

**Министерство образования и науки Украины**

**Донбасская государственная машиностроительная академия**

# **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**по подготовке к практическим занятиям**

(для студентов всех механических специальностей  
очной и заочной форм обучения)

### **ЧАСТЬ 1**

Утверждено  
на заседании  
методического совета ДГМА  
Протокол № \_\_ от \_\_\_\_\_ г.

Краматорск 2008

УДК 539.3/6

Сопротивление материалов: методические указания по подготовке к практическим занятиям (для студентов всех механических специальностей очной и заочной форм обучения). Ч. 1 / сост.: А.В.Овчаренко, С.В.Капорович. – Краматорск: ДГМА, 2008. – 172 с.

Методические указания составлены в соответствии с действующей программой, которую читают студентам всех механических специальностей Донбасской государственной машиностроительной академии по первой части курса «Сопротивление материалов». Даны примеры расчета основных типов задач и рекомендуемая литература.

Составители:

В.А.Овчаренко, доцент,  
С.В.Капорович, ст. преп.

Отв. за выпуск

В.А.Овчаренко, доцент

## СОДЕРЖАНИЕ

1	Определение реакций опор .....	4
2	Растяжение-сжатие .....	9
2.1	Основные сведения из теории.....	9
2.2	Расчеты на растяжение-сжатие статически определимых систем .....	10
2.3	Расчеты на растяжение-сжатие статически неопределимых систем .....	18
3	Построение эпюр внутренних усилий для балок и плоских рам .....	34
3.1	Основные сведения из теории.....	34
3.2	Построение эпюр внутренних усилий для балок.....	35
3.3	Построение эпюр внутренних усилий для рам .....	43
4	Геометрические характеристики плоских сечений.....	56
4.1	Основные сведения из теории.....	56
4.2	Вычисление геометрических характеристик плоских сечений.....	61
5	Изгиб.....	77
5.1	Основные сведения из теории.....	77
5.2	Определение нормальных и касательных напряжений при изгибе .....	79
5.3	Полная проверка прочности при изгибе.....	116
6	Кручение .....	141
6.1	Основные сведения из теории.....	141
6.2	Расчеты на кручение статически определимых систем.....	143
6.3	Расчеты на кручение статически неопределимых систем .....	151
	Список рекомендуемой литературы .....	162
	Приложение А Уголок равнополочный. ГОСТ 8509-72.....	164
	Приложение Б Уголок неравнополочный. ГОСТ 8510-72 .....	167
	Приложение В Двутавр. ГОСТ 8239-72 .....	170
	Приложение Г Швеллер. ГОСТ 8240-72. ....	171

# 1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР

Как правило, балки имеют те или иные опорные устройства – опоры. Конструктивные формы опор весьма разнообразны. Для расчета же их схематизируют в виде трех основных типов опор:

1 Шарнирно-подвижная опора, в которой может возникнуть только одна составляющая реакции –  $R_A$ , направленная вдоль опорного стерженька (рис. 1.1).

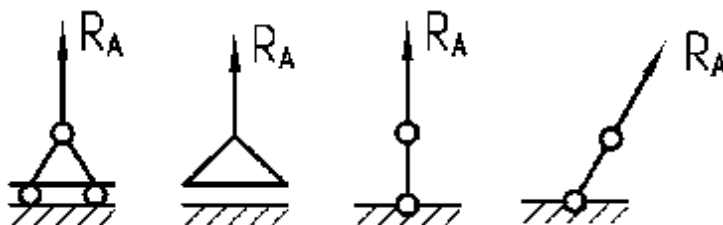


Рисунок 1.1

2 Шарнирно-неподвижная опора, в которой могут возникнуть две составляющие – вертикальная реакция  $R_A$  и горизонтальная реакция  $H_A$  (рис. 1.2).

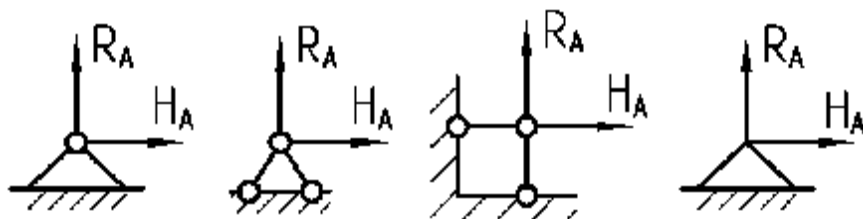


Рисунок 1.2

3 Защемление (жесткое защемление или заделка), где могут быть три составляющие – вертикальная  $R_A$  и горизонтальная  $H_A$  реакции и опорный момент  $M_A$  (рис. 1.3).

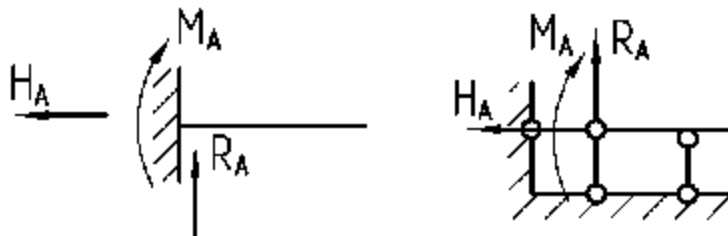


Рисунок 1.3

Способы вычисления опорных реакций изучают в курсе теоретической механики. Поэтому остановимся здесь на некоторых практических вопросах. Рассмотрим балку АВ (рис. 1.4).

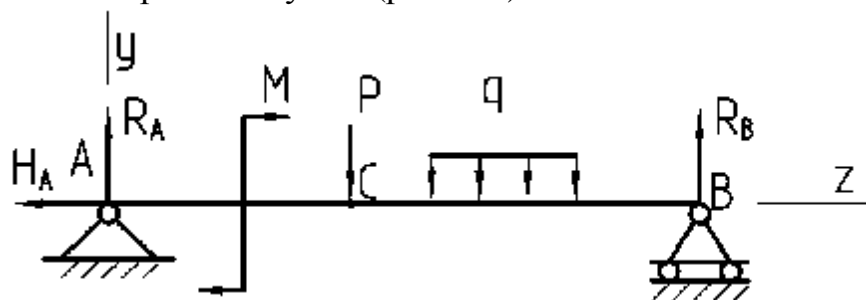


Рисунок 1.4

1 Опоры обычно обозначают буквами  $A$  и  $B$ . Три неизвестные реакции можно найти из следующих уравнений равновесия:

а) сумма проекций всех сил на ось балки равна нулю:

$$\sum P_z = 0, \text{ откуда находят } H_A \text{ (или } X_A \text{);}$$

б) сумма моментов всех сил относительно шарнира  $A$  равна нулю:

$$\sum M_A = 0, \text{ откуда находят } R_B;$$

в) сумма моментов всех сил относительно шарнира  $B$  равна нулю:

$$\sum M_B = 0, \text{ откуда находят } R_A.$$

2 Если на балку действует распределенная нагрузка, то для определения реакций её заменяют равнодействующей, которая равна площади эпюры нагрузки и приложена в центре тяжести этой эпюры.

3 Найденные реакции обязательно следует проверить, для чего удобно использовать или равенство нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось  $\sum P_y = 0$ , или условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно какой-либо точки  $C$ , отличной от  $A$  и  $B$ , т.е.  $\sum M_C = 0$ .

### Задача 1.1

Вычислить опорные реакции для балки (рис.1.5).

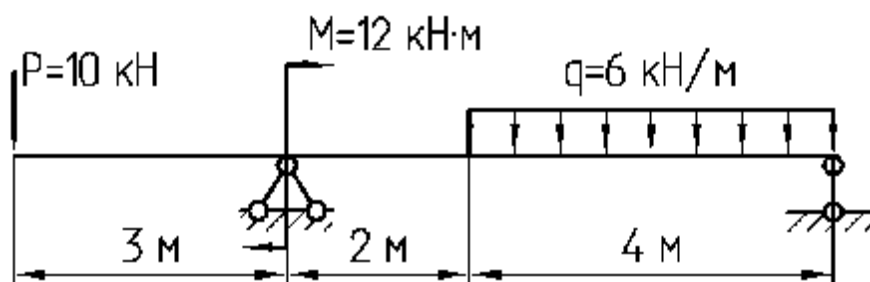


Рисунок 1.5

## Решение

1 Опоры обозначаем буквами А и В, выбираем (произвольно) направление реакций и изображаем их на рисунке (рис. 1.6). Так как нагрузка перпендикулярна к оси балки, то  $H_A = 0$ .

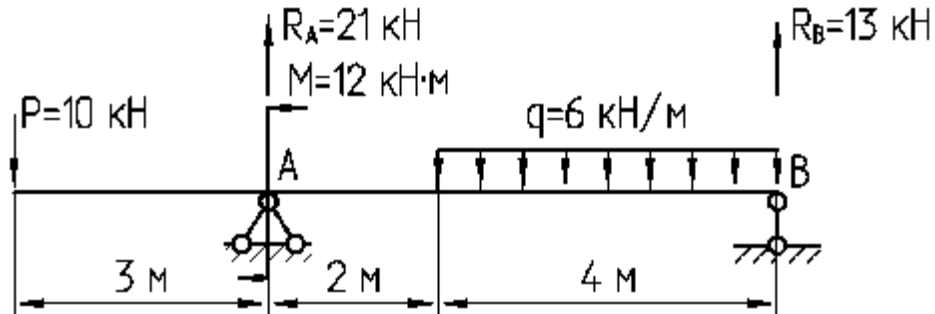


Рисунок 1.6

2 Неизвестные реакции опор находим из уравнений равновесия:

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M + P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 4 + R_B \cdot 6 = 0,$$

$$R_B = \frac{M - P \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 4}{6} = \frac{12 - 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 4}{6} = 13 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 9 + q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 6 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 9 + q \cdot 4 \cdot 2}{6} = \frac{-12 + 10 \cdot 9 + 6 \cdot 4 \cdot 2}{6} = 21 \text{ кН}.$$

3 Для контроля используем условия равенства нулю суммы проекций на вертикаль:

$$\sum P_y = 0,$$

$$-P - q \cdot 4 + R_A + R_B = 0,$$

$$-10 - 6 \cdot 4 + 21 + 13 = 0,$$

$$-34 + 34 = 0.$$

### Задача 1.2

Вычислить опорные реакции для рамы (рис. 1.7).

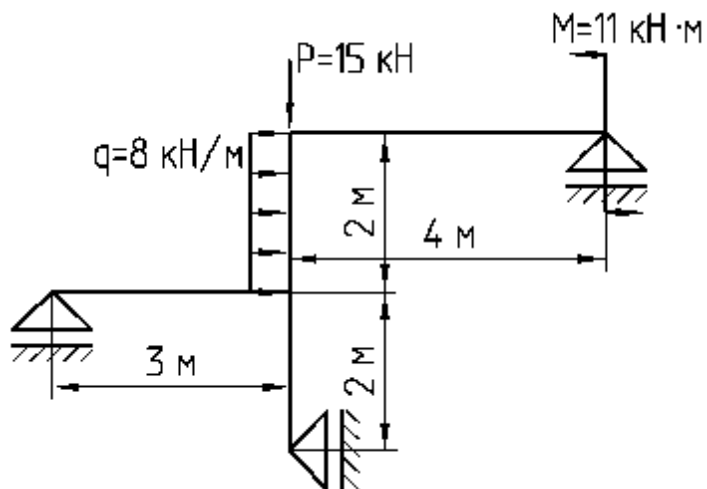


Рисунок 1.7

### Решение

1 Опоры обозначаем буквами А, В и С, выбираем направление реакций и изображаем их на рисунке (рис. 1.8).

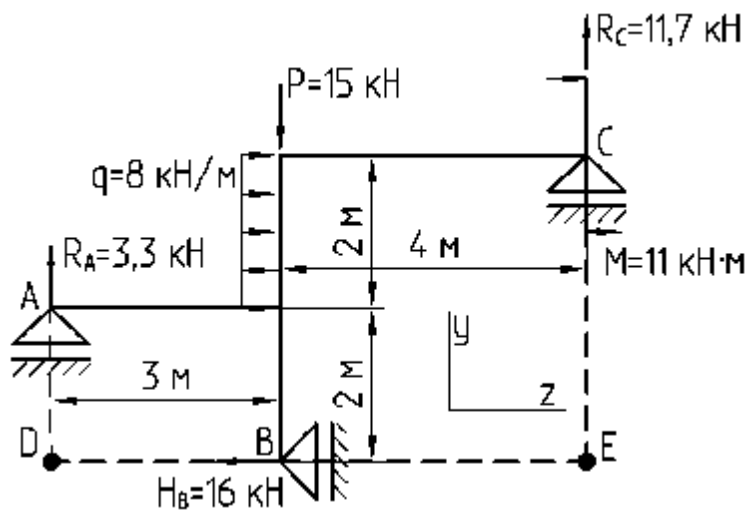


Рисунок 1.8

2 Неизвестные реакции опор находим из уравнений равновесия:

$$\sum P_z = 0,$$

$$q \cdot 2 - H_B = 0,$$

$$H_B = q \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ кН}.$$

$$\sum M_D = 0,$$

$$M - P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 3 + R_C \cdot 7 = 0,$$

$$R_C = \frac{-M + P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 3}{7} = \frac{-11 + 15 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot 3}{7} = 11,7 \text{ кН}.$$

$$\sum M_E = 0,$$

$$M + P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 - R_A \cdot 7 = 0,$$

$$R_A = \frac{M + P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3}{7} = \frac{11 + 15 \cdot 4 - 8 \cdot 2 \cdot 3}{7} = 3,3 \text{ кН}.$$

3 Для контроля используем условия равенства нулю суммы проекций на вертикаль:

$$\sum P_y = 0,$$

$$-P + R_A + R_C = 0,$$

$$-15 + 3,3 + 11,7 = 0,$$

$$-15 + 15 = 0.$$

## 2 РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

### 2.1 Основные сведения из теории

При работе стержня на растяжение-сжатие в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила  $N$ .

Продольная сила в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций на его продольную ось всех внешних сил, приложенных с одной стороны от рассматриваемого сечения.

При растяжении продольную силу принято считать положительной.

Закон изменения продольной силы по длине стержня представляют в виде графика – эпюры продольных сил.

В поперечных сечениях стержня возникают только нормальные напряжения, определяемые по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (2.1)$$

где  $N$  – продольная сила;  $F$  – площадь поперечного сечения.

Удлинение или укорочение стержня определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \quad (2.2)$$

где  $l$  – длина стержня;  $E$  – модуль упругости первого рода (модуль Юнга), для стали  $E = (2,0 \text{К} 2,1) \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

В случае, если стержень имеет ступенчато-переменное сечение, то для определения изменения его длины формулу (2.2) надо применять отдельно к каждому из участков, в пределах которого площадь и продольная сила постоянны, и результаты просуммировать:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E F_i}. \quad (2.3)$$

При решении многих практических задач возникает необходимость наряду с удлинениями, обусловленными напряжениями, учитывать также удлинения, связанные с температурными воздействиями. В этом случае полную абсолютную деформацию рассматривают как сумму силовой деформации и чисто температурной:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha l \Delta t, \quad (2.4)$$

где  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения материала, для стали  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ ;  $\Delta t$  – разность температур до и после нагревания.

Условие прочности для растянутого или сжатого стержня записывается следующим образом:

$$s_{\max} = \frac{N}{F} \leq [s], \quad (2.5)$$

где  $[s]$  – допускаемое напряжение.

## 2.2 Расчеты на растяжение-сжатие статически определимых систем

### Задача 2.1

Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений по длине ступенчатого стержня, нагруженного, как показано на рис 2.1, а. Определить удлинение стержня. Материал стержня – Ст.3,  $E = (2,0 \cdot 10^5) \text{ МПа}$ .

### Решение

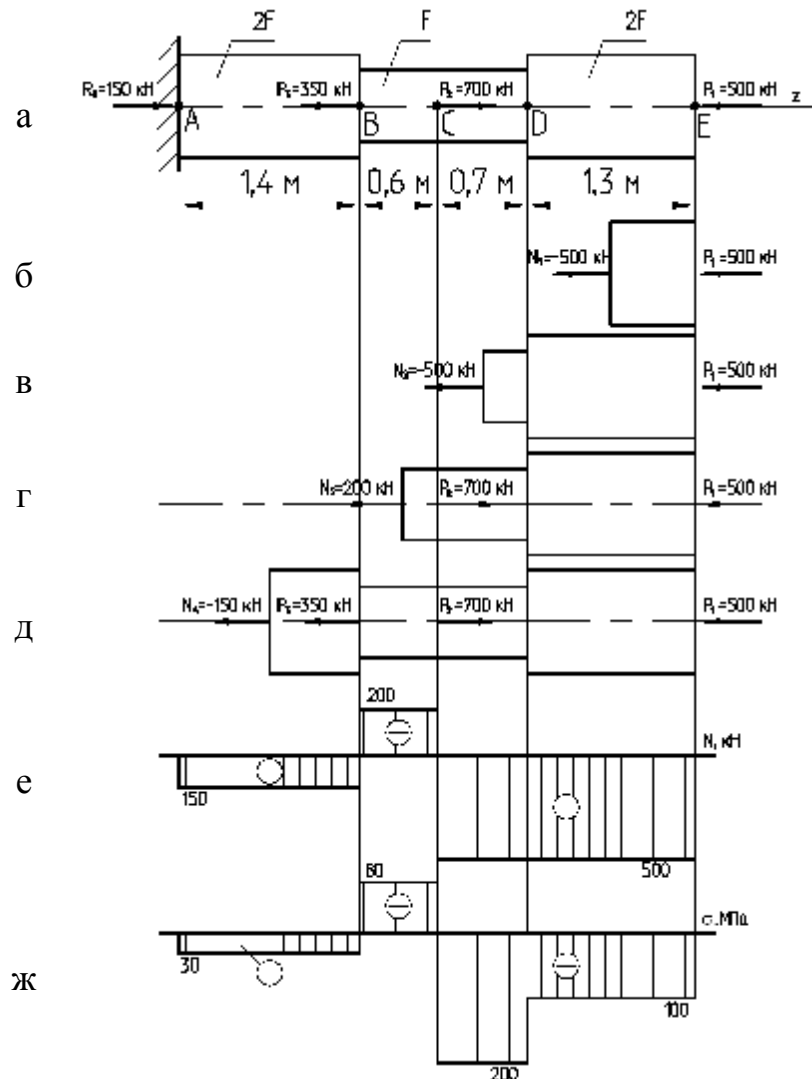


Рисунок 2.1

1 Разобьем стержень на отдельные участки, начиная от свободного конца. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы, и место изменения размеров поперечного сечения. Таким образом, заданный стержень имеет четыре участка (AB, BC, CD, DE).

2 Определим реакцию заделки  $R_A$ .

$$\sum P_z = 0, \quad R_A - P_1 + P_2 - P_3 = 0,$$

$$R_A = P_1 - P_2 + P_3 = 500 - 700 + 350 = 150 \text{ кН}.$$

3 Применяем метод сечений, при этом оставляем правую и отбрасываем левую отсеченные части стержня. Проведем произвольное сечение на участке DE и рассмотрим равновесие оставленной части (рис 2.1, б).

$$-N_1 - P_1 = 0,$$

$$N_1 = -P_1 = -500 \text{ кН}.$$

Знак «-» говорит о том, что участок DE сжат.

Легко заметить, что то же значение продольной силы сохраняется для любого сечения на участке CD (рис 2.1, в), т.е.

$$N_2 = N_1 = -500 \text{ кН}.$$

Участок CD сжат.

Проведем произвольное сечение на участке BC и рассмотрим равновесие оставленной части (рис 2.1, г).

$$-N_3 - P_1 + P_2 = 0,$$

$$N_3 = -P_1 + P_2 = -500 + 700 = 200 \text{ кН}.$$

Участок BC растянут.

Проведем произвольное сечение на участке AB и рассмотрим равновесие оставленной части (рис 2.1, д).

$$-N_4 - P_1 + P_2 - P_3 = 0,$$

$$N_4 = -P_1 + P_2 - P_3 = -500 + 700 - 350 = -150 \text{ кН}.$$

Участок AB сжат.

Строим эпюру продольных сил (рис. 2.1, е).

4 Эпюру нормальных напряжений получим, определив нормальные напряжения на каждом из участков:

$$s_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-500 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = -100 \text{ МПа}, \quad s_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-500 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = -200 \text{ МПа},$$

$$s_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа}, \quad s_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{-150 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = -30 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений (рис. 2.1, ж).

5 Определяем абсолютное удлинение стержня:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \mathbf{l}_i}{EF_i} = \frac{N_1 \mathbf{l}_1}{EF_1} + \frac{N_2 \mathbf{l}_2}{EF_2} + \frac{N_3 \mathbf{l}_3}{EF_3} + \frac{N_4 \mathbf{l}_4}{EF_4} = \frac{-500 \cdot 10^{-3} \cdot 1.3}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} +$$

$$+ \frac{-500 \cdot 10^{-3} \cdot 0.7}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{200 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{-150 \cdot 10^{-3} \cdot 1.4}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = -13,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1,32 \text{ мм}.$$

## Задача 2.2

Из расчета на прочность подобрать размеры поперечных сечений стержней: стержень 1 – круглого поперечного сечения, стержень 2 состоит из двух равнобоких уголков, стержень 3 – двутаврового поперечного сечения (рис. 2.2). Определить абсолютное удлинение (укорочение) стержней, если  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

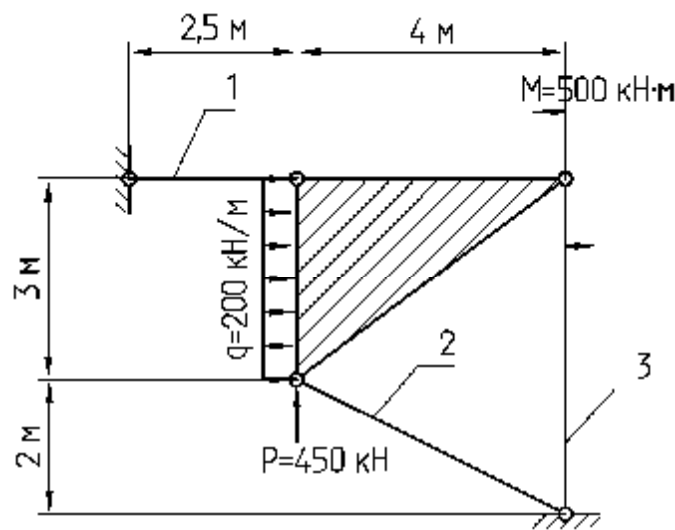


Рисунок 2.2

## Решение

1 В рассматриваемом примере в равновесии находится одно тело – недеформируемая пластина. Нагрузками, приложенными к ней, являются: сосредоточенная сила  $P$ , равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q$ , пара сил с моментом  $M$  и усилия в стержнях  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ . При решении задачи предполагается, что стержни 1, 2 и 3 растянуты, т. е. усилия направлены к точкам подвеса стержней (рис. 2.3).

2 Длина второго стержня равна:

$$\mathbf{l}_2 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,5 \text{ м}.$$

Определим синус и косинус угла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{2}{4,5} = 0,444, \quad \cos \alpha = \frac{4}{4,5} = 0,889.$$

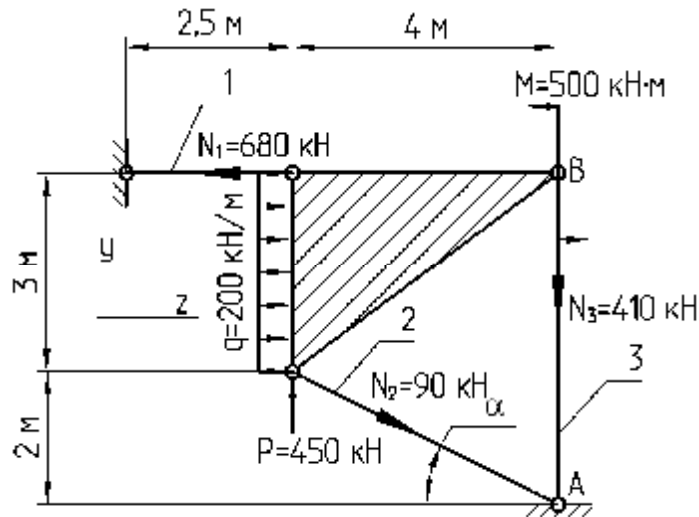


Рисунок 2.3

3 Балка находится в равновесии под действием плоской произвольной системы сил. Такая система сил имеет три условия равновесия.

Из уравнения  $\sum M_A = 0$  определим  $N_1$ :

$$M - P \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 3,5 + N_1 \cdot 5 = 0,$$

$$N_1 = \frac{-M + P \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = \frac{-500 + 450 \cdot 4 + 200 \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = 680 \text{ кН}.$$

Из уравнения  $\sum M_B = 0$  определим  $N_2$ :

$$M - P \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + N_2 \cos \alpha \cdot 5 = 0,$$

$$N_2 = \frac{-M + P \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 1,5}{\cos \alpha \cdot 5} = \frac{-500 + 450 \cdot 4 - 200 \cdot 3 \cdot 1,5}{0,889 \cdot 5} = 90 \text{ кН}.$$

Усилие  $N_3$  определим из уравнения равновесия  $\sum P_y = 0$ :

$$P - N_2 \sin \alpha - N_3 = 0,$$

$$N_3 = P - N_2 \sin \alpha = 450 - 90 \cdot 0,444 = 410 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum P_z = 0$ ,

$$q \cdot 3 + N_2 \cos \alpha - N_1 = 0,$$

$$200 \cdot 3 + 90 \cdot 0,889 - 680 = 0,$$

$$600 + 80 - 680 = 0,$$

$$680 - 680 = 0.$$

4 Площади поперечных сечений стержней определяются из условия прочности на растяжение (сжатие)

$$s_i = \frac{N_i}{F_i} \leq [s], \Rightarrow F_i \geq \frac{N_i}{[s]}:$$

$$\text{Стержень № 1} - F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{680 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 42,5 \text{ см}^2.$$

Так как площадь круга равна  $F_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ , то  $D = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 42,5}{3,14}} = 7,4 \text{ см}$ .

$$\text{Принимаем } D = 7,5 \text{ см} \Rightarrow F_1 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 7,5^2}{4} = 44,2 \text{ см}^2.$$

$$\text{Стержень № 2} - F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{90 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 5,6 \text{ см}^2.$$

Так как площадь одного уголка равна  $F_L = \frac{F_2}{2}$ , то  $F_L = \frac{F_2}{2} = \frac{5,6}{2} = 2,8 \text{ см}^2$ .

Принимаем уголок 50x50x3 ( $F_L = 2,96 \text{ см}^2$ )  $\Rightarrow F_2 = 2F_L = 2 \cdot 2,96 = 5,92 \text{ см}^2$ .

$$\text{Стержень № 3} - F_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{410 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 25,6 \text{ см}^2.$$

Принимаем двутавр № 20а ( $F_3 = 28,9 \text{ см}^2$ ).

5 Определим абсолютные удлинения (укорочения) стержней:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{680 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 44,2 \cdot 10^{-4}} = 19,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,92 \text{ мм},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{90 \cdot 10^{-3} \cdot 4,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 5,92 \cdot 10^{-4}} = 34,0 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 3,4 \text{ мм},$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF} = \frac{410 \cdot 10^{-3} \cdot 5}{2 \cdot 10^5 \cdot 28,8 \cdot 10^{-4}} = 35,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 3,56 \text{ мм}.$$

### Задача 2.3

В стержневой системе (рис. 2.4) определить из условия прочности требуемые диаметры  $d_1$  и  $d_2$  поперечных сечений стержней, если  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

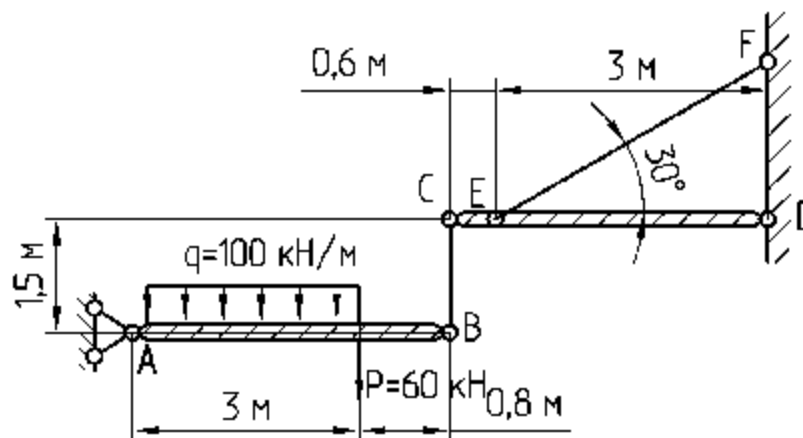


Рисунок 2.4

## Решение

1 В рассматриваемом примере в равновесии находится система тел – два недеформируемых бруса, связанных между собой стержнем СВ. Если рассматриваемая конструкция состоит из системы тел, следует рассмотреть отдельно равновесие ее частей в последовательности, позволяющей определить неизвестные усилия.

Рассекая стержни ВС и ЕF и заменяя действие отброшенных частей системы на оставленные части продольными силами  $N_1$  и  $N_2$ , получаем расчетную схему, показанную на рисунке 2.5.

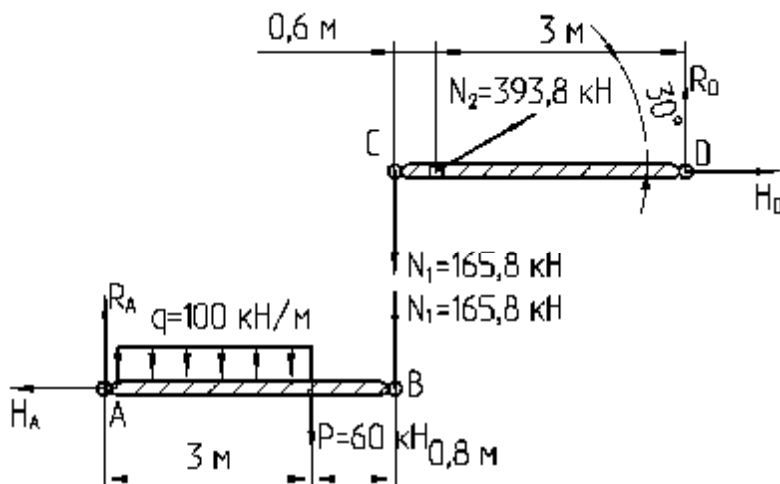


Рисунок 2.5

2 Составим уравнение равновесия для балки АВ:

$$\sum M_A = 0$$

$$-P \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + N_1 \cdot 3,8 = 0,$$

$$N_1 = \frac{P \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5}{3,8} = \frac{60 \cdot 3 + 100 \cdot 3 \cdot 1,5}{3,8} = 165,8 \text{ кН}.$$

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[s]} = \frac{165,8 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 10,4 \text{ см}^2,$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{p}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10,4}{3,14}} = 3,6 \text{ см}. \text{ Принимаем } d_1 = 4 \text{ см}.$$

3 Составим уравнение равновесия для балки CD:

$$\sum M_D = 0$$

$$N_1 \cdot 3,8 - N_2 \sin 30^\circ \cdot 3,2 = 0,$$

$$N_2 = \frac{N_1 \cdot 3,8}{\sin 30^\circ \cdot 3,2} = \frac{165,8 \cdot 3,8}{0,5 \cdot 3,2} = 393,8 \text{ кН}.$$

$$F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{393,8 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 24,6 \text{ см}^2,$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\rho}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 24,6}{3,14}} = 5,6 \text{ см}. \text{ Принимаем } d_2 = 6 \text{ см}.$$

### Задача 2.4

Определить внутренние усилия, возникающие в системе, представленной на рисунке 2.6. Определить диаметр наиболее нагруженного стержня, если  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

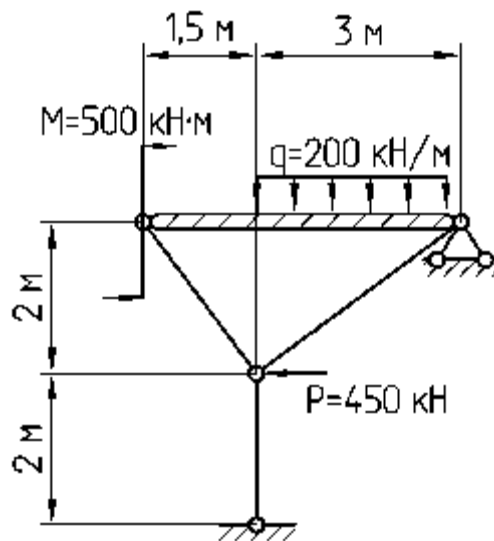


Рисунок 2.6

### Решение

1 Так как рассматриваемая конструкция состоит из системы тел, следует рассмотреть отдельно равновесие ее частей в последовательности, позволяющей определить неизвестные усилия.

Рассекая стержни AC, BC и CD и заменяя действие отброшенных частей системы на оставленные части продольными силами  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ , получаем расчетную схему, показанную на рисунке 2.7.

2 Длина первого стержня равна:

$$l_1 = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ м}.$$

Определим синус и косинус угла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{2}{2,5} = 0,8, \quad \cos \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6.$$

Длина второго стержня равна:

$$l_2 = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,61 \text{ м.}$$

Определим синус и косинус угла  $\beta$ :

$$\sin \beta = \frac{2}{3,61} = 0,555, \quad \cos \beta = \frac{3}{3,61} = 0,832.$$

3 Составим уравнение равновесия для балки АВ:

$$\sum M_A = 0,$$

$$M - q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - N_1 \sin \alpha \cdot 4,5 = 0,$$

$$N_1 = \frac{M - q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}}{\sin \alpha \cdot 4,5} = \frac{500 - 200 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}}{0,8 \cdot 4,5} = -111,1 \text{ кН.}$$

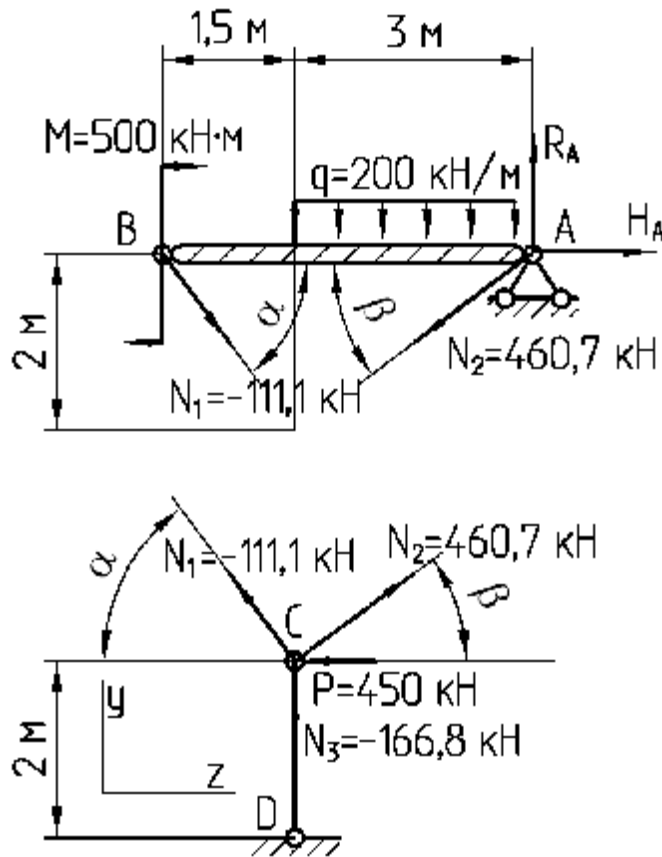


Рисунок 2.7

4 Из уравнения  $\sum P_z = 0$  определим  $N_2$ :

$$-P - N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \beta = 0,$$

$$N_2 = \frac{P + N_1 \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{450 - 111,1 \cdot 0,6}{0,832} = 460,7 \text{ кН.}$$

5 Из уравнения  $\sum P_y = 0$  определим  $N_3$ :

$$N_1 \sin a + N_2 \sin b + N_3 = 0,$$

$$N_3 = -N_1 \sin a - N_2 \sin b = 111,1 \cdot 0,8 - 460,7 \cdot 0,555 = -166,8 \text{ кН}.$$

6 Наиболее нагруженным является второй стержень, то есть  $N_{\max} = 460,7 \text{ кН}$ .

$$F \geq \frac{N_{\max}}{[s]} = \frac{460,7 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 28,8 \text{ см}^2,$$

$$d = \sqrt{\frac{4F}{p}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 28,8}{3,14}} = 6,1 \text{ см}. \text{ Принимаем } d = 6,5 \text{ см}.$$

### 2.3 Расчеты на растяжение-сжатие статически неопределимых систем

Системы (конструкции) называются статически неопределимыми, если количество неизвестных реакций связей в них превышает количество уравнений равновесия, которые можно записать для данной системы сил.

Разница между числом неизвестных усилий и количеством уравнений статики, которое можно составить для данной конструкции, определяет число “лишних” неизвестных или степень статической неопределимости конструкции.

Статически неопределимые системы рассчитывают путем совместного решения уравнений, полученных в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи.

Статическая сторона задачи. Составляем уравнения равновесия отсеченных элементов конструкции, содержащих неизвестные усилия.

Геометрическая сторона задачи. Изображаем конструкцию в двух положениях (до и после деформации) и устанавливаем связь между перемещениями или деформациями отдельных элементов конструкции. Полученные уравнения называются уравнениями совместности деформаций.

Физическая сторона задачи. На основании закона Гука, записанного в абсолютной форме (формула (2.2)), выражаем деформации элементов конструкции через действующие в них неизвестные усилия. В случае изменения температуры к деформациям, которые вызваны внешними усилиями, необходимо добавить деформации, вызванные температурным удлинением. Подставляем полученные выражения деформации в уравнения совместности, после чего последние будут содержать неизвестные усилия.

Синтез. Решаем уравнения статики совместно с уравнениями совместности деформаций, записанными в усилиях, и находим неизвестные усилия.

## Задача 2.5

Стальной брус жестко закреплен обоими концами в неподвижных опорах и нагружен вдоль оси силами  $P_1$  и  $P_2$ , приложенными в его промежуточных сечениях, (рис. 2.8, а). Брус нагревается на  $50^\circ\text{C}$  по сравнению с температурой, при которой брус был закреплен. Построить эпюру продольных сил по длине ступенчатого стержня.

### Решение

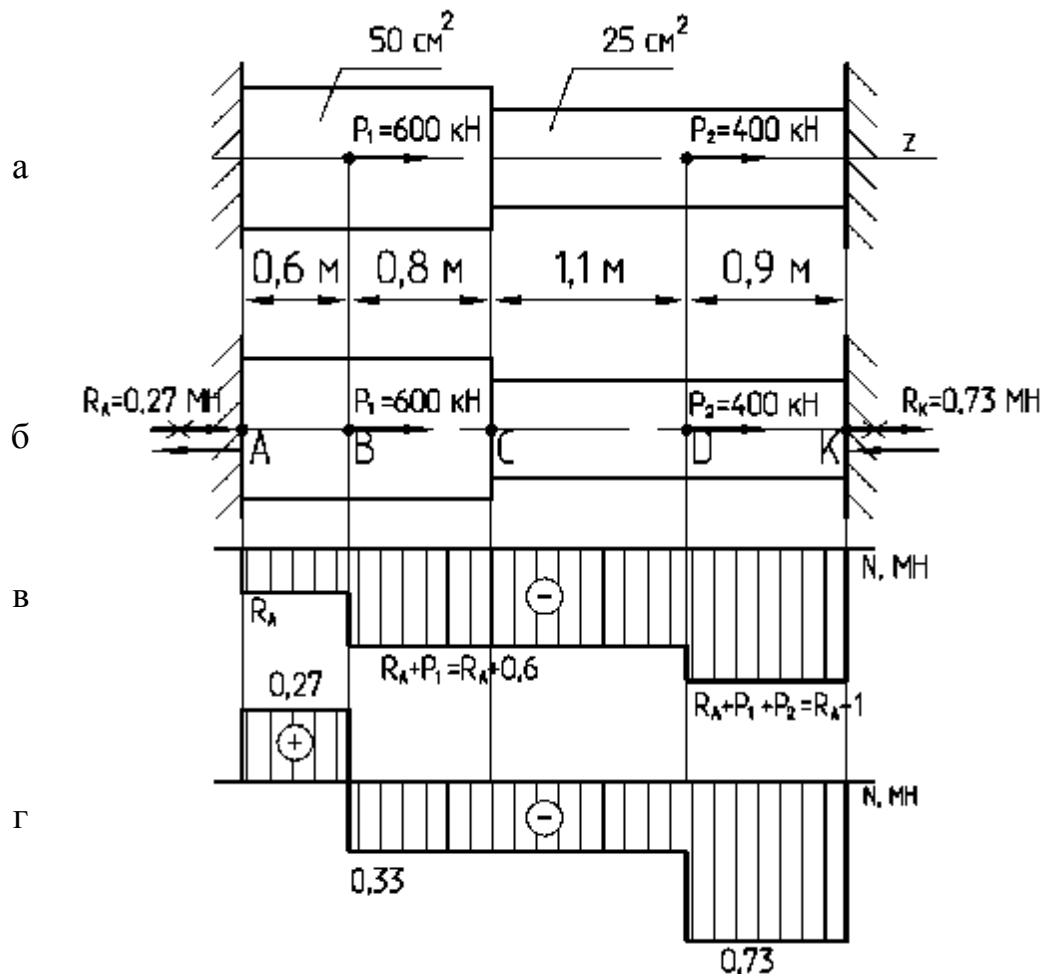


Рисунок 2.8

1 Статическая сторона задачи. Под действием внешних сил и при нагреве бруса в его закреплениях возникают реакции  $R_A$  и  $R_K$  (рис. 2.8, б), для определения которых статика дает лишь одно уравнение равновесия:

$$\sum P_z = 0,$$

$$P_1 + P_2 + R_A + R_K = 0,$$

$$R_A + R_K = -P_1 - P_2 = -600 - 400 = -1000\text{ kH} = -1\text{ MH}.$$

Следовательно, задача статически неопределима.

2 Геометрическая сторона задачи. Из условия деформации бруса очевидно, что перемещения сечений А и К равны нулю (так как они закреплены), т.е.  $\Delta l = 0$ .

3 Отбросим правое закрепление и заменим действие правого закрепления неизвестной пока реакцией  $R_K$  (см. рис. 2.8, б). Таким образом, получим статически определимый брус, нагруженный силами  $P_1$ ,  $P_2$  и  $R_K$ .

Строим эпюру продольных сил (рис. 2.8, в).

4 Физическая сторона задачи. Определяем перемещение сечения К от действия всех сил и от нагрева:

$$\Delta l = -\frac{R_A \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 1,1}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 1) \cdot 0,9}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50.$$

5 Синтез. Так как  $\Delta l = 0$ , то

$$-\frac{R_A \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 1,1}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 1) \cdot 0,9}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50 = 0.$$

Отсюда  $R_A = -0,27 \text{ МН}$ .

Следовательно,  $R_K = -1 - R_A = -1 + 0,27 = -0,73 \text{ МН}$ .

6 Окончательно строим эпюры продольных сил (рис. 2.8, г).

## Задача 2.6

Стальной брус нагружен вдоль оси силами  $P_1$  и  $P_2$ , приложенными в его промежуточных сечениях (рис. 2.9, а). Брус нагревается на  $50^\circ \text{C}$ . Между его правым торцом и заделкой имеется зазор  $\delta = 0,8 \text{ мм}$ . Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений по длине ступенчатого стержня.

## Решение

1 Предполагаем, что брус может деформироваться свободно, т.е. правая заделка вообще отсутствует (рис. 2.9, б). Определяем абсолютное удлинение от действия сил  $P_1$  и  $P_2$  и от нагрева. Для этого строим эпюру продольных сил (рис. 2.9, в).

$$\Delta l = \frac{400 \cdot 1,1}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{400 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} + \frac{1000 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50 = 39,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 3,92 \text{ мм}.$$

2 Так как величина абсолютного удлинения бруса  $\Delta l$  больше зазора  $\delta$ , то между правым торцом бруса и заделкой после его нагружения возникнет сила взаимодействия  $R_K$ , определить которую с помощью одних

лишь уравнений статики невозможно – система будет статически неопределима (рис. 2.9, г).

3 Статическая сторона задачи

$$\sum P_z = 0,$$

$$P_1 + P_2 + R_A + R_K = 0,$$

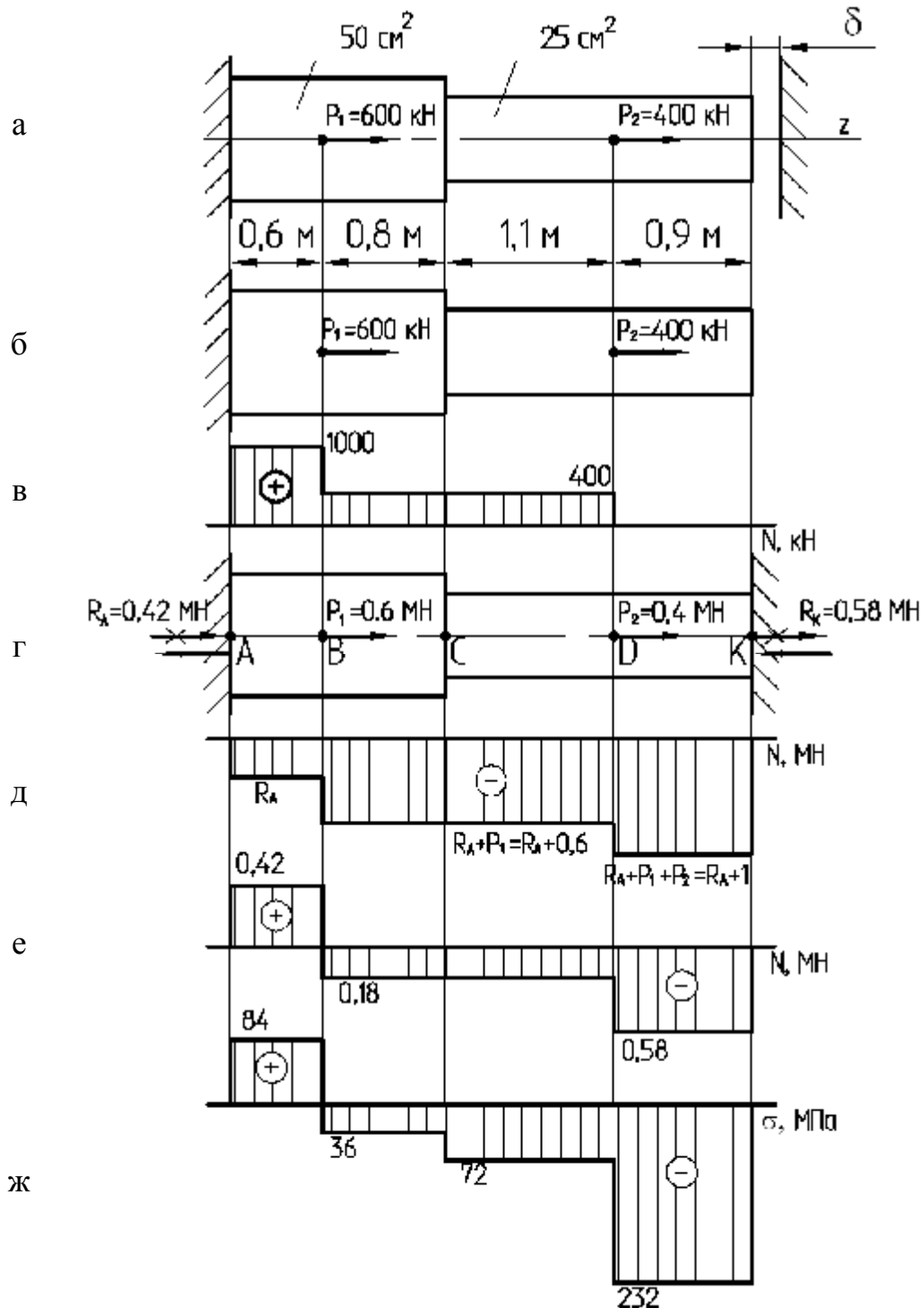


Рисунок 2.9

$$R_A + R_K = -P_1 - P_2 = -600 - 400 = -1000 \text{ кН} = -1 \text{ МН} .$$

4 Геометрическая сторона задачи. Суммарное перемещение правого торца приравниваем к величине зазора, т.е.

$$\Delta l = \delta = 0,8 \text{ мм} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м} .$$

5 Отбросим правое закрепление и заменим действие правого закрепления неизвестной пока реакцией  $R_K$  (см. рис. 2.8, г). Таким образом, получим статически определимый брус, нагруженный силами  $P_1$ ,  $P_2$  и  $R_K$ .

Строим эпюру продольных сил (рис. 2.8, д).

6 Физическая сторона задачи. Определяем перемещение сечения К от действия всех сил и от нагрева:

$$\Delta l = -\frac{R_A \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 1,1}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 1) \cdot 0,9}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50 .$$

7 Синтез. Так как  $\Delta l = \delta$ , то

$$-\frac{R_A \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 1,1}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 1) \cdot 0,9}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50 = 8 \cdot 10^{-4} .$$

Отсюда  $R_A = -0,42 \text{ МН}$ .

Следовательно,  $R_K = -1 - R_A = -1 + 0,42 = -0,58 \text{ МН}$ .

8 Окончательно строим эпюры продольных сил (рис. 2.8, е).

9 Эпюру нормальных напряжений получим, определив нормальные напряжения на каждом из участков:

$$s_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0,42}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 84 \text{ МПа} , \quad s_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-0,18}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = -36 \text{ МПа} ,$$

$$s_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{-0,18}{25 \cdot 10^{-4}} = -72 \text{ МПа} , \quad s_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{-0,58}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = -232 \text{ МПа} .$$

Строим эпюру нормальных напряжений (рис. 2.1, ж).

## Задача 2.7

*Абсолютно твердое тело (заштриховано) имеет шарнирно-неподвижную опору и подвешено на двух стержнях (рис. 2.10). Определить диаметры поперечных сечений стержней. Материал стержней – сталь 3,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ .*

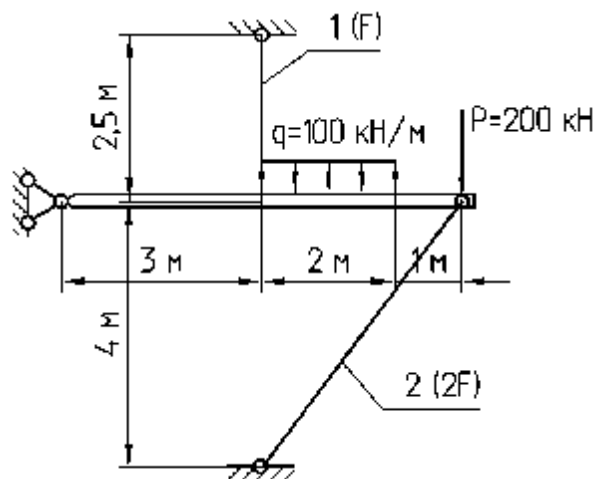


Рисунок 2.10

### Решение

1 Определяем степень статической неопределимости задачи, для чего освобождаем балку от связей и заменяем их реакциями (рис. 2.11).

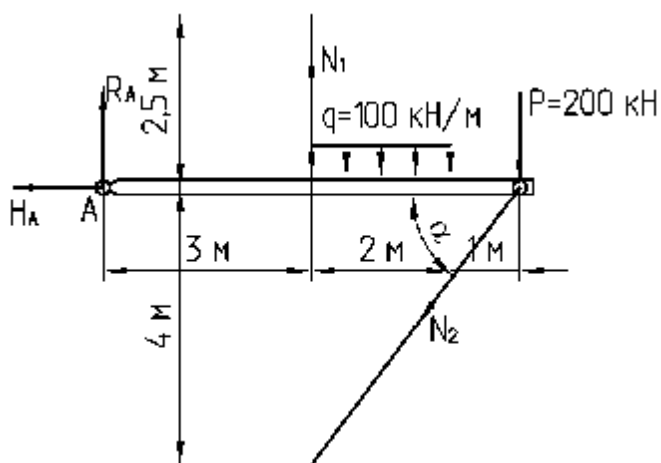


Рисунок 2.11

Реакции в неподвижном шарнире А –  $R_A$ ,  $H_A$ , усилия в стержнях –  $N_1$ ,  $N_2$ . При решении задачи предполагаем, что усилия в стержнях растягивающие, т.е. направлены к точкам их подвеса.

