

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

Л.В.Кутовий, Т.П.Зінченко, В.А.Овчаренко

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

**ОПР МАТЕРІАЛІВ**

(для студентів всіх механічних спеціальностей  
денної та заочної форм навчання)

ЧАСТИНА 2

Затверджено  
на засіданні методичної ради  
Протокол №            від            2008

Краматорськ 2008

## УДК 539.315

Конспект лекцій з дисципліни «Опір матеріалів» (для студентів всіх механічних спеціальностей денної та заочної форм навчання)/ Уклад.: Л.В.Кутовий, Т.П.Зінченко, В.А.Овчаренко. – Краматорськ: ДДМА, 2008. – Ч.2. – 168 с.

Наведений конспект лекцій, які викладають студентам Донбаської державної машинобудівної академії всіх механічних спеціальностей з другої частини курсу. Дані приклади розрахунків основних типів завдань і рекомендована література.

Наведені екзаменаційні питання.

Укладачі: Л.В.Кутовий, доц.  
Т.П.Зінченко, доц.  
В.А.Овчаренко, доц.

Відп. за випуск С.В.Подлесний, доц.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	6
1 ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРУЖНОЇ СТРИЖНЕВОЇ СИСТЕМИ .....	6
1.1 Потенціальна енергія деформації пружної системи .....	6
1.1.1 Потенціальна енергія для простих видів навантаження.....	9
1.1.2 Потенціальна енергія бруса в загальному випадку навантаження.....	14
1.2 Теорема Кастіліано .....	15
2 ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРУЖНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛА МОРА.....	18
3 ЧИСЕЛЬНЕ РІШЕННЯ ІНТЕГРАЛА МОРА.....	23
3.1 Обчислення інтеграла Мора за способом Верещагіна .....	23
3.2 "Перемноження" епюр за допомогою формули крайніх ординат .....	29
4 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ .....	32
4.1 Статично невизначувані стрижневі системи. Їх степінь статистичної невизначуваності.....	32
4.2 Основні етапи розрахунку статично невизначуваних систем методом сил .....	37
4.3 Канонічні рівняння методу сил.....	39
4.4 Теорема про взаємність робіт і переміщень.....	42
5 ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНОЇ РАМИ..	44
6 РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК.....	51
6.1 Поняття про нерозрізні балки .....	51
6.2 Особливості вибору основної системи для нерозрізної балки.....	53
6.3 Приклад розрахунку нерозрізної балки.....	56
7 СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ .....	60
7.1 Явище подовжнього згинання. Поняття про стійкість. Види рівноваги пружних систем. Критичні сили і критичні напруження .....	60

7.2	Формула Ейлера для визначення критичної сили шарнірно закріпленого стрижня .....	64
7.3	Вплив умов закріплення кінців стрижня на величину критичної сили .....	68
8	<b>ПРАКТИЧНІ РОЗРАХУНКИ СТИНУТИХ СТРИЖНІВ НА СТІЙКІСТЬ .....</b>	<b>71</b>
8.1	Межі застосовності формули Ейлера. Формула Ясинського.....	71
8.2	Коефіцієнт зменшення основних допустимих напружень. Умова стійкості .....	77
8.3	Практичні розрахунки на стійкість .....	78
9	<b>ДЕФОРМАЦІЯ СТРИЖНІВ ПРИ ДИНАМІЧНОМУ РЕЖИМІ НАВАНТАЖЕННЯ.....</b>	<b>82</b>
9.1	Поняття про динамічний режим навантаження, його особливості ....	82
9.2	Коливання: основні поняття .....	85
9.3	Вільні (гармонійні) коливання пружної системи з одним ступенем вільності.....	88
9.4	Коливання пружної системи з одним ступенем вільності з лінійним загасанням .....	91
10	<b>ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ.....</b>	<b>93</b>
11	<b>РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ІНЕРЦІЇ..</b>	<b>102</b>
11.1	Визначення напружень і деформацій при рівноприскореному русі стрижня з урахуванням власної ваги .....	102
11.2	Розрахунок кільця при рівномірному обертанні.....	104
11.3	Розрахунки на ударну дію навантажень.....	106
12	<b>МІЦНІСТЬ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ НАПРУЖЕННЯХ, ЩО ЦИКЛІЧНО ЗМІНЮТЬСЯ ЗА ЧАСОМ.....</b>	<b>112</b>
12.1	Втомна міцність і її особливості. Механізм втомних руйнувань .	112
12.2	Основні характеристики циклу напружень. Границя витривалості .....	116
12.3	Випробування матеріалів на втому.....	118
12.4	Діаграми граничних напружень і граничних амплітуд .....	121

13 ВПЛИВ КОНСТРУКТИВНО-ТЕХНОЛОГІЧНИХ ЧИННИКІВ НА ГРАНИЦЮ ВИТРИВАЛОСТІ МАТЕРІАЛУ .....	124
13.1 Вплив концентрації напружень .....	124
13.2 Вплив розмірів (масштабний чинник).....	127
13.3 Вплив стану поверхні .....	128
13.4 Вплив технологічних і експлуатаційних чинників .....	130
13.5 Заходи боротьби із зломами втоми.....	131
14 РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗМІННИХ НАПРУЖЕННЯХ...	132
14.1 Одержання коефіцієнта запасу міцності .....	132
14.2 Розрахунок валу з урахуванням циклічних напружень .....	135
15 РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ ПО ГРАНИЧНИХ СТАНАХ.....	139
15.1 Основні поняття про граничний стан. Схематизація діаграми розтягання .....	139
15.2 Розрахунки при розтяганні і стисканні.....	142
15.3 Розрахунки при крученні.....	145
15.4 Розрахунки при плоскому згинанні .....	148
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	152
Додаток А. ДВОТАВРИ СТАЛЕВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ .....	155
Додаток Б. ШВЕЛЕРИ.....	156
Додаток В. КУТИКИ СТАЛЕВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ РІВНОСМУЖНІ .....	157
Додаток Г. КУТИКИ СТАЛЕВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ НЕРІВНОСМУЖНІ .	159
Додаток Д. КОЕФІЦІЄНТИ $j$ ДЛЯ РІЗНИХ МАТЕРІАЛІВ.....	161
Додаток Е. ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ЕКЗАМЕНУ .....	162
Додаток Ж. ПИТАННЯ ДЛЯ ЗДАЧІ МОДУЛІВ .....	164

## **ВСТУП**

Запропонований посібник є продовженням посібника: «Конспект лекцій з дисципліни «Опір матеріалів» Ч. I.» (автори: Л.В. Кутовий, Т.П. Зінченко, В.А. Овчаренко). Він призначений для студентів технічних спеціальностей Донбаської державної машинобудівної академії денної і заочної форм навчання. У ньому відображено зміст лекцій авторів, які читаються в академії.

