без розгляду деформації та зміщення нормальної реакції (рис. 56, в), вважаючи опором коченню момент тертя M_{mp} . Це дозволяє наблизити закони тертя кочення викласти подібно законам тертя ковзання:

1) При намірі перекотити циліндричне тіло шорсткою поверхнею виникає опір коченню у вигляді моменту тертя M_{mp} , величина якого набуває значення у межах від нуля до максимального, коли починається кочен-

ня:

$$0 \leq M_{mp} \leq M_{\max}. \quad (60)$$

2) Найбільший момент M_{\max} у широких межах не залежить від радіуса котка.

3) Максимальний момент тертя кочення пропорційний силі нормального тиску

$$M_{\max} = k \cdot N. \quad (61)$$

де k – коефіцієнт тертя кочення.

4) Коефіцієнт тертя кочення залежить від матеріалу котка, площини і фізичного стану їх поверхонь.

Для аналізу явищ тертя корисно порівняти коефіцієнт f тертя ковзання зі співвідношенням $\frac{k}{r}$, через яке виражається максимальна сила тертя кочення

$$F_{\max} = Q_{\max} = \frac{k}{r} \cdot N. \quad (62)$$

Для більшості матеріалів відношення $\frac{k}{r}$ значно менше статичного коефіцієнта тертя f . Цим пояснюється широке застосування в техніці явища кочення в транспортних засобах та інших конструкціях (колеса, котки, шарикопідшипники).

5.4 Розв'язання задач рівноваги тіла на шорсткій поверхні

Розв'язання задач рівноваги тіла при наявності тертя проводять у відповідності до загальної методики розв'язання задач статички (див. розділ 1.8). При цьому реакцію шорсткої поверхні представляють двома складовими: нормальною реакцією \bar{N} та силою \bar{F}_{mp} . У випадку тертя кочення до цих реакцій додають пару сил з моментом тертя M_{mp} , дія якої перешкоджає коченню.

Розглядаючи граничний стан рівноваги тіла, коли сила тертя або момент тертя досягають свого найбільшого значення, до складених рівнянь рівноваги тіла додають залежність сил тертя (57) або моменту тертя (61) від нормальної реакції.

При геометричному розв'язанні реакцію шорсткої поверхні не розкладають на дві складові, а зображають однією силою \bar{R} , направляючи її під кутом тертя j до нормалі (в граничному положенні рівноваги).

Приклад 11

Горизонтальний стрижень AB має на кінці A отвір, яким він надітий на вертикальний круглий стояк (рис. 57); довжина втулки $b = 2\text{ см}$; у точці E на відстані a від осі стояка до стрижня підвішений вантаж P .

Визначити, нехтуючи вагою стрижня AB , відстань a так, щоб під дією вантажу P стрижень знаходився в стані рівноваги, якщо коефіцієнт тертя між стрижнем і стояком $f = 0,1$.

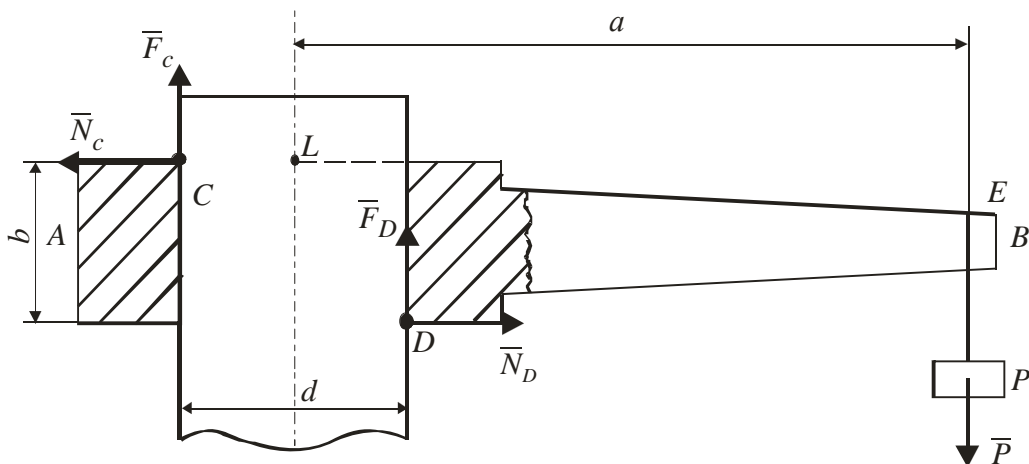


Рисунок 57

Розв'язання

Розглянемо граничне положення рівноваги стрижня AB , коли вантаж P знаходиться на відстані a від осі стояка.

У цьому положенні на стрижень діють активна сила ваги вантажу \bar{P} та реакції $\bar{N}_C, \bar{N}_D, \bar{F}_C, \bar{F}_D$ шорсткої поверхні в точках C і D контакту втулки із стояком, де \bar{F}_C, \bar{F}_D – граничні сили тертя.

Складаючи рівняння рівноваги, візьмемо за моментну точку L , розміщену на осі стояка діаметром d на рівні верхнього торця втулки:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -N_C + N_D = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad F_C + F_D - P = 0;$$

$$\sum M_L(\bar{F}_k) = 0; \quad N_D \cdot b + (F_D - F_C) \frac{d}{2} - P \cdot a = 0.$$

Додамо до цих рівнянь залежність граничних сил тертя від нормальних реакцій:

$$F_C = f \cdot N_C; \quad F_D = f \cdot N_D.$$

Із першого рівняння з врахуванням виразів для сил тертя знаходимо:

$$N_C = N_D = N \quad \text{і} \quad F_C = F_D = f \cdot N.$$

Із другого рівняння маємо: $2 \cdot f \cdot N - P = 0$, або $N = \frac{P}{2 \cdot f}$.

Тоді підставляючи ці значення в третє рівняння, одержимо:

$$N \cdot b - P \cdot a = 0, \quad \text{або} \quad P \left(\frac{b}{2 \cdot f} - a \right) = 0,$$

звідки

$$a = \frac{b}{2 \cdot f} = \frac{2}{2 \cdot 0,1} = 10 \text{ см.}$$

Приклад 12

Драбина AB вагою $P = 200 \text{ Н}$ спирається на вертикальну стіну і горизонтальну підлогу (рис. 58). Коефіцієнт тертя драбини по шорсткій поверхні стіни в точці A буде $f_1 = 0,4$, а по підлозі в точці B $f_2 = 0,5$. Під яким кутом α до підлоги треба поставити драбину, щоб нею змогла піднятися доверху людина вагою 90 Н ?

Розв'язання

Нормальні реакції стіни і підлоги в точках A і B позначимо відповідно \bar{N}_A та \bar{N}_B , а сили тертя в цих точках \bar{F}_1 і \bar{F}_2 . Тоді драбина AB буде в

рівновазі під дією шести сил: \bar{N}_A , \bar{N}_B , \bar{F}_1 , \bar{F}_2 та сили \bar{P} ваги драбини, прикладеної посередні AB і сили \bar{Q} ваги людини, прикладеної в точці A .

Складемо рівняння рівноваги цих сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad N_A - F_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_B + F_1 - P - Q = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad N_B \cdot AB \cos \alpha - P \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha - F_2 \cdot AB \sin \alpha = 0.$$

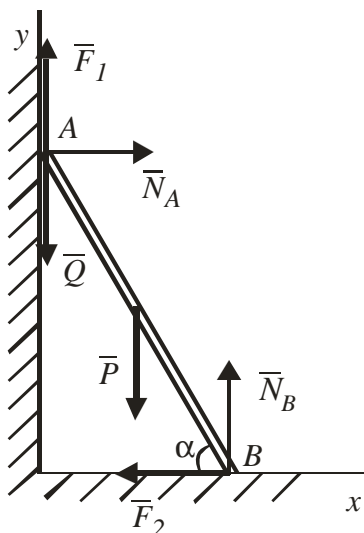


Рисунок 58

Оскільки кут α – найменший кут нахилу драбини, при якому вона знаходиться на межі спокою і ковзання, тоді

$$F_1 = f_1 \cdot N_A; \quad F_2 = f_2 \cdot N_B.$$

Підставивши F_1 і F_2 в рівняння рівноваги, одержимо:

$$N_A - f_2 \cdot N_B = 0,$$

$$N_B + f_1 \cdot N_A - P - Q = 0,$$

$$(N_B \cos \alpha - 0,5 P \cos \alpha - f_2 N_B \cdot \sin \alpha) AB = 0.$$

З перших двох рівнянь одержимо $N_A = f_2 \cdot N_B$, звідки

$$N_B (1 + f_1 f_2) = (P + Q), \text{ або } N_B = \frac{P + Q}{1 + f_1 f_2}.$$

Підставимо знайдене значення N_B у третє рівняння і поділимо його на $\cos \alpha$. Тоді матимемо:

$$\frac{P + Q}{1 + f_1 f_2} - 0,5 P = \frac{f_2}{1 + f_1 f_2} (P + Q) \operatorname{tg} \alpha, \text{ звідки}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{f_2} \left[1 - \frac{0,5 P (1 + f_1 f_2)}{P + Q} \right] = \frac{1}{0,5} \left[1 - \frac{0,5 \cdot 200 (1 + 0,4 \cdot 0,5)}{200 + 690} \right] = 1,73,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1,73 = 60^\circ.$$

Приклад 13

Скільки сипучого матеріалу (руди) можна насипати на круглу площинку діаметром $d = 20\text{м}$, якщо питома вага матеріалу складає $g = 50 \text{кН/м}^3$, а коефіцієнт тертя між частинками становить $f = 0,7$.

Розв'язання

Сипучий матеріал на горизонтальній площині набуває форми конуса. Розглянемо рівновагу деякої частини M (рис. 59, а) матеріалу, що лежить на поверхні конуса, знаходячись під дією сили ваги \bar{G} , нормальної реакції \bar{N} та сили тертя \bar{F}_{mp} . Трикутник зрівноваження сил, які діють на частинку матеріалу (рис. 59, б), повинен бути замкнутим, тому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{mp}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f.$$

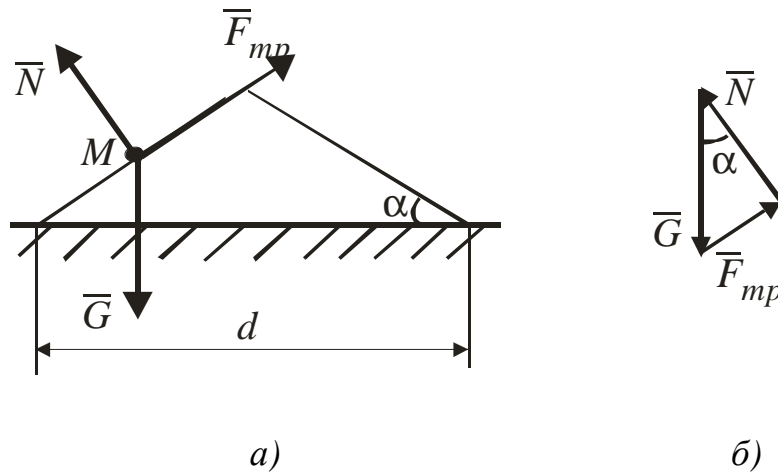


Рисунок 59

Тоді об'єм конуса, створеного сипучим матеріалом,

$$V = \frac{1}{12} \pi d^2 h = \frac{1}{12} \pi d^2 \cdot \frac{d}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{24} \pi d^3 f,$$

а вага сипучого матеріалу

$$P = g \cdot V = \frac{1}{24} p g d^3 f = \frac{1}{24} p \cdot 50 \cdot 20^3 \cdot 0,7 = 36633,3 \text{ кН}.$$

Приклад 14

Визначити, при яких значеннях кута α нахилу площини до горизонталі циліндр радіуса R , розміщений на похилій площині, залишиться в стані рівноваги, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f , а тертя кочення k (рис. 60).

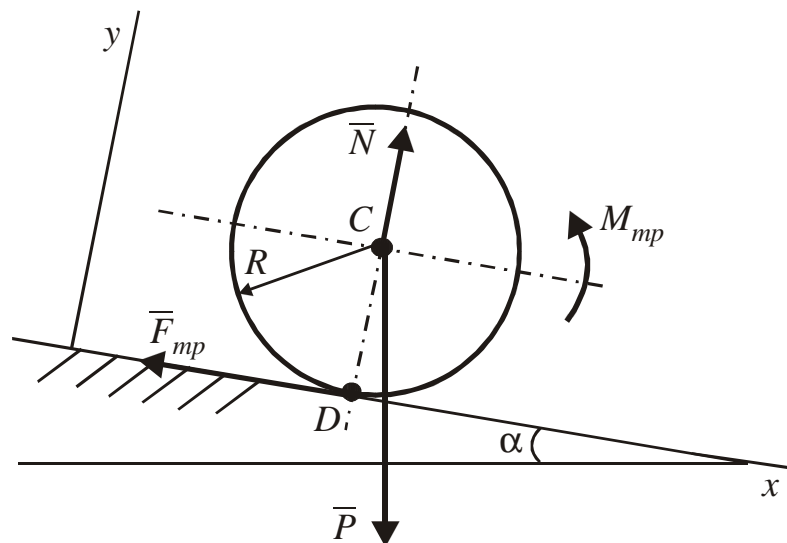


Рисунок 60

Розв'язання

Розглянемо граничне положення рівноваги котка, коли на нього діють сила ваги \bar{P} , нормальна реакція \bar{N} , сила тертя \bar{F}_{mp} і момент тертя M_{mp} . Складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; P \sin a - F_{mp} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; N - P \cos a = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_D(\bar{F}_k) &= 0; M_{mp} - P \sin a \cdot R = 0.\end{aligned}$$

Крім цього, для виключення ковзання циліндра та його кочення повинні виконуватись нерівності

$$F_{mp} \leq fN; M_{mp} \leq kN.$$

З рівнянь рівноваги визначаємо:

$$F_{mp} = P \sin a; N = P \cos a; M_{mp} = P \sin a R.$$

Підставивши ці величини в нерівності, одержимо:

$$P \sin a \leq f P \cos a; P \sin a \cdot R \leq k P \cos a, \text{ або } \operatorname{tga} \leq f, \operatorname{tga} \leq \frac{k}{R}.$$

Для збереження рівноваги циліндра ці дві нерівності повинні виконуватись одночасно.

Питання для самоконтролю

- 1 Коли з'являється сила тертя ковзання, в яких межах вона змінюється? Запишіть формулу для визначення сили тертя.

- 2 Яку розмірність має коефіцієнт тертя ковзання? Від чого он залежить?
- 3 Що таке кут тертя, конус тертя? Як вони пов'язані з коефіцієнтом тертя?
- 4 За яких умов тіло на шорсткій поверхні залишиться в стані рівноваги незалежно від величини рушійної сили? Чим пояснюється явище самогальмування гайки в різьбових з'єднаннях?
- 5 Що називають тертям кочення? Запишіть формулу для визначення моменту тертя кочення, в яких межах він змінюється?
- 6 Поясніть фізичну суть коефіцієнта тертя кочення. В яких одиницях він вимірюється?

6 ЦЕНТР ВАГИ

6.1 Центр ваги твердого тіла і його координати

Сили ваги частинок твердого тіла, розміщеного поблизу поверхні Землі, являють собою систему збіжних сил, лінії дії яких перетинаються у центрі земної кулі. Але незначні розміри матеріальних тіл у порівнянні з розмірами Землі дозволяють вважати сили ваги частинок одного тіла паралельними між собою. Ці сили завжди направлені вертикально вниз і не змінюють свого напрямку при будь-якому переміщенні тіла. Така система паралельних сил $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \mathbf{K}, \bar{p}_n$ ваги частинок тіла (рис. 61) не може знаходитись у стані рівноваги чи зводитись до пари сил; вона еквівалентна одній рівнодіючій силі \bar{P} , модуль якої дорівнює силі ваги тіла і визначається рівністю

$$P = \sum_{k=1}^n p_k. \quad (63)$$

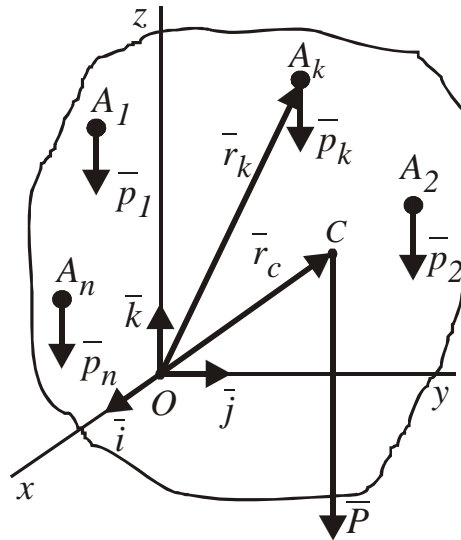


Рисунок 61

При довільному повороті тіла сили \bar{p}_k залишаються прикладеними в одних і тих же точках тіла і паралельні одна одній. Тому рівнодіюча \bar{P} сил \bar{p}_k буде при будь-яких положеннях тіла проходити через одну і ту ж його точку C , яку називають центром ваги тіла. Отже, *центром ваги твердого тіла називається незмінно зв'язана з цим тілом точка, через яку проходить лінія дії рівнодіючої сил ваги частинок цього тіла при будь-яких положенні тіла в просторі.*

Знайдемо положення центра ваги тіла відносно прямокутної системи координат (див. рис. 61), напрямком осей якої задано ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, а напрямком сил ваги – одиничним вектором $\bar{e} = -\bar{k}$.

Тоді $\bar{p}_1 = p_1\bar{e}; \bar{p}_2 = p_2\bar{e}, \dots, \bar{p}_n = p_n\bar{e}; \bar{P} = \sum_{k=1}^n p_k \cdot \bar{e}$, де p_1, p_2, \dots, p_n -

модулі сил ваги частинок тіла.

На підставі теореми Варіньона векторна сума моментів сил ваги часток тіла відносно центра O дорівнює моменту сили ваги тіла відносно цього центра, тобто

$$\bar{M}_O(\bar{P}) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{p}_k), \text{ або } \bar{r}_c \times \sum_{k=1}^n \bar{p}_k = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{p}_k),$$

де \bar{r}_k – радіус-вектор точки A_k прикладання сили \bar{p}_k ,

\bar{r}_c – радіус-вектор центра ваги тіла – точки C .

Підставляючи сюди вирази сил через одиничний вектор \bar{e} , одержимо:

$$\left(\bar{r}_c \times \sum_{k=1}^n p_k \bar{e} \right) = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times p_k \bar{e}), \text{ або } \left(\bar{r}_c \sum_{k=1}^n p_k \times \bar{e} \right) = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k p_k \times \bar{e}).$$

Переносячи члени рівняння у ліву частину і виносячи за дужки спільний співмножник \bar{e} , одержимо:

$$\left(\bar{r}_c \sum_{k=1}^n p_k - \sum_{k=1}^n \bar{r}_k p_k \right) \times \bar{e} = 0.$$

Це рівняння виконується за умови рівності нулю виразу в дужках, тобто

$$\bar{r}_c \sum_{k=1}^n p_k - \sum_{k=1}^n \bar{r}_k p_k = 0,$$

звідки визначається радіус-вектор центра ваги тіла:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n p_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n p_k}. \quad (64)$$

Проеціюючи рівність (64) на осі координат, одержимо формули для визначення координат центра ваги тіла:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k p_k}{\sum_{k=1}^n p_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k p_k}{\sum_{k=1}^n p_k}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k p_k}{\sum_{k=1}^n p_k}, \quad (65)$$

де x_k, y_k, z_k – координати точок прикладення сил ваги \bar{p}_k частинок тіла.

6.2 Координати центрів ваги однорідних тіл

Для однорідного тіла вага кожної його частинки пропорційна її об'єму v_k , а вага P всього тіла пропорційнальна об'єму V цього тіла, тоб-

то $p_k = g v_k$ і $P = gV$, де g – питома вага тіла. Підставляючи ці значення p_k і P у формули (65) і поділивши чисельник та знаменник на g , одержимо:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k v_k}{V}; y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k v_k}{V}; z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k v_k}{V}. \quad (66)$$

Як видно із формул (66), положення центра ваги однорідного тіла не залежить від фізичних властивостей тіла, а визначається тільки його геометричною формою і розмірами. Тому точка C , координати якої визначаються формулами (66), називають центром ваги об'єму.

Під поняттям центра ваги поверхні розуміють центр ваги однорідних плоских фігур, пластин однакової товщини, координати якого знаходять за аналогічними формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k s_k}{S}; y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k s_k}{S}; z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k s_k}{S}, \quad (67)$$

де s_k – площа елементарної ділянки поверхні,

S – площа всієї поверхні плоскої фігури.

Таким же чином одержують координати центра ваги лінії:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k l_k}{L}; y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k l_k}{L}; z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k l_k}{L}, \quad (68)$$

де L – довжина всієї лінії, l_k – довжина її частини.

6.3 Методи визначення координат центрів ваги тіл

При визначенні положень центрів ваги тіл складної форми застосовують такі конкретні методи.

1) *Метод симетрії.* Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги знаходиться в площині, на осі або в центрі симетрії.

2) *Метод розбивання і доповнення.* Тіло розбивають на скінчену кількість частин простої форми, центри ваги яких відомі або легко знаходяться. Якщо тіло має вирізи, пустоти, то їх вважають заповненими матеріалом з від'ємною масою. Координати центра ваги всього тіла обчислюють, застосовуючи формули (66), (67), (68), де доданки для частин вирізів, пустот враховують з від'ємним значенням.

Приклад 15

Визначити координати плоскої пластини, зображеної на рис. 62, яка має форму кутника вказаних розмірів, і в якій виконано квадратний виріз. Усі розміри вказані в сантиметрах.

Розв'язання

Проведемо осі координат. Розіб'ємо пластину на два прямокутники та один квадратний виріз. Обчислимо площі і координати центрів ваги кожної з цих фігур.

Площа більшого прямокутника $S_1 = 6 \cdot 10 = 60 \text{ см}^2$, а координати його центра ваги $x_1 = 3 \text{ см}$, $y_1 = 5 \text{ см}$.

Менший прямокутник має площу $S_2 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ см}^2$, координати центра ваги цього прямокутника $x_2 = 7 \text{ см}$, $y_2 = 2 \text{ см}$. Площа вирізаного квадрата $S_3 = -2 \cdot 2 = -4 \text{ см}^2$, координати центра ваги $x_3 = 3 \text{ см}$, $y_3 = 3 \text{ см}$.

Координати центра ваги всієї пластини знайдемо за формулами (67):

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{60 \cdot 3 + 8 \cdot 7 - 4 \cdot 3}{60 + 8 - 4} = \frac{224}{64} = 3,5 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{60 \cdot 5 + 8 \cdot 2 - 4 \cdot 3}{60 + 8 - 4} = \frac{304}{64} = 4,75 \text{ см}.$$

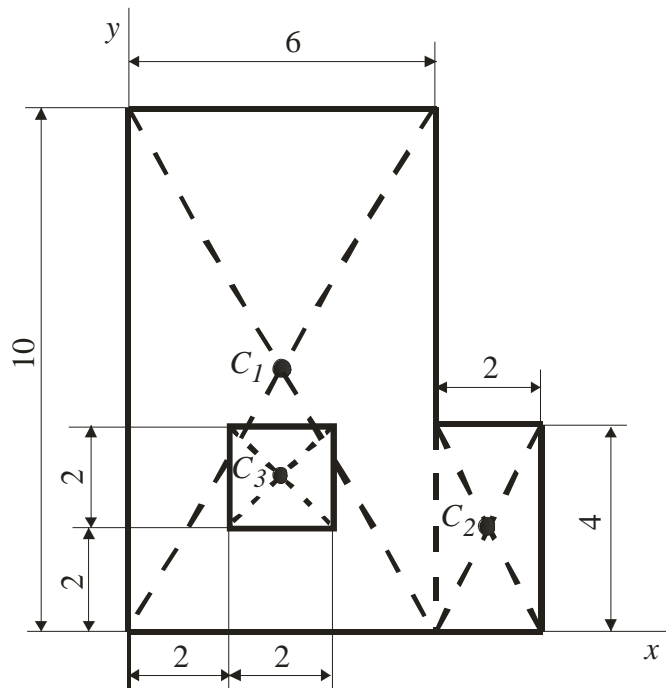


Рисунок 62

3) *Метод інтегрування.* Якщо тіло неможливо розбити на скінчену кількість частин, положення центрів ваги яких відомі, то його розбивають на будь-які малі об'єми Δv_k , для яких формули (66) набудуть вигляду:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k Dv_k}{V}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k Dv_k}{V}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k Dv_k}{V}, \quad (69)$$

де x_k, y_k, z_k – координати точки, розміщеної всередині об'єму Dv_k .
 Переходячи у формулу (69) до границі, при $n \rightarrow \infty$, коли $Dv_k \rightarrow 0$, отримаємо, що суми в чисельниках цих виразів перетворюються в інтеграли на весь об'єм тіла, тобто:

$$x_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dv, \quad y_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dv, \quad z_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dv. \quad (70)$$

Аналогічно для координат центрів ваги площин і ліній одержимо із формул (67) і (68):

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} x ds, \quad y_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} y ds, \quad z_c = \frac{1}{S} \int_{(S)} z ds. \quad (71)$$

$$x_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl, \quad z_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl. \quad (72)$$

6.4 Центри ваги деяких однорідних тіл

1) *Центр ваги дуги кола.* Визначимо положення центра ваги дуги кола радіуса R , центральний кут якої 2α (рис.63). Оскільки дуга AB має вісь симетрії Ox , то центр ваги дуги знаходиться якраз на цій осі, тобто координата $y_c = 0$. Для знаходження координати x_c скористаємось інтегральним методом, застосувавши першу з формул (72).

Розіб'ємо дугу на елементарні відрізки, один з яких MM' довжиною $dl = R \cdot d\varphi$, відхилений від осі Ox на кут φ .

Координата центра ваги цього відрізка $x = R \cos \varphi$.

Довжина дуги AB буде $L = 2R\alpha$.

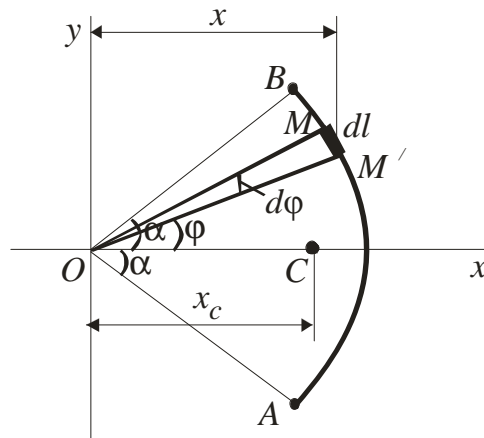


Рисунок 63

На підставі формули (72) матимемо:

$$x_c = \frac{1}{L} \int_A^B x dl = \frac{1}{2R\alpha} \int_{-a}^a R^2 \cos j dj, \text{ звідки}$$

$$x_c = R \frac{\sin a}{a}. \quad (73)$$

Координату центра ваги півкола одержимо при $a = \frac{p}{2}$:

$$x_c = \frac{2R}{p}.$$

2) *Центр ваги площі трикутника.* Розіб'ємо площу трикутника (рис. 64) лініями, паралельними стороні AD на тоненькі смужки. Центри ваги цих смужок будуть знаходитись на медіані BE трикутника. Отже центр ваги трикутника лежить на цій медіані.

Провівши аналогічне розбивання площі трикутника лініями, паралельними стороні AB , дістанемо висновку, що центр ваги площі трикутника знаходиться на перетині його медіан. Як відомо, медіани перетинаються на відстані однієї третьої від основи і двох третіх від вершини, тому $CE = \frac{1}{3}BE$ (див. рис.64).

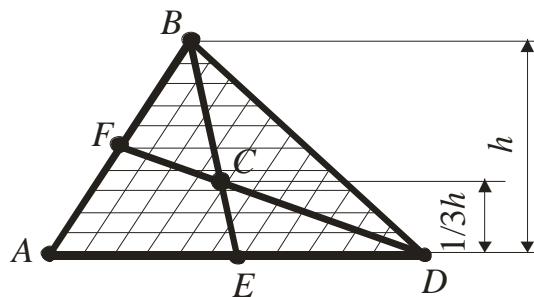


Рисунок 64

3) *Центр ваги кругового сектора.* Для визначення координат центра ваги кругового сектора OAB радіуса R з центральним кутом $2a$ (рис.65) розіб'ємо площу сектора на елементарні однакові сектори радіусами, проведеними із центра O . Внаслідок малості елементарних секторів їх можна вважати рівнобедреними трикутниками, центр ваги кожного з яких знаходиться на відстані $\frac{2}{3}R$ від вершини O . Отже центри ваги елементарних секторів лежать на дузі DE , так що $OD = \frac{2}{3}R$. Тому центр ваги сектора OAB і

центр ваги дуги DE є одна і та ж точка, координати якої, відповідно до формули (73) будуть

$$x_c = \frac{2}{3}R \frac{\sin a}{a}; \quad y_c = 0. \quad (74)$$

Коли $a = \frac{\pi}{2}$, одержимо координату центра ваги півкола:

$$x = \frac{4}{3\pi}R.$$

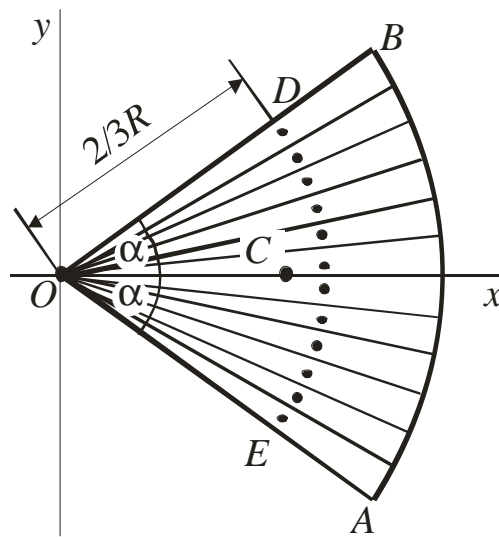


Рисунок 65

Питання для самоконтролю

- 1 Що таке центр ваги тіла? Чи змінюється положення центра ваги відносно точок тіла при переміщенні тіла в просторі?
- 2 За якими формулами визначаються радіус-вектор центра ваги, його координати? Запишіть ці формули.
- 3 Запишіть формули для визначення координат однорідного твердого тіла.
- 4 Як визначити положення центра ваги площі, коли відомі положення центра ваги окремих її частин?

- 5 Що таке метод симетрії? Де знаходиться центр ваги однорідної пластинки в формі паралелограма, трикутника?
- 6 У чому суть методу доповнення (від'ємних мас)?
- 7 Запишіть формули для визначення координати центра ваги дуги кола, площі кругового сектора.

КІНЕМАТИКА

1 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1 Вступ до кінематики. Основні поняття і визначення

Кінематикою називається розділ механіки, в якому вивчається рух матеріальних об'єктів (точок і тіл) без урахування їх інертності та діючих на них сил.

Рух завжди розглядають відносно деякої системи відліку: зв'язаної з деяким тілом (наприклад Землею) системи координат.

Рух тіл відбувається у просторі і часі. Простір в класичній механіці розглядається як тривимірний, евклідовий, він є неперервним однорідним і ізотропним. Час в механіці вважається універсальним, не пов'язаним з простором і рухом; це скалярна неперервна змінна величина, яка у всіх системах відліку набуває одного й того ж значення, якщо за початок відліку вибрана спільна для них подія.

Залежність від часу параметрів положення тіла (точки) у вибраній системі відліку визначається відповідними рівняннями, які називаються законом руху тіла (точки). Закон руху вважається відомим, якщо можна визначити положення тіла в просторі в довільний момент часу.