Степень статической неопределимости определяется как разность между числом неизвестных и числом уравнений равновесия системы сил, действующих на конструкцию.

Неизвестными в задаче являются  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ , а система приложенных к балке сил – плоская произвольная, которая имеет три условия равновесия. Таким образом, задача является один раз статически неопределимой.

2 Длина второго стержня равна:

$$l_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ м.}$$

Определим синус и косинус угла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0,8, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} = 0,6.$$

3 Рассмотрим статическую сторону задачи, для чего составим такое уравнение равновесия, которое содержало бы неизвестные  $N_1$  и  $N_2$ , подлежащие определению. Таким уравнением равновесия является  $\sum M_A = 0$ .

$$-P \cdot 6 - q \cdot 2 \cdot 4 + N_1 \cdot 3 - N_2 \sin \alpha \cdot 6 = 0,$$

$$-200 \cdot 6 - 100 \cdot 2 \cdot 4 + N_1 \cdot 3 - N_2 \cdot 0,8 \cdot 6 = 0,$$

$$-1200 - 800 + N_1 \cdot 3 - N_2 \cdot 4,8 = 0,$$

$$3N_1 - 4,8N_2 = 2000. \quad (2.6)$$

4 Чтобы получить второе уравнение, связывающее неизвестные  $N_1$  и  $N_2$ , рассмотрим геометрическую сторону задачи. Для этого представим систему в деформированном состоянии (рис. 2.12). Под действием приложенных сил балка повернется вокруг шарнира А, при этом первый стержень растянется, второй укоротится. Точки С и В при повороте балки опишут дуги окружностей, но из-за малости угла поворота балки можно принять за прямые отрезки  $BB'$  и  $CC'$ , перпендикулярные  $AB$  и  $AC$ .

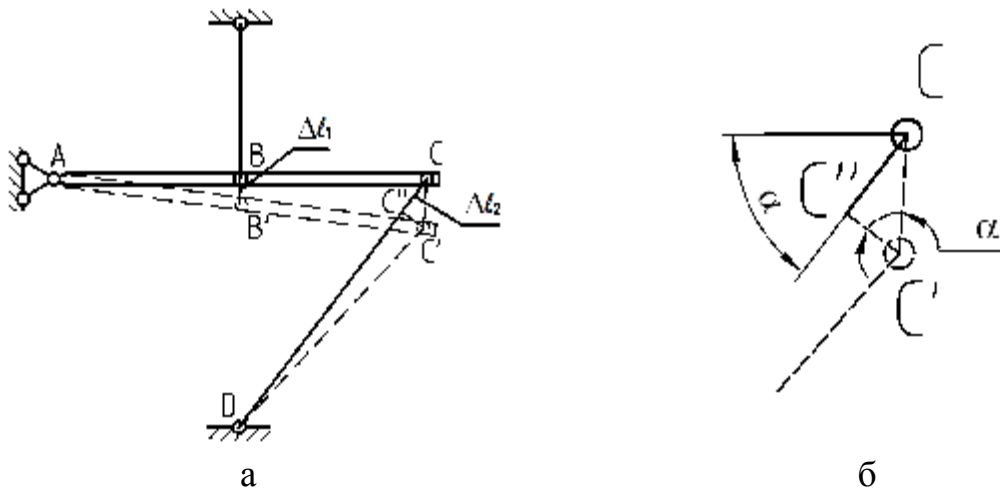


Рисунок 2.12

Перемещение точки В по вертикали будет равно удлинению первого стержня  $BB' = \Delta l_1$ , перемещение точки С по вертикали  $CC'$  связано с укорочением второго стержня  $CC' = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$  (рис. 2.12, б). Это соотношение следует из треугольника  $CC'C''$ , в котором угол  $CC'C'' = \alpha$ .

Геометрическое соотношение между  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  можно установить, рассмотрев подобие треугольников  $ABB'$  и  $ACC'$  (рис. 2.12, а). Из их подобия следует:

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{AC},$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2 / \sin \alpha} = \frac{AB}{AC},$$

$$\Delta l_1 = \frac{AB}{AC \sin \alpha} \Delta l_2 = \frac{3}{6 \cdot 0,8} \Delta l_2,$$

$$\Delta l_1 = 0,625 \Delta l_2. \quad (2.7)$$

5 С помощью закона Гука выразим абсолютные удлинения стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  через действующие в них усилия  $N_1$  и  $N_2$  (физическая сторона задачи). Если характер предполагаемого усилия при рассмотрении статической стороны задачи не отвечает деформированному состоянию стержня, то это несоответствие должно быть учтено знаком “ минус ” в законе Гука.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{2,5N_1}{EF}.$$

Для второго стержня предполагаемое усилие (растягивающее) не соответствует предполагаемой деформации стержня (сжимающей), поэтому

$$\Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{EF_2} = -\frac{5N_2}{2EF} = -\frac{2,5N_2}{EF}.$$

6 Решая совместно уравнения, полученные при рассмотрении трех сторон задачи (статической, геометрической и физической), определяем искомые усилия в стержнях.

Подставляем найденные  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  в уравнение (2.7):

$$\frac{2,5N_1}{EF} = -0,625 \cdot \frac{2,5N_2}{EF},$$

$$N_1 = -0,625N_2.$$

Таким образом, получено второе уравнение, определяющее зависимость между  $N_1$  и  $N_2$ . Записав оба уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3N_1 - 4,8N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \cdot (-0,625)N_2 - 4,8N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} -1,857N_2 - 4,8N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6,675N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} N_2 = -300 \text{ кН}, \\ N_1 = 187,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

7 Размеры поперечных сечений стержней определяем из условия прочности на растяжение (сжатие):

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i} \leq [\sigma],$$

Рассчитываем по  $N_1$ :

$$F_{1N_1} \geq \frac{N_1}{[S]} = \frac{187,5 \cdot 10^{-3}}{120} \cdot 10^4 = 15,6 \text{ см}^2,$$

$$F_{2N_1} = 2F_{1N_1} = 2 \cdot 15,6 = 31,2 \text{ см}^2.$$

Рассчитываем по  $N_2$ :

$$F_{2N_2} \geq \frac{N_2}{[S]} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{120} \cdot 10^4 = 25 \text{ см}^2,$$

$$F_{1N_2} = \frac{F_{2N_2}}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ см}^2.$$

Так как требуемая площадь  $F_{1N_1} > F_{1N_2}$  и  $F_{2N_1} > F_{2N_2}$ , то дальнейшие расчеты ведем по продольной силе  $N_1$ .

Следовательно, принимаем:  $F_1 = 15,6 \text{ см}^2$ ,  $F_2 = 31,2 \text{ см}^2$ .

Так как площадь круга равна:  $F_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$ , то  $D_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 15,6}{3,14}} = 4,45 \text{ см}$ .

Принимаем:  $D_1 = 4,5 \text{ см} \Rightarrow F_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4,5^2}{4} = 15,9 \text{ см}^2$ .

Так как площадь круга равна:  $F_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}$ , то  $D_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 31,2}{3,14}} = 6,30 \text{ см}$ .

Принимаем:  $D_2 = 6,5 \text{ см} \Rightarrow F_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 6,5^2}{4} = 33,2 \text{ см}^2$ .

### Задача 2.8

Определить усилия в стержнях, поддерживающих абсолютно жесткую балку (рис 2.13). Материал стержней одинаков.

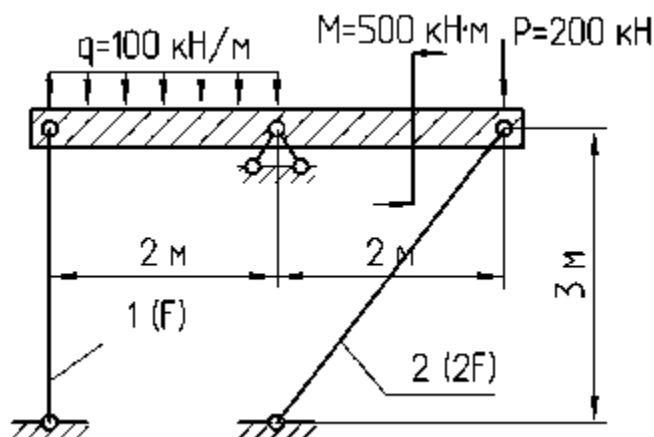


Рисунок 2.13

## Решение

1 Определяем степень статической неопределимости задачи, для чего освобождаем балку от связей и заменяем их реакциями (рис. 2.14).

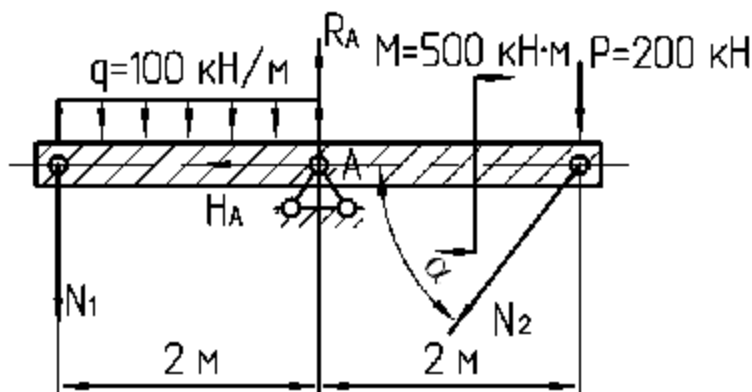


Рисунок 2.14

Задача является один раз статически неопределимой.

2 Длина второго стержня равна:

$$l_2 = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,6 \text{ м.}$$

Определим синус и косинус угла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{3}{3,6} = 0,833, \quad \cos \alpha = \frac{2}{3,6} = 0,556.$$

3 Рассмотрим статическую сторону задачи, для чего составим такое уравнение равновесия, которое содержало бы неизвестные  $N_1$  и  $N_2$ , подлежащие определению. Таким уравнением равновесия является  $\sum M_A = 0$ :

$$-M - P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 + N_1 \cdot 2 - N_2 \sin \alpha \cdot 2 = 0,$$

$$-500 - 200 \cdot 2 - 100 \cdot 2 \cdot 1 + N_1 \cdot 2 - N_2 \cdot 0,833 \cdot 2 = 0,$$

$$-500 - 400 - 200 + N_1 \cdot 2 - N_2 \cdot 1,66 = 0,$$

$$2N_1 - 1,66N_2 = 1100. \tag{2.8}$$

4 Чтобы получить второе уравнение, связывающее неизвестные  $N_1$  и  $N_2$ , рассмотрим геометрическую сторону задачи. Для этого представим систему в деформированном состоянии (рис. 2.15).

Перемещение точки В по вертикали будет равно сжатию первого стержня  $BB' = \Delta l_1$ , перемещение точки С по вертикали  $CC'$  связано с удлинением второго стержня  $CC' = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$  (рис. 2.15, б). Это соотношение следует из треугольника  $CC'C''$ , в котором угол  $C'CC'' = \alpha$ .

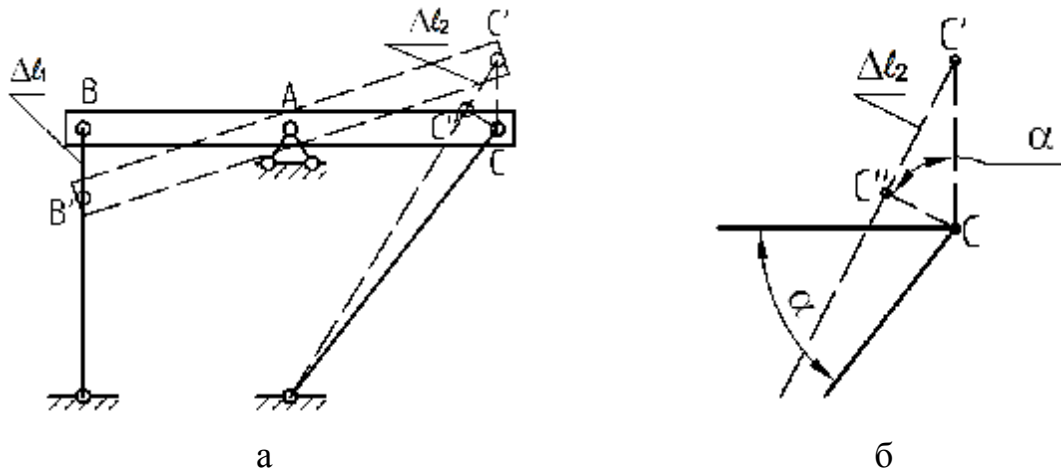


Рисунок 2.15

Геометрическое соотношение между  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  можно установить, рассмотрев подобие треугольников  $ABV'$  и  $ACC'$  (рис. 2.15, а). Из их подобия следует:

$$\frac{BV'}{CC'} = \frac{AB}{AC},$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2 / \sin \alpha} = \frac{AB}{AC},$$

$$\Delta l_1 = \frac{AB}{AC \sin \alpha} \Delta l_2 = \frac{2}{2 \cdot 0,833} \Delta l_2,$$

$$\Delta l_1 = 1,2 \Delta l_2. \quad (2.9)$$

5 С помощью закона Гука выразим абсолютные удлинения стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  через действующие в них усилия  $N_1$  и  $N_2$  (физическая сторона задачи):

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l_1}{EF_1} = -\frac{3N_1}{EF},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{3,6N_2}{2EF} = \frac{1,8N_2}{EF}.$$

6 Решая совместно уравнения, полученные при рассмотрении трех сторон задачи (статической, геометрической и физической), определяем искомые усилия в стержнях:

$$-\frac{3N_1}{EF} = 1,2 \cdot \frac{1,8N_2}{EF},$$

$$N_1 = -0,72N_2.$$

Таким образом, получено второе уравнение, определяющее зависимость между  $N_1$  и  $N_2$ . Записав оба уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2N_1 - 1,66N_2 = 1100, \\ N_1 = -0,72N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cdot (-0,72)N_2 - 1,66N_2 = 1100, \\ N_1 = -0,72N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} -1,44N_2 - 1,66N_2 = 1100, \\ N_1 = -0,72N_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3,1N_2 = 1100, \\ N_1 = -0,72N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} N_2 = -354,8 \text{ кН}, \\ N_1 = 255,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

### Задача 2.9

Определить усилия в стержнях, поддерживающих абсолютно жесткую балку (рис 2.16). Материал стержней одинаков.

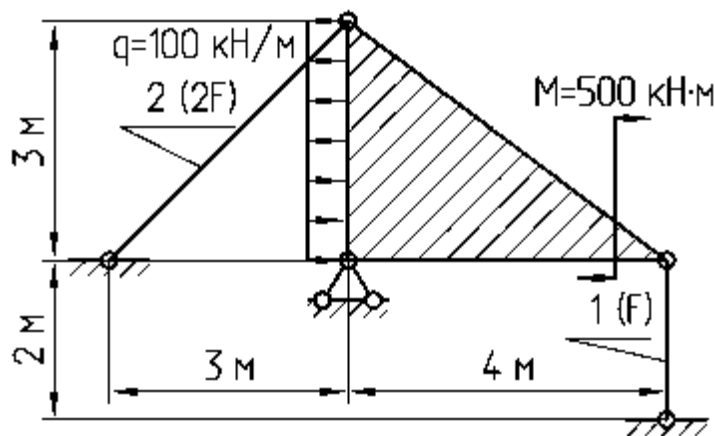


Рисунок 2.16

### Решение

1 Определяем степень статической неопределимости задачи (рис. 2.17).

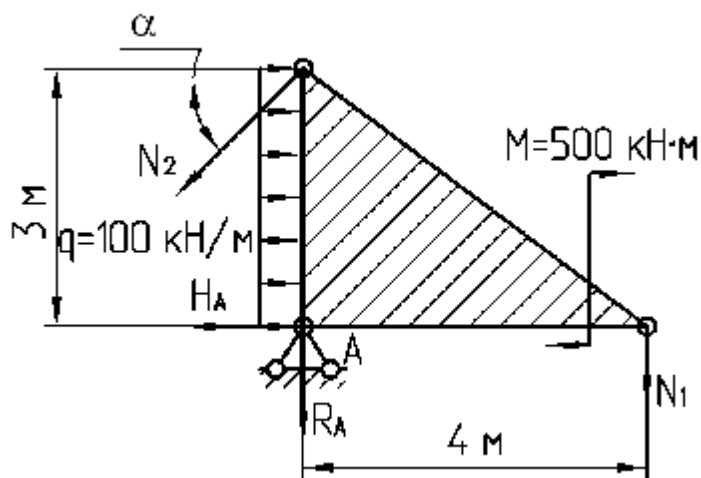


Рисунок 2.17

Задача является один раз статически неопределимой.

2 Длина второго стержня равна:

$$l_2 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4,2 \text{ м.}$$

Определим синус и косинус угла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{3}{4,2} = 0,707, \quad \cos \alpha = \frac{3}{4,2} = 0,707.$$

3 Рассмотрим статическую сторону задачи. Составим уравнение равновесия  $\sum M_A = 0$ :

$$-M - q \cdot 3 \cdot 1,5 - N_1 \cdot 4 + N_2 \cos \alpha \cdot 3 = 0,$$

$$-500 - 100 \cdot 3 \cdot 1,5 - N_1 \cdot 4 + N_2 \cdot 0,707 \cdot 3 = 0,$$

$$-500 - 450 - N_1 \cdot 4 + N_2 \cdot 2,12 = 0,$$

$$4N_1 - 2,12N_2 = -950. \quad (2.10)$$

4 Рассмотрим геометрическую сторону задачи. Для этого представим систему в деформированном состоянии (рис. 2.18).

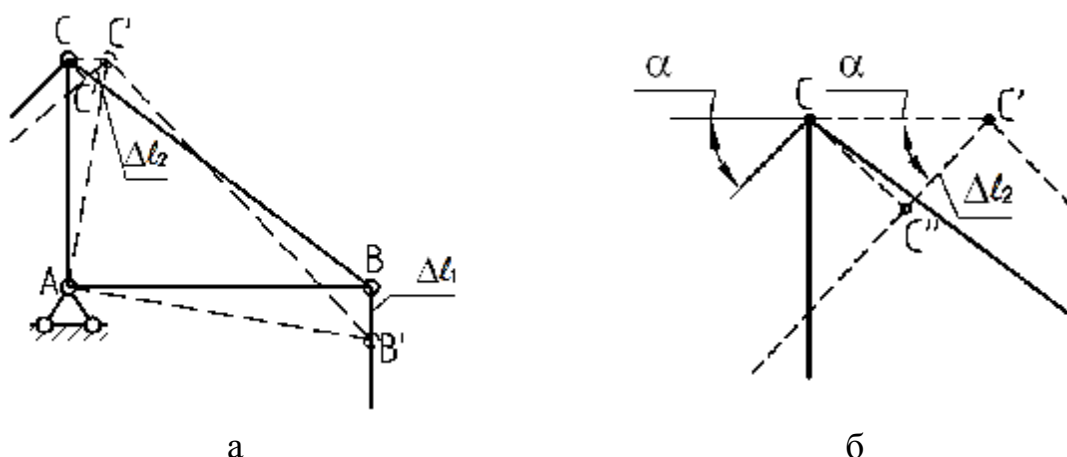


Рисунок 2.18

Перемещение точки В по вертикали будет равно сжатию первого стержня  $BB' = \Delta l_1$ , перемещение точки С по горизонтали  $CC'$  связано с удлинением второго стержня  $CC' = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha}$  (рис. 2.18, б). Это соотношение следует из треугольника  $CC'C''$ , в котором угол  $CC'C'' = \alpha$ .

Геометрическое соотношение между  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  можно установить, рассмотрев подобие треугольников  $ABB'$  и  $ACC'$  (рис. 2.18, а). Из их подобия следует:

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{AC},$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2 / \cos \alpha} = \frac{AB}{AC},$$

$$\Delta l_1 = \frac{AB}{AC \cos \alpha} \Delta l_2 = \frac{4}{3 \cdot 0,707} \Delta l_2,$$

$$\Delta l_1 = 1,89 \Delta l_2. \quad (2.11)$$

5 Физическая сторона задачи

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l_1}{EF_1} = -\frac{2N_1}{EF},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{4,2N_2}{2EF} = \frac{2,1N_2}{EF}.$$

6 Синтез

$$-\frac{2N_1}{EF} = 1,89 \cdot \frac{2,1N_2}{EF},$$

$$N_1 = -1,98N_2.$$

Таким образом, получено второе уравнение, определяющее зависимость между  $N_1$  и  $N_2$ . Записав оба уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4N_1 - 2,12N_2 = -950, \\ N_1 = -1,98N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 \cdot (-1,98)N_2 - 2,12N_2 = -950, \\ N_1 = -1,98N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} -7,92N_2 - 2,12N_2 = -950, \\ N_1 = -1,98N_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10,04N_2 = -950, \\ N_1 = -1,98N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} N_2 = 94,6 \text{ кН}, \\ N_1 = -187,4 \text{ кН}. \end{cases}$$

### Задача 2.10

Определить усилия в стержнях (рис 2.19). Материал стержней одинаков.

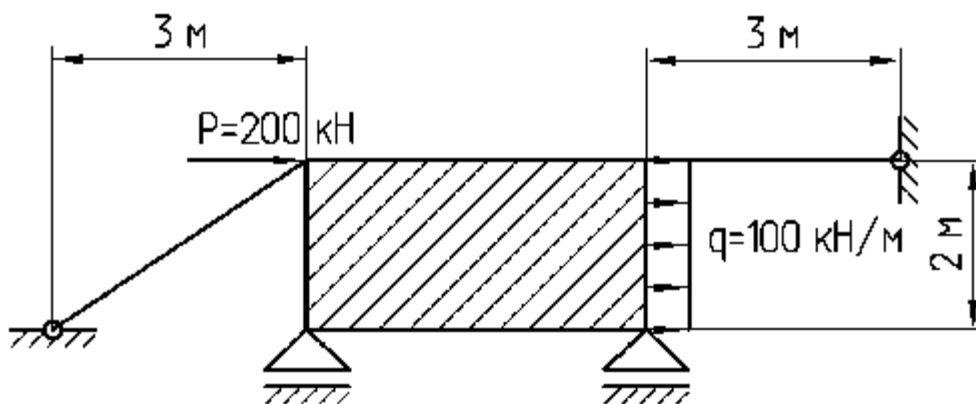


Рисунок 2.19

## Решение

1 Определяем степень статической неопределимости задачи (рис. 2.20).

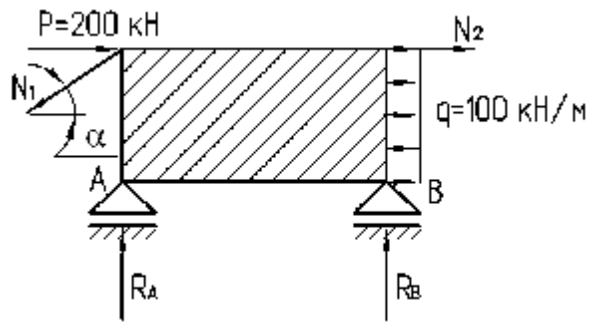


Рисунок 2.20

Задача является один раз статически неопределимой.

2 Длина первого стержня равна:

$$l_1 = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,61 \text{ м.}$$

Определим синус и косинус угла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{2}{3,61} = 0,555, \quad \cos \alpha = \frac{3}{3,61} = 0,832.$$

3 Рассмотрим статическую сторону задачи.

Составим уравнение равновесия  $\sum P_x = 0$ :

$$P + q \cdot 2 - N_1 \cos \alpha + N_2 = 0,$$

$$200 + 100 \cdot 2 - N_1 \cdot 0,832 + N_2 = 0,$$

$$-0,832N_1 + N_2 = -400. \tag{2.12}$$

4 Рассмотрим геометрическую сторону задачи. Для этого представим систему в деформированном состоянии (рис. 2.21).

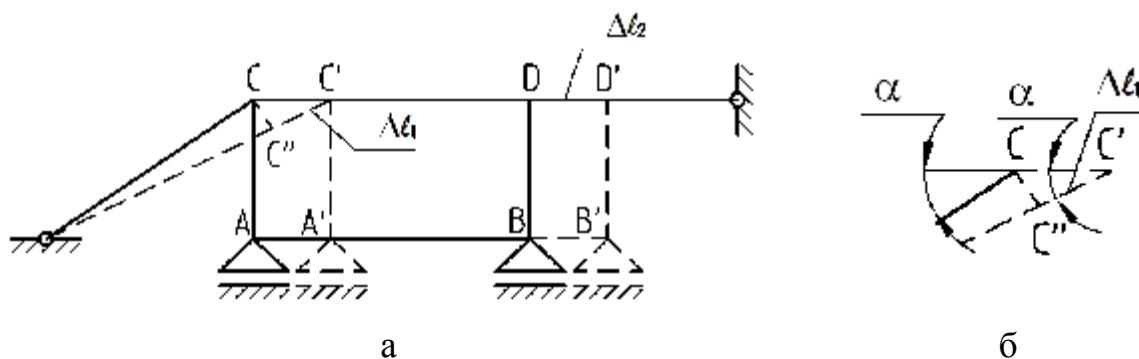


Рисунок 2.21

Перемещение точки D по горизонтали будет равно сжатию второго стержня  $DD' = \Delta l_2$ , перемещение точки C по горизонтали  $CC'$  связано с удлинением первого стержня  $CC' = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha}$  (рис. 2.21, б). Это соотношение следует из треугольника  $CC'C''$ , в котором угол  $CC'C'' = \alpha$ .

Так как  $CC' = DD'$  (рис. 2.21, а), то:

$$CC' = DD',$$

$$\frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} = \Delta l_2,$$

$$\frac{\Delta l_1}{0,832} = \Delta l_2,$$

$$\Delta l_1 = 0,832 \Delta l_2. \quad (2.13)$$

### 5 Физическая сторона задачи

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{3,61 N_1}{EF},$$

$$\Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{3 N_2}{2EF} = -\frac{1,5 N_2}{EF}.$$

### 6 Синтез

$$\frac{3,61 N_1}{EF} = -0,832 \cdot \frac{1,5 N_2}{EF},$$

$$N_1 = -0,346 N_2.$$

Таким образом, получено второе уравнение, определяющее зависимость между  $N_1$  и  $N_2$ . Записав оба уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -0,832 N_1 + N_2 = -400, \\ N_1 = -0,346 N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} -0,832 \cdot (-0,346) N_2 + N_2 = -400, \\ N_1 = -0,346 N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 0,288 N_2 + N_2 = -400, \\ N_1 = -0,346 N_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,287 N_2 = -400, \\ N_1 = -0,346 N_2; \end{cases} \quad \begin{cases} N_2 = -310,6 \text{ кН}, \\ N_1 = 107,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

### 3 ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ДЛЯ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ

#### 3.1 Основные сведения из теории

Продольная сила  $N$  в сечении равна алгебраической сумме проекций на продольную ось стержня всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части рамы. Продольная сила, возникающая при растяжении стержня, считается положительной, при сжатии – отрицательной.

Поперечная сила  $Q$  равна сумме проекций на ось, перпендикулярную оси балки, всех внешних сил, приложенных с одной стороны от рассматриваемого сечения.

Изгибающий момент  $M$  равен сумме моментов всех внешних сил с одной стороны от рассматриваемого сечения относительно центра тяжести этого сечения.

Установим следующие правила знаков для поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  в балках при изгибе.

Поперечная сила  $Q$  в сечении считается положительной, если внешняя сила стремится повернуть отсеченную часть балки по ходу часовой стрелки (рис. 3.1).

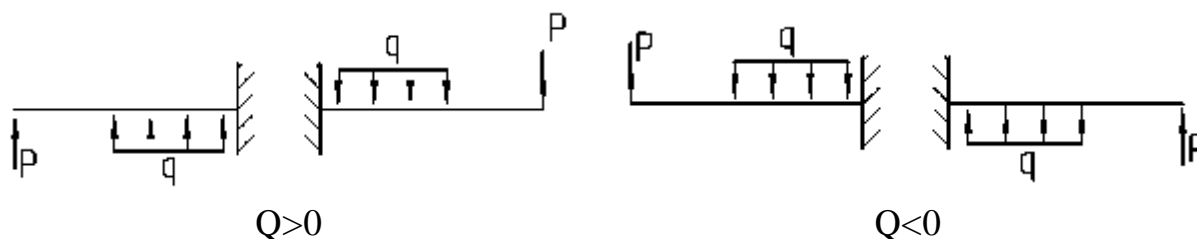


Рисунок 3.1

Изгибающий момент  $M$  в сечении считается положительным, если он вызывает сжатие верхних волокон балки (рис. 3.2).

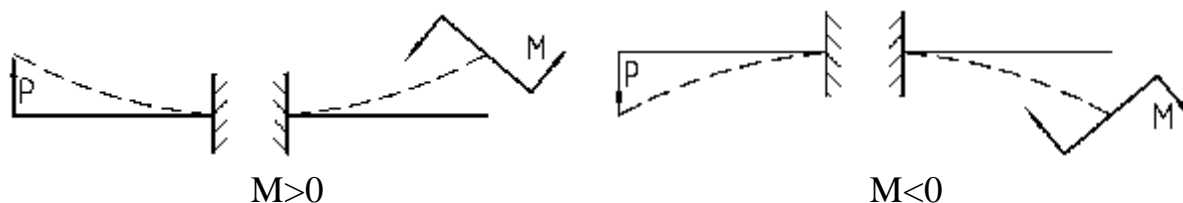


Рисунок 3.2

Учитывая правила знаков для изгибающих моментов  $M$ , следует подчеркнуть, что эпюру изгибающих моментов строят на сжатых волокнах.

## 3.2 Построение эпюр внутренних усилий для балок

### Задача 3.1

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, изображенной на рис 3.3.

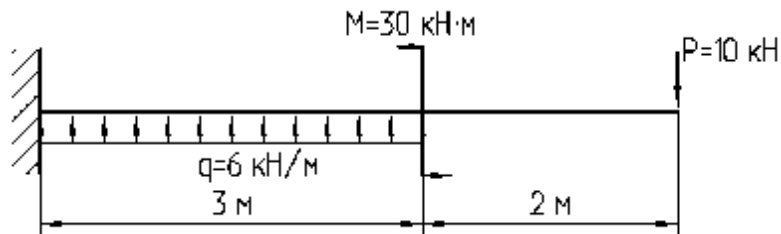


Рисунок 3.3

### Решение

1 Расставляем характерные сечения (рис. 3.4). Построение начинаем с правого (свободного) конца, при этом нет необходимости в определении опорных реакций.

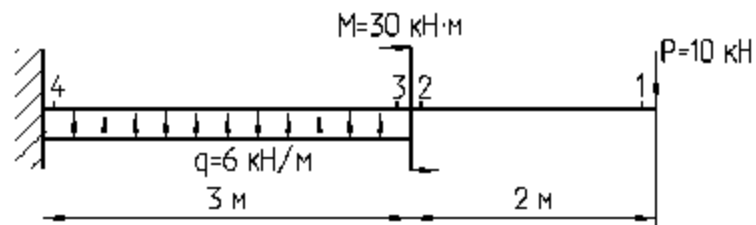


Рисунок 3.4

2 Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях (рис. 3.5, а-в):

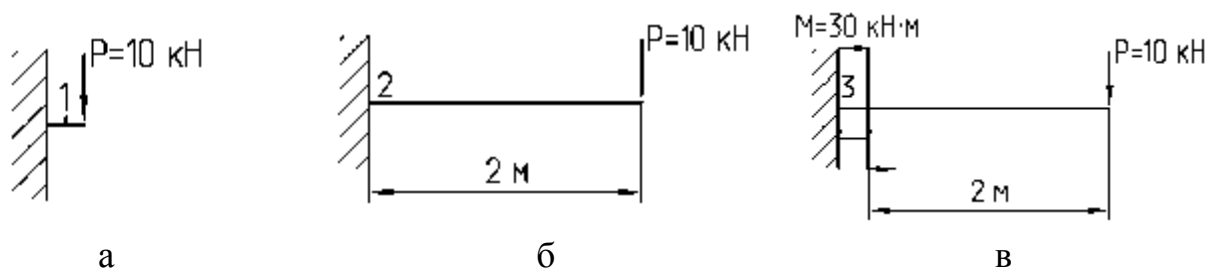


Рисунок 3.5

$$Q_1 = P = 10 \text{ кН} ,$$

$$Q_2 = P = 10 \text{ кН} ,$$

$$Q_3 = P = 10 \text{ кН} ,$$

$$Q_4 = P - q \cdot 3 = 10 - 6 \cdot 3 = -8 \text{ кН} .$$

3 Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

$$M_2 = -P \cdot 2 = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

$$M_3 = -P \cdot 2 + M = -10 \cdot 2 + 30 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

$$M_4 = -P \cdot 5 + M + q \cdot 3 \cdot 1,5 = -10 \cdot 5 + 30 + 6 \cdot 3 \cdot 1,5 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

4 Производим построение эпюр по характерным сечениям (рис. 3.6).

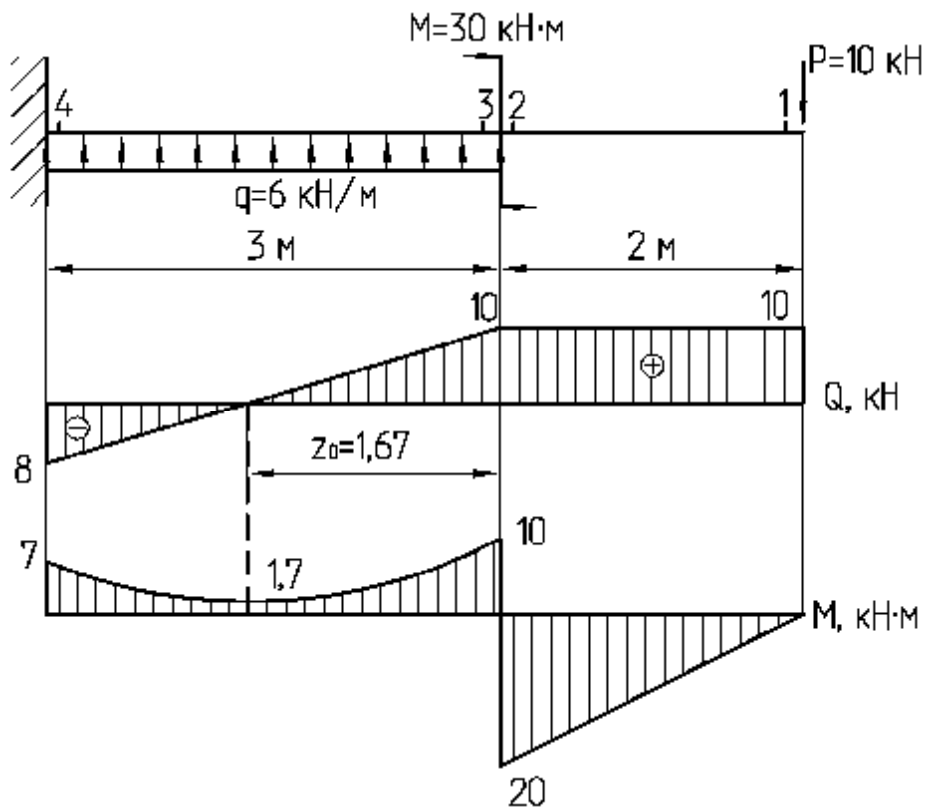
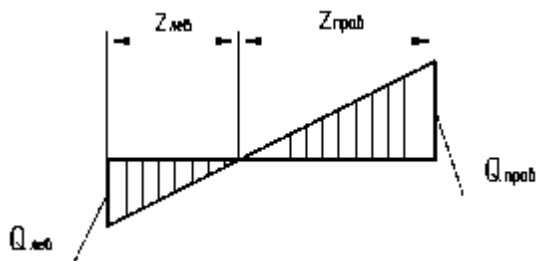


Рисунок 3.6

5 Так как эпюра поперечных сил пересекает базовую линию и меняет знак с «-» на «+», то в этой точке находится минимальное значение изгибающего момента. Находим положение этого сечения (рис. 3.7).



$$z_{\text{лев}} = \frac{Q_{\text{лев}}}{q}$$

$$z_{\text{прав}} = \frac{Q_{\text{прав}}}{q}$$

Рисунок 3.7

$$z_{\text{прав}} = z_0 = \frac{10}{6} = 1,67 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = -P \cdot (2 + z_0) + M + q \cdot z_0 \cdot \frac{z_0}{2} = -10 \cdot (2 + 1,67) + 30 + 6 \cdot 1,67 \cdot \frac{1,67}{2} = 1,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

### Задача 3.2

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, изображенной на рис 3.8.

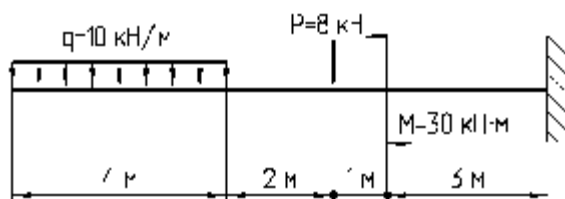


Рисунок 3.8

### Решение

1 Расставляем характерные сечения (рис. 3.9). Построение начинаем с левого (свободного) конца.

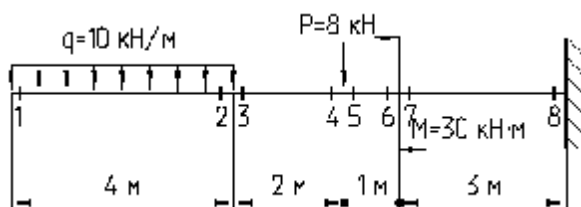


Рисунок 3.9

2 Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_1 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_2 = -q \cdot 4 = -10 \cdot 4 = -40 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_2 = -q \cdot 4 = -10 \cdot 4 = -40 \text{ кН},$$

$$Q_5 = -q \cdot 4 - P = -10 \cdot 4 - 8 = -48 \text{ кН},$$

$$Q_6 = Q_7 = Q_8 = Q_5 = -48 \text{ кН}.$$

3 Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях.

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -80 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = M_2 = -80 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = -q \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{4}{2}\right) = -10 \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{4}{2}\right) = -160 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = M_4 = -160 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = -q \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - P \cdot 1 = -10 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - 8 \cdot 1 = -208 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = -q \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - P \cdot 1 - M = -10 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - 8 \cdot 1 - 15 = -223 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = -q \cdot 4 \cdot \left(6 + \frac{4}{2}\right) - P \cdot 4 - M = -10 \cdot 4 \cdot \left(6 + \frac{4}{2}\right) - 8 \cdot 4 - 15 = -367 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4 Производим построение эпюр по характерным сечениям (рис. 3.10).

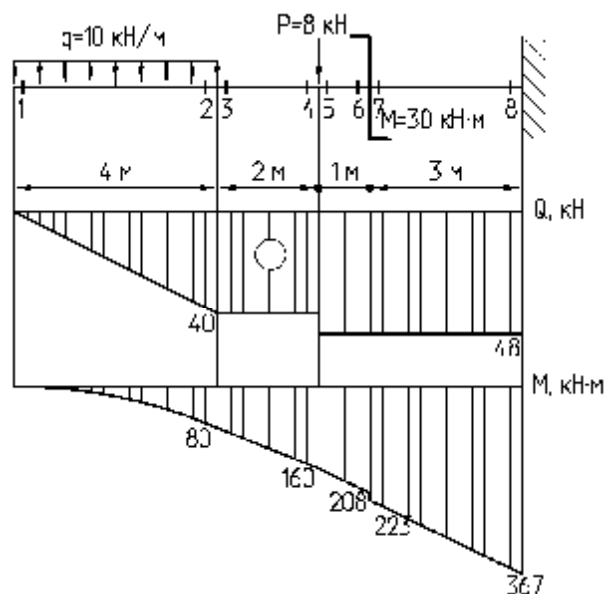


Рисунок 3.10

### Задача 3.3

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для двухопорной балки, изображенной на рис 3.11.

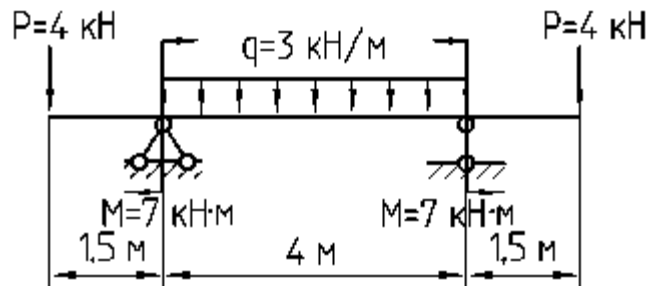


Рисунок 3.11

#### Решение

1 Определяем опорные реакции, приравняв нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В (рис. 3.12).

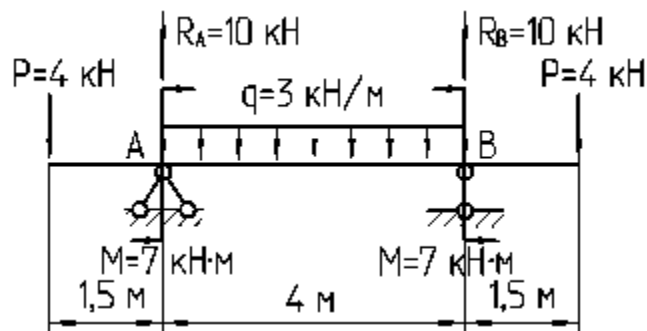


Рисунок 3.12

$$\sum M_A = 0,$$

$$-q \cdot 4 \cdot 2 - P \cdot 5,5 + P \cdot 1,5 - M + M + 4R_B = 0,$$

$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 4 + M - M}{4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 7 - 7}{4} = 10 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 5,5 - P \cdot 1,5 - M + M - 4R_A = 0,$$

$$R_A = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 4 - M + M}{4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 7 + 7}{4} = 10 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$R_A - q \cdot 4 - 2P + R_B = 0,$$

$$10 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 10 = 0,$$

$$20 - 20 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_1 = -P = -4 \text{ кН},$$

$$Q_2 = -P = -4 \text{ кН},$$

$$Q_3 = -P + R_A = -4 + 10 = 6 \text{ кН},$$

$$Q_6 = P = 4 \text{ кН},$$

$$Q_5 = P = 4 \text{ кН},$$

$$Q_4 = P - R_B = 4 - 10 = -6 \text{ кН}.$$

3 Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -P \cdot 1,5 = -4 \cdot 1,5 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = -P \cdot 1,5 + M = -4 \cdot 1,5 + 7 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = -P \cdot 1,5 = -4 \cdot 1,5 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = -P \cdot 1,5 + M = -4 \cdot 1,5 + 7 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4 Производим построение эпюр по характерным сечениям (рис. 3.13).

5 Так как эпюра поперечных сил пересекает базовую линию и меняет знак с «+» на «-», то в этой точке находится максимальное значение изгибающего момента. Находим положение этого сечения.

$$z_0 = \frac{6}{3} = 2 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = M - P(1,5 + z_0) + R_A z_0 - qz_0 \frac{z_0}{2} = 7 - 4 \cdot (1,5 + 2) + 10 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

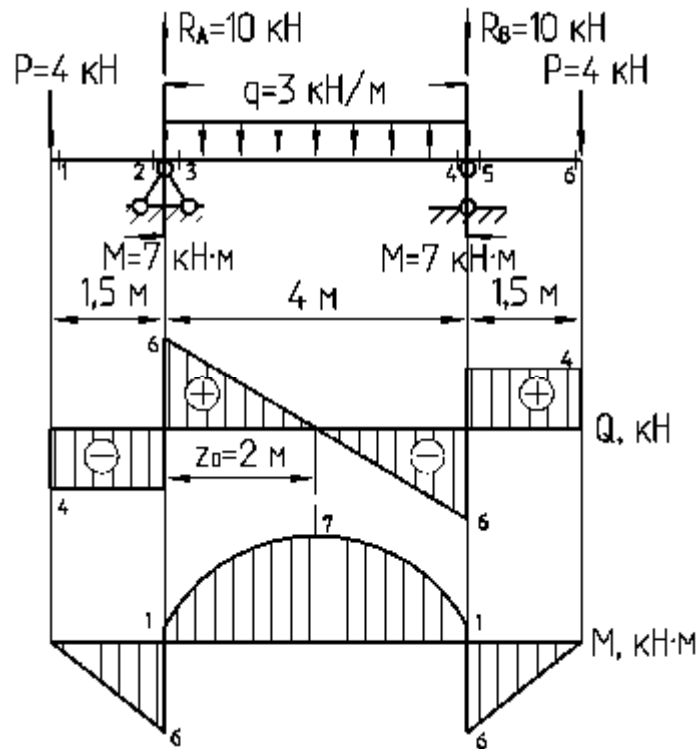


Рисунок 3.13

### Задача 3.4

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для двухопорной балки, изображенной на рис 3.14.

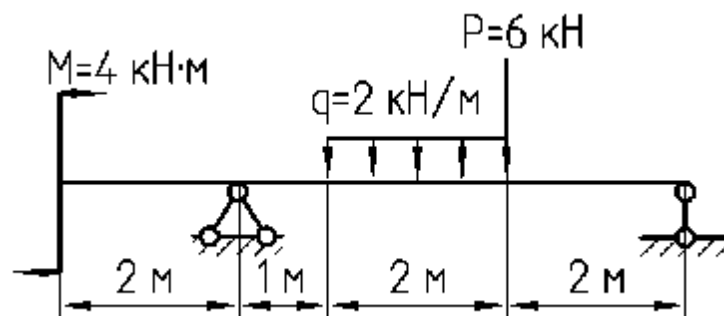


Рисунок 3.14

### Решение

1 Определяем опорные реакции, приравняв нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В (рис. 3.15).

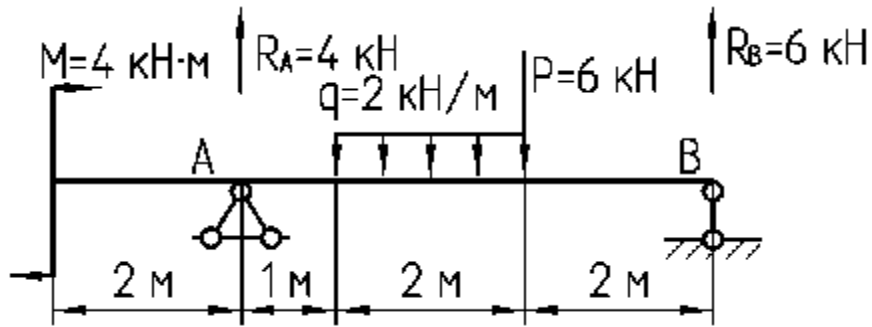


Рисунок 3.15

$$\sum M_A = 0,$$

$$-P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 - M + 5R_B = 0,$$

$$R_B = \frac{P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 2 + M}{5} = \frac{6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4}{5} = 6 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - M - 5R_A = 0,$$

$$R_A = \frac{P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - M}{5} = \frac{6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 4}{5} = 4 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$R_A - q \cdot 2 - P + R_B = 0,$$

$$4 - 2 \cdot 2 - 6 + 6 = 0,$$

$$10 - 10 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_1 = Q_2 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_5 = R_A = 4 \text{ кН},$$

$$Q_8 = Q_7 = -R_B = -6 \text{ кН},$$

$$Q_6 = -R_B + P = -6 + 6 = 0 \text{ кН}.$$

3 Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_1 = M_2 = M_3 = M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = M + R_A \cdot 1 = 4 + 4 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = M_6 = R_B \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4 Производим построение эпюр по характерным сечениям (рис. 3.16).

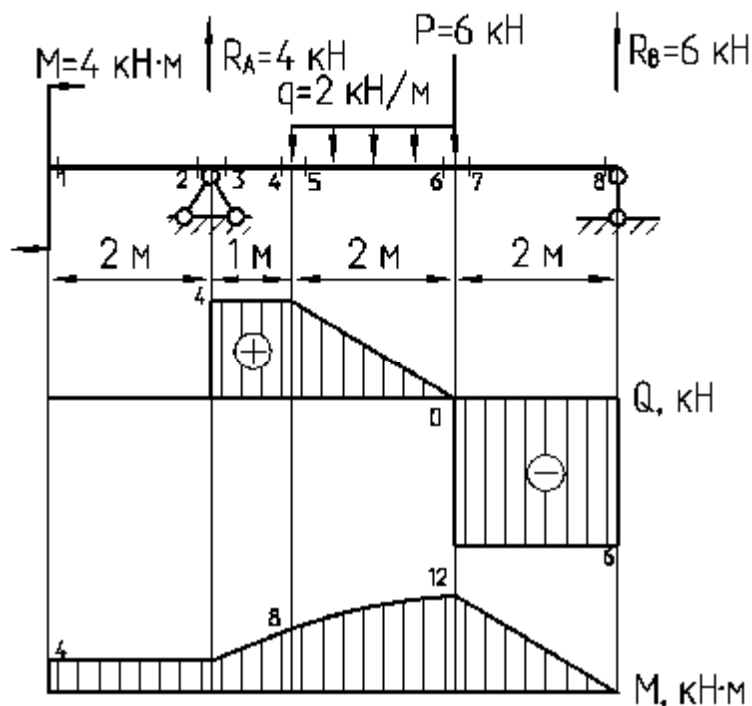


Рисунок 3.16

### 3.3 Построение эпюр внутренних усилий для рам

#### Задача 3.5

Построить эпюры продольных и поперечных сил, а также изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис 3.17.

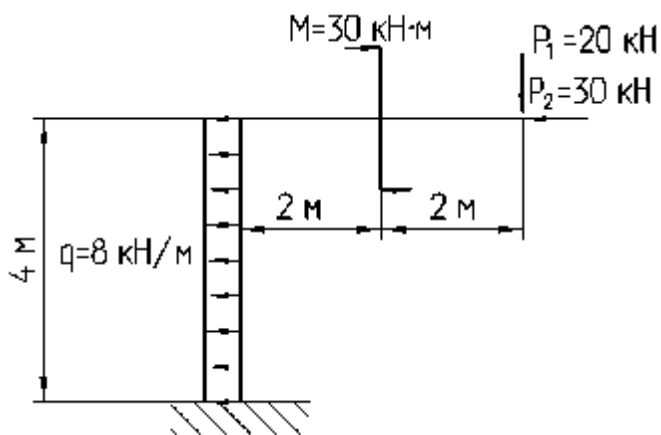


Рисунок 3.17

## Решение

1 Расставляем характерные сечения (рис. 3.18). Построение начинаем со свободного конца.

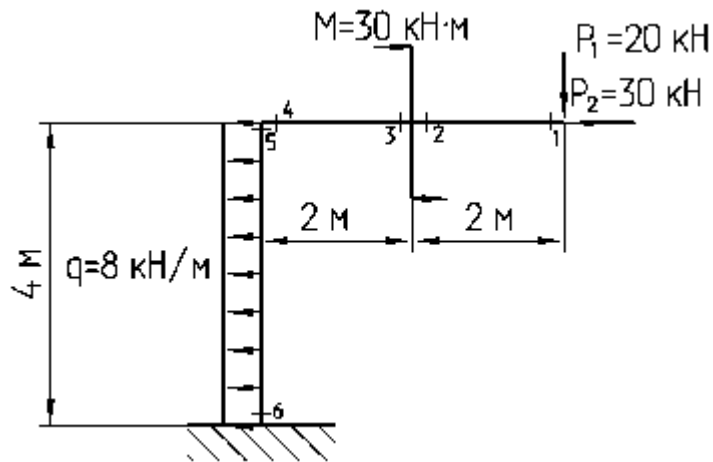


Рисунок 3.18

2 Вычисляем значения продольных сил в характерных сечениях:

$$N_1 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_2 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_3 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_4 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_5 = -P_1 = -20 \text{ кН},$$

$$N_6 = -P_1 = -20 \text{ кН}.$$

3 Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_1 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_2 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_3 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_4 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_5 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$Q_6 = -P_2 - q \cdot 4 = -30 - 8 \cdot 4 = -62 \text{ кН}.$$

4 Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -P_1 \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = -P_1 \cdot 2 + M = -20 \cdot 2 + 30 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = -P_1 \cdot 4 + M = -20 \cdot 4 + 30 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = -P_1 \cdot 4 + M + P_2 \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = -20 \cdot 4 + 30 + 30 \cdot 4 + 8 \cdot 4 \cdot 2 = 134 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Производим построение эпюр продольных сил  $N$  (рис.3.19, а), поперечных сил  $Q$  (рис.3.19, б), а также изгибающих моментов  $M$  (рис.3.19, в) по характерным сечениям.