При викладенні матеріалу автори намагалися залишитися, перш за все в рамках затвердженої програми для машинобудівних вузів, розрахованій на три триместри.

## **1 ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРУЖНОЇ СТРИЖНЕВОЇ СИСТЕМИ**

### **1.1 Потенціальна енергія деформації пружної системи**

Одним з найважливіших завдань опору матеріалів є оцінка жорсткості конструкції, тобто ступеня спотворення її форми під дією навантажень, зв'язків, зміни температури. Для вирішення вказаного завдання необхідно вміти визначати переміщення (лінійні та кутові) пружної системи (балки, рами, криволінійного стрижня, ферми і т.д.), навантаженої довільним чином.

Розглянемо загальний випадок навантаження бруса, коли в поперечних перерізах можуть виникати нормальні та поперечні сили, згинальні та крутні моменти.

Рішення поставленої задачі необхідне не тільки для з'ясування величини самих переміщень і оцінки жорсткості конструкції. На основі визначення переміщень створюються загальні методи визначення внутрішніх силових чинників в статично невизначуваних системах. Визначення переміщень необхідне також при дослідженні питань коливань пружних систем.

Цей загальний метод визначення переміщення заснований на двох основних принципах механіки: на принципі можливих переміщень і на законі збереження енергії.

Згідно з законом збереження енергії, робота зовнішніх сил не зникає, а трансформується в потенціальну енергію, що накопичується в пружному тілі. Отже, величина накопиченої потенціальної енергії деформації визначається величиною роботи зовнішніх сил. Ця енергія виявляється у вигляді роботи, що здійснюється при розвантаженні внутрішніми силами. Знімаючи, наприклад, частину гир, прикладених до балки (рис. 1.1), відмітимо, що балка декілька випрямиться і підведе гирі, що залишилися.

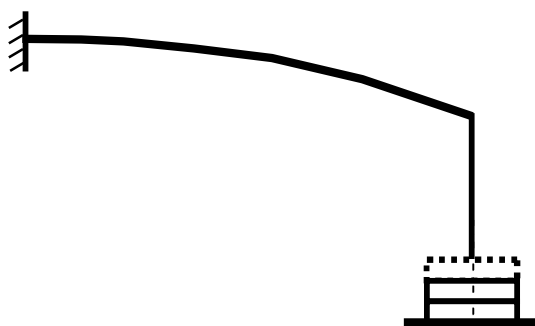


Рисунок 1.1

Таким чином, пружне тіло здатне акумулювати механічну енергію, яку можна повернути при розвантаженні.

Розглянемо процес деформації пружного тіла з енергетичної точки зору. Зовнішні сили, прикладені до пружного тіла, здійснюють певну роботу. Позначимо її через  $A$ . Ця робота частково переходить в потенціальну енергію  $U$  деформації тіла, а частково йде на надання швидкості масі тіла, тобто перетворюється на кінетичну енергію  $K$ .

Баланс енергії має вигляд

$$A=U+K.$$

Якщо навантаження проводиться поволі, і швидкість переміщення мас тіла буде вельми малою, то можна рахувати  $K=0$ . Такий процес навантаження можна вважати статичним. Тіло у будь-який момент часу знаходиться в стані рівноваги. У цьому випадку

$$A=U$$

і вся робота зовнішніх сил переходить в потенціальну енергію деформації.

При розвантаженні тіла його внутрішні сили проводять роботу за рахунок потенціальної енергії деформації тіла. Таким чином, пружне тіло є акумулятором енергії (наприклад, пружина годинникового механізму, ресора і т.д.).

При цьому ми нехтуватимемо магнітними, електричними і тепловими явищами, супроводжуваними пружні статичні деформації тіла, оскільки їх вплив незначний.

Таким чином, можна сказати, що повне перетворення одного виду енергії на інший має місце, якщо деформація відбувається без порушення рівноваги системи. Мірою енергії, що перетворилася на інший вид, є величина роботи, проведеної силами, що діють на конструкцію.

Позначимо величину накопиченої потенціальної енергії через  $U$ , а зменшення потенціальної енергії зовнішніх навантажень через  $U_p$ . Тоді величина  $U_p$  вимірюється позитивною роботою цих навантажень  $A_p$ . З іншого боку, накопиченню потенціальної енергії деформації відповідає негативна робота внутрішніх міжчастинних сил ( $-A$ ), оскільки переміщення точок тіла при деформації відбуваються в зворотному у відношенні до внутрішніх сил напрямку.

Закон збереження енергії при деформації пружних систем набуває вигляду

$$U_p = U. \quad (1.1)$$

Замінюючи в цьому виразі величини  $U_p$  і  $U$  чисельно рівними ним значеннями  $A_p$  і  $-A$ , одержуємо інше формулювання цього закону

$$A_p = -A. \quad (1.2)$$

З рівняння (1.1) виходить, що потенціальна енергія деформації  $U$  чисельно рівна роботі зовнішніх сил  $A_p$ , виконаній ними при цій деформації, тобто

$$U = A_p. \quad (1.3)$$

### 1.1.1 Потенціальна енергія для простих видів навантаження

При визначенні потенціальної енергії припускати, що деформації не тільки матеріалу, але і всієї конструкції, дотримуючись закону Гука, пропорційні навантаженням. Визначенню потенціальної енергії передують аналіз внутрішніх силових чинників, що виникають в брусі. Цей аналіз проводиться, як відомо, за допомогою методу перерізів.

Для визначення потенціальної енергії деформації виділимо з бруса елементарну ділянку довжиною  $dz$  (рис.1.2). Лівий переріз закріпимо жорстко.

При цьому робота всіх силових чинників в цьому перерізі буде дорівнювати нулю. Точка приведення сил в правому перерізі унаслідок деформації елемента одержує деякі малі переміщення, на яких здійснюється шукана робота.

Дуже важливо, що згідно з принципом суперпозиції кожному з шести силових чинників відповідають такі переміщення, на яких жоден з інших п'яти чинників роботи не здійснює. Отже, потенціальна енергія елемента може розглядатися як сума незалежних робіт кожного з шести силових чинників, тобто як сума енергії Розтягання, зсуву, кручення і згинання.