Однією із задач кінематики якраз і є задавання закону руху, тобто встановлення математичного рівняння, яке дозволяє визначити положення точки або тіла відносно вибраної системи відліку в будь-який момент часу.

Інша, основна задача кінематики полягає у визначенні за заданим законом руху кінематичних характеристик цього руху: траєкторії, швидкості і прискорення точки, кутової швидкості та кутового прискорення тіла.

Вивчення кінематики почнемо з вивчення руху окремої точки.

Траєкторією точки називають геометричне місце послідовних положень рухомої точки. Траєкторія – це неперервна лінія, яка може бути прямою або кривою. Якщо траєкторія точки є прямою лінією, то її рух називають прямолінійним, а якщо ця умова не виконується, то – криволінійним.

1.2 Способи задавання руху точки

Рух точки в просторі можна задати одним із трьох способів: векторним, координатним і натуральним.

Векторний спосіб. За цим способом положення рухомої точки M в просторі в кожний момент часу можна визначати радіусом-вектором $\vec{r} = \overline{OM}$, проведеним з деякої нерухомої точки O простору в рухому точку M (рис. 66).

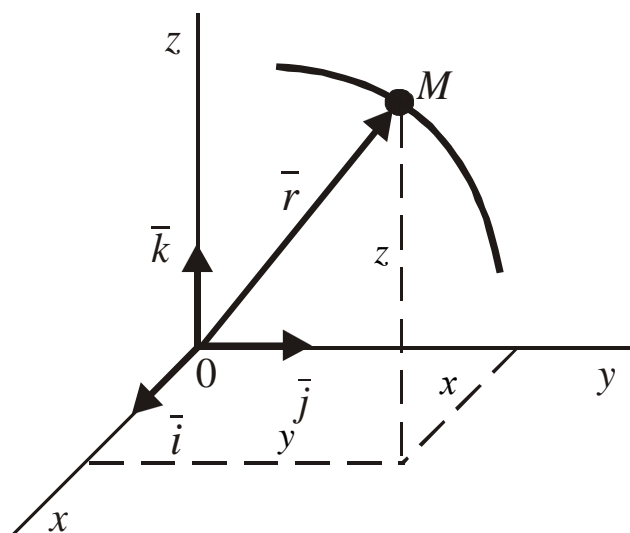


Рисунок 66

Залежність радіуса-вектора \vec{r} від часу

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (75)$$

називають рівнянням руху точки у векторній формі.

Кінець вектора \vec{r} під час руху точки переміщується її траєкторією. Геометричне місце кінців змінного вектора, початок якого весь час знаходиться в одній і тій же точці, називають годографом вектора. Отже траєкторія точки є годографом її радіуса-вектора.

Векторний спосіб застосовується найчастіше в різних теоретичних дослідженнях, для отримання основних кінематичних характеристик руху.

Координатний спосіб. Положення точки відносно деякої системи координат визначають координатами точки. У прямокутній декартовій системі координат цей спосіб полягає в вираженні координат x , y , z рухомої точки M (див. рис. 66) як відомих функцій часу:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t). \quad (76)$$

У цьому випадку радіус-вектор точки M

$$\bar{r} = \bar{i}r_x + \bar{j}r_y + \bar{k}r_z = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z, \quad (77)$$

де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орти координатних осей.

Рівняння (76) руху точки у координатній формі можна розглядати також як рівняння траєкторії точки, де параметром виступає час t . Виключивши з цих рівнянь руху параметр t можна знайти рівняння траєкторії в звичайній координатній формі, тобто у вигляді залежності між координатами точки.

Натуральний спосіб. При натуральному способі задавання руху точки повинна бути відома траєкторія точки із заданим на ній початком O і додатнім напрямком відліку по дузі траєкторії дугової координати s точки (рис . 67). Тоді положення точки M у будь який момент часу можна визначити із залежності

$$s = s(t), \quad (78)$$

яку називають рівняння руху точки в натуральній формі. Зауважимо, що дугова координата s в рівнянні (76) визначає положення рухомої точки, а не пройдений нею шлях. Наприклад, якщо точка, рухаючись із початкового положення O (рис . 67), пройде в положення M_1 , а потім переміститься в положення M , то її дугова координата буде s , а пройдений шлях, як сума дуг OM_1 і M_1M , буде більшим, ніж дугова координата.

При вивченні руху точки, заданого натуральним способом, вводять рухому систему координат, початок якої співпадає з рухомою точкою M і яка рухається разом з цією точкою. Осі цієї системи координат (осі натурального тригранника) направлені так (рис.67): дотична вісь Mt – за дотичною до траєкторії в напрямку збільшення координати s , вісь головна нормаль Mn – за головною нормаллю до траєкторії у бік угнутості траєкторії, вісь бінормаль Mv доповняє цю систему до правої системи координат. Орти $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ цих координатах осей встановлюють відомі з диференціальної

геометрії три взаємно перпендикулярні напрямки (дотична, головна нормаль і бінормаль) і створюють координатні площини: стична площина проходить через дотичну \vec{t} і головну нормаль \vec{n} , нормальна – через головну нормаль \vec{n} і бінормаль \vec{b} , а спрямляюча – через дотичну \vec{t} та бінормаль \vec{b} . Якщо траєкторія точки є плоскою кривою, то вона розміщена в стичній площині.

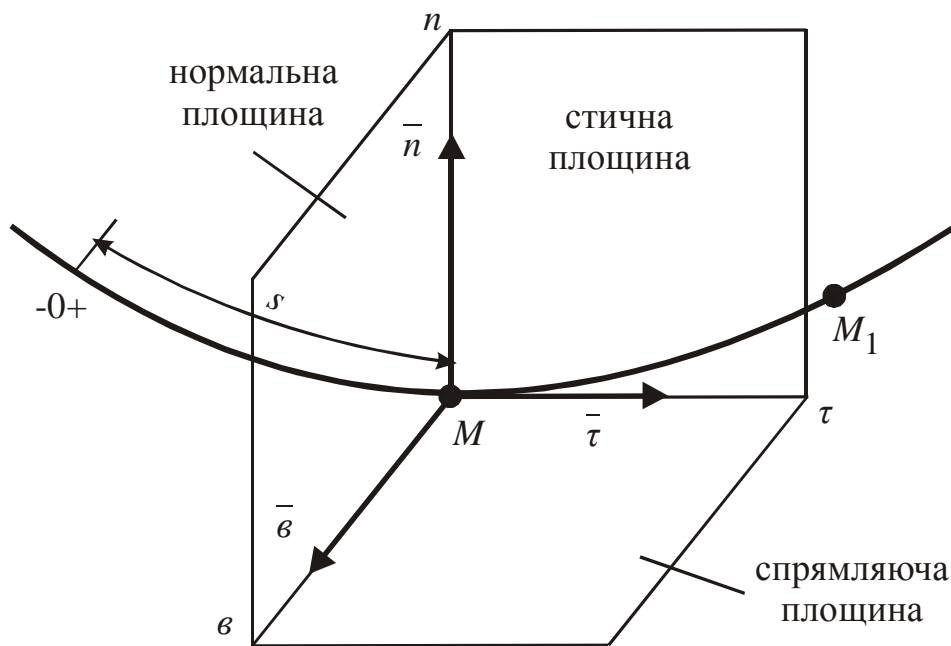


Рисунок 67

У разі прямолінійного руху, якщо вісь Ox направити вздовж траєкторії, дотична вісь Mt співпадає з віссю Ox , а закон прямолінійного руху точки в натуральній формі буде

$$x = x(t). \quad (79)$$

1.3 Визначення швидкості точки

Швидкість точки характеризує зміну з плином часу положення точки у вибраній системі відліку та зміну напрямку руху точки.

1.3.1 Вектор швидкості точки

При векторному способі задавання руху вектор швидкості \bar{V} визначають, розглядаючи зміну радіуса-вектора \bar{r} точки на величину $D\bar{r}$ (рис. 68) за проміжок часу Dt , коли точка перемістилась із положення M в положення M_1 . Тоді середньою швидкістю точки за проміжок часу Dt буде відношення

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}. \quad (80)$$

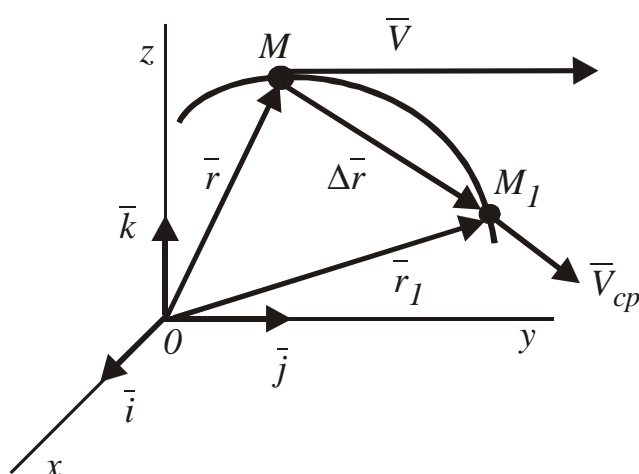


Рисунок 68

Напрямок вектора середньої швидкості \bar{V}_{cp} співпадає з напрямком вектора $D\bar{r}$, а величина його модуля залежить від величини проміжку часу Dt . Швидкість \bar{V} точки у даний момент часу знаходиться як межа середньої швидкості при прагненні Dt до нуля, тобто

$$\bar{V} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{D\bar{r}}{Dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}. \quad (81)$$

У рівняннях механіки змінна величина з позначенням точки над нею є похідною за часом. Отже, вектор швидкості точки дорівнює першій похідній за часом від радіуса-вектора точки. Направлений цей вектор за дотичною до траєкторії у напрямку руху точки.

Одиниця виміру швидкості точки у системі $CI - 1 м/с$.

1.3.2 Швидкість точки при координатному способі

Якщо рух точки задано координатним способом (76), то швидкість точки визначається за проєкціями вектора швидкості на осі координат. Виражаючи, згідно з формулою (77), радіус-вектор точки через її координати і враховуючи, що орти $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ постійні, з рівняння (81) одержимо:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}. \quad (82)$$

Отже проєкції вектора швидкості на декартові осі координат дорівнюють першій похідній за часом від відповідних координат точки:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (83)$$

За цими проєкціями можна визначити модуль вектора швидкості:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (84)$$

і його направляючі косинуси:

$$\cos(\hat{V}, \bar{i}) = \frac{V_x}{V}; \cos(\hat{V}, \bar{j}) = \frac{V_y}{V}; \cos(\hat{V}, \bar{k}) = \frac{V_z}{V}. \quad (85)$$

1.3.3 Швидкість точки при натуральному способі задавання руху

Нехай точка рухається відомою траєкторією, і її положення визначається дуговою координатою s (рис.69). Тоді за час Dt радіус-вектор точки одержав приріст $D\bar{r}$, а координата s приріст Δs . Обчислимо швидкість точки:

$$\bar{V} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{D\bar{r}}{Dt} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \left(\frac{D\bar{r}}{Ds} \cdot \frac{Ds}{Dt} \right) = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Ds}{Dt} \cdot \lim_{Ds \rightarrow 0} \frac{D\bar{r}}{Ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{ds}. \quad (86)$$

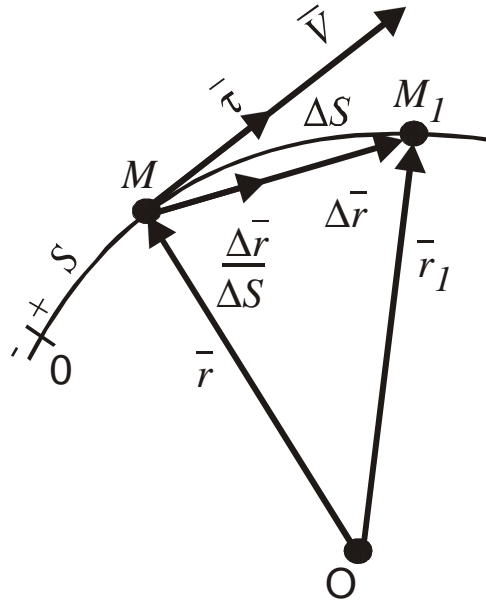


Рисунок 69

Розглянемо вектор $\frac{d\bar{r}}{ds}$, модуль якого $\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = 1$. у зв'язку з тим, що напрямок вектора $\frac{D\bar{r}}{Ds}$ співпадає з напрямком січної MM_1 , граничним положенням якої є дотична до траєкторії точки, то вектор $\frac{d\bar{r}}{ds}$ є одиничним вектором дотичної до траєкторії точки

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}. \quad (87)$$

На підставі (86) і (87) одержимо наступний вираз для швидкості при натуральному способі задавання руху точки

$$\bar{V} = \frac{ds}{dt} \bar{t} = \dot{s} \bar{t}. \quad (88)$$

Проекцію вектора швидкості $V_t = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ на дотичну до траєкторії називають алгебраїчною швидкістю точки. Знак алгебраїчної швидкості залежить від напрямку руху точки: якщо $V_t > 0$, то точка рухається у додатному напрямку відліку дугової координати, а якщо $V_t < 0$, то – у від’ємному. Модуль вектора швидкості $V = |V_t| = |\dot{s}|$ відрізняється від алгебраїчної швидкості тільки відсутністю знака, тому будемо позначати ці дві величини одним і тим же символом V .

1.4 Визначення прискорення точки

Прискоренням точки називається векторна величина, яка характеризує зміну з часом модуля і напрямку вектора швидкості точки.

1.4.1 Векторний спосіб визначення прискорення

Нехай за проміжок часу Dt точка перемістилась із положення M , де вона мала швидкість \bar{V} , в положення M_1 , де її швидкість стала дорівнювати \bar{V}_1 (рис. 70). За цей проміжок часу швидкість отримала приріст $D\bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}$. Тоді середнім прискоренням точки за час Dt називають відношення

$$\bar{a}_{cp} = \frac{D\bar{V}}{Dt}. \quad (89)$$

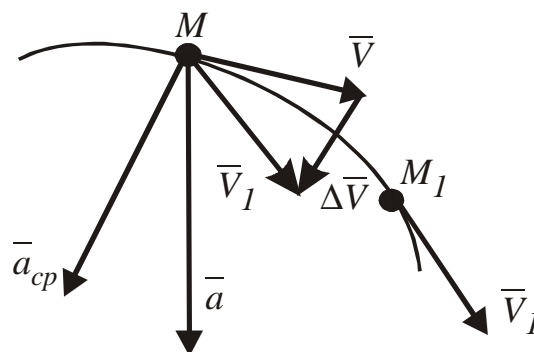


Рисунок 70

Направлений вектор \bar{a}_{cp} відповідно до напрямку вектора $D\bar{V}$ у бік увігнутості траєкторії.

Прискорення точки у момент часу t знаходять як межу, до якої прямує середнє прискорення \bar{a}_{cp} при наближенні Dt до нуля:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt}.$$

Тоді, з врахуванням (81), де $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$, матимемо:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \quad (90)$$

Отже, вектор прискорення точки у даний момент часу дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіуса-вектора точки за часом.

Вектор \bar{a}_{cp} лежить у площині, створеній векторами \bar{V} і \bar{V}_1 . Коли Dt прямує до нуля, точка M_1 наближається до точки M , і площина векторів (\bar{V}, \bar{V}_1) повертається навколо вектора \bar{V} , прагнучи до положення стичної площини. Отже вектор прискорення \bar{a} лежить у стичній площині Mtn (рис.67) і направлений у бік увігнутості траєкторії.

Одиниця виміру прискорення в системі $CI - 1m/c^2$.

1.4.2 Визначення прискорення в декартовій системі координат

При координатному способі задавання руху прискорення точки знаходять через його проєкції на координатні осі:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \quad (91)$$

Крім того, на підставі виразу (90) з врахуванням того, що орти $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ незмінні, маємо

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \bar{i} + \frac{dV_y}{dt} \bar{j} + \frac{dV_z}{dt} \bar{k}. \quad (92)$$

Порівнюючи залежності (91) і (92) встановимо, що проєкції вектора прискорення точки на декартові осі координат визначаються формулами:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{dV_y}{dt}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_z}{dt}. \quad (93)$$

За проєкціями прискорення визначимо його модуль

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (94)$$

та направляючі косинуси

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{a}. \quad (95)$$

1.4.3 Визначення прискорення точки при натуральному способі задавання руху

Якщо рух точки задано натуральним способом, то прискорення точки визначають через його проєкції на зв'язані з рухомою точкою M натуральні осі координат: дотичну Mt , головну нормаль Mn і бінормаль Mv (рис. 71), напрямки яких встановлені раніше в розділі 1.2.

У сусідньому положенні M_1 точки натуральні осі координат змінять свій напрямок. Кут Dj між ортами \bar{t} і \bar{t}_1 двох сусідніх дотичних осей називається кутом суміжності.

Нагадаємо деякі положення, відомі з диференціальної геометрії, які стосуються властивостей кривих. Кривизною кривої в точці M називають межу відношення кута суміжності до довжини елемента дуги Δs :

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta j}{|\Delta s|} = \frac{dj}{ds}. \quad (96)$$

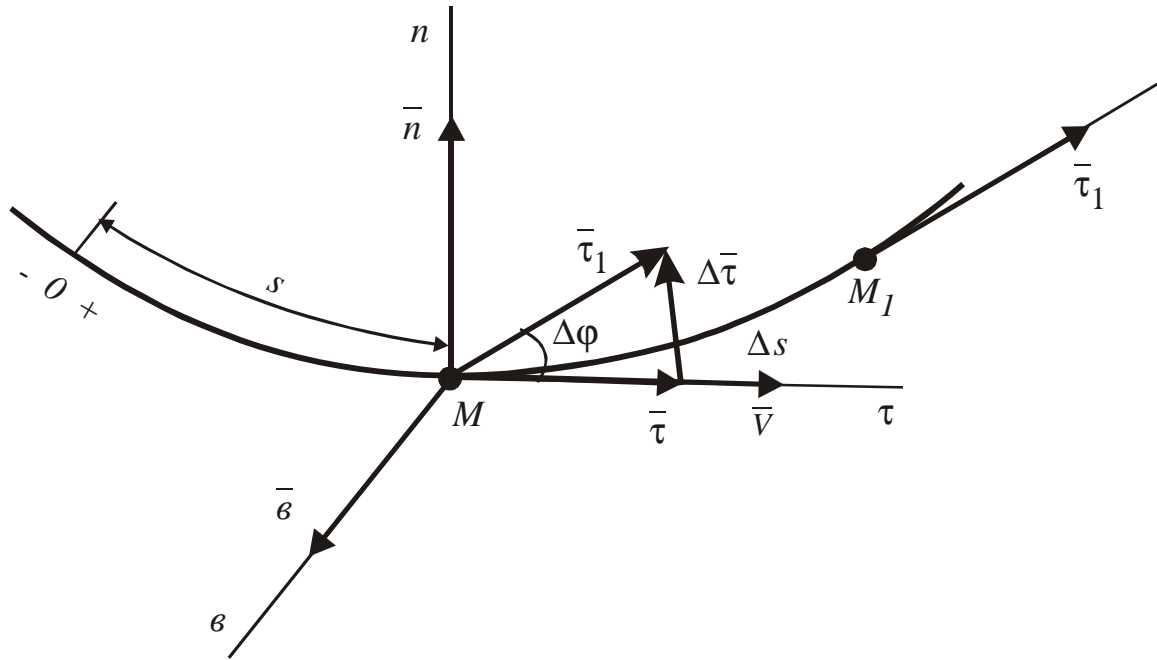


Рисунок 71

Радіусом кривизни кривої в точці M називається величина r , обернена до кривизни,

$$r = \frac{1}{k}. \quad (97)$$

Подамо вектор швидкості точки, як при натуральному способі задання руху, у вигляді

$$\bar{V} = V_t \cdot \bar{t},$$

де $V_t = \mathfrak{R}$ – проекція вектора швидкості на вісь t .

Тоді, на підставі формули (90), маємо

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_t \bar{t}) = \frac{dV_t}{dt} \bar{t} + V_t \frac{d\bar{t}}{dt}. \quad (98)$$

Визначимо модуль і напрямок другого доданку у виразі (98):

$$V_t \frac{d\bar{t}}{dt} = V_t \frac{d\bar{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V_t^2 \frac{d\bar{t}}{ds}. \quad (99)$$

Встановимо величину і напрямок вектора $\frac{d\bar{t}}{ds}$. Вектор $\frac{\Delta \bar{t}}{\Delta s}$ завжди направлений у бік увігнутості траєкторії і лежить в площині, що проходить

через точку M і вектори \vec{t}, \vec{t}_1 . Отже вектор $\frac{d\vec{t}}{ds}$ лежить в стичній площині, до якої прямує площина векторів \vec{t}, \vec{t}_1 при $\Delta s \rightarrow 0$, і направлений у бік увігнутості траєкторії. Кут нахилу вектора $\frac{d\vec{t}}{ds}$ до вектора \vec{t} визначимо, диференціюючи за s тотожність $\vec{t} \cdot \vec{t} = t^2 = 1$; одержимо $2 \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{t} = 0$. Із цього випливає, що вектори $\frac{d\vec{t}}{ds}$ і \vec{t} взаємно перпендикулярні. Отже вектор $\frac{d\vec{t}}{ds}$ направлений за головною нормаллю до центра кривизни траєкторії.

Визначаючи модуль вектора $\frac{d\vec{t}}{ds}$, встановимо, що $|D\vec{t}| = 2 \sin \frac{Dj}{2}$

(див. рис. 71). Тому

$$\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta j}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta j}{2}}{\frac{\Delta j}{2}} \cdot \frac{\Delta j}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta j}{|\Delta s|} = k = \frac{1}{r}. \quad (100)$$

Враховуючи встановлений напрямок цього вектора, матимемо $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{r}$. Підставимо це значення у вираз (99), і згідно з формулою (98) одержимо

$$\vec{a} = \frac{dV_t}{dt} \vec{t} + \frac{V^2}{r} \vec{n}, \quad (101)$$

оскільки $V_t^2 = V^2$. З цієї формули випливає, що вектор прискорення лежить у стичній площині.

Таким чином, вектор прискорення точки має дві складові: дотичну та нормальну. Складова вектора прискорення у напрямку бінормалі дорівнює нулю, тобто $\vec{a}_g = 0$.

Дотичне прискорення

$$\vec{a}_t = \frac{dV_t}{dt} \vec{t} = \frac{dV}{dt} \vec{t} \quad (102)$$

направлене за дотичною до траєкторії у напрямку збільшення координати s , якщо алгебраїчна швидкість точки V_t збільшується, або в напрямку зменшення s , якщо V_t зменшується, тобто дотичне прискорення характеризує зміну модуля швидкості точки. Проекція дотичного прискорення на вісь t :

$$a_t = \frac{dV_t}{dt} = \frac{d}{dt} V_t \quad (103)$$

Нормальне прискорення

$$\bar{a}_n = \frac{V^2}{r} \bar{n} = \frac{v^2}{r} \bar{n}, \quad (104)$$

а його проекція на головну нормаль

$$a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{v^2}{n}. \quad (105)$$

Це прискорення завжди направлене за нормаллю до траєкторії у напрямку увігнутості; воно характеризує зміну вектора швидкості за напрямком. Так як ці складові взаємно перпендикулярні, то модуль вектора прискорення знаходиться за формулою

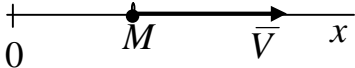
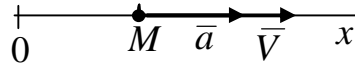
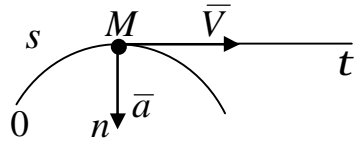
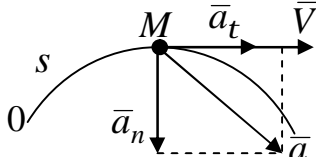
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (106)$$

1.5 Окремі випадки руху точки

Розглянемо зведені до таблиці 1 випадки характеру руху точки в залежності від значень дотичного і нормального прискорень.

Як бачимо, тільки у випадку рівномірного прямолінійного руху точки її прискорення дорівнюють нулю. В інших окремих випадках руху точка має відмінне від нуля прискорення: при змінному прямолінійному русі прискорення точки буде тільки дотичним, при рівномірному криволінійному – тільки нормальним, а при змінному криволінійному русі прискорення точки складатиметься із дотичного і нормального прискорень.

Таблиця 1

Характер руху точки	Значення прискорення			Траєкторія, вектори швидкості і прискорення, кінематичні залежності
	\bar{a}_t	\bar{a}_n	\bar{a}	
Рівномірний прямолінійний рух	$a_t = a_x = 0$	$a_n = 0$	$a = 0$	 $\bar{V} = const; x = x_0 + Vt$
Рівнозмінний прямолінійний рух	$a_t = a_x =$ $= \frac{dV}{dt} =$ $= const$	$a_n = 0$	$\bar{a} = \bar{a}_t$	 $V = V_0 + at$ $x = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$
Рівномірний криволінійний рух	$a_t = 0$	$a_n = \frac{V^2}{r}$	$\bar{a} = \bar{a}_n$	 $s = s_0 + Vt$ $V = const$
Рівнозмінний криволінійний рух	$a_t = \frac{dV}{dt} =$ $= const$	$a_n = \frac{V^2}{r}$	$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$	 $V = V_0 + a_t t$ $s = s_0 + V_0 t + \frac{a_t t^2}{2}$

Треба відзначити, що дотичне прискорення дорівнює нулю, якщо точка рухається з постійною алгебраїчною швидкістю, або в моменти часу, коли алгебраїчна швидкість набуває екстремальних значень (максимум чи мінімум).

Нормальне прискорення буде дорівнювати нулю при прямолінійному русі або в місцях перегину траєкторії, тобто коли $r = \infty$, а також в ті моменти часу, коли швидкість точки дорівнює нулю.

1.6 Приклади визначення кінематичних характеристик руху точки

Для розв'язання задач кінематики треба знати закон руху точки, який або задають явно в умові задачі, або можна визначити із відомого руху механізму, одній із ланок якого належить розглядувана точка.

Кінематичні характеристики руху точки (швидкість, прискорення, дотичне і нормальне прискорення та ін.) визначаються за формулами (82)...(95), (101)...(106). Якщо рух задано координатним способом, тобто рівняннями (76), то швидкість і прискорення точки знаходять за формулами (83)...(85), (93)...(95). Після обчислення швидкості V і прискорення a можна знайти і дотичне та нормальне прискорення. Беручи похідну за часом від знайденого виразу V , визначаємо, що $a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$. Нормальне прискорення a_n знайдемо із залежності $a^2 = a_t^2 + a_n^2$. Одночасно можна знайти радіус кривизни траєкторії r із формули $a_n = V^2/r$.

Якщо рух задано натуральним способом (задана траєкторія і закон руху вздовж траєкторії), то всі характеристики руху визначаються формулами (88), (93)...(95). Іноді закон руху точки траєкторією в умові задачі не наведено, і його необхідно скласти, виходячи із заданих характеру руху (рівномірний чи рівнозмінний) та значення деяких кінематичних характеристик руху в певний момент часу. Для цього застосовують формули кінематичних залежностей в окремих випадках руху точки, які наведені в таблиці 1.

Приклад 16

Знайти траєкторію точки M шатуна AB кривошипно-шатуного механізму (рис. 72), якщо довжина кривошипа $OA = r = 20$ см, довжина шатуна $AB = l = 20$ см, відстань $AM = \frac{l}{4} = 5$ см, кут нахилу кривошипа до горизонталі змінюється за законом $j = 2t$ рад. Знайти також швидкість, прискорення та радіус кривизни траєкторії точки в момент часу $t_1 = \frac{p}{8}$ сек.

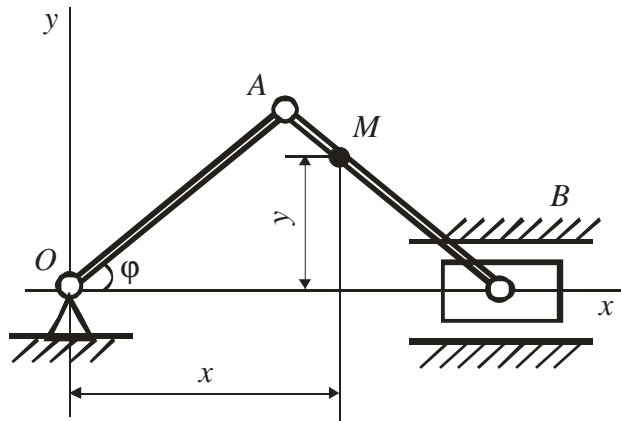


Рисунок 72

Розв'язання

У даній задачі закон руху точки безпосередньо не заданий, тому в першу чергу встановимо рівняння руху точки M у координатній формі.