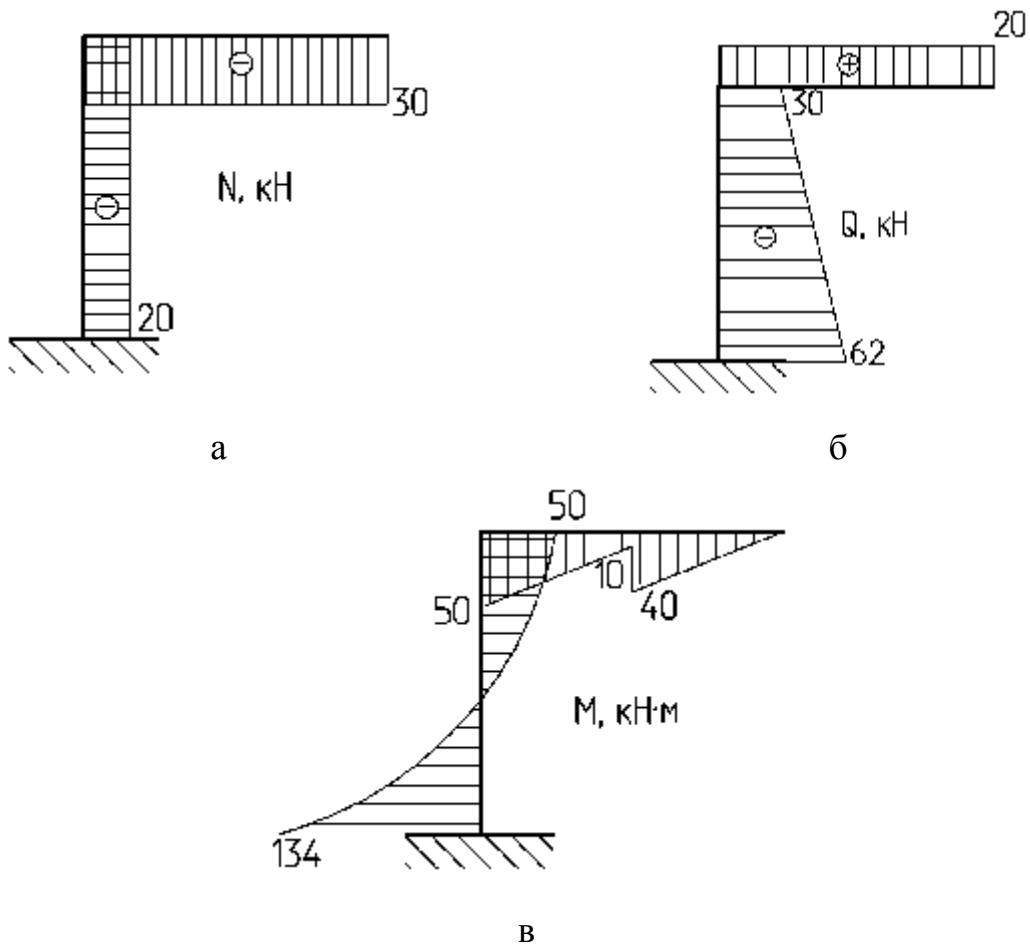


Рисунок 3.19

### Задача 3.6

Построить эпюры продольных и поперечных сил, а также изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис 3.20.

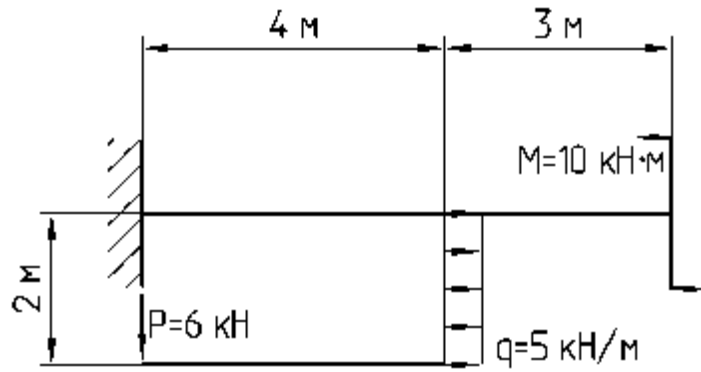


Рисунок 3.20

**Решение**

1 Расставляем характерные сечения (рис. 3.21). Построение начинаем со свободного конца.

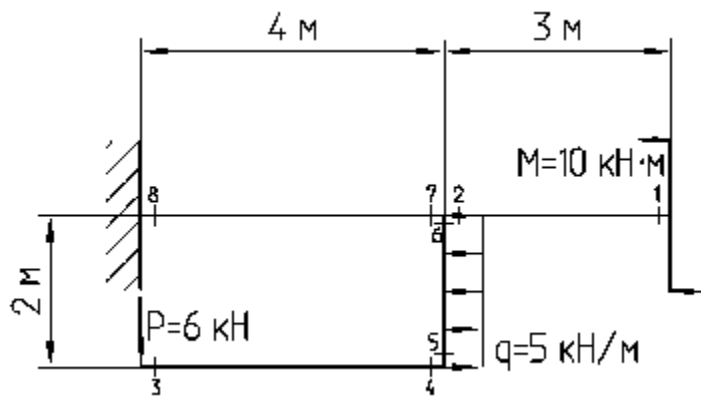


Рисунок 3.21

2 Вычисляем значения продольных сил в характерных сечениях:

$$N_1 = N_2 = 0 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = 0 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = P = 6 \text{ кН},$$

$$N_7 = N_8 = q \cdot 2 = 10 \text{ кН}.$$

3 Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_1 = Q_2 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = -P = -6 \text{ кН},$$

$$Q_5 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_6 = -q \cdot 2 = -10 \text{ кН},$$

$$Q_7 = Q_8 = P = 6 \text{ кН}.$$

4 Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_1 = M_2 = M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = P \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 1 = 34 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 + M = 6 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + 10 = 44 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = q \cdot 2 \cdot 1 + M = 5 \cdot 2 \cdot 1 + 10 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Производим построение эпюр продольных сил  $N$  (рис.3.22, а), поперечных сил  $Q$  (рис.3.22, б), а также изгибающих моментов  $M$  (рис.3.22, в) по характерным сечениям.

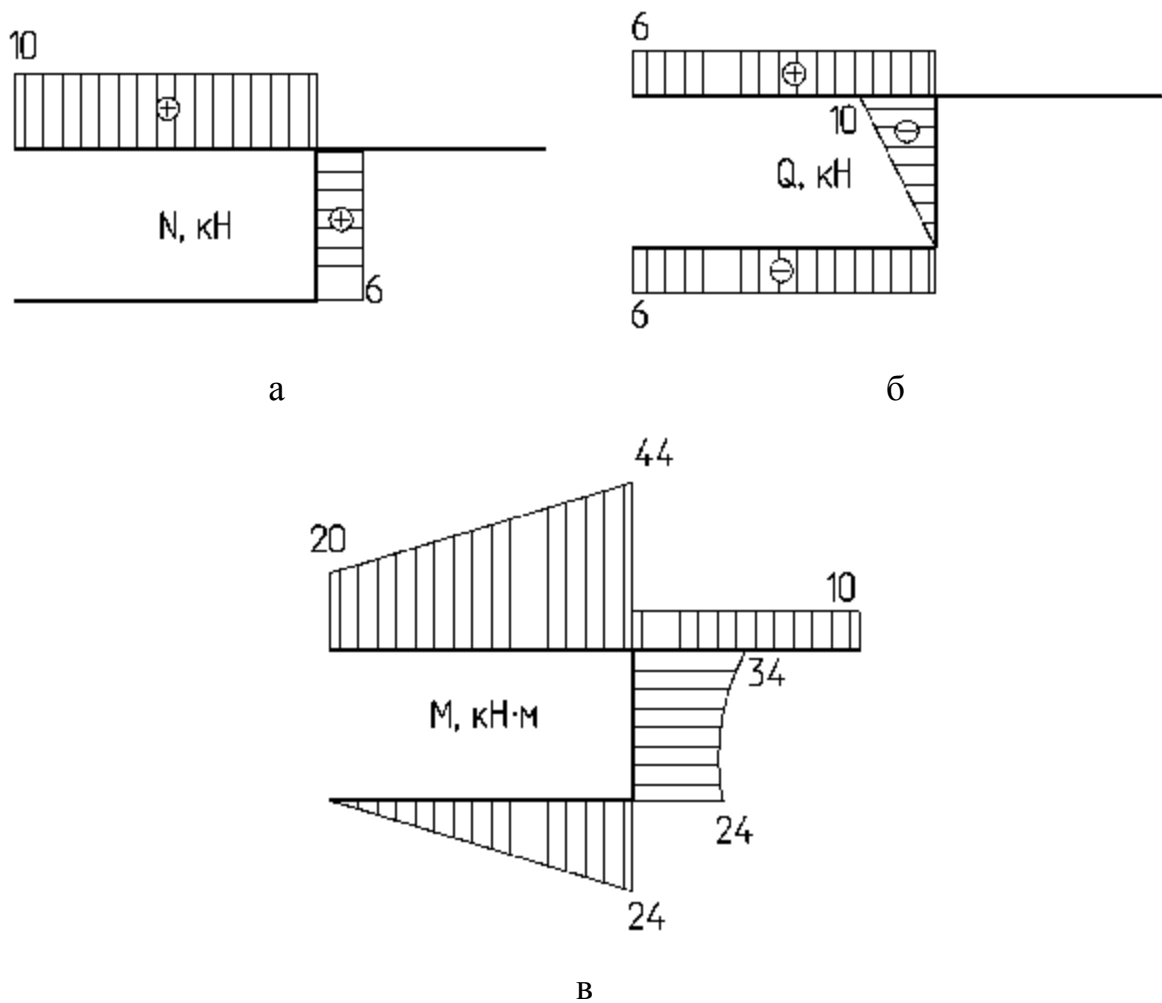


Рисунок 3.22

### Задача 3.7

Построить эпюры продольных и поперечных сил, а также изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис 3.23.

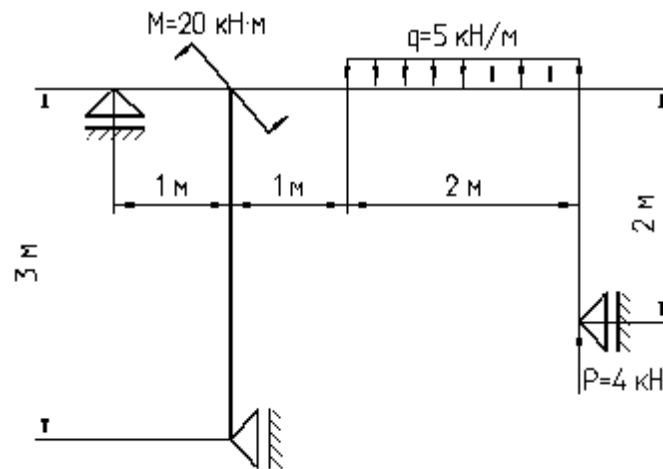


Рисунок 3.23

### Решение

1 Определяем опорные реакции (рис. 3.24). Расставляем характерные сечения.

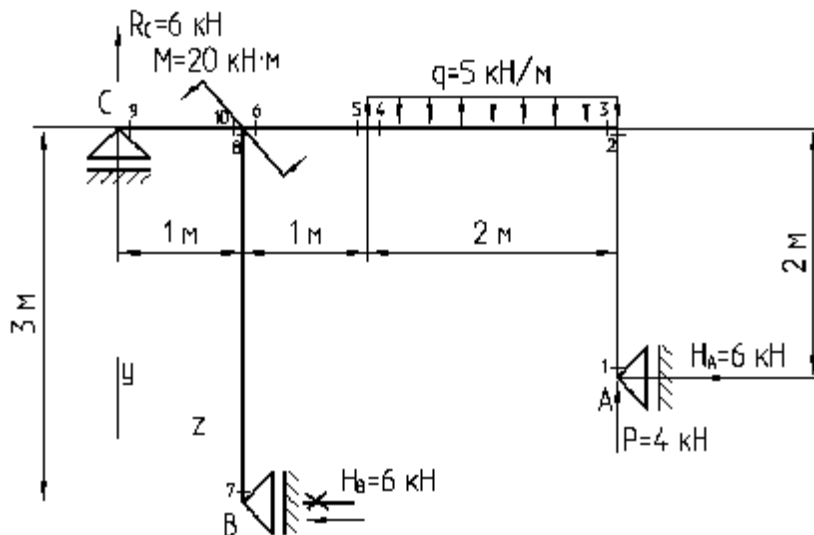


Рисунок 3.24

$$\sum P_y = 0,$$

$$-q \cdot 2 + P + R_C = 0,$$

$$R_C = q \cdot 2 - P = 5 \cdot 2 - 4 = 6 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$M + P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 - R_C \cdot 1 - H_A \cdot 1 = 0,$$

$$H_A = \frac{M + P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 - R_C \cdot 1}{1} = \frac{20 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 6 \cdot 1}{1} = 6 \text{ кН}.$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$H_A + H_B = 0,$$

$$H_B = -H_A = -6 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение  $\sum M_C = 0$ .

$$M + P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 + H_A \cdot 2 - H_B \cdot 3 = 0,$$

$$20 + 4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = 0,$$

$$48 - 48 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Вычисляем значения продольных сил в характерных сечениях:

$$N_1 = N_2 = -P = -4 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = H_A = 6 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = H_A = 6 \text{ кН},$$

$$N_7 = N_8 = 0 \text{ кН},$$

$$N_9 = N_{10} = 0 \text{ кН}.$$

3 Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_1 = Q_2 = -H_A = -6 \text{ кН},$$

$$Q_3 = -P = -4 \text{ кН},$$

$$Q_4 = Q_5 = Q_6 = -P + q \cdot 2 = -4 + 5 \cdot 2 = 6 \text{ кН},$$

$$Q_7 = Q_8 = H_B = 6 \text{ кН},$$

$$Q_9 = Q_{10} = R_C = 6 \text{ кН}.$$

4 Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = H_A \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = H_A \cdot 2 + P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = H_A \cdot 2 + P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = H_B \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_9 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{10} = R_C \cdot 1 = 6 \cdot 1 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Производим построение эпюр продольных сил  $N$  (рис.3.25, а), поперечных сил  $Q$  (рис.3.25, б), а также изгибающих моментов  $M$  (рис.3.25, в) по характерным сечениям.

6 Так как эпюра поперечных сил пересекает базовую линию и меняет знак с «+» на «-», то в этой точке находится максимальное значение изгибающего момента. Находим положение этого сечения.

$$z_0 = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ м},$$

$$M_5 = H_a \cdot 2 + Pz_0 - qz_0 \frac{z_0}{2} = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 0,8 - 5 \cdot 0,8 \cdot \frac{0,8}{2} = 13,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

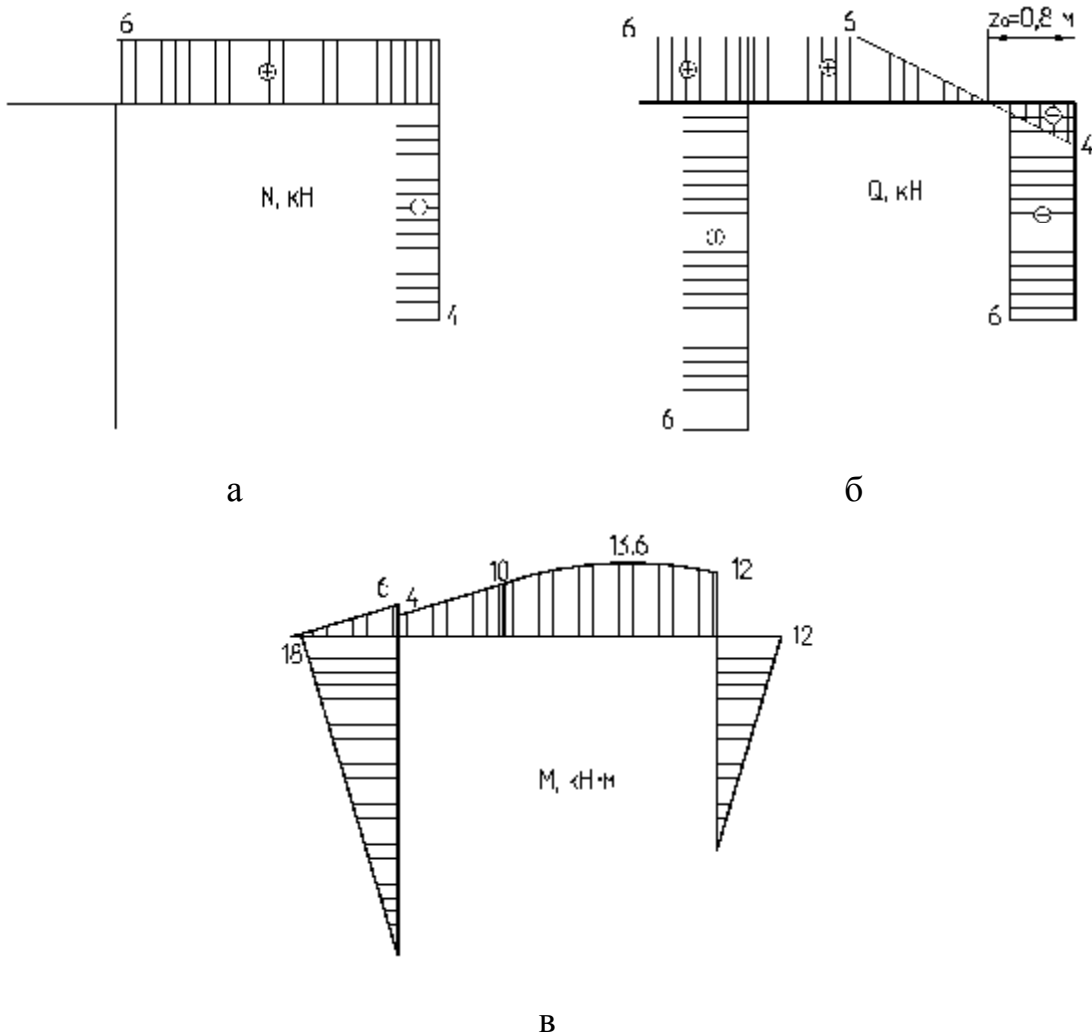


Рисунок 3.25

### Задача 3.8

Построить эпюры продольных и поперечных сил, а также изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис 3.26.

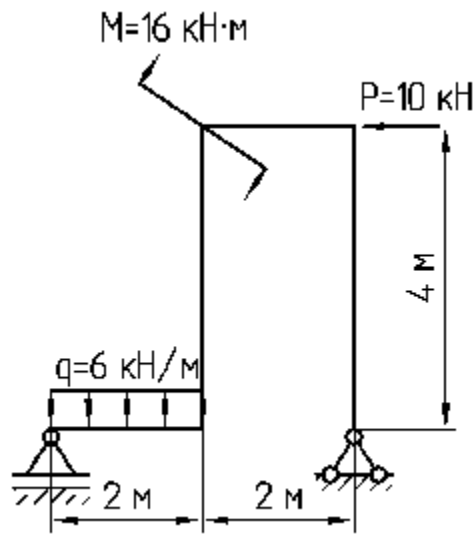


Рисунок 3.26

### Решение

1 Определяем опорные реакции (рис. 3.27). Расставляем характерные сечения.

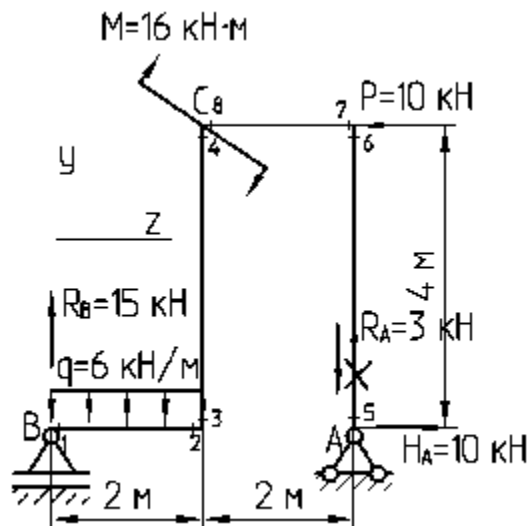


Рисунок 3.27

$$\sum P_z = 0,$$

$$-P + H_A = 0,$$

$$H_A = P = 10 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M + P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 3 - R_B \cdot 4 = 0,$$

$$R_B = \frac{-M + P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 3}{4} = \frac{-16 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 15 \text{ кН}.$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$-q \cdot 2 + R_A + R_B = 0,$$

$$R_A = q \cdot 2 - R_B = 6 \cdot 2 - 15 = -3 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение  $\sum M_C = 0$ .

$$-M + q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 2 + H_A \cdot 4 - R_B \cdot 2 = 0,$$

$$-16 + 6 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 10 \cdot 4 - 15 \cdot 2 = 0,$$

$$52 - 52 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Вычисляем значения продольных сил в характерных сечениях:

$$N_1 = N_2 = 0 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = q \cdot 2 - R_B = 6 \cdot 2 - 15 = -3 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = R_A = 3 \text{ кН},$$

$$N_7 = N_8 = H_A - P = 10 - 10 = 0 \text{ кН}.$$

3 Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_1 = R_B = 15 \text{ кН},$$

$$Q_2 = R_B - q \cdot 2 = 15 - 6 \cdot 2 = 3 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_5 = Q_6 = -H_A = -10 \text{ кН},$$

$$Q_7 = Q_8 = R_A = 3 \text{ кН}.$$

4 Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = M_4 = R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 15 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 1 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = M_7 = H_A \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = H_A \cdot 4 - R_A \cdot 2 = 10 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 34 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Производим построение эпюр продольных сил  $N$  (рис.3.28, а), поперечных сил  $Q$  (рис.3.28, б), а также изгибающих моментов  $M$  (рис.3.28, в) по характерным сечениям.

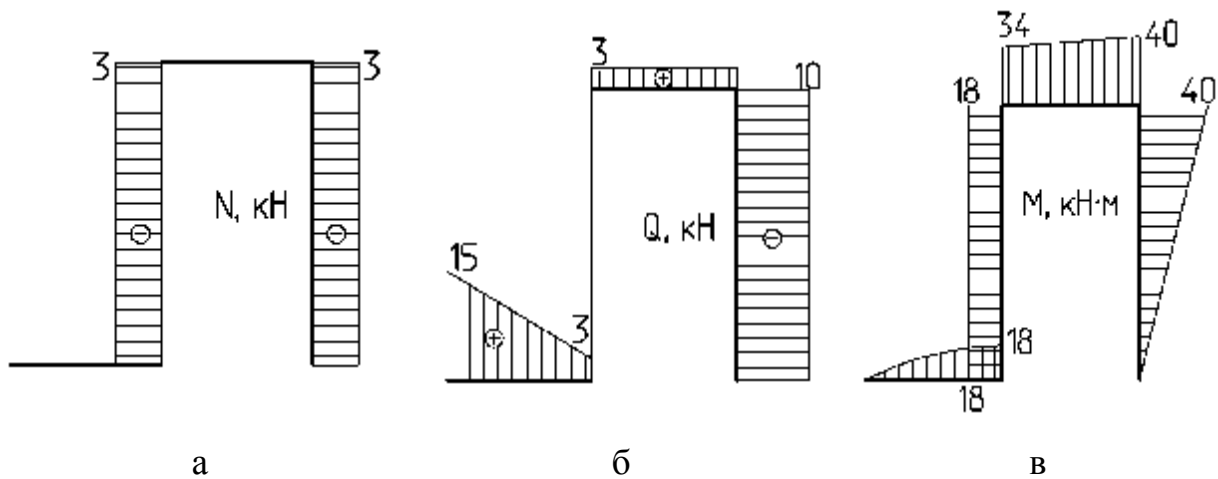


Рисунок 3.28

### Задача 3.9

Построить эпюры продольных и поперечных сил, а также изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис 3.29.

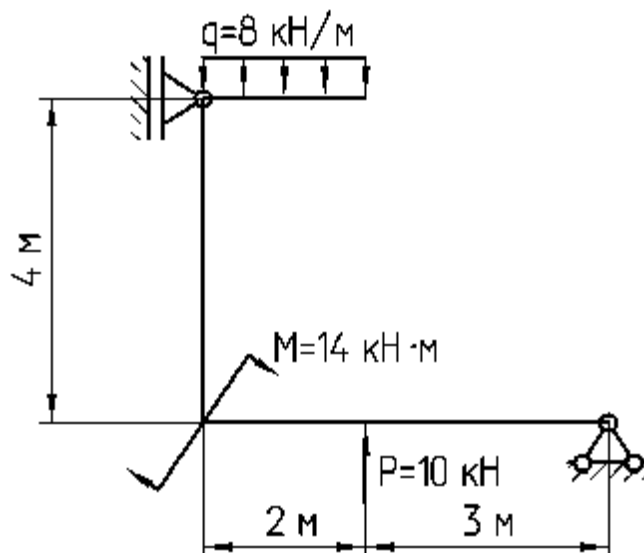


Рисунок 3.29

## Решение

1 Определяем опорные реакции (рис. 3.30). Расставляем характерные сечения.

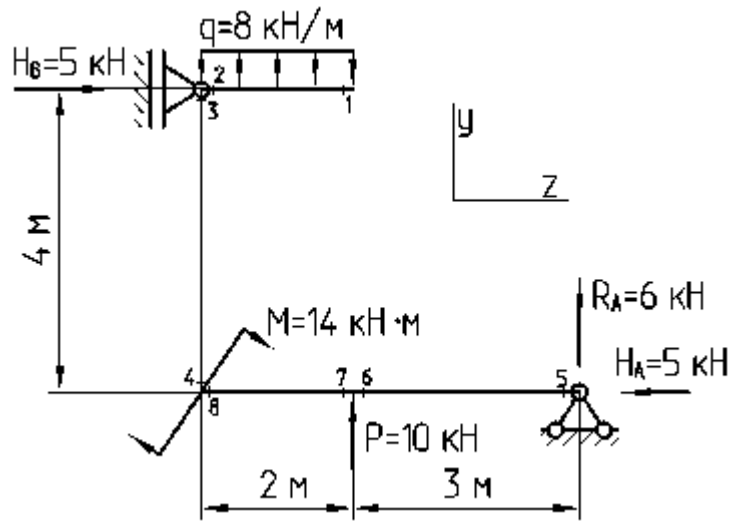


Рисунок 3.30

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 4 - H_B \cdot 4 = 0,$$

$$H_B = \frac{-M - P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 4}{4} = \frac{-14 - 10 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot 4}{4} = 5 \text{ кН}.$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$-q \cdot 2 + P + R_A = 0,$$

$$R_A = q \cdot 2 - P = 8 \cdot 2 - 10 = 6 \text{ кН}.$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$-H_A + H_B = 0,$$

$$H_A = H_B = 5 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение  $\sum M_B = 0$ .

$$-M + P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 + R_A \cdot 5 - H_A \cdot 4 = 0,$$

$$-14 + 10 \cdot 2 - 8 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 5 - 5 \cdot 4 = 0,$$

$$50 - 50 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Вычисляем значения продольных сил в характерных сечениях:

$$N_1 = N_2 = 0 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = -q \cdot 2 = -8 \cdot 2 = -16 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = -H_A = -5 \text{ кН}.$$

3 Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_1 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_2 = q \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = H_B = 5 \text{ кН},$$

$$Q_5 = Q_6 = -R_A = -6 \text{ кН},$$

$$Q_7 = Q_8 = -R_A - P = -6 - 10 = -16 \text{ кН}.$$

4 Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -8 \cdot 2 \cdot 1 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = -q \cdot 2 \cdot 1 - H_B \cdot 4 = -8 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = M_7 = R_A \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = R_A \cdot 5 + P \cdot 2 = 6 \cdot 5 + 10 \cdot 2 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. Производим построение эпюр продольных сил  $N$  (рис.3.31, а), поперечных сил  $Q$  (рис.3.31, б), а также изгибающих моментов  $M$  (рис.3.31, в) по характерным сечениям.

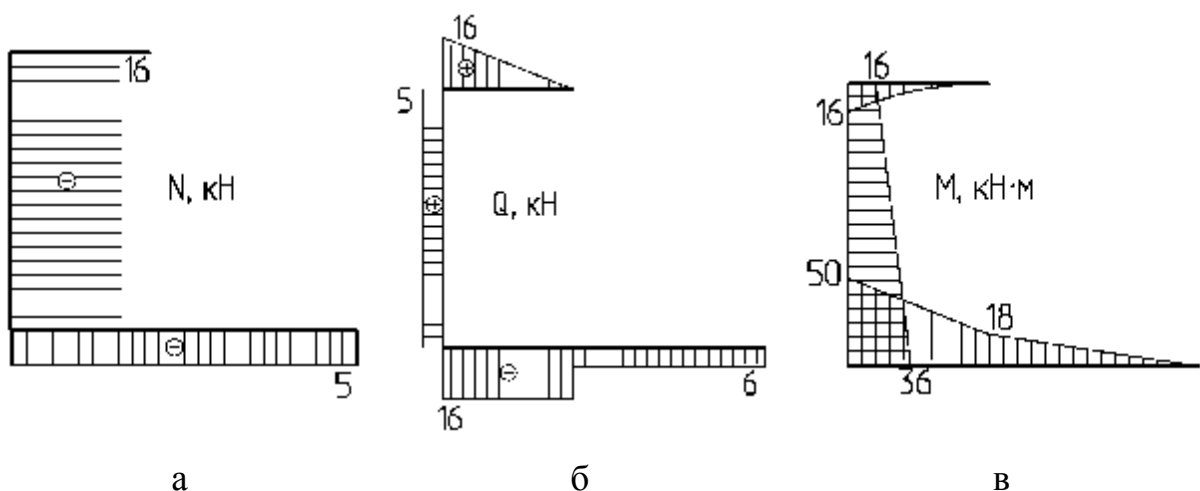


Рисунок 3.31

# 4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

## 4.1 Основные сведения из теории

При решении задач возникает необходимость оперировать некоторыми геометрическими характеристиками поперечных сечений.

К геометрическим характеристикам относятся площади поперечных сечений, моменты инерции, моменты сопротивления, радиусы инерции.

Статический момент сечения – сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояния до данной оси, взятая по всей площади сечения:

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF. \quad (4.1)$$

При параллельном переносе осей статический момент меняется на величину, равную произведению площади на расстояние между осями (рис. 4.1):

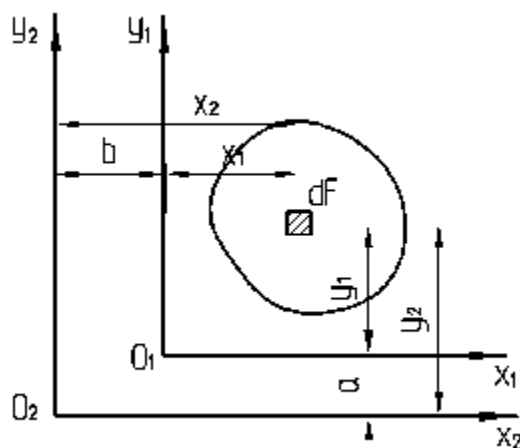


Рисунок 4.1

$$S_{x_2} = S_{x_1} + aF; \quad S_{y_2} = S_{y_1} + bF. \quad (4.2)$$

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется центральной. Точка пересечения центральных осей называется центром тяжести сечения.

Координаты центра тяжести сложного сечения определяются следующим образом:

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (4.3)$$

где  $x_c, y_c$  – координаты центра тяжести сложного сечения, которые ищем, относительно начальной системы осей;

$x_i, y_i$  – координаты центра тяжести  $i$ -й фигуры, которые ищем, относительно начальной системы осей;

$F_i$  – площадь  $i$ -й фигуры.

Осевым (или экваториальным) моментом инерции площади сечения называется интеграл по площади произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до данной оси.

Так, осевые моменты инерции произвольного сечения (рис.4.2) соответственно равны:

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF. \quad (4.4)$$

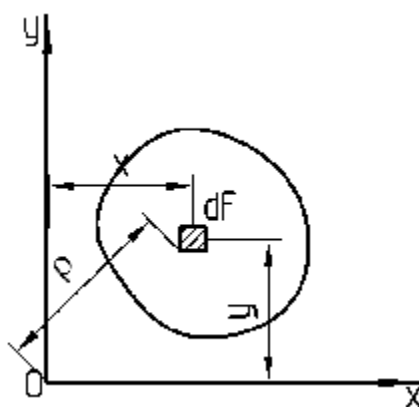


Рисунок 4.2

Полярным моментом инерции площади сечения относительно данной точки (полюса) называется интеграл по площади произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до полюса (см. рис. 4.2):

$$J_r = \int_F r^2 dF, \quad J_p = J_y + J_x. \quad (4.5)$$

Величины осевых и полярных моментов инерции всегда положительны.

Центробежным моментом инерции называется интеграл по площади произведений элементарных площадок на их расстояния от координатных осей  $x, y$ :

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (4.6)$$

В зависимости от положения осей центробежный момент инерции может быть положительным или отрицательным, а также равен нулю.

Единица измерения моментов инерции – метр, дециметр или сантиметр в четвертой степени.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями.

При вычислении моментов инерции сечений, составленных из простейших геометрических фигур или стандартных прокатных профилей, широко применяются формулы преобразования моментов инерции при параллельном переносе осей (рис. 4.3).

Момент инерции сечения относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между этими осями:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 F, \quad J_{y_1} = J_y + b^2 F. \quad (4.7)$$

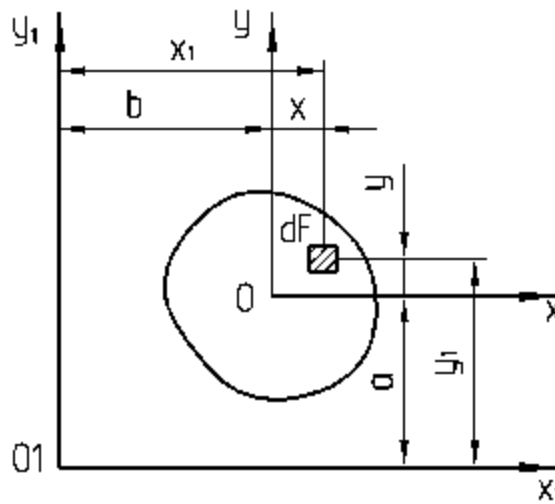


Рисунок 4.3

Центробежный момент инерции относительно любой системы прямоугольных осей равен центробежному моменту относительно системы центральных осей, параллельных данным, плюс произведение площади фигуры на координаты её центра тяжести в новых осях:

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF, \quad J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i y_i} + a_i b_i F_i). \quad (4.8)$$

Осевые моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей фигуры определяют по формулам:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i), \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i), \quad (4.9)$$

где  $J_{x_i}$ ,  $J_{y_i}$  – осевые моменты инерции составляющих фигур относительно собственных центральных осей;

$a_i$  – расстояние между центральной осью  $X_c$  составного сечения и собственной центральной осью  $X_i$   $i$ -й составляющей фигуры;

$b_i$  – расстояние между центральной осью  $Y_c$  составного сечения и собственной центральной осью  $Y_i$   $i$ -й составляющей фигуры.

Центробежный момент инерции всего сечения относительно главных центральных осей фигуры определяют следующим образом:

$$J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i y_i} + a_i b_i F_i), \quad (4.10)$$

где  $J_{x_i y_i}$  – центробежный момент инерции составляющих фигур относительно собственных центральных осей.

Значения моментов инерции наиболее употребительных сечений относительно центральных осей приведены в таблице 4.1

Положение главных осей инерции находят из следующей зависимости (рис. 4.4):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}}, \quad (4.11)$$

где  $\alpha_0$  – угол поворота главных центральных осей несимметричной фигуры относительно начальной системы центральных осей;

$J_{x_c y_c}$  – центробежный момент инерции относительно центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$ ;

$J_{x_c}$ ,  $J_{y_c}$  – осевые моменты инерции относительно центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$ .

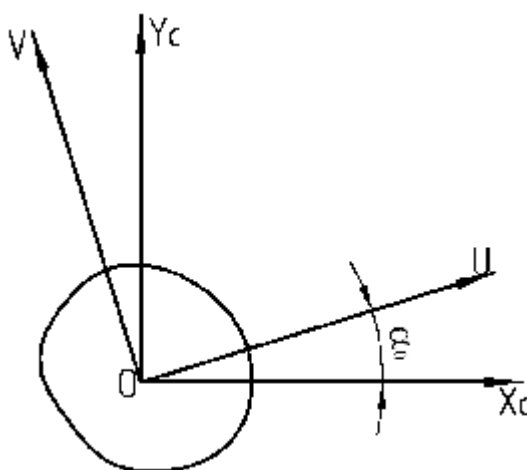


Рисунок 4.4

Положительный угол  $\alpha_0$  следует откладывать от оси  $X_c$  против хода часовой стрелки.

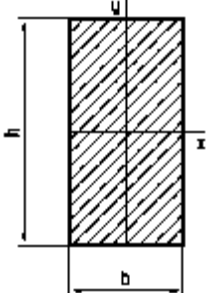
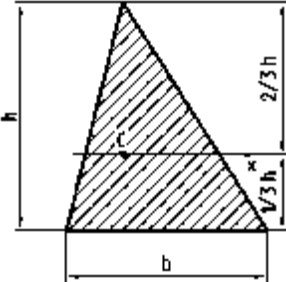
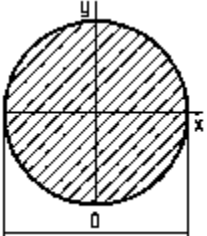
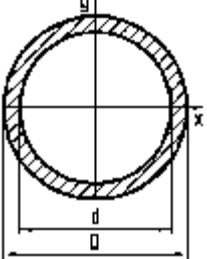
При вычислении моментов инерции относительно главных центральных осей используют следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 J_U &= J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0, \\
 J_V &= J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0.
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Центробежный момент инерции относительно главных центральных осей равен нулю:

$$J_{UV} = J_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 = 0.
 \tag{4.13}$$

Таблица 4.1 – Значения моментов инерции наиболее употребительных сечений относительно центральных осей

Вид сечения		Моменты инерции	
		$J_x$	$J_y$
Прямоугольник		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$
Треугольник		$\frac{bh^3}{36}$	–
Круг		$\frac{\pi D^4}{64}$	
Кольцо		$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4),$ $\alpha = \frac{d}{D}$	

## 4.2 Вычисление геометрических характеристик плоских сечений

### Задача 4.1

Определить положение центра тяжести данного сечения (рис. 4.5) и вычислить осевые моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей сечения.

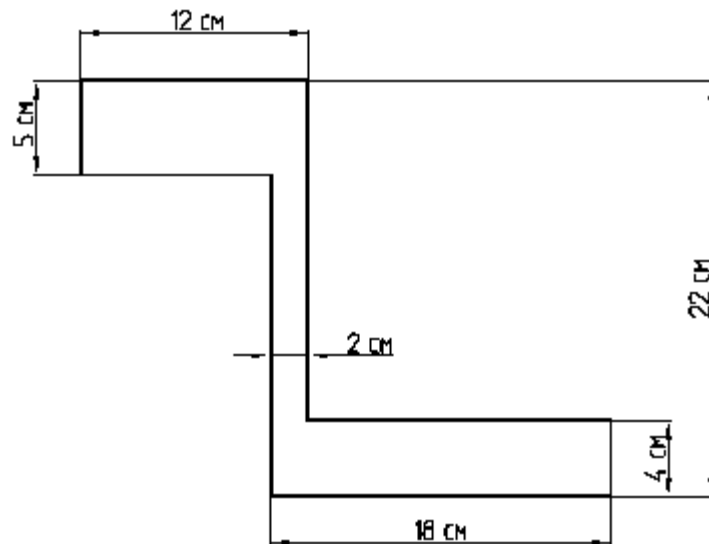


Рисунок 4.5

### Решение

1 Изображаем сечение в масштабе с указанием размеров фигур. Определяем положение центра тяжести каждой из фигур. Наносим на рисунок центральные оси каждой фигуры (рис. 4.6).

Определяем площади каждой из фигур:

$$F_1 = 12 \cdot 5 = 60 \text{ см}^2,$$

$$F_2 = 2 \cdot 13 = 26 \text{ см}^2,$$

$$F_3 = 18 \cdot 4 = 72 \text{ см}^2.$$

2 Выбираем для сечения произвольную систему прямоугольных координат (оси  $x$ ,  $y$ ), относительно выбранных начальных осей  $x$  и  $y$  находим координаты центра тяжести сложного сечения.

Находим координаты центра тяжести  $i$ -й фигуры относительно начальной системы осей:

$$x_1 = -\frac{12}{2} + \frac{2}{2} = -5 \text{ см},$$

$$y_1 = \frac{4}{2} + 13 + \frac{5}{2} = 17,5 \text{ см},$$

$$x_2 = 0 \text{ см},$$

$$y_2 = \frac{4}{2} + \frac{13}{2} = 8,5 \text{ см},$$

$$x_3 = \frac{18}{2} - \frac{2}{2} = 8 \text{ см},$$

$$y_3 = 0 \text{ см}.$$

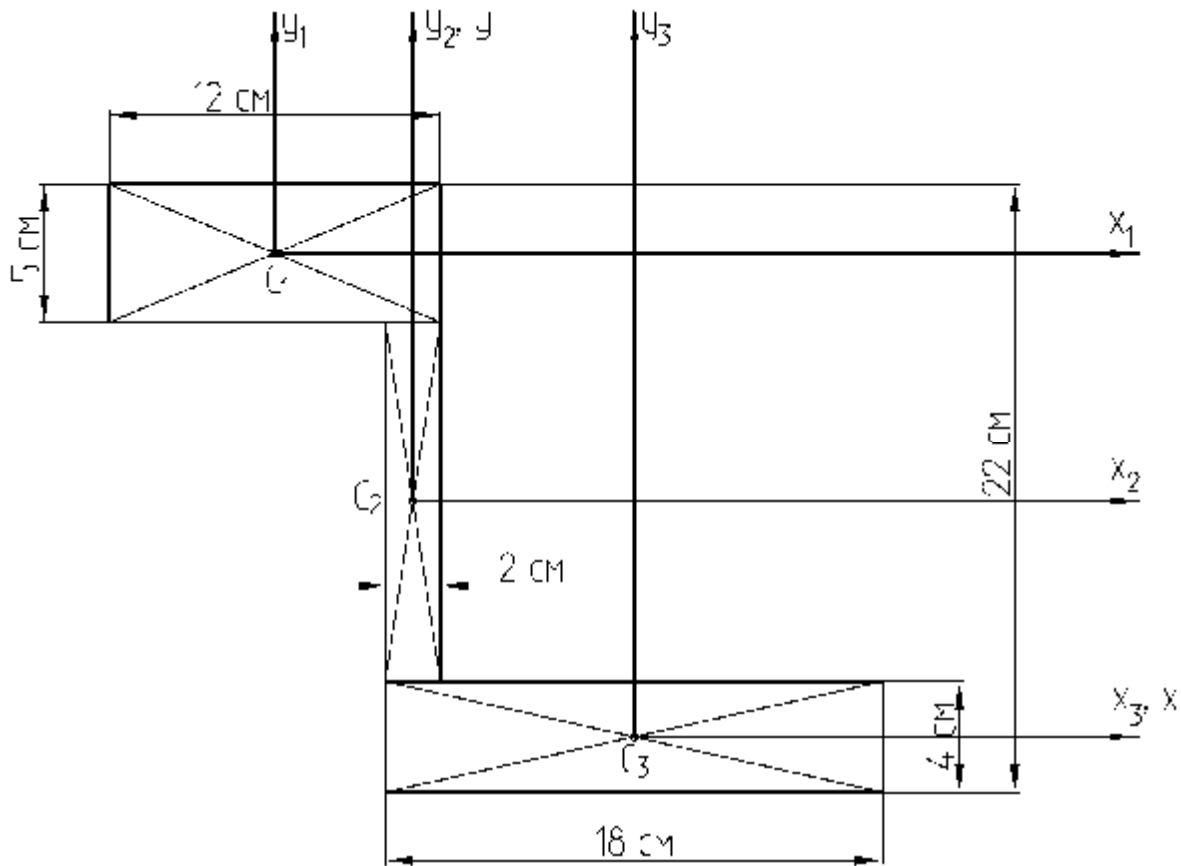


Рисунок 4.6

Подставляя полученные значения  $x_i$ ,  $y_i$  в формулы (4.3), имеем:

$$x_c = \frac{-5 \cdot 60 + 0 \cdot 26 + 8 \cdot 72}{60 + 26 + 72} = 1,75 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{17,5 \cdot 60 + 8,5 \cdot 26 + 0 \cdot 72}{60 + 26 + 72} = 8,04 \text{ см}.$$

По найденным координатам  $x_c$ ,  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения. Через центр тяжести составного сечения проводим центральные оси всего сечения, направляя их параллельно центральным осям составляющих фигур (рис 4.7).

3 Определяем осевые моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей сечения.

Вычисляем осевые моменты инерции составляющих фигур относительно собственных центральных осей:

$$J_{x_1} = \frac{12 \cdot 5^3}{12} = 125 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1} = \frac{5 \cdot 12^3}{12} = 720 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_2} = \frac{2 \cdot 13^3}{12} = 366,2 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_2} = \frac{13 \cdot 2^3}{12} = 8,7 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_3} = \frac{18 \cdot 4^3}{12} = 96 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_3} = \frac{4 \cdot 18^3}{12} = 1944 \text{ см}^4.$$

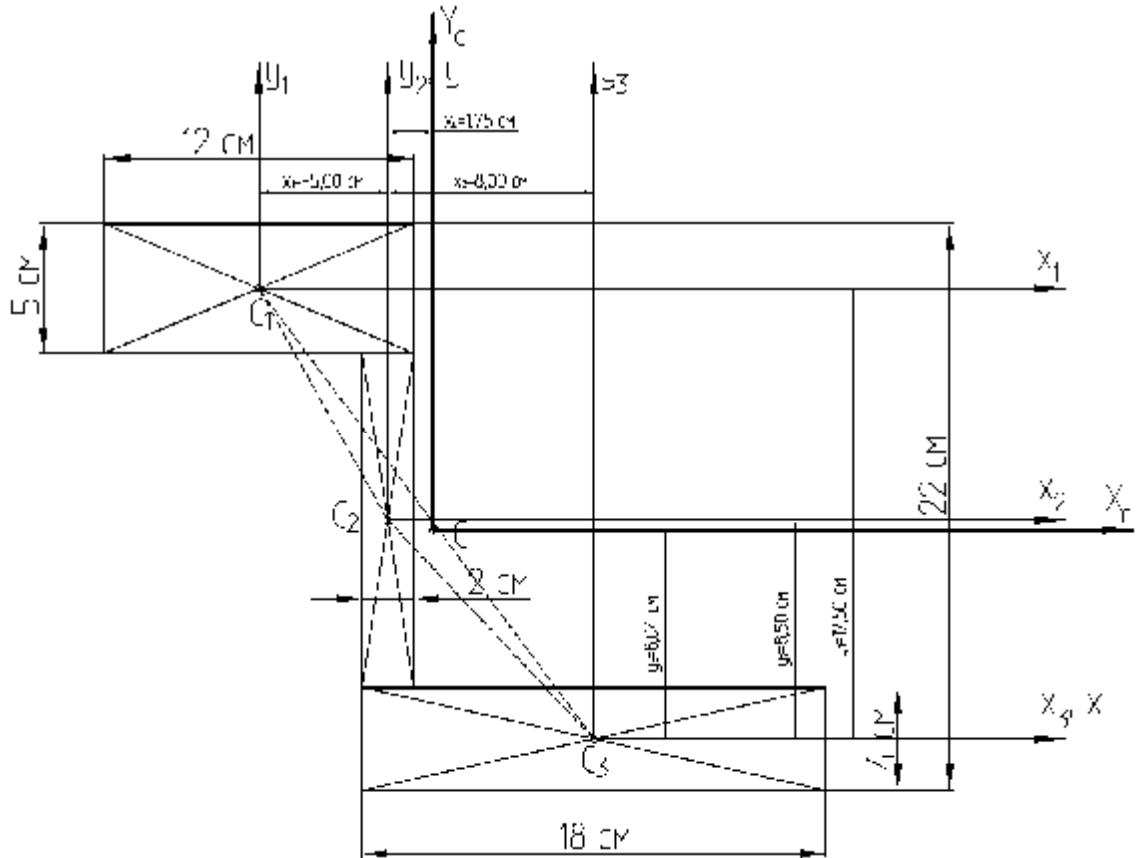


Рисунок 4.7

Находим расстояние между центральной осью  $X_c$  составного сечения и собственной центральной осью  $x_i$   $i$ -й составляющей фигуры:

$$a_1 = y_1 - y_c = 17,5 - 8,04 = 9,46 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 8,5 - 8,04 = 0,46 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 0 - 8,04 = -8,04 \text{ см}.$$

Находим расстояние между центральной осью  $Y_c$  составного сечения и собственной центральной осью  $y_i$   $i$ -й составляющей фигуры:

$$b_1 = x_1 - x_c = -5 - 1,75 = 6,75 \text{ см},$$

$$b_2 = x_2 - x_c = 0 - 1,75 = -1,75 \text{ см},$$

$$b_3 = x_3 - x_c = 8 - 1,75 = 6,25 \text{ см}.$$

Подставляя полученные значения  $J_{x_i}$ ,  $J_{y_i}$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  в формулы (4.9), имеем:

$$J_{x_c} = 125 + 9,46^2 \cdot 60 + 366,2 + 0,46^2 \cdot 26 + 96 + 8,04^2 \cdot 72 = 10616,4 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 720 + 6,75^2 \cdot 60 + 8,7 + 1,75^2 \cdot 26 + 1944 + 6,25^2 \cdot 72 = 8298,6 \text{ см}^4.$$

### Задача 4.2

Определить положение центра тяжести данного сечения (рис. 4.8) и вычислить осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей сечения.

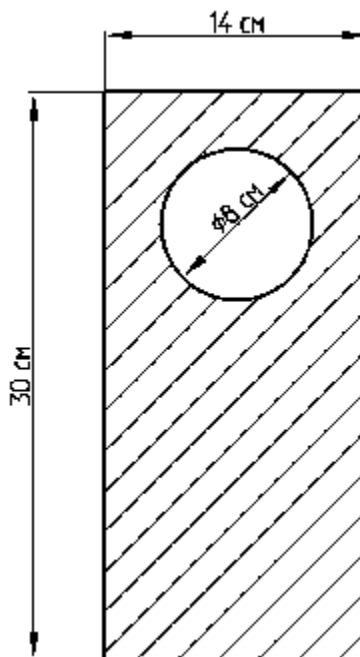


Рисунок 4.8

### Решение

1 Изображаем сечение в масштабе с указанием размеров фигур. Так как в сечении есть отверстие, его удобно считать частью фигуры с отрицательной площадью. Рассматриваемое сечение разбиваем на две простые части – прямоугольник и отверстие отрицательной площади.

Определяем положение центра тяжести каждой из фигур. Наносим на рисунок центральные оси каждой фигуры (рис. 4.9).