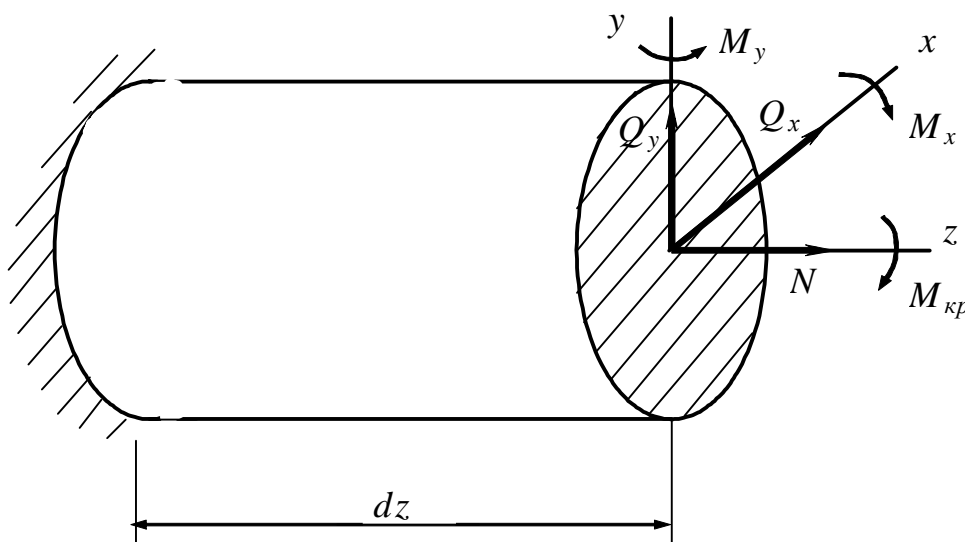


Рисунок 1.2

Визначимо величину роботи зовнішніх сил при простих деформаціях.

## Розтягання-стискання

Розглянемо стрижень (рис.1.3), який розтягається силою  $\bar{N}$ .

Для більшої наочності подовження стрижня зображене в збільшеному масштабі. Внизу показаний графік зміни сили  $\bar{N}$  залежно від абсолютного подовження  $Dl$ . Оскільки на подовженні  $Dl$  сила  $\bar{N}$  не залишається постійною, то робота, витрачена на розтягання стрижня, повинна бути визначена інтегруванням за елементарними ділянками шляху.

На елементарному переміщенні  $d(Dl)$  робота поточної сили  $\bar{N}$  буде дорівнювати

$$dA = \bar{N} \cdot d(Dl). \quad (1.4)$$

Очевидно, що робота на переміщенні  $Dl$  чисельно дорівнює площі трикутника  $OBC$ , тобто дорівнює половині добутку найбільшого значення сили на переміщенні  $Dl$ :

$$A = U = \frac{1}{2} N Dl. \quad (1.5)$$

У випадку якби сила  $\bar{N}$  на шляху  $Dl$  залишалася постійною, її робота визначалася б добутком  $\bar{N} \cdot Dl$ .

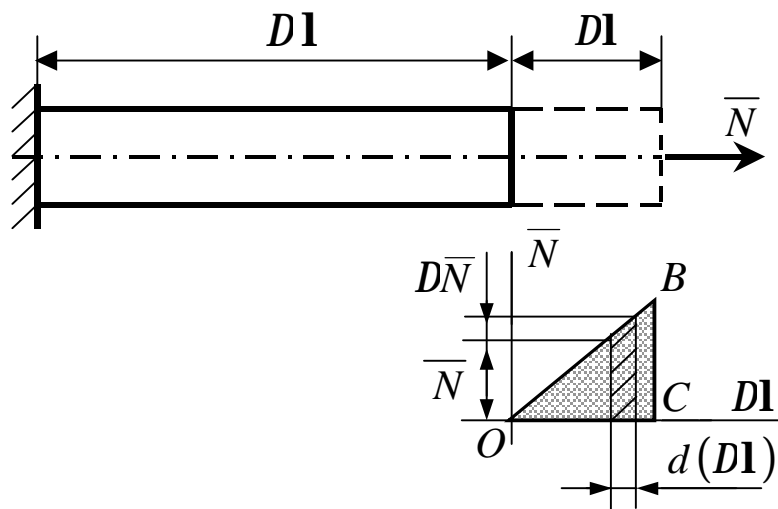


Рисунок 1.3

Згідно з законом Гука

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF},$$

одержуємо

$$U = \frac{N^2 l}{2EF}. \quad (1.6)$$

Якщо подовжнє зусилля  $\overline{N}$  міняється уздовж осі стрижня, то потенціальна енергія деформації винна визначатися підсумовуванням за ділянками  $dz$ .

Для елементарної ділянки

$$dU = \frac{N^2 dz}{2EF},$$

а для всього стрижня потенціальна енергія розтягання-стискання дорівнює

$$U_{p-c} = \int_1 \frac{N^2 dz}{2EF}. \quad (1.7)$$

### Чистий зсув

При чистому зсуві, як і при розтяганні (та і взагалі при всякому напруженому стані), в тілі, що деформується, накопичується пружна потенціальна енергія. Цю енергію легко підрахувати, розглядаючи зміну форми прямокутного елемента.

Розглянемо елемент довжиною  $dz$  і для спрощення міркувань закріпимо одну з граней (рис.1.4).

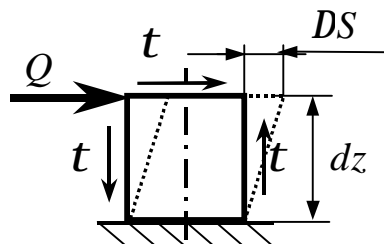


Рисунок 1.4

Роботу поступово зростаючої поперечної сили  $Q$ , аналогічно попередньому випадку, можна знайти за формулою

$$dA = \frac{1}{2} Q \cdot d\Delta S. \quad (1.8)$$

Підставивши в рівняння (1.8) закон Гука при зсуві  $d\Delta S = \frac{Qdz}{GF}$ ,

одержимо 
$$dA = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 dz}{GF}.$$

Для всього стрижня, що випробовує чистий зсув

$$U_{\text{сд}} = A = \int_1 \frac{Q^2 dz}{2GF}. \quad (1.9)$$

### Кручення

Розглянемо ділянку закрученого бруса довжиною  $dz$  (рис.1.5).

Пружна енергія, накопичена в цьому елементі

$$dU = \frac{1}{2} M_{\text{кр}} dj \quad (1.10)$$

де  $dj$  – взаємний кут повороту перерізів.