Для цього проведемо осі координат x та y , розмістивши їх початок в точці O і визначимо координати точки M як функції кута j . Із рисунка 72 видно, що

$$x = OA \cos j + AM \cos j = 25 \cos j ;$$

$$y = OA \sin j - AM \sin j = 15 \sin j .$$

Або з врахуванням залежності кута j від часу:

$$x = 25 \cos 2t; \quad y = 15 \sin 2t.$$

Для визначення рівняння траєкторії точки M виключимо час t з рівняння руху

$$\cos 2t = \frac{x}{25}; \quad \sin 2t = \frac{y}{15}.$$

Піднісни обидві частини цих рівностей до квадрату та склавши їх, одержимо

$$\frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1.$$

Отже, траєкторію точки M буде еліпс з півосями 25 см і 15 см з центром в точці O . Побудуємо траєкторію у вибраному масштабі і покажемо на ній положення точки M у заданий момент часу $t_1 = \frac{p}{8}\text{ с}$, коли її координати будуть

$$x_M = 25 \cos \frac{p}{4} = 17,675\text{ см}; \quad y_M = 15 \sin \frac{p}{4} = 10,605\text{ см}, \text{ (рис. 73).}$$

Проекції вектора швидкості на осі координат

$$V_x = \dot{x} = -50 \sin 2t; \quad V_y = \dot{y} = 30 \cos 2t;$$

модуль швидкості в будь-який момент часу:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 10\sqrt{25 \sin^2 2t + 9 \cos^2 2t}.$$

Напрямок вектора \vec{V} у будь-який момент часу визначається направляючими косинусами:

$$\cos(\vec{V}, x) = \frac{V_x}{V} = \frac{5 \sin 2t}{\sqrt{25 \sin^2 2t + 9 \cos^2 2t}};$$

$$\cos(\vec{V}, y) = \frac{V_y}{V} = \frac{3 \cos 2t}{\sqrt{25 \sin^2 2t + 9 \cos^2 2t}}.$$

Прискорення точки M знайдемо за його проекціями на осі координат згідно з формулами (93) і (94):

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -100 \cos 2t; \quad a_y = -60 \sin 2t;$$

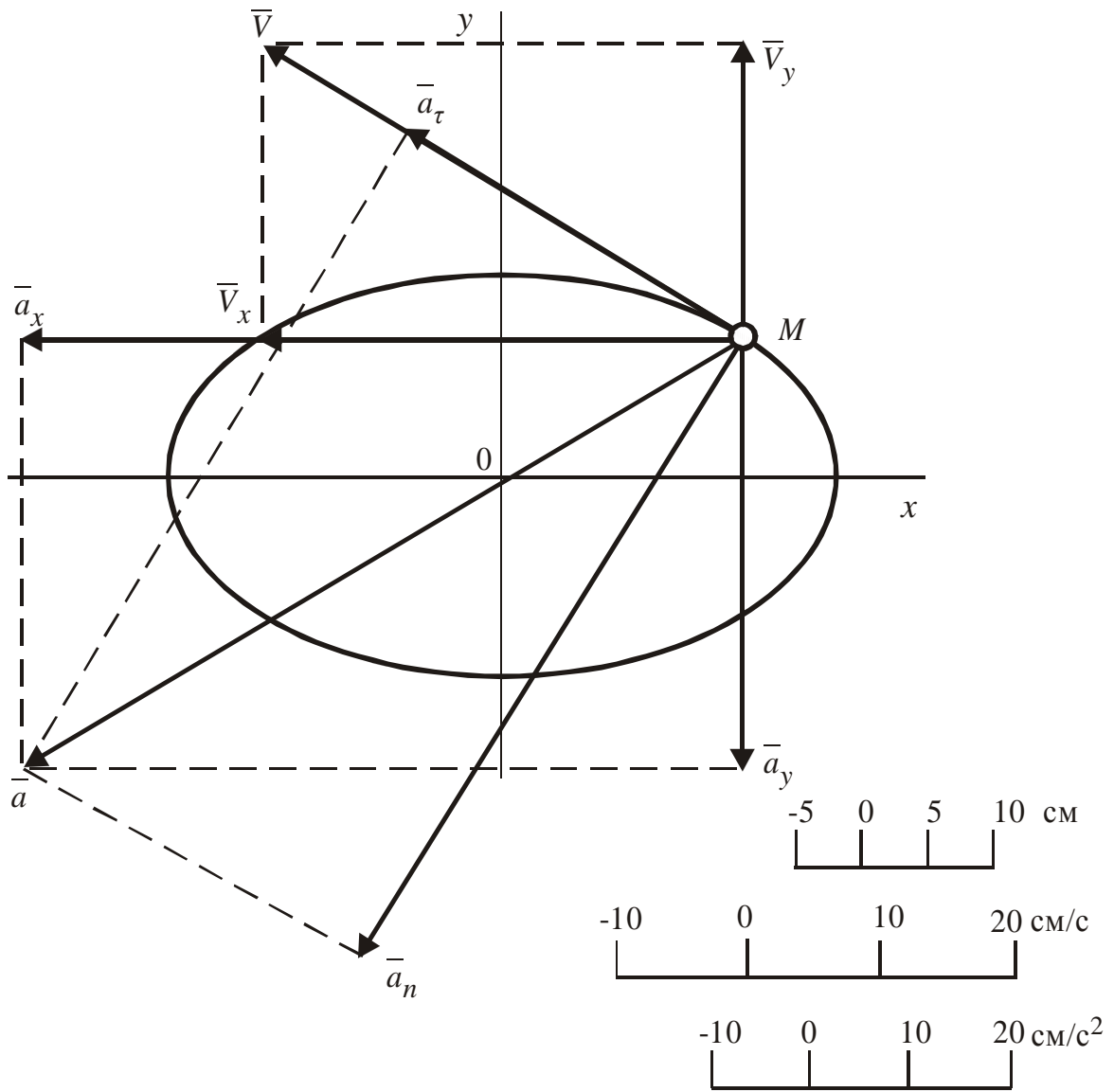


Рисунок 73

модуль вектора прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10\sqrt{100 \cos^2 2t + 36 \sin^2 2t};$$

направляючі конуса вектора прискорення:

$$\cos \left(\hat{\vec{a}}, x \right) = \frac{a_x}{a} = -\frac{10 \cos 2t}{\sqrt{100 \cos^2 2t + 36 \sin^2 2t}};$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, y}\right) = \frac{a_y}{a} = -\frac{6 \sin 2t}{\sqrt{100 \cos^2 2t + 36 \sin^2 2t}}.$$

Визначимо знайдені величини в момент часу $t_1 = \frac{p}{8} \text{ c}$:

$$V_x = -50 \sin \frac{p}{4} = -35,35 \text{ см/с}; \quad V_y = 30 \cos \frac{p}{4} = 21,2 \text{ см/с};$$

$$V = \sqrt{(-35,35)^2 + 21,2^2} = 41,2 \text{ см/с};$$

$$a_x = -100 \cos \frac{p}{4} = -70,7 \text{ см/с}^2; \quad a_y = -60 \sin \frac{p}{4} = -42,4 \text{ см/с}^2;$$

$$a = \sqrt{(-79,7)^2 + (-42,4)^2} = 82,45 \text{ см/с}^2.$$

Дотичне прискорення знайдемо, диференціюючи величину швидкості точки:

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$$

і в момент часу $t_1 = \frac{p}{8}$ маємо:

$$a_t = \frac{(-35,35) \cdot (-70,7) + 21,2 \cdot (-42,4)}{41,2} = 38,85 \text{ см/с}^2.$$

Знайдемо нормальне прискорення точки за формулою

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{82,45^2 - 38,85^2} = 72,7 \text{ см/с}^2.$$

Радіус кривизни траєкторії в даній точці M_1 згідно з формулою (105) дорівнює

$$r = \frac{V^2}{a_n} = \frac{41,2^2}{72,7} = 23,35 \text{ см.}$$

У заданому положенні точки в масштабі будуємо вектор \bar{V} зі складовими \bar{V}_x та \bar{V}_y , направляючи вектор швидкості за дотичною до траєкторії (див. рис. 73). Вектор \bar{a} знаходимо за складовими \bar{a}_x і \bar{a}_y , а також і за \bar{a}_t та \bar{a}_n , як показано на рис. 73. Виконання умов побудови цих векторів підтверджує правильність проведених обчислень.

Приклад 17

Точка рухається колом радіуса 25 м за законом $s = 2t^2 + 3t$ (s – у метрах, t – у секундах). Визначити прискорення точки у той момент часу, коли її дугова координата буде дорівнювати 27 м.

Розв'язання

Рух точки задано натуральним способом. Виберемо на траєкторії початкове положення O та додатний напрямок руху (рис. 74) і покажемо положення M_1 точки в той момент часу t_1 , коли її дугова координата $s_1 = 27$ м, що відповідає центральному куту $j_1 = \frac{s_1}{R} = \frac{27}{25} = 1,08$ рад. Знайдемо час t_1 руху точки, підставивши в рівняння руху значення s_1 і t_1 : $27 = 2t_1^2 + 3t_1$. Із квадратного рівняння $2t^2 + 3t - 27 = 0$, знайдемо:

$$t_1 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 27}}{4} = \frac{-3 \pm 15}{4},$$

тобто $t_1 = 3$ с.

Величина швидкості і прискорення точки дорівнюють:

$$V = \frac{ds}{dt} = 4t + 3, \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = 4 \text{ м/с}^2 = \text{const.}$$

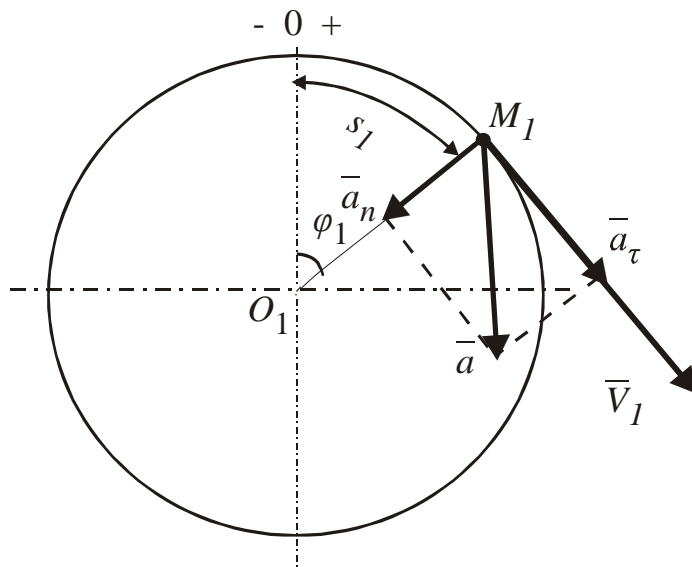


Рисунок 74

При $t = t_1 = 3\text{ с}$ швидкість $V_1 = 4 \cdot 3 + 3 = 15\text{ м/с}$. Тоді нормальне прискорення точки у цей момент часу

$$a_n = \frac{V_1^2}{R} = \frac{15^2}{25} = 9\text{ м/с}^2,$$

а повне прискорення точки в положенні M_1

$$a_{M_1} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{4^2 + 9^2} = 9,85\text{ м/с}^2.$$

Приклад 18

Відходячи від станції, поїзд рухається рівноприскорено дугою кола радіусом $R = 720\text{ м}$. Пройшовши шлях $s_1 = 480\text{ м}$, поїзд одержав швидкість $V_1 = 12\text{ м/с}$. Знайти час, за який поїзд прийшов цю відстань, та його повне прискорення у цей час.

Розв'язання

Розглядаємо поїзд як рухому точку, траєкторія якої відома. Для знаходження шуканих величин скористаємось натуральним способом задання руху, вибравши початок відліку на траєкторії в початковому поло-

женні поїзда, коли при $t = 0$ маємо $s_0 = 0$ і $V_0 = 0$. Тоді рівнозмінний рух поїзда опишеться залежностями:

$$V = a_t \cdot t; \quad s = \frac{a_t \cdot t^2}{2}.$$

Розв'язуючи спільно ці рівняння, знаходимо $t = \frac{2s}{V}$ і $a_t = \frac{V^2}{2s}$, звідки шуканий час руху і дотичне прискорення будуть

$$t_1 = \frac{2s_1}{V_1} = \frac{2 \cdot 480}{12} = 80 \text{ с}, \quad a_t = \frac{V_1^2}{2s_1} = \frac{12^2}{2 \cdot 480} = 0,15 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення визначимо за формулою (106)

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

де $a_n = \frac{V^2}{R}$, або при числових значеннях задачі

$$a_n = \frac{V_1^2}{R} = \frac{12^2}{720} = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

Остаточо

$$a = \sqrt{0,15^2 + 0,2^2} = 0,25 \text{ м/с}^2.$$

Питання для самоконтролю

- 1 Що вивчає кінематика? Сформулюйте основну задачу кінематики точки.
- 2 Дайте визначення системи відліку, закону руху точки.
- 3 Що таке траєкторія точки, якою вона може бути?

- 4 Які існують способи задавання руху точки і в чому полягає кожен з них?
- 5 Як при координатному способі задавання руху точки визначається її траєкторія?
- 6 За яких умов пройдений точкою шлях і її дугова координата на траєкторії співпадають?
- 7 Чому дорівнює і як направлений в просторі вектор швидкості точки?
- 8 Запишіть формули для проекції швидкості точки на осі декартової системи координат.
- 9 Як за проекціями швидкості знайти її модуль і напрямок?
- 10 Як визначається алгебраїчна швидкість руху точки за заданою траєкторією?
- 11 Чому дорівнює і як направлений в просторі вектор прискорення точки?
- 12 Як визначається прискорення точки при координатному способі задавання руху?
- 13 Що таке натуральні осі координат? Як вони направлені?
- 14 У якій площині розміщується вектор прискорення у відношенні до натуральних осей, куди він направлений?
- 15 Чому дорівнюють проекції прискорення точки на дотичну вісь і головну нормаль до траєкторії?
- 16 У яких випадках дотичне прискорення точки дорівнює нулю? Нормальне прискорення точки дорівнює нулю?
- 17 Який рух точки називається рівномірним? Рівнозмінним?

2 ПРОСТІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА

2.1 Загальні положення кінематики твердого тіла

Основним завданням кінематики твердого тіла є встановлення способів описування його руху як для тіла в цілому, так і для окремих його точок.

Описати рух тіла – це значить указати спосіб знаходження в будь-який момент часу положення тіла відносно вибраної системи відліку. Для цього досить задати декілька незалежних параметрів, які однозначно визначають положення тіла в просторі в залежності від часу. Рівняння, в яких ці параметри задані як функції часу, і є рівняннями руху тіла, які визначають закон руху тіла.

Кількість незалежних параметрів, якими однозначно визначається положення тіла в просторі, називається числом ступенів вільності тіла.

У механіці розрізняють п'ять видів руху твердого тіла: поступальний, обертальний навколо нерухомої осі, плоско-паралельний (плоский), обертальний навколо нерухомої точки (сферичний), вільний рух твердого тіла.

До простих рухів відносяться поступальний і обертальний навколо нерухомої осі. Інші рухи тіла можна представити як сукупність простих рухів.

2.2 Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається залишаючись паралельною своєму початковому положенню.

Прикладами поступального руху є рух кузова автомобіля на прямолінійній ділянці шляху, рух спарника AB (рис.75), що з'єднує кривошини OA і O_1B однакової довжини, які обертаються. Точки спарника при цьому рухаються дугами кіл однакового радіуса. Іншим прикладом поступального руху твердого тіла є рух кабінок колеса огляду. Траєкторіями кабінок є окружності, а в русі вони весь час залишаються паралельними поверхні землі.

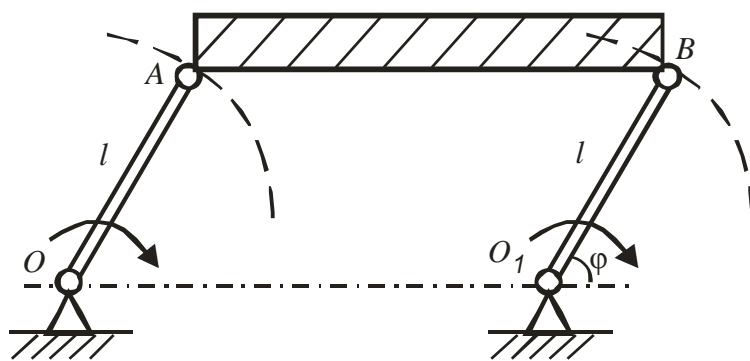


Рисунок 75

Властивості поступального руху тіла визначаються такою теоремою: *при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії і в кожний момент часу мають рівні між собою вектори швидкостей і вектори прискорень.*

Для доведення теореми розглянемо тверде тіло, яке здійснює поступальний рух відносно системи відліку $Oxyz$ (рис. 76). Радіуси-вектори довільних точок A і B тіла зв'язані між собою співвідношенням

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}, \quad (107)$$

де $\overline{AB} = const$ – сталий за величиною та напрямком вектор.

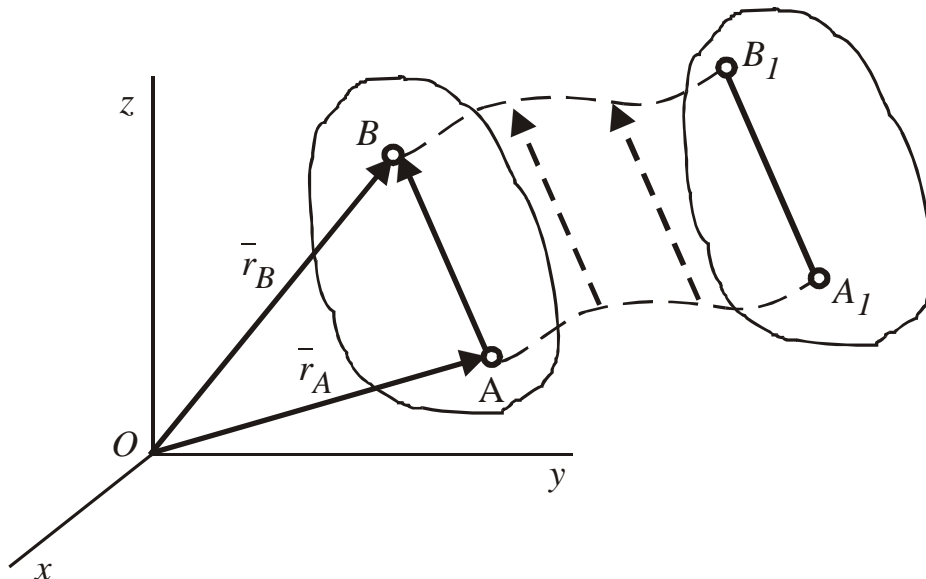


Рисунок 76

Отже, радіус-вектори \bar{r}_A і \bar{r}_B точок A і B тіла відрізняються між собою на сталий вектор \overline{AB} , і годографи цих радіусів-векторів (тобто траєкторії точок A і B) співпадуть при накладанні.

Диференціюючи за часом співвідношення (107), одержимо:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt},$$

де $\frac{d(\overline{AB})}{dt} = 0$.

Тому $\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt}$, або $\bar{V}_B = \bar{V}_A$, тобто швидкості точок у будь-який

момент часу однакові.

Аналогічно отримаємо:

$$\frac{d\bar{V}_B}{dt} = \frac{d\bar{V}_A}{dt},$$

або $\bar{a}_B = \bar{a}_A$, тобто прискорення точок тіла в будь-який момент часу однакові, і теорема доведена.

Із цієї теореми випливає, що поступальний рух тіла повністю характеризується рухом однієї будь-якої точки цього тіла (наприклад, точки A). Тому рівняння поступального руху твердого тіла набуде вигляду:

$$x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); z_A = f_3(t), \quad (108)$$

а кінематичні характеристики поступального руху тіла визначаються за формулами кінематики точки.

2.3 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Кутова швидкість і кутове прискорення

Обертальним називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла, що лежать на деякій зв'язаній з тілом прямій лінії, залишаються нерухомими під час руху тіла. Ця пряма називається віссю обертання. Точки тіла, які не лежать на осі обертання, рухаються колами, що лежать в площинах, перпендикулярних осі обертання, а центри кіл знаходяться на цій осі.

Для визначення положення тіла виберемо додатний напрямок осі обертання (напрямок z) і проведемо через цю вісь нерухому півплощину Π_0 (рис.77). Рухому півплощину Π_1 жорстко зв'яжемо з тілом, що обертається. Положення тіла однозначно встановлюється кутом j (кутом повороту тіла) двогранного кута між півплощинами Π_0 і Π_1 . Вважатимемо кут j додатним, якщо з додатного напрямку осі обертання бачимо його відкладеним проти годинникової стрілки.

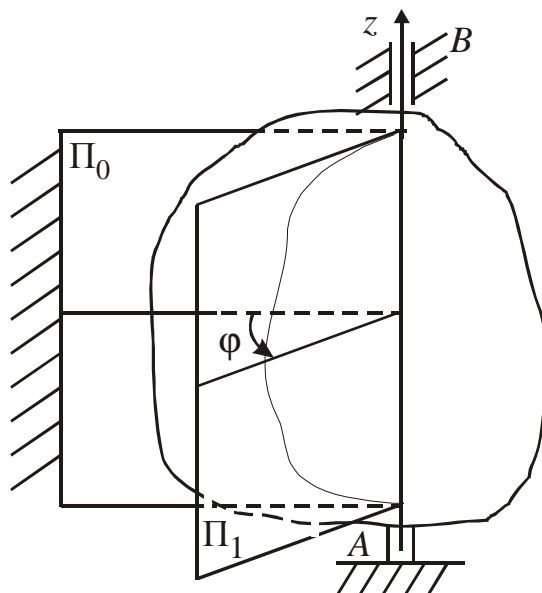


Рисунок 77

Залежність кута повороту від часу

$$j = j(t) \quad (109)$$

є рівнянням обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

Оскільки положення тіла визначається одним незалежним параметром (кутом повороту j), то тіло при обертальному русі має одну ступінь вільності.

Вимірюється кут повороту j в радіанах.

Кінематичними характеристиками обертального руху тіла є кутова швидкість w (омега) і кутове прискорення e (епсілон).

Кутовою швидкістю називається фізична величина, що характеризує бистроту зміни кута повороту j з часом.

Нехай за проміжок часу Dt кут повороту тіла j дістав приріст Dj . Тоді середня кутова швидкість тіла за проміжок часу Dt

$$w_{cp} = \frac{Dj}{Dt}.$$

Межа, до якої наближається середня кутова швидкість w_{cp} , коли проміжок часу Dt прямує до нуля, називається кутовою швидкістю в даний момент часу t :

$$w(t) = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Dj}{Dt} = \frac{dj}{dt}.$$

Отже, кутова швидкість тіла при його обертанні навколо нерухомої осі дорівнює першій похідній за часом від кута повороту:

$$w = \frac{dj}{dt} = \mathbf{j}\dot{\phi}. \quad (110)$$

Якщо $w > 0$, то тіло в даний момент часу обертається в додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки.

$$\text{Одиниця виміру кутової швидкості } [w] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

Інколи кутову швидкість вимірюють в обертах за хвилину ($n, \frac{\text{об}}{\text{хв}}$).

Тоді кутова швидкість w в радіанах за секунду обчислюється за формулою

$$w = \frac{pn}{30}. \quad (111)$$

Кутова швидкість може бути зображена вектором \bar{w} , модуль якого визначається формулою (110), і який напрямлений вздовж осі обертання в той бік, звідки обертання тіла видно проти ходу годинникової стрілки (рис. 78) (правило правої руки).

Цей вектор визначає положення осі обертання тіла в просторі та напрям обертання навколо осі. Точка прикладання вектора \bar{w} вибирається на осі обертання довільно, тобто \bar{w} – ковзний вектор.

Кутовим прискоренням називається фізична величина, яка характеризує швидкість зміни з часом кутової швидкості тіла.

Якщо за проміжок часу Dt кутова швидкість зміниться на величину Dw , то середнє кутове прискорення буде дорівнювати $e_{cp} = \frac{Dw}{Dt}$. Кутове

прискорення у даний момент часу знаходиться як межа, до якої наближається середнє кутове прискорення, коли проміжок часу Dt прямує до нуля:

$$e(t) = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Dw}{Dt} = \frac{dw}{dt}.$$

Отже кутове прискорення тіла дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла

$$e = \frac{dw}{dt} = \mathbf{j} \quad (112)$$

Одиниця виміру кутового прискорення – $1 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 1\text{с}^{-2}$. Кутове прискорення також можна зобразити у вигляді вектора \bar{e} , направленою вздовж осі обертання (рис.78). При прискореному обертанні, якщо модуль кутової швидкості з часом збільшується, кутова швидкість і кутове прискорення мають однакові знаки, і вектори \bar{w} і \bar{e} направлені в одному і тому ж напрямку (див.рис.78,а). У випадку сповільненого обертання знак кутового прискорення протилежний знаку кутової швидкості, а вектори \bar{w} і \bar{e} направлені у протилежних напрямках (див. рис.78,б).

2.4 Окремі випадки обертального руху

Обертальний рух називають *рівномірним*, якщо кутова швидкість тіла не змінюється, тобто $w = \frac{dj}{dt} = \text{const}$. Інтегруючи це співвідношення, одержимо рівняння рівномірного обертання

$$j = j_0 + wt, \quad (113)$$

де j_0 – початковий кут повороту.

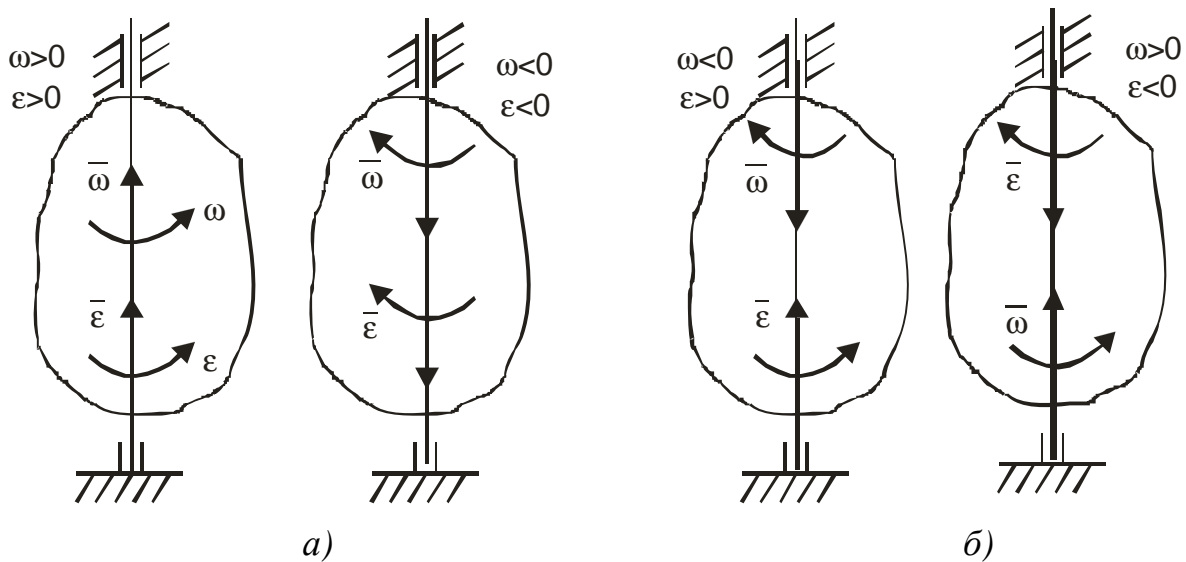


Рисунок 78

Якщо кутове прискорення тіла під час руху залишається постійним, тобто $e = \frac{dw}{dt} = const$, то обертання називають *рівнозмінним*. Звідси після інтегрування отримаємо

$$w = w_0 + et. \quad (114)$$

Так, як з виразу (114) випливає, що $\frac{dj}{dt} = w_0 + et$, то після інтегрування одержимо рівняння, рівнозмінного обертання

$$j = j_0 + w_0t + \frac{e^2}{2}. \quad (115)$$

2.5 Швидкості і прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Розглянемо точку M , яка знаходиться на відстані R від осі обертання. Цю відстань також називають радіусом обертання. Траєкторією точки M буде коло з радіусом обертання R , центр C якого лежить на осі обертання (рис.79). Виберемо на траєкторії початок відліку в положенні M_0 , де точка знаходилась в момент часу $t=0$. При повороті тіла на кут j дугова координата s виразиться залежністю

$$s = Rj . \quad (116)$$

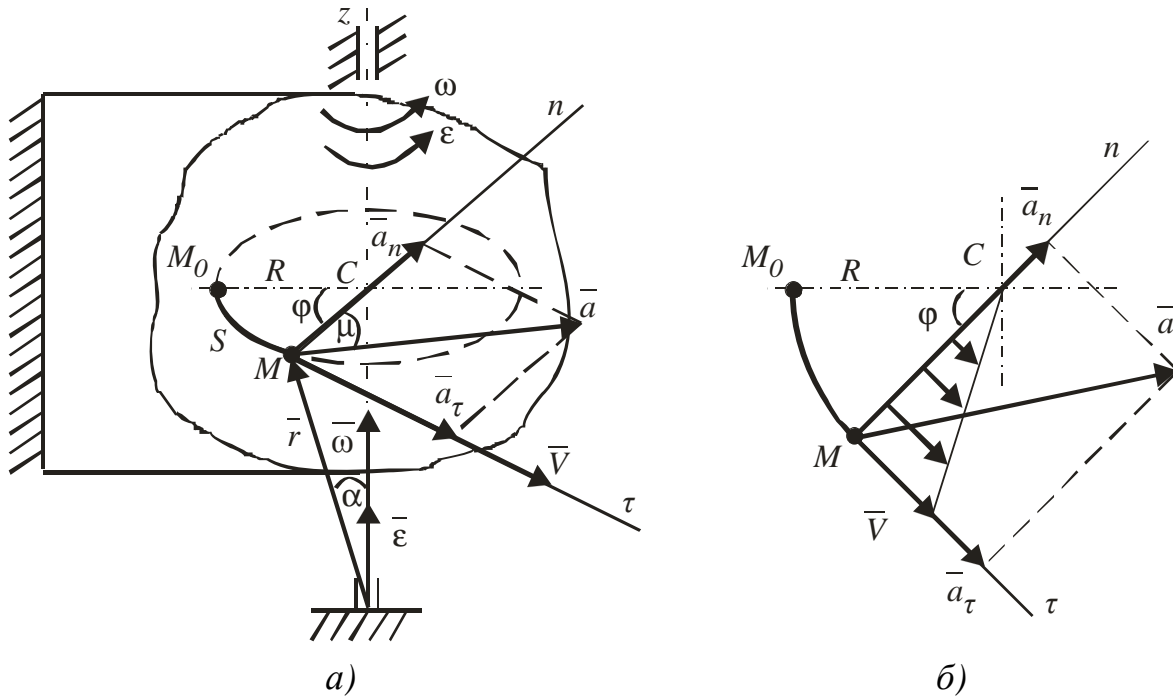


Рисунок 79

Тоді швидкість точки M буде

$$V = \frac{ds}{dt} = R \frac{dj}{dt} ,$$

або

$$V = R\omega . \quad (117)$$

Отже лінійна швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, чисельно дорівнює добутку радіуса обертання на кутову швидкість тіла. Швидкість точки направлена за дотичною t до траєкторії кола у бік обертання і, таким чином, перпендикулярно до радіуса обертання R .

З формули (117) випливає, що швидкості точок при обертальному русі тіла пропорціональні відстаням цих точок до осі обертання (рис.79,б).

Прискорення точки M має дотичну і нормальну складові, тобто

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n.$$

Виразимо ці прискорення через кінематичні характеристики w і e обертального руху, скориставшись формулами

$$a_t = \frac{dV}{dt} \text{ і } a_n = \frac{V^2}{R}.$$

З врахуванням формули (117) одержимо:

$$a_t = R \frac{dw}{dt} \text{ і } a_n = \frac{R^2 w^2}{R}$$

або остаточно

$$a_t = Re ; a_n = w^2 R. \quad (118)$$

Вектор дотичного прискорення направлений за дотичною до кола обертання і співпадає з напрямком швидкості при прискореному обертанні та протилежний вектору швидкості при сповільненому.

Вектор нормального прискорення направляється за радіусом обертання до осі обертання (див.рис.79).

Модуль повного прискорення точки M

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{e^2 + w^4}. \quad (119)$$

Напрямок вектора повного прискорення встановлюється кутом m нахилу цього вектора до радіуса обертання (див.рис.79), який визначається із співвідношення

$$tg m = \frac{a_t}{a_n} = \frac{e}{w^2}. \quad (120)$$

Одержимо векторні формули для визначення швидкості та прискорення точок тіла, що обертається. Для цього покажемо вектори кутової швидкості $\bar{\omega}$ та кутового прискорення $\bar{\epsilon}$, направивши їх вздовж осі обертання, і з довільної точки на осі обертання проведемо радіус – вектор \bar{r} точки M (див. рис.79). Тоді вектор швидкості може бути виражений векторним добутком векторів $\bar{\omega}$ і \bar{r} :

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (121)$$

Це співвідношення називається формулою Ейлера.

Справедливість формули (121) підтверджується тим, що відповідно до правила векторного добутку напрямок вектора $\bar{\omega} \times \bar{r}$ співпадає з напрямком вектора \bar{V} (див.рис.79), а його модуль

$$|\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega r \sin \alpha = \omega R = V.$$

Так як водночас $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$, де вектор \bar{r} в даному випадку змінюється тільки за напрямком ($|\bar{r}| = const$), то

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad (122)$$

тобто формула Ейлера є узагальненим правилом знаходження похідної вектора постійного модуля.