Определяем площади каждой из фигур:

$$F_1 = 30 \cdot 14 = 420 \text{ см}^2,$$

$$F_2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 8^2}{4} = 50,24 \text{ см}^2.$$

2 Относительно выбранных начальных осей находим координаты центра тяжести сложного сечения.

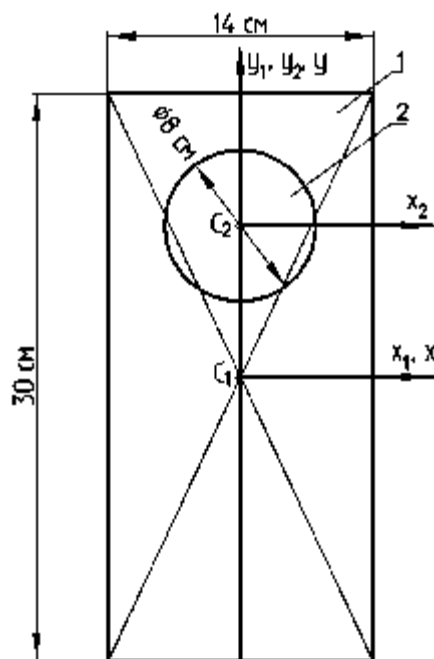


Рисунок 4.9

Так как сечение симметрично относительно оси  $Y$ , то центр тяжести лежит на ней.

Находим координаты центра тяжести  $i$ -й фигуры относительно начальной системы осей:

$$y_1 = 0 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{30}{2} - 7 = 8 \text{ см}.$$

Подставляя полученные значения  $x_i, y_i$  в формулы (4.3), имеем:

$$y_c = \frac{0 \cdot 420 - 8 \cdot 50,24}{420 - 50,24} = -1,1 \text{ см}.$$

По найденной координате  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения (рис 4.10).

3 Определяем осевые моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей сечения:

$$J_{x_1} = \frac{14 \cdot 30^3}{12} = 31500 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = \frac{30 \cdot 14^3}{12} = 6860 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_2} = J_{y_2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 8^4}{64} = 201 \text{ см}^4.$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 + 1,1 = 1,1 \text{ см}, \quad a_2 = y_2 - y_c = 8 - 1,1 = 6,9 \text{ см}.$$

$$b_1 = 0 \text{ см}, \quad b_2 = 0 \text{ см}.$$

$$J_{x_c} = 31500 + 1,1^2 \cdot 420 - 201 - 6,9^2 \cdot 50 = 29426,7 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 6860 - 201 = 6659 \text{ см}^4.$$

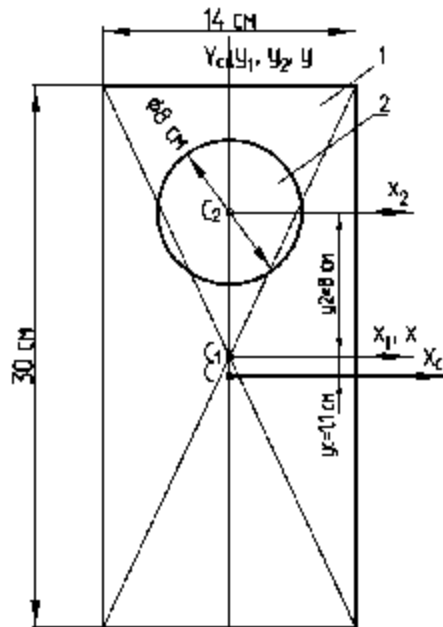


Рисунок 4.10

### Задача 4.3

Определить положение центра тяжести данного сечения (рис. 4.11) и вычислить осевые моменты инерции фигуры относительно главных центральных осей сечения.

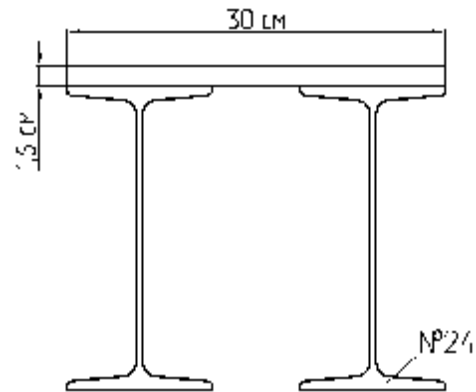


Рисунок 4.11

### Решение

1 Изображаем сечение в масштабе с указанием размеров фигур. Определяем положение центра тяжести каждой из фигур. Наносим на рисунок центральные оси каждой фигуры (рис. 4.12).

Определяем площадь прямоугольника:

$$F_1 = 30 \cdot 1,6 = 48 \text{ см}^2.$$

Из сортамента выписываем геометрические характеристики двутавра:

$$H_2 = H_3 = 24 \text{ см},$$

$$J_{x_2} = J_{x_3} = 3460 \text{ см}^4,$$

$$B_2 = B_3 = 11,5 \text{ см},$$

$$J_{y_2} = J_{y_3} = 198 \text{ см}^4.$$

$$F_2 = F_3 = 34,8 \text{ см}^2,$$

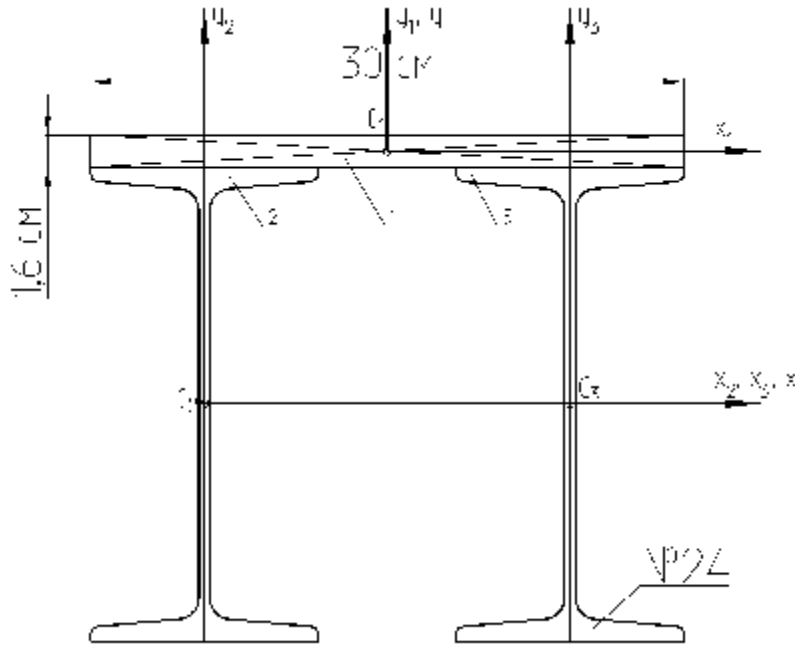


Рисунок 4.12

2 Относительно выбранных начальных осей находим координаты центра тяжести сложного сечения. Так как фигура симметрична относительно оси  $Y$ , то центр тяжести лежит на ней.

$$y_1 = \frac{24}{2} + \frac{1,6}{2} = 12,8 \text{ см}, \quad y_2 = 0 \text{ см}, \quad y_3 = 0 \text{ см}.$$

$$y_c = \frac{12,8 \cdot 48 + 0 \cdot 34,8 + 0 \cdot 34,8}{48 + 34,8 + 34,8} = 5,2 \text{ см}.$$

По найденной координате  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения (рис 4.13).

3 Определяем осевые моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей сечения:

$$J_{x_1} = \frac{30 \cdot 1,6^3}{12} = 10,2 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1} = \frac{1,6 \cdot 30^3}{12} = 3600 \text{ см}^4,$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 12,8 - 5,2 = 7,6 \text{ см},$$

$$b_1 = 0 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 0 - 5,2 = -5,2 \text{ см},$$

$$b_2 = b_3 = \frac{30}{2} - \frac{11,5}{2} = 9,25 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 0 - 5,2 = -5,2 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 10,2 + 7,6^2 \cdot 48 + 2 \cdot (3460 + 5,2^2 \cdot 34,8) = 11584,7 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 3600 + 0^2 \cdot 48 + 2 \cdot (198 + 9,25^2 \cdot 34,8) = 9951,2 \text{ см}^4.$$

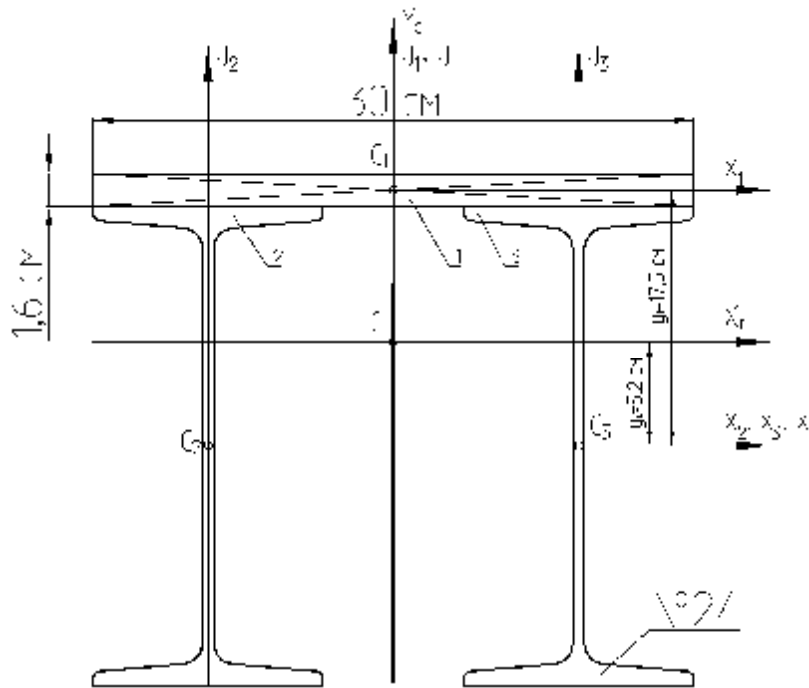


Рисунок 4.13

### Задача 4.4

Для сложного сечения (рис. 4.14), используя таблицы сортамента, аналитическим способом определить положение главных центральных осей и величины главных центральных моментов инерции.

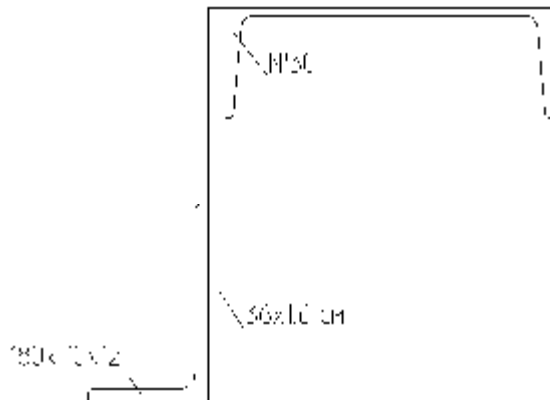


Рисунок 4.14

### Решение

1 Определяем геометрические характеристики составляющих фигур. Из сортамента выписываем геометрические характеристики швеллера и уголка, а для полосы вычисляем.

а) ШВЕЛЛЕР №30 (ГОСТ 8240-89):  $H_1 = 30 \text{ см}$ ,  $B_1 = 10 \text{ см}$ ,  $z_0 = 2,52 \text{ см}$ ,  
 $F_1 = 40,5 \text{ см}^2$ ,  $J_{x_1} = 327 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_1} = 5810 \text{ см}^4$ .

б) ПОЛОСА 36x1,6:  $H_2 = 36 \text{ см}$ ,  $B_2 = 1,6 \text{ см}$ ,  $F_2 = 36 \cdot 1,6 = 57,6 \text{ см}^2$ ,  
 $J_{x_2} = \frac{B_2 H_2^3}{12} = \frac{1,6 \cdot 36^3}{12} = 6221 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_2} = \frac{H_2 \cdot B_2^3}{12} = \frac{36 \cdot 1,6^3}{12} = 12,3 \text{ см}^4$ .

в) УГОЛОК 180x110x12 (ГОСТ 8510-86):  $H_3 = 18 \text{ см}$ ,  $B_3 = 11 \text{ см}$ ,  
 $x_0 = 2,52 \text{ см}$ ,  $y_0 = 5,97 \text{ см}$ ,  $F_3 = 33,7 \text{ см}^2$ ,  $J_{x_3} = 1123 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_3} = 324 \text{ см}^4$ ,  
 $J_{\min} = 194 \text{ см}^4$ ,  $\text{tg}\alpha = 0,374$ .

2 Изображаем сечение в масштабе (рис 4.15). Определяем положение центра тяжести каждой из фигур. Наносим на рисунок центральные оси каждой фигуры и выбираем начальную систему осей.

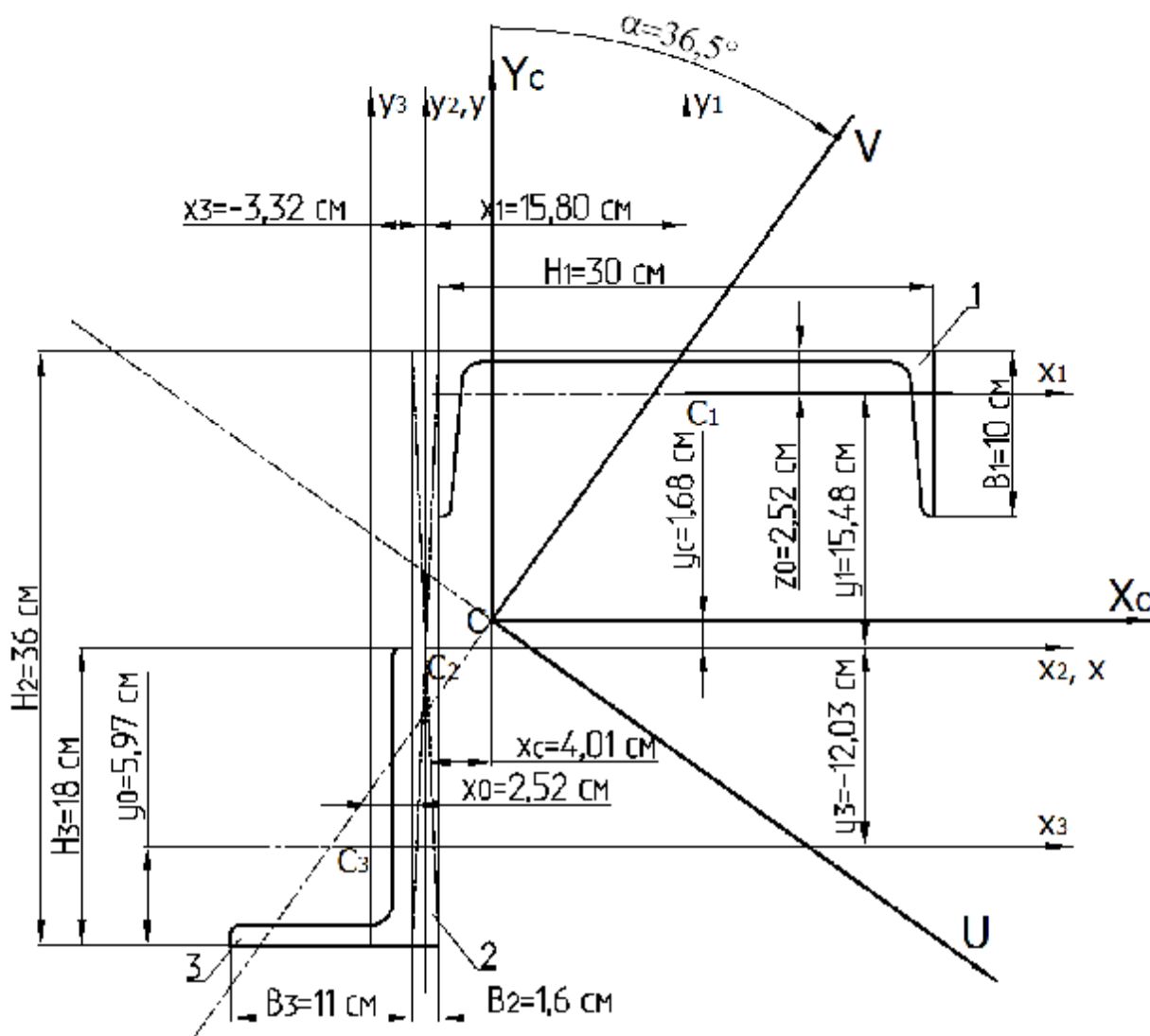


Рисунок 4.15

3 Находим координаты центра тяжести сложного сечения:

$$x_c = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3}, \quad y_c = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3},$$

$$x_1 = \frac{H_1}{2} + \frac{B_2}{2} = \frac{30}{2} + \frac{1,6}{2} = 15,8 \text{ см}, \quad y_1 = \frac{H_2}{2} - z_0 = \frac{36}{2} - 2,52 = 15,48 \text{ см},$$

$$x_2 = 0 \text{ см}, \quad y_2 = 0 \text{ см},$$

$$x_3 = \left( \frac{B_2}{2} + x_0 \right) = - \left( \frac{1,6}{2} + 2,52 \right) = -3,32 \text{ см}, \quad y_3 = - \left( \frac{H_2}{2} - y_0 \right) = - \left( \frac{36}{2} - 5,97 \right) = -12,03 \text{ см},$$

$$x_c = \frac{15,8 \cdot 40,5 + 0 \cdot 57,6 + (-3,32) \cdot 33,7}{40,5 + 57,6 + 33,7} = 4,01 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{15,48 \cdot 40,5 + 0 \cdot 57,6 + (-12,03) \cdot 33,7}{40,5 + 57,6 + 33,7} = 1,68 \text{ см}.$$

4 По найденным координатам  $x_c$ ,  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения (см. рис. 4.15). Через центр тяжести составного сечения проводим центральные оси всего сечения, направляя их параллельно центральным осям составляющих фигур.

5 Определяем осевые моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей сечения по формулам:

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2 + J_{x_3} + a_3^2 F_3,$$

$$J_{y_c} = J_{y_1} + b_1^2 F_1 + J_{y_2} + b_2^2 F_2 + J_{y_3} + b_3^2 F_3,$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 15,48 - 1,68 = 13,8 \text{ см}, \quad b_1 = x_1 - x_c = 15,8 - 4,01 = 11,79 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 0 - 1,68 = -1,68 \text{ см}, \quad b_2 = x_2 - x_c = 0 - 4,01 = -4,01 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = -12,03 - 1,68 = -13,71 \text{ см}, \quad b_3 = x_3 - x_c = -3,32 - 4,01 = -7,33 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 327 + 13,8^2 \cdot 40,5 + 6221 + 1,68^2 \cdot 57,6 + 1123 + 13,71^2 \cdot 33,7 = 21881 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 5810 + 11,79^2 \cdot 40,5 + 12,3 + 4,01^2 \cdot 57,6 + 324 + 7,33^2 \cdot 33,7 = 14513 \text{ см}^4.$$

6 Определяем центробежный момент инерции по формуле

$$J_{x_c y_c} = J_{x_1 y_1} + a_1 b_1 F_1 + J_{x_2 y_2} + a_2 b_2 F_2 + J_{x_3 y_3} + a_3 b_3 F_3.$$

Для фигур, у которых есть хотя бы одна ось симметрии,  $J_{xy} = 0$ , то есть  $J_{x_1 y_1} = 0$ ,  $J_{x_2 y_2} = 0$ .

Определим центробежный момент инерции уголка, который не равен нулю, по формуле

$$J_{xy} = (J_x - J_{\min}) \operatorname{tg} \alpha.$$

Согласно формуле (4.6) центробежный момент инерции уголка в первом и третьем квадрантах положительный (рис. 4.16), поэтому  $J_{x_3y_3}$  имеет положительный знак.

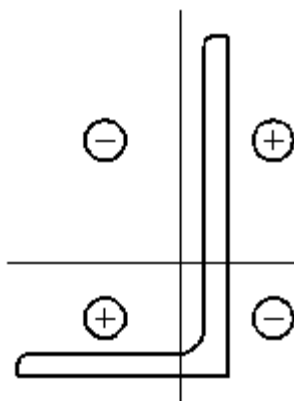


Рисунок 4.16

$$J_{x_3y_3} = (1123 - 194) \cdot 0,374 = 349 \text{ см}^4.$$

$$J_{x_c y_c} = 0 + 13,8 \cdot 11,79 \cdot 40,5 + 0 + 1,68 \cdot 4,01 \cdot 57,6 + 349 + 13,71 \cdot 7,33 \cdot 33,7 = 10713 \text{ см}^4.$$

7 Определяем положение главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}} = \frac{2 \cdot 10713}{14513 - 21881} = -2,904,$$

$$2\alpha_0 = -70,998^\circ \Rightarrow \alpha_0 = -35,499^\circ.$$

Положительные углы  $\alpha_0$  откладываются против хода часовой стрелки.

8 Определяем моменты инерции относительно главных центральных осей:

$$J_U = J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0,$$

$$J_V = J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0,$$

$$\cos \alpha_0 = 0,814, \quad \sin \alpha_0 = -0,581, \quad \sin 2\alpha_0 = -0,946,$$

$$J_U = 21881 \cdot 0,814^2 + 14513 \cdot 0,581^2 - 10713 \cdot (-0,946) = 29532 \text{ см}^4,$$

$$J_V = 21881 \cdot 0,581^2 + 14513 \cdot 0,814^2 + 10713 \cdot (-0,946) = 6868 \text{ см}^4.$$

9 Выполняем проверки, контролирующие правильность арифметических вычислений:

$$\text{а) } J_{x_c} + J_{y_c} = J_U + J_V,$$

$$21881 + 14513 = 29532 + 6868,$$

$$36394 = 36400.$$

$$\text{Погрешность: } \frac{36400 - 36394}{36394} \cdot 100\% = 0,02\% .$$

$$\text{б) } J_{UV} = J_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 = 0 ,$$

$$J_{UV} = 10713 \cdot 0,326 + \frac{21881 - 14513}{2} \cdot (-0,946) = 3492,4 - 3485,1 .$$

$$\text{Погрешность: } \frac{3492,4 - 3485,1}{3485,1} \cdot 100\% = 0,2\% .$$

10 Результаты работы сводим в таблицу 4.2

Таблица 4.2 – Геометрические характеристики сечения

Сечение профиля	Номер и вид профиля	Координаты центра тяжести составляющих фигур		Площадь составляющих фигур	Моменты инерции составляющих фигур			a <sub>i</sub>	b <sub>i</sub>
		x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>		F <sub>i</sub>	J <sub>x<sub>i</sub></sub>	J <sub>y<sub>i</sub></sub>		
1	Швеллер № 30	15,80	15,48	40,5	327	5810	0	13,8	11,79
2	Полоса 36x1,6	0	0	57,6	6221	12,3	0	-1,68	-4,01
3	Уголок 180x110x12	-3,32	-12,03	33,7	1123	324	349	-13,71	-7,33
J <sub>x<sub>c</sub></sub> , см <sup>4</sup>		J <sub>y<sub>c</sub></sub> , см <sup>4</sup>		J <sub>x<sub>c</sub>y<sub>c</sub></sub> , см <sup>4</sup>	α <sub>0</sub> , °		J <sub>U</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>V</sub> , см <sup>4</sup>	
21881		14513		10713	-35,499		29532	6868	

11 Графически представляем моменты инерции.

Известны моменты инерции J<sub>x<sub>c</sub></sub>, J<sub>y<sub>c</sub></sub>, J<sub>x<sub>c</sub>y<sub>c</sub></sub> площади сечения бруса относительно некоторой системы перпендикулярных осей x, y (J<sub>x<sub>c</sub></sub> = 21881 см<sup>4</sup>, J<sub>y<sub>c</sub></sub> = 14513 см<sup>4</sup>, J<sub>x<sub>c</sub>y<sub>c</sub></sub> = 10713 см<sup>4</sup>). Требуется определить главные моменты инерции и положение главных осей.

В геометрической плоскости J<sub>x<sub>c</sub></sub>, J<sub>x<sub>c</sub>y<sub>c</sub></sub> (рис. 4.17) строим точки D<sub>x</sub> и D<sub>y</sub>, соответствующие моментам инерции относительно осей x, y. Абсциссами этих точек являются осевые моменты инерции OK<sub>x</sub> = J<sub>x<sub>c</sub></sub>, OK<sub>y</sub> = J<sub>y<sub>c</sub></sub>; ординатами – центробежный момент инерции J<sub>x<sub>c</sub>y<sub>c</sub></sub>, причем K<sub>x</sub>D<sub>x</sub> = J<sub>x<sub>c</sub>y<sub>c</sub></sub>, K<sub>y</sub>D<sub>y</sub> = -J<sub>x<sub>c</sub>y<sub>c</sub></sub>. Так как точки принадлежат одному диаметру, то, соединив их, получим центр круга инерции С. Из центра С описываем окружность радиусом CD<sub>x</sub> = CD<sub>y</sub>. Она пересекает ось абсцисс в точках А и В. Очевидно, что абсциссы этих точек – отрезки ОА и ОВ – и есть искомые главные моменты инерции J<sub>U</sub>, J<sub>V</sub>.

Для определения направления главных осей построим фокус круга инерции. С этой целью из точки  $D_x$  проведем линию, параллельную оси  $x$ , до пересечения с кругом в фокусе  $M$ . Соединяя фокус с точками  $A$ ,  $B$  круга, получим направления главных осей  $U$  и  $V$  (см. рис. 4.17).

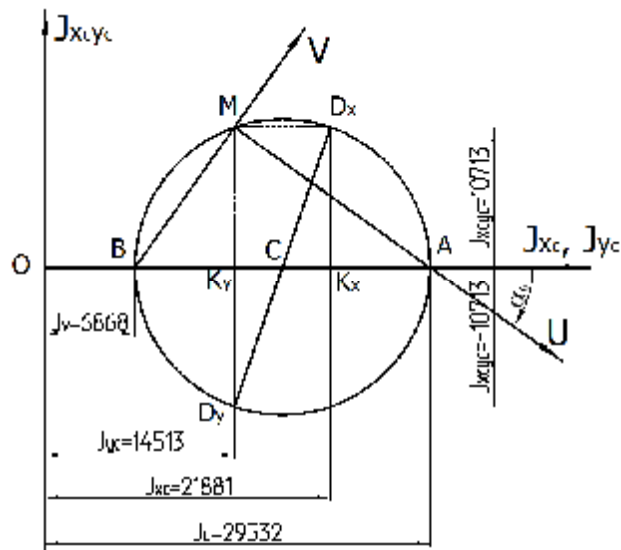


Рисунок 4.17

### Задача 4.5

Для сложного сечения (рис. 4.18), используя таблицы сортамента, аналитическим способом определить положение главных центральных осей и величины главных центральных моментов инерции.

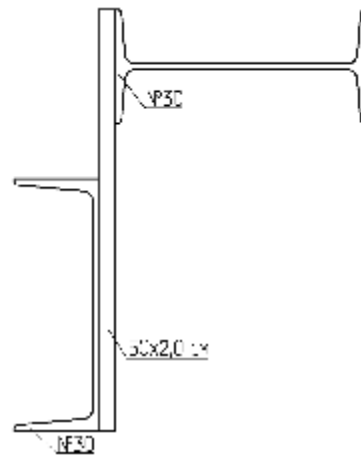


Рисунок 4.18

### Решение

1 Определяем геометрические характеристики составляющих фигур. Из сортамента выписываем геометрические характеристики швеллера и уголка, а для полосы вычисляем.

а) ШВЕЛЛЕР №30 (ГОСТ 8240-89):  $H_1 = 30 \text{ см}$ ,  $B_1 = 10 \text{ см}$ ,  $z_0 = 2,52 \text{ см}$ ,  
 $F_1 = 40,5 \text{ см}^2$ ,  $J_{x_1} = 5810 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_1} = 327 \text{ см}^4$ .

б) ПОЛОСА 50x2,0:  $H_2 = 2,0 \text{ см}$ ,  $B_2 = 50 \text{ см}$ ,  $F_2 = 50 \cdot 2,0 = 100 \text{ см}^2$ ,  
 $J_{x_2} = \frac{B_2 H_2^3}{12} = \frac{2,0 \cdot 50^3}{12} = 20833 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_2} = \frac{H_2 B_2^3}{12} = \frac{50 \cdot 2,0^3}{12} = 33,3 \text{ см}^4$ .

в) ДВУТАВР №30 (ГОСТ 8239-89):  $H_3 = 30 \text{ см}$ ,  $B_3 = 13,5 \text{ см}$ ,  
 $F_3 = 46,5 \text{ см}^2$ ,  $J_{x_3} = 337 \text{ см}^4$ ,  $J_{y_3} = 7080 \text{ см}^4$ .

2 Изображаем сечение в масштабе (рис 4.19). Определяем положение центра тяжести каждой из фигур. Наносим на рисунок центральные оси каждой фигуры и выбираем начальную систему осей.

3 Находим координаты центра тяжести сложного сечения по формулам (4.3):

$$x_1 = -\left(\frac{H_2}{2} + z_0\right) = -\left(\frac{2,0}{2} + 2,52\right) = -3,52 \text{ см}, \quad y_1 = -\left(\frac{B_2}{2} - \frac{H_1}{2}\right) = -\left(\frac{50}{2} - \frac{30}{2}\right) = -10 \text{ см},$$

$$x_2 = 0 \text{ см},$$

$$y_2 = 0 \text{ см},$$

$$x_3 = \frac{H_2}{2} + \frac{H_3}{2} = \frac{2,0}{2} + \frac{30}{2} = 16 \text{ см},$$

$$y_3 = \frac{B_2}{2} - \frac{B_3}{2} = \frac{50}{2} - \frac{13,5}{2} = 18,25 \text{ см},$$

$$x_c = \frac{-3,52 \cdot 40,5 + 0 \cdot 100 + 16 \cdot 46,5}{40,5 + 100 + 46,5} = 3,22 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{-10 \cdot 40,5 + 0 \cdot 100 + 18,25 \cdot 46,5}{40,5 + 100 + 46,5} = 2,37 \text{ см}.$$

4 По найденным координатам  $x_c$ ,  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения (см. рис. 4.19). Через центр тяжести составного сечения проводим центральные оси всего сечения, направляя их параллельно центральным осям составляющих фигур.

5 Определяем осевые моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей сечения по формулам (4.9):

$$a_1 = y_1 - y_c = -10 - 2,37 = -12,37 \text{ см},$$

$$b_1 = x_1 - x_c = -3,52 - 3,22 = -6,74 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 0 - 2,37 = -2,37 \text{ см},$$

$$b_2 = x_2 - x_c = 0 - 3,22 = -3,22 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 18,25 - 2,37 = 15,88 \text{ см},$$

$$b_3 = x_3 - x_c = 16,00 - 3,22 = 12,78 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 5810 + 12,37^2 \cdot 40,5 + 20833 + 2,37^2 \cdot 100 + 7080 + 15,88^2 \cdot 46,5 = 45465 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 387 + 6,74^2 \cdot 40,5 + 33,3 + 3,22^2 \cdot 100 + 337 + 12,78^2 \cdot 46,5 = 17972 \text{ см}^4.$$

6 Определяем центробежный момент инерции по формуле (4.10).

Для симметричных фигур  $J_{xy} = 0$ , то есть  $J_{x_1 y_1} = 0$ ,  $J_{x_2 y_2} = 0$ ,  $J_{x_3 y_3} = 0$ .

$$J_{x_c y_c} = 0 + 12,37 \cdot 6,74 \cdot 40,5 + 0 + 2,37 \cdot 3,22 \cdot 100 + 0 + 15,88 \cdot 12,78 \cdot 46,5 = 13577 \text{ см}^4.$$

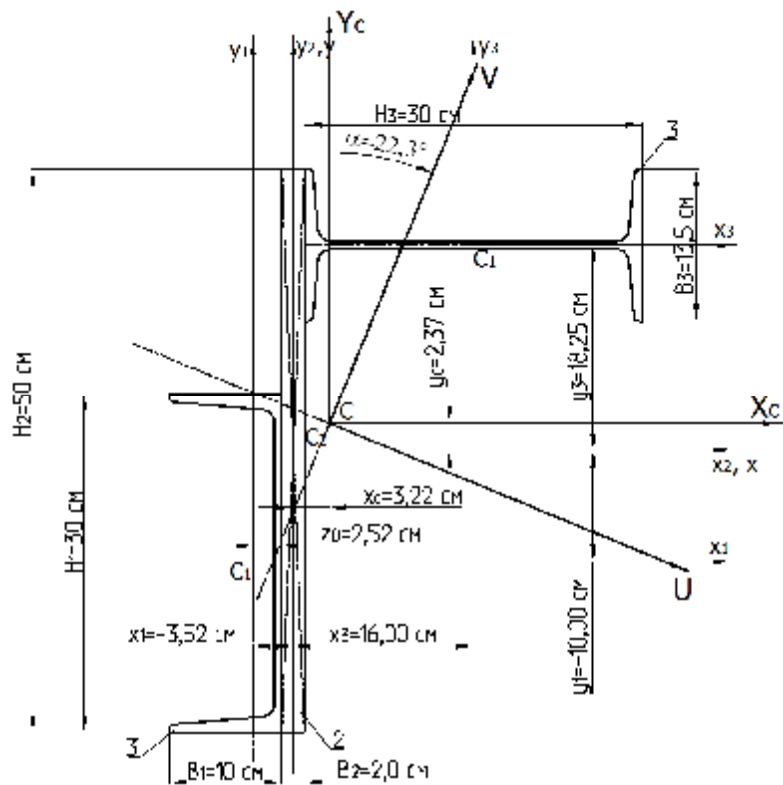


Рисунок 4.19

7 Определяем положение главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}} = \frac{2 \cdot 13577}{17972 - 46465} = -0,953,$$

$$2\alpha_0 = -44,644^\circ, \Rightarrow \alpha_0 = -22,322^\circ.$$

Положительные углы  $\alpha_0$  откладываются против хода часовой стрелки.

8 Определяем моменты инерции относительно главных центральных осей:

$$\cos \alpha_0 = 0,925, \quad \sin \alpha_0 = -0,380, \quad \sin 2\alpha_0 = -0,703,$$

$$J_U = 45465 \cdot 0,925^2 + 17972 \cdot 0,380^2 - 13577 \cdot (-0,703) = 51040 \text{ см}^4,$$

$$J_V = 45465 \cdot 0,380^2 + 17972 \cdot 0,925^2 + 13577 \cdot (-0,703) = 12398 \text{ см}^4.$$

9 Выполняем проверки, контролирующие правильность арифметических вычислений:

$$\text{а) } J_{x_c} + J_{y_c} = J_U + J_V,$$

$$45465 + 17972 = 51040 + 12398,$$

$$63437 \approx 63438.$$

$$\text{Погрешность: } \frac{63438 - 63437}{63437} \cdot 100\% = 0,002\%.$$

$$\text{б) } J_{UV} = J_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 = 0,$$

$$J_{UV} = 13577 \cdot 0,711 + \frac{45465 - 17972}{2} \cdot (-0,703) = 9653 - 9663.$$

$$\text{Погрешность: } \frac{9663 - 9653}{9653} \cdot 100\% = 0,10\%.$$

10 Результаты работы сводим в таблицу 4.3.

Таблица 4.3 – Геометрические характеристики сечения

Сечение профиля	Номер и вид профиля	Координаты центра тяжести составляющих фигур		Площадь составляющих фигур	Моменты инерции составляющих фигур			a <sub>i</sub>	b <sub>i</sub>
		x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>		F <sub>i</sub>	J <sub>x<sub>i</sub></sub>	J <sub>y<sub>i</sub></sub>		
1	Швеллер № 30	-3,52	-10,00	40,5	5810	387	0	-12,37	-6,74
2	Полоса 50x2.0	0	0	100	20833	33,3	0	-2,37	-3,22
3	Двутавр № 30	16,00	18,25	46,5	7080	337	0	15,88	12,78
J <sub>x<sub>c</sub></sub> , см <sup>4</sup>		J <sub>y<sub>c</sub></sub> , см <sup>4</sup>		J <sub>x<sub>c</sub>y<sub>c</sub></sub> , см <sup>4</sup>	α <sub>0</sub> , °		J <sub>U</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>V</sub> , см <sup>4</sup>	
45465		17972		13577	-22,322		51040	12398	

11 Графически представляем моменты инерции (рис. 4.20).

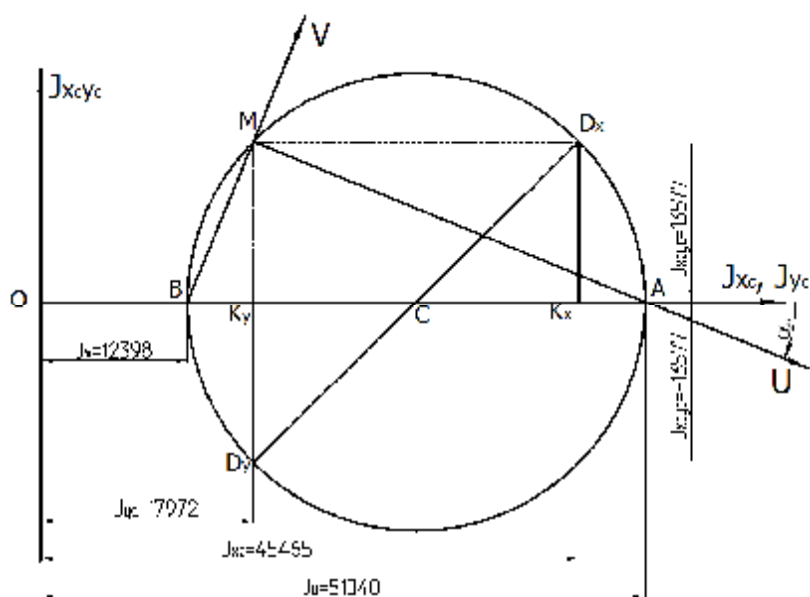


Рисунок 4.20

## 5 ИЗГИБ

### 5.1 Основные сведения из теории

Различают чистый и поперечный изгиб. Под чистым изгибом понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникают только изгибающие моменты, а поперечные силы равны нулю. В случае поперечного изгиба в сечениях бруса возникает не только изгибающий момент  $M$ , но и поперечная сила  $Q$ .

При поперечном изгибе возникают нормальные и касательные напряжения (рис 5.1).

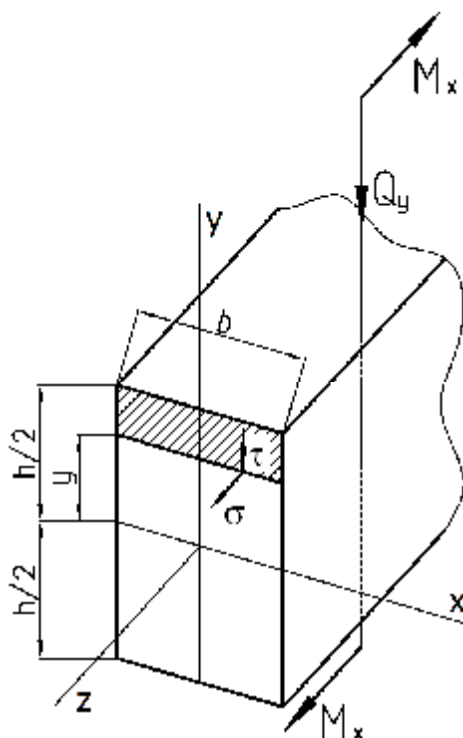


Рисунок 5.1

Величина нормального напряжения в произвольной точке сечения, расположенной на высоте  $y$  определяется по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y, \quad (5.1)$$

где  $M_x$  – изгибающий момент вокруг главной оси  $x$  поперечного сечения;

$J_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения относительно главной оси  $x$ ;

$y$  – расстояние от нейтральной линии до точки, в которой определяется напряжение.

Нормальные напряжения при изгибе меняются по высоте сечения по линейному закону и достигают наибольших значений в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Наибольшие нормальные напряжения возникают в поперечном сечении, где изгибающий момент максимален, и определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{J_x} y_{\max}. \quad (5.2)$$

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси,

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x}, \quad (5.3)$$

где  $W_x = \frac{J_x}{h/2}$  – момент сопротивления сечения при изгибе или осевой момент сопротивления,  $\text{см}^3$ .

Моменты сопротивления простейших сечений вычисляют по следующим формулам:

прямоугольник –

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, \quad (5.4)$$

где  $b$  – сторона сечения, параллельная нейтральной оси;

круг –

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3; \quad (5.5)$$

кольцо –

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1d^3 (1 - \alpha^4), \quad (5.6)$$

где  $\alpha = \frac{d}{D}$  (см. табл. 4.1).

Условие прочности при изгибе балки с симметричным сечением имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (5.7)$$

При несимметричном сечении условие прочности запишется так:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_x} y_{\max} \leq [\sigma]. \quad (5.8)$$

Касательные напряжения в произвольной точке поперечного сечения определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{QS_x^*}{bJ_x}, \quad (5.9)$$

где  $Q$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

$S_x^*$  – статический момент относительно нейтральной оси той части сечения, которая расположена по одну сторону от прямой, проведенной через данную точку, т.е. статический момент площади отсеченной части (прямая проводится параллельно нейтральной оси);

$b$  – ширина сечения на уровне рассматриваемой точки;

$J_x$  – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси.

Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (5.10)$$

Обычно для стальных балок принимают:  $[\tau] \approx 0,6[\sigma]$ .

## 5.2 Определение нормальных и касательных напряжений при изгибе

### Задача 5.1

Вычислить наибольшие нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении балки (рис. 5.2, а), рассмотрев сечение, представленное на рисунке 5.2, б. Определить нормальные напряжения в точке D (см. рис. 5.2, б). Построить эпюру нормальных напряжений.

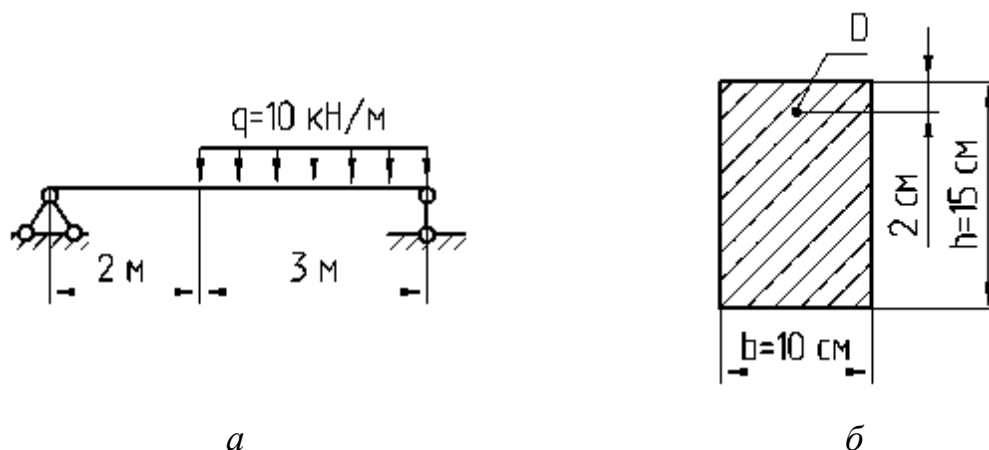


Рисунок 5.2

### Решение

1 Для определения максимальных нормальных напряжений воспользуемся формулой (5.7), а для определения нормальных напряжений в точке D – формулой (5.8).

2 Определяем опорные реакции, приравнявая к нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В (рис. 5.3):

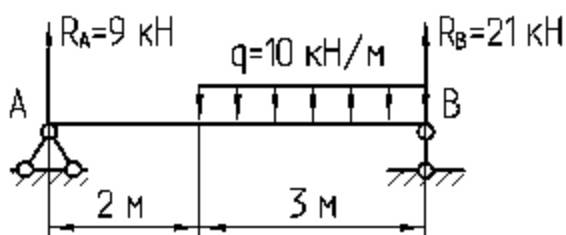


Рисунок 5.3

$$\sum M_A = 0,$$

$$-q \cdot 3 \cdot 3,5 + 5R_B = 0,$$

$$R_B = \frac{q \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = 21 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$q \cdot 3 \cdot 1,5 - 5R_A = 0,$$

$$R_A = \frac{q \cdot 3 \cdot 1,5}{5} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 1,5}{5} = 9 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$R_A - q \cdot 3 + R_B = 0,$$

$$9 - 10 \cdot 3 + 21 = 0,$$

$$30 - 30 = 0,$$

$$0 = 0.$$

3 Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 5.4):

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = R_A = 9 \text{ кН},$$

$$Q_4 = -R_B = -21 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M_4 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см. рис. 5.4).

Так как эпюра поперечных сил пересекает базовую линию и меняет знак с «+» на «-», то в этой точке находится максимальное значение изгибающего момента. Находим положение этого сечения.

$$z_0 = \frac{21}{10} = 2,1 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = R_b z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 21 \cdot 2,1 - 10 \cdot 2,1 \cdot \frac{2,1}{2} = 22,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Очевидно, что при указанном нагружении балки  $M_{\max} = 22,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

4 Определяем геометрические характеристики данного сечения:

– осевой момент инерции сечения относительно главной оси x

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 15^3}{12} = 2813 \text{ см}^4,$$

– осевой момент сопротивления сечения относительно главной оси x

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 15^2}{6} = 275 \text{ см}^3.$$

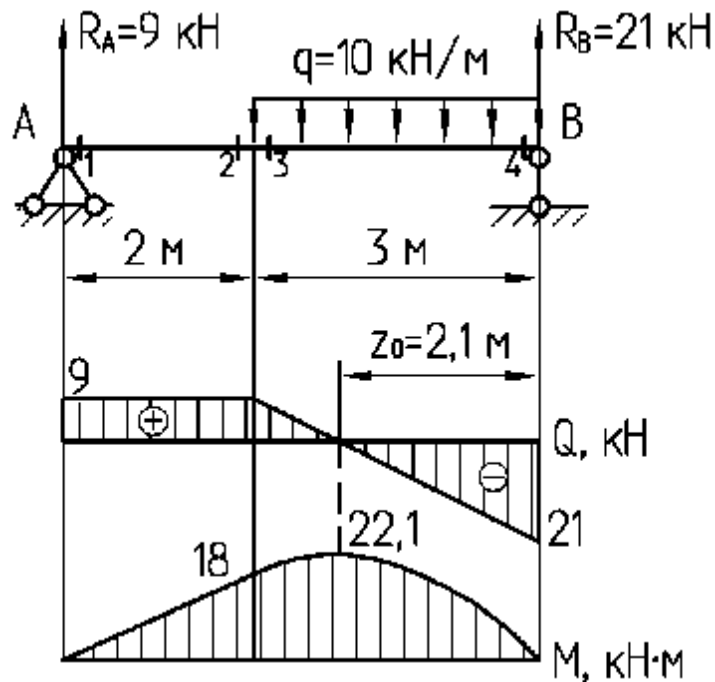


Рисунок 5.4

5 Определяем максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{22,1 \cdot 10^{-3}}{275 \cdot 10^{-6}} = 59 \text{ МПа}.$$

6 Определяем нормальное напряжение в точке D:

$$\sigma_D = \frac{M_{\max}}{J_x} y_D,$$

где  $y_D$  – расстояние от нейтральной линии до точки D,

$$y_D = \frac{15}{2} - 2 = 5,5 \text{ см};$$

$$\sigma_D = \frac{22,1 \cdot 10^{-3}}{2813 \cdot 10^{-8}} \cdot 5,5 \cdot 10^{-2} = 43,2 \text{ МПа}.$$

7 Строим эпюру нормальных напряжений (рис. 5.5).

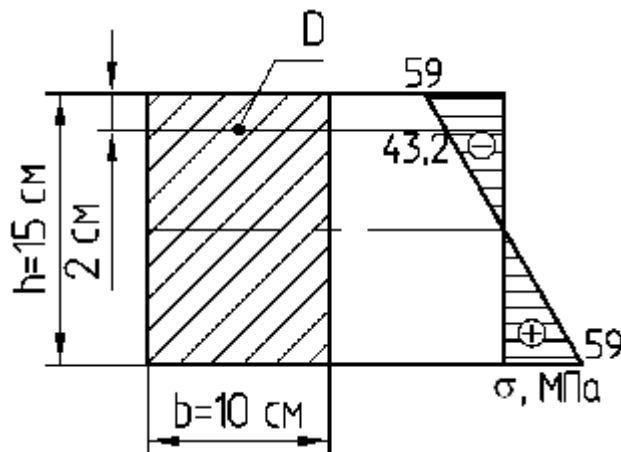


Рисунок 5.5

### Задача 5.2

Вычислить наибольшие нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении балки (рис. 5.6, а), рассмотрев сечение, представленное на рисунке 5.6, б.

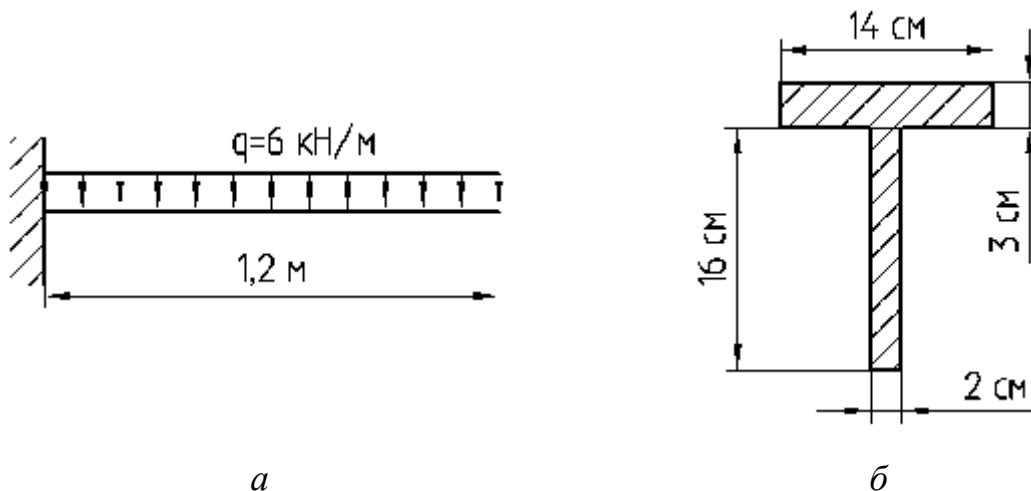


Рисунок 5.6

## Решение

1 Для определения максимальных нормальных напряжений воспользуемся формулой (5.7).

2 Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 5.7).

$$Q_1 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_2 = q \cdot 1,2 = 6 \cdot 1,2 = 7,2 \text{ кН}.$$

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -q \cdot 1,2 \cdot \frac{1,2}{2} = -6 \cdot 1,2 \cdot \frac{1,2}{2} = 4,32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см.рис. 5.7).

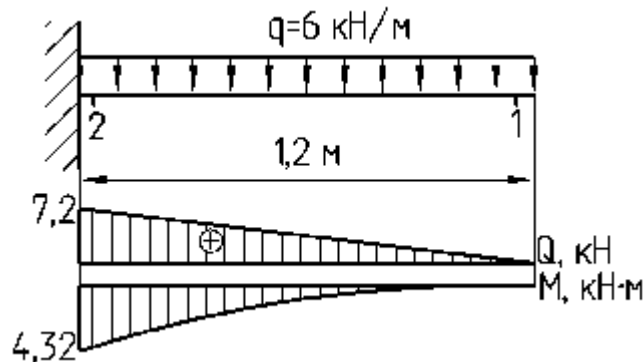


Рисунок 5.7

Очевидно, что при указанном нагружении балки максимальный момент будет в сечении заделки  $M_{\max} = 4,32 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

3 Определяем геометрические характеристики данного сечения.

Изображаем сечение в масштабе с указанием размеров фигур. Рассматриваемое сечение разбиваем на две простые части – два прямоугольника. Определяем положение центра тяжести каждой из фигур. Наносим на рисунок центральные оси каждой фигуры (рис. 5.8).

Определяем геометрические характеристики прямоугольников:

Прямоугольник № 1

$$F_1 = 16 \cdot 2 = 32 \text{ см}^2,$$

$$J_{x_1} = \frac{2 \cdot 16^3}{12} = 682,7 \text{ см}^4.$$

Прямоугольник № 2

$$F_2 = 14 \cdot 3 = 42 \text{ см}^2,$$

$$J_{x_2} = \frac{14 \cdot 3^3}{12} = 31,5 \text{ см}^4.$$

Относительно выбранных начальных осей находим координаты центра тяжести сложного сечения.