Двійка, що стоїть в знаменнику, є, знову ж таки, наслідком того, що крутний момент  $M_{\text{кр}}$  міняється прямо пропорційно деформації.

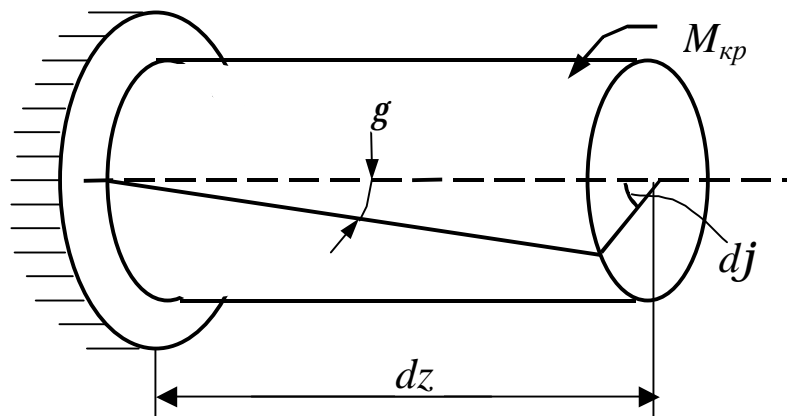


Рисунок 1.5

Підставимо в рівняння (1.10) закон Гука для кручення  $dj = \frac{M_{кр} dz}{GI_r}$  і

одержимо

$$dU = \frac{M_{кр}^2 dz}{2GI_r}. \quad (1.11)$$

Потенціальна енергія у всьому брусі при крученні дорівнює

$$U_{кр} = \int_1 \frac{M_{кр}^2 dz}{2GI_r}. \quad (1.12)$$

### Чисте згинання

Енергія пружних деформацій бруса при згинанні визначається роботою моменту  $M$  на взаємному кутовому переміщенні  $du$  двох перерізів (рис. 1.6).

Пружна енергія, накопичена в елементі довжиною  $dz$

$$dU = \frac{1}{2} M dq. \quad (1.13)$$

Взаємний кут повороту перерізів  $dq$ , знайдемо із залежності

$$dz = r \cdot dq,$$

тобто

$$dq = \frac{dz}{r} = \frac{M}{EI_x} dz. \quad (1.14)$$

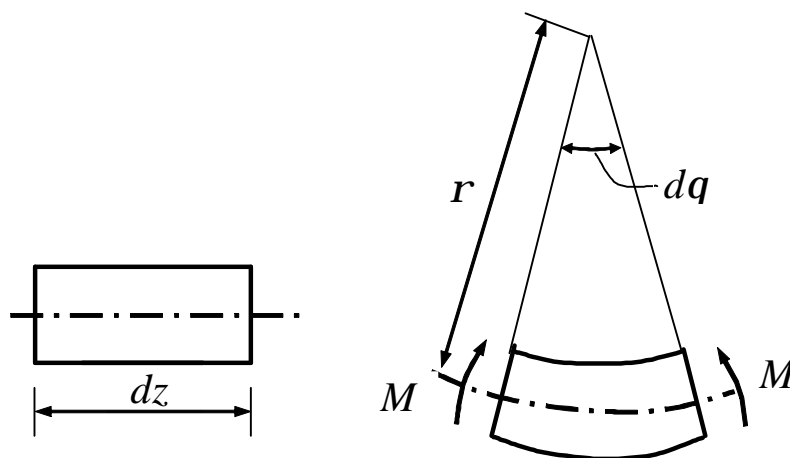


Рисунок 1.6

Підставляючи рівняння (1.14) в (1.13) та інтегруючи за довжиною балки, одержимо потенціальну енергію при згинанні

$$U_{из} = \int_1 \frac{M^2 dz}{2EI_x}. \quad (1.15)$$

### **1.1.2 Потенціальна енергія бруса в загальному випадку навантаження**

Згідно з принципом суперпозиції потенціальна енергія деформації  $U$  в загальному випадку навантаження буде дорівнювати сумі потенційних енергій Розтягання, зсуву, згинання і кручення:

$$U = \int_1 \frac{N^2 dz}{2EF} + \int_1 K_x \frac{Q_x^2 dz}{2GF} + \int_1 K_y \frac{Q_y^2 dz}{2GF} + \int_1 \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_1 \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_1 \frac{M_{кр}^2 dz}{2GI_r} \quad (1.16)$$

де  $K_x$  і  $K_y$  – коефіцієнти форми, що залежать від виду перерізу (табличні дані) і враховують нерівномірний характер розподілу дотичних напружень  $t$  за перерізом.

Якщо конструкція складна і складається з декількох елементів, що мають форму бруса, то після інтегрування в межах кожного бруса повинне бути проведене підсумовування енергії за кількістю елементів.

У виразі для  $U$  не всі доданки є рівноправними. Для переважної більшості систем, що зустрічаються на практиці, три перших доданків виявляються істотно меншими за три останніх.

Інакше кажучи, енергія розтягання і зсуву, як правило, виявляється істотно меншою за енергію згинання і кручення.

Для плоских балок і рам, де  $M_y = M_{кр} = 0$ , потенціальну енергію визначатимемо за формулою

$$U = \int_1 \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} \quad (1.17)$$

а для плоских ферм – за формулою

$$U = \int_1 \frac{N^2 dz}{2EF}.$$

## 1.2 Теорема Кастіліано

Розглянемо метод визначення переміщення, заснований на визначенні потенціальної енергії деформації і запропонований *Кастіліано*.

Умовимося під переміщенням в заданому напрямку розуміти проекцію повного переміщення на заданий напрямок. Тому переміщення точки додатку сили за напрямком сили треба розуміти як проекції на напрямок сили повного переміщення цієї точки.

Розглянемо балку, навантажену системою зосереджених сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (рис.1.7). Під дією цих сил балка прогнеться за кривою I і залишиться в *рівновазі* (див. рис 1.7, а).

Необхідно визначити переміщення  $y_n$ . Для цього переведемо балку із стану I в стан II шляхом додавання до балки нескінечно малої добавки  $dP_n$ .