Для знаходження вектора прискорення точки тіла, що обертається, продиференціюємо вираз (121) за часом:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt},$$

або

$$\bar{a} = \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V}. \quad (123)$$

Ці дві складові прискорення у формулі (123) є дотичним і нормальним прискореннями:

$$\bar{a}_t = \bar{e} \times \bar{r}, \quad (124)$$

$$\bar{a}_n = \bar{w} \times \bar{V} = \bar{w} \times \bar{w} \times \bar{r}. \quad (125)$$

Співпадання напрямків лівої та правої частин рівностей (124) і (125) підтверджується правилом векторного добутку. Їх модулі:

$$|\bar{e} \times \bar{r}| = |\bar{e}| \cdot |\bar{r}| \sin a = eR = a_t;$$

$$|\bar{w} \times \bar{V}| = |\bar{w}| \cdot |\bar{V}| \sin 90^\circ = w \cdot R w = w^2 R = a_n.$$

2.6 Приклад визначення кінематичних характеристик простих рухів тіла

Приклад 18

Механізм лебідки, показаний на рис. 80, переміщує вантаж 4 завдяки обертанню шківів 1 радіусом $r_1 = 0,04 \text{ м}$, який за допомогою пасової передачі зв'язаний зі шківом 2, радіус якого $r_2 = 0,08 \text{ м}$. З цим шківом жорстко зв'язана шестерня 2, яка зчеплена з шестернею 3, насадженою на вал барабана радіусом $r_3 = 0,1 \text{ м}$. Визначити у момент часу $t_1 = 0,4 \text{ с}$ швидкість і прискорення точки M барабана, а також висоту підйому вантажу за цей час, якщо шків 1 обертається за законом $j_1 = 25t^2 - 5t$, а кількість зубців шестерень $z_2 = 24$ і $z_3 = 30$.

Розв'язання

Знайдемо кутову швидкість та кутове прискорення шківів 1.

$$\omega_1 = j_1 = 50t - 5, \quad \epsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 50 \text{ с}^{-2} = \text{const.}$$

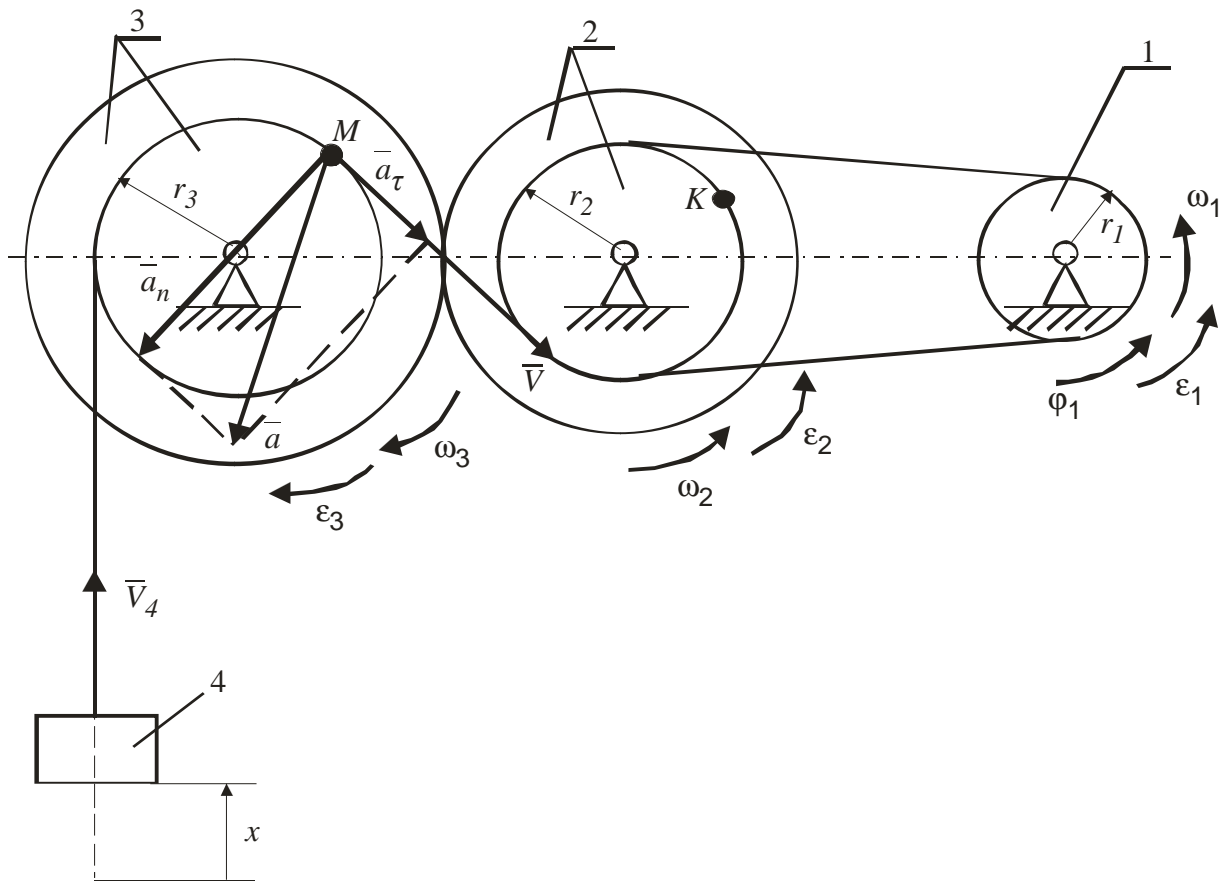


Рисунок 80

Оскільки ремінь, що з'єднує шківів 1 і 2 нерозтяжний, то швидкість точки K шківів 2 дорівнює швидкості точки, яка лежить на ободі шківів 1, тобто $V_K = w_2 r_2 = w_1 r_1$, звідки визначимо кутову швидкість колеса 2:

$$w_2 = \frac{w_1 r_1}{r_2} = \frac{(50t - 5) \cdot 0,04}{0,08} = 25t - 2,5.$$

Кутове прискорення колеса 2

$$e_2 = \frac{dw_2}{dt} = 25 \text{ c}^{-2} = \text{const.}$$

Швидкість точки дотику зубчатих коліс 2 і 3

$$V_{2,3} = w_2 R_2 = w_3 R_3,$$

звідки

$$\frac{w_2}{w_3} = \frac{R_3}{R_2} = \frac{z_3}{z_2}.$$

Отже кутові швидкості обертання обернено пропорційні радіусам або кількості зубців:

$$w_3 = w_2 \frac{z_2}{z_3} = (25t - 2,5) \frac{24}{30} = 20t - 2.$$

Аналогічна залежність між кутовими прискореннями:

$$e_3 = e_2 \frac{z_2}{z_3} = 25 \cdot \frac{24}{30} = 20 \text{ c}^{-2} = \text{const}.$$

У момент часу $t_1 = 0,4 \text{ c}$ маємо $w_3 = 20 \cdot 0,4 - 2 = 6 \text{ c}^{-1}$.

Визначимо модулі швидкості V , дотичного a_t , нормального a_n і повного a прискорення точки M .

У момент часу $t_1 = 0,4 \text{ c}$, $V = 2 \cdot 0,4 - 0,2 = 0,6 \text{ м/с}$ маємо:

$$a_t = e_3 \cdot r_3 = 20 \cdot 0,1 = 2 \text{ м/с}^2, \quad a_n = \omega_3^2 r_3 = 6^2 \cdot 0,1 = 3,6 \text{ м/с}^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{2^2 + 3,6^2} = 4,12 \text{ м/с}^2.$$

Так як швидкість вантажу дорівнює швидкості точки M $V_4 = 2t - 0,2$, то закон поступального руху знайдемо, інтегруючи вираз швидкості

$$x = \int (2t - 0,2) dt = t^2 - 0,2t + C_1.$$

Прийнявши початок відліку осі x в початковому положенні вантажу, коли $x_0 = 0$, отримаємо $C_1 = 0$, і за час $t_1 = 0,4 \text{ c}$ вантаж підніметься на висоту

$$h = x_{(t=t_1)} = t_1^2 - 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 \text{ м}.$$

Приклад 19

Прискорення точки M диска, що обертається навколо нерухомої осі, $a = 4 \text{ м/с}^2$ (рис. 81). Визначити кутову швидкість цього диска і швидкість точки M , якщо радіус диска $R = 0,5 \text{ м}$, а кут нахилу повного прискорення точки M до нормалі $\mu = 60^\circ$.

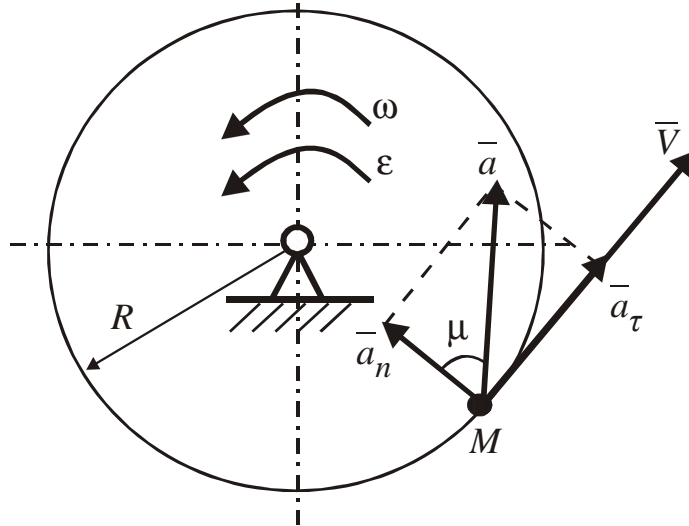


Рисунок 81

Розв'язання

Оскільки кут між вектором повного прискорення точки M і вектором її нормального прискорення відомий, то прискорення

$$a_n = a \cdot \cos \mu = 4 \cdot \cos 60^\circ = 2 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення точки при обертальному русі зв'язане з кутовою швидкістю тіла залежністю $a_n = \omega^2 \cdot R$. Звідки

$$\omega = \sqrt{\frac{a_n}{R}} = \sqrt{\frac{2}{0,5}} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Швидкість точки M :

$$V = \omega \cdot R = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с}.$$

Питання для самоконтролю

- 1 Які рухи твердого тіла називають простими?
- 2 Який рух твердого тіла називається поступальним? Назвіть основні властивості поступального руху тіла та запишіть рівняння поступального руху.
- 3 Яким рівнянням задають обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі?
- 4 Як зв'язані між собою кут повороту, кутова швидкість і кутове прискорення тіла?
- 5 Як направлені вектори кутової швидкості і кутового прискорення тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
- 6 Як визначають швидкість точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі?
- 7 Як визначають прискорення точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі? Чому дорівнюють і як направлені його складові?

3 ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

3.1 Основні визначення. Рівняння плоско-паралельного руху

Плоско-паралельним (або плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних одній нерухомій площині.

Вивчення плоского руху твердого тіла має велике значення, оскільки ланки більшості механізмів і машин, вживаних в механіці, здійснюють плоский рух. Наприклад, рух колеса на прямолінійній ділянці шляху, рух шатуна кривошипно-шатунного механізму і т.п. є плоским.

Із визначення плоского руху випливає, що перетин S (плоска фігура) тіла площиною Π_1 , паралельною нерухомій площині Π (рис. 82), рухається в площині Π_1 , а пряма лінія MM' , проведена через точку M перетину перпендикулярно площині Π , рухається поступально. Тому траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок цієї прямої однакові. Отже, плоский рух тіла повністю визначається рухом перетину S (плоскої фігури). Надалі

плоский рух тіла будемо розглядати як рух плоскої фігури S в площині Oxy , суміщеної з площиною рисунка.

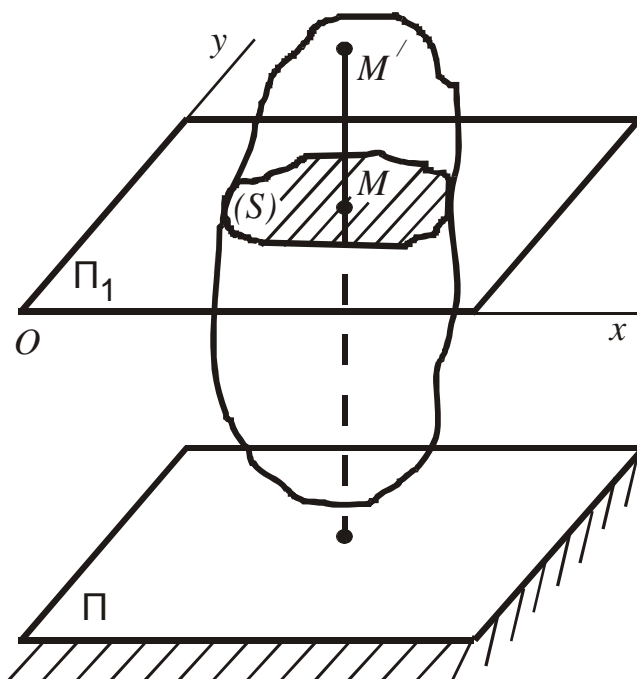


Рисунок 82

Положення плоскої фігури S в площині Oxy (рис. 83) визначається координатами x_A , y_A деякої точки A , яку називають полюсом, і кутом j нахилу до додатного напрямку осі Ox відрізка AB , зв'язаного з плоскою фігурою S .

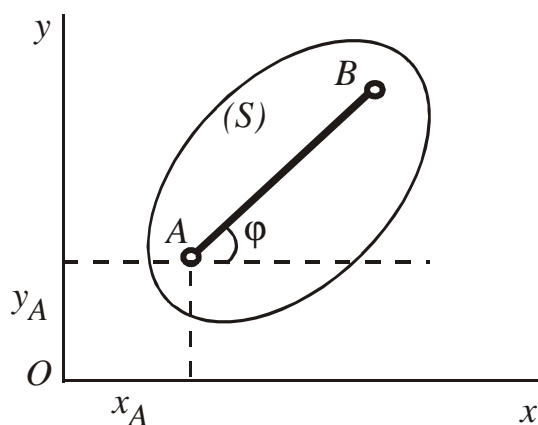


Рисунок 83

Залежність цих величин від часу

$$x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); j = f_3(t) \quad (126)$$

називають рівнянням плоско-паралельного (плоского) руху твердого тіла. Перші два з цих рівнянь визначають рух тіла при незмінному куті j , тобто у випадку поступального руху тіла. Третє рівняння характеризує рух тіла при незмінних координатах точки A , тобто при обертанні тіла навколо нерухомої осі, яка проходить через полюс A перпендикулярно площині Oxy .

Отже, *плоский рух твердого тіла можна розглядати як суму двох рухів: поступального разом з полюсом і обертального навколо осі, яка проходить через полюс перпендикулярно площині руху.*

Дійсно, переміщення плоскої фігури S із положення A_1B_1 в положення A_2B_2 (рис. 84) можна здійснити, перемістивши її спочатку поступально в положення A_2B_2' , а потім повернувши навколо полюса A_2 з положення A_2B_2' в положення A_2B_2 .

Кінематичними характеристиками плоского руху є швидкість і прискорення поступального руху, рівні швидкості \vec{V}_A і прискоренню \vec{a}_A полюса, а також кутова швидкість ω та кутове прискорення ϵ обертального руху навколо полюса.

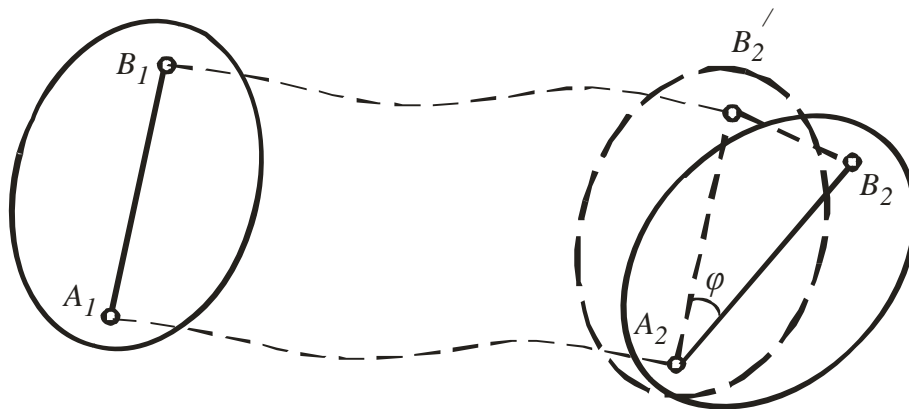


Рисунок 84

При вивченні плоского руху за полюс вибирають будь-яку точку тіла. Характеристики поступальної частини плоского руху (траєкторія, швидкість і прискорення полюса) залежить від того, яка точка вибрана за полюс. Характеристики обертальної частини руху (кутова швидкість і кутове прискорення) від вибору полюса не залежать. Дійсно, виберемо за полюс замість точки A точку C (рис. 85) і визначимо положення відрізка CB відносно осі Ox кутом u . У будь-який момент часу маємо, що $j = u + a$, де

$a = const$. Продиференціювавши цю залежність за часом, одержимо $w = \dot{\omega} = \dot{\omega}$; $e = \dot{e} = \dot{e}$ що свідчить про незалежність кінематичних характеристик обертальної частини плоского руху від вибору полюса.

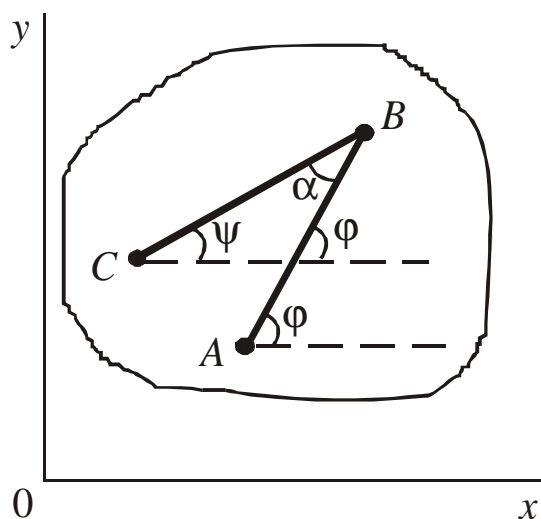


Рисунок 85

3.2 Визначення швидкості точок плоскої фігури

Із рівняння (126) плоско-паралельного руху визначаються тільки швидкість \bar{V}_A полюса і кутова швидкість w плоскої фігури. Для визначення швидкості будь-якої точки плоскої фігури розглянемо рух її довільної точки B (рис. 86), положення якої в кожний момент часу у відношенні до нерухомої системи відліку Oxy визначається радіусом-вектором

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB},$$

де \bar{r}_A -радіус-вектор точки A ; \overline{AB} -радіус-вектор точки B відносно полюса A . Тоді

$$\bar{V}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}.$$

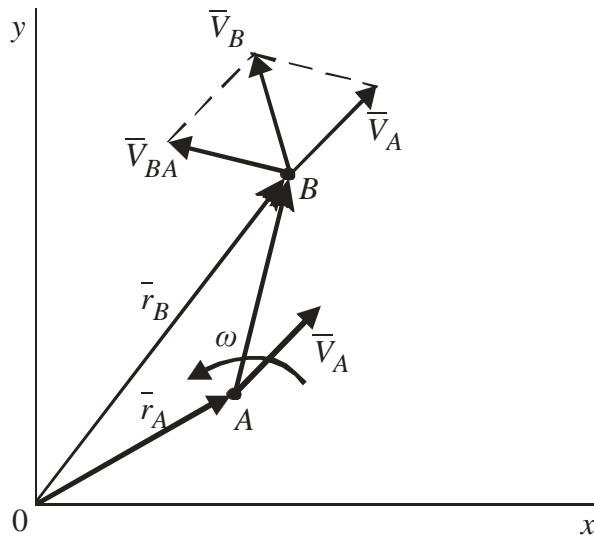


Рисунок 86

У цьому виразі: $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{V}_A$ – швидкість полюса A , а похідна від вектора постійного модуля \overline{AB} за часом дорівнює швидкості \vec{V}_{BA} , яку точка B одержує при обертанні плоскої фігури навколо полюса A . Отже, із попередньої рівності маємо

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (127)$$

При цьому швидкість \vec{V}_{BA} точки B в обертальному русі плоскої фігури навколо точки A

$$V_{BA} = w \cdot AB (\vec{V}_{BA} \perp \overline{AB}), \quad (128)$$

де w – кутова швидкість плоскої фігури.

Отже, швидкість будь-якої точки дорівнює геометричній сумі швидкості полюса і швидкості цієї точки в обертальному русі плоскої фігури навколо полюса.

Модуль і напрямок швидкості \vec{V}_B визначаються побудовою відповідного паралелограма (рис. 86).

3.3 Теорема про проекції швидкостей двох точок

Безпосереднє використання залежності (127) для визначення швидкостей точок плоскої фігури не завжди доцільне. Але з цієї залежності можна отримати інші, більш зручні і прості співвідношення, одне з яких дає така теорема: *проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що проходить через ці точки, рівні між собою.*

Для доведення теореми споектуємо векторну рівність (127) на лінію, проведену через точки A, B (рис.87) і, враховуючи, що $\vec{V}_{BA} \perp \overline{AB}$, одержимо

$$V_A \cdot \cos a = V_B \cdot \cos b . \quad (129)$$

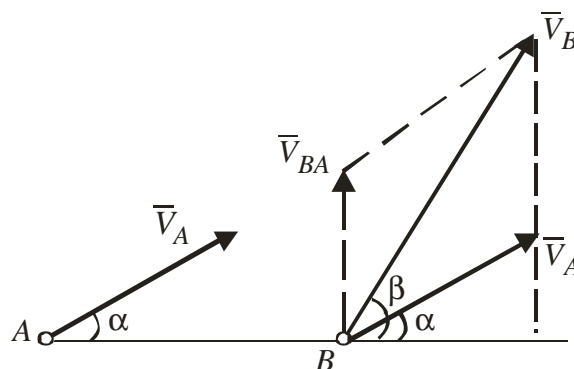


Рисунок 87

Доведена теорема дозволяє легко знаходити швидкість даної точки тіла, якщо відомі напрямки швидкості цієї точки та швидкість будь-якої іншої точки цього тіла.

3.4 Миттєвий центр швидкостей. Визначення швидкостей точок плоскої фігури за допомогою миттєвого центра швидкостей

Миттєвим центром швидкостей (м.ц.ш.) називають зв'язану з плоскою фігурою точку, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Покажемо, що за умови нерівності нулю кутової швидкості ($\omega \neq 0$) плоскої фігури завжди існує така точка.

Нехай відома швидкість \vec{V}_A довільної точки A плоскої фігури ($V_A \neq 0$) та її кутова швидкість ω (рис. 88). Проведемо промінь AN , перпендикулярний вектору \vec{V}_A , відклавши кут 90° у напрямку кутової швидкості плоскої фігури. Відкладемо на цьому промені відрізок

$$AP = \frac{V_A}{\omega} \quad (130)$$

і знайдемо швидкість точки P , взявши за полюс точку A :

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA},$$

де

$$V_{PA} = \omega \cdot AP = \omega \frac{V_A}{\omega} = V_A.$$

Оскільки вектор \vec{V}_{PA} перпендикулярний до AP і направлений у напрямку обертання плоскої фігури, то виявляється, що $\vec{V}_A = -\vec{V}_{PA}$, і $V_P = V_A - V_{PA} = 0$, тобто точка P у даний момент часу є миттєвим центром швидкості. Це єдина точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент

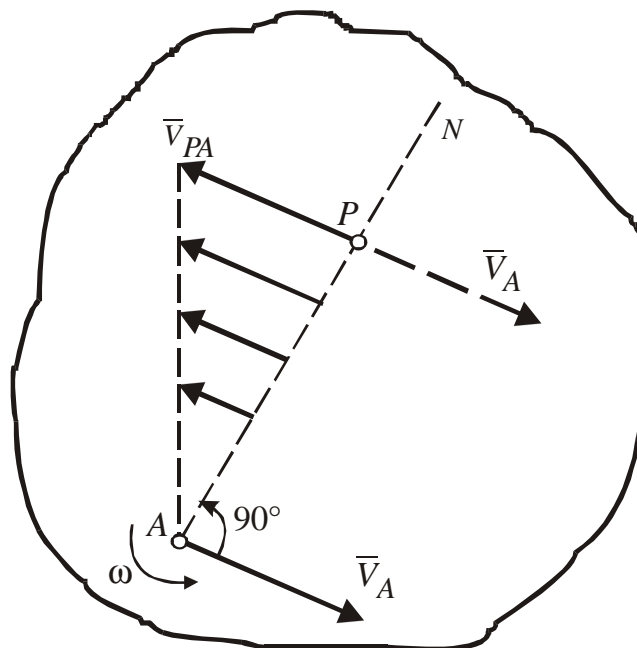


Рисунок 88

часу дорівнює нулю, так як при наявності ще однієї точки з нульовою швидкістю плоска фігура в даний момент часу була б нерухомою, що суперечить прийнятій умові $\overline{V}_A \neq 0$.

Виберемо тепер за полюс миттєвий центр швидкостей P , тоді швидкість будь-якої точки плоскої фігури визначиться залежностями (рис. 89)

$$\overline{V}_A = \overline{V}_P + \overline{V}_{AP} = \overline{V}_{AP}, \text{ або } V_A = w \cdot AP; \overline{V}_A \perp \overline{AP};$$

$$\overline{V}_B = \overline{V}_P + \overline{V}_{BP} = \overline{V}_{BP}, \text{ або } V_B = w \cdot BP; \overline{V}_B \perp \overline{BP};$$

$$\overline{V}_K = \overline{V}_P + \overline{V}_{KP}, \text{ або } V_k = w \cdot KP; \overline{V}_k \perp \overline{KP}.$$

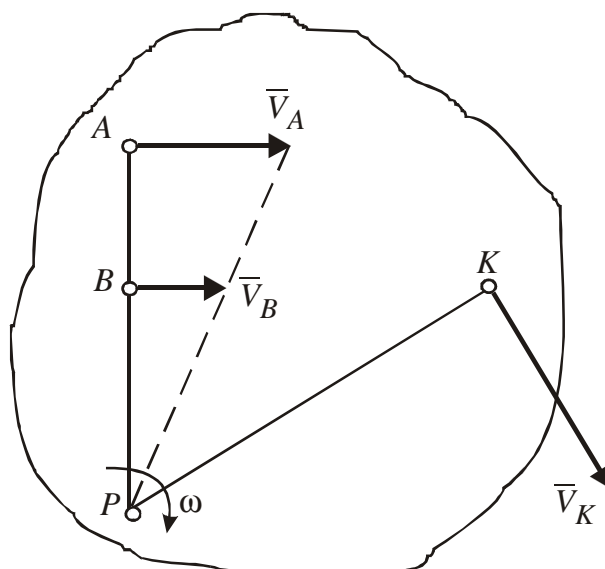


Рисунок 89

Отже, швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює її швидкості в обертальному русі плоскої фігури навколо миттєвого центра швидкостей. Із рівняння (130) маємо

$$w = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \mathbf{K} = \frac{V_K}{KP}, \quad (131)$$

тобто кутова швидкість плоскої фігури в даний момент часу дорівнює відношенню швидкості однієї з її точок до довжини відрізка, що з'єднує точку з м.ц.ш., а швидкості точок тіла пропорційні відстаням від цих точок до м.ц.ш.

3.5 Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей

Існує декілька типових прийомів знаходження положення миттєвого центра швидкостей.

1 Якщо відомі швидкість \vec{V}_A однієї з точок плоскої фігури та її кутлова швидкість w , то м.ц.ш. знаходиться на перпендикулярі до вектора \vec{V}_A швидкості точки, відкладеному в напрямку обертання плоскої фігури на відстані $AP = \frac{V_A}{w}$ (див. рис.88).

2 Якщо відомі напрямки швидкостей двох точок плоскої фігури і вектори цих точок непаралельні між собою (рис. 90), то м.ц.ш. знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів швидкостей цих точок.

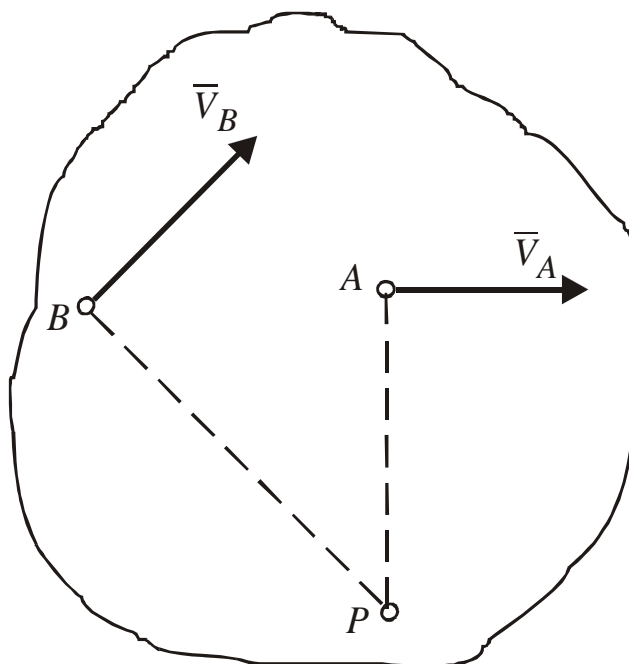


Рисунок 90

3 Якщо швидкості двох точок плоскої фігури паралельні між собою, перпендикулярні до відрізка, що з'єднує ці точки, а модулі цих швидкостей відомі і різні, то м.ц.ш. лежить на перетині спільного перпендикуляра до векторів швидкостей цих точок і лінії, проведеної через кінці цих векторів (рис.91).

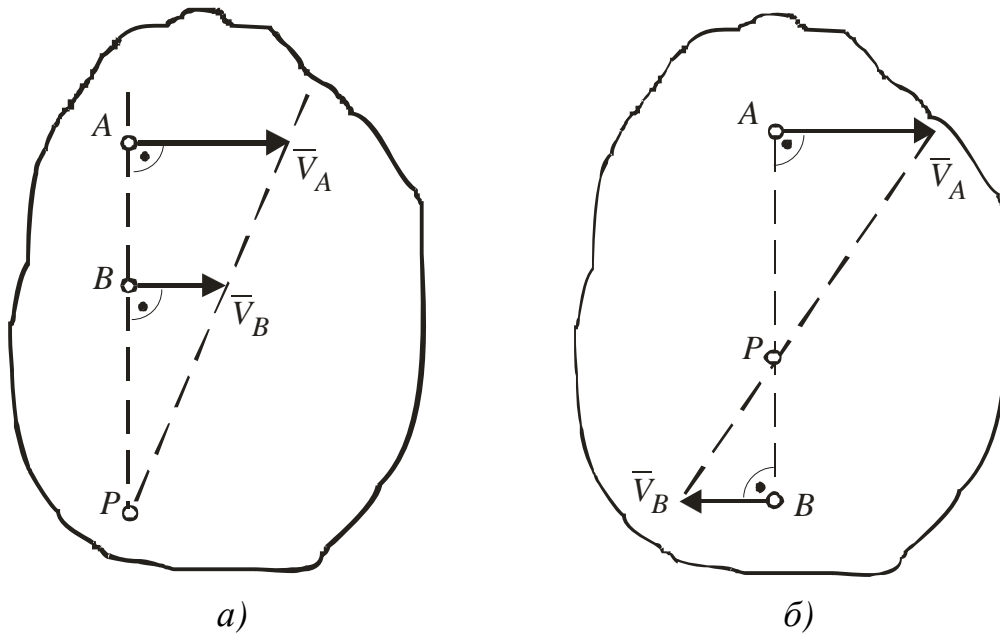


Рисунок 91

4 Якщо швидкості двох точок паралельні між собою, а лінія розміщення цих точок неперпендикулярна до їх швидкостей (рис. 92), то м.ц.ш. знаходиться в нескінченності ($AP = \infty$; $BP = \infty$), а кутова швидкість плоскої фігури $w = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = 0$. У цьому випадку тіло здійснює миттєво поступальний рух, при якому швидкості усіх точок у даний момент часу рівні за величиною і однакою направлені.