Так как фигура симметрична относительно оси Y, то центр тяжести лежит на ней.

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

$$y_1 = 0 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{16}{2} + \frac{3}{2} = 9,5 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{0 \cdot 32 + 9,5 \cdot 42}{32 + 42} = 5,39 \text{ см}.$$

По найденной координате  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения (см. рис 5.8).

Определяем осевой момент инерции всего сечения относительно главной оси  $X_c$ :

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i).$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 5,39 = -5,39 \text{ см}, \quad a_2 = y_2 - y_c = 9,5 - 5,39 = 4,11 \text{ см},$$

$$J_{x_c} = 682,7 + (-5,39)^2 \cdot 32 + 31,5 + 4,11^2 \cdot 42 = 2353 \text{ см}^4.$$

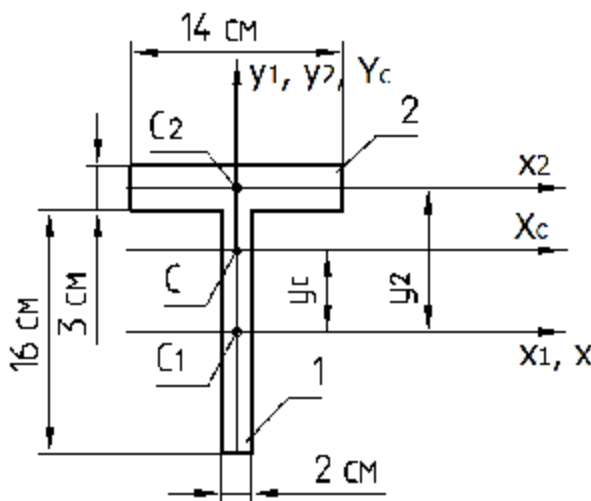


Рисунок 5.8

Определяем осевой момент сопротивления сечения относительно главной оси  $X_c$  по формуле

$$W_{x_c} = \frac{J_{x_c}}{y_{\max}},$$

где  $y_{\max}$  – расстояние от центра тяжести до точки, максимально удаленной от центра тяжести,

$$y_{\max} = \frac{16}{2} + y_c = \frac{16}{2} + 5,39 = 13,39 \text{ см},$$

$$W_{x_c} = \frac{2353}{13,39} = 175,7 \text{ см}^3.$$

4 Определяем максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{4,32 \cdot 10^{-3}}{175,7 \cdot 10^{-6}} = 24,6 \text{ МПа}.$$

### Задача 5.3

Для стальной балки (рисунок 5.9) из расчета на прочность подобрать размеры круглого, прямоугольного (соотношение сторон  $h=2b$ ) и двутаврового сечений, если  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Выбрать оптимальный вариант.

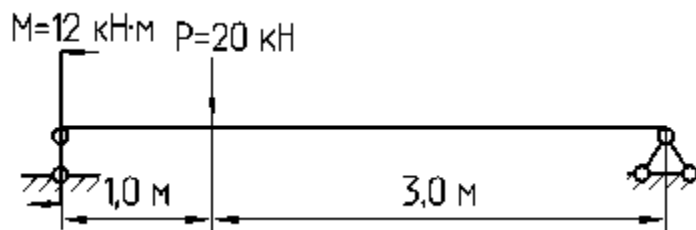


Рисунок 5.9

### Решение

- 1 Для подбора размера сечения воспользуемся формулой (5.7).
- 2 Определяем опорные реакции, приравнявая к нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В (рис. 5.10):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 1,0 + R_B \cdot 4,0 = 0,$$

$$R_B = \frac{M + P \cdot 1,0}{4,0} = \frac{12 + 20 \cdot 1,0}{4,0} = 8 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 3,0 - R_A \cdot 4,0 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 3,0}{4,0} = \frac{-12 + 20 \cdot 3,0}{4,0} = 12 \text{ кН}.$$

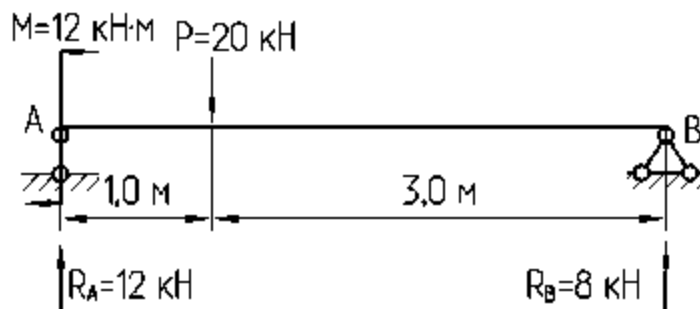


Рисунок 5.10

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$-P + R_A + R_B = 0,$$

$$-20 + 12 + 8 = 0,$$

$$-20 + 20 = 0,$$

$$0 = 0.$$

3 Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 5.11):

$$Q_1 = Q_2 = R_A = 12 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = -R_B = -8 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = M + R_A \cdot 1,0 = 12 + 12 \cdot 1,0 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см. рис. 5.11).

Очевидно, что при указанном нагружении балки  $M_{\max} = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

4 Из условия прочности (5.7) определим требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{24 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 150 \text{ см}^3.$$

5 Для круглого поперечного сечения момент сопротивления равен:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3,$$

где  $d$  – диаметр сечения.

Отсюда получаем:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{150}{0,1}} = 11,3 \text{ см.}$$

Принимаем диаметр, кратный 5 мм, т.е.  $d = 115 \text{ мм} = 11,5 \text{ см}$ .

Площадь круга

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 11,5^2}{4} = 103,8 \text{ см}^2.$$

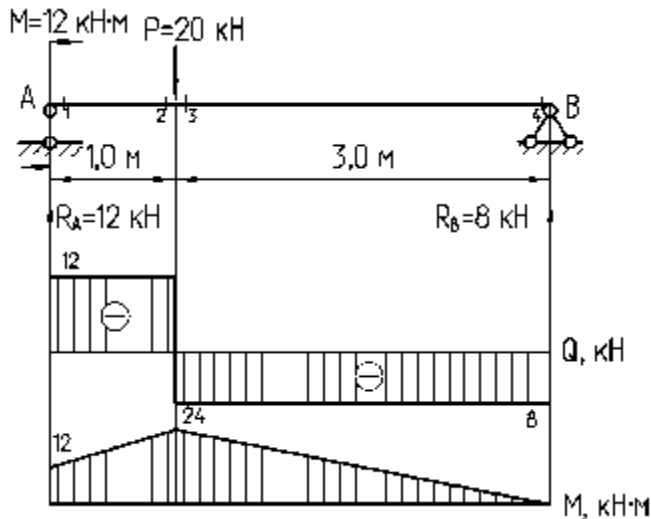


Рисунок 5.11

6 Для прямоугольного поперечного сечения момент сопротивления равен:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

Так как  $h = 2b$ , то

$$W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}.$$

Отсюда получаем:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 150}{2}} = 6,1 \text{ см.}$$

Принимаем:  $b = 6,1 \text{ см}$ ,  $h = 12,2 \text{ см}$ .

Площадь прямоугольника

$$F = bh = 6,1 \cdot 12,2 = 74,4 \text{ см}^2.$$

7 Номер двутавра находим по расчетному значению момента сопротивления  $W_x \geq 150 \text{ см}^3$ . По таблице сортамента (ГОСТ 8239-72) выбираем двутавр № 18а, для которого  $W_x = 159 \text{ см}^3$ . Его площадь  $F = 25,4 \text{ см}^2$ .

8 Во время поперечного изгиба верхние слои балки сжимаются, тогда как нижние растягиваются. Средние же слои деформируются мало. Внутренние напряжения в балке распределяются следующим образом: вдоль оси симметрии усилия равны нулю и пропорционально возрастают по мере продвижения к крайним (верхнему и нижнему) слоям, достигая максимума как раз на самых внешних слоях. Очевидно, что средние слои балки прямоугольного и круглого поперечного сечения работают с большой недогрузкой. Поэтому можно вместо прямоугольного и круглого сечений выбирать такое, где площадь поперечного сечения средних слоев будет меньше. Таким сечением является двутавр.

Кроме того, сечение считается рациональным, если оно обеспечивает прочность балки при минимальном ее весе, т.е. при минимальной площади поперечного сечения. Площадь поперечного сечения меньше у двутаврового сечения. Следовательно, принимаем двутавровое сечение.

### Задача 5.4

Вычислить наибольшие нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении балки (рис. 5.12), рассмотрев сечения, представленные на рисунке 5.13. Определить нормальные напряжения в точке D (см. рис. 5.13, а, б). Построить эпюры нормальных напряжений для предложенных сечений.

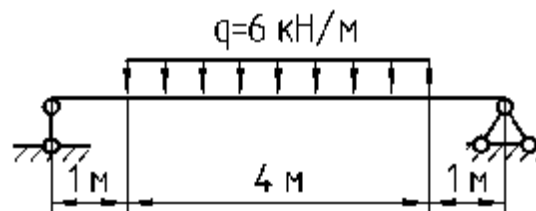


Рисунок 5.12

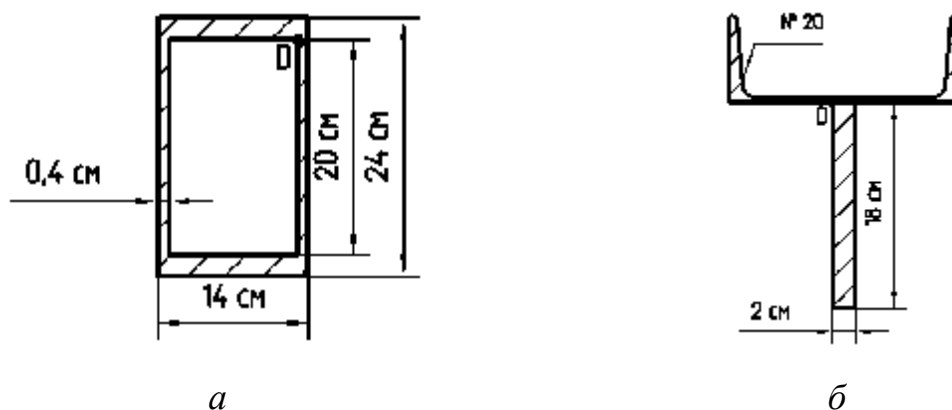


Рисунок 5.13

## Решение

1 Для определения максимальных нормальных напряжений воспользуемся формулой (5.7), а для определения нормальных напряжений в точке D – формулой (5.8).

2 Определяем опорные реакции, приравнявая к нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек A и B (рис. 5.14).

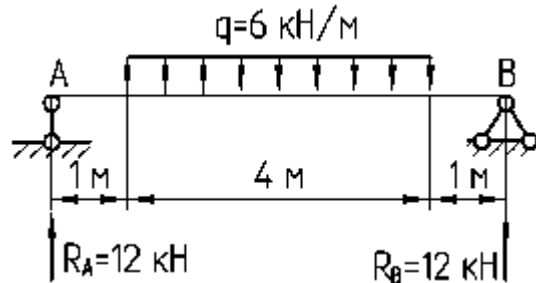


Рисунок 5.14

$$\sum M_A = 0,$$

$$-q \cdot 4 \cdot 3 + R_B \cdot 6 = 0,$$

$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 3}{6} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 12 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$q \cdot 4 \cdot 3 - R_A \cdot 6 = 0,$$

$$R_A = \frac{q \cdot 4 \cdot 3}{6} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 12 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$-q \cdot 4 + R_A + R_B = 0,$$

$$-6 \cdot 4 + 12 + 12 = 0,$$

$$-24 + 24 = 0,$$

$$0 = 0.$$

3 Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 5.15).

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = R_A = 12 \text{ кН},$$

$$Q_4 = Q_5 = Q_6 = -R_B = -12 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M_6 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 1 = 12 \cdot 1 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = R_B \cdot 1 = 12 \cdot 1 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см. рис. 5.15).

Так как эпюра поперечных сил пересекает базовую линию и меняет знак с «+» на «-», то в этой точке находится максимальное значение изгибающего момента. Находим положение этого сечения.

$$z_0 = \frac{12}{6} = 2 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = R_A(1+z_0) - qz_0 \frac{z_0}{2} = 12 \cdot (1+2) - 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Очевидно, что при указанном нагружении балки  $M_{\max} = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

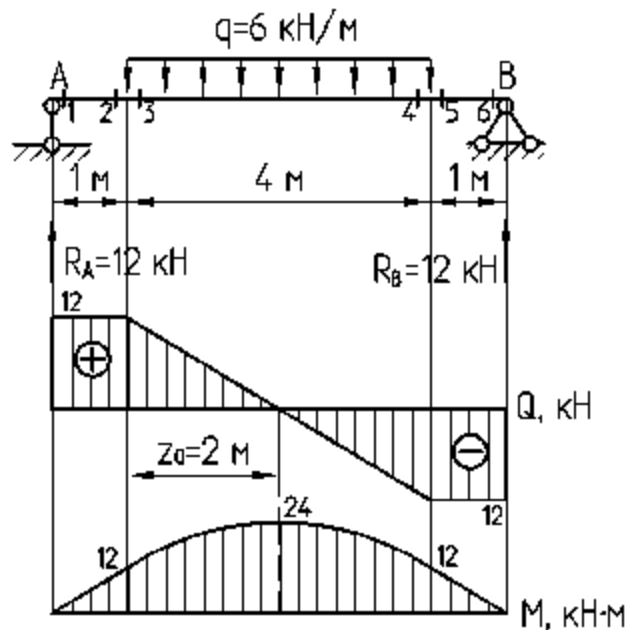


Рисунок 5.15

4 Рассмотрим сечение, представленное на рисунке 5.13, а.

Рассматриваемое сечение разбиваем на две простые части – прямоугольник 1 и отверстие в виде прямоугольника 2 отрицательной площади (рисунок 5.16). Так как в сечении есть отверстие, его удобно считать частью фигуры с отрицательной площадью.

4.1 Определяем положение центра тяжести данного сечения. Так как сечение симметрично относительно осей X и Y, то центр тяжести C лежит на пересечении осей симметрии.

4.2 Определяем осевой момент инерции сечения относительно главной оси  $X_c$ :

$$J_{x_1} = \frac{14 \cdot 24^3}{12} = 16128 \text{ см}^4, \quad J_{x_2} = \frac{13,2 \cdot 20^3}{12} = 8800 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_c} = J_{x_1} - J_{x_2} = 16128 - 8800 = 7328 \text{ см}^4.$$

4.3 Определяем осевой момент сопротивления сечения относительно главной оси  $X_c$  :

$$W_x = \frac{J_{x_c}}{y_{\max}},$$

где  $y_{\max}$  – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленной от нейтральной линии точки.

Для рассматриваемого сечения  $y_{\max} = 12 \text{ см}$ . Отсюда получаем:

$$W_x = \frac{7328}{12} = 611 \text{ см}^3.$$

4.4 Определяем максимальное нормальное напряжение:

$$s_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{24 \cdot 10^{-3}}{611 \cdot 10^{-6}} = 39,3 \text{ МПа}.$$

4.5 Определяем нормальное напряжение в точке D:

$$\sigma_D = \frac{M_{\max}}{J_x} y_D,$$

где  $y_D$  – расстояние от нейтральной линии до точки D.

Для рассматриваемого сечения  $y_D = \frac{24}{2} - 2 = 10 \text{ см}$ . Отсюда получаем:

$$s_D = \frac{24 \cdot 10^{-3}}{7328 \cdot 10^{-8}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 32,8 \text{ МПа}.$$

4.6 Строим эпюру нормальных напряжений (рис. 5.16).

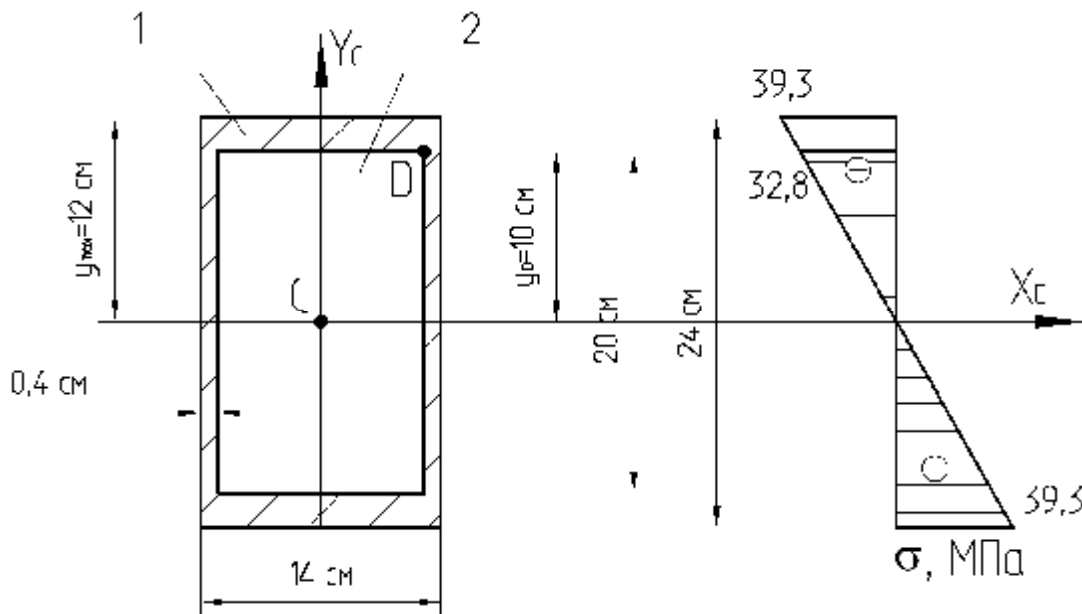


Рисунок 5.16

5 Рассмотрим сечение, представленное на рисунке 5.13, б. Рассматриваемое сечение разбиваем на две простые части – полоса 1 и швеллер 2 (рис. 5.17).

Определяем геометрические характеристики полосы 1:

$$H_1 = 18 \text{ см}, B_1 = 2 \text{ см},$$

$$F_1 = H_1 B_1 = 18 \cdot 2 = 36 \text{ см}^2, \quad J_{x_1} = \frac{B_1 H_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 18^3}{12} = 972 \text{ см}^4.$$

Из сортамента выписываем геометрические характеристики швеллера 2:

$$H_2 = 20 \text{ см}, B_2 = 7,6 \text{ см}, z_0 = 2,07 \text{ см}, \quad F_2 = 23,4 \text{ см}^2, J_{x_2} = 113 \text{ см}^4.$$

5.1 Относительно выбранных начальных осей находим координаты центра тяжести сложного сечения. Так как фигура симметрична относительно оси  $Y$ , то центр тяжести лежит на ней,  $x_c = 0$ .

Находим значение координаты  $y_c$  по формуле

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2}.$$

Для рассматриваемого сечения

$$y_1 = 0 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{H_1}{2} + z_0 = \frac{18}{2} + 2,07 = 11,07 \text{ см}.$$

Отсюда получаем:

$$y_c = \frac{11,07 \cdot 23,4}{36 + 23,4} = 4,36 \text{ см}.$$

По найденной координате  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения (см. рис 5.17).

5.2 Определяем осевой момент инерции всего сечения относительно главной центральной оси  $X_c$  по формуле

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2.$$

Для рассматриваемого сечения

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 4,36 = -4,36 \text{ см}, \quad a_2 = y_2 - y_c = 11,07 - 4,36 = 6,71 \text{ см}.$$

Отсюда получаем:

$$J_{x_c} = 972 + 4,36^2 \cdot 36 + 113 + 6,71^2 \cdot 23,4 = 2823 \text{ см}^4.$$

5.3 Определяем максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{J_{x_c}} y_{\max}.$$

Для рассматриваемого сечения



$$y_K = B_2 + \left( \frac{H_1}{2} - y_c \right) = 7,6 + \left( \frac{18}{2} - 4,36 \right) = 12,24 \text{ см.}$$

Отсюда получаем:

$$\sigma_K = \frac{24 \cdot 10^{-3}}{2823 \cdot 10^{-8}} \cdot 12,24 \cdot 10^{-2} = 104,1 \text{ МПа.}$$

5.6 Строим эпюру нормальных напряжений (см. рис. 5.17).

### Задача 5.5

Построить эпюру касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении балки (рис. 5.18, а), рассмотрев сечение, представленное на рисунке 5.18, б.

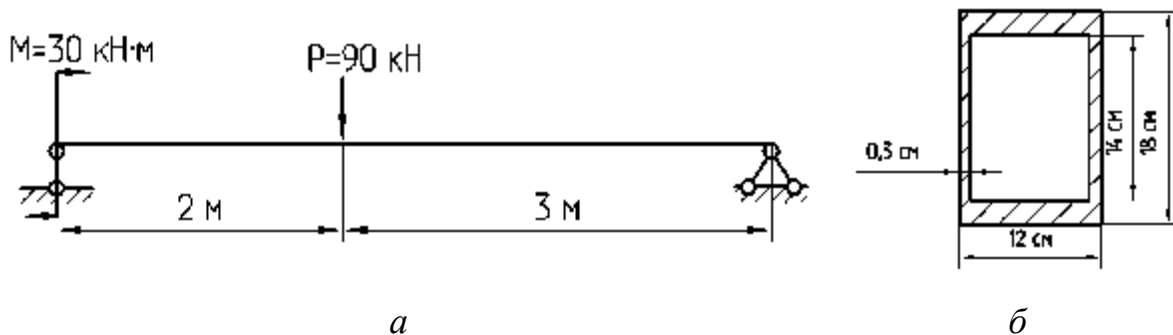


Рисунок 5.18

### Решение

1 Для определения касательных напряжений воспользуемся формулой

$$\tau = \frac{QS_x^*}{bJ_x},$$

где  $Q$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

$S_x^*$  – статический момент площади отсечённой части;

$b$  – ширина сечения на уровне рассматриваемой точки;

$J_x$  – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси.

2 Определяем опорные реакции, приравнявая к нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В (рис. 5.19).

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 2 + R_B \cdot 5 = 0,$$

$$R_B = \frac{M + P \cdot 2}{5} = \frac{30 + 90 \cdot 2}{5} = 42 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 3 - R_A \cdot 5 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 3}{5} = \frac{-30 + 90 \cdot 3}{5} = 48 \text{ кН}.$$

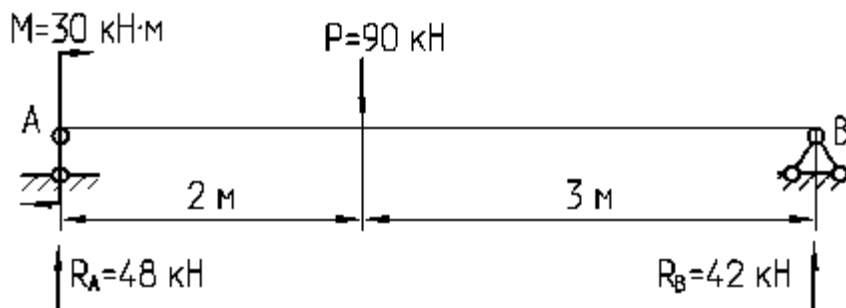


Рисунок 5.19

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$-P + R_A + R_B = 0,$$

$$-90 + 48 + 42 = 0,$$

$$-90 + 90 = 0,$$

$$0 = 0.$$

3 Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 5.20).

$$Q_1 = Q_2 = R_A = 48 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = -R_B = -42 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = M + R_A \cdot 2 = 30 + 48 \cdot 2 = 126 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см. рис. 5.20).

Очевидно, что при указанном нагружении балки  $Q_{\max} = 48 \text{ кН}$ .

4 Рассмотрим сечение, представленное на рисунке 5.18, б.

Рассматриваемое сечение разбиваем на две простые части – прямоугольник 1 и отверстие в виде прямоугольника 2 отрицательной площади (рис. 5.21). Так как в сечении есть отверстие, его удобно считать частью фигуры с отрицательной площадью.

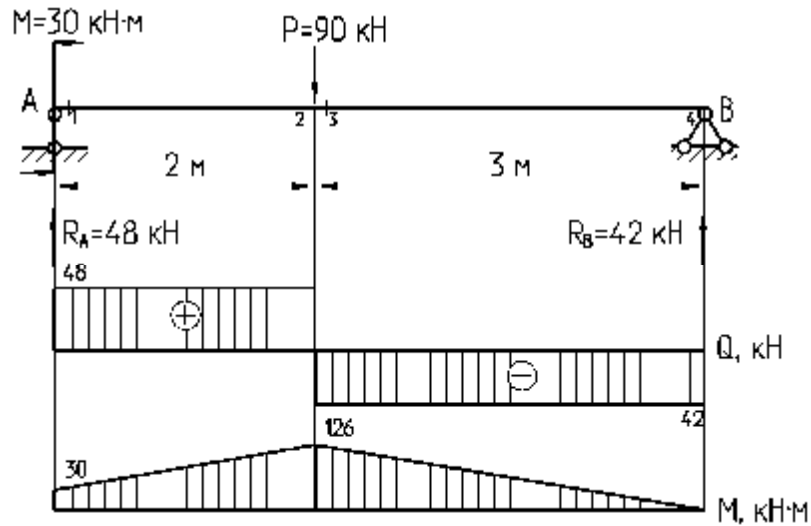


Рисунок 5.20

4.1 Определяем положение центра тяжести данного сечения. Так как сечение симметрично относительно осей X и Y, то центр тяжести C лежит на пересечении осей симметрии.

4.2 Определяем осевой момент инерции сечения относительно главной оси  $X_c$ :

$$J_{x_1} = \frac{12 \cdot 18^3}{12} = 5832 \text{ см}^4, \quad J_{x_2} = \frac{11,4 \cdot 14^3}{12} = 2607 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_c} = J_{x_1} - J_{x_2} = 5832 - 2607 = 3225 \text{ см}^4.$$

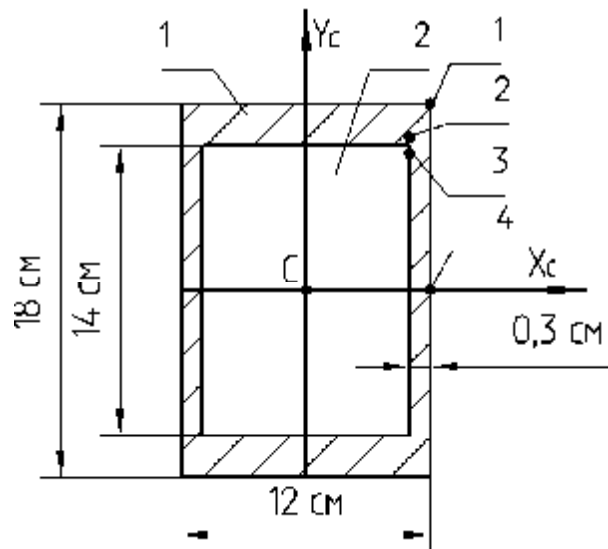


Рисунок 5.21

5 Для построения эпюры касательных напряжений вычислим значения  $\tau$  в нескольких характерных точках (см. рис. 5.21):

- а) в крайних волокнах (в точке 1);
- б) в месте изменения ширины сечения (в точках 2 и 3), причем считаем, что 2 и 3 расположены бесконечно близко к границе изменения ширины сечения, но лежат по разные стороны от этой границы;
- в) в точке нейтральной линии (точка 4).

5.1 Для точки 1 статический момент площади отсеченной части  $S_{x1}^* = 0$ , так как линия, проходящая через точку 1 параллельно нейтральной линии, не отсекает никакой площади. Таким образом, касательное напряжение в точке 1

$$t_1 = 0 \text{ МПа} .$$

5.2 Для точки 2 ширина сечения  $b = 12 \text{ см}$ , статический момент площади отсеченной части равен статическому моменту прямоугольника  $12 \times 2 \text{ см}$  (рис. 5.22).

Тогда

$$S_{x2}^* = 12 \cdot 2 \cdot 8 = 192 \text{ см}^3 .$$

Следовательно, касательное напряжение в точке 2

$$t_2 = \frac{48 \cdot 10^{-3} \cdot 192 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 10^{-2} \cdot 3225 \cdot 10^{-8}} = 2,4 \text{ МПа} .$$

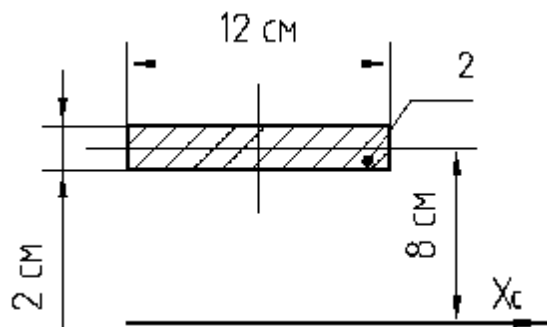


Рисунок 5.22

5.3 Для точки 3 статический момент площади отсеченной части остается практически тем же, т.е.  $S_{x3}^* = S_{x2}^* = 192 \text{ см}^3$ , но ширина сечения  $b = 0,6 \text{ см}$ . Поэтому касательное напряжение в точке 3

$$t_3 = \frac{48 \cdot 10^{-3} \cdot 96 \cdot 10^{-6}}{0,6 \cdot 10^{-2} \cdot 3225 \cdot 10^{-8}} = 47,6 \text{ МПа} .$$

Следовательно, при переходе от точки 2 к точке 3 касательное напряжение резко возрастает.

5.4 Для точки нейтральной линии (точка 4) ширина сечения  $b = 0,6 \text{ см}$ , а статический момент площади отсеченной части следует взять для половины сечения (рис. 5.23).

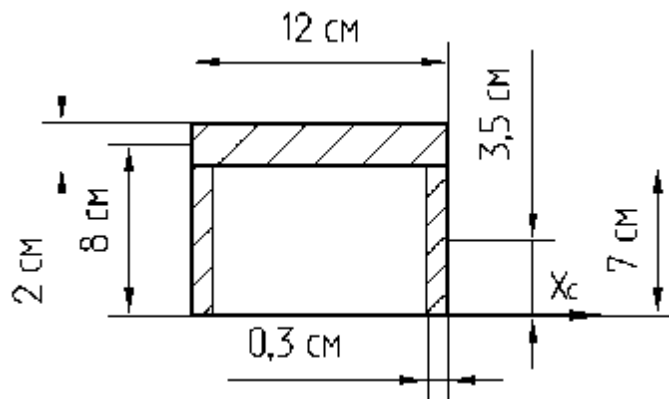


Рисунок 5.23

Тогда

$$S_{x4}^* = 12 \cdot 2 \cdot 8 + 2 \cdot 0,3 \cdot 7 \cdot 3,5 = 206,7 \text{ см}^3.$$

Очевидно, что это наибольшая величина статического момента площади отсеченной части для данного сечения, т.е.  $S_{x \max}^* = S_{x4}^* = 206,7 \text{ см}^3$ .

Следовательно, касательное напряжение в точке 4

$$t_4 = t_{\max} = \frac{48 \cdot 10^{-3} \cdot 206,7 \cdot 10^{-6}}{0,6 \cdot 10^{-2} \cdot 3225 \cdot 10^{-8}} = 51,2 \text{ МПа}.$$

6 На основании этих данных строим эпюру касательных напряжений для верхней половины сечения. Для нижней половины в силу симметрии сечения относительно оси  $X_c$  эпюра будет симметричной. Полученная эпюра приведена на рисунке 5.24.

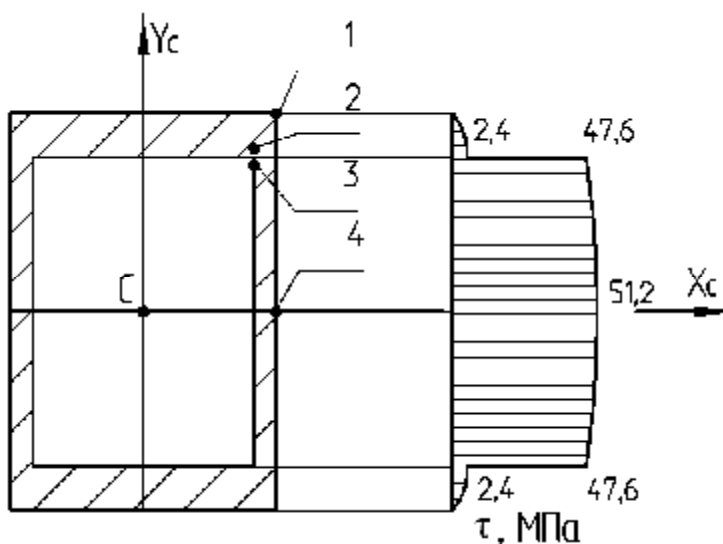


Рисунок 5.24

### Задача 5.6

Для стальной балки (рис. 5.25) определить номер двутаврового сечения, если  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Построить эпюры изменения нормальных и касательных напряжений по высоте поперечного сечения двутавровой балки.

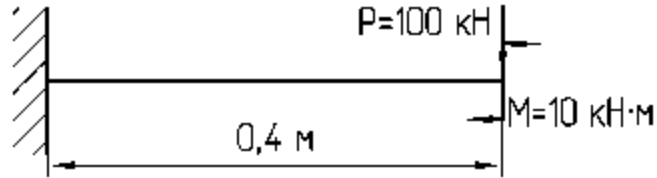


Рисунок 5.25

### Решение

1 Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Построение начинаем с правого (свободного) конца, при этом нет необходимости в определении опорных реакций.

Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 5.26):

$$Q_1 = Q_2 = P = 100 \text{ кН.}$$

$$M_1 = -M = -10 \text{ кН} \cdot \text{м,}$$

$$M_2 = -M - P \cdot 0,4 = -10 - 100 \cdot 0,4 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см. рис. 5.26).

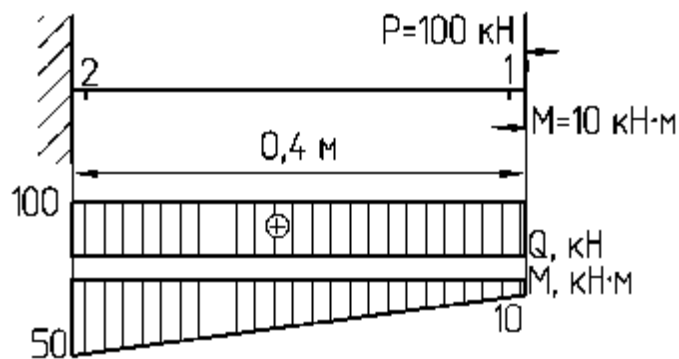


Рисунок 5.26

Очевидно, что при указанном нагружении балки  $Q_{\max} = 100 \text{ кН}$ ,  $M_{\max} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

2 Из условия прочности (5.7) определим требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{50 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 312,5 \text{ см}^3.$$

3 Номер двутавра находим по расчетному значению момента сопротивления  $W_x \geq 312,5 \text{ см}^3$ . По таблице сортамента (ГОСТ 8239-72) выбираем двутавр №24а, для которого  $W_x = 317 \text{ см}^3$ .

Из сортамента выписываем геометрические характеристики двутавра:

$$\begin{aligned} H &= 24 \text{ см}, \quad B = 12,5 \text{ см}, & F &= 37,5 \text{ см}^2, \quad J_x = 3800 \text{ см}^4, \\ d &= 0,56 \text{ см}, \quad t = 0,98 \text{ см}, & W_x &= 317 \text{ см}^3, \quad S_x = 178 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

4 Определяем максимальные нормальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{317 \cdot 10^{-6}} = 157,7 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений приведена на рисунке 5.28.

5 Для построения эпюры касательных напряжений вычислим значения  $\tau$  в нескольких характерных точках (рис. 5.27):

а) в крайних волокнах (в точке 1);

б) в месте сопряжения полки со стенкой (в точках 2 и 3), причем считаем, что 2 и 3 расположены бесконечно близко к границе полки, но лежат по разные стороны от этой границы;

в) в точке нейтральной линии (точка 4).

5.1 Для точки 1 статический момент площади отсеченной части  $S_{x1}^* = 0$ , так как линия, проходящая через точку 1 параллельно нейтральной линии, не отсекает никакой площади. Таким образом, касательное напряжение в точке 1

$$\tau_1 = 0 \text{ МПа}.$$

5.2 Для точки 2 ширина сечения  $b = 12,5 \text{ см}$ , статический момент площади отсеченной части равен статическому моменту полки. С достаточной точностью полку можно считать прямоугольником с размерами  $B \times t$ .

Тогда

$$S_{x2}^* = Bt \left( \frac{H}{2} - \frac{t}{2} \right) = 12,5 \cdot 0,98 \cdot \left( \frac{24}{2} - \frac{0,98}{2} \right) = 141 \text{ см}^3.$$

Следовательно, касательное напряжение в точке 2

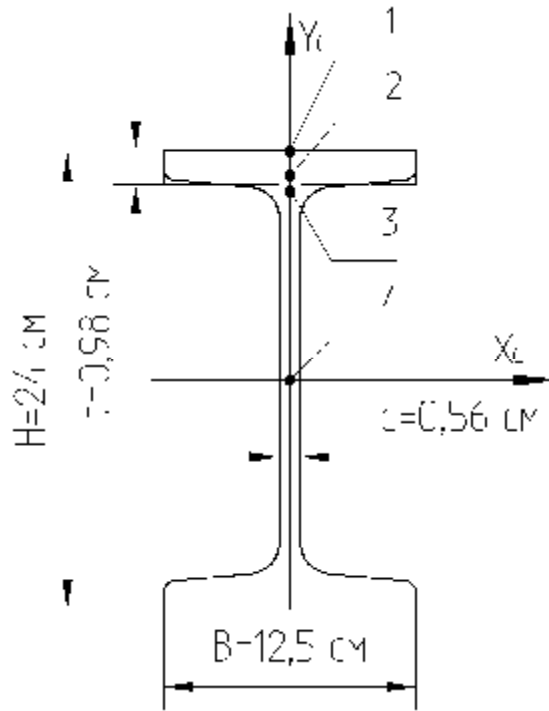


Рисунок 5.27

$$t_2 = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 141 \cdot 10^{-6}}{12,5 \cdot 10^{-2} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = 3,0 \text{ МПа}.$$

5.3 Для точки 3 статический момент площади отсеченной части остается практически тем же, т.е.  $S_{x3}^* = S_{x2}^* = 141 \text{ см}^3$ , но ширина сечения  $b = d = 0,56 \text{ см}$ . Поэтому касательное напряжение в точке 3

$$t_3 = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 141 \cdot 10^{-6}}{0,56 \cdot 10^{-2} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = 66,3 \text{ МПа}.$$

Следовательно, при переходе от точки 2 к точке 3 касательное напряжение резко возрастает.

5.4 Для точки нейтральной линии (точка 4) ширина сечения  $b = d = 0,56 \text{ см}$ , а статический момент площади отсеченной части следует взять для половины сечения  $S_{x \max}^* = S_{x4}^* = S_x = 178 \text{ см}^3$ .

Следовательно, касательное напряжение в точке 4

$$t_4 = t_{\max} = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 178 \cdot 10^{-6}}{0,56 \cdot 10^{-2} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = 83,6 \text{ МПа}.$$

6 На основании этих данных строим эпюру касательных напряжений для верхней половины сечения. Для нижней половины в силу симметрии сечения относительно оси  $X_c$  эпюра будет симметричной. Полученная эпюра приведена на рисунке 5.28.

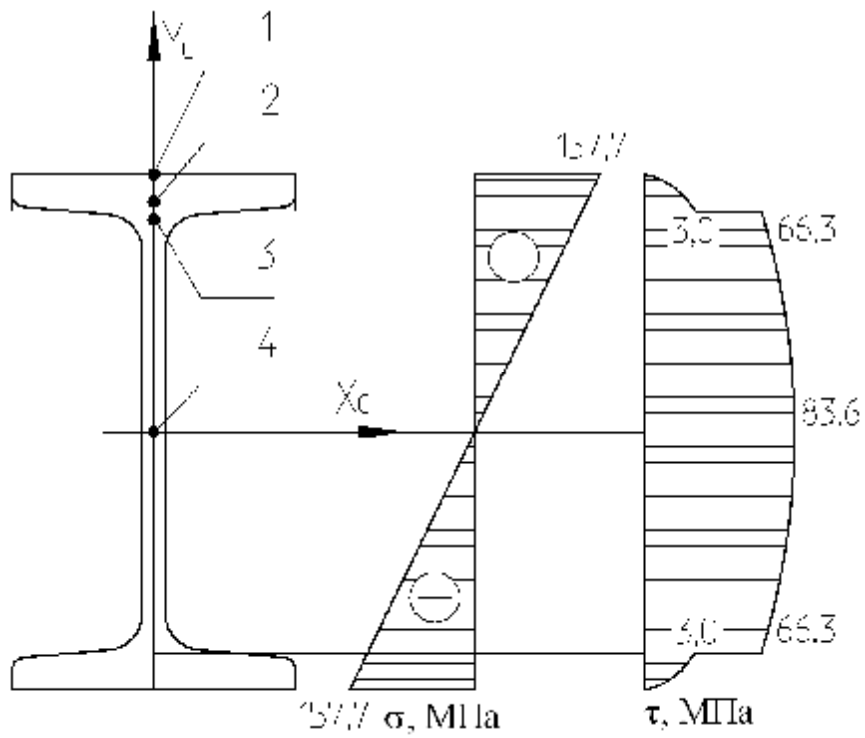


Рисунок 5.28

### Задача 5.7

Вычислить наибольшие нормальные и касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении балки. Сечение балки представлено на рисунке 5.29. При расчетах принять:  $Q_{\max} = 100 \text{ кН}$ ,  $M_{\max} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

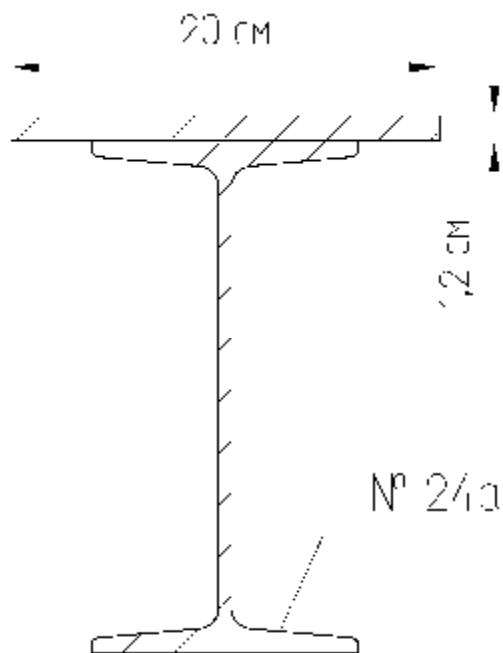


Рисунок 5.29

## Решение

1 Рассматриваемое сечение разбиваем на две простые части – двутавр 1 и полоса 2 (рис. 5.30).

Из сортамента выписываем геометрические характеристики двутавра 1:

$$H_1 = 24 \text{ см}, B_1 = 11,5 \text{ см}, d_1 = 0,56 \text{ см}, F_1 = 34,8 \text{ см}^2, J_{x_1} = 3460 \text{ см}^4, \\ t_1 = 0,95 \text{ см},$$

Определяем геометрические характеристики полосы 2:

$$H_2 = 1,2 \text{ см}, B_2 = 20 \text{ см}, \\ F_2 = H_2 B_2 = 1,2 \cdot 20 = 24 \text{ см}^2, \\ J_{x_2} = \frac{B_2 H_2^3}{12} = \frac{20 \cdot 1,2^3}{12} = 2,88 \text{ см}^4.$$

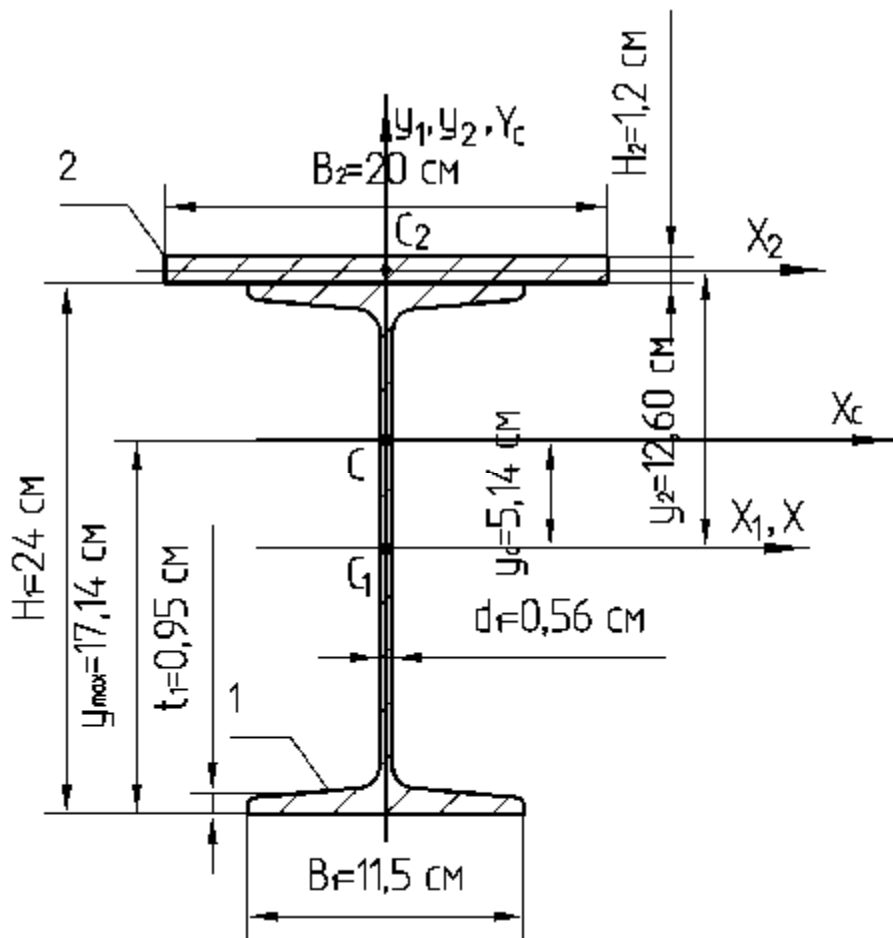


Рисунок 5.30

2 Относительно выбранных начальных осей находим координаты центра тяжести сложного сечения. Так как фигура симметрична относительно оси  $Y$ , то центр тяжести лежит на ней,  $x_c = 0$ .

Находим значение координаты  $y_c$  по формуле

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2}.$$

Для рассматриваемого сечения:

$$y_1 = 0 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{H_1}{2} + \frac{H_2}{2} = \frac{24}{2} + \frac{1,2}{2} = 12,6 \text{ см}.$$

Отсюда получаем:

$$y_c = \frac{12,6 \cdot 24}{34,8 + 24} = 5,14 \text{ см}.$$

По найденной координате  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения (см. рис 5.30).

3 Определяем осевой момент инерции всего сечения относительно главной центральной оси  $X_c$  по формуле

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2.$$

Для рассматриваемого сечения:

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 5,14 = -5,14 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 12,6 - 5,14 = 7,46 \text{ см}.$$

Отсюда получаем:

$$J_{x_c} = 3460 + 5,14^2 \cdot 34,8 + 2,88 + 7,46^2 \cdot 24 = 5718 \text{ см}^4.$$

4 Определяем максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{J_{x_c}} y_{\max}.$$

Для рассматриваемого сечения:

$$y_{\max} = \frac{H_1}{2} + y_c = \frac{24}{2} + 5,14 = 17,14 \text{ см}.$$

Отсюда получаем:

$$s_{\max} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{5718 \cdot 10^{-8}} \cdot 17,14 \cdot 10^{-2} = 149,9 \text{ МПа}.$$

5 Для данного сечения наибольшей величины касательные напряжения достигают на нейтральной линии, причем

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{\max}}{bJ_x},$$

где  $S_{\max}$  – статический момент площади отсеченной части половины сечения.

Для точки С ширина сечения  $b = d_1 = 0,56 \text{ см}$ . Статический момент площади отсеченной части площади (рис. 5.31) определяется следующим образом:

$$S_{\max} = 11,5 \cdot 0,95 \cdot \left( 17,14 - \frac{0,95}{2} \right) + 0,56 \cdot (17,14 - 0,95) \cdot \frac{17,14 - 0,95}{2} = 255,5 \text{ см}^3.$$

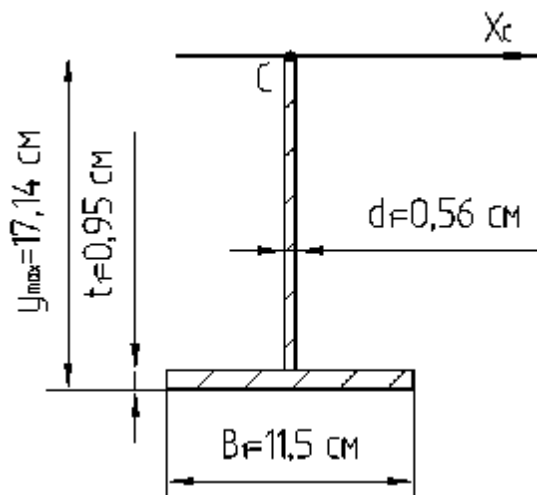


Рисунок 5.31

Следовательно, максимальное касательное напряжение для данного сечения

$$t_{\max} = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 255,5 \cdot 10^{-6}}{0,56 \cdot 10^{-2} \cdot 5718 \cdot 10^{-8}} = 79,8 \text{ МПа}.$$

### Задача 5.8

Построить эпюры нормальных и касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении балки (рис. 5.32, а), рассмотрев сечение, представленное на рисунке 5.32, б.

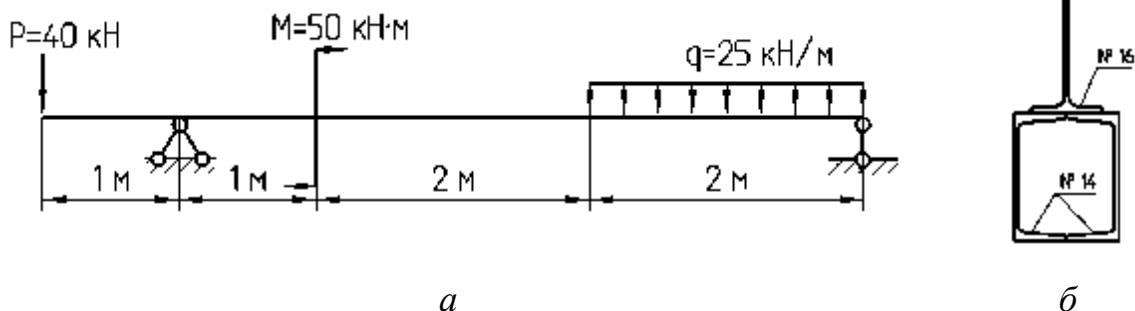


Рисунок 5.32

## Решение

1 Определяем опорные реакции, приравнявая к нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В (рис. 5.33).