Зміна роботи при переході із стану I в стан II рівна зміні потенціальної енергії

$$A_{II} - A_I = dU. \quad (1.18)$$

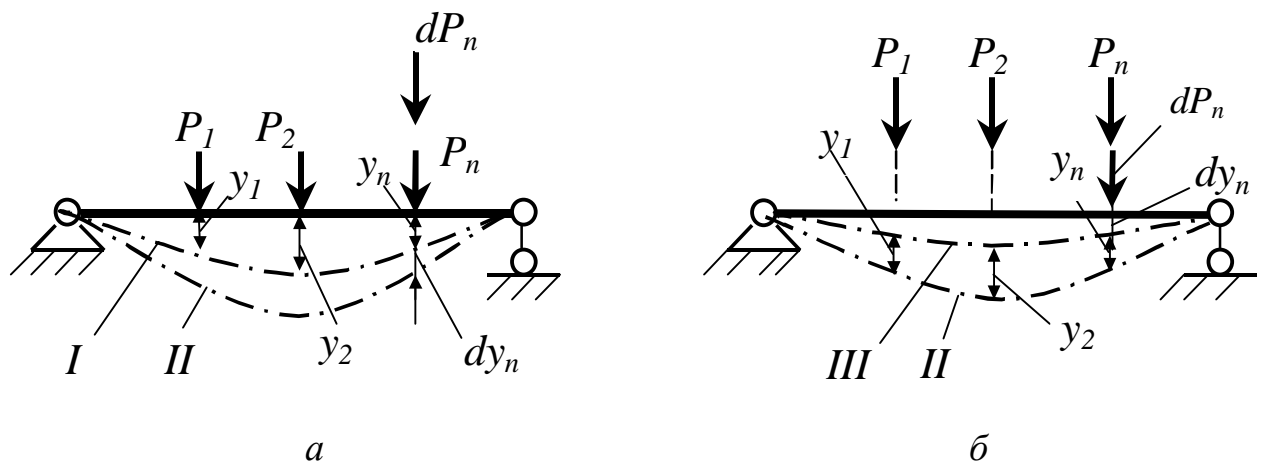


Рисунок 1.7

Робота в I стані

$$A_I = \frac{1}{2} P_1 y_1 + \frac{1}{2} P_2 y_2 + \dots + \frac{1}{2} P_n y_n. \quad (1.19)$$

Змінимо тепер порядок прикладання сил.

Для визначення роботи в II стані прикладемо спочатку до пружного тіла силу  $dP_n$ , при цьому балка небагато прогнеться та обійме стан III (див. рис. 1.7,б). Після цього навантажимо балку статично прикладеними силами  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . При цьому до початкових прогинів  $dy_1, dy_2, \dots, dy_n$  додадуться прогини  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

$$A_{II} = \frac{1}{2} dP_n \cdot dy_n + \frac{1}{2} P_1 y_1 + \frac{1}{2} P_2 y_2 + \dots + \frac{1}{2} P_n y_n + dP_n \cdot y_n. \quad (1.20)$$

У виразі (1.20) остання складова узята без коефіцієнта  $\frac{1}{2}$  тому, що при здійсненні роботи силами  $P_1, P_2, \dots, P_n$  сила  $dP_n$  знаходиться на балці і вже не міняється.

Потенціальна енергія  $U$  залежить від всіх сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Але оскільки міняється тільки сила, то зміна потенціальної енергії  $dU$  дорівнює

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n. \quad (1.21)$$

Підставивши  $A_I, A_{II}$  і  $dU$  у вираз (1.18), одержимо

$$\frac{1}{2} dP_n \cdot dy_n + dP_n \cdot y_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n. \quad (1.22)$$

Відкидаючи у виразі (1.22) величину  $\frac{1}{2} dP_n dy_n$  як малу величину другого порядку, одержимо

$$dP_n \cdot y_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n.$$

Скорочуючи даний вираз на  $dP_n$ , остаточно маємо

$$y_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}. \quad (1.23)$$

Таким чином, в даному випадку *часткова похідна від потенціальної енергії деформації за силою дорівнює переміщенню точки прикладання сили в її напрямку.*

Отриманий результат можна узагальнити.

Хай на балку діють в різних перерізах пари сил  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Усі попередні міркування можна повторити і при визначенні роботи моментів слід помножити  $M_i$  не на прогини  $y_i$ , а на кути повороту  $q_i$  тих перерізів, де ці пари прикладені.

Тоді формула (1.23) набуде вигляду

$$q_n = \frac{\partial U}{\partial M_n}. \quad (1.24)$$

Отримані результати можна трактувати ширше: *переміщення точки додатка узагальненої сили за напрямком її дії дорівнює приватній похідній від потенціальної енергії деформації за цією силою:*

$$\Delta_p = \frac{\partial U}{\partial P}, \quad (1.25)$$

де  $D_p$  – повне переміщення (лінійне переміщення або кут повороту) від узагальненої сили;

$P$  – узагальнена сила (власне сила або момент пари сил).

Викладений в даному розділі висновок носить назву *теорема Кастіліано*, яка була опублікована в 1875 році.

Згідно зі способом, запропонованим Кастіліано, щоб визначити лінійне або кутове переміщення в точці, де за умовою задачі сила відсутня, в цій точці слід прикласти відповідну фіктивну узагальнену силу. Далі, написавши вираз для потенціальної енергії від системи сил, включаючи вказану фіктивну силу, слід узяти його похідну за фіктивною силою і в одержаному виразі для переміщення покласти фіктивне навантаження, яке дорівнює нулю. Не дивлячись на складність даного способу і наявність інших способів, теорема Кастіліано застосовується для визначення переміщень в не стрижневих системах (пластинках, оболонках і деталях, усі три вимірювання яких мають один порядок).

Спосіб Кастіліано також зручно використовувати у випадках, коли необхідно визначити переміщення в точці прикладання сили. Розглянемо використання теореми Кастіліано на *прикладі* визначення прогину консольної балки довжиною  $\mathbf{l}$  і навантаженою силою  $P$  (рис. 1.8).

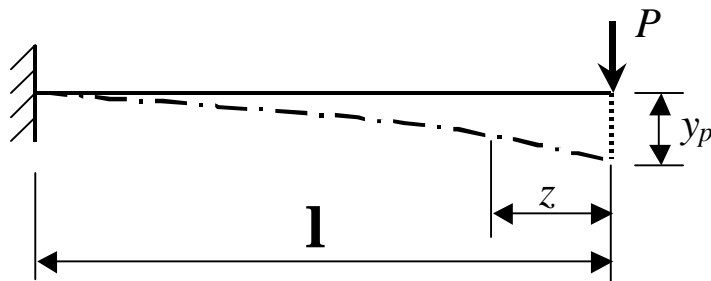


Рисунок 1.8

Потенціальна енергія балки при згинанні дорівнює

$$U = \int_1 \frac{M^2 dz}{2EI},$$

де  $M = -P \cdot z$ .