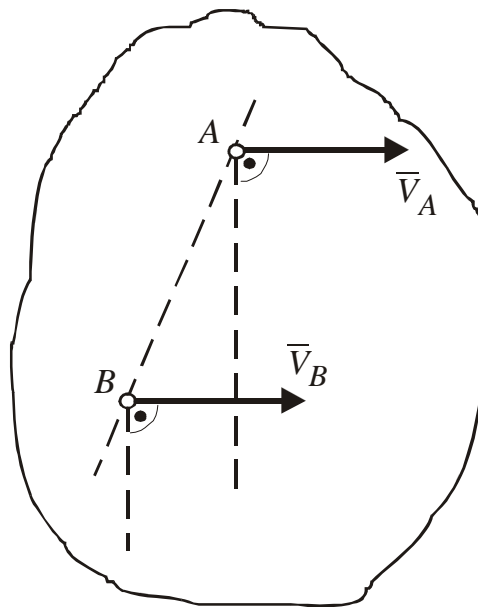


Рисунок 92

5 Якщо плоский рух здійснюється шляхом кочення без ковзання одного тіла нерухомою поверхнею іншого (рис.93). то м.ц.ш. знаходиться в

точці контакту тіла з нерухомою поверхнею, так як при відсутності ковзання швидкість цієї точки рухомого тіла дорівнює нулю.

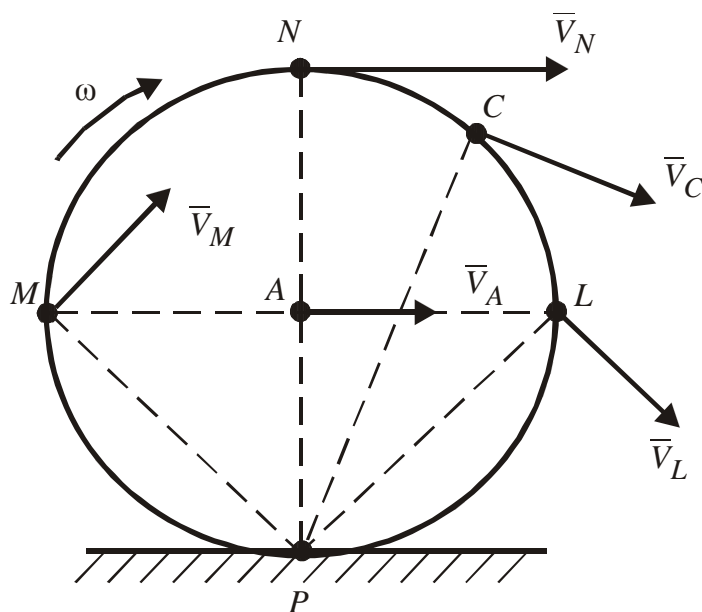


Рисунок 93

3.6 Визначення прискорень точок плоскої фігури

Прискорення довільної точки B плоскої фігури (див. рис.86) знайдемо шляхом диференціювання виразу (127) за часом:

$$\bar{a}_B = \frac{d\bar{V}_B}{dt} = \frac{d\bar{V}_A}{dt} + \frac{d\bar{V}_{AB}}{dt}.$$

Тут $\frac{d\bar{V}_A}{dt} = \bar{a}_A$ – прискорення полюса A , і $\frac{d\bar{V}_{BA}}{dt} = \bar{a}_{BA}$ – прискорення, яке має точка B при обертанні плоскої фігури навколо полюса A .

Отже, прискорення кожної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса і прискорення цієї точки в обертальному русі плоскої фігури навколо полюса:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}. \quad (132)$$

При цьому прискорення довільної точки в обертальному русі має дотичну і нормальну складові:

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n, \quad \bar{a}_{BA}^t \perp \overline{AB}, \quad \bar{a}_{BA}^n \parallel \overline{AB}.$$

Модулі цих складових

$$a_{BA}^t = e \cdot AB, \quad a_{BA}^n = w^2 \cdot AB. \quad (133)$$

У загальному випадку полюс A може рухатись криволінійно і його прискорення $\bar{a}_A = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n$, тому розгорнута формула для визначення прискорення довільної точки плоскої фігури буде мати чотири складових:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + a_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n. \quad (134)$$

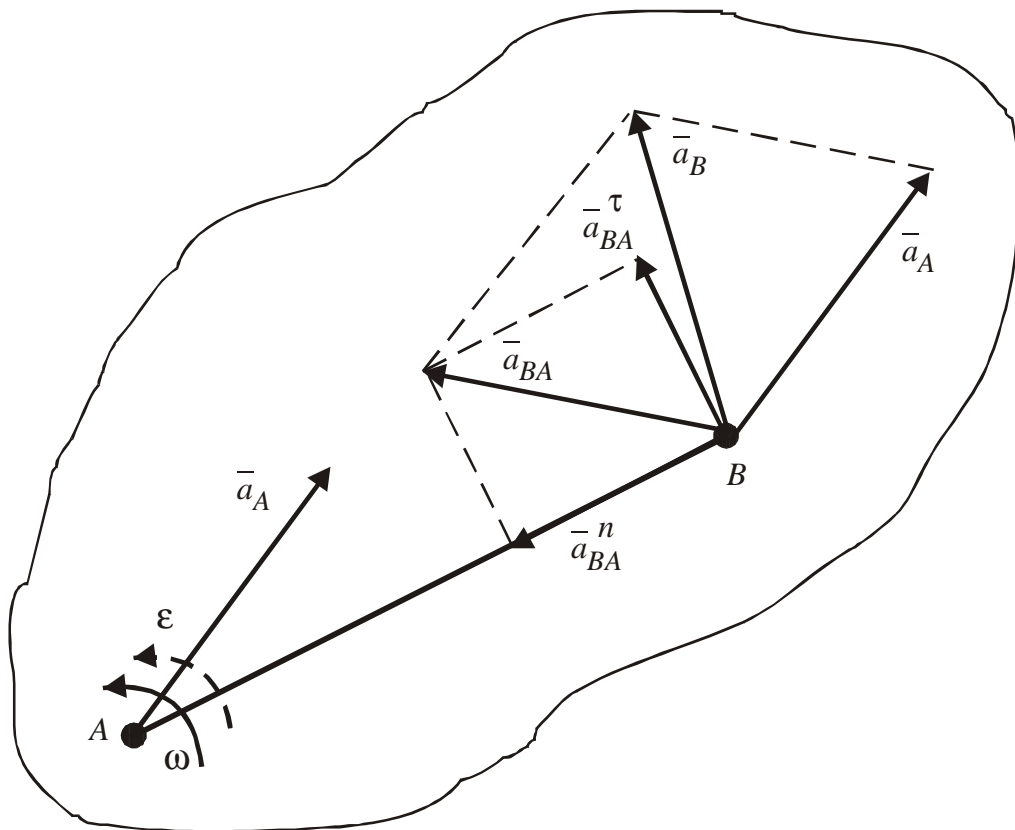


Рисунок 94

На рис.94 показано геометричне визначення вектора \bar{a}_B побудовою відповідного паралелограма. На практиці геометричне складання векторів

при знаходженні прискорення точки плоскої фігури зручніше здійснювати шляхом проектування векторного виразу (134) на вибрані осі координат.

3.7 Приклади розв'язання задач кінематики плоского руху

Задачі, для розв'язання яких використовують формули кінематики плоского руху тіла, стосуються переважно визначення швидкостей та прискорень точок різних механізмів і визначення кутових швидкостей та прискорень ланок цих механізмів за заданим рухом ведучої ланки механізму.

Механізм, рух якого розглядається, треба зображати на рисунку в тому положенні, для якого потрібно визначити відповідні характеристики.

При визначенні кутових швидкостей і швидкостей точок треба знати модуль та напрямок швидкості якої-небудь однієї з точок та напрямок швидкості іншої точки цього тіла, що дозволяє знайти положення миттєвого центра швидкостей (окрім випадку 5, розглянутого в розділі 3.5). При цьому треба розуміти, що кожна ланка механізму, яка здійснює плоско-паралельний рух, має в даний момент часу свій миттєвий центр швидкостей і свою кутову швидкість.

Для визначення кутового прискорення плоскої фігури і прискорень її точок застосовують векторний вираз (132), враховуючи, що при криволінійному русі точок їх прискорення мають дотичні та нормальні складові. Поставлена мета є досяжною, якщо відомі вектори швидкості і прискорення однієї з точок цієї фігури, а також траєкторія іншої точки фігури або положення миттєвого центра швидкостей.

Це дозволяє знайти модулі і напрямки більшості із прискорень виразу (132), залишивши невідомими тільки дві величини (модулі, напрями). Потім, проектуючи векторне рівняння (132) на вибрані осі координат, одержують два алгебраїчних рівняння, за якими обчислюють невідомі величини.

Кутове прискорення ϵ плоскої фігури частіше всього знаходять після обчислення дотичного прискорення однієї з точок фігури в обертальному русі навколо полюса, застосовуючи залежність (133). Але у випадку кочення без ковзання колеса нерухомою поверхнею (див.рис.93), коли відстань AP центра колеса до м.ц.ш. залишається незмінною, кутове прискорення

рення знаходять шляхом диференціювання за часом виразу кутової швидкості $w = \frac{V_A}{AP}$:

$$e = \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_A}{AP} \right) = \frac{1}{AP} \frac{dV_A}{dt},$$

або

$$e = \frac{a_A^t}{AP}.$$

Приклад 19

У плоскому механізмі, зображеному на рис 95, довжина ланок якого $l_1=OA=0,6\text{м}$, $l_2=AB=1,8\text{м}$, $l_3=O_1B=2,4\text{м}$, $O_1D=0,8\text{м}$ і $l_4=DE=1,2\text{м}$, кривошип OA обертається з кутовим прискоренням $e_1=10\text{с}^{-2}$. Визначити швидкості V_B, V_E точок B, E механізму і кутові швидкості w_2, w_4 стрижнів AB і DE , а також прискорення a_B точки B та кутове прискорення e_2 стрижня AB в положенні механізму, коли кути $a=60^\circ$, $b=90^\circ$, $g=45^\circ$, $q=120^\circ$, а кутова швидкість кривошипа OA $w_1=6\text{с}^{-1}$, його кутове прискорення $\varepsilon_1=10\text{с}^{-2}$.

Розв'язання

Будуємо положення механізму у відповідності до заданих кутів (рис.96). Визначаємо швидкість точок. Швидкість \bar{V}_A точки A перпендикулярна до кривошипа OA . Її модуль $V_A = w_1 \cdot l_1 = 6 \cdot 0,6 = 3,6 \text{ м/с}$.

Швидкість \bar{V}_B точки B , яка одночасно належить шатуну AB і кривошипу O_1B , перпендикулярна до кривошипа O_1B . Миттєвий центр швидкостей P_2 стрижня AB знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених з точок A і B до їх швидкостей. Швидкості точок стрижня AB (ланки 2) та його кутова швидкість зв'язані залежністю

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{V_B}{BP_2}.$$

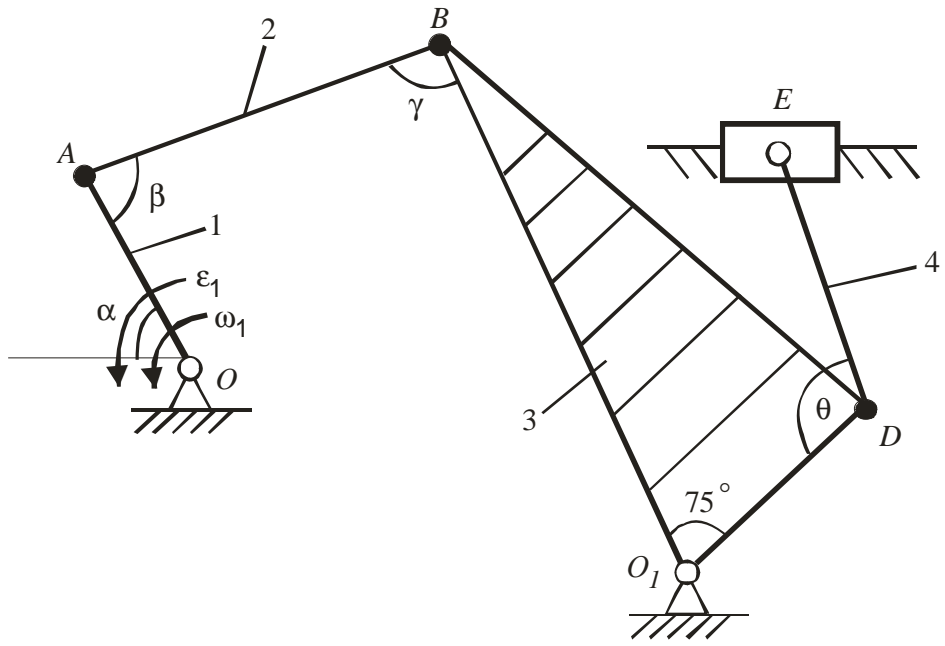


Рисунок 95

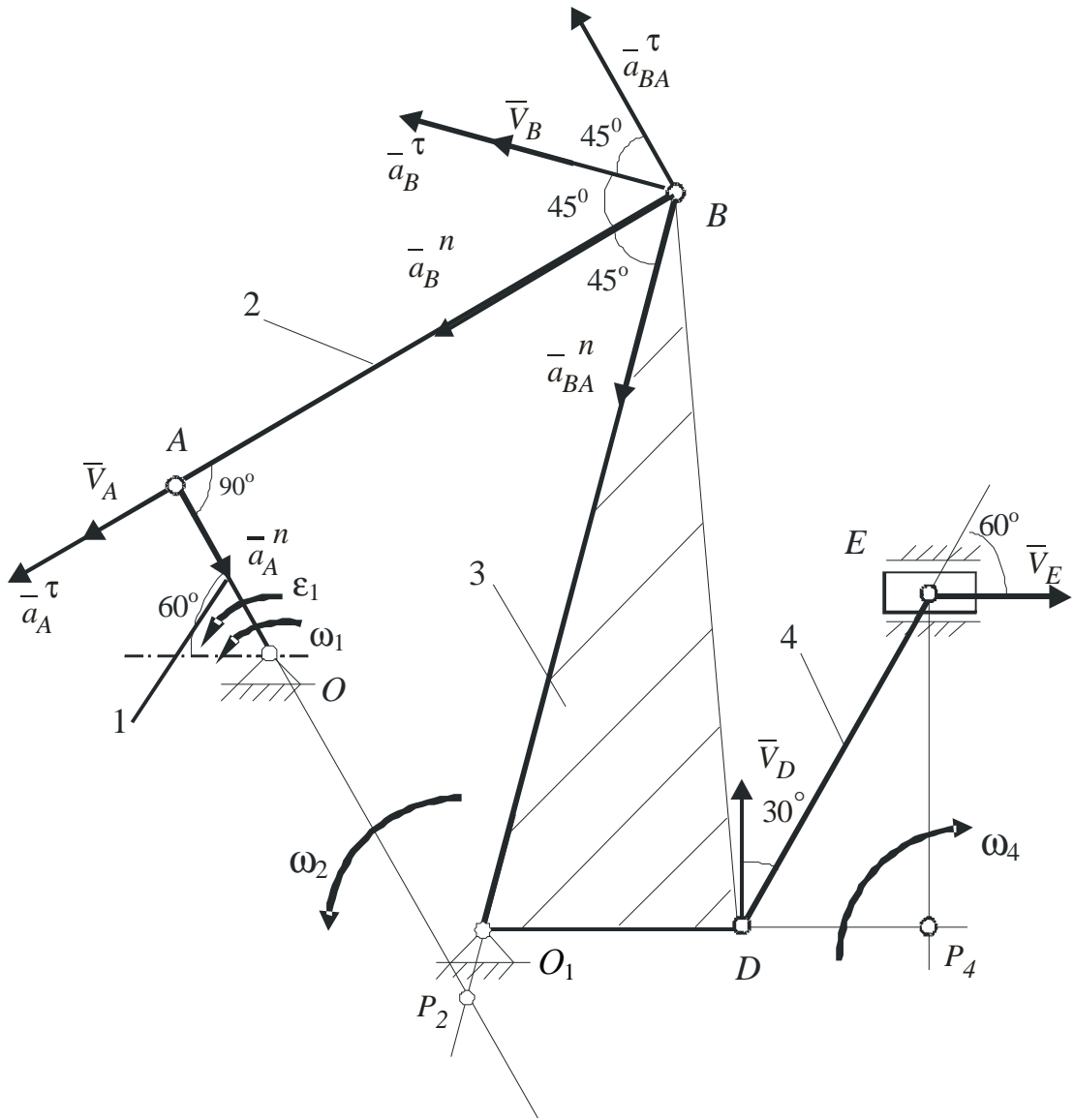


Рисунок 96

Як видно з рисунка 96, трикутник ABP_2 прямокутний і рівнобедрений, тому: $AP_2=AB=l_2=1,8$ м. Виходячи з цього, одержимо:

$$BP_2 = \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{1,8}{0,707} = 2,55 \text{ м.}$$

Отже

$$w_2 = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{3,6}{1,8} = 2 \text{ с}^{-1}; \quad V_B = \omega_2 BP_2 = 2 \cdot 2,55 = 5,1 \text{ м.}$$

Для визначення швидкості точки E , яка належить стрижню DE , треба спочатку знайти швидкість точки D . Так як точка D разом з точкою B належить до ланки 3, яка обертається навколо нерухомої точки O_1 з кутовою швидкістю w_3 , то швидкість точки D знайдемо з пропорції:

$$w_3 = \frac{V_B}{BO_1} = \frac{V_D}{DO_1}, \quad w_3 = \frac{V_B}{BO_1} = \frac{5,1}{2,4} = 2,125 \text{ с}^{-1},$$

$$V_D = V_B \cdot \frac{DO_1}{BO_1} = 5,1 \cdot \frac{0,8}{2,4} = 1,7 \text{ м/с.}$$

Вектор \vec{V}_D направлений перпендикулярно до стрижня DO_1 так, щоб кутова швидкість w_3 була направлена проти ходу годинникової стрілки відповідно до напрямку \vec{V}_B .

Напрямок вектора \vec{V}_E визначимо, виходячи з того, що точка E належить одночасно повзуну, який рухається вздовж направляючих поступально. Тепер, знаючи \vec{V}_D і напрям \vec{V}_E , скористаємось теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла (стрижня DE) на пряму, яка з'єднує ці точки. Спочатку за цією теоремою встановимо, в який бік напрямлений вектор \vec{V}_E (проекції швидкостей повинні мати однакові знаки). Потім, обчислюючи ці проекції, знаходимо:

$$V_D \cos 30^\circ = V_E \cos 60^\circ,$$

Звідки

$$V_E = V_D \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 1,7 \frac{0,866}{0,5} = 2,94 \text{ м.}$$

Для визначення кутової швидкості стрижня DE (ланки 4) знайдемо положення миттєвого центра швидкостей P_4 в точці перетину перпендикулярів, проведених з точок D і E до їх швидкостей. Тоді:

$$w_4 = \frac{V_D}{DP_4} = \frac{V_E}{EP_4}.$$

З прямокутного трикутника DEP_4 знайдемо:

$$DP_4 = DE \sin 30^\circ = 1,2 \cdot 0,5 = 0,6 \text{ м.}$$

Отже

$$w_4 = \frac{V_D}{DP_4} = \frac{1,7}{0,6} = 2,83 \text{ с}^{-1}.$$

Визначаємо прискорення точок. Прискорення точки A складається з дотичного і нормального прискорень:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n,$$

$$a_A^t = e_1 l_1 = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = w_2 l_1 = 6^2 \cdot 0,6 = 21,6 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \bar{a}_A^t направлений перпендикулярно до OA , а вектор \bar{a}_A^n направлений від точки A до точки O .

Для визначення прискорення точки B скористуємося рівнянням

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n.$$

Так як точка B належить не тільки стрижню AB , а і стрижню BO_1 (ланці 4), який обертається навколо нерухомої точки O_1 , то прискорення точки B також складається з дотичного і нормального прискорень, тобто

$$\bar{a}_B^t + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n.$$

Вектор \bar{a}_B^t направляємо перпендикулярно до стрижня OB в той чи інший бік. Його обчислення за формулою $a_B^t = e_3 l_3$ неможливо, так як значення e_3 невідомо. Нормальне прискорення точки B

$$a_B^n = w_3^2 l_3 = 2,125^2 \cdot 2,4 = 10,85 \text{ м/с}^2$$

і вектор \bar{a}_B^n направляємо від точки B до точки O_1 .

Вектор \bar{a}_{BA}^t направляємо перпендикулярно до стрижня AB в будь-яку сторону, а вектор \bar{a}_{BA}^n – вздовж AB від точки B до точки A , і знаходимо числове значення:

$$a_{BA}^n = w_2^2 l_2 = 2^2 \cdot 1,8 = 7,2 \text{ м/с}^2.$$

Таким чином, у величинах, які входять до векторного рівняння невідомі тільки числові значення a_B^t і a_{BA}^t . Щоб знайти ці величини, спроеціюємо обидві частини векторного рівняння на дві довільно вибрані перпендикулярні осі x та y . Направляємо одну з осей (вісь x) вздовж стрижня AB і в результаті проектування одержимо:

$$-a_B^t \cos 45^\circ - a_B^n \cos 45^\circ = -a_A^t - a_{BA}^n,$$

$$a_B^t \sin 45^\circ - a_B^n \sin 45^\circ = -a_A^n + a_{BA}^t.$$

З цих алгебраїчних рівнянь знаходимо:

$$a_B^t = \frac{a_A^t}{\cos 45^\circ} + \frac{a_{BA}^n}{\cos 45^\circ} - a_B^n = \frac{6}{0,707} + \frac{7,2}{0,707} - 10,85 = 7,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^t = a_A^n + a_B^t \sin 45^\circ - a_B^n \sin 45^\circ = 21,6 + 7,8 \cdot 0,707 - 10,85 \cdot 0,707 = 19,5 \text{ м/с}^2.$$

Тоді прискорення точки B :

$$a_B = \sqrt{(a_B^t)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{7,8^2 + 10,85^2} = 13,4 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення стрижня AB :

$$e_2 = \frac{a_{BA}^t}{AB} = \frac{19,5}{2,4} = 8,1 \text{ с}^{-2}.$$

Відповідь:

$$V_B = 5,1 \text{ м/с}; V_E = 2,85 \text{ м/с}; w_2 = 2 \text{ с}^{-1}; V_4 = 2,83 \text{ с}^{-1}; a_B = 13,4 \text{ м/с}^2; e_2 = 8,1 \text{ с}^{-2}.$$

Приклад 20

Шестерня 2 радіуса $R = 12$ см планетарного механізму (рис. 97,а) починає рухатися кривошипом OA , який обертається навколо осі O нерухомої шестерні 1 з тим же радіусом. Кривошип OA обертається з кутовим прискоренням $e_0 = 8 \text{ с}^{-2}$, маючи у даний момент кутову швидкість $w_0 = 2 \text{ с}^{-1}$. Визначити швидкість і прискорення точки B рухомої шестерні механізму, якщо $\angle OAB = 120^\circ$.

Розв'язання

У даному механізмі кривошип OA здійснює обертальний рух, а шестерня 2 рухається плоско-паралельно. Кінематичні характеристики точки A обчислимо, розглядаючи обертальний рух кривошипа OA (рис. 97,б):

$$V_A = w_0 \cdot OA = 2 \cdot 24 = 48 \text{ см/с};$$

$$a_A^t = e_0 \cdot OA = 8 \cdot 24 = 192 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A^n = w_0^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 24 = 96 \text{ см/с}^2.$$

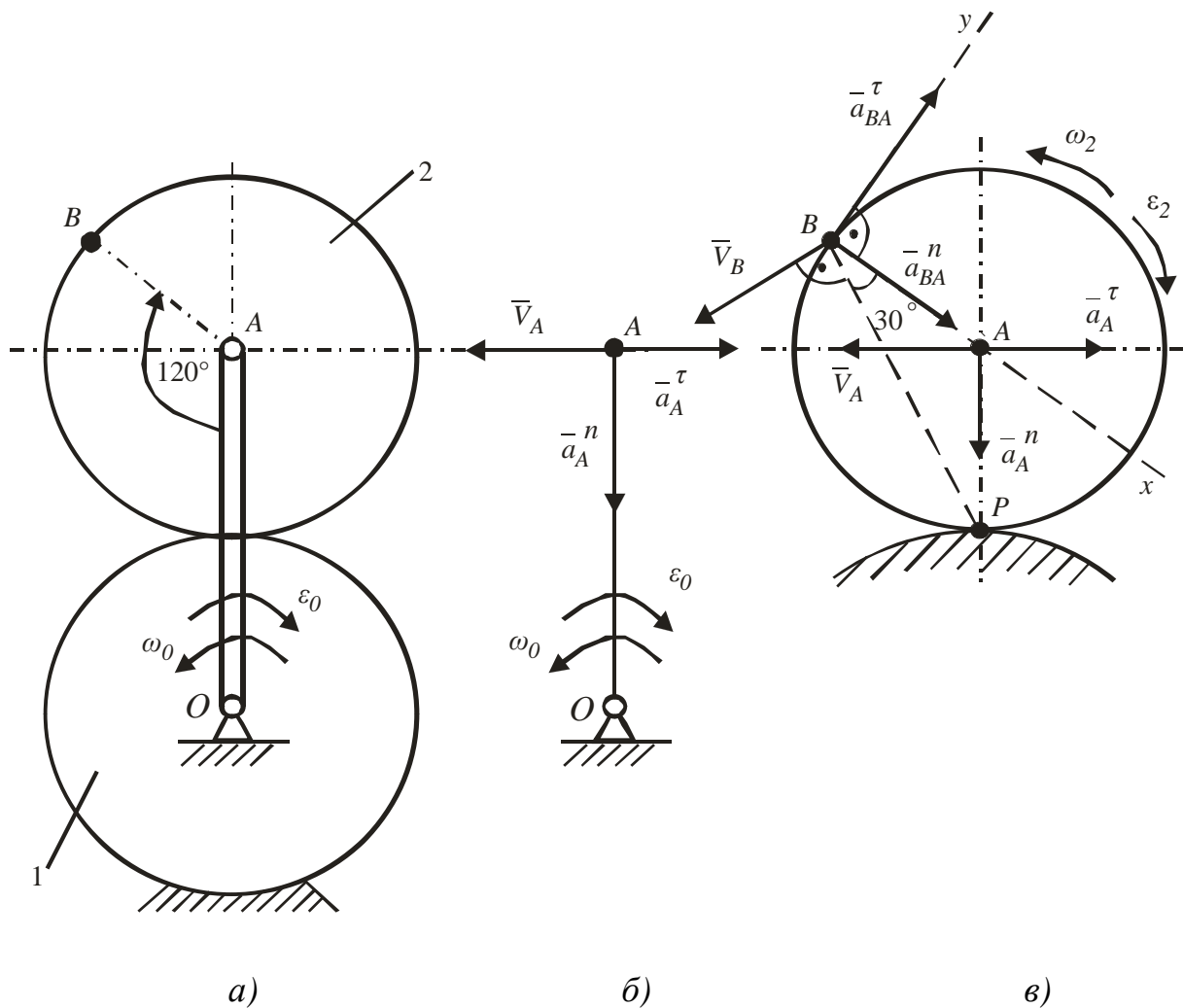


Рисунок 97

Напрямки векторів $\bar{V}_A, \bar{a}_A^t, \bar{a}_A^n$ показані на рис. 97,б.

Тепер розглянемо плоский рух шестерні 2, для якої миттєвий центр швидкостей P знаходиться в точці її контакту з нерухомою шестернею 1, а відстань $AP = R = const$.

Тоді

$$w_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{R} = \frac{48}{12} = 4 \text{ с}^{-2}, \quad e_2 = \frac{a_A^t}{R} = \frac{192}{12} = 16 \text{ с}^{-2},$$

а $V_B = w_2 \cdot PB = 4 \cdot 20,8 = 83,2 \text{ см/с}$, де відстань BP знайдена з рівнобедреного трикутника ABP :

$$BP = 2R \cos 30^\circ = 2 \cdot 12 \cdot 0,866 = 20,8 \text{ см.}$$

Направлений вектор \bar{V}_B перпендикулярний до BP , як показано на рис. 97, в.

Прискорення точки B знайдемо за формулою розподілу прискорень відносно полюса A :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^t + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n.$$

Складові прискорення точки B в обертальному русі навколо полюса A знайдемо за формулами:

$$a_{BA}^t = e_2 \cdot AB = e_2 \cdot R = 16 \cdot 12 = 192 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = w_2^2 \cdot AB = w^2 \cdot R = 4^2 \cdot 12 = 192 \text{ см/с}^2.$$

Напрямки складових вектора прискорення точки B показані на рис. 97, в. Вибравши осі координат (див. рис. 97, в), визначимо проекції вектора \bar{a}_B на ці осі:

$$a_{Bx} = a_A^t \cos 30^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^n = 192 \cdot 0,866 + 96 \cdot 0,5 + 192 = 406,3 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{By} = a_A^t \sin 30^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^t = 192 \cdot 0,5 - 96 \cdot 0,866 + 192 = 204,9 \text{ см/с}^2.$$

Тоді

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{406,3^2 + 204,9^2} = 455 \text{ см/с}^2.$$

Питання для самоконтролю

1 Який рух тіла називають плоско-паралельним або плоским?

- 2 Якими рівняннями задають плоский рух тіла?
- 3 Як зв'язані між собою швидкість довільної точки плоскої фігури та швидкість точки, вибраної за полюс?
- 4 Сформулюйте теорему про проекції швидкостей двох точок.
- 5 Що називається миттєвим центром швидкостей?
- 6 Як визначаються положення миттєвого центра швидкостей?
- 7 Де знаходиться миттєвий центр швидкостей плоскої фігури, яка здійснює миттєво поступальний рух?
- 8 Як розподіляються швидкості точок плоскої фігури відносно її миттєвого центра швидкостей?
- 9 Як визначається прискорення довільної точки плоскої фігури?

4 РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ. РУХ ВІЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

4.1 Кути Ейлера. Рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої точки

Рух тіла, при якому одна його точка залишається нерухомою, називають обертанням навколо нерухомої точки або сферичним рухом.

При такому русі тіло має три ступеня вільності і його положення визначається трьома незалежними параметрами-кутами Ейлера. Для встановлення цих параметрів проведемо через нерухому точку O тіла дві системи координат: нерухому $Ox_1y_1z_1$ та рухому $Oxyz$, жорстко зв'язану з тілом (рис. 98). На цьому рисунку лінія OK , яка називається лінією вузлів, є лінією перетину нерухомої координатної площини Ox_1y_1 та рухомої площини Oxy . Кутами Ейлера, які визначають положення рухомої системи координат і зв'язаного з ним тіла є :

- кут прецесії ψ між нерухомою віссю Ox_1 , та лінією вузлів OK ;
- кут нутації q між нерухомою віссю Oz_1 і рухомою віссю Oz ;
- кут власного обертання j між лінією вузлів OK і рухомою віссю

Ox .

Кутами Ейлера γ, q, j характеризується обертання тіла навколо відповідно осі Oz_1 лінії вузлів OK та осі Oz , тому знак кожного з них буде додатним, якщо при розгляді з додатних напрямків цих осей видно ці кути відкладеними проти ходу годинникової стрілки (див. рис. 92).

Для визначення положення тіла з однією нерухомою точкою в кожен момент часу треба задати кут Ейлера як функції від часу:

$$\gamma = f_1(t), \quad q = f_2(t), \quad j = f_3(t). \quad (135)$$

Ці залежності є рівнянням (законом) сферичного руху тіла.