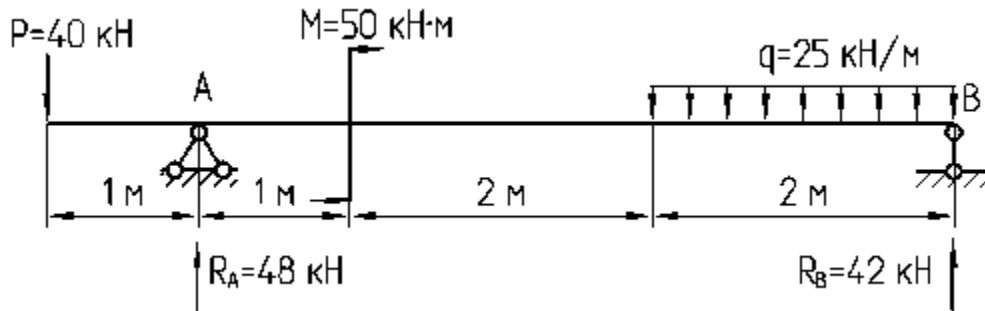


Рисунок 5.33

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M + P \cdot 1 - q \cdot 2 \cdot 4 + R_B \cdot 5 = 0,$$

$$R_B = \frac{M - P \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 4}{5} = \frac{50 - 40 \cdot 1 + 25 \cdot 2 \cdot 4}{5} = 42 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 5 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 1}{5} = \frac{-50 + 40 \cdot 6 + 25 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 48 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$-P - q \cdot 2 + R_A + R_B = 0,$$

$$-40 - 25 \cdot 2 + 48 + 42 = 0,$$

$$-90 + 90 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 5.34):

$$Q_1 = Q_2 = -P = -40 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = -P + R_A = -40 + 48 = 8 \text{ кН},$$

$$Q_8 = -R_B = -42 \text{ кН},$$

$$Q_7 = -R_B + q \cdot 2 = -42 + 25 \cdot 2 = 8 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M_8 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_2 = M_3 = -P \cdot 1 = -40 \cdot 1 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_4 = -P \cdot 2 + R_A \cdot 1 = -40 \cdot 2 + 48 \cdot 1 = -32 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = -P \cdot 2 + R_A \cdot 1 + M = -40 \cdot 2 + 48 \cdot 1 + 50 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = M_7 = R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 42 \cdot 2 - 25 \cdot 2 \cdot 1 = 34 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = R_B \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 = 42 \cdot 4 - 25 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см. рис. 5.34).

Так как эпюра поперечных сил пересекает базовую линию и меняет знак с «+» на «-», то в этой точке находится максимальное значение изгибающего момента. Находим положение этого сечения.

$$z_0 = \frac{42}{25} = 1,68 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = R_B z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 42 \cdot 1,68 - 25 \cdot 1,68 \cdot \frac{1,68}{2} = 35,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Очевидно, что при указанном нагружении опасными сечениями балки являются три сечения:

- сечение, в котором действует наибольший изгибающий момент (сечение 2,  $M_{\max} = M_2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ );

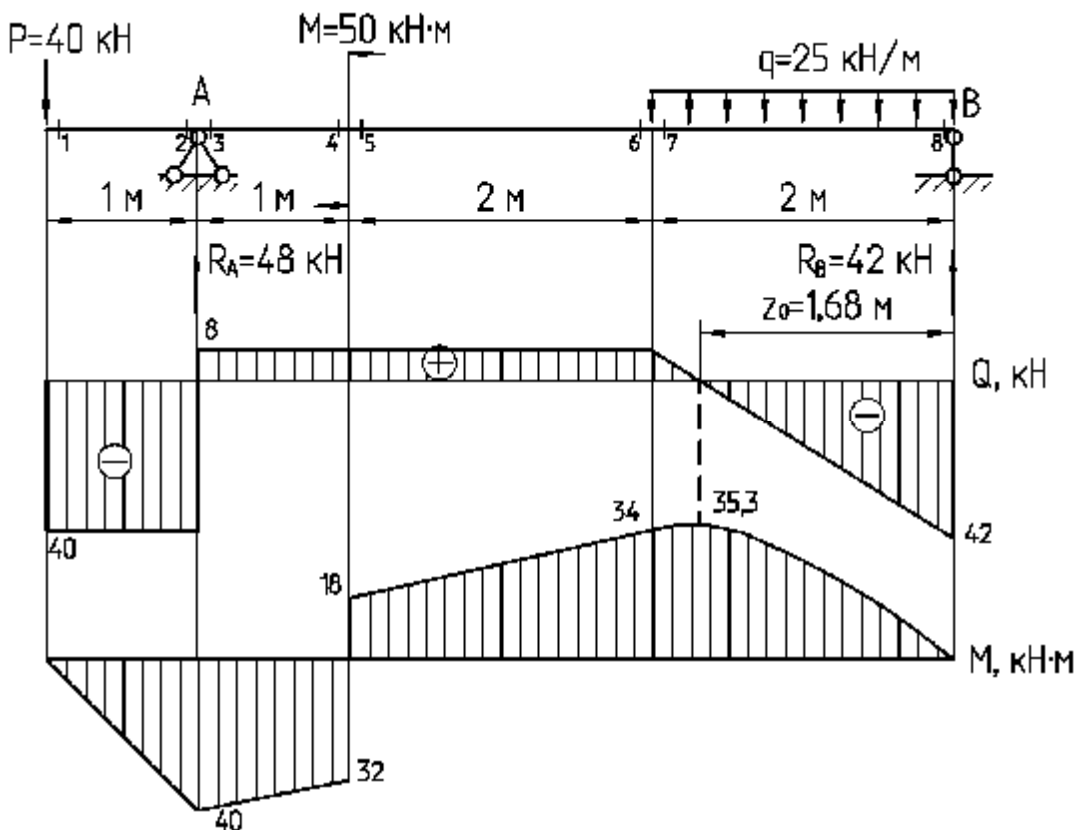


Рисунок 5.34

- сечение, в котором действует наибольшая поперечная сила (сечение 8,  $Q_{\max} = Q_8 = 42 \text{ кН}$ );
- сечение, в котором большие и поперечная сила, и изгибающий момент, т.е. в сечении 2 ( $Q_2 = 40 \text{ кН}$ ,  $M_2 = M_{\max} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ).

3 Рассмотрим сечение, представленное на рисунке 5.32, б.

Рассматриваемое сечение разбиваем на три простые части – швеллеры 1, 2 и двутавр 3 (рис. 5.35).

Из сортамента выписываем геометрические характеристики швеллеров №14:

$$\begin{aligned} H_1 = H_2 = 14 \text{ см}, \quad B_1 = B_2 = 5,8 \text{ см}, \\ d_1 = d_2 = 0,49 \text{ см}, \quad t_1 = t_2 = 0,81 \text{ см}, \quad F_1 = F_2 = 15,6 \text{ см}^2, \quad J_{x_1} = J_{x_2} = 491 \text{ см}^4. \\ z_{01} = z_{02} = 1,67 \text{ см}, \end{aligned}$$

Из сортамента выписываем геометрические характеристики двутавра №16:

$$\begin{aligned} H_3 = 16 \text{ см}, \quad B_3 = 8,1 \text{ см}, \quad d_3 = 0,50 \text{ см}, \quad F_3 = 20,2 \text{ см}^2, \quad J_{x_3} = 873 \text{ см}^4. \\ t_3 = 0,78 \text{ см}, \end{aligned}$$

4 Относительно выбранных начальных осей находим координаты центра тяжести сложного сечения. Так как фигура симметрична относительно оси Y, то центр тяжести лежит на ней,  $x_c = 0$ .

Находим значение координаты  $y_c$  по формуле

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

Для рассматриваемого сечения:

$$y_1 = y_2 = 0 \text{ см}, \quad y_3 = \frac{H_1}{2} + \frac{H_3}{2} = \frac{14}{2} + \frac{16}{2} = 15,00 \text{ см}.$$

Отсюда получаем:

$$y_c = \frac{15,00 \cdot 20,2}{2 \cdot 15,6 + 20,2} = 5,89 \text{ см}.$$

По найденной координате  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения (см. рис. 5.35).

5 Определяем осевой момент инерции всего сечения относительно главной центральной оси  $X_c$  по формуле

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2 + J_{x_3} + a_3^2 F_3.$$

Для рассматриваемого сечения:

$$a_1 = a_2 = y_1 - y_c = 0 - 5,89 = -5,89 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 15,00 - 5,89 = 9,11 \text{ см}.$$

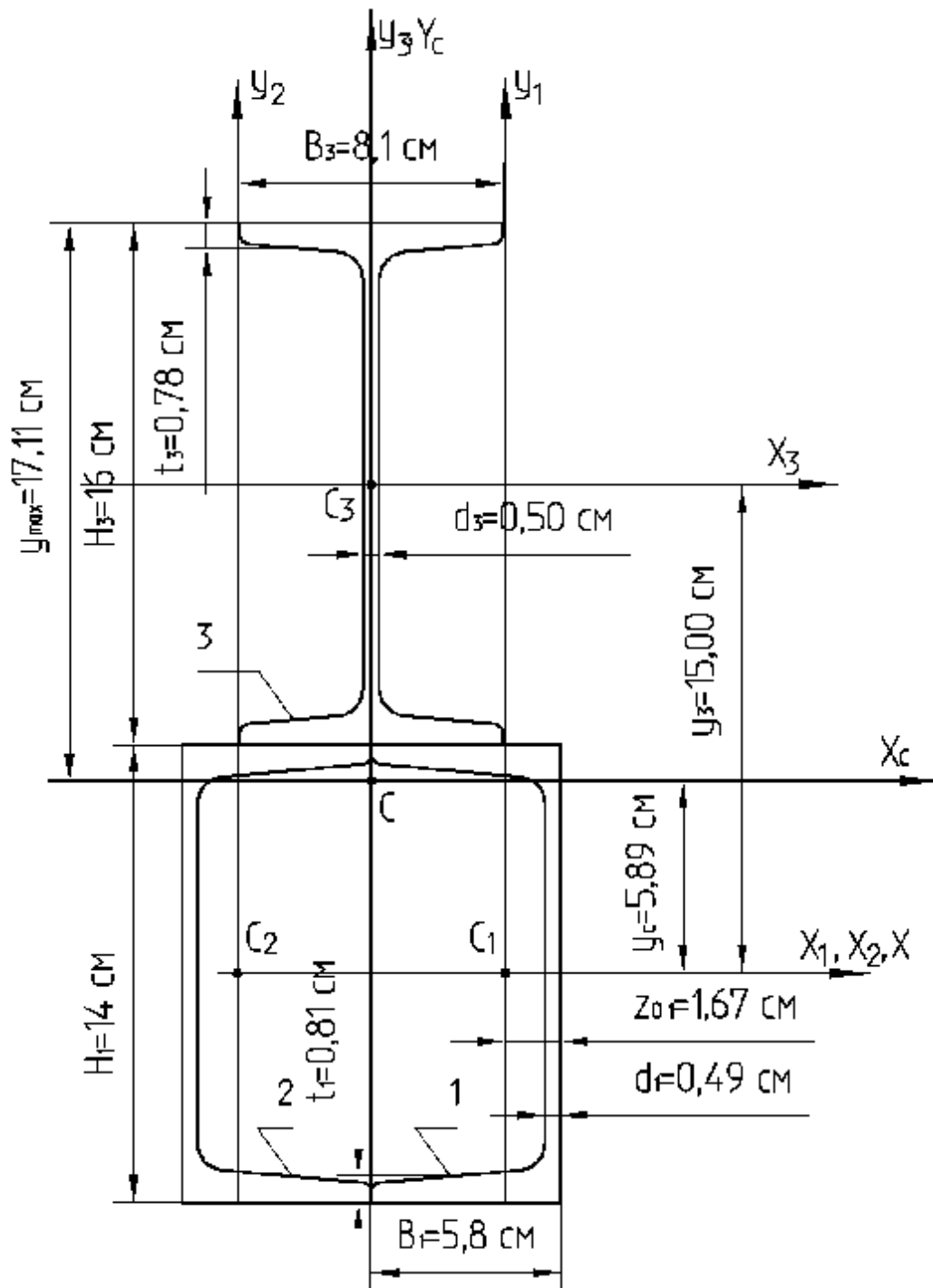


Рисунок 5.35

Отсюда получаем:

$$J_{x_c} = 2 \cdot (491 + 5,89^2 \cdot 15,6) + 873 + 9,11^2 \cdot 20,2 = 4614 \text{ см}^4.$$

6 Рассмотрим сечение, в котором одновременно большие и поперечная сила, и изгибающий момент, т.е. сечение 2 ( $Q_2 = 40 \text{ кН}$ ,  $M_2 = M_{\max} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ).

Определяем максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J_{x_c}} y_{\max}.$$

Для рассматриваемого сечения

$$y_{\max} = \frac{H_1}{2} + H_3 - y_c = \frac{14}{2} + 16 - 5,89 = 17,11 \text{ см}.$$

Отсюда получаем:

$$s_{\max} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{4614 \cdot 10^{-8}} \cdot 17,11 \cdot 10^{-2} = 148,3 \text{ МПа}.$$

7 Для построения эпюры нормальных напряжений определим напряжение в точке 13 (рис. 5.36) по формуле

$$\sigma_{13} = \frac{M}{J_x} y_{13}.$$

Для рассматриваемого сечения

$$y_{13} = \frac{H_1}{2} + y_c = \frac{14}{2} + 5,89 = 12,89 \text{ см}.$$

Отсюда получаем:

$$s_{13} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{4614 \cdot 10^{-8}} \cdot 12,89 \cdot 10^{-2} = 111,7 \text{ МПа}.$$

8 Для построения эпюры касательных напряжений вычислим значения  $\tau$  в нескольких характерных точках (см. рис. 5.36):

а) в крайних волокнах (в точках 1 и 13);

б) в месте изменения ширины сечения (в точках 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7, 8 и 9, 11 и 12), причем считаем, что граничные сечения расположены бесконечно близко к границе изменения ширины сечения, но лежат по разные стороны от этой границы;

в) в точке нейтральной линии (точка 10).

8.1 Для точек 1 и 13 статический момент площади отсеченной части  $S_{x_1}^* = 0$ , так как линии, проходящие через точки 1 и 13 параллельно нейтральной линии, не отсекают никакой площади. Таким образом, касательные напряжения в точках 1 и 13

$$t_1 = t_{13} = 0 \text{ МПа}.$$

8.2 Для точки 2 ширина сечения  $b = B_3 = 8,1 \text{ см}$ , статический момент площади отсеченной части равен статическому моменту прямоугольника  $8,1 \times 0,78 \text{ см}$  (рис. 5.37).

Тогда

$$S_{x_2}^* = 8,1 \cdot 0,78 \cdot 16,72 = 106 \text{ см}^3.$$

Следовательно, касательное напряжение в точке 2

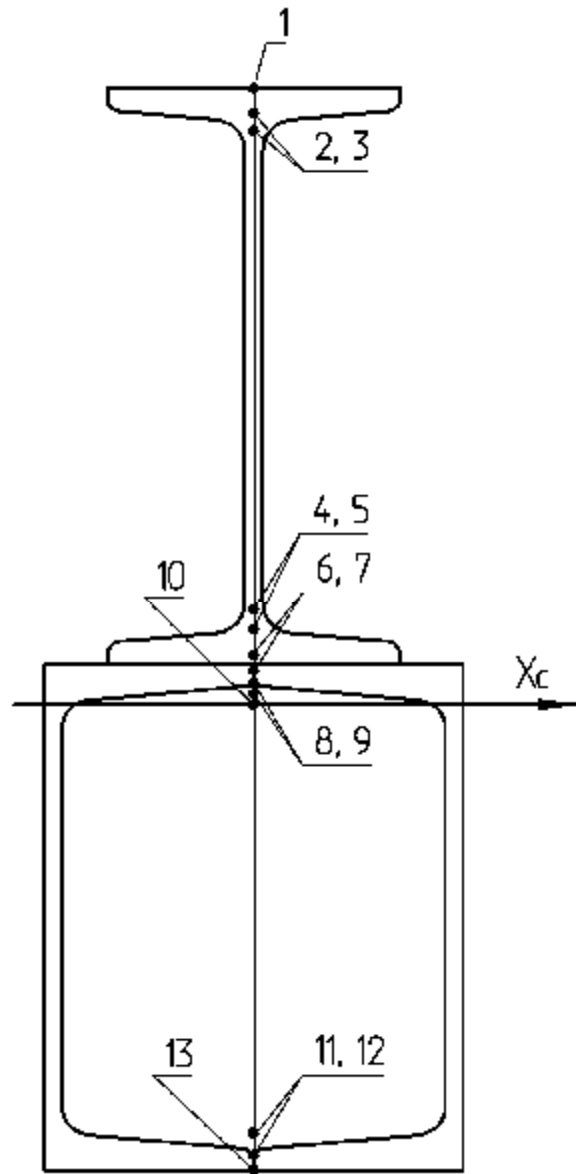


Рисунок 5.36

$$t_2 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 106 \cdot 10^{-6}}{8,1 \cdot 10^{-2} \cdot 4614 \cdot 10^{-8}} = 1,2 \text{ МПа} .$$

8.3 Для точки 3 статический момент площади отсеченной части остается практически тем же, т.е.  $S_{x_3}^* = S_{x_2}^* = 106 \text{ см}^3$ , но ширина сечения  $b = d_3 = 0,50 \text{ см}$ . Поэтому касательное напряжение в точке 3

$$t_3 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 106 \cdot 10^{-6}}{0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 4614 \cdot 10^{-8}} = 18,4 \text{ МПа} .$$

Следовательно, при переходе от точки 2 к точке 3 касательное напряжение резко возрастает.

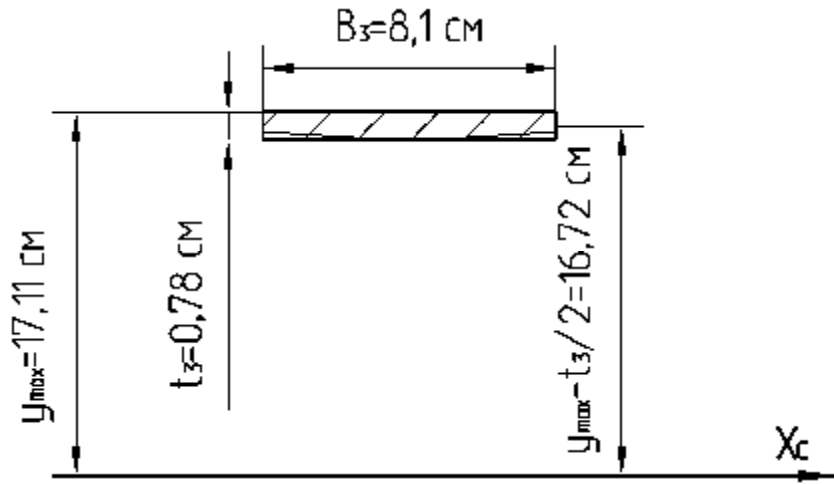


Рисунок 5.37

8.4 Для точки 4 ширина сечения  $b = d_3 = 0,50 \text{ см}$ , статический момент площади отсеченной части равен сумме статических моментов прямоугольников  $8,1 \times 0,78 \text{ см}$  и  $0,50 \times 14,44 \text{ см}$  (рис. 5.38).

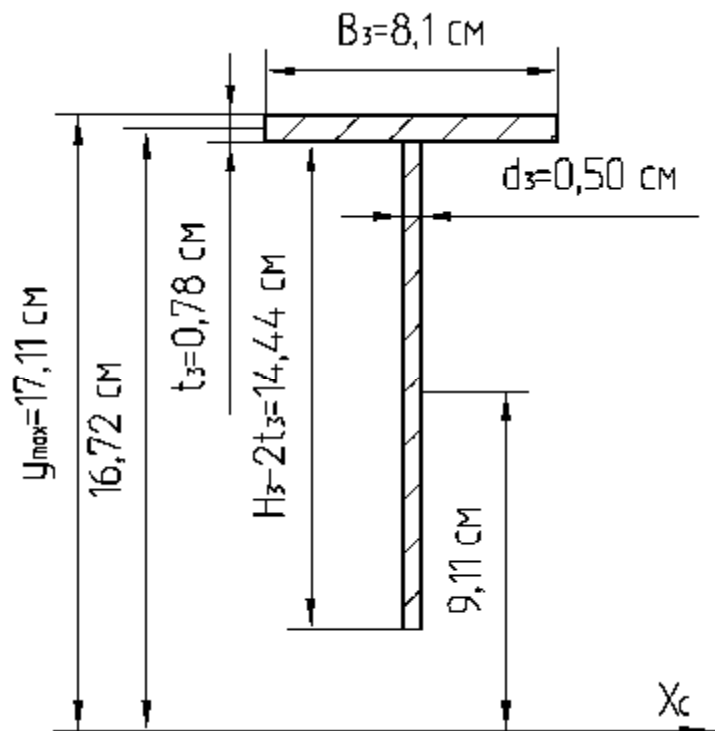


Рисунок 5.38

Тогда

$$S_{x4}^* = 8,1 \cdot 0,78 \cdot 16,72 + 0,50 \cdot 14,44 \cdot 9,11 = 171 \text{ см}^3.$$

Следовательно, касательное напряжение в точке 4

$$\tau_4 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 171 \cdot 10^{-6}}{0,50 \cdot 10^{-2} \cdot 4614 \cdot 10^{-8}} = 29,6 \text{ МПа} .$$

8.5 Для точки 5 статический момент площади отсеченной части остается практически тем же, т.е.  $S_{x4}^* = S_{x5}^* = 171 \text{ см}^3$ , но ширина сечения  $b = B_3 = 8,1 \text{ см}$ . Поэтому касательное напряжение в точке 5

$$\tau_5 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 171 \cdot 10^{-6}}{8,1 \cdot 10^{-2} \cdot 4614 \cdot 10^{-8}} = 1,8 \text{ МПа} .$$

Следовательно, при переходе от точки 4 к точке 5 касательное напряжение резко убывает.

8.6 Для точки 6 ширина сечения  $b = B_3 = 8,1 \text{ см}$ , статический момент площади отсеченной части равен сумме статических моментов трех прямоугольников: двух прямоугольников  $8,1 \times 0,78 \text{ см}$  и одного прямоугольника  $0,50 \times 14,44 \text{ см}$  (рис. 5.39).

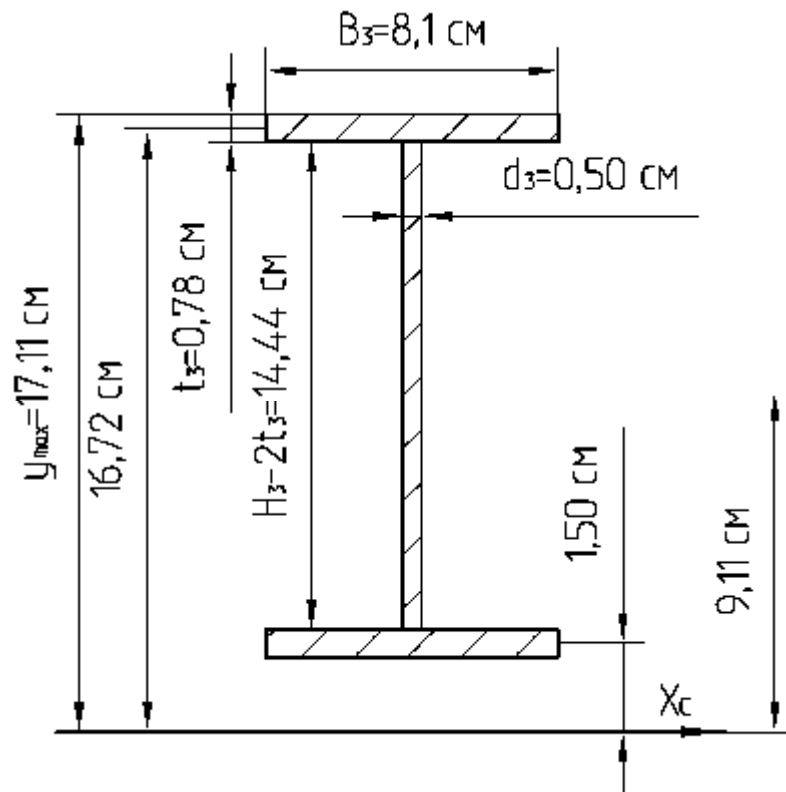


Рисунок 5.39

Тогда

$$S_{x6}^* = 8,1 \cdot 0,78 \cdot 16,72 + 0,50 \cdot 14,44 \cdot 9,11 + 8,1 \cdot 0,78 \cdot 1,50 = 180 \text{ см}^3 .$$

Следовательно, касательное напряжение в точке 6

$$\tau_6 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 180 \cdot 10^{-6}}{8,1 \cdot 10^{-2} \cdot 4614 \cdot 10^{-8}} = 2,0 \text{ МПа} .$$

8.7 Для точки 7 статический момент площади отсеченной части остается практически тем же, т.е.  $S_{x6}^* = S_{x7}^* = 180 \text{ см}^3$ , но ширина сечения  $b = 2B_1 = 2 \cdot 5,8 = 11,6 \text{ см}$ .

Поэтому касательное напряжение в точке 7

$$\tau_7 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 180 \cdot 10^{-6}}{11,6 \cdot 10^{-2} \cdot 4614 \cdot 10^{-8}} = 1,4 \text{ МПа}.$$

Следовательно, при переходе от точки 6 к точке 7 касательное напряжение убывает.

8.8 Для точки 8 ширина сечения  $b = 2B_1 = 2 \cdot 5,8 = 11,6 \text{ см}$ , статический момент площади отсеченной части равен сумме статических моментов четырех прямоугольников: двух прямоугольников  $8,1 \times 0,78 \text{ см}$ , одного прямоугольника  $0,50 \times 14,44 \text{ см}$  и одного прямоугольника  $11,6 \times 0,81 \text{ см}$  (рис. 5.40).

Тогда

$$S_{x8}^* = 8,1 \cdot 0,78 \cdot 16,72 + 0,50 \cdot 14,44 \cdot 9,11 + 8,1 \cdot 0,78 \cdot 1,50 + 11,6 \cdot 0,81 \cdot 1,01 = 189 \text{ см}^3.$$

Следовательно, касательное напряжение в точке 6

$$\tau_8 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 189 \cdot 10^{-6}}{11,6 \cdot 10^{-2} \cdot 4614 \cdot 10^{-8}} = 1,4 \text{ МПа}.$$

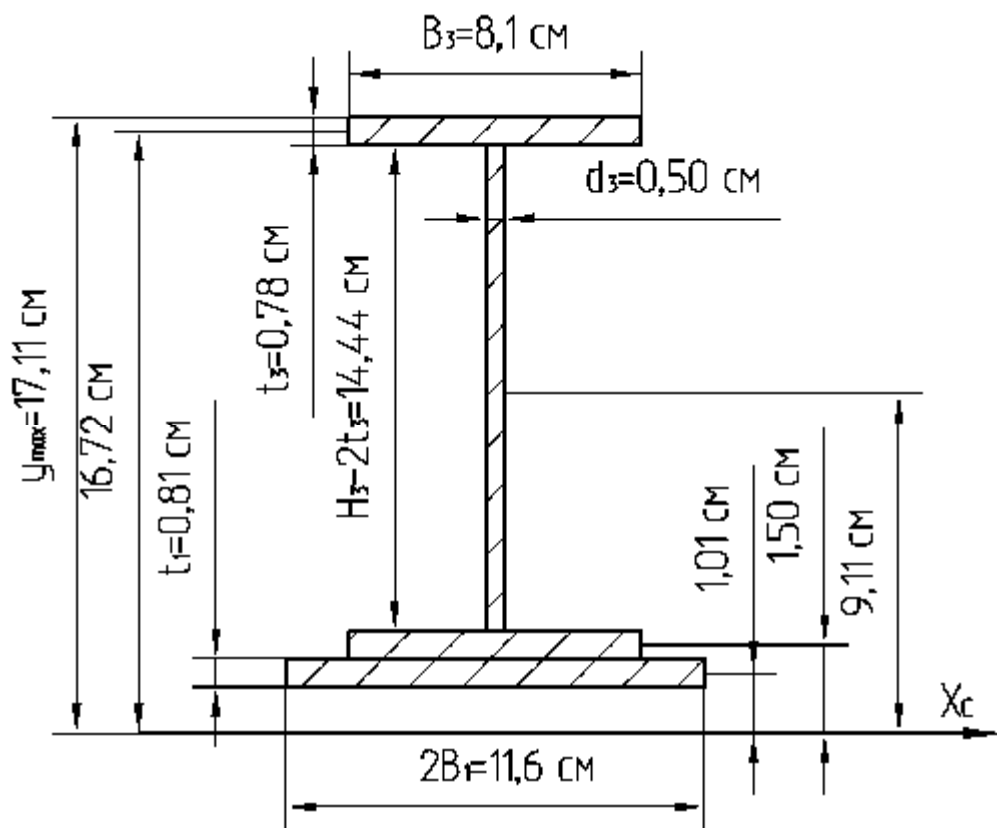


Рисунок 5.40

8.9 Для точки 9 статический момент площади отсеченной части остается практически тем же, т.е.  $S_{x8}^* = S_{x9}^* = 189 \text{ см}^3$ , но ширина сечения  $b = 2d_1 = 2 \cdot 0,49 = 0,98 \text{ см}$ .

Поэтому касательное напряжение в точке 7

$$\tau_9 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 189 \cdot 10^{-6}}{0,98 \cdot 10^{-2} \cdot 4614 \cdot 10^{-8}} = 16,8 \text{ МПа}.$$

Следовательно, при переходе от точки 8 к точке 9 касательное напряжение резко возрастает.

8.10 Для точки 12 ширина сечения  $b = 2B_1 = 2 \cdot 5,8 = 11,6 \text{ см}$ , статический момент площади отсеченной части равен статическому моменту прямоугольника  $11,6 \times 0,81 \text{ см}$  (рис. 5.41).

Тогда

$$S_{x12}^* = 11,6 \cdot 0,81 \cdot 12,49 = 117 \text{ см}^3.$$

Следовательно, касательное напряжение в точке 12

$$\tau_{12} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 117 \cdot 10^{-6}}{11,6 \cdot 10^{-2} \cdot 4614 \cdot 10^{-8}} = 0,8 \text{ МПа}.$$

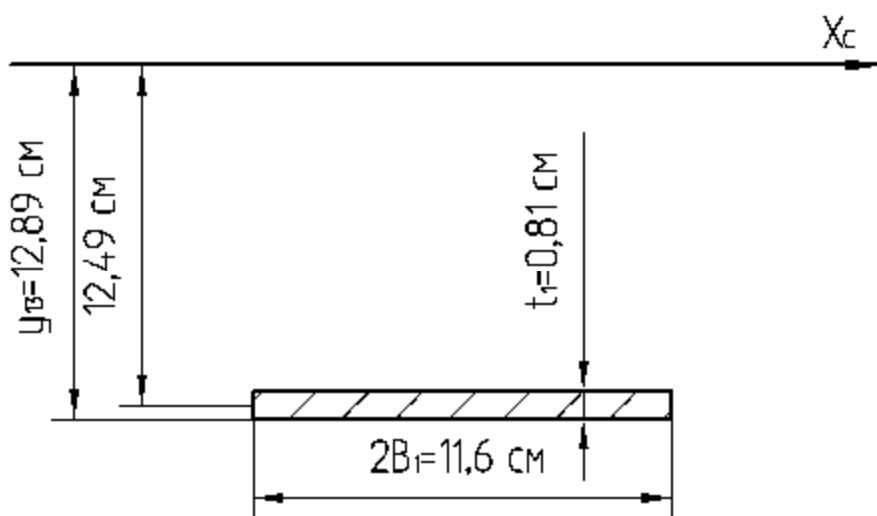


Рисунок 5.41

8.11 Для точки 11 статический момент площади отсеченной части остается практически тем же, т.е.  $S_{x10}^* = S_{x11}^* = 117 \text{ см}^3$ , но ширина сечения  $b = 2d_1 = 2 \cdot 0,49 = 0,98 \text{ см}$ .

Поэтому касательное напряжение в точке 11

$$\tau_{11} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 117 \cdot 10^{-6}}{0,98 \cdot 10^{-2} \cdot 4614 \cdot 10^{-8}} = 10,4 \text{ МПа}.$$

Следовательно, при переходе от точки 12 к точке 11 касательное напряжение резко возрастает.

8.12 Для точки нейтральной линии (точка 10) ширина сечения  $b = 2d_1 = 2 \cdot 0,49 = 0,98 \text{ см}$ , а статический момент площади отсеченной части следует взять для половины сечения (рис. 5.42).

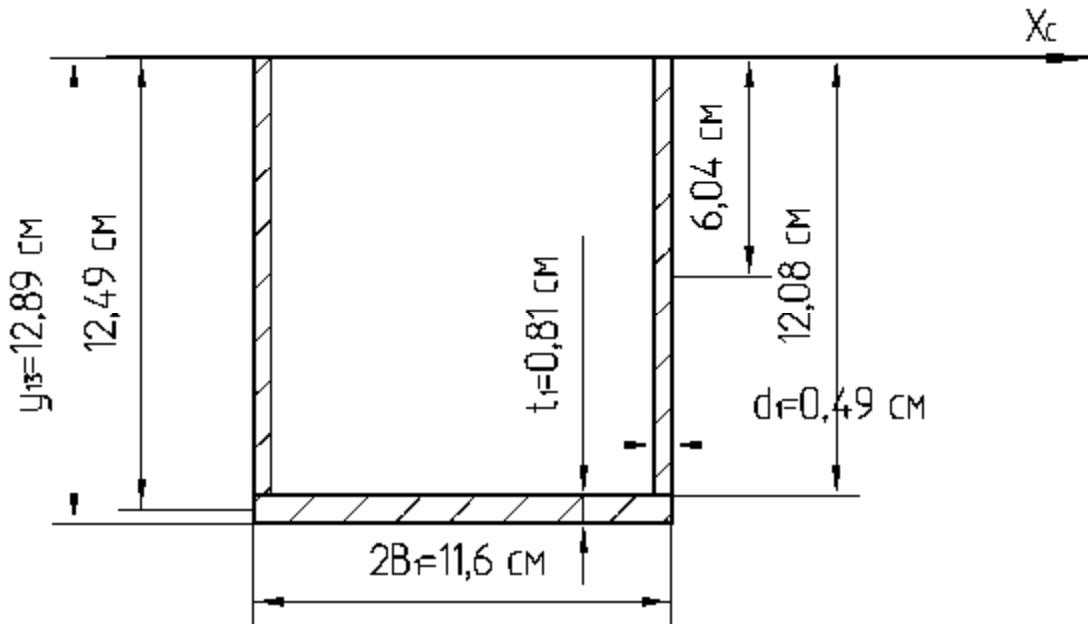


Рисунок 5.42

Тогда

$$S_{x10}^* = 11,6 \cdot 0,81 \cdot 12,49 + 2 \cdot 0,49 \cdot 12,08 \cdot 6,04 = 189 \text{ см}^3.$$

Следовательно, касательное напряжение в точке 10

$$\tau_{10} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 189 \cdot 10^{-6}}{0,98 \cdot 10^{-2} \cdot 4614 \cdot 10^{-8}} = 16,8 \text{ МПа}.$$

9 На основании полученных данных строим эпюры нормальных и касательных напряжений для заданного сечения. Полученные эпюры приведены на рисунке 5.43.

### 5.3 Полная проверка прочности при изгибе

Полученные формулы для нормальных и касательных напряжений при плоском изгибе дают возможность записать условия прочности, необходимые для проверки прочности и подбора сечений деталей, работающих на изгиб.

Условие прочности должно быть записано для так называемой опасной точки балки, то есть той точки, где материал находится в наиболее напряженном состоянии.

Опасной точкой будет одна из следующих трех точек:

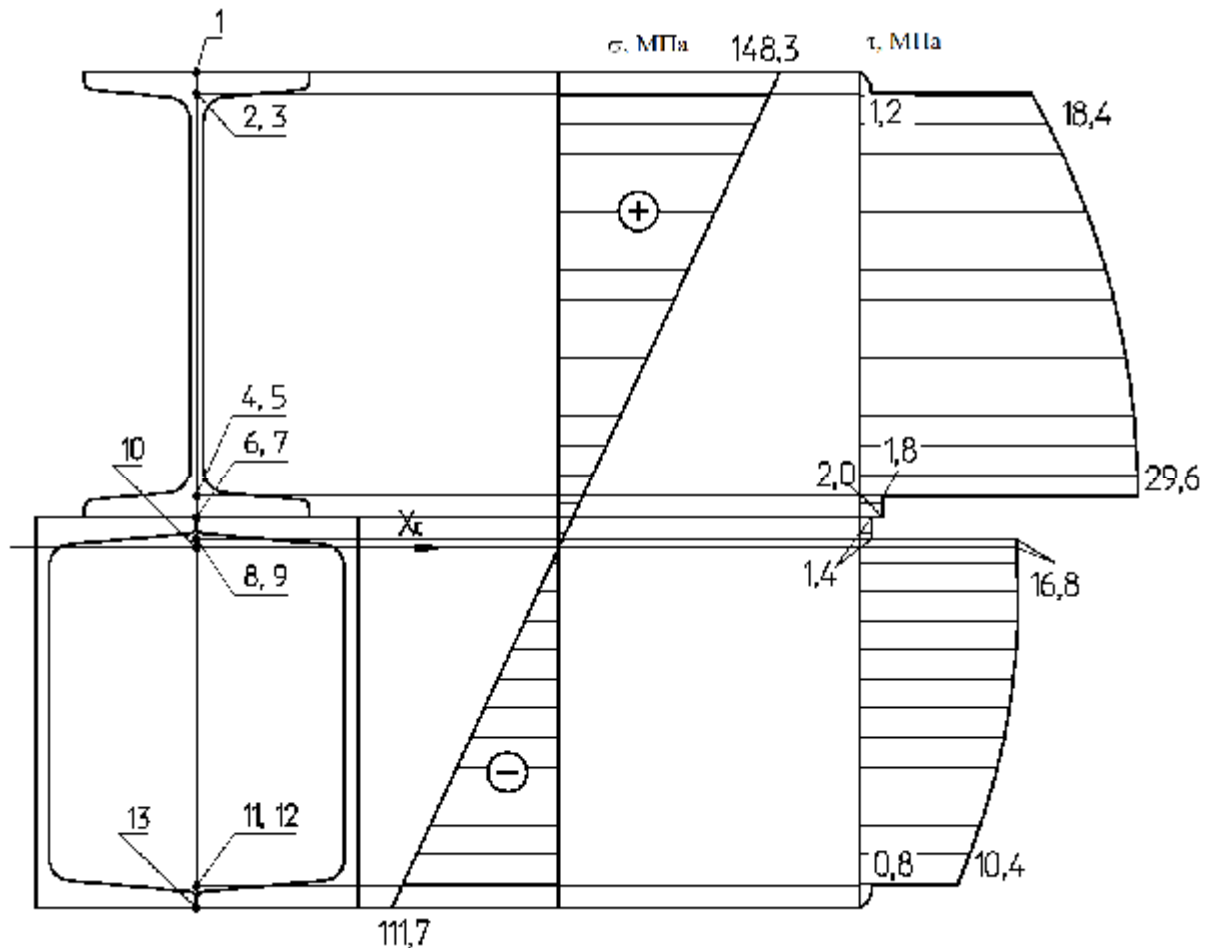


Рисунок 5.43

а) точка, где нормальное  $\sigma$  напряжение достигает наибольшей величины;

б) точка, где касательное  $\tau$  напряжение достигает наибольшей величины;

в) точка, где  $\sigma$  и  $\tau$ , хотя и не принимают наибольших значений, но в своей комбинации создают наиболее невыгодное сочетание, т.е. создают наибольшее эквивалентное напряжение по принятой для расчета теории прочности. При этом такая точка может быть не одна.

Первая опасная точка будет расположена в крайних волокнах того сечения, где изгибающий момент имеет наибольшее значение. Условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (5.11)$$

Вторая опасная точка находится на нейтральной линии того сечения, где поперечная сила имеет наибольшее значение (любая точка на участке нейтрального слоя, где  $Q = Q_{\max}$ ). В такой точке будет чистый сдвиг, и условие прочности запишется в виде

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\max}}{bJ_x} \leq [\tau]. \quad (5.12)$$

Положение третьей опасной точки не столь определенное. Но где бы она ни была выбрана, в ней будет плоское напряженное состояние.

Эквивалентное напряжение в такой точке может быть рассчитано по различным теориям прочности.

Для расчета балок из пластичных материалов рекомендуется пользоваться условиями прочности, полученными по III и IV теориям:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \\ \sigma_{\text{экв}}^{\text{VI}} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

В подавляющем большинстве случаев опасной точкой является крайняя точка того опасного сечения, где  $M = M_{\max}$ .

### Задача 5.9

Для стальной балки (рис.5.44) подобрать размеры двутаврового, круглого и прямоугольного ( $h = 2b$ ) сечений, выбрать оптимальный вариант и произвести полную проверку на прочность по четвертой теории прочности. Допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

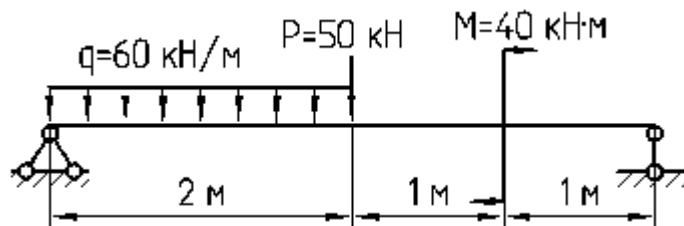


Рисунок 5.44

### Решение

1 Определяем опорные реакции, приравнявая к нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В (рис. 5.45).

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 + R_B \cdot 4 = 0,$$

$$R_B = \frac{M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1}{4} = \frac{40 + 50 \cdot 2 + 60 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 65 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - R_A \cdot 4 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3}{4} = \frac{-40 + 50 \cdot 2 + 60 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 105 \text{ кН.}$$

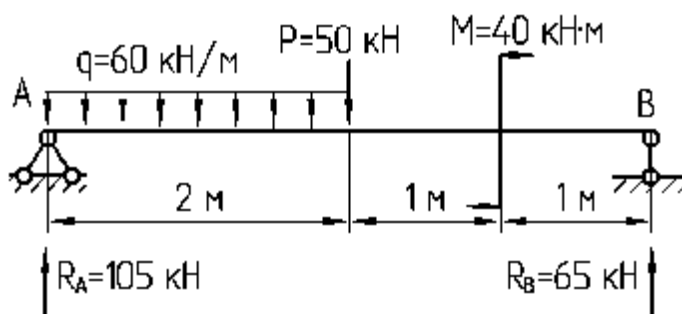


Рисунок 5.45

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$-P - q \cdot 2 + R_A + R_B = 0,$$

$$-50 - 60 \cdot 2 + 105 + 65 = 0,$$

$$-170 + 170 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 5.46):

$$Q_1 = R_A = 105 \text{ кН},$$

$$Q_2 = R_A - q \cdot 2 = 105 - 60 \cdot 2 = -15 \text{ кН},$$

$$Q_3 = R_A - q \cdot 2 - P = 105 - 60 \cdot 2 - 50 = -65 \text{ кН},$$

$$Q_6 = Q_5 = Q_4 = Q_3 = -R_B = -65 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M_6 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 105 \cdot 2 - 60 \cdot 2 \cdot 1 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = R_B \cdot 1 = 65 \cdot 1 = 65 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = R_B \cdot 1 - M = 65 \cdot 1 - 40 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = M_2 = R_B \cdot 2 - M = 65 \cdot 2 - 40 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см. рис. 5.46).

Так как эпюра поперечных сил пересекает базовую линию и меняет знак с «+» на «-», то в этой точке находится максимальное значение изгибающего момента. Находим положение этого сечения.

$$z_0 = \frac{105}{60} = 1,75 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = R_a z_0 - qz_0 \frac{z_0}{2} = 105 \cdot 1,75 - 60 \cdot 1,75 \cdot \frac{1,75}{2} = 91,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

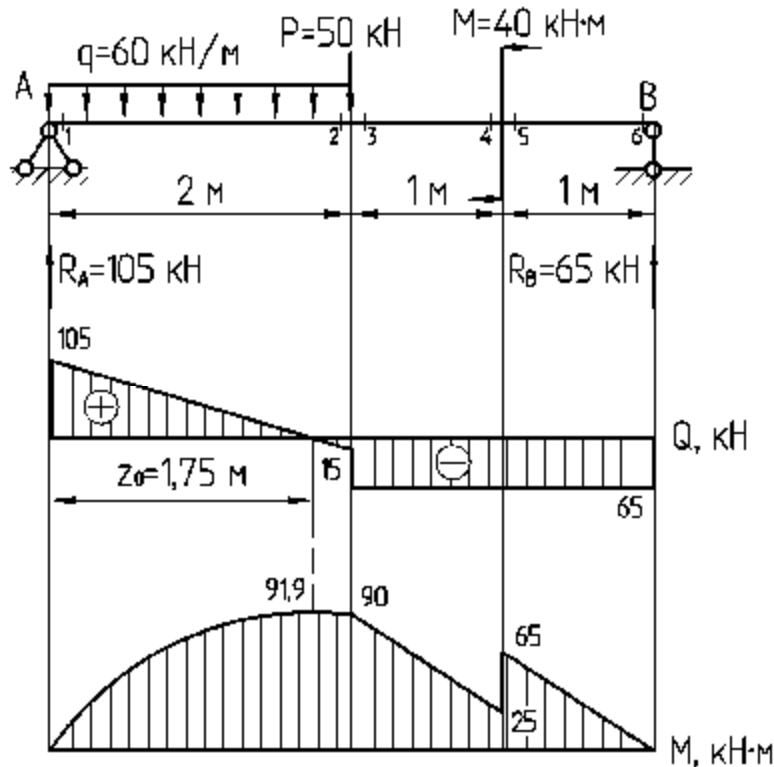


Рисунок 5.46

Для указанного вида нагружения  $Q_{\max} = 105 \text{ кН}$ ,  $M_{\max} = 91,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

3 Подбираем сечение. Из условия прочности (5.7) определим требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{91,9 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 574,4 \text{ см}^3.$$

Для круглого поперечного сечения момент сопротивления равен:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3,$$

где  $d$  – диаметр сечения.

Отсюда получаем:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{574,4}{0,1}} = 17,9 \text{ см}.$$

Принимаем диаметр, кратный 5 мм, т.е  $d = 180 \text{ мм} = 18,0 \text{ см}$ .

Площадь круга

$$F = \frac{pd^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 18,0^2}{4} = 254,3 \text{ см}^2.$$

Для прямоугольного поперечного сечения момент сопротивления равен:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

Так как  $h = 2b$ , то

$$W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}.$$

Отсюда получаем:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 574,4}{2}} = 9,5 \text{ см}.$$

Принимаем:  $b = 9,5 \text{ см}$ ,  $h = 19,0 \text{ см}$ .

Площадь прямоугольника

$$F = bh = 9,5 \cdot 19,0 = 180,5 \text{ см}^2.$$

Номер двутавра находим по расчетному значению момента сопротивления  $W_x \geq 574,4 \text{ см}^3$ . По таблице сортамента (ГОСТ 8239-72) выбираем двутавр № 33, для которого  $W_x = 597 \text{ см}^3$ . Его площадь  $F = 53,8 \text{ см}^2$ .

Сечение считается рациональным, если оно обеспечивает прочность балки при минимальном ее весе, т.е. при минимальной площади поперечного сечения. Так как площадь поперечного сечения меньше у двутаврового сечения, то принимаем двутавровое сечение.

Для двутавра № 33 выписываем из сортамента необходимые геометрические характеристики:

$$H = 33 \text{ см}, \quad B = 14 \text{ см},$$

$$J_x = 9840 \text{ см}^4, \quad S_x^* = 339 \text{ см}^3.$$

$$d = 0,7 \text{ см}, \quad t = 1,12 \text{ см},$$

4 Проверяем прочность по нормальным напряжениям.

Опасным будет сечение, в котором действует наибольший изгибающий момент (сечение  $z$ ,  $M_{\max} = M_{z0} = 91,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ). В самом сечении наибольшие напряжения будут в наиболее отдаленных от нейтральной линии точках, т.е. в точках 1 и 7 (рис. 5.47).

Условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\max} = \frac{91,9 \cdot 10^{-3}}{597 \cdot 10^{-6}} = 153,9 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по нормальным напряжениям выполняется.

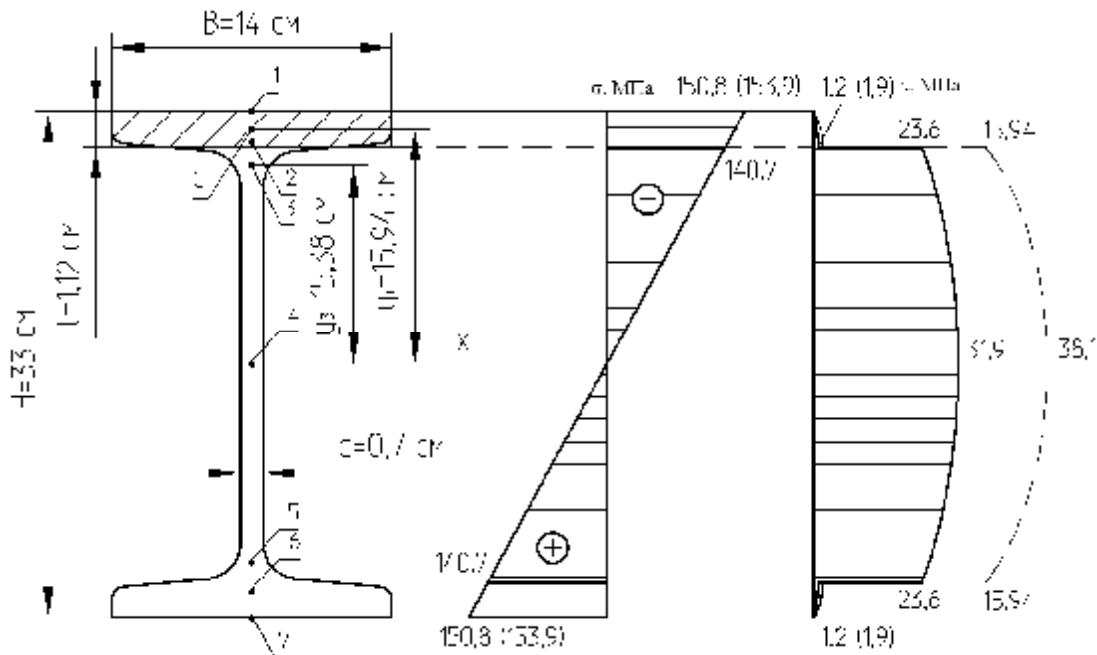


Рисунок 5.47

5 Проверяем прочность по касательным напряжениям.

Опасным будет сечение, в котором действует наибольшая поперечная сила (сечение 1,  $Q_{\max} = Q_1 = 105 \text{ кН}$ ). В самом сечении наибольшие напряжения будут в точке на главной оси  $X$ , т.е. в точке 4 (см. рис. 5.47).

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^*}{b J_x} \leq [\tau],$$

$$\tau_{\max} = \frac{105 \cdot 10^{-3} \cdot 339 \cdot 10^{-6}}{0,7 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 51,7 \text{ МПа} \leq [t] = 96 \text{ МПа}.$$

Для стальных балок принимают:  $[t] \approx 0,6[s] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа}$ .

$$\tau_{\max} = 51,7 \text{ МПа} \leq [t] = 96 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

Для построения эпюры касательных напряжений при наибольшей поперечной силе ( $Q_{\max} = 105 \text{ кН}$ ) определим касательные напряжения в точках 2 и 3, 5 и 6.

Для точек 2 и 6 ширина сечения  $b = B = 14 \text{ см}$ , статический момент площади отсеченной части равен статическому моменту полочки, т.е. прямоугольника  $B \times t = 14 \times 1,12 \text{ см}$ .

Тогда

$$S_{x2,6}^* = B t y_c = 14 \cdot 1,12 \cdot 15,94 = 249,9 \text{ см}^3,$$

$$\text{где } y_c = \frac{H}{2} - \frac{t}{2} = \frac{33 - 1,12}{2} = 15,94 \text{ см}.$$

Следовательно, касательное напряжение в точках 2 и 6:

$$t_{2,6} = \frac{105 \cdot 10^{-3} \cdot 249,9 \cdot 10^{-6}}{14 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 1,9 \text{ МПа}.$$

Для точек 3 и 5 статический момент площади отсеченной части остается практически тем же, т.е.  $S_{x3,5}^* = S_{x2,6}^* = 249,9 \text{ см}^3$ , но ширина сечения  $b = d = 0,7 \text{ см}$ . Поэтому касательные напряжения в точках 3 и 5

$$t_{3,5} = \frac{105 \cdot 10^{-3} \cdot 249,9 \cdot 10^{-6}}{0,7 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 38,1 \text{ МПа}.$$

Следовательно, при переходе от точки 2 (6) к точке 3 (5) касательное напряжение резко возрастает.