Тоді

$$U = \int_1 \frac{P^2 z^2 dz}{2EI}.$$

Скористаємося теоремою Кастіліано  $y_p = \frac{\partial U}{\partial P}$  і знайдемо прогин балки (переміщення балки в точці прикладання сили  $P$ )

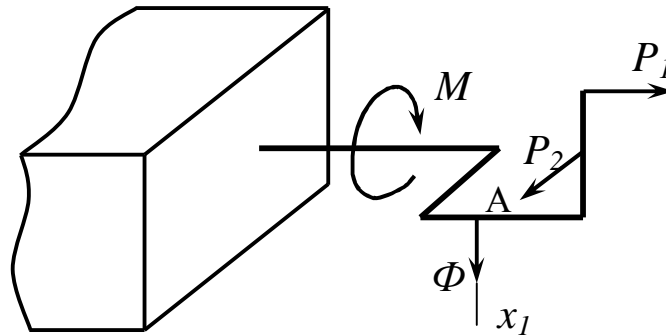
$$y_p = \int_0^l \frac{2Pz^2 dz}{2EI} = \frac{Pz^3}{3EI} \Big|_0^l = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

## 2 ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРУЖНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛА МОРА

Визначення переміщень за допомогою теореми Кастіліано, як можна було переконатися з попередньої лекції, володіє тим очевидним недоліком, що дає можливість визначити переміщення тільки точок прикладання сил і

лише у напрямку цих сил. На практиці часто виникає необхідність визначати переміщення будь-яких точок системи в будь-якому напрямку. Вихід з вказаного утруднення виявляється досить простим. Якщо необхідно визначити переміщення в точці, де не прикладені зовнішні сили, ми самі прикладаємо в цій точці зовнішню фіктивну силу  $\Phi$  в напрямку, що цікавить нас. Далі, складаємо вираз потенціальної енергії системи з урахуванням сили  $\Phi$ . Диференціюючи енергію за  $\Phi$ , знаходимо переміщення даної точки в напрямку, що нас цікавить, тобто за напрямком прикладеної сили  $\Phi$ . Тепер залишається «пригадати», що насправді сили немає і вона дорівнює нулю. Таким чином, визначається шукане переміщення.

Визначимо, наприклад, переміщення точки  $A$  у напрямку осі  $x_1$  (рис.2.1).



До бруса, навантаженого довільною системою зовнішніх сил, прикладено в точці  $A$  за напрямком  $x_1$  силу  $\Phi$ . Внутрішні силові чинники в кожному поперечному перерізі бруса при цьому, взагалі кажучи, зміняться на величини, залежні від сили  $\Phi$ . Так, наприклад, крутний момент в деякому поперечному перерізі матиме вигляд

$$M_{кр} = M_{крP} + M_{кр\Phi},$$

де  $M_{крP}$  – крутний момент, який виникає під дією заданої системи зовнішніх сил;

$M_{кр\Phi}$  – додатковий момент, який з'являється в результаті прикладання фіктивної сили  $\Phi$ .

Зрозуміло, що  $M_{крP}$  і  $M_{кр\Phi}$  є функціями  $\mathbf{z}$ , тобто змінюються за довжиною бруса. Аналогічно з'являються додаткові доданки і в решті силових чинників.

Тоді внутрішні зусилля з урахуванням заданого навантаження і додаткової (фіктивної) сили  $\Phi$  матимуть наступні аналітичні вирази:

$$\begin{aligned} N &= N_P + N_\Phi, & M_x &= M_{xP} + M_{x\Phi}, \\ Q_x &= Q_{xP} + Q_{x\Phi}, & M_y &= M_{yP} + M_{y\Phi}, \\ Q_y &= Q_{yP} + Q_{y\Phi}, & M_{кр} &= M_{крP} + M_{кр\Phi}, \end{aligned}$$

де  $N_P, Q_{xP}, Q_{yP}, M_{xP}, M_{yP}, M_{крP}$  – аналітичні вирази внутрішніх зусиль від зовнішнього навантаження (P);

$N_\Phi, Q_{x\Phi}, Q_{y\Phi}, M_{x\Phi}, M_{y\Phi}, M_{кр\Phi}$  – аналітичні вирази внутрішніх зусиль від фіктивної сили ( $\Phi$ ).

Очевидно, що додаткові силові чинники  $N_\Phi \dots M_{кр\Phi}$  пропорційні силі  $\Phi$ . Тоді вирази для внутрішніх зусиль можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} N &= N_P + N_1\Phi, & M_x &= M_{xP} + M_{x1}\Phi, \\ Q_x &= Q_{xP} + Q_{x1}\Phi, & M_y &= M_{yP} + M_{y1}\Phi, \\ Q_y &= Q_{yP} + Q_{y1}\Phi, & M_{кр} &= M_{крP} + M_{кр1}\Phi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де  $N_1, Q_{x1}, Q_{y1}, M_{x1}, M_{y1}, M_{кр1}$  – аналітичні вирази внутрішніх зусиль, що виникають в поперечному перерізі бруса під дією одиничної сили, прикладеної в даній точці в заданому напрямку.

Повернемося тепер до виразу потенціальної енергії (формула (1.16)) і замінімо в ньому внутрішні силові чинники їх силовими значеннями.

Тоді

$$\begin{aligned} U &= \int_1 \frac{(N_P + N_1\Phi)^2 dz}{2EF} + \int_1 K_X \frac{(Q_{xP} + Q_{x1}\Phi)^2 dz}{2GF} + \\ &\int_1 K_Y \frac{(Q_{yP} + Q_{y1}\Phi)^2 dz}{2GF} + \int_1 \frac{(M_{крP} + M_{кр1}\Phi)^2 dz}{2GJ_p} + \\ &+ \int_1 \frac{(M_{xP} + M_{x1}\Phi)^2 dz}{2EJ_x} + \int_1 \frac{(M_{yP} + M_{y1}\Phi)^2 dz}{2EJ_y}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Диференціюючи цей вираз за  $\Phi$  і вважаючи після цього  $\Phi=0$ , знаходимо переміщення точки А:

$$\Delta_A = \left. \frac{\partial U}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=0} = \int_1 \frac{N_P N_I dz}{EF} + \int_1 K_X \frac{Q_{xP} Q_{xI} dz}{GF} + \int_1 K_Y \frac{Q_{yP} Q_{yI} dz}{GF} + \int_1 \frac{M_{kpP} M_{kpI} dz}{GJ_P} + \int_1 \frac{M_{xP} M_{xI} dz}{EJ_x} + \int_1 \frac{M_{yP} M_{yI} dz}{EJ_y}. \quad (2.3)$$

Кожний з одержаних інтегралів носить назву *інтеграла Мора*, а визначення переміщень за формулою (2.3) часто називають методом Мора.