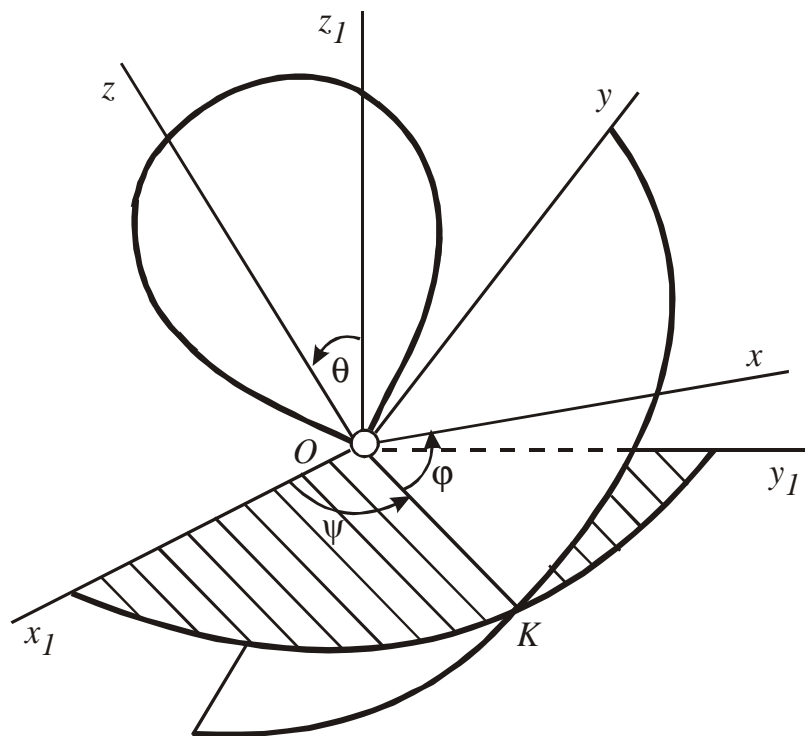


Рисунок 98

4.2 Миттєва вісь обертання. Кутова швидкість і кутове прискорення тіла при його сферичному русі

Характер руху тіла з однією нерухомою точкою встановлює така теорема Ейлера-Даламбера: *будь-яке елементарне переміщення тіла з однією нерухомою точкою можна отримати одним елементарним поворотом навколо деякої миттєвої осі обертання, яка проходить через цю точку.*

Нехай тіло з нерухомою точкою O за елементарний проміжок часу dt повернулось відносно нерухомої осі Oz_1 , лінії вузлів OK та рухомої осі Oz на відповідні елементарні кути повороту dy , dq , dj (рис. 99).

Складаючи спочатку повороти навколо осей Oz і Oz_1 , встановимо, що будь-яка точка тіла, розміщена в площині zOz_1 , одержить елементарні переміщення, перпендикулярні до цієї площини і чисельно рівні $ds_z = h_z dj$ від повороту на кут dj та $ds_{z_1} = h_{z_1} dy$ від повороту на кут dy , де h_z і h_{z_1} – відстані від цієї точки до відповідних осей.

Оскільки ці переміщення перпендикулярні до площини zOz_1 , то в площині zOz_1 знайдеться така точка B , для якої результуюче переміщення від елементарних поворотів dj і dy буде дорівнювати нулю ($ds_{B_z} = ds_{B_{z_1}}$). Це дозволяє зробити висновок, що в результаті складання елементарних поворотів навколо осей Oz і Oz_1 одержимо елементарний поворот db навколо осі OB , яка проходить через точку O .

Аналогічно можна показати, що елементарні повороти db і dq навколо осей OB і OK еквівалентні одному елементарному повороту da навколо деякої осі OP , що проходить через нерухому точку O . Дійсно (див. рис. 99), в площині ліній OB і OK є деяка точка P , елементарні переміщення $ds_{POB} = h_{POB} \cdot db$ та $ds_{POK} = h_{POK} \cdot dq$ якої рівні між собою і протилежно направлені (див. рис. 99). Отже ця точка тіла при здійсненні елементарних поворотів dy , dq , dj буде нерухомою і її швидкість в даний момент часу дорівнює нулю. Тоді пряма лінія OP , проведена через дану точку P і нерухому точку O буде геометричним місцем точок тіла, швидкість яких у даний момент часу дорівнює нулю. Ця пряма називається *миттєвою віссю обертання*.

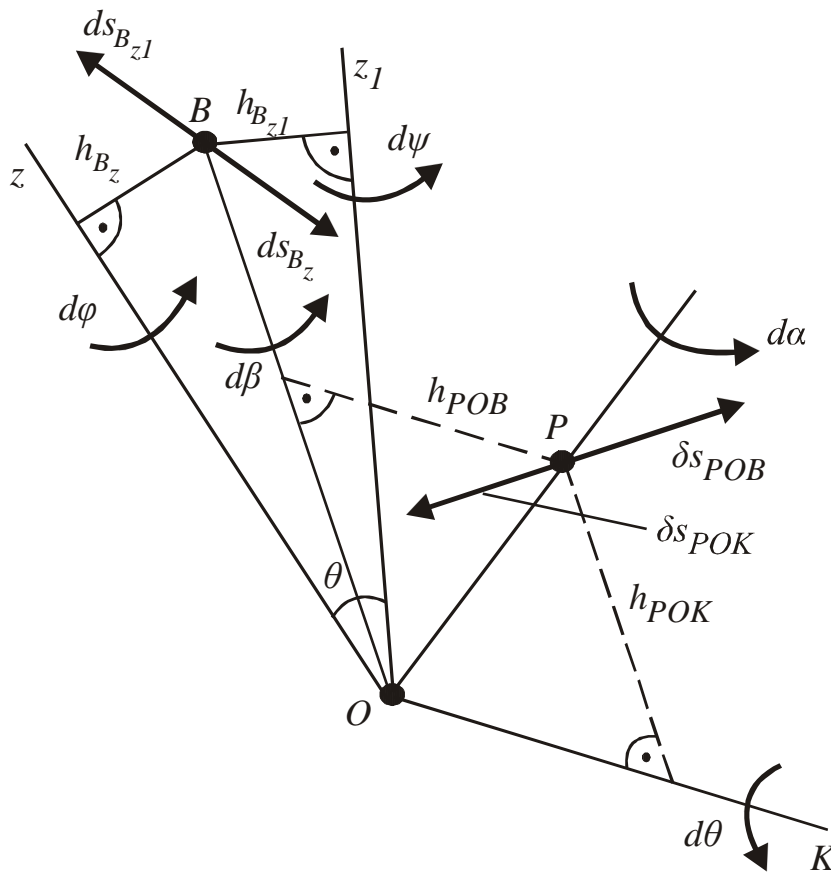


Рисунок 99

Із доведеної теореми можна зробити висновок, що *рух твердого тіла навколо нерухомої точки складається із сукупності послідовних елементарних поворотів тіла навколо миттєвих осей обертання, які проходять через цю нерухому точку*. Положення миттєвої осі обертання з часом безперервно змінюється як в тілі, так і в нерухомому просторі.

Кутова швидкість w , з якою тіло здійснює елементарний поворот навколо осі обертання, називається миттєвою кутовою швидкістю

$$w = \frac{da_{op}}{dt}.$$

Вектор \bar{w} кутової швидкості направляють вздовж миттєвої осі обертання OP у напрямку, звідки видно обертання тіла проти ходу годинникової стрілки (рис. 100). Напрямок вектора \bar{w} як і положення миттєвої осі обертання з часом змінюється, і кінець A цього вектора описує в просторі деяку криву – годограф вектора \bar{w} .

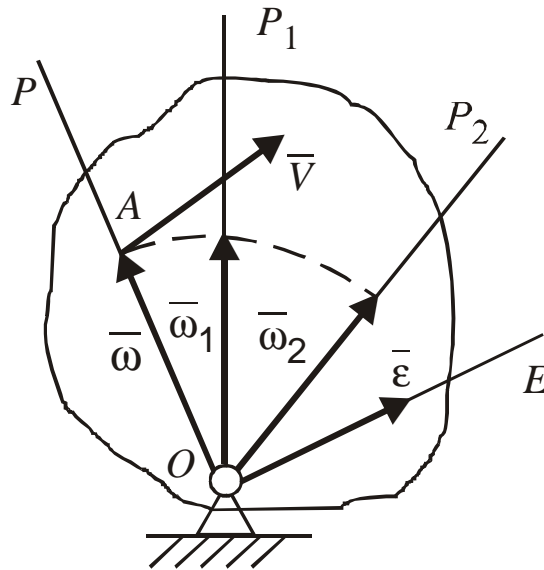


Рисунок 100

Вектор миттєвого кутового прискорення

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}.$$

Направлений він за дотичною до годографа вектора $\bar{\omega}$, паралельно швидкості \bar{V} точки A (рис. 100) Вектори $\bar{\omega}, \bar{\epsilon}$ є кінематичними характеристиками руху тіла з однією нерухомою точкою.

4.3 Швидкості та прискорення точок тіла при його обертанні навколо нерухомої точки

Швидкості точок тіла при його сферичному русі визначаються формулою Ейлера

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad (136)$$

де $\bar{\omega}$ – вектор миттєвої кутової швидкості;

\bar{r} – радіус-вектор розглядуваної точки M відносно нерухомої точки O (рис. 101). Модуль швидкості

$$V = wr \sin a = wh, \quad (137)$$

де h – відстань від точки M тіла до миттєвої осі обертання OP . Диференціюючи вираз (136) за часом, одержимо таку формулу для визначення прискорення точки тіла:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt},$$

але

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{e} \quad \text{і} \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

тоді, відповідно до формули Рівальса

$$\bar{a} = \bar{e} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V}. \quad (138)$$

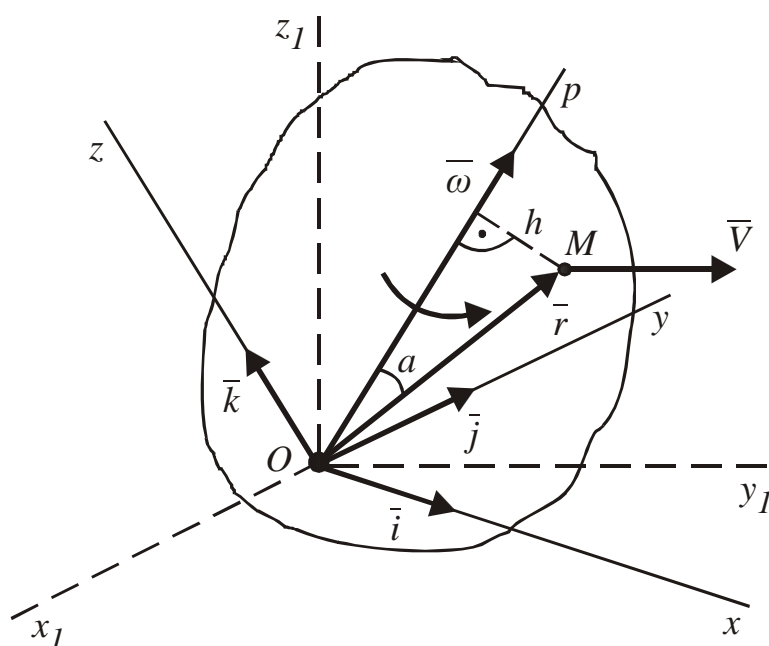


Рисунок 101

Отже прискорення точки тіла при його обертанні навколо нерухомої точки складається з двох прискорень: так званого обертального прискорення

$$\bar{a}_{об} = \bar{e} \times \bar{r},$$

і доосьового прискорення

$$\bar{a}_{oc} = \bar{\omega} \times \bar{V}.$$

Обертальне прискорення \bar{a}_{ob} направлено перпендикулярно до площини векторів \bar{e}, \bar{r} (рис. 102) і за модулем

$$a_{ob} = e \cdot r \sin b = e \cdot h_1,$$

де h_1 – відстань від точки M до вектора кутового прискорення. Вектор \bar{a}_{oc} перпендикулярний одночасно \bar{V} та $\bar{\omega}$ і направлений до миттєвої осі обертання (рис. 102). За величиною

$$a_{oc} = w \cdot V \cdot \sin 90^\circ = w \cdot V = w^2 \cdot h,$$

де h – відстань від точки M до миттєвої осі обертання.

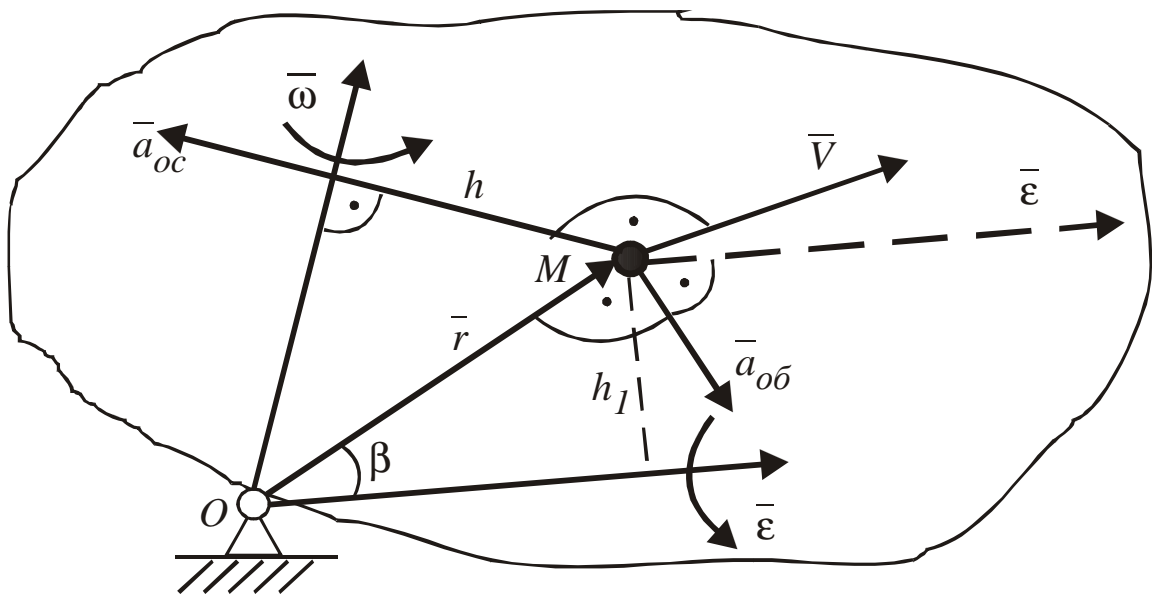


Рисунок 102

Модуль повного прискорення точки в цьому випадку обчислюють за формулою

$$a = \sqrt{a_{o\bar{o}}^2 + a_{oc}^2 + 2|a_{o\bar{o}}| \cdot a_{oc} \cdot \cos\left(\widehat{\bar{a}_{o\bar{o}}, \bar{a}_{oc}}\right)}. \quad (139)$$

4.4 Загальний випадок руху вільного твердого тіла

Для визначення положення вільного твердого тіла в просторі відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ виберемо за полюс довільну точку O тіла і проведемо через неї зв'язані з тілом рухомі осі координат $Ox'_1y'_1z'_1$, які при русі тіла переміщуватимуться разом з нею поступально. Положення тіла щодо нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ буде відоме, якщо ми знатимемо в кожний момент часу положення полюса O , тобто його координати x_0, y_0, z_0 і положення тіла відносно рухомої системи координат, визначуване кутами Ейлера y, q, j (рис. 103). Таким чином, положення вільного твердого тіла в просторі в загальному випадку руху тіла можна визначити шістьма параметрами, які змінюються за часом:

$$\begin{aligned} x_0 &= f_1(t), & y &= f_4(t), \\ y_0 &= f_2(t), & q &= f_5(t), \\ z_0 &= f_3(t), & j &= f_6(t). \end{aligned} \quad (140)$$

Ці рівняння називають рівняннями руху вільного твердого тіла. Перші три рівняння визначають рух полюса O і водночас – поступальний рух системи координат $Ox'_1y'_1z'_1$, а інші три – миттєвий обертальний рух тіла навколо полюса O .

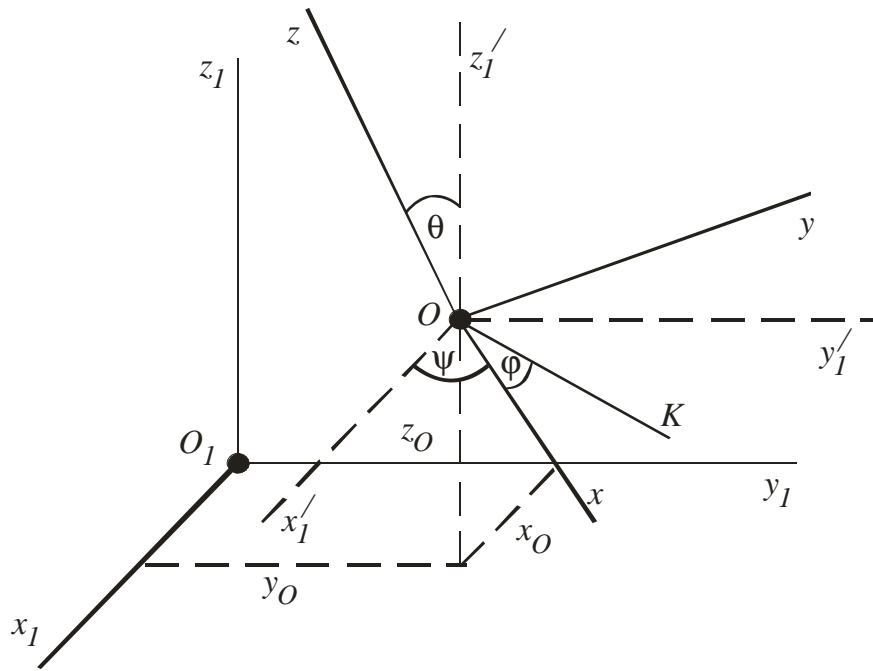


Рисунок 103

Тому можна сказати, що в загальному випадку рух вільного твердого тіла в кожний момент часу складається із поступального руху разом з полюсом та із серії елементарних рухів навколо миттєвої осі обертання, яка проходить через полюс (рис. 104). Такий характер руху вільного тіла дозволяє обчислювати швидкість та прискорення точок вільного тіла шляхом геометричного складання цих кінематичних характеристик в кожному із складових рухів.

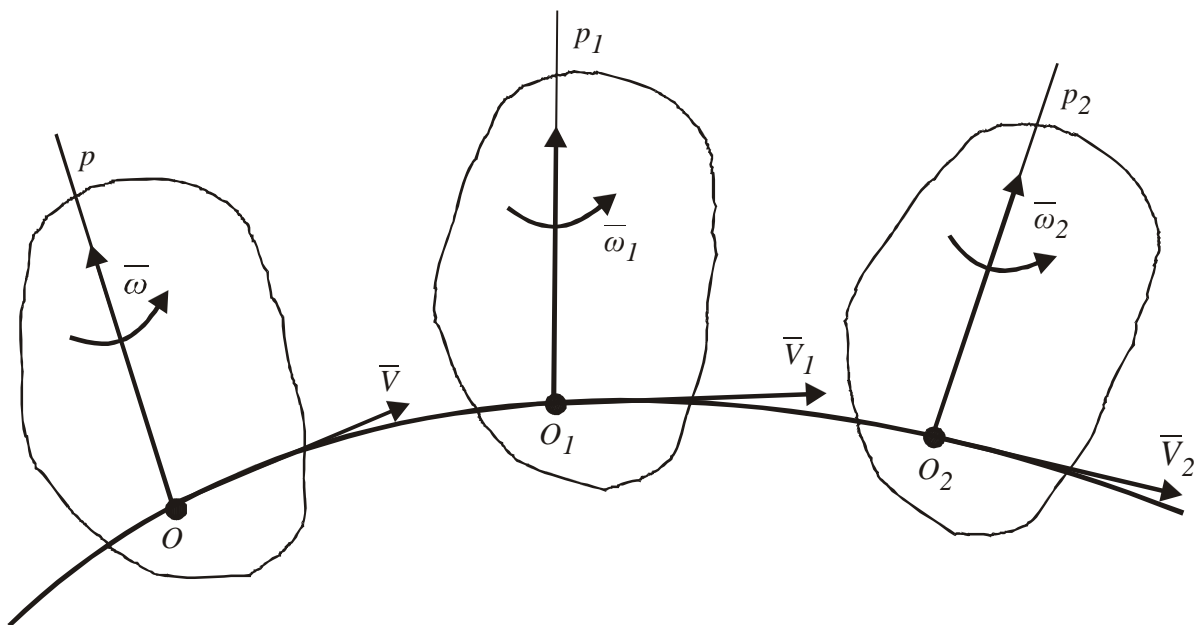


Рисунок 104

Дійсно, для радіуса-вектора довільної точки B тіла, яке вільно рухається відносно нерухомої точки O_1 в кожен момент часу справедлива залежність (рис. 105)

$$\bar{r}_B = \bar{r}_O + \bar{r},$$

де \bar{r}_O – радіус-вектор полюса O ,

\bar{r} – постійний за модулем радіус-вектор точки B відносно полюса O .

Диференціюючи цю залежність, одержимо:

$$\bar{V}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt},$$

де $\frac{d\bar{r}_O}{dt} = \bar{V}_O$ – швидкість полюса O ,

$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{V}_{BO}$ – швидкість точки B тіла при його обертанні на-

вколо миттєвої осі.

Тоді

$$\bar{V}_B = \bar{V}_O + \bar{V}_{BO} = \bar{V}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (141)$$

Прискорення точки вільного тіла знайдемо, диференціюючи рівність (141):

$$\bar{a}_B = \frac{d\bar{V}_B}{dt} = \frac{d\bar{V}_O}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{a}_O + \bar{e} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V},$$

де \bar{a}_O – прискорення полюса O ;

$\bar{e} \times \bar{r} = \bar{a}_{BO}^{ob}$ – обертальне прискорення в сферичній частині руху тіла навколо полюса O ;

$\bar{\omega} \times \bar{V} = \bar{a}_{BO}^{oc}$ – доосьове прискорення тіла в сферичній частині його руху навколо полюса O .

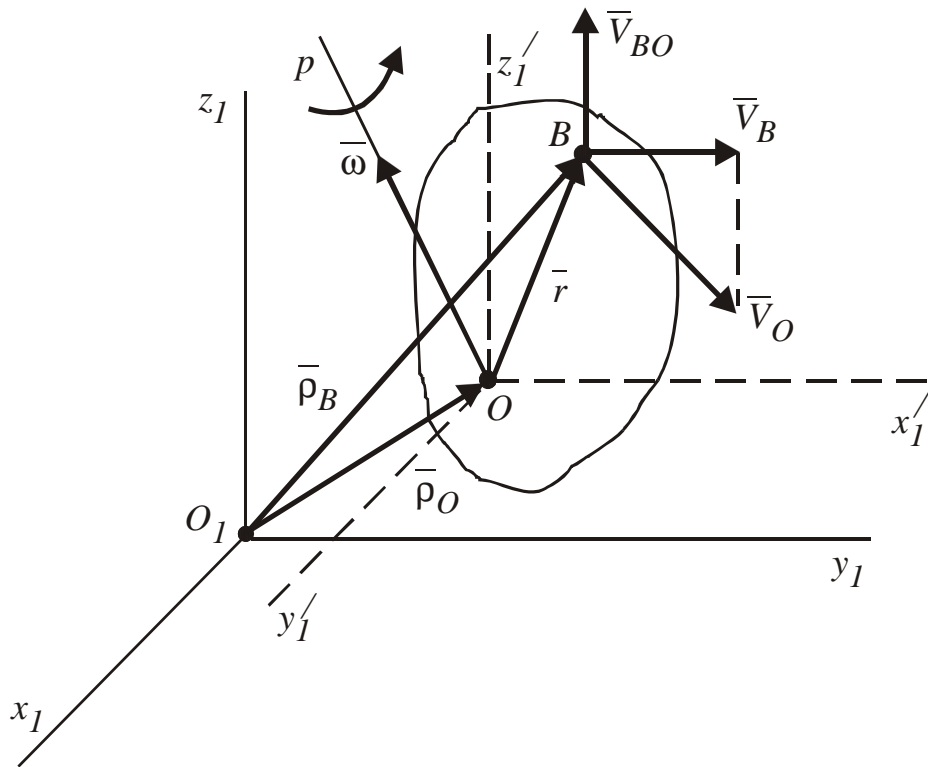


Рисунок 105

Отже повне прискорення точки вільного тіла визначається залежністю

$$\bar{a}_B = \bar{a}_O + \bar{a}_{BO} = \bar{a}_O + \bar{a}_{BO}^{ob} + \bar{a}_{BO}^{oc}. \quad (142)$$

Питання для самоконтролю

- 1 Який рух тіла називають сферичним?
- 2 Скільки незалежних величин потрібно для визначення положення тіла з однією нерухомою точкою?
- 3 Що таке кути Ейлера? Запишіть рівняння сферичного руху тіла.
- 4 Сформулюйте теорему Ейлера-Даламбера про елементарне переміщення тіла з однією нерухомою точкою.
- 5 Що таке миттєва вісь обертання при сферичному русі тіла?
- 6 Дайте характеристику кутової швидкості тіла при його сферичному русі.
- 7 Як визначається і що характеризує вектор кутового прискорення тіла при його сферичному русі?
- 8 Як визначаються швидкості точок тіла при сферичному русі?

- 9 Як визначається прискорення точок тіла при сферичному русі?
- 10 Що таке обертальне і доосьове прискорення? Опишіть їх взаємне розміщення.
- 11 Як визначається модуль прискорення точок тіла при його сферичному русі?
- 12 Охарактеризуйте рух вільного твердого тіла. Скільки ступенів вільності воно має?
- 13 На які складові можна розкласти рух вільного твердого тіла?
- 14 Запишіть кінематичні рівняння руху вільного твердого тіла.
- 15 Як визначаються швидкості точок вільного твердого тіла?
- 16 Як визначаються прискорення точок вільного твердого тіла?

5 СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

5.1 Відносний, переносний та абсолютний рухи точки. Абсолютна та відносна похідні від вектора

У кінематиці точки розглядався рух точки відносно нерухомої системи координат. Та в деяких випадках доцільно вивчати рух точки відносно двох систем відліку, одна з яких певним чином рухається відносно іншої, умовно нерухомої системи координат.

Наприклад, автомобіль, який рухається поверхнею Землі, разом з земною кулею обертається навколо її осі, а також переміщується в космічному просторі, беручи участь в декількох рухах.

Рух, при якому точка бере участь в двох і більше рухах, називається складним рухом.

Розглянемо складний рух точки M , коли ця точка переміщується по рухомому тілу A (рис. 106). Через довільну точку O тіла A проведемо жорстко зв'язані з ним осі $Oxuz$ рухомої системи відліку. Нерухому систему відліку $O_1x_1y_1z_1$ зв'яжемо з умовно нерухомим тілом, наприклад з Землею.

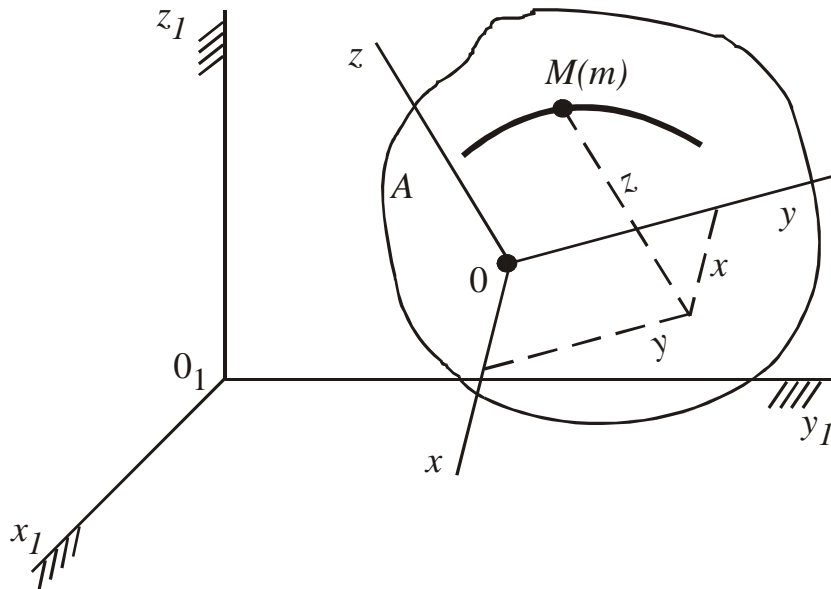


Рисунок 106

Рух точки M відносно нерухомої системи координат $(O_1x_1y_1z_1)$ називають *абсолютним*. Траєкторія, швидкість і прискорення точки M в абсолютному русі називають абсолютною траєкторією, абсолютною швидкістю і абсолютним прискоренням.

Рух точки M відносно рухомої системи відліку $(Oxyz)$ називають *відносним* рухом, а траєкторія, швидкість \bar{V}_r і прискорення \bar{a}_r точки в цьому русі називають відносними.

Переносним називають рух рухомої системи координат $Oxyz$ і незмінно зв'язаного з нею тіла відносно нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$. Переносною швидкістю \bar{V}_e та переносним прискоренням \bar{a}_e будуть швидкість та прискорення тієї точки m тіла (рухомої системи координат), з якою в даний момент часу співпадає рухома точка M .

Основною задачею кінематики складного руху точки є встановлення залежностей між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного і відносного рухів.

При розв'язанні цієї задачі необхідно диференціювати змінний вектор в рухомій і нерухомій системах координат, визначаючи похідну за часом у відношенні до рухомої системи (відносну або локальну похідну), а також у відношенні до нерухомої системи координат (абсолютну похідну).

Встановимо зв'язок між абсолютною і відносною похідними від вектора $\bar{b} = \bar{b}(t)$, який змінюється в рухомій $Oxyz$ та нерухомій $O_1x_1y_1z_1$ системах відліку (рис. 107).

У рухомій системі координат цей вектор визначається залежністю

$$\bar{b} = \bar{i}b_x + \bar{j}b_y + \bar{k}b_z, \quad (143)$$

де b_x, b_y, b_z – проекції вектора \bar{b} на відповідні осі рухомої системи.

Диференціюючи це векторне рівняння з врахуванням змінності ортів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ внаслідок руху рухомої системи відліку, одержимо:

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{db_x}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{db_y}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{db_z}{dt} \cdot \bar{k} + b_x \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + b_y \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + b_z \cdot \frac{d\bar{k}}{dt}. \quad (144)$$

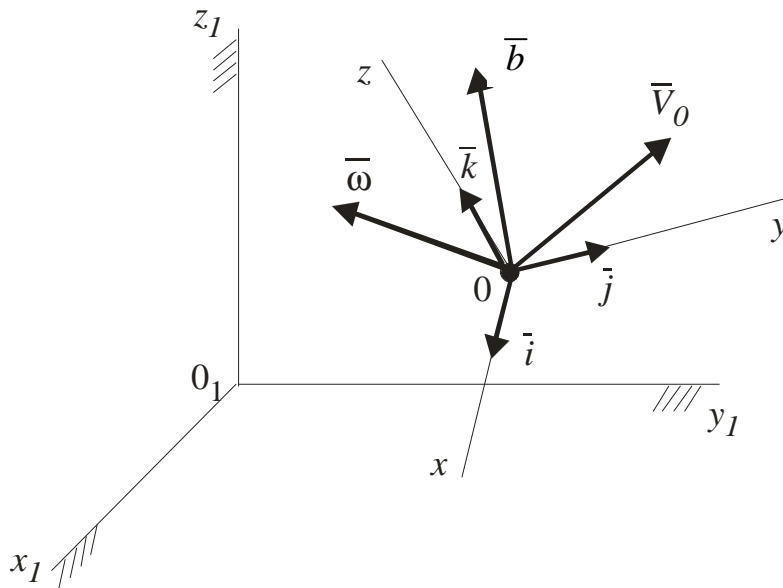


Рисунок 107

Перші три складових цього рівняння характеризують зміну вектора \bar{b} у рухомій системі координат (при незмінних ортах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$) і являють собою відносну похідну:

$$\frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} = \frac{db_x}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{db_y}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{db_z}{dt} \cdot \bar{k}. \quad (145)$$

Замінюючи в раніше одержаній формулі (122) швидкості точки при обертальному русі тіла

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

радіус-вектор \bar{r} послідовно на орти $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, встановимо, що

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}; \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}; \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}.$$

Отже сума трьох останніх складових рівняння (144) запишеться так:

$$b_x \frac{d\bar{i}}{dt} + b_y \frac{d\bar{j}}{dt} + b_z \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times (\bar{i}b_x + \bar{j}b_y + \bar{k}b_z) = \bar{\omega} \times \bar{b}. \quad (146)$$

Підставляючи (145) і (146) в (144), одержимо:

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{b}. \quad (147)$$

Отже, абсолютна похідна вектора дорівнює сумі відносної похідної цього вектора та векторного добутку кутової швидкості рухомої системи координат на цей вектор.