6 Проверяем сечение на совместное действие нормальных и касательных напряжений по четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{yеà}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Проверка делается в сечении, где изгибающий момент и поперечная сила близки к наибольшим значениям, т.е. в сечении 3 ( $Q_3 = 65 \text{ кН}$ ,  $M_3 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ), а в самом сечении – в точке, где соединяется полочка и стенка двутавра, а касательное напряжение максимально, т.е. в точке 3 (см. рис. 5.47).

Определяем нормальное напряжение в точках 2 (3) и 5 (6):

$$\sigma_{2,3,5,6} = \frac{M_3}{J_x} y_3.$$

Для рассматриваемого сечения  $y_3 = \frac{H}{2} - t = \frac{33}{2} - 1,12 = 15,38 \text{ см}$ .

Отсюда получаем:

$$s_{2,3,5,6} = \frac{90 \cdot 10^{-3}}{9840 \cdot 10^{-8}} \cdot 15,38 \cdot 10^{-2} = 140,7 \text{ МПа}.$$

Для построения эпюры нормальных напряжений при изгибающем моменте  $M_3 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}$  определим наибольшие нормальные напряжения, которые возникают в точках 1 и 7 (см. рис. 5.47):

$$s_{1,7} = \frac{M_3}{W_x} = \frac{90 \cdot 10^{-3}}{597 \cdot 10^{-6}} = 150,8 \text{ МПа}$$

Определяем касательные напряжения в точке 3:

$$\tau_3 = \frac{Q_3 S_{x3}^*}{b J_x}.$$

Для точки 3 ширина сечения  $b = d = 0,7 \text{ см}$ , статический момент площади отсеченной части равен статическому моменту полочки, т.е. прямоугольника  $B \times t = 14 \times 1,12 \text{ см}$ .

Тогда

$$S_{x3}^* = W_{tyC} = 14 \cdot 1,12 \cdot 15,94 = 249,9 \text{ см}^3,$$

где  $y_c = \frac{H}{2} - \frac{t}{2} = \frac{33 - 1,12}{2} = 15,94 \text{ см}.$

Следовательно, касательное напряжение в точке 3

$$t_3 = \frac{65 \cdot 10^{-3} \cdot 249,9 \cdot 10^{-6}}{0,7 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 23,6 \text{ МПа}.$$

Для точки 2 статический момент площади отсеченной части остается практически тем же, т.е.  $S_{x2}^* = S_{x3}^* = 249,9 \text{ см}^3$ , но ширина сечения  $b = B = 14 \text{ см}$ . Поэтому касательные напряжения в точке 2

$$t_2 = \frac{65 \cdot 10^{-3} \cdot 249,9 \cdot 10^{-6}}{14 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 1,2 \text{ МПа}.$$

Для точки нейтральной линии (точка 4) ширина сечения  $b = d = 0,7 \text{ см}$ , а статический момент площади отсеченной части следует взять для половины сечения:  $S_{x \max}^* = S_x^* = 339 \text{ см}^3$ .

Следовательно, касательное напряжение в точке 4

$$t_4 = \frac{65 \cdot 10^{-3} \cdot 339 \cdot 10^{-6}}{0,7 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 31,9 \text{ МПа}.$$

Для нижней половины сечения в силу симметрии сечения относительно оси X  $t_5 = t_3 = 23,6 \text{ МПа}$ ,  $t_6 = t_2 = 1,2 \text{ МПа}$ .

Рассчитываем эквивалентное напряжение в точке 3 по четвертой теории прочности:

$$s_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{140,7^2 + 3 \cdot 23,6^2} = 146,5 \text{ МПа} < [s] = 160 \text{ МПа}.$$

### Задача 5.10

Для стальной балки (рис.5.48) подобрать размеры двутаврового сечения и произвести полную проверку на прочность по третьей теории прочности. Допустимое нормальное напряжение  $[s] = 160 \text{ МПа}$ .

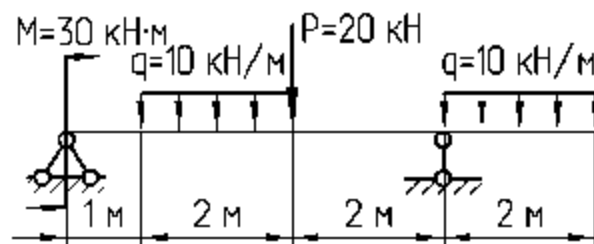


Рисунок 5.48

## Решение

1 Определяем опорные реакции, приравнивая к нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В (рис. 5.49).

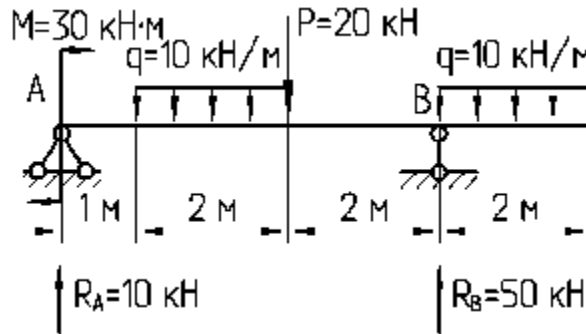


Рисунок 5.49

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 6 + R_B \cdot 5 = 0,$$

$$R_B = \frac{M + P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 6}{5} = \frac{30 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 6}{5} = 50 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 5 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1}{5} = \frac{-30 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 10 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$-P - q \cdot 2 - q \cdot 2 + R_A + R_B = 0,$$

$$-20 - 10 \cdot 2 - 10 \cdot 2 + 10 + 50 = 0,$$

$$-60 + 60 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 5.50):

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = R_A = 10 \text{ кН},$$

$$Q_4 = R_A - q \cdot 2 = 10 - 10 \cdot 2 = -10 \text{ кН},$$

$$Q_5 = R_A - q \cdot 2 - P = 10 - 10 \cdot 2 - 20 = -30 \text{ кН},$$

$$Q_8 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_7 = q \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_6 = Q_5 = q \cdot 2 - R_B = 10 \cdot 2 - 50 = -30 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = M + R_A \cdot 1 = 30 + 10 \cdot 1 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = M + R_A \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 = 30 + 10 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = M_6 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -10 \cdot 2 \cdot 1 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = M_4 = -q \cdot 2 \cdot 3 + R_B \cdot 2 = -10 \cdot 2 \cdot 3 + 50 \cdot 2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см. рис. 5.50).

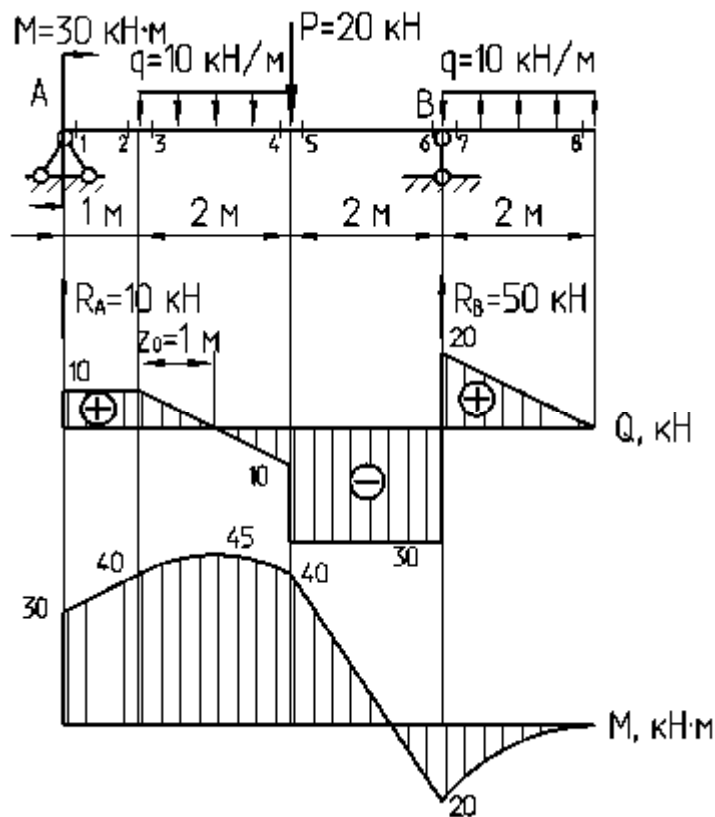


Рисунок 5.50

Так как эпюра поперечных сил пересекает базовую линию и меняет знак с «+» на «-», то в этой точке находится максимальное значение изгибающего момента. Находим положение этого сечения.

$$z_0 = \frac{10}{10} = 1 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = M + R_A (1 + z_0) - qz_0 \frac{z_0}{2} = 30 + 10 \cdot (1 + 1) - 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для указанного вида нагружения  $Q_{\max} = 30 \text{ кН}$ ,  $M_{\max} = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

3 Подбираем сечение. Из условия прочности (5.7) определим требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{45 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 281,3 \text{ см}^3.$$

Номер двутавра находим по расчетному значению момента сопротивления  $W_x \geq 281,3 \text{ см}^3$ . По таблице сортамента (ГОСТ 8239-72) выбираем двутавр № 24, для которого  $W_x = 289 \text{ см}^3$ .

Для двутавра № 24 выписываем из сортамента необходимые геометрические характеристики:

$$H = 24 \text{ см}, B = 11,5 \text{ см},$$

$$J_x = 3460 \text{ см}^4, S_x^* = 163 \text{ см}^3.$$

$$d = 0,56 \text{ см}, t = 0,95 \text{ см},$$

4 Проверяем прочность по нормальным напряжениям.

Опасным будет сечение, в котором действует наибольший изгибающий момент (сечение  $z_0$ ,  $M_{\max} = M_{z_0} = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ). В самом сечении наибольшие напряжения будут в наиболее отдаленных от нейтральной линии точках, т.е. в точках 1 и 7 (рис. 5.51).

Условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{\max} = \frac{45 \cdot 10^{-3}}{289 \cdot 10^{-6}} = 155,7 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по нормальным напряжениям выполняется.

5 Проверяем прочность по касательным напряжениям.

Опасным будет сечение, в котором действует наибольшая поперечная сила (сечение 1,  $Q_{\max} = Q_5 = 30 \text{ кН}$ ). В самом сечении наибольшие напряжения будут в точке на главной оси X, т.е. в точке 4 (см. рис. 5.51).

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^*}{b J_x} \leq [\tau],$$

$$\tau_{\max} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{0,56 \cdot 10^{-2} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 25,2 \text{ МПа} \leq [t] = 96 \text{ МПа}.$$

Для стальных балок принимают:  $[t] \approx 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа}$ .

$$\tau_{\max} = 25,2 \text{ МПа} \leq [t] = 96 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.



Проверка делается в сечении, где изгибающий момент и поперечная сила близки к наибольшим значениям, т.е. в сечении 5 ( $Q_5 = Q_{\max} = 30 \text{ кН}$ ,  $M_5 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ), а в самом сечении – в точке, где соединяется полочка и стенка двутавра, а касательное напряжение максимально, т.е. в точке 3 (см. рис. 5.47).

Касательное напряжение в точке 3 при максимальной поперечной силе  $t_3 = 19,5 \text{ МПа}$ .

Определяем нормальное напряжение в точках 2 (3) и 5 (6):

$$\sigma_{2,3,5,6} = \frac{M_5}{J_x} y_3.$$

Для рассматриваемого сечения  $y_3 = \frac{H}{2} - t = \frac{24}{2} - 0,95 = 11,05 \text{ см}$ .

Отсюда получаем:

$$\sigma_{2,3,5,6} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{3460 \cdot 10^{-8}} \cdot 11,05 \cdot 10^{-2} = 127,7 \text{ МПа}.$$

Для построения эпюры нормальных напряжений при изгибающем моменте  $M_5 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$  определим наибольшие нормальные напряжения, которые возникают в точках 1 и 7 (см. рис. 5.47):

$$\sigma_{1,7} = \frac{M_5}{W_x} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{289 \cdot 10^{-6}} = 138,4 \text{ МПа}.$$

Рассчитываем эквивалентное напряжение в точке 3 по третьей теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{127,7^2 + 4 \cdot 19,5^2} = 133,5 \text{ МПа} < [s] = 160 \text{ МПа}.$$

### Задача 5.11

Провести полную проверку прочности балки (рис. 5.52, а), рассмотрев сечение, представленное на рисунке 5.52, б.

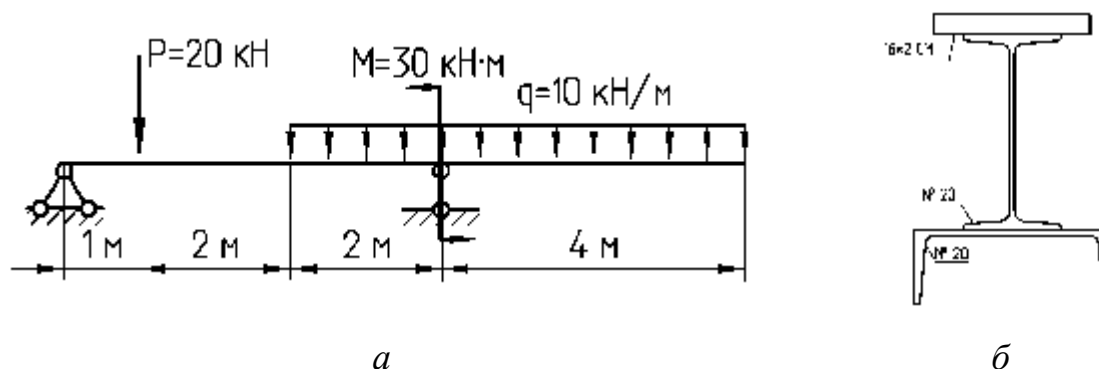


Рисунок 5.52

## Решение

1 Определяем опорные реакции, приравнявая к нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В (рис. 5.53).

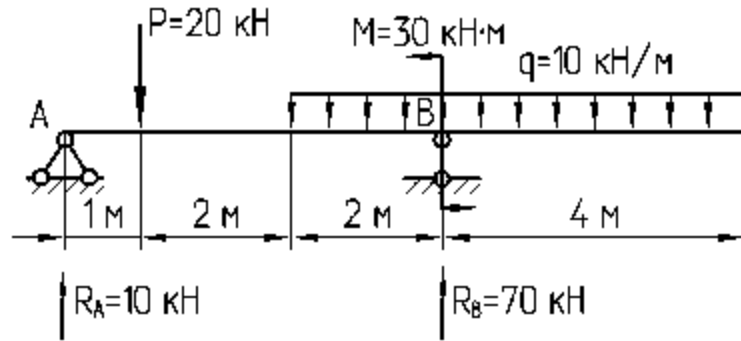


Рисунок 5.53

$$\sum M_A = 0,$$

$$M - P \cdot 1 - q \cdot 6 \cdot 6 + R_B \cdot 5 = 0,$$

$$R_B = \frac{-M + P \cdot 1 + q \cdot 6 \cdot 6}{5} = \frac{-30 + 20 \cdot 1 + 10 \cdot 6 \cdot 6}{5} = 70 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$M + P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 5 = 0,$$

$$R_A = \frac{M + P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 2}{5} = \frac{30 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 2 \cdot 1 - 10 \cdot 4 \cdot 2}{5} = 10 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$-P - q \cdot 6 + R_A + R_B = 0,$$

$$-20 - 10 \cdot 6 + 10 + 70 = 0,$$

$$-70 + 70 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2 Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 5.54):

$$Q_1 = Q_2 = R_A = 10 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_5 = R_A - P = 10 - 20 = -10 \text{ кН},$$

$$Q_8 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_7 = q \cdot 2 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кН},$$

$$Q_6 = q \cdot 4 - R_B = 10 \cdot 4 - 70 = -30 \text{ кН},$$

$$Q_5 = q \cdot 6 - R_B = 10 \cdot 6 - 70 = -10 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M_8 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = R_A \cdot 3 - P \cdot 2 = 10 \cdot 3 - 20 \cdot 2 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = -q \cdot 4 \cdot 2 = -10 \cdot 4 \cdot 2 = -80 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = -q \cdot 4 \cdot 2 + M = -10 \cdot 4 \cdot 2 + 30 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = M_4 = -q \cdot 6 \cdot 3 + R_B \cdot 2 + M = -10 \cdot 6 \cdot 3 + 70 \cdot 2 + 30 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см. рис. 5.54).

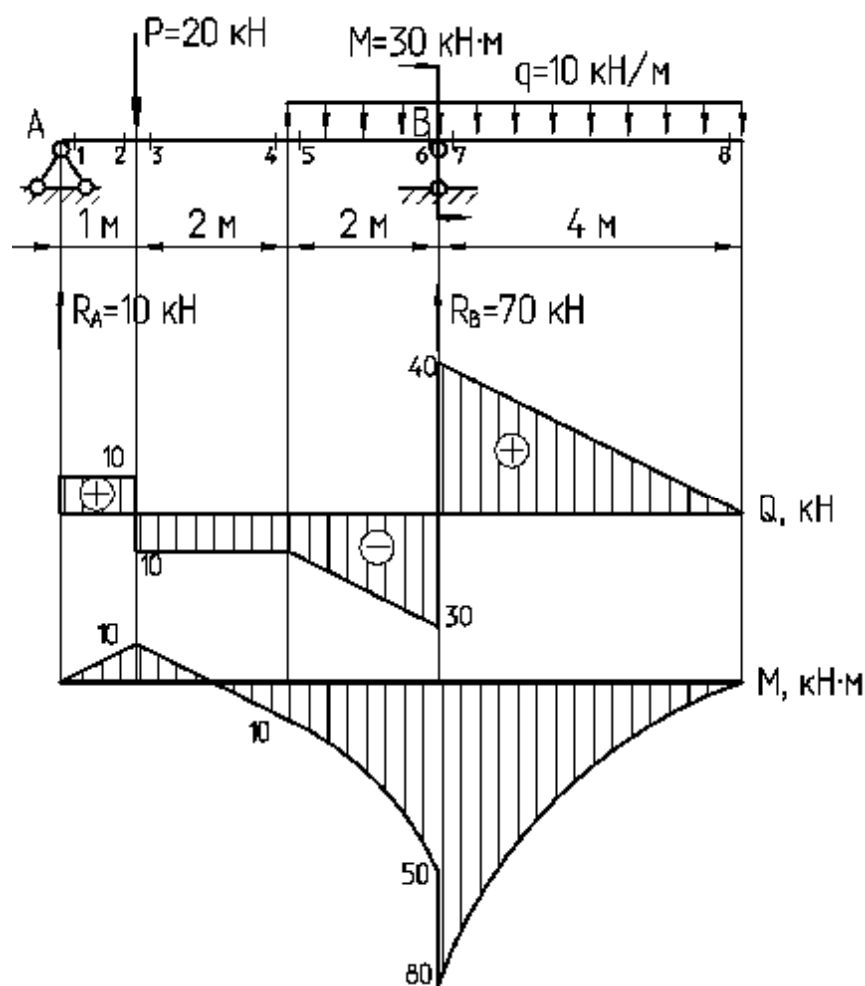


Рисунок 5.54

3 Рассмотрим сечение, представленное на рисунке 5.52, б.

Рассматриваемое сечение разбиваем на три простые части – швеллер 1, двутавр 2 и полоса 3 (рис. 5.55).

Из сортамента выписываем геометрические характеристики швеллера №20:

$$H_1 = 20 \text{ см}, B_1 = 7,6 \text{ см}, d_1 = 0,52 \text{ см}, \\ t_1 = 0,90 \text{ см}, z_{01} = 2,07 \text{ см},$$

$$F_1 = 23,4 \text{ см}^2, J_{x_1} = 113 \text{ см}^4.$$

Из сортамента выписываем геометрические характеристики двутавра №20:

$$H_2 = 20 \text{ см}, B_2 = 10 \text{ см}, d_2 = 0,52 \text{ см}, \\ t_2 = 0,84 \text{ см},$$

$$F_2 = 26,8 \text{ см}^2, J_{x_2} = 1840 \text{ см}^4.$$

Определяем геометрические характеристики полосы 3:

$$H_3 = 2 \text{ см}, B_3 = 16 \text{ см}, \\ F_3 = H_3 B_3 = 2 \cdot 16 = 32 \text{ см}^2,$$

$$J_{x_3} = \frac{B_3 H_3^3}{12} = \frac{16 \cdot 2^3}{12} = 10,7 \text{ см}^4.$$

4 Относительно выбранных начальных осей находим координаты центра тяжести сложного сечения. Так как фигура симметрична относительно оси Y, то центр тяжести лежит на ней,  $x_c = 0$ .

Находим значение координаты  $y_c$  по формуле

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

Для рассматриваемого сечения:

$$y_1 = y_2 = 0 \text{ см},$$

$$y_2 = z_0 + \frac{H_2}{2} = 2,07 + \frac{20}{2} = 12,07 \text{ см},$$

$$y_3 = z_0 + H_2 + \frac{H_3}{2} = 2,07 + 20 + \frac{2}{2} = 23,07 \text{ см}.$$

Отсюда получаем:

$$y_c = \frac{12,07 \cdot 26,8 + 23,07 \cdot 32}{23,4 + 26,8 + 32} = 12,92 \text{ см}.$$

По найденной координате  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения (см. рис 5.55).

5 Определяем осевой момент инерции всего сечения относительно главной центральной оси  $X_c$  по формуле

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2 + J_{x_3} + a_3^2 F_3.$$

Для рассматриваемого сечения:

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 12,92 = -12,92 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 12,07 - 12,92 = -0,85 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 23,07 - 12,92 = 10,15 \text{ см}.$$

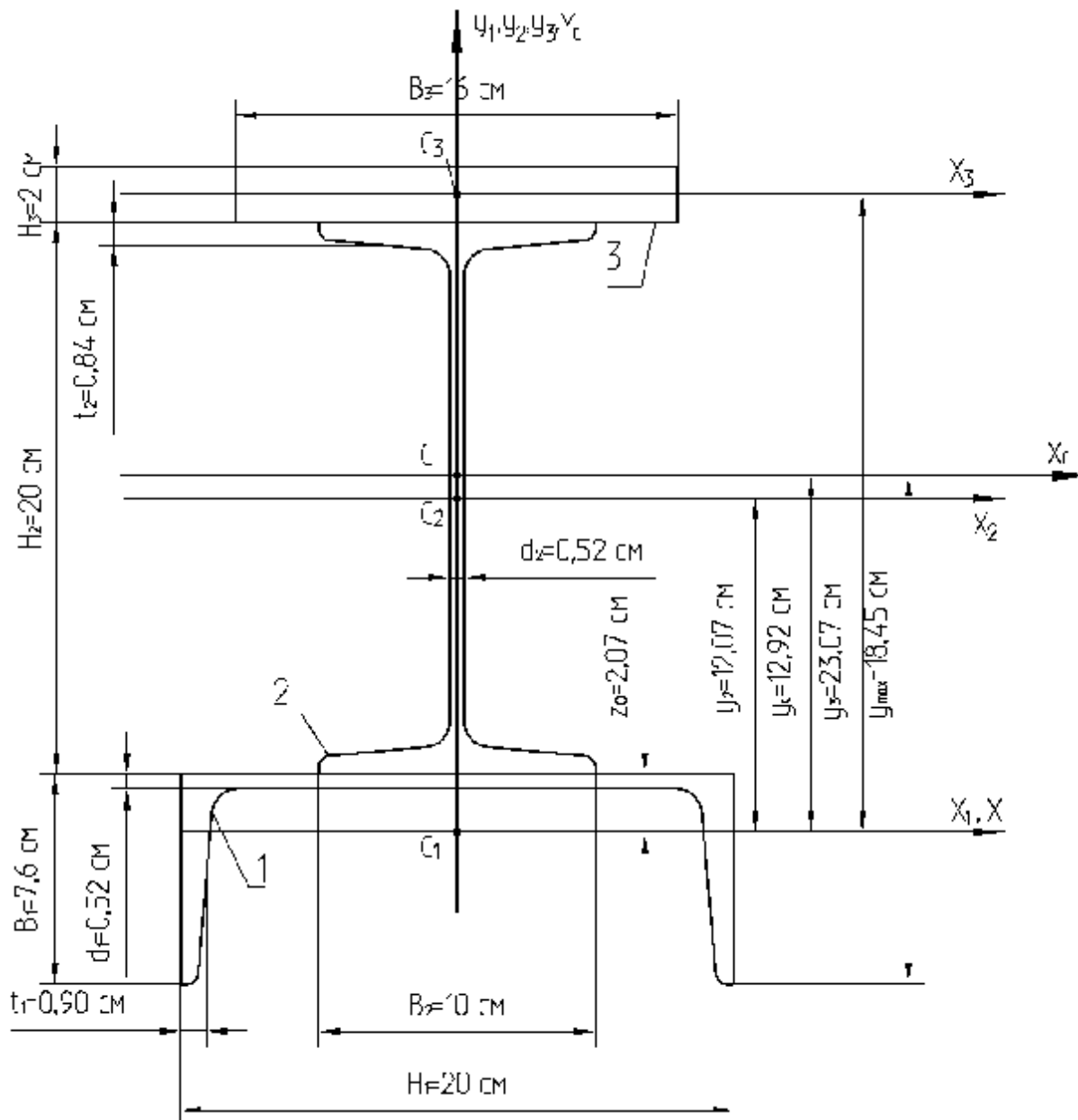


Рисунок 5.55

Отсюда получаем:

$$J_{x_c} = 113 + 12,92^2 \cdot 23,4 + 1840 + 0,85^2 \cdot 26,8 + 10,7 + 10,15^2 \cdot 32 = 9186 \text{ см}^4.$$

6 Определяем максимальное нормальное напряжение.

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_{x_c}} y_{\max} \leq [\sigma].$$

Опасным будет сечение, в котором действует наибольший изгибающий момент (сечение 7,  $M_{\max} = M_7 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ). В самом сечении наибольшие напряжения будут в наиболее отдаленной от нейтральной линии точке, т.е. в точках 13 (рис. 5.56).

Для рассматриваемого сечения

$$y_{\max} = (B_1 - z_0) + y_c = (7,6 - 2,07) + 12,92 = 18,45 \text{ см}.$$

Отсюда получаем:

$$s_{\max} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{9186 \cdot 10^{-8}} \cdot 18,45 \cdot 10^{-2} = 160,7 \text{ МПа}.$$

$$s_{\max} = 160,7 \text{ МПа} \leq [s] = 170 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условие прочности по нормальным напряжениям выполняется.

7 Проверяем прочность по касательным напряжениям.

Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^*}{b J_x} \leq [\tau].$$

Опасным будет сечение, в котором действует наибольшая поперечная сила (сечение 1,  $Q_{\max} = Q_7 = 40 \text{ кН}$ ). В самом сечении наибольшие напряжения будут в точке на главной оси X, т.е. в точке б (см. рис. 5.56).

Для точки нейтральной линии (точка б) ширина сечения  $b = d_2 = 0,52 \text{ см}$ , а статический момент площади отсеченной части следует взять для половины сечения, т.е.

$$\begin{aligned} S_x^* &= B_3 H_3 \left( y_1 - \frac{H_3}{2} \right) + B_2 t_2 \left( y_4 + \frac{t_2}{2} \right) + d_2 (y_1 - H_3 - t_2) \cdot \frac{y_1 - H_3 - t_2}{2} = \\ &= 16 \cdot 2 \cdot \left( 11,15 - \frac{2}{2} \right) + 10 \cdot 0,84 \cdot \left( 8,31 + \frac{0,84}{2} \right) + \\ &+ 0,52 \cdot (11,15 - 2 - 0,84) \cdot \frac{11,15 - 2 - 0,84}{2} = 409,1 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Следовательно, максимальное напряжение

$$t_{\max} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 409,1 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 9186 \cdot 10^{-8}} = 34,3 \text{ МПа}.$$

Для стальных балок принимают:  $[t] \approx 0,6[s] = 0,6 \cdot 170 = 102 \text{ МПа}$ .

$$t_{\max} = 34,3 \text{ МПа} \leq [t] = 102 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

8 Проверяем сечение на совместное действие нормальных и касательных напряжений по четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{yеà}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Проверка делается в сечении, где изгибающий момент и поперечная сила близки к наибольшим значениям, т.е. в сечении 7 ( $Q_7 = Q_{\max} = 40 \text{ кН}$ ,  $M_7 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ).

Для определения точки, в которой нормальные и касательные напряжения, хотя и не принимают наибольших значений, но в своей комбинации создают наиболее невыгодное сочетание, т.е. создают наибольшее эквивалентное напряжение, необходимо построить эпюры нормальных и касательных напряжений.

Для построения эпюр нормальных и касательных напряжений необходимо определить следующие данные:

- 1) точки, в которых определяются напряжения (см. рис. 5.56);
- 2) расстояние  $y$  от нейтральной линии до точки, в которой определяется напряжение;
- 3) нормальное напряжение  $\sigma$  в произвольной точке сечения, расположенной на высоте  $y$  ( $\sigma = \frac{M_7}{J_{x_c}} y$ );
- 4) статический момент площади отсеченной части  $S_x^*$  относительно нейтральной оси той части сечения, которая расположена по одну сторону от прямой, проведенной через данную точку;
- 5) ширину сечения  $b$  на уровне рассматриваемой точки;
- 6) касательное напряжение  $\tau$  в точке ( $\tau = \frac{Q_7 S_x^*}{b J_x}$ ).

Рассмотрим каждую точку в отдельности (см. рис. 5.56).

Точка 1:

$$y_1 = B_1 + H_2 + H_3 - y_{\max} = 7,6 + 20 + 2 - 18,45 = 11,15 \text{ см},$$

$$\sigma_1 = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{9186 \cdot 10^{-8}} \cdot 11,15 \cdot 10^{-2} = 97,1 \text{ МПа},$$

$$S_{x1}^* = 0 \text{ см}^3,$$

$$b_1 = B_3 = 16 \text{ см},$$

$$t_1 = 0 \text{ МПа}.$$

Точка 2:

$$y_2 = y_1 - H_3 = 11,15 - 2 = 9,15 \text{ см},$$

$$s_2 = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{9186 \cdot 10^{-8}} \cdot 9,15 \cdot 10^{-2} = 79,7 \text{ МПа},$$

$$S_{x2}^* = B_3 H_3 \left( y_1 - \frac{H_3}{2} \right) = 16 \cdot 2 \cdot \left( 11,15 - \frac{2}{2} \right) = 324,8 \text{ см}^3,$$

$$b_2 = B_3 = 16 \text{ см},$$

$$t_2 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 324,8 \cdot 10^{-6}}{16 \cdot 10^{-2} \cdot 9186 \cdot 10^{-8}} = 0,9 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{экв}2}^{\text{IV}} = \sqrt{79,7^2 + 3 \cdot 0,9^2} = 79,7 \text{ МПа}.$$

Точка 3:

$$y_3 = y_2 = 9,15 \text{ см}, s_3 = s_2 = 79,7 \text{ МПа},$$

$$S_{x3}^* = S_{x2}^* = 324,8 \text{ см}^3,$$

$$b_3 = B_2 = 10 \text{ см},$$

$$t_3 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 324,8 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-2} \cdot 9186 \cdot 10^{-8}} = 1,4 \text{ МПа},$$

$$s_{\text{акг}3}^{IV} = \sqrt{79,7^2 + 3 \cdot 1,4^2} = 79,7 \text{ МПа}.$$

Точка 4:

$$y_4 = y_1 - H_3 - t_2 = 11,15 - 2 - 0,84 = 8,31 \text{ см},$$

$$s_4 = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{9186 \cdot 10^{-8}} \cdot 8,31 \cdot 10^{-2} = 72,4 \text{ МПа},$$

$$\begin{aligned} S_{x4}^* &= B_3 H_3 \left( y_1 - \frac{H_3}{2} \right) + B_2 t_2 \left( y_4 + \frac{t_2}{2} \right) = S_{x2}^* + B_2 t_2 \left( y_4 + \frac{t_2}{2} \right) = \\ &= 324,8 + 10 \cdot 0,84 \cdot \left( 8,31 + \frac{0,84}{2} \right) = 391,1 \text{ см}^3 \end{aligned},$$

$$b_4 = B_2 = 10 \text{ см},$$

$$t_4 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 391,1 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-2} \cdot 9186 \cdot 10^{-8}} = 1,7 \text{ МПа},$$

$$s_{\text{акг}4}^{IV} = \sqrt{72,4^2 + 3 \cdot 1,7^2} = 72,5 \text{ МПа}.$$

Точка 5:

$$y_5 = y_4 = 8,31 \text{ см}, s_5 = s_4 = 72,4 \text{ МПа},$$

$$S_{x5}^* = S_{x4}^* = 391,1 \text{ см}^3,$$

$$b_5 = d_2 = 0,52 \text{ см},$$

$$t_5 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 391,1 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 9186 \cdot 10^{-8}} = 32,8 \text{ МПа},$$

$$s_{\text{акг}5}^{IV} = \sqrt{72,4^2 + 3 \cdot 32,8^2} = 92,0 \text{ МПа}.$$

Точка 6:

$$y_6 = 0 \text{ см}, s_6 = 0 \text{ МПа}, t_6 = t_{\text{max}} = 34,3 \text{ МПа}.$$

Точка 13:

$$y_{13} = y_{\text{max}} = 18,45 \text{ см}, s_{13} = s_{\text{max}} = 160,7 \text{ МПа},$$

$$S_{x13}^* = 0 \text{ см}^3,$$

$$b_{13} = 2t_1 = 2 \cdot 0,90 = 1,80 \text{ см},$$

$$t_{13} = 0 \text{ МПа} .$$

Точка 12:

$$y_{12} = y_{13} - (B_1 - d_1) = 18,45 - (7,6 - 0,52) = 11,37 \text{ см} ,$$

$$s_{12} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{9186 \cdot 10^{-8}} \cdot 11,37 \cdot 10^{-2} = 99,0 \text{ МПа} ,$$

$$\begin{aligned} S_{x12}^* &= 2t_1(B_1 - d_1) \left( y_{12} + \frac{B_1 - d_1}{2} \right) = \\ &= 2 \cdot 0,90 \cdot (7,6 - 0,52) \cdot \left( 11,37 + \frac{7,6 - 0,52}{2} \right) = 190,0 \text{ см}^3 , \end{aligned}$$

$$b_{12} = 2t_1 = 2 \cdot 0,90 = 1,8 \text{ см} ,$$

$$t_{12} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 190,0 \cdot 10^{-6}}{1,8 \cdot 10^{-2} \cdot 9186 \cdot 10^{-8}} = 4,6 \text{ МПа} ,$$

$$s_{\text{экв}12}^{IV} = \sqrt{99,0^2 + 3 \cdot 4,6^2} = 99,3 \text{ МПа} .$$

Точка 11:

$$y_{11} = y_{12} = 11,37 \text{ см} , \quad s_{11} = s_{12} = 99,0 \text{ МПа} ,$$

$$S_{x11}^* = S_{x12}^* = 190,0 \text{ см}^3 ,$$

$$b_{11} = H_1 = 20 \text{ см} ,$$

$$t_{11} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 190,0 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-2} \cdot 9186 \cdot 10^{-8}} = 0,4 \text{ МПа} ,$$

$$s_{\text{экв}11}^{IV} = \sqrt{99,0^2 + 3 \cdot 0,4^2} = 99,0 \text{ МПа} .$$

Точка 10:

$$y_{10} = y_{13} - B_1 = 18,45 - 7,6 = 10,85 \text{ см} ,$$

$$s_{10} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{9186 \cdot 10^{-8}} \cdot 10,85 \cdot 10^{-2} = 94,5 \text{ МПа} ,$$

$$S_{x10}^* = S_{x12}^* + H_1 d_1 \left( y_{10} + \frac{d_1}{2} \right) = 190,0 + 20 \cdot 0,52 \cdot \left( 10,85 + \frac{0,52}{2} \right) = 305,5 \text{ см}^3 ,$$

$$b_{10} = H_1 = 20 \text{ см} ,$$

$$t_{10} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 305,5 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-2} \cdot 9186 \cdot 10^{-8}} = 0,7 \text{ МПа} ,$$

$$s_{\text{экв}10}^{IV} = \sqrt{94,5^2 + 3 \cdot 0,7^2} = 94,5 \text{ МПа} .$$

Точка 9:

$$y_9 = y_{10} = 10,85 \text{ см} , \quad s_9 = s_{10} = 94,5 \text{ МПа} ,$$

$$S_{x9}^* = S_{x10}^* = 305,5 \text{ см}^3,$$

$$b_9 = B_2 = 10 \text{ см},$$

$$t_9 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 305,5 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-2} \cdot 9186 \cdot 10^{-8}} = 1,3 \text{ МПа},$$

$$s_{\text{эКЭ}9}^{IV} = \sqrt{94,5^2 + 3 \cdot 1,3^2} = 94,5 \text{ МПа}.$$

Точка 8:

$$y_8 = y_{13} - B_1 - t_2 = 18,45 - 7,6 - 0,84 = 10,01 \text{ см},$$

$$s_8 = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{9186 \cdot 10^{-8}} \cdot 10,01 \cdot 10^{-2} = 88,3 \text{ МПа},$$

$$S_{x8}^* = S_{x10}^* + B_2 t_2 \left( y_8 - \frac{t_2}{2} \right) = 305,5 + 10 \cdot 0,84 \cdot \left( 10,01 - \frac{0,84}{2} \right) = 386,1 \text{ см}^3,$$

$$b_8 = B_2 = 10 \text{ см},$$

$$t_8 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 386,1 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-2} \cdot 9186 \cdot 10^{-8}} = 1,7 \text{ МПа},$$

$$s_{\text{эКЭ}8}^{IV} = \sqrt{88,3^2 + 3 \cdot 1,7^2} = 88,3 \text{ МПа}.$$

Точка 7:

$$y_7 = y_8 = 10,01 \text{ см}, \quad s_7 = s_8 = 88,3 \text{ МПа},$$

$$S_{x7}^* = S_{x8}^* = 386,1 \text{ см}^3,$$

$$b_7 = d_2 = 0,52 \text{ см},$$

$$t_7 = \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 386,1 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 10593 \cdot 10^{-8}} = 32,3 \text{ МПа},$$

$$s_{\text{эКЭ}7}^{IV} = \sqrt{88,3^2 + 3 \cdot 32,3^2} = 104,5 \text{ МПа}.$$

Полученные данные заносятся в таблицу 5.1.

По полученным данным (см. табл. 5.1) строим эпюры нормальных и касательных напряжений.

Так как во всех рассмотренных точках  $s_{\text{эКЭ}}^{IV} < [s] = 170 \text{ МПа}$  (см. табл. 5.1), то условие прочности по четвертой теории прочности выполняется для всех рассмотренных точек.



Таблица 5.1 – Данные для построения эпюр нормальных и касательных напряжений

№ точки	у, мм	$\sigma$ , МПа	$S_x^*$ , ì <sup>3</sup>	b, мм	$\tau$ , МПа	$\sigma_{y\grave{e}a}^{IV}$
1	11,15	97,1	0	16	0	–
2	9,15	79,7	324,8	16	0,9	79,7
3	9,15	79,7	324,8	10	1,4	79,7
4	8,31	72,4	391,1	10	1,7	72,5
5	8,31	72,4	391,1	0,52	32,8	92,0
6	0	0	409,1	0,52	34,3	–
7	10,01	88,3	386,1	0,52	32,3	104,5
8	10,01	88,3	386,1	10	1,7	88,3
9	10,85	94,5	305,5	10	1,3	94,5
10	10,85	94,5	305,5	20	0,7	94,5
11	11,37	99,0	190,0	20	0,4	99,0
12	11,37	99,0	190,0	1,8	4,6	99,3
13	18,45	160,7	0	1,8	0	–

## 6 КРУЧЕНИЕ

### 6.1 Основные сведения из теории

Кручение – вид деформации, характеризующийся взаимным поворотом поперечных сечений бруса под влиянием моментов (пары сил), действующих в этих сечениях (рис 6.1).

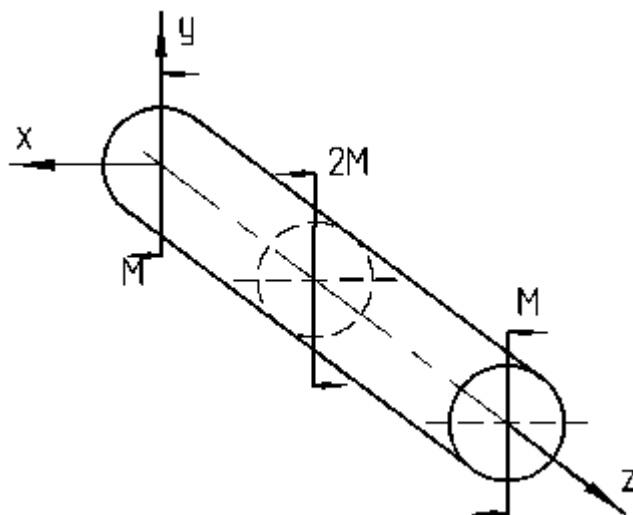


Рисунок 6.1

При кручении в каждом сечении бруса действует только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_z (M_{кр})$ .

Крутящий момент равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных по одну сторону от сечения.

Крутящий момент считается положительным, если при взгляде со стороны внешней нормали к сечению он будет направлен против часовой стрелки.

При расчете валов часто бывает задана передаваемая мощность  $N$  в киловаттах и частота вращения  $n$  в оборотах в минуту. При этом крутящий момент может быть определен следующим образом:

$$M_{кр} = 9,55 \frac{N}{n}. \quad (6.1)$$

При кручении в каждом сечении возникают внутренние касательные напряжения, которые в произвольной точке сечения определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}} \rho, \quad (6.2)$$

где  $M_{кр}$  – крутящий момент в сечении бруса;

$\rho$  – расстояние от центра сечения до точки, в которой определяется напряжение;

$J_p$  – полярный момент инерции сечения.

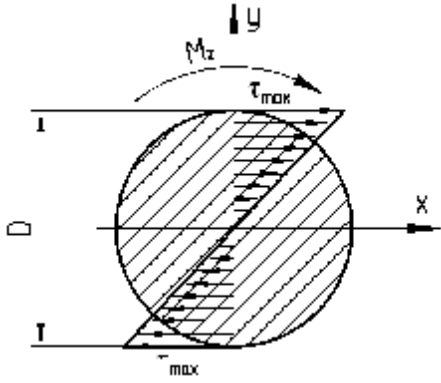
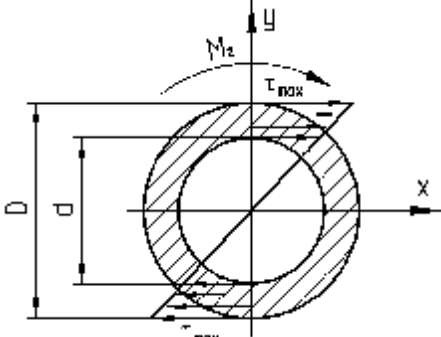
Максимальные касательные напряжения возникают на контуре сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (6.3)$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления сечения.

Формулы для определения полярного момента инерции и полярного момента сопротивления для круглого и кольцевого сечений приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Характеристики сечений при кручении

Форма сечения	$J_p$	$W_p$
	$\frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4$	$\frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3$
	$\frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4 (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3 (1 - \alpha^4)$
	$\alpha = \frac{d}{D}$	

Если крутящий момент и диаметр сечения на участке бруса длиной  $l$  являются постоянными величинами, то угол закручивания

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_p}, \quad (6.4)$$

где  $GJ_p$  – жесткость стержня при кручении.

В случае постоянства крутящего момента лишь в пределах отдельных участков бруса или ступенчатого изменения его поперечного сечения формулу (6.4) можно применять только по участкам.

Прочность бруса, работающего на кручение, считают обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения, возникающие в его опасном поперечном сечении, не превышают допускаемых. Таким образом, условие прочности имеет следующий вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (6.5)$$

где  $[\tau]$  – допускаемое напряжение при кручении.

Помимо расчета на прочность валы рассчитывают и на жесткость, ограничивая погонные углы закручивания некоторой допускаемой величиной  $[\theta]$ :

$$q_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_r} \leq [q]. \quad (6.6)$$

## 6.2 Расчеты на кручение статически определимых систем

### Задача 6.1

*Ступенчатый стальной брус круглого поперечного сечения жестко заделан одним концом и нагружен, как показано на рисунке 6.2. Построить эпюры крутящих моментов, максимальных касательных напряжений. Определить углы поворота поперечных сечений. Проверить прочность бруса при  $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ .*

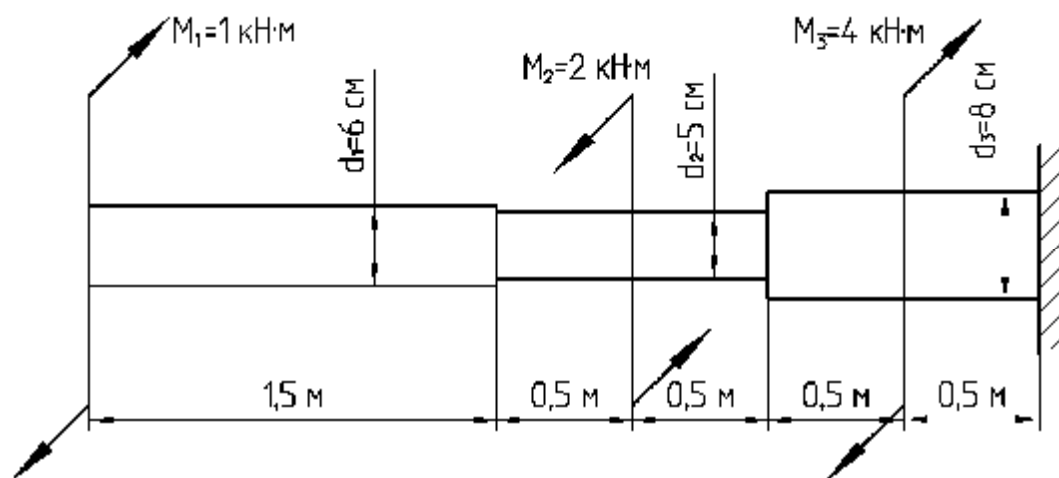


Рисунок 6.2

## Решение

1 Эпюру крутящих моментов строим, начиная от свободного (левого) конца, что позволяет не определять реактивный момент в заделке.

Сечениями, где приложены внешние моменты, стержень разбивается на три участка: I, II, III (рис. 6.3, а).

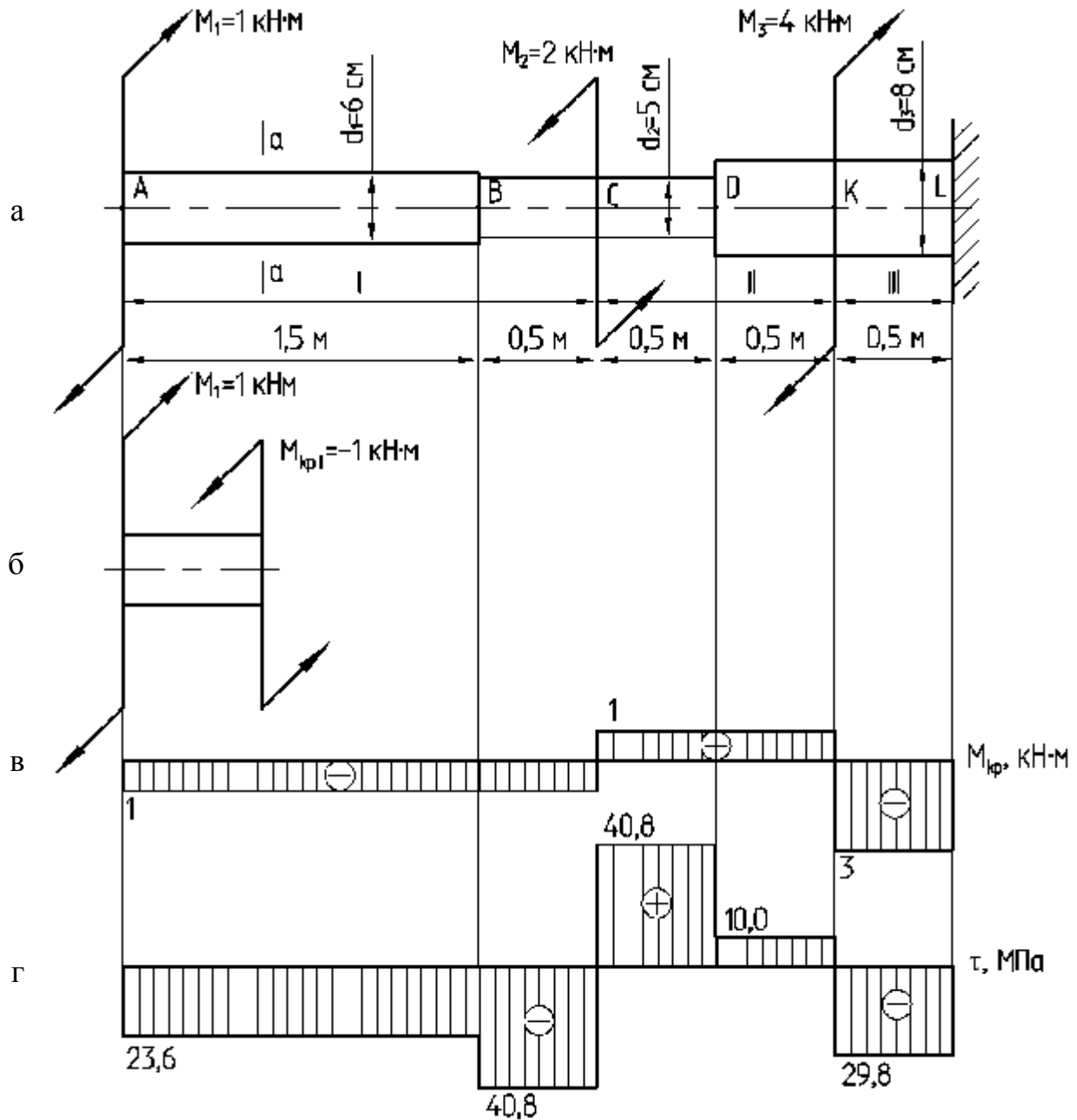


Рисунок 6.3

Проведя произвольное сечение  $a-a$  на участке I и составляя для оставленной части (рис. 6.3, б) уравнение равновесия  $\sum M_z = 0$ , получаем:

$$M_{крI} = -M_1 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Крутящий момент  $M_{кр I}$  сохраняет постоянное значение во всех сечениях участка I.

Для остальных участков находим крутящие моменты как алгебраические суммы внешних моментов, приложенных по одну сторону (в нашем случае – левую) от сечения. Отсеченные части отдельно не изображаем.

Участок II –

$$M_{кр II} = -M_1 + M_2 = -1 + 2 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

участок III –

$$M_{кр III} = -M_1 + M_2 - M_3 = -1 + 2 - 4 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов. Эпюра представлена на рисунке 6.3, в.

2 Для нахождения опасного сечения строим эпюру максимальных касательных напряжений, пользуясь формулой

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}.$$

Определим полярные моменты сопротивления для каждого диаметра:

$$W_{r1} = \frac{\rho d_1^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 6^3}{16} = 42,4 \text{ см}^3,$$

$$W_{r2} = \frac{\rho d_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{16} = 24,5 \text{ см}^3,$$

$$W_{r3} = \frac{\rho d_3^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 8^3}{16} = 100,5 \text{ см}^3.$$

Определим касательные напряжения для каждого участка:

– участок АВ ( $M_{кр I} = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r1} = 42,4 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max AB} = \frac{M_{кр I}}{W_{r1}} = \frac{-1 \cdot 10^{-3}}{42,4 \cdot 10^{-6}} = -23,6 \text{ МПа};$$

– участок ВС ( $M_{кр I} = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r2} = 24,5 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max BC} = \frac{M_{кр I}}{W_{r2}} = \frac{-1 \cdot 10^{-3}}{24,5 \cdot 10^{-6}} = -40,8 \text{ МПа};$$

– участок CD ( $M_{кр II} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r2} = 24,5 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max CD} = \frac{M_{кр II}}{W_{r2}} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{24,5 \cdot 10^{-6}} = 40,8 \text{ МПа};$$

– участок DK ( $M_{кр II} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r3} = 100,5 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max DK} = \frac{M_{кр II}}{W_{r3}} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{100,5 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ МПа};$$

– участок KL ( $M_{kp III} = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r3} = 100,5 \text{ см}^3$ ) –

$$t_{\max KL} = \frac{M_{kp III}}{W_{r3}} = \frac{-3 \cdot 10^{-3}}{100,5 \cdot 10^{-6}} = -29,8 \text{ МПа}.$$

По найденным значениям касательных напряжений строим эпюру максимальных касательных напряжений (рис. 6.3, г).