Відзначимо, що метод Мора є найзагальнішим методом визначення переміщень стрижневих систем. Його значення особливо велике при розрахунку статично невизначуваних систем.

У більшості випадків при визначенні переміщень в балках, рамах і арках можна нехтувати впливом подовжніх деформацій і деформацій зрушення, тобто відкинути три перші інтеграли у формулі (2.3).

Для плоских стрижневих систем інтеграл Мора міститиме тільки три доданки, що враховують тільки внутрішні зусилля, розташовані в одній площині:

$$\Delta_A = \left. \frac{\partial U}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=0} = \int_1 \frac{N_P N_I dz}{EF} + \int_1 K_Y \frac{Q_{yP} Q_{yI} dz}{GF} + \int_1 \frac{M_{xP} M_{xI} dz}{EJ_x}.$$

Оскільки для плоских балок і рам вплив  $N$  і  $Q$  незначний, то інтеграл Мора міститиме тільки один доданок, що враховує тільки згинальний момент

$$\Delta_{iP} = \int_1 \frac{M_{xP} M_{xi}}{EJ_x} dz. \quad (2.4)$$

Порядок визначення переміщень за методом Мора наступний:

- 1 Розглядаємо навантажену систему та визначаємо опорні реакції.
- 2 Розглядаємо кожен ділянку системи і для них записуємо аналітичні вирази для згинальних моментів від заданого навантаження ( $M_{xP}$ ) для кожної ділянки.

3 До ненавантаженої системи прикладаємо в тій точці, в якій визначаємо переміщення, одиничну силу (при визначенні лінійного

переміщення) або одиничний момент (при визначенні кута повороту) за напрямком шуканого переміщення.

4 За кожною ділянкою системи складаємо аналітичний вираз для згинального моменту від одиничного чинника ( $M_{xI}$ ).

5 Обчислюємо інтеграли відповідних виразів  $M_{xP}$  і  $M_{xI}$  за кожною ділянкою. Підсумовування ведемо в межах всієї конструкції.

Якщо результат вийде додатний, значить, напрям переміщення співпадає з напрямом одиничної сили.

Розглянемо використання методу Мора на **прикладі**. Визначити вертикальне переміщення точки  $A$  балки (рис.2.2), якщо  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $I_X = 5000$  см<sup>4</sup>.

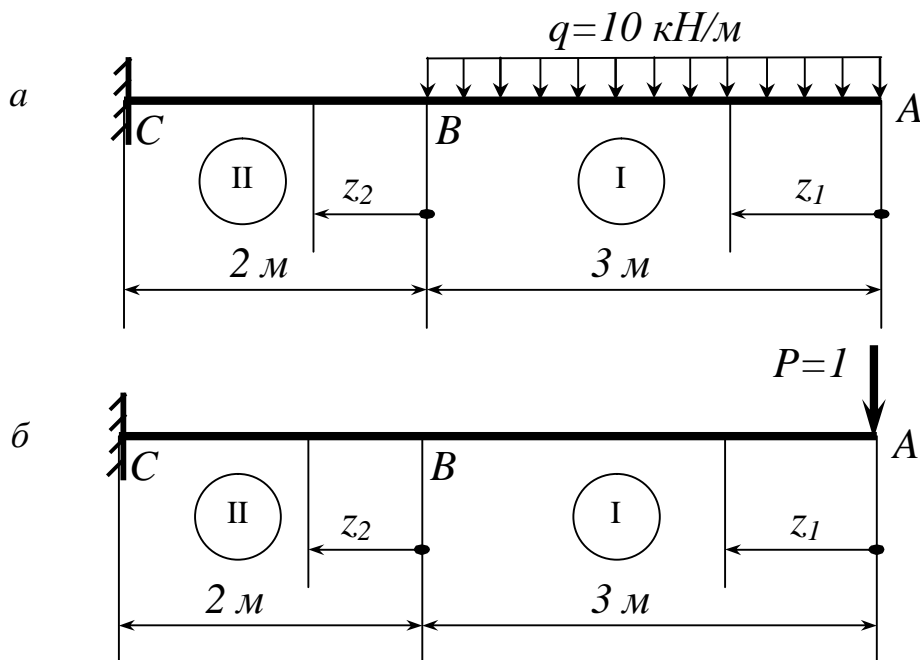


Рисунок 2.2

Розіб'ємо задану балку на дві ділянки (див. рис.2.2) і, переміщаючись на кожній ділянці справа наліво, складемо аналітичні вирази для згинального моменту від заданого навантаження і від одиничної сили.

Запишемо вирази для згинальних моментів від заданого навантаження (див. рис.2.2, а) для кожної з ділянок.

$$\text{Ділянка } AB: (0 \leq z_1 \leq 3) \quad M_{P1} = -q \frac{z_1^2}{2} = -10 \cdot \frac{z_1^2}{2} = -5z_1^2.$$

$$\text{Ділянка } BC: (0 \leq z_2 \leq 2) \quad M_{p_2} = -q \cdot 3(1,5 + z_2) = -10 \cdot 3(1,5 + z_2).$$

Тепер знімаємо задане навантаження і в точці  $A$ , де необхідно визначити прогин, прикладаємо одиничну силу  $P=1$  у напрямку визначуваного переміщення, тобто вертикально (див. рис.2.2, б).

$$\text{Ділянка } AB: (0 \leq z_1 \leq 3) \quad M_1 = -z_1.$$

$$\text{Ділянка } BC (0 \leq z_2 \leq 2) \quad M_2 = -(3 + z_2).$$

Слід мати на увазі, що  $z_i$  для кожної з ділянок від заданого та одиничного навантажень повинні відлічуватися від одного і того ж початку.

Тоді, згідно з формулою (2.4), знаходимо переміщення точки  $A$ :

$$\begin{aligned} y_A &= \int_0^3 \frac{(-5z_1^2)(-z_1)}{EJ_x} dz + \int_0^2 \frac{-30(1,5 + z_2)(-(3 + z_2))}{EJ_x} dz = \\ &= \frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{5z_1^4}{4} \Big|_0^3 + \frac{30}{EJ_x} \left[ 4,5z_2 + \frac{3z_2^2}{2} + \frac{1,5z_2^2}{2} + \frac{z_2^3}{3} \right] \Big|_0^2 = \\ &= \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{5 \cdot 3^4}{4} + 30 \left( 4,5 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 2^2}{2} + \frac{1,5 \cdot 2^2}{2} + \frac{2^3}{3} \right) \right] = \frac{721,25}{EJ_x} = \\ &= \frac{721,25 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 5000 \cdot 10^8} = 0,0721 \text{ м} = 72,1 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Знак “плюс” указує на те, що вертикальне переміщення точки  $A$  балки співпадає з напрямом одиничної сили.