5.2 Теорема про додавання швидкостей при складному русі точки

Розглянемо складний рух точки M , яка у відносному русі переміщується відносно рухомої системи координат $Oxuz$ та здійснює абсолютне переміщення відносно нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 108).

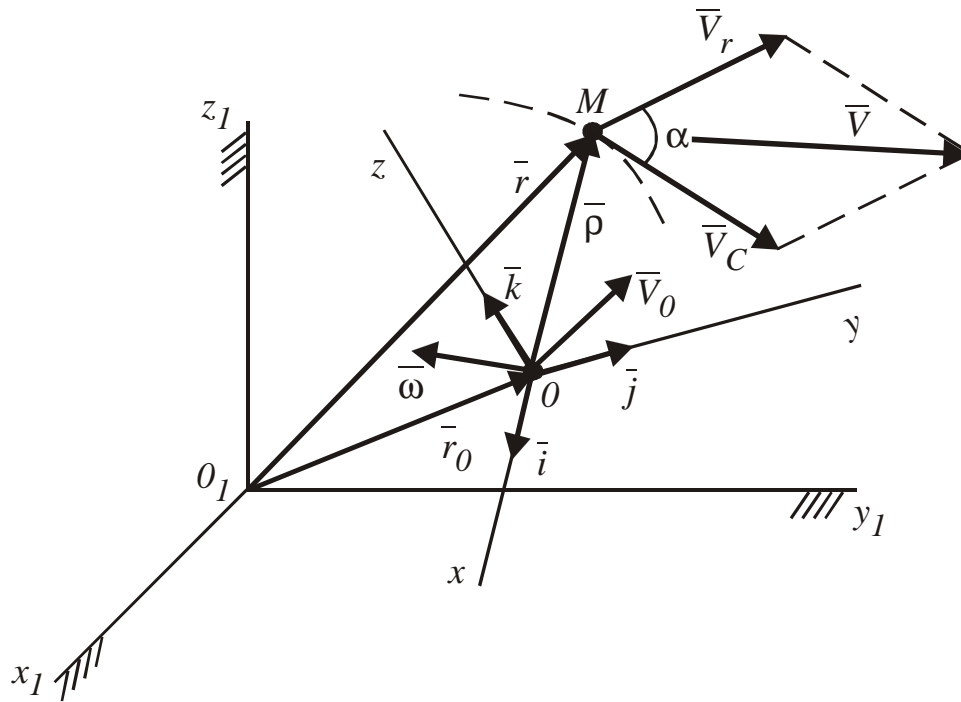


Рисунок 108

Положення точки M у відношенні до нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ у кожний момент часу визначається

$$\bar{r} = \bar{r}_O + \bar{R}, \quad (148)$$

де \bar{r}_O – радіус-вектор точки O , в якій розміщено початок рухомої системи координат $Oxuz$,

\bar{R} – радіус-вектор точки M у відношенні до рухомої системи координат $Oxuz$.

Вважаючи, що координати точки M у рухомій системі координат будуть x, y, z , визначимо:

$$\bar{R} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z.$$

Диференціюючи залежність (148) за часом, знайдемо абсолютну швидкість точки

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_O}{dt} + \frac{d\bar{R}}{dt}. \quad (149)$$

Абсолютна похідна від вектора \bar{r} , який змінюється в рухомій системі координат, визначається формулою (147)

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r},$$

де $\bar{\omega}$ – кутова швидкість обертання рухомої системи координат,

$$\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z} = \bar{V}_r - \text{відносна швидкість точки.}$$

Підставляючи ці значення в (149), одержимо:

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{V}_r,$$

де $\bar{V}_0 = \frac{d\bar{r}_0}{dt}$ – швидкість початку рухомої системи координат відносно нерухомої системи координат.

Враховуючи, що переносна швидкість, це швидкість точки m рухомої системи, через яку в даний момент проходить рухома точка M , тобто

$$\bar{V}_e = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad (150)$$

будемо мати

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r. \quad (151)$$

Абсолютна швидкість точки при її складному русі дорівнює геометричній сумі переносної та відносної швидкостей.

Направлені вектори \bar{V}_e і \bar{V}_r за дотичними до відповідних траєкторій. Модуль абсолютної швидкості точки визначається за формулою

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2|\bar{V}_e| \cdot |\bar{V}_r| \cos \alpha}, \quad (152)$$

де $\cos \alpha = \cos(\widehat{\bar{V}_e, \bar{V}_r})$, тобто α – кут між векторами \bar{V}_e, \bar{V}_r .

5.3 Теорема Коріоліса про додавання прискорень при складному русі точки

Абсолютне прискорення точки визначимо, диференціюючи за часом формулу (151)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d\bar{V}_e}{dt} + \frac{d\bar{V}_r}{dt}. \quad (153)$$

Абсолютну похідну вектора відносної швидкості знайдемо за формулою (147)

$$\frac{d\bar{V}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{V}_r}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{V}_r.$$

У цьому співвідношенні відносна похідна вектора \bar{V}_r за часом є прискоренням точки M у відношенні до рухомої системи координат, тобто відносним прискоренням:

$$\bar{a}_r = \frac{\tilde{d}\bar{V}_r}{dt} = \bar{i} \frac{d\bar{V}_{rx}}{dt} + \bar{j} \frac{d\bar{V}_{ry}}{dt} + \bar{k} \frac{d\bar{V}_{rz}}{dt}$$

Тоді

$$\frac{d\bar{V}_r}{dt} = \bar{a}_r + \bar{\omega} \times \bar{V}_r. \quad (154)$$

Абсолютна похідна від вектора переносної швидкості, згідно з формулою (150)

$$\frac{d\bar{V}_e}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{V}_0}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt},$$

або враховуючи, що $\frac{d\bar{V}_0}{dt} = \bar{a}_0$ – прискорення початку рухомої системи координат, $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{e}$ – кутове прискорення рухомої системи координат, $\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{V}_r + \bar{\omega} \times \bar{r}$, одержимо:

$$\frac{d\bar{V}_e}{dt} = \bar{a}_0 + \bar{e} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{\omega} \times \bar{V}_r.$$

Так як переносне прискорення – це прискорення точки m тіла (рухомої системи), яка співпадає з рухомою точкою, то

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{e} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r},$$

тоді

$$\frac{d\bar{V}_e}{dt} = \bar{a}_e + \bar{\omega} \times \bar{V}_r. \quad (155)$$

Підставивши (154) і (155) у (153), одержимо:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r).$$

Прискорення, яке визначається доданком $2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r)$ називають коріолісовим прискоренням і позначають

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r). \quad (156)$$

Отже, маємо

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \quad (157)$$

Ця формула виражає теорему Коріоліса; згідно з якою абсолютне прискорення точки при її складному русі дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: переносного, відносного і коріолісового.

Кожна із складових абсолютного прискорення є кінематичною характеристикою зміни з часом вектора абсолютної швидкості точки. Так, переносне прискорення \bar{a}_e - це характеристика зміни модуля і напрямку вектора \bar{V}_e переносної швидкості в переносному русі, відносне прискорення \bar{a}_r характеризує зміну вектора відносної швидкості \bar{V}_r у відносному русі, а коріолісове прискорення \bar{a}_k з'являється як характеристика зміни вектора переносної швидкості у відносному русі і вектора відносної швидкості у переносному русі.

5.4 Визначення модуля і напрямку прискорення Коріоліса Правило Жуковського

Як видно з формули (156), прискорення Коріоліса дорівнює подвійному векторному добутку переносної кутової швидкості та лінійної відносної швидкості точки.

Модуль вектора коріолісового прискорення визначимо за правилами знаходження модуля векторного добутку:

$$a_k = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin a, \quad (158)$$

де $\sin a = \sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{V}_r})$, тобто a – кут між векторами переносної кутової швидкості $\bar{\omega}_e$ і відносної швидкості \bar{V}_r точки.

Із формули (158) видно, що коріолісове прискорення буде дорівнювати нулю в таких випадках:

- коли $\omega_e = 0$, тобто, коли переносний рух є поступальним або, якщо переносна кутова швидкість в даний момент часу перетворюється на нуль;
- коли $V_r = 0$, тобто рух точки не є складним, або якщо відносна швидкість точки у даний момент часу є нульовою;
- коли $a = 0$ або $a = 180^\circ$, тобто коли вектор відносної швидкості точки є паралельним осі обертання рухомої системи відліку (тіла).

Напрямок коріолісового прискорення визначається напрямком векторного добутку векторів $\bar{\omega}_e$ і \bar{V}_r , тобто *коріолісове прискорення буде направлене перпендикулярно площині векторів $\bar{\omega}_e$ і \bar{V}_r у напрямку, звідки поворот на менший кут від $\bar{\omega}_e$ до \bar{V}_r видно таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки* (рис. 109).

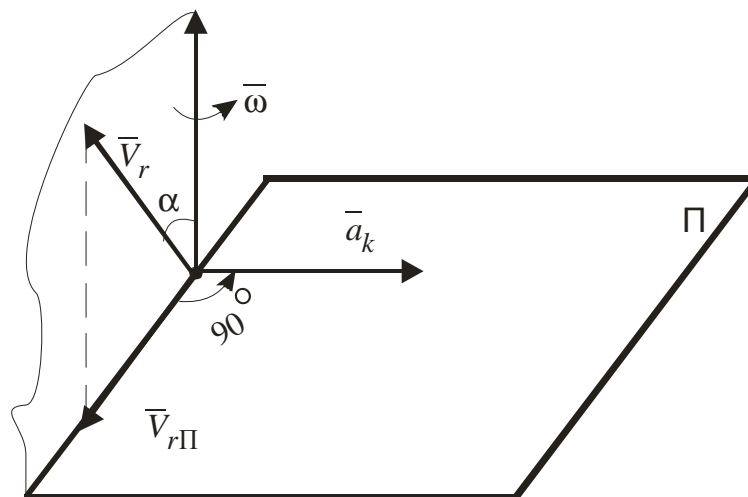


Рисунок 109

За правилом Жуковського для знаходження напрямку коріолісового прискорення необхідно спроектувати вектор відносної швидкості \bar{V}_r на площину Π , перпендикулярну до осі переносного обертання, а потім повернути цю проекцію $\bar{V}_{r\Pi}$ на кут 90° у напрямку переносного обертання (див. рис. 109).

5.5 Приклади розв'язання задач складного руху точки

При розв'язанні задач кінематики складного руху точки важливим є правильний розподіл абсолютного руху точки на відносну та переносну складові. Для встановлення виду відносного руху точки треба подумки зупинити переносний рух (рух тіла, яким рухається точка), а для встановлення характеру переносного руху подумки зупиняють відносний рух точки.

Кінематичні характеристики переносного руху слід визначити за правилами знаходження відповідних характеристик точок твердого тіла.

При знаходженні відносної швидкості та відносного прискорення точки рухому систему координат слід вважати нерухомою і застосовувати формули кінематики точки.

При використанні формули (157) для визначення абсолютного прискорення точки слід пам'ятати, що у випадку поступального переносного руху ця формула спрощується до виду

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r, \quad (159)$$

так як коріолісове прискорення при цьому дорівнює нулю.

Приклад 21

На візку A , який рухається із стану спокою за горизонталлю вправо з постійним прискоренням $a_A = 0,492 \text{ м/с}^2$ (рис. 110), розміщено електродвигун, ротор якого обертається за законом $j = t^2$ рад/с². Радіус ротора $R = 0,2 \text{ м}$. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M , яка лежить на ободі ротора, у момент часу $t = 1 \text{ с}$, якщо в цей момент точка M знаходиться в положенні, показаному на рисунку 110.

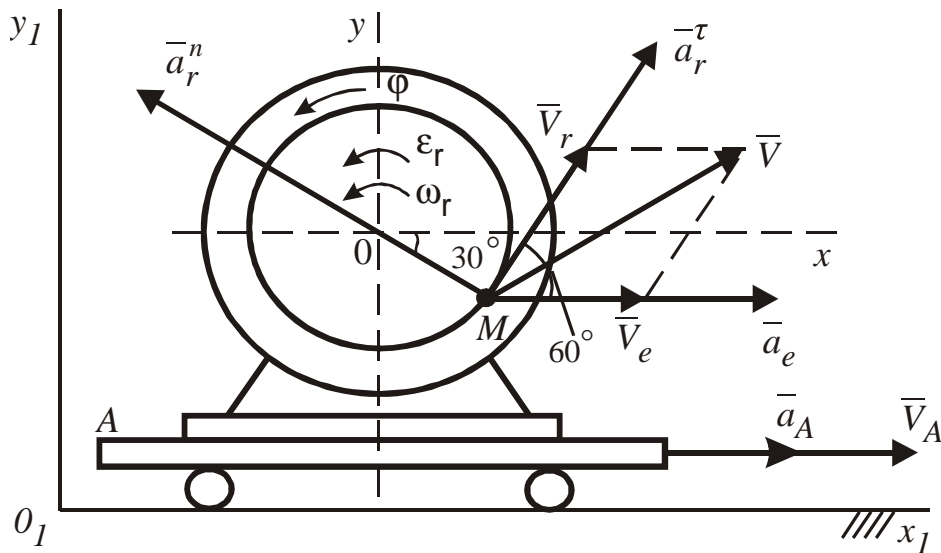


Рисунок 110

Розв'язання

Для точки M ободу ротора поступальний рух візка є переносним, а обертання ротора навколо його осі є відносним. Виберемо нерухому сис-

тему відліку $O_1x_1y_1$, а рухому систему Oxy зв'яжемо з рухомим візком. Абсолютним буде рух точки M у відношенні до нерухомої системи $O_1x_1y_1$.

Абсолютну швидкість точки M визначимо за залежністю (151)

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

Переносна швидкість точки M дорівнює швидкості візка в його поступальному прямолінійному рівноприскореному русі. Так, як початкова швидкість візка $V_0 = 0$, то $V_e = V_A = a_A \cdot t$, і при $t = 1c$ $V_e = 0,492 \cdot 1 = 0,492 \text{ м/с}$. Вектор \bar{V}_e направлений паралельно осі Ox_1 вправо. Відносну швидкість знайдемо як швидкість точки M при обертанні ротора з кутовою швидкістю $w_r = \frac{dj}{dt} = 2t$. При $t = 1c$ кутова швидкість ротора $w_r = 2c^{-1}$. Тоді відносна швидкість $V_r = w_r \cdot R = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}$. Вектор \bar{V}_r направлений перпендикулярно OM в напрямі обертання ротора.

Модуль абсолютної швидкості точки M визначимо за залежністю (152):

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2|\bar{V}_r| \cdot |\bar{V}_e| \cdot \cos a}.$$

Враховуючи, що кут a між векторами \bar{V}_e і \bar{V}_r становить 60° , одержимо

$$V = \sqrt{0,492^2 + 0,4^2 + 2 \cdot 0,492 \cdot 0,4 \cdot 0,866} = 0,77 \text{ м/с}.$$

Так, як переносний рух є поступальним, то для знаходження абсолютного прискорення точки M застосуємо залежність (159)

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r.$$

Тут переносне прискорення дорівнює прискоренню візка, тобто $a_e = a_A = 0,492 \text{ м/с}^2$. Оскільки рух візка прискорений, то напрям вектора \bar{a}_e співпадає з напрямком \bar{V}_e .

Відносне прискорення точки M при обертанні ротора має дві складові:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^t + \bar{a}_r^n.$$

Модулі цих складових визначимо за формулами дотичного a_t та нормального a_n прискорень точки тіла, що обертається:

$$a_r^t = e_r \cdot R, \quad a_r^n = w^2 \cdot R.$$

Тут $e_r = \frac{dw_r}{dt} = 2c^{-1}$, тому дотичне прискорення точки M в її відносному русі буде мати значення

$$a_r^t = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки знаки w і e однакові (обертання прискорене), та вектори \bar{a}_r^t і \bar{V}_r будуть співнаправленими. Нормальне прискорення точки у відносному русі буде таким: $a_r^n = 2^2 \cdot 0,2 = 0,8 \text{ м/с}^2$. Вектор \bar{a}_r^n направлений до центра O обертання ротора.

Величину абсолютного прискорення точки M знайдемо за його проєкціями на осі рухомої системи координат:

$$a_x = a_e + a_r^t \cos 60^\circ - a_r^n \cos 30^\circ = 0,492 + 0,4 \cdot 0,5 - 0,8 \cdot 0,866 = 0;$$

$$a_y = a_r^t \sin 60^\circ + a_r^n \sin 30^\circ = 0,4 \cdot 0,866 + 0,8 \cdot 0,5 = 0,746 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки проєкція вектора абсолютного прискорення на вісь x дорівнює нулю, то вектор \bar{a} у даний момент часу направлений за вертикаллю вгору.

Приклад 22

Пластина D (рис. 111) обертається навколо нерухомої осі за законом $j_e = 0,9t^2 - 8t^3$, рад. По пластині вздовж прямолінійного жолоба рухається точка M відповідно закону $s_r = OM = 16 - 8\cos(3\pi t)$, см.

Знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M у момент часу $t = \frac{2}{9}c$.

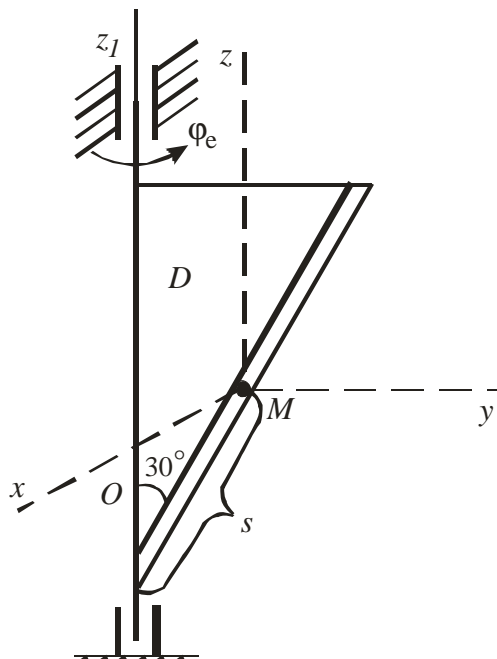


Рисунок 111

Розв'язання

Будемо вважати, що в розрахунковий момент часу площина креслення співпадає з площиною пластини D . Положення точки M на пластині D при $t = \frac{2}{9}c$ визначається відстанню

$$s_r = 16 - 8 \cos\left(3p \frac{2}{9}\right) = 16 + 4 = 20 \text{ см.}$$

Абсолютну швидкість точки M знайдемо як геометричну суму переносної та відносної швидкостей:

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

Відносна швидкість:

ктор \bar{W}_e направлений вздовж осі Oz вниз (див. рис. 112, а). Вектор \bar{V}_e направлений за дотичною до кола радіуса R в бік обертання тіла.

Так як \bar{V}_e і \bar{V}_r взаємно перпендикулярні, модуль абсолютної швидкості точки M :

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{9,3^2 + 65,2^2} = 65,9 \text{ см/с}.$$

Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного і коріолісового прискорення:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k.$$

Або в розгорнутому вигляді:

$$\bar{a} = \bar{a}_r^t + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^t + a_e^n + \bar{a}_k.$$

Модуль відносного дотичного прискорення:

$$a_r^t = \frac{d^2 s_r}{dt^2} = 72p \cos 3pt.$$

При $t = \frac{2}{9}c$; $a_r^t = -72p^2 \cos \frac{2}{3}p = -355 \text{ см/с}^2.$

Від'ємний знак a_r^t свідчить, що вектор \bar{a}_r^t направлений в сторону від'ємних значень s_r (див. рис. 112, б).

Відносне нормальне прискорення:

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{r} = 0,$$

так як відносний рух точки прямолінійний.

Переносне дотичне прискорення:

$$a_e^t = R \cdot e_e,$$

де e_e – кутове прискорення тіла D .

$$e_e = \frac{dw_e}{dt} = 1,8 - 54t.$$

При $t = \frac{2}{9}c$ $e_e = 1,8 - 54 \cdot \frac{2}{9} = -10,2c^{-2}.$

Однакові знаки e_e і w_e вказують на те, що обертання тіла D прискорене.

Тоді:

$$a_e^t = 10 \cdot 10,2 = 102 \text{ см}/c^2.$$

Вектор \bar{a}_e^t направлений в той бік, що і вектор \bar{V}_e .

Переносне нормальне прискорення:

$$a_e^n = R w_e^2 = 10 \cdot 0,93^2 = 8,7 \text{ см}/c^2.$$

Вектор \bar{a}_e^n направлений до осі обертання тіла D , тобто до центра O_1 кола радіуса R .

Прискорення Коріоліса:

$$\bar{a}_k = 2(\bar{w}_e \times \bar{V}_r).$$

Модуль прискорення Коріоліса:

$$a_k = 2|\bar{w}_e||\bar{V}_r|\sin(\bar{w}_e, \bar{V}_r)$$

Так як $\sin(\bar{w}_e, \bar{V}_r) = \sin 150^\circ = 0,5,$

то $a_k = 2 \times 0,95 \times 65,2 \times 0,5 = 61 \text{ см}/c^2.$

Відповідно до правила векторного добутку вектор \bar{a}_k направлений перпендикулярно до площини трикутника D у тому напрямку, що і вектори \bar{V}_e і \bar{a}_e^t .

Модуль абсолютного прискорення точки M знаходимо способом проекцій векторного рівняння:

$$a_x = a_e^t + a_k = 102 + 61 = 163 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = -a_e^n - a_r^n \cos 60^\circ = -9 - 355 \cdot 0,5 = -186 \text{ см/с}^2,$$

$$a_z = -a_r^t \cos 30^\circ = -355 \frac{\sqrt{3}}{2} = -308 \text{ см/с}^2.$$

Остаточно $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{163^2 + 186^2 + 308^2} = 395 \text{ см/с}^2.$

Питання для самоконтролю

- 1 Який рух точки називають складним? Що називають відносним, абсолютним і переносним рухами точки?
- 2 Як зв'язані між собою абсолютна, відносна і переносна швидкість точки?
- 3 Як визначають модуль абсолютної швидкості точки, якщо відомі вектори переносної і відносної швидкості та кут між ними?
- 4 Як визначається абсолютне прискорення точки у загальному випадку складного руху точки?
- 5 Чому дорівнює коріолісове прискорення точки? Запишіть векторний вираз для прискорення Коріоліса.
- 6 Запишіть формулу для визначення модуля коріолісового прискорення точки. У яких випадках коріолісове прискорення дорівнює нулю?
- 7 Як направлений вектор коріолісового прискорення? Сформулюйте правило Жуковського для визначення напрямку прискорення Коріоліса.
- 8 Що характеризує коріолісове прискорення точки, які причини появи цього прискорення?

- 9 Як визначається абсолютне прискорення точки у випадку поступального переносного руху?

6 СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Рух тіла, який складається з двох складових: відносного і переносного рухів, називається складним рухом тіла.

Відносний – це рух тіла у відношенні до деякої рухомої системи відліку.

Переносний рух – рух тіла, скріпленого в кожний момент часу з рухомою системою відліку, відносно нерухомої системи відліку.

Абсолютний рух – це результуючий рух тіла відносно нерухомої системи координат.

Вивчення складного руху тіла полягає у встановленні залежностей між основними кінематичними характеристиками складових рухів та абсолютного руху тіла. Такими характеристиками є швидкості і прискорення поступального руху та кутові швидкості, кутові прискорення тіла. Вивчення складного руху тіла в даному курсі обмежено встановленням зв'язку лише між швидкісними характеристиками (поступальними і кутовими).

6.1 Додавання поступальних рухів твердого тіла

Якщо тіло знаходиться одночасно в двох поступальних рухах, то абсолютний рух тіла також є поступальним зі швидкістю, яка дорівнює геометричній сумі швидкостей відносного і переносного рухів тіла.

Дійсно, якщо тіло рухається поступально відносно рухомої системи координат $Oxyz$ зі швидкістю \vec{V}_1 , а ці осі рухаються поступально відносно нерухомої системи $O_1x_1y_1z_1$ зі швидкістю \vec{V}_2 (рис. 113), то за теоремою про додавання швидкостей абсолютна швидкість будь-якої точки M тіла дорівнює геометричній сумі відносної і переносної швидкостей. У нашому випадку $\vec{V}_r = \vec{V}_1$ і $\vec{V}_e = \vec{V}_2$, отже

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2. \quad (160)$$

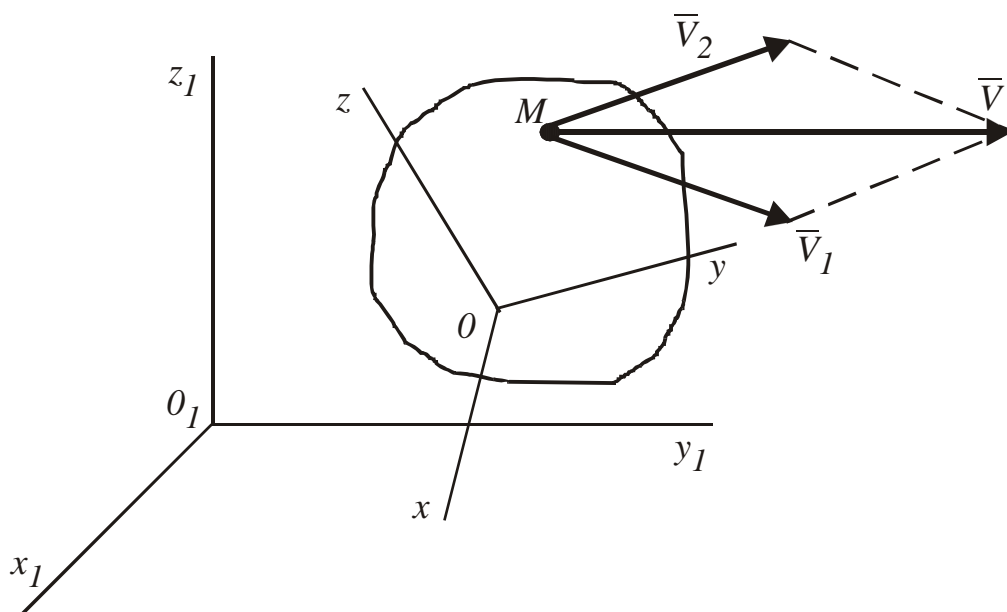


Рисунок 113

Абсолютні швидкості всіх точок тіла в цьому випадку у кожен момент часу будуть однакові, тому що результуючий абсолютний рух тіла буде поступальним.

Зрозуміло, що сукупність декількох поступальних рухів тіла зводиться до результуючого поступального руху із абсолютною швидкістю, яка дорівнює геометричній сумі швидкостей складових рухів, тобто:

$$(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n) \sim \bar{V}, \quad \bar{V} = \sum_{k=1}^n \bar{V}_k. \quad (161)$$

6.2 Додавання обертальних рухів навколо осей, що перетинаються

Розглянемо такий рух тіла, наприклад циліндра, коли воно обертається навколо осі Oz_1 з кутовою швидкістю w_1 , здійснюючи відносний рух, а вісь Oz_1 у переносному русі обертається з кутовою швидкістю w_2 навколо осі Oz_2 (рис. 114).

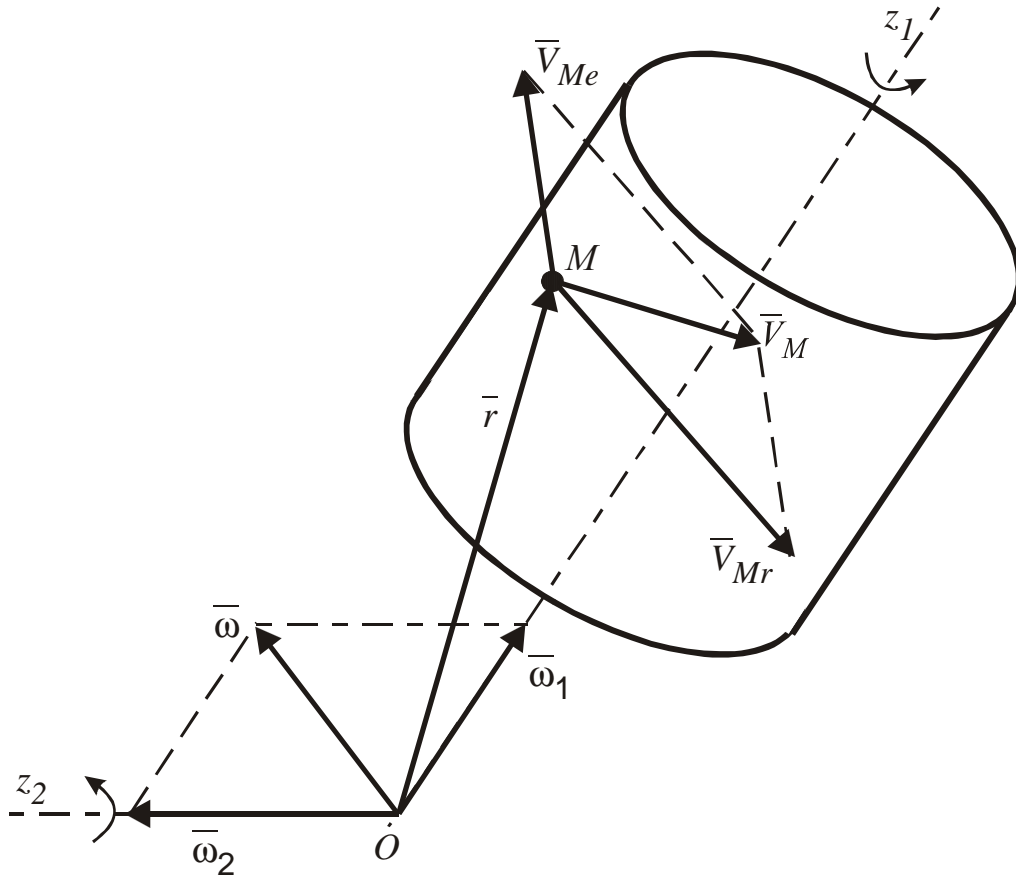


Рисунок 114

Для будь-якої точки M циліндра маємо

$$\bar{V}_M = \bar{V}_{Mr} + \bar{V}_{Me},$$

де

$$\bar{V}_{Mr} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r} = \bar{V}_1,$$

$$\bar{V}_{Me} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r} = \bar{V}_2.$$

Тоді

$$\bar{V}_M = \bar{\omega}_1 \times \bar{r} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r} = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \bar{r}.$$

З іншого боку, швидкість тієї ж точки M в абсолютному русі буде дорівнювати

$$\bar{V}_M = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Порівнюючи ці залежності, одержимо

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2. \quad (162)$$

Сукупність обертань навколо осей, що перетинаються, еквівалентна одному обертанню навколо деякої миттєвої осі обертання з кутовою швидкістю, яка дорівнює векторній сумі кутових швидкостей складових обертань.