Опасными оказались поперечные сечения участков ВС и CD. Таким образом, опасными оказались не те сечения, в которых крутящий момент максимален. Условие прочности  $\tau_{\max} \leq [\tau]$  выполняется.

3 Определим углы поворота поперечных сечений, используя формулу

$$\varphi = \frac{M_{kp} l}{GJ_{\rho}}$$

Определим полярные моменты инерции для каждого диаметра:

$$J_{r1} = \frac{\rho d_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} = 127 \text{ см}^3,$$

$$J_{r2} = \frac{\rho d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,3 \text{ см}^3,$$

$$J_{r3} = \frac{\rho d_3^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{32} = 402 \text{ см}^3.$$

Определяем углы поворота, начиная с заземленного конца.

Определяем угол поворота сечения К, равный углу закручивания участка KL:

$$j_{KL} = \frac{M_{kp III} \cdot 0,5}{GJ_{r3}} = \frac{-3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{8 \cdot 10^4 \cdot 402 \cdot 10^{-8}} = -4,66 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Определяем угол поворота сечения D относительно сечения К:

$$j_{DK} = \frac{M_{kp II} \cdot 0,5}{GJ_{r3}} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{8 \cdot 10^4 \cdot 402 \cdot 10^{-8}} = 1,55 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Абсолютный угол поворота сечения D (относительно заделки) равен алгебраической сумме углов закручивания участков KL и DK:

$$j_D = j_{KL} + j_{DK} = (-4,66 + 1,55) \cdot 10^{-3} = -3,11 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Определяем угол поворота сечения С относительно сечения D:

$$j_{CD} = \frac{M_{kp II} \cdot 0,5}{GJ_{r2}} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{8 \cdot 10^4 \cdot 61,3 \cdot 10^{-8}} = 10,20 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Абсолютный угол поворота сечения С (относительно заделки) равен алгебраической сумме углов закручивания участков KL, DK и CD:

$$j_C = j_{KL} + j_{DK} + j_{CD} = (-4,66 + 1,55 + 10,20) \cdot 10^{-3} = 7,09 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Определяем угол поворота сечения В относительно сечения С:

$$j_{BC} = \frac{M_{kpI} \cdot 0,5}{GJ_{r2}} = \frac{-1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{8 \cdot 10^4 \cdot 61,3 \cdot 10^{-8}} = -10,20 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Абсолютный угол поворота сечения В (относительно заделки) равен алгебраической сумме углов закручивания участков KL, DK, CD и BC:

$$j_B = j_{KL} + j_{DK} + j_{CD} + j_{BC} = (-4,66 + 1,55 + 10,20 - 10,20) \cdot 10^{-3} = -3,11 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Определяем угол поворота сечения А относительно сечения В:

$$j_{AB} = \frac{M_{kpI} \cdot 1,5}{GJ_{r1}} = \frac{-1 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{8 \cdot 10^4 \cdot 127 \cdot 10^{-8}} = -14,76 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Абсолютный угол поворота сечения А (относительно заделки) равен алгебраической сумме углов закручивания участков KL, DK, CD, BC и АВ:

$$j_A = j_{KL} + j_{DK} + j_{CD} + j_{BC} + j_{AB} = (-4,66 + 1,55 + 10,20 - 10,20 - 14,76) \cdot 10^{-3} = -17,87 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

## Задача 6.2

Определить из расчетов на прочность и жесткость требуемые размеры поперечного сечения вала (рис. 6.4) в двух вариантах: а) сечение – круг, б) сечение – кольцо с отношением внутреннего диаметра к наружному  $\alpha = 0,7$ . Сечение вала считать по всей длине постоянным. Принять:  $[t] = 25 \text{ МПа}$  и  $[q] = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}$ . Вал вращается с частотой вращения  $n = 220 \text{ об/мин}$ . Передаваемая мощность имеет следующие значения:  $N_1 = 48 \text{ кВт}$ ,  $N_2 = 22 \text{ кВт}$ ,  $N_3 = 14 \text{ кВт}$ ,  $N_4 = 12 \text{ кВт}$ .

### Решение

1 Вращающие моменты, передаваемые каждым из шкивов, (значения скручивающих моментов) вычисляем по формуле

$$M_{kp} = 9,55 \frac{N}{n}.$$

Следовательно:

$$M_1 = 9,55 \frac{N_1}{n} = 9,55 \cdot \frac{48}{220} = 2,09 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = 9,55 \frac{N_2}{n} = 9,55 \cdot \frac{22}{220} = 0,96 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = 9,55 \frac{N_3}{n} = 9,55 \cdot \frac{14}{220} = 0,61 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = 9,55 \frac{N_4}{n} = 9,55 \cdot \frac{12}{220} = 0,52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

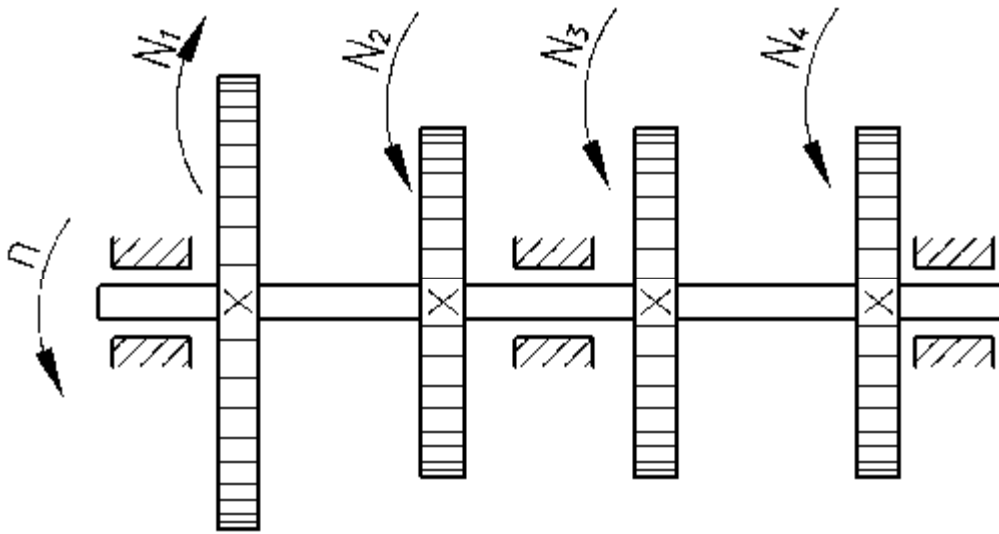


Рисунок 6.4

2 Строим эпюру крутящих моментов.

Эпюру крутящих моментов строим, начиная от левого конца. Сечениями, где приложены внешние моменты, стержень разбивается на три участка: I, II, III (рис 6.5). Определим крутящие моменты на каждом участке:

участок I –

$$M_{кр I} = M_1 = 2,09 \text{ кН} \cdot \text{м} ;$$

участок II –

$$M_{кр II} = M_1 - M_2 = 2,09 - 0,96 = 1,13 \text{ кН} \cdot \text{м} ;$$

участок III –

$$M_{кр III} = M_1 - M_2 - M_3 = 2,09 - 0,96 - 0,61 = 0,52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов (см. рис. 6.5).

3 Определяем требуемые размеры поперечного сечения вала.

Вычисляем требуемый полярный момент сопротивления сечения вала из расчета на прочность:

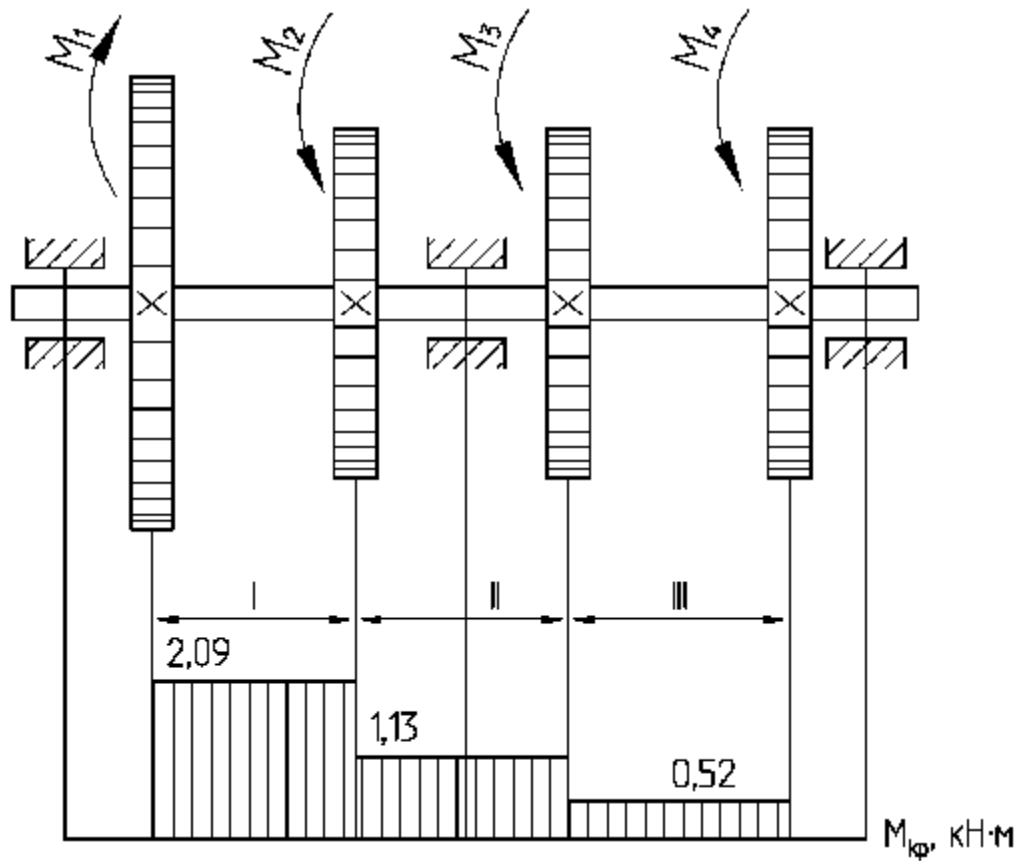


Рисунок 6.5

$$W_p \geq \frac{M_{кр \max}}{[\tau]} .$$

Отсюда

$$W_r \geq \frac{2,09 \cdot 10^{-3}}{25} \cdot 10^6 = 83,6 \text{ см}^3 .$$

Диаметр вала круглого сечения (рис 6.6, а)

$$D_k = \sqrt[3]{\frac{16W_r}{p}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 83,6}{3,14}} = 7,52 \text{ см} .$$

Наружный диаметр вала кольцевого сечения (рис 6.6, б)

$$D = \sqrt[3]{\frac{16W_r}{p(1-a^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 83,6}{3,14(1-0,7^4)}} = 8,25 \text{ см} .$$

Вычисляем требуемый полярный момент инерции сечения вала из расчета на жесткость:

$$J_p \geq \frac{M_{кр \max}}{G[\theta]} .$$

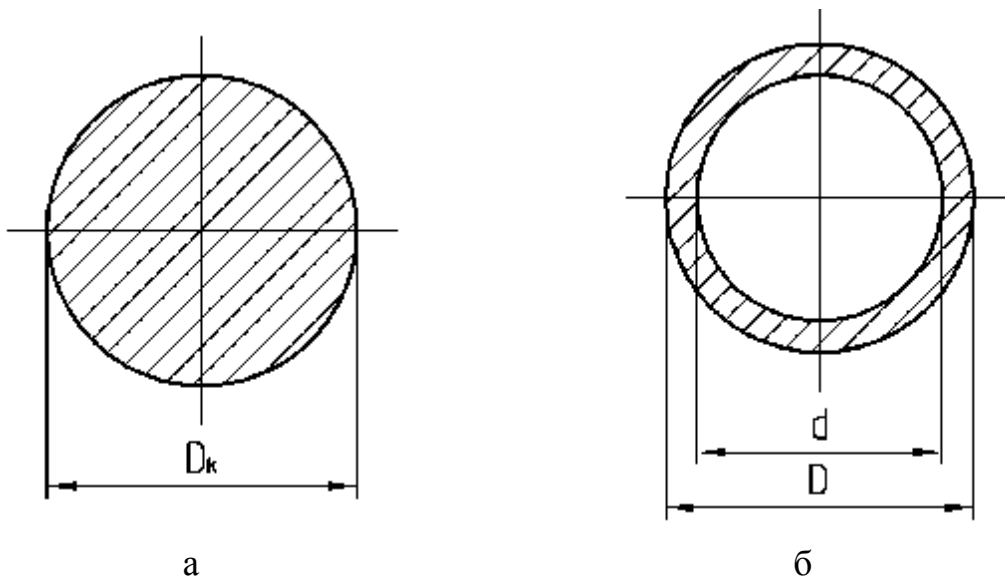


Рисунок 6.6

Отсюда

$$J_r \geq \frac{2,09 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^4 \cdot 5,3 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^8 = 493 \text{ см}^4.$$

Диаметр вала круглого сечения

$$D_k = \sqrt[4]{\frac{32J_r}{p}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 493}{3,14}} = 8,42 \text{ см}.$$

Наружный диаметр вала кольцевого сечения

$$D = \sqrt[4]{\frac{16W_r}{p(1-a^4)}} = \sqrt[4]{\frac{16 \cdot 493}{3,14(1-0,7^4)}} = 9,02 \text{ см}.$$

Требуемые размеры сечения из расчета на жесткость больше, чем из расчета на прочность, поэтому их и принимаем в качестве окончательных с округлением (округляем в большую сторону до диаметра, кратного 5 мм), т.е.  $D_k = 8,5 \text{ см}$ ,  $D = 9,5 \text{ см}$ .

## 6.3 Расчеты на кручение статически неопределимых систем

### Задача 6.3

Стальной стержень круглого поперечного сечения нагружен парами сил (рис. 6.7). Определить диаметр поперечного сечения стержня, построить эпюру максимальных касательных напряжений, приняв допускаемое напряжение  $[\tau] = 80 \text{ МПа}$ .

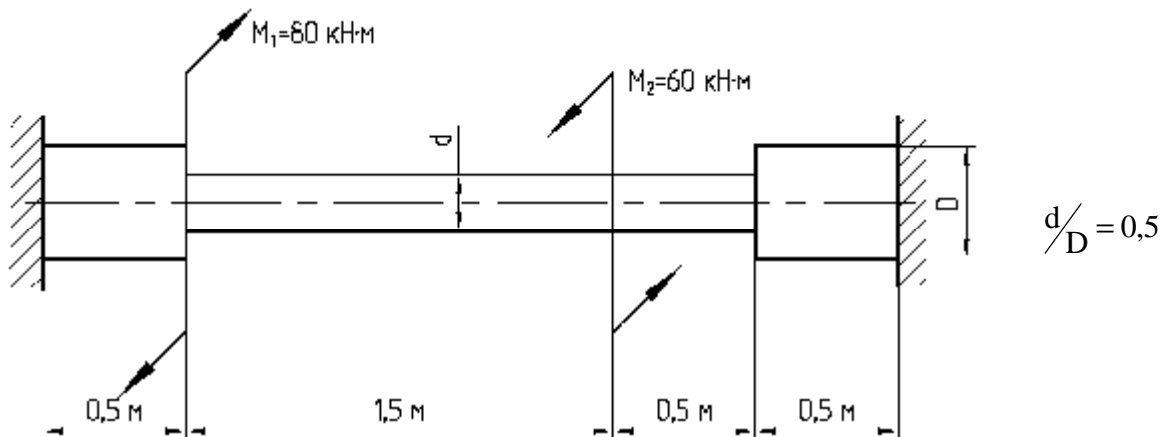


Рисунок 6.7

### Решение

1 Определяем степень статической неопределённости системы. Освобождаем стержень от связей, заменяем их реактивными моментами в заделках –  $M_A$  и  $M_B$  (рис. 6.8, б).

Условием равновесия стержня является только одно уравнение крутящих моментов  $\sum M_z = 0$ . Составляем уравнения равновесия стержня, взяв сумму моментов, приложенных к стержню относительно его оси:

$$M_A + M_1 - M_2 + M_B = 0,$$

$$M_A + 80 - 60 + M_B = 0,$$

$$M_A + M_B = -20.$$

Как видно, уравнение содержит два неизвестных момента. Задача является один раз статически неопределимой.

2 Сечениями, где приложены внешние моменты, стержень разбивается на три участка: I, II, III. Определим значения крутящих моментов в сечениях стержня, рассматривая отсеченные правые части:

участок I –

$$M_{\text{кр I}} = M_B;$$

участок II –

$$M_{\text{кр II}} = M_B - M_2 = M_B - 60;$$

участок III –

$$M_{\text{кр III}} = M_B - M_2 + M_1 = M_B - 60 + 80 = M_B + 20.$$

3 Рассмотрим геометрическую сторону задачи.

Условия деформации стержня состоят в том, что угол закручивания концевых сечений А и В равен нулю, т.е.  $\varphi_A = \varphi_B = 0$ .

4 Рассмотрим физическую сторону задачи.

Угол закручивания сечения А или сечения В определяется как сумма углов закручивания отдельных участков стержня. Выразим в уравнении совместности деформации абсолютные углы закручивания участков стержня по формуле закона Гука при кручении:

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GJ_{\rho}}$$

Вычисляем углы закручивания на каждом участке:

$$\text{участок BC} - \varphi_{\text{BC}} = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}};$$

$$\text{участок CD} - \varphi_{\text{CD}} = \frac{(M_B - M_2) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}};$$

$$\text{участок DK} - \varphi_{\text{DK}} = \frac{(M_B - M_2 + M_1) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{(M_B - 60 + 80) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}};$$

$$\text{участок АК} - \varphi_{\text{AK}} = \frac{(M_B - M_2 + M_1) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = \frac{(M_B - 60 + 80) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}}.$$

Здесь  $J_{\rho 1}$ ,  $J_{\rho 2}$  – полярные моменты инерции поперечных сечений вала диаметром  $D$  и  $d$  соответственно.

Так как по условию  $d/D = 0,5$ , то

$$J_{\rho 1} = \frac{\pi D^4}{32},$$

$$J_{\rho 2} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(0,5D)^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} \cdot 0,5^4 = 0,5^4 \cdot J_{\rho 1}.$$

$$\varphi_a = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} + \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = 0.$$

С учетом соотношения между  $J_{\rho 1}$  и  $J_{\rho 2}$  выражение для  $\varphi_a$  запишется следующим образом:

$$\varphi_a = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} + \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{G \cdot 0,5^4 J_{\rho 1}} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{G \cdot 0,5^4 J_{\rho 1}} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = 0.$$

Так как  $\frac{1}{GJ_{\rho 1}} \neq 0$ , этот множитель можно сократить и уравнение запишется следующим образом:

$$M_B \cdot 0,5 + \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{0,5^4} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{0,5^4} + (M_B + 20) \cdot 0,5 = 0,$$

$$0,5M_B + 24M_B - 1440 + 8M_B + 160 + 0,5M_B + 10 = 0,$$

$$33M_B = 1270,$$

$$M_B = 38,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Следовательно,

$$M_A = -20 - M_B = -20 - 38,5 = -58,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Определяем величины крутящих моментов на участках стержня:

участок I –

$$M_{\text{кр I}} = M_B = 38,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

участок II –

$$M_{\text{кр II}} = M_B - M_2 = M_B - 60 = 38,5 - 60 = -21,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

участок III –

$$M_{\text{кр III}} = M_B - M_2 + M_1 = M_B - 60 + 80 = M_B + 20 = 38,5 + 20 = 58,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 6.8, в).

6 Диаметр стержня определим из условия прочности стержня при кручении:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр max}}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

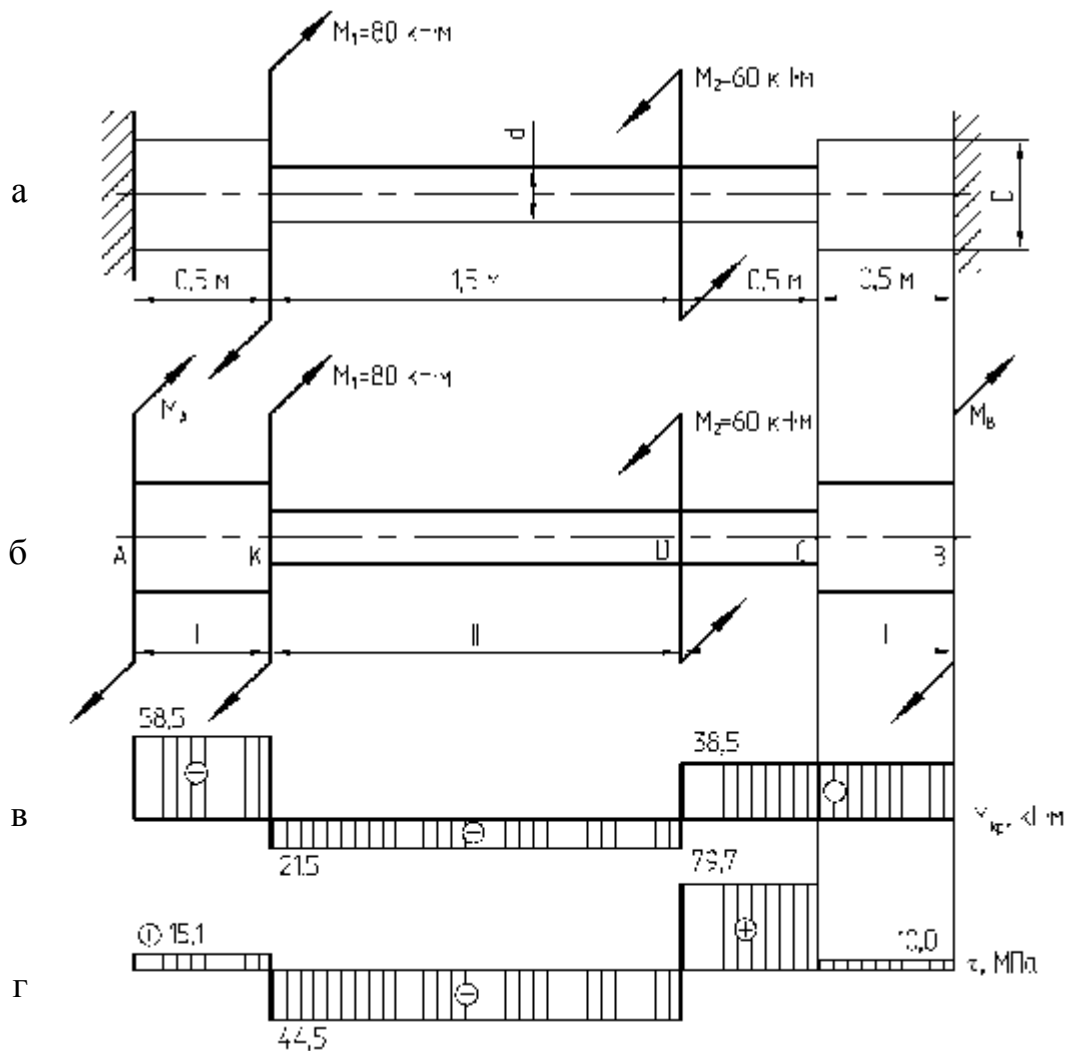


Рисунок 6.8

Наибольшая величина крутящего момента  $M_{кр \max} = 58,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$  на участке стержня АЕ большего диаметра, для которого полярный момент инерции определяется по формуле

$$W_{\rho 1} = \frac{\pi D^3}{16}.$$

Отсюда

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр \max}}{p[t]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 58,5 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 80}} \cdot 10^2 = 15,5 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$d = D \cdot 0,5 = 15,5 \cdot 0,5 = 7,8 \text{ см}.$$

Наибольшая величина крутящего момента  $M_{kp \max} = 38,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$  на участке стержня CD меньшего диаметра, для которого полярный момент инерции определяется по формуле

$$W_{\rho 2} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Отсюда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{kp \max}}{\rho[t]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 38,5 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 80}} \cdot 10^2 = 13,5 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$D = \frac{d}{0,5} = \frac{13,5}{0,5} = 27,0 \text{ см}.$$

Принимаем:  $d = 13,5 \text{ см}$ ,  $D = 27,0 \text{ см}$ .

7 Строим эпюру максимальных касательных напряжений, пользуясь формулой

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{W_{\rho}}.$$

Определим полярные моменты сопротивления для каждого диаметра:

$$W_{r1} = \frac{\rho D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 27,0^3}{16} = 3863 \text{ см}^3,$$

$$W_{r2} = \frac{\rho d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 13,5^3}{16} = 483 \text{ см}^3.$$

Определим касательные напряжения для каждого участка:

– участок BC ( $M_{kp I} = 38,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r1} = 3863 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max BC} = \frac{M_{kp I}}{W_{r1}} = \frac{38,5 \cdot 10^{-3}}{3863 \cdot 10^{-6}} = 10,0 \text{ МПа};$$

– участок CD ( $M_{kp I} = 38,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r2} = 483 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max CD} = \frac{M_{kp I}}{W_{r2}} = \frac{38,5 \cdot 10^{-3}}{483 \cdot 10^{-6}} = 79,7 \text{ МПа};$$

– участок DK ( $M_{kp II} = -21,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r2} = 483 \text{ см}^3$ ) –

$$t_{\max DK} = \frac{M_{kp II}}{W_{r2}} = \frac{-21,5 \cdot 10^{-3}}{483 \cdot 10^{-6}} = -44,5 \text{ МПа};$$

– участок АК ( $M_{kp III} = 58,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r1} = 3863 \text{ см}^3$ ) –

$$t_{\max AK} = \frac{M_{kp III}}{W_{r1}} = \frac{58,5 \cdot 10^{-3}}{3863 \cdot 10^{-6}} = 15,1 \text{ МПа}.$$

По найденным значениям касательных напряжений строим эпюру максимальных касательных напряжений (рис. 6.8, г).

### Задача 6.4

Стальной стержень круглого поперечного сечения нагружен парами сил (рис.6.9). Определить диаметр поперечного сечения стержня, построить эпюру максимальных касательных напряжений, приняв допустимое напряжение  $[t] = 80 \text{ МПа}$ .

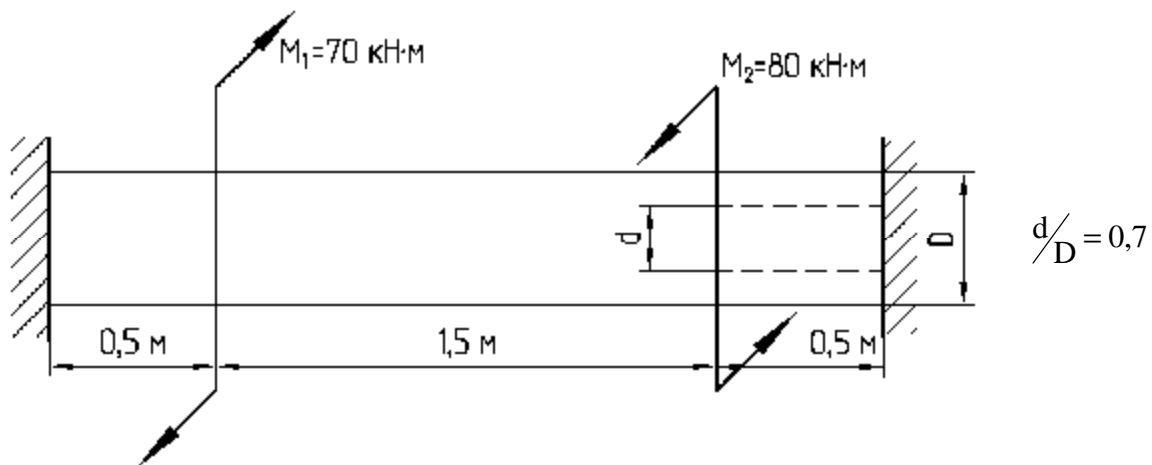


Рисунок 6.9

### Решение

1 Определяем степень статической неопределённости системы. Освобождаем стержень от связей, заменяем их реактивными моментами в заделках –  $M_A$  и  $M_B$  (рис. 6.10, б).

Условием равновесия стержня является только одно уравнение крутящих моментов  $\sum M_z = 0$ . Составляем уравнения равновесия стержня:

$$M_A + M_1 - M_2 + M_B = 0,$$

$$M_A + 70 - 80 + M_B = 0,$$

$$M_A + M_B = 10.$$

Как видно, уравнение содержит две неизвестные. Задача является один раз статически неопределимой.

2 Сечениями, где приложены внешние моменты, стержень разбивается на три участка: I, II, III. Определим значения крутящих моментов в сечениях стержня, рассматривая отсеченные правые части:

участок I –

$$M_{кр I} = M_B;$$

участок II –

$$M_{кр II} = M_B - M_2 = M_B - 80;$$

участок III –

$$M_{кр III} = M_B - M_2 + M_1 = M_B - 80 + 70 = M_B - 10.$$

3 Рассмотрим геометрическую сторону задачи.

Условия деформации стержня состоят в том, что угол закручивания концевых сечений А и В равен нулю, т.е.  $\varphi_A = \varphi_B = 0$ .

4 Рассмотрим физическую сторону задачи.

Угол закручивания сечения А или сечения В определяется как сумма углов закручивания отдельных участков стержня. Выразим в уравнении совместности деформации абсолютные углы закручивания участков стержня по формуле закона Гука при кручении:

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_{\rho}}$$

Вычисляем углы закручивания на каждом участке:

$$\text{участок BC} - \varphi_{BC} = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}};$$

$$\text{участок CD} - \varphi_{CD} = \frac{(M_B - M_2) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{(M_B - 80) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}};$$

$$\text{участок AD} - \varphi_{AD} = \frac{(M_B - M_2 + M_1) \cdot 0,5}{GJ_{\rho_2}} = \frac{(M_B - 80 + 70) \cdot 0,5}{GJ_{\rho_2}} = \frac{(M_B - 10) \cdot 0,5}{GJ_{\rho_2}}.$$

Здесь  $J_{\rho_1}$ ,  $J_{\rho_2}$  – полярные моменты инерции поперечных сечений вала диаметром  $D$  и  $d$  соответственно.

Так как по условию  $d/D = 0,7$ , то

$$J_{\rho_1} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - 0,7^4),$$

$$J_{\rho_2} = \frac{\pi D^4}{32}.$$

Следовательно,

$$J_{\rho_1} = J_{\rho_2} (1 - 0,7^4).$$

$$\varphi_a = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho_1}} + \frac{(M_B - 80) \cdot 1,5}{GJ_{\rho_2}} + \frac{(M_B - 10) \cdot 0,5}{GJ_{\rho_2}} = 0.$$

С учетом соотношения между  $J_{\rho_1}$  и  $J_{\rho_2}$  выражение для  $\varphi_a$  запишется следующим образом:

$$\varphi_a = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho_2} (1 - 0,7^4)} + \frac{(M_B - 80) \cdot 1,5}{GJ_{\rho_2}} + \frac{(M_B - 10) \cdot 0,5}{GJ_{\rho_2}} = 0.$$

Так как  $1/GJ_{\rho_1} \neq 0$ , этот множитель можно сократить и уравнение запишется следующим образом:

$$\frac{M_b \cdot 0,5}{1 - 0,7^4} + (M_B - 80) \cdot 1,5 + (M_B - 10) \cdot 0,5 = 0,$$

$$0,66M_B + 1,5M_B - 80 + 0,5M_B - 5 = 0,$$

$$2,66M_B = 85,$$

$$M_B = 32,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Следовательно,

$$M_A = 10 - M_B = 10,0 - 32,0 = -22,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5 Определяем величины крутящих моментов на участках стержня:  
участок I –

$$M_{\text{крI}} = M_b = 32,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

участок II –

$$M_{кр II} = M_b - M_2 = M_b - 80 = 32,0 - 80,0 = -48,0 \text{ кН} \cdot \text{м} ;$$

участок III –

$$M_{кр III} = M_b - M_2 + M_1 = M_b - 80 + 70 = M_b - 10 = 32,0 - 10,0 = 22,0 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 6.10, в).

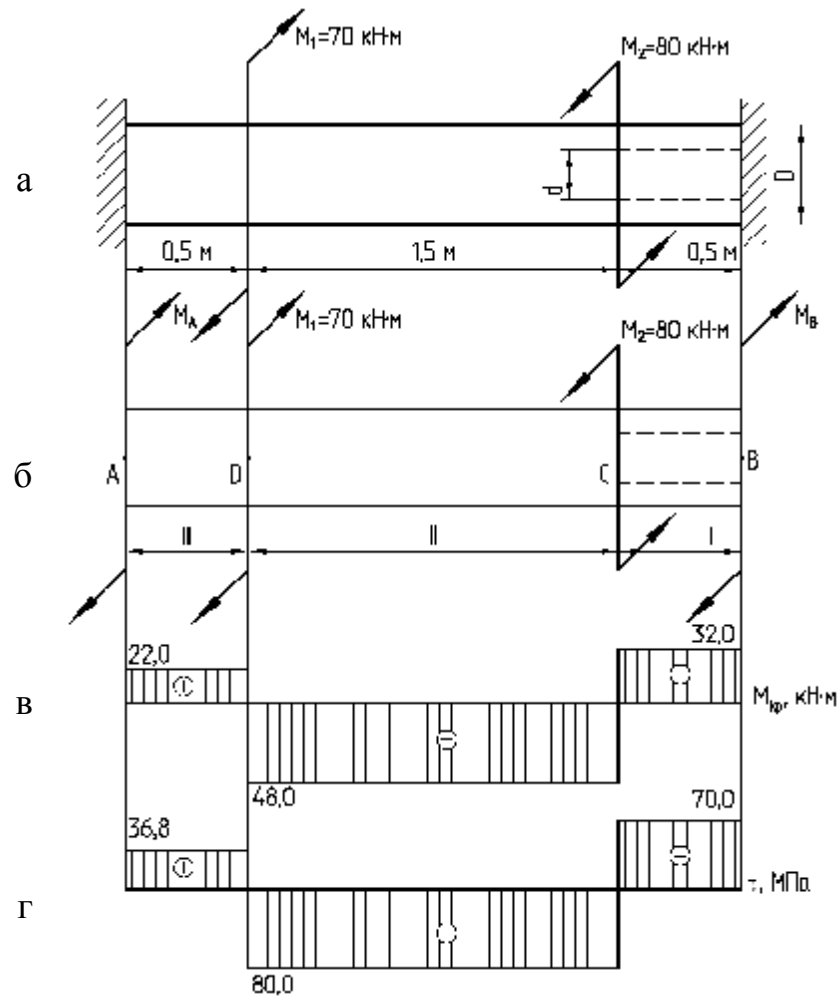


Рисунок 6.10

6 Диаметр стержня определим из условия прочности стержня при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр \max}}{W_p} \leq [\tau].$$

Наибольшая величина крутящего момента  $M_{\text{кр max}} = 48,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$  на участке стержня CD круглого поперечного сечения, для которого полярный момент инерции определяется по формуле

$$W_{\rho 2} = \frac{\pi D^3}{16}.$$

Отсюда

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр max}}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 48,0 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 80}} \cdot 10^2 = 14,5 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$d = D \cdot 0,7 = 14,5 \cdot 0,7 = 10,0 \text{ см}.$$

Наибольшая величина крутящего момента  $M_{\text{кр max}} = 22,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$  на участке стержня BC кольцевого поперечного сечения, для которого полярный момент инерции определяется по формуле

$$W_{\rho 1} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

Отсюда

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр max}}}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 22,0 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 80 \cdot (1 - 0,7^4)}} \cdot 10^2 = 12,3 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$d = D \cdot 0,7 = 12,3 \cdot 0,7 = 8,6 \text{ см}.$$

Принимаем:  $d = 10,0 \text{ см}$ ,  $D = 14,5 \text{ см}$ .

7 Строим эпюру максимальных касательных напряжений, пользуясь формулой

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}.$$

Определим полярные моменты сопротивления для каждого диаметра:

$$W_{r1} = \frac{\rho D^3}{16} \cdot (1 - \alpha^4) = \frac{3,14 \cdot 14,5^3}{16} \cdot (1 - 0,7^4) = 455 \text{ см}^3,$$

$$W_{r2} = \frac{\rho D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 14,5^3}{16} = 598 \text{ см}^3.$$

Определим касательные напряжения для каждого участка:

– участок BC ( $M_{kp I} = 32,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r1} = 455 \text{ см}^3$ ) –

$$t_{\max DC} = \frac{M_{kp I}}{W_{r1}} = \frac{32,0 \cdot 10^{-3}}{455 \cdot 10^{-6}} = 70,0 \text{ МПа};$$

– участок CD ( $M_{kp II} = -48,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r2} = 598 \text{ см}^3$ ) –

$$t_{\max CD} = \frac{M_{kp I}}{W_{r2}} = \frac{-48,0 \cdot 10^{-3}}{598 \cdot 10^{-6}} = 80,0 \text{ МПа};$$

– участок AD ( $M_{kp III} = 22,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $W_{r2} = 598 \text{ см}^3$ ) –

$$t_{\max AD} = \frac{M_{kp III}}{W_{r2}} = \frac{22,0 \cdot 10^{-3}}{598 \cdot 10^{-6}} = 36,8 \text{ МПа}.$$

По найденным значениям касательных напряжений строим эпюру максимальных касательных напряжений (рис. 6.10, г).

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник для вузов /В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 2007. – 592 с. – ISBN 5-7038-2699-3.
- 2 Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов: учебник для вузов /Г.С. Писаренко и [др.]. – К.: Высш. школа, 1997. – 773 с.
- 3 Ицкович, Г.М. Сопротивление материалов: учебник для сред. спец. учеб. заведений / Г.М. Ицкович. – М.: Высш. школа, 2001. – 368 с. – ISBN 5-06-004153-0.
- 4 Беляев, Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов /Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
- 5 Качурин, В.К. Сборник задач по сопротивлению материалов / В.К. Качурин и [др.].– М.: Наука, 1970. – 432 с.
- 6 Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов/ Г.С. Писаренко и [др.]. – Киев.: Наукова думка, 1988. – 704 с. – ISBN 5-12-000299-4.
- 7 Ободовский, Б.А. Пособие по сопротивлению материалов в примерах и задачах / Б.А. Ободовский. – Харьков: ХГУ, 1987. – 383 с.
- 8 Ицкович, Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие для вузов / Г.М. Ицкович, Л.С. Минин, А.И. Винокуров – М.: Высш. школа, 2001. – 592 с. – ISBN 5-06-003494-1.
- 9 Методичні вказівки до розрахунково-графічних завдань №1-3 з дисципліни “Опір матеріалів” (для студентів денної форми навчання усіх механічних спеціальностей) / укл.: В.А.Овчаренко, Т.П. Зінченко. – Краматорськ: ДДМА, 1999. – 44 с.
- 10 Методические указания к контрольным работам №1 и №2 по дисциплине «Сопротивление материалов» (для студентов заочной формы обучения всех механических специальностей) / сост. В.А. Овчаренко. – Краматорск: ДГМА, 2006. – 60 с.
- 11 Методические указания к контрольным работам №3 и №4 по дисциплине «Сопротивление материалов» (для студентов заочной формы обучения всех механических специальностей) / сост.: В.А.Овчаренко, Н.А. Соломин. – Краматорск: ДГМА, 2007. – 48 с.
- 12 Методические указания к контрольным работам по дисциплине «Сопротивление материалов» (для студентов заочной формы обучения специальности «Информационные технологии проектирования») / сост. В.А. Овчаренко. – Краматорск: ДГМА, 2004. – 56 с.

13 Методичні вказівки до розрахунково-графічних завдань з дисципліни «Опір матеріалів» (для студентів денної форми навчання спеціальності «Інформаційні технології проектування»)/ укл. В.А.Овчаренко. – Краматорськ: ДДМА, 2000. – 44 с.

14 Методические указания к курсовым расчетно-графическим работам по дисциплине «Соппротивление материалов». Задания 4-6/ сост.: Н.А.Соломин, А.Ю. Деньщиков. – Краматорск: ДГМА, 2004. – 56 с.

15 Методические указания к выполнению расчетно-графической работы «Определение внутренних усилий в балках» по дисциплине «Соппротивление материалов»/ сост.: Ю.С. Холодняк , Л.В. Кутовой. – Краматорск: ДГМА, 2005. – 28 с.

16 Соппротивление материалов: конспект лекций. Ч. I / сост. Л.В. Кутовой, Т.П. Зинченко, В.А. Овчаренко. – Краматорск: ДГМА, 2004. – 176с.

17 Соппротивление материалов: конспект лекций. Ч. II / сост. Л.В. Кутовой, Т.П. Зинченко, В.А. Овчаренко. – Краматорск: ДГМА, 2005. – 176 с.

18 Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Опір матеріалів». Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок /укл.: Л.В. Кутовий, Ю.С. Холодняк. – Краматорськ: ДДМА, 2004. – 24 с.

19 Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Опір матеріалів». Побудова епюр внутрішніх зусиль для рам /укл. Л.В. Кутовий, Ю.С. Холодняк. – Краматорськ: ДДМА, 2005. – 24 с.

20 Овчаренко, В.А. Самостійна робота студентів з дисципліни «Опір матеріалів»: навч. посібник /В.А.Овчаренко, Л.В. Кутовий, М.О. Соломін, О.Ю. Деньщиков. - Краматорськ: ДДМА, 2004. –208 с. – ISBN 966-7851-27---3

21 Кутовий, Л.В. Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів»: навч. посібник /Л.В. Кутовий, В.А. Овчаренко, Ю.С. Холодняк, М.О. Соломін, О.Ю. Деньщиков. – Краматорськ: ДДМА, 2007. – 228 с. – ISBN 978-966-379-156-2.

**Приложение А**  
Уголок равнополочный. ГОСТ 8509-72

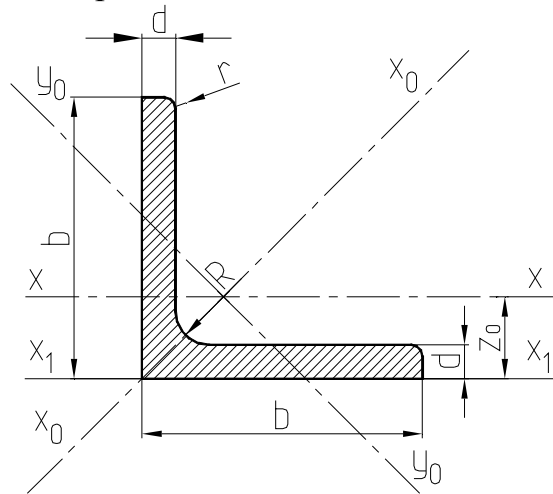


Таблица А.1

Номер уголка	Размеры, мм		$F$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$J_{x0\ max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x0\ max}$ , см	$J_{y0\ min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y0\ min}$ , см	$Z_0$ , см
	$b$	$d$								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
		5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
		6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46

Продолжение таблицы А.1

Номер угол- ка	Размеры, мм		$F$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$J_{x0\ max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x0\ max}$ , см	$J_{y0\ min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y0\ min}$ , см	$Z_0$ , см
	$b$	$d$								
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
		16	29,7	264	2,98	416	3,74	112,0	1,94	3,06
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
14	140	16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90

Продолжение таблицы А.1

Номер угол- ка	Размеры, мм		$F$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$J_{x0 \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x0 \max}$ , см	$J_{y0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y0 \min}$ , см	$Z_0$ , см
	$b$	$d$								
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	8117	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31

**Приложение Б**  
**Уголок неравнополочный. ГОСТ 8510-72**

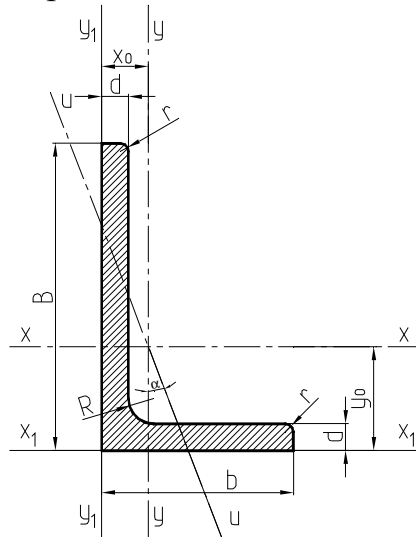


Таблица Б.1

Но- мер уго- лка	Размеры, мм			F, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u min</sub> , см	x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	Угол на- клона оси u, tg α
	B	b	d								
2,5/1,6	25	1 6	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392
3/2	30	2	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
		0	4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	0,54	1,04	0,421
3,2/2	32	2	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382
		0	4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374
4/2,5	40	2	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385
		4	4	2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
		5	5	3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	0,66	1,41	0,374
4/3	40	3	4	2,67	4,18	2,01	1,09	0,64	0,78	1,28	0,544
		9	5	3,28	5,04	2,41	1,33	0,64	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	45	2	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382
		8	4	2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	3	3	2,42	6,18	1,99	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403
		2	4	3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	56	3	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
		6	5	4,41	13,8	4,48	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404

Продолжение таблицы Б.1

Но- мер уго- лка	Размеры, мм			F, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>u</sub> мин <sup>2</sup> , см <sup>4</sup>	i <sub>u min</sub> , см	x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	Угол накло- на оси u, tg α
	B	b	d								
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
			5	4,98	19,9	6,26	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6	5,90	23,3	7,28	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8	7,68	29,6	9,15	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	23,41	12,08	6,41	1,07	1,26	2,00	0,576
			6	6,60	27,46	14,12	7,52	1,07	1,30	2,04	0,575
			7	7,62	31,32	16,05	8,60	1,06	1,34	2,08	0,571
			8	8,62	35,00	18,88	9,65	1,06	1,37	2,12	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
			6	7,25	40,92	14,60	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			7	8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	1,25	2,48	0,435
			8	9,47	52,38	18,52	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430
8/5	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	1,09	1,13	2,60	0,387
			6	7,55	48,98	14,85	8,88	1,08	1,17	2,65	0,386
8/6	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	1,29	1,49	2,47	0,547
			7	9,42	59,61	28,74	15,58	1,29	1,53	2,52	0,546
			8	10,6	66,88	32,15	17,49	1,28	1,57	2,56	0,544
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	19,7	11,8	1,22	1,26	2,92	0,384
			6	8,54	70,6	21,2	12,7	1,22	1,28	2,95	0,384
			8	11,2	90,9	27,1	16,3	1,21	1,36	3,04	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	30,6	18,20	1,38	1,42	3,23	0,393
			7	11,1	113,0	35,0	20,83	1,37	1,46	3,28	0,392
			8	12,6	127,0	39,2	23,38	1,36	1,50	3,32	0,391
			10	15,5	154,0	47,1	28,34	1,35	1,58	3,40	0,387
10/6,5	100	65	7	11,2	114,0	38,3	22,77	1,41	1,52	3,24	0,415
			8	12,7	138,3	43,0	25,24	1,41	1,56	3,28	0,414
			10	15,7	155,5	51,7	30,60	1,40	1,64	3,37	0,410
11/7	110	70	6,5	11,4	142	45,6	26,9	1,53	1,58	3,55	0,402
			8	13,9	172	54,6	32,3	1,52	1,64	3,61	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	227	73,7	43,4	1,76	1,80	4,01	0,407
			8	16,0	256	83,0	48,8	1,75	1,84	4,05	0,406
			10	19,7	312	100,0	59,3	1,74	1,92	4,14	0,404
			12	23,4	365	117,0	69,5	1,72	2,00	4,22	0,400
14/9	140	90	8	18,0	364	120	70,3	1,98	2,03	4,49	0,411
			10	22,2	444	146	85,5	1,96	2,12	4,58	0,409
16/10	160	100	9	22,9	606	186	110	2,20	2,23	5,19	0,391
			10	25,3	667	204	121	2,19	2,28	5,23	0,390
			12	30,0	784	239	142	2,18	2,36	5,32	0,388
			14	34,7	897	272	162	2,16	2,43	5,40	0,385

Продолжение таблицы Б.1

Но- мер уго- лка	Размеры, мм			F, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>u</sub> min, см <sup>4</sup>	i <sub>u min</sub> , см	X <sub>0</sub> , см	Y <sub>0</sub> , см	Угол накло- на оси u, tg α
	B	b	d								
18/11	180	110	10	28,3	952	276	165	2,42	2,44	5,88	0,375
			12	33,7	1123	324	194	2,40	2,52	5,97	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	446	264	2,75	2,79	6,50	0,392
			12	37,9	1568	482	285	2,74	2,83	6,54	0,392
			14	43,9	1801	551	327	2,73	2,91	6,62	0,390
			16	49,8	2026	617	367	2,72	2,99	6,71	0,388
25/16	250	160	12	48,3	3147	1032	604	3,54	3,53	7,97	0,410
			16	63,6	4091	1333	781	3,50	3,69	8,14	0,408
			18	71,1	4545	1475	896	3,49	3,77	8,23	0,407
			20	78,5	4987	1613	949	3,48	3,85	8,31	0,405

**Приложение В**  
**Двутавр. ГОСТ 8239-72**

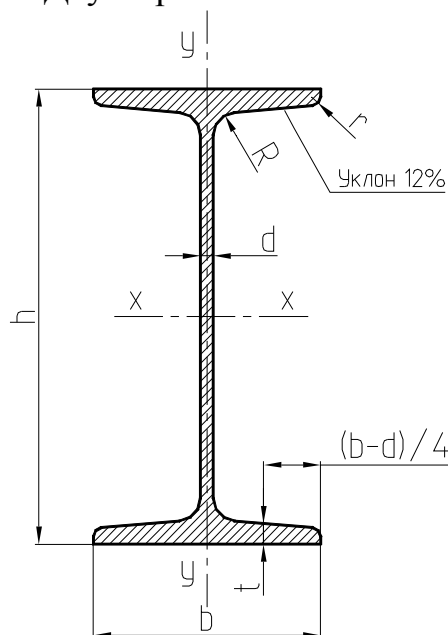


Таблица В.1

Но- мер про- филя	Размеры, мм				F, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см
	h	b	d	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

**Приложение Г**  
**Швеллер. ГОСТ 8240-72.**

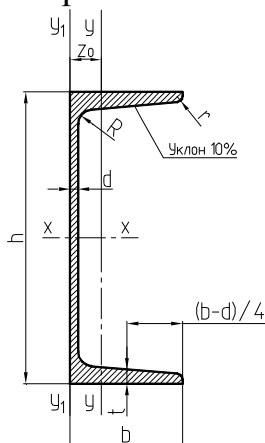


Таблица Г.1

Но- мер про- филя	Размеры, мм				F, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x3</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x3</sub> , см <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y3</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	z <sub>0</sub> , см
	H	b	d	t									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

*Навчальне видання*

**ОПР МАТЕРІАЛІВ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**щодо підготовки до практичних занять  
(для студентів всіх механічних спеціальностей  
очної і заочної форм навчання)**

**ЧАСТИНА 1**

(Російською мовою)

Укладачі: **ОВЧАРЕНКО Володимир Андрійович,  
КАПОРОВИЧ Світлана Володимирівна**

Редактор Н.О.Хахіна

Комп'ютерна верстка О.П.Ордіна

176/2007.

Папір офсетний.

Тираж 50 прим.

Підп. до друку

Ум. друк. арк. 10,00.

Формат 60x84/16.

Обл.-вид. арк. 8,66.

Зам. №

Видавець і виготівник

«Донбаська державна машинобудівна академія»

84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру  
серія ДК № 1633 від 24.12.2003