Якщо тіло одночасно здійснює декілька обертань навколо осей, які перетинаються в одній точці, то результуючий абсолютний рух тіла також буде обертальним рухом навколо осі, яка проходить через точку перетину осей складових обертань, а абсолютна кутова швидкість буде дорівнювати геометричній сумі кутових швидкостей цих обертань:

$$(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \mathbf{K} \bar{\omega}_n) \sim \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} = \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_k. \quad (163)$$

6.3 Додавання обертальних рухів навколо паралельних осей

Якщо переносний та відносний рухи твердого тіла є обертальними навколо паралельних осей (рис. 115), то всі точки тіла переміщуються в площинах, паралельних одній нерухомій площині. Отже, результуючий рух тіла в цьому випадку буде плоскопаралельним у відношенні до площини, перпендикулярної осям обертання.

Оскільки плоский рух твердого тіла в кожний момент часу можна розглядати як обертальний рух плоскої фігури навколо миттєвого центра обертання, то і складний обертальний рух тіла навколо паралельних осей можна представити еквівалентним одному обертальному руху навколо миттєвої осі обертання.

У залежності від величини кутових швидкостей та напрямків складових обертань розрізняють три можливі окремі випадки такого складного руху.

1 Складові обертання направлені в один бік.

При співнаправлених складових обертаннях (рис. 115, а) відносним буде обертання навколо осі O_1z_1 з кутовою швидкістю w_1 , а переносним – відносно осі O_2z_2 з кутовою швидкістю w_2 .

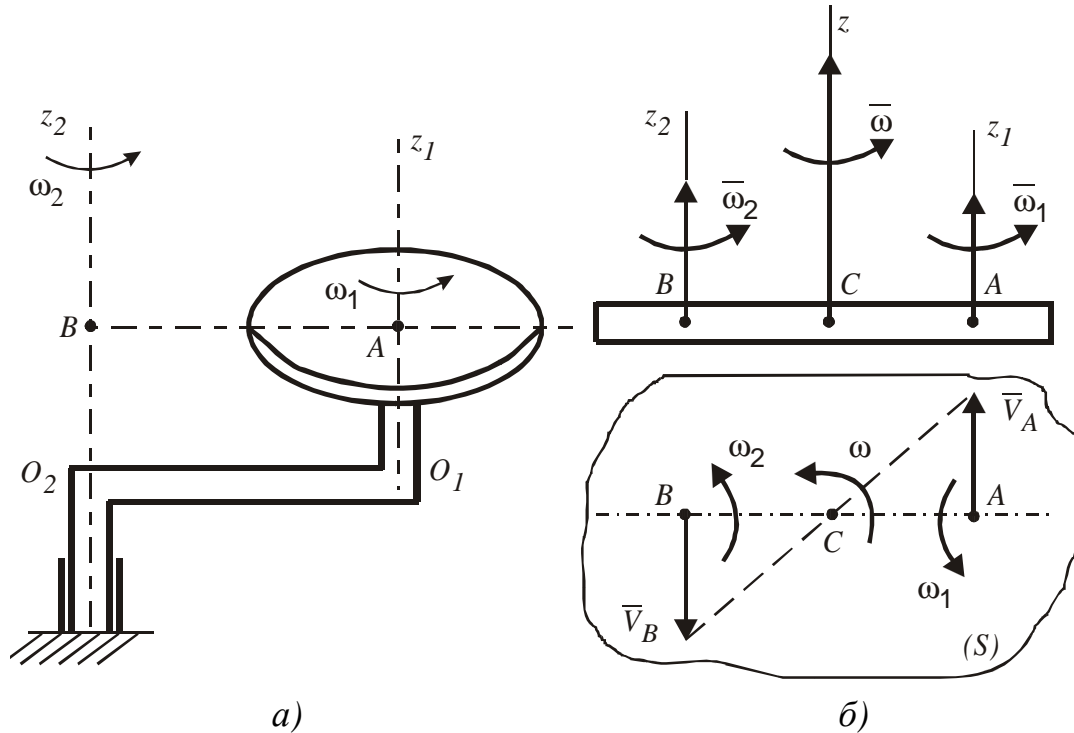


Рисунок 115

Розглядаючи рух плоскої фігури (S) тіла (рис. 115, б), встановимо, що швидкості точок A і B перетину осей відповідно O_1z_1 та O_2z_2 з плоскою фігурою визначаються залежностями: $V_A = w_2 \cdot AB$, $V_B = w_1 \cdot AB$. Оскільки вектори \bar{V}_A, \bar{V}_B перпендикулярні до AB , то положення миттєвого центра швидкостей (точка C) знайдеться на перетині лінії AB та лінії, проведеної через кінці векторів \bar{V}_A і \bar{V}_B (див. рис. 115, б). Через цю точку паралельно осям O_1z_1 і O_2z_2 пройде миттєва вісь обертання Cz , навколо якої в результатуючому русі буде обертатись тіло з миттєвою кутовою швидкістю w .

Так як швидкості точок плоскої фігури пропорціональні їх відстаням до миттєвого центра швидкостей, тобто $w = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B + V_A}{BC + AC}$, то з

врахуванням значень швидкостей точок A і B одержимо:

$$w = w_1 + w_2, \quad (164)$$

$$\frac{w_1}{BC} = \frac{w_2}{AC} = \frac{w}{AB}. \quad (165)$$

Отже, результуючим рухом співнаправлених обертань тіла навколо паралельних осей буде миттєве обертання тіла в тому ж напрямку з кутовою швидкістю, яка дорівнює сумі кутових швидкостей складових обертань, навколо миттєвої осі, паралельної осям складових обертань, яка ділить відстань між осями складових обертань на відрізки, обернено пропорціональні складовим кутовим швидкостям.

2 Складові обертання направлені протилежно.

Якщо відносний і переносний обертальні рухи навколо паралельних осей протилежні за напрямком і різні за величиною (наприклад $w_1 > w_2$) (рис. 116, а), то швидкості точок A і B плоскої фігури (S) (рис. 116, б) направлені в одному напрямку. Миттєва вісь обертання Cz у цьому випадку знаходиться не між осями Az_1 і Bz_2 , а розташована зовні з боку осі складового обертання з більшою кутовою швидкістю. Тоді, враховуючи, що

$w = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B - V_A}{BC - AC}$ та значення швидкості $V_B = w_2 \cdot AB$, і $V_A = w_1 \cdot AB$, одержимо вирази для обчислення абсолютної кутової швидкості тіла та положення миттєвої осі обертання:

$$w = w_1 - w_2, \quad (166)$$

$$\frac{w_1}{BC} = \frac{w_2}{AC} = \frac{w}{AB}. \quad (167)$$

Отже у випадку двох протилежно направлених обертань твердого тіла навколо паралельних осей з різними кутовими швидкостями результуючий рух буде також обертальним з абсолютною кутовою швидкістю, яка дорівнює різниці складових кутових швидкостей, у напрямку більшої кутової швидкості навколо осі, паралельної осям складових обертань, яка лежить в їх площині і розділяє зовнішнім чином відстань між ними на відрізки, обернено пропорційні величинам складових кутових швидкостей.

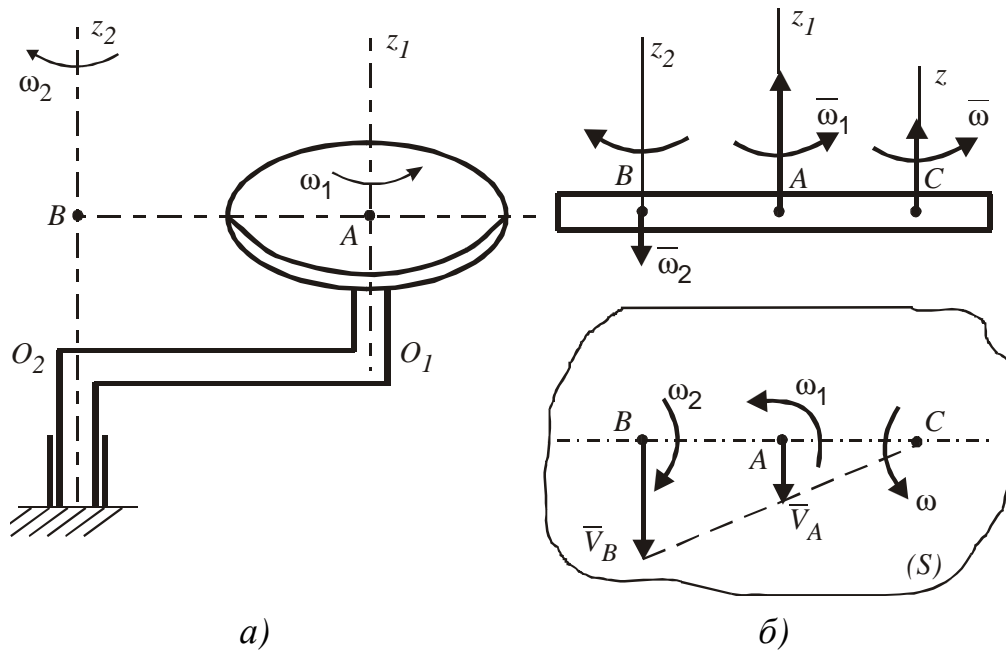


Рисунок 116

3 Пара обертань.

Якщо відносний і переносний обертальні рухи навколо паралельних осей відбуваються з рівними за величиною кутовими швидкостями у протилежних напрямках (рис. 117) (так, що $\bar{\omega}_1 = -\bar{\omega}_2$) то така сукупність цих рухів називається *парою обертань*, а сукупність векторів $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$ в цьому випадку створюють пару кутових швидкостей (за аналогією з парою сил у статиці). У цьому випадку маємо $V_A = \omega_1 \cdot AB$ і $V_B = \omega_2 \cdot AB$, тобто $\bar{V}_A = \bar{V}_B$. Миттєвий центр швидкостей плоскої фігури знаходиться в нескінченності, всі точки тіла в даний момент часу мають однакові швидкості.

Оскільки абсолютна кутова швидкість при такому русі дорівнює нулю, то результуючий рух тіла буде поступальним, і всі точки тіла мають в даний момент однакові швидкості $V = \omega_1 \cdot AB$, направлені перпендикулярно площині векторів $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$ відповідно до напрямку моменту пари сил у статиці. Отже *пара обертань еквівалентна поступальному руху зі швидкістю \bar{V} , яка дорівнює моменту пари кутових швидкостей цих обертань.*

Із цього положення можна зробити висновок, що поступальний рух твердого тіла еквівалентний парі обертань, у якій момент кутових швидкостей цих обертань дорівнює поступальній швидкості тіла.

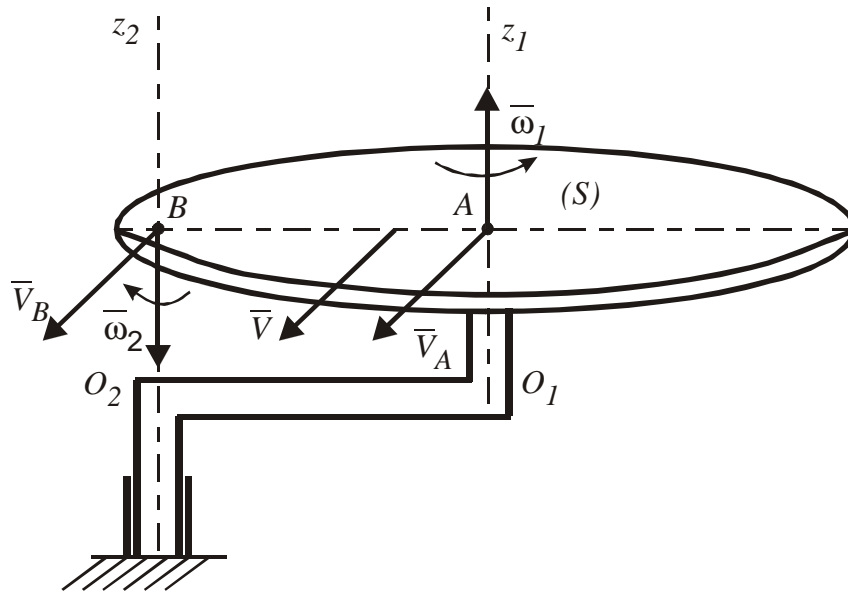


Рисунок 117

6.4 Додавання поступального і обертального рухів

Аналіз попередньо розглянутих випадків складного руху дозволяє дістати висновок, що векторне складання кутових швидкостей обертань і швидкостей поступальних рухів здійснюється за тими ж законами, як і складання векторів сил та пар сил в статиці.

Дійсно, дії з поступальними швидкостями і парами обертань аналогічні діям з моментами пар сил в статиці. Складання кутових швидкостей обертання навколо осей, які перетинаються аналогічне складанню векторів сил збіжних систем в статиці.

Слід чекати, що ці аналогії підтвердяться і при додаванні поступальних та обертальних рухів тіла (рис. 118). Покажемо, що приведення сукупності поступального і обертального рухів тіла до результативного руху буде аналогічним приведенню до простішого вигляду сукупності головного вектора і головного моменту просторової системи сил в статиці.

Як в статиці в залежності від напрямків векторів головного вектора і головного моменту системи, так і в кінематиці, в залежності від напрямків векторів кутової швидкості обертання та поступальної швидкості, можливі три випадки подальшого приведення до простішого стану.

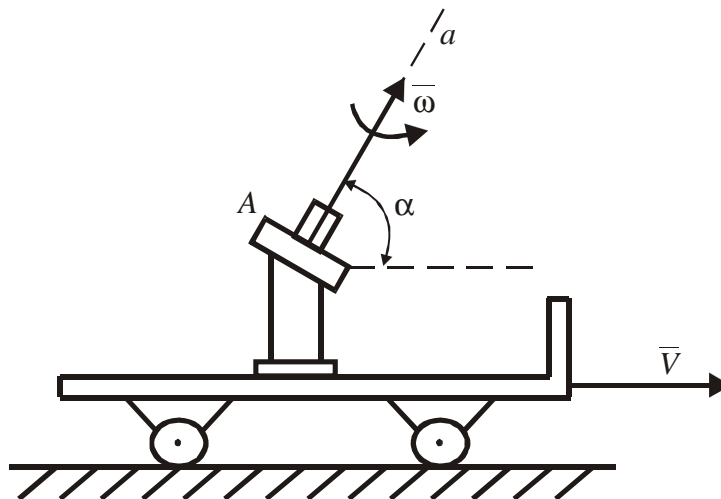


Рисунок 118

У першому випадку, коли тіло рухається поступально із швидкістю \bar{V} відносно нерухомої системи координат $O_1 x_1 y_1 z_1$ і водночас обертається з кутовою швидкістю w навколо осі Az рухомої системи координат так, що вісь обертання перпендикулярна вектору \bar{V} поступальної швидкості (рис. 119), результуючий рух тіла буде плоскопаралельним.

Замінімо вектор \bar{V} поступальної швидкості парою обертань з кутовими швидкостями $\bar{w}' = \bar{w}$, а $\bar{w}'' = -\bar{w}$. При цьому вектор \bar{w}' пройде віссю Pz' , паралельною осі Az , розміщеною на відстані

$$AP = \frac{V}{w}.$$

Відкинувши обертання з кутовими швидкостями \bar{w} і \bar{w}'' , які при складанні дають нуль, встановимо, що при сукупності обертального і поступального рухів тіла у випадку перпендикулярності осі обертання вектору поступальної швидкості результуючий рух тіла буде обертальним з тією ж кутовою швидкістю. Вісь результуючого обертання залишиться паралельною осі складового обертання і зміститься від неї на відстань, яка дорівнює швидкості поступального руху, поділеній на кутову швидкість тіла.

У другому випадку, коли вісь обертання паралельна напрямку поступальної швидкості (рис. 120), тобто коли $\bar{w} \parallel \bar{V}$, рух тіла називають гвинтовим або кінематичним гвинтом.

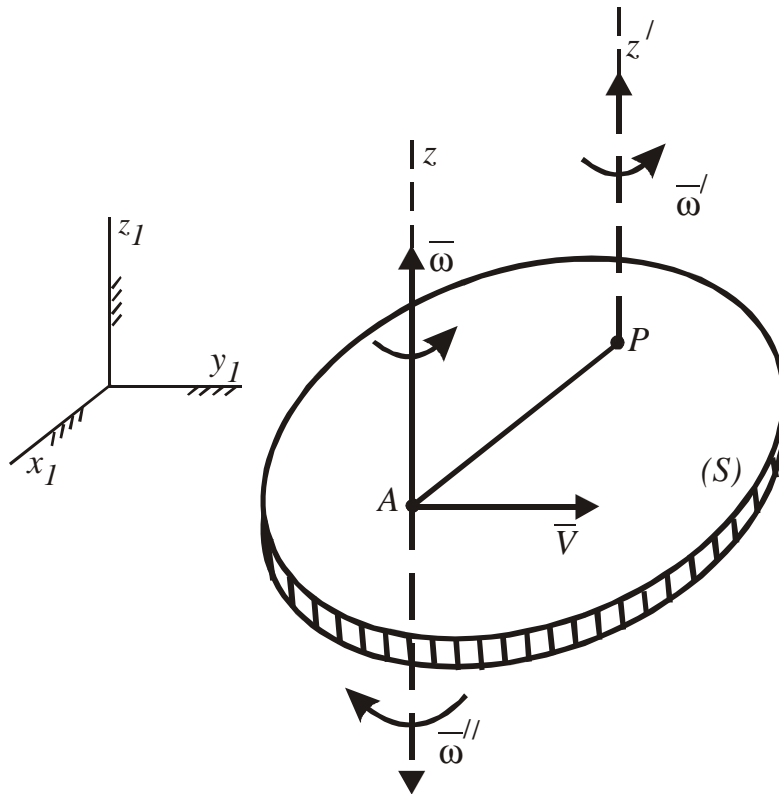


Рисунок 119

Вісь Az , за якою направлені вектори \bar{w} і \bar{V} , називають віссю гвинта. Коли вектори \bar{w} і \bar{V} співнаправлені, гвинт буде правим, якщо протилежні – лівим. Відстань h , яку проходить будь-яка точка тіла, що лежить на осі гвинта, за час одного обороту, називають кроком гвинта. Якщо тіло рухається поступально з постійною швидкістю \bar{V} ($V = const$) і обертається з постійною кутовою швидкістю $w = const$, то крок h гвинта буде постійним і визначиться залежністю

$$h = VT = \frac{2pV}{w},$$

де $T = \frac{2p}{w}$ – час одного обороту тіла у гвинтовому русі. При постійному кроці h довільна точка M тіла, яка не належить осі гвинта, буде рухатись гвинтовою лінією зі швидкістю

$$V_M = \sqrt{V^2 + w^2 R^2},$$

де R – відстань точки M від осі гвинта.

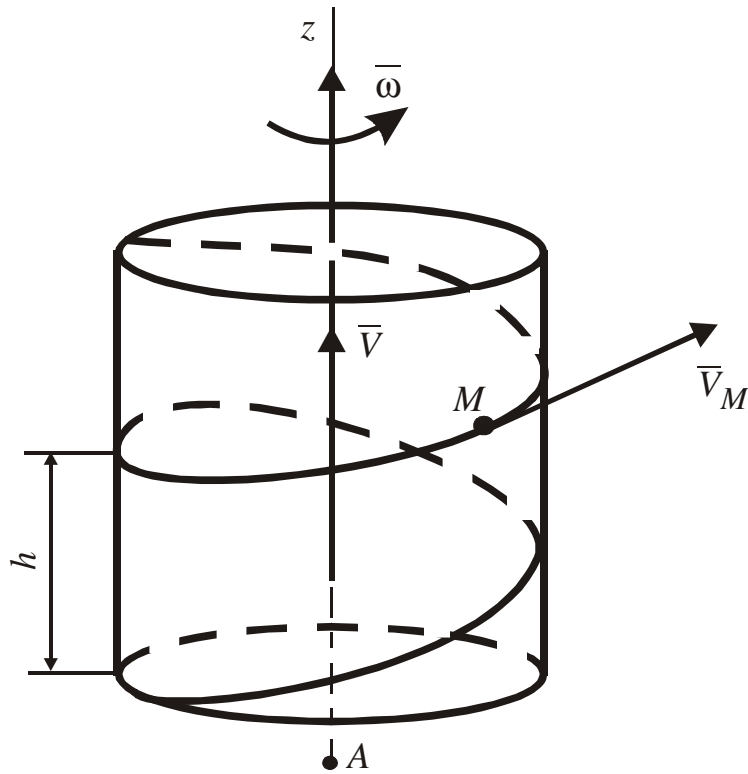


Рисунок 120

Розглянемо третій випадок, коли швидкість поступального руху \bar{V} направлена під довільним кутом a до кутової швидкості w обертального руху (рис. 121, а).

Розкладемо швидкість \bar{V} на складові (рис. 121, б).

$$\bar{V} = \bar{V}' + \bar{V}'' \quad (V' = V \cos a, \quad V'' = V \sin a).$$

Швидкість \bar{V}'' можна замінити парою кутових швидкостей

$$\bar{w}' = \bar{w} \text{ і } \bar{w}'' = -\bar{w},$$

після чого вектори \bar{w} і \bar{w}'' можна відкинути, так як вони в сумі дають нуль. Відстань AC знайдемо за формулою

$$AC = \frac{V''}{w} = \frac{V \sin a}{w}.$$

Тоді у тіла залишається обертання з кутовою швидкістю \bar{w}' і поступальний рух із швидкістю \bar{V}' . Отже, розподіл швидкостей точок тіла в даний момент часу буде таким же, як при гвинтовому русі з поступальною швидкістю $V' = V \cos a$ (рис. 121, в) і кутовою швидкістю $\bar{w}' = \bar{w}$ навколо осі Cz' гвинта, зміщеної від початкового положення на $AC = \frac{V \sin a}{w}$.

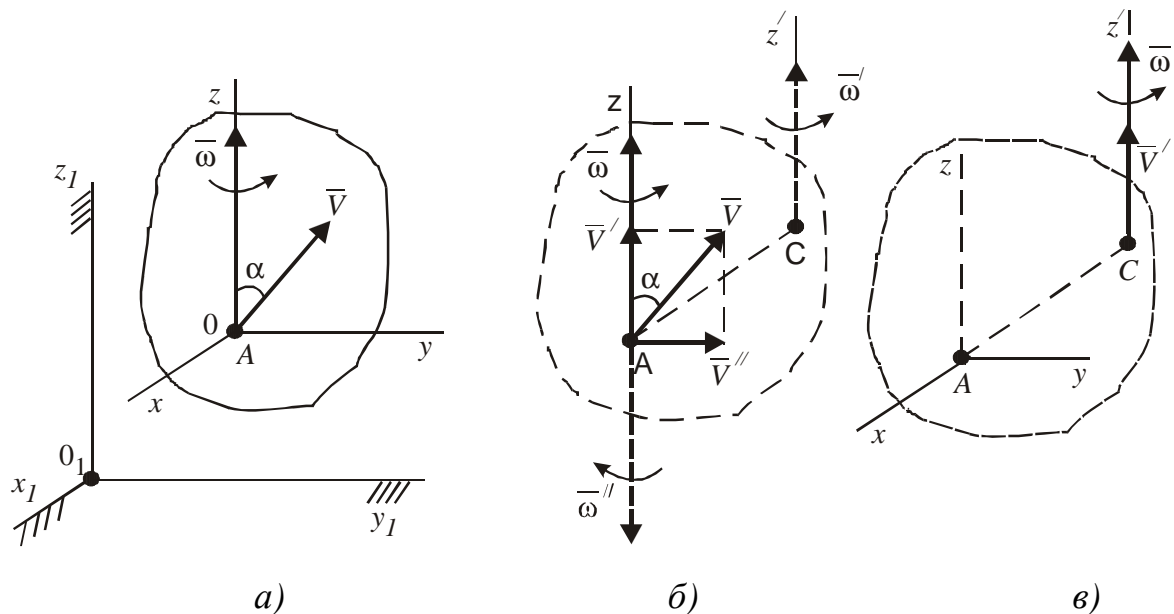


Рисунок 121

6.5 Приклади розв'язання задач кінематики складного руху тіла

Приклад 23

Планетарний редуктор з конічними шестернями (рис. 122) передає обертання з вала I на вал II. Визначити кількість обертів за хвилину вала II і кількість обертів за хвилину в абсолютному і відносному обертаннях сателітів 3, якщо радіуси конічних коліс $r_1 = r_2 = 80 \text{ мм}$, радіус сателітів $r_3 = 60 \text{ мм}$, а вал I має $n_1 = 600 \text{ об/хв}$.

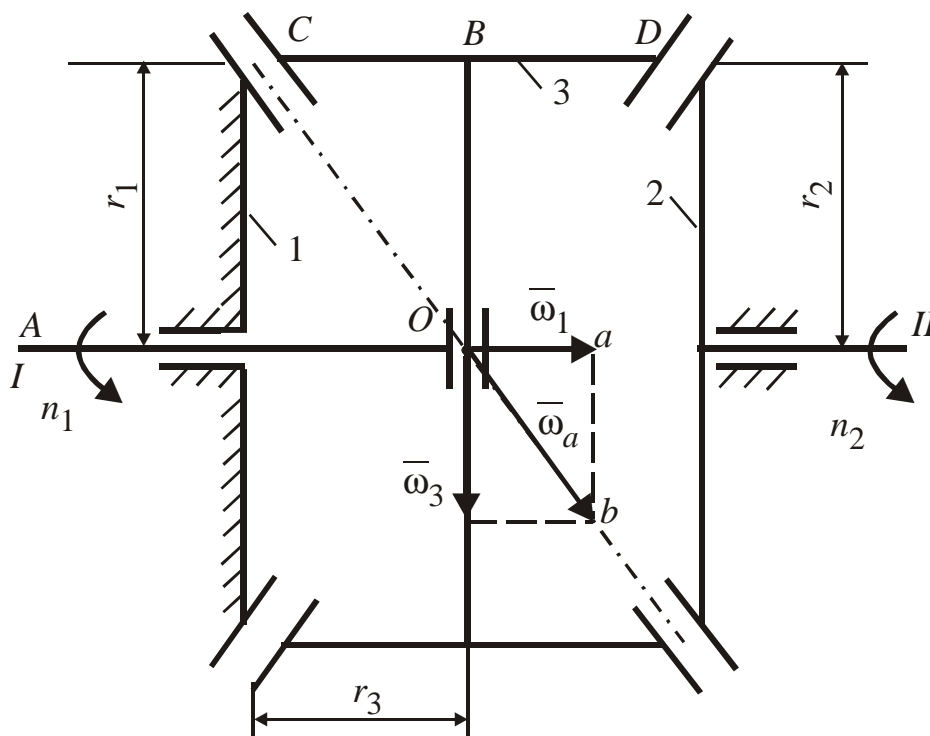


Рисунок 122

Розв'язання

У даному механізмі сателіти 3 здійснюють складний рух, при якому відносним буде обертання шестерні 3 навколо своєї осі OB з кутовою швидкістю w_3 , а переносним – обертання разом з віссю OB навколо осі OA з кутовою швидкістю w_1 , пропорційною n_1 об/хв. У цьому випадку має місце складний обертальний рух шестерні 3 навколо осей, що перетинаються, тому, згідно з (162), абсолютна кутова швидкість w_a шестерні 3 навколо миттєвої осі обертання OC , яка проходить через точку O перетину осей складових обертань та через нерухому точку C , визначиться залежністю:

$$\bar{w}_a = \bar{w}_1 + \bar{w}_3,$$

де \bar{w}_3 – відносна кутова швидкість шестерні 3.

Побудувавши векторну рівність додавання кутових швидкостей, розглянемо подібні трикутники Oab і OBC і одержимо:

$$\frac{w_3}{w_1} = \frac{OB}{BC} = \frac{r_1}{r_3}, \text{ або } \frac{n_3}{n_1} = \frac{r_1}{r_3},$$

де n_1 – кількість обертів за хвилину шестерні 3 у відносному русі.

Звідки маємо $n_3 = \frac{r_1}{r_3} n_1 = \frac{80}{60} 600 = 800$ об/хв. Кількість обертів сателі-

та 3 в абсолютному русі:

$$n_a = \sqrt{n_1^2 + n_3^2} = \sqrt{600^2 + 800^2} = 1000 \text{ об/хв},$$

а абсолютна кутова швидкість:

$$w_a = \frac{p n}{30} = \frac{p \cdot 1000}{30} = 104,7 \text{ с}^{-1}.$$

Для визначення кутової швидкості вала II визначимо швидкість точки D . Швидкість точки B шестерні 3 дорівнює

$$V_B = \frac{p n_1}{30} r_1, \text{ тоді } V_D = 2V_B = \frac{2p n_1}{30} r_1.$$

Але швидкість точки D шестерні 2 дорівнює

$$V_D = \frac{p n_2 \cdot r_2}{30}.$$

Отже, враховуючи, що $r_1 = r_2$, одержимо:

$$n_2 = 2n_1 = 2 \cdot 600 = 1200 \text{ об/хв}.$$

Питання для самоконтролю

- 1 Яким буде результуючий рух декількох обертань тіла навколо осей, що перетинаються в одній точці? Як складаються кутові швидкості таких обертань?
- 2 Як складаються поступальні рухи твердого тіла?
- 3 Яким буде складний рух твердого тіла у випадку обертань навколо паралельних осей?
- 4 Як визначається кутова швидкість тіла при його обертанні навколо двох паралельних осей в одному і в різних напрямках?
- 5 Що таке пара обертань тіла і які її властивості?
- 6 У чому полягає аналогія зі статикою методів аналізу складного руху тіла?
- 7 До чого приводиться сукупність поступального та обертального руху у випадку перпендикулярності напрямку поступального руху до осі обертання тіла?
- 8 Що таке гвинтовий рух твердого тіла? Коли він відбувається?

Література

- 1 Добронравов В. В. Курс теоретической механики/ В.В.Добронравов, Н.Н.Никитин. – М.: Высшая школа, 1983. –575 с.
- 2 Бутенин Н. В. Курс теоретической механики: Статика и кинематика/ Н.В.Бутенин, Я.Л.Лунц, Д.Р.Меркин. – М.: Наука, 1985. – Т. 1. – 240 с.
- 3 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1986. – 416 с.
- 4 Попов М.В. Теоретическая механика. Краткий курс. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
- 5 Павловский М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
- 6 Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: Статика и кинематика./ М.И.Бать, Г.Ю.Джанелидзе, А.С.Кельзон. – М.: Наука, 1984. – Т. 1. – 504 с.

Навчальне видання

**ІСКРИЦЬКИЙ В'ячеслав Михайлович
ПОДЛЕСНИЙ Сергій Володимирович
ВОДОЛАЗСЬКА Олена Георгіївна
ЄРФОРТ Юрій Олександрович**

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
СТАТИКА І КІНЕМАТИКА**

Навчальний посібник
для студентів механічних спеціальностей ВНЗ

Редактор І.І.Дьякова

Комп'ютерна верстка О.П.Ордіна

171/2007. Підп. до друку

Папір офсетний. Ум. друк. арк.

Тираж прим.

Формат 60x84/16.

Обл.-вид. арк.

Зам. №

Видавець і виготівник

«Донбаська державна машинобудівна академія»

84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003