## 3 ЧИСЕЛЬНЕ РІШЕННЯ ІНТЕГРАЛА МОРА

### 3.1 Обчислення інтеграла Мора за способом Верещагіна

Основним недоліком визначення переміщення за допомогою інтеграла Мора є необхідність складання аналітичного виразу підінтегральних функцій. Це особливо незручно при визначенні переміщень в брусі, що має велику кількість ділянок. Проте, якщо брус складається з прямих ділянок з постійною в межах кожної ділянки

жорсткістю, операцію інтегрування можна спростити. Це спрощення засноване на тому, що епюри одиничних силових чинників на прямолінійних ділянках бруса виявляються лінійними.

Обчислимо інтеграл  $\int_1 M_p \bar{M}_i dz$  для випадку, коли епюра від заданого навантаження має довільне зображення, а від одиничного вона – прямолінійна (рис. 3.1).

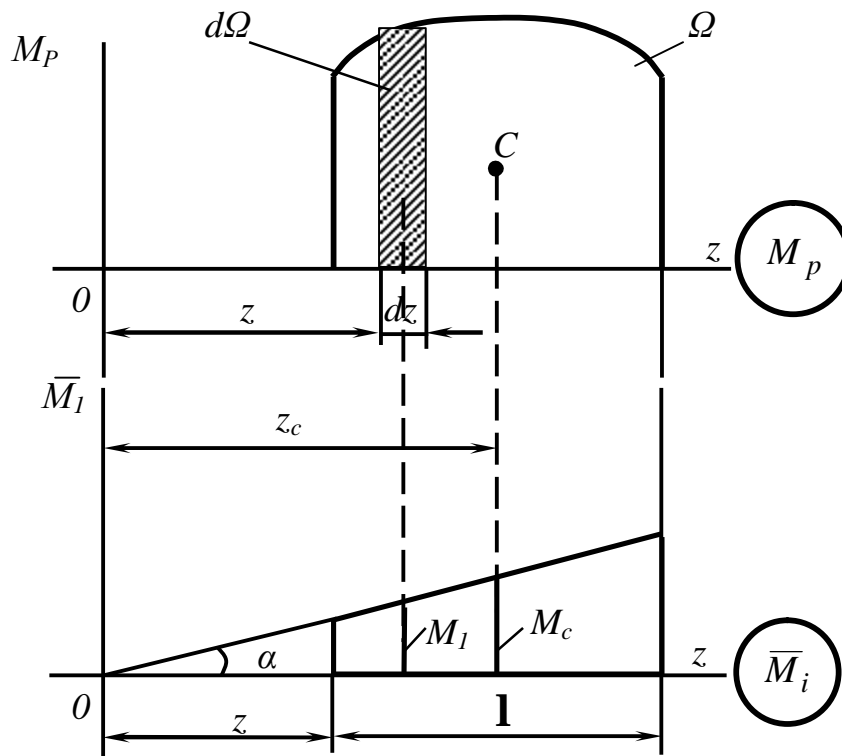


Рисунок 3.1

Позначимо через  $\Omega$  площу епюри  $M_p$ , а через  $M_c$  – ординату епюри від одиничного навантаження під центром ваги  $C$  вантажної епюри  $M_p$ . Очевидно,  $M_p dz = d\Omega$  є диференціал площі епюри  $M_p$ .

$$M_i = z \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Шуканий інтеграл

$$\int_1 M_p \bar{M}_i dz = \operatorname{tg} \alpha \int_1 z \cdot d\Omega.$$

Інтеграл в правій частині є статичним моментом площі епюри  $M_p$  щодо осі  $0-0$ , він дорівнює

$$\int_1 z \cdot d\Omega = \Omega \cdot z_c ,$$

де  $z_c$  – абсциса центра ваги епюри  $M_p$ .

Інтеграл  $\int_1 M_p \bar{M}_i dz = \text{tg}\alpha \cdot z_c \cdot \Omega = \Omega \cdot \bar{M}_c$ , оскільки  $z_c \cdot \text{tg}\alpha = \bar{M}_c$

Отже, інтеграл Мора рівний добутку площі вантажної епюри (епюри від заданого навантаження) на ординату прямолінійної епюри від одиничного навантаження, розташованій під центром ваги вантажної епюри.

Загальна формула переміщень для систем з прямолінійних ділянок набуває вигляду

$$\Delta_{ip} = \sum \frac{\Omega \cdot M_c}{E \cdot J_x} . \quad (3.1)$$

Описаний графічний спосіб визначення переміщень був запропонований **А.Н.Верещагіним** в 1925 р. і носить назву *способу Верещагіна*.

Обчислення за формулою (2.1) проводяться по ділянках, на кожному з яких прямолінійна епюра повинна бути без зламу (рис. 3.2, а).

Якщо епюри  $M_p$  і  $M_i$  протилежні за знаком, то результат «множення» епюр має знак мінус. У тих випадках, коли обидві епюри прямолінійні, можна помножити площу будь-якої з них на ординату іншої.

Спосіб Верещагіна застосовний до будь-якого з шести інтегралів. «Перемноження» епюр подовжніх, поперечних сил або крутних моментів проводиться так само, як і епюр згинальних моментів (за формулою (2.1)) і ділиться на жорсткість відповідної деформації ( $EF$ ,  $GF$ ,  $EJ$ ,  $GI_p$ ).

Якщо епюра  $M_p$  має складний вигляд, то вона може бути розбита на прості фігури (прямокутник, трикутник, параболічний трикутник), для яких легко можна визначити площу епюри і положення її центра ваги (див. рис. 3.2, б).

При цьому кожна з площ умножають на ординату одиничної епюри під центром ваги відповідної площі (див. рис. 3.2, б), позначаючи їх  $M_{c_1}$ ,  $M_{c_2}$ ,  $M_{c_3}$  і т.д. При цьому формула (3.1) може бути подана в наступному вигляді:

$$\Delta_{ip} = \sum_k \frac{\Omega_k \cdot \bar{M}_{Ck}}{E \cdot J_x} \quad (3.2)$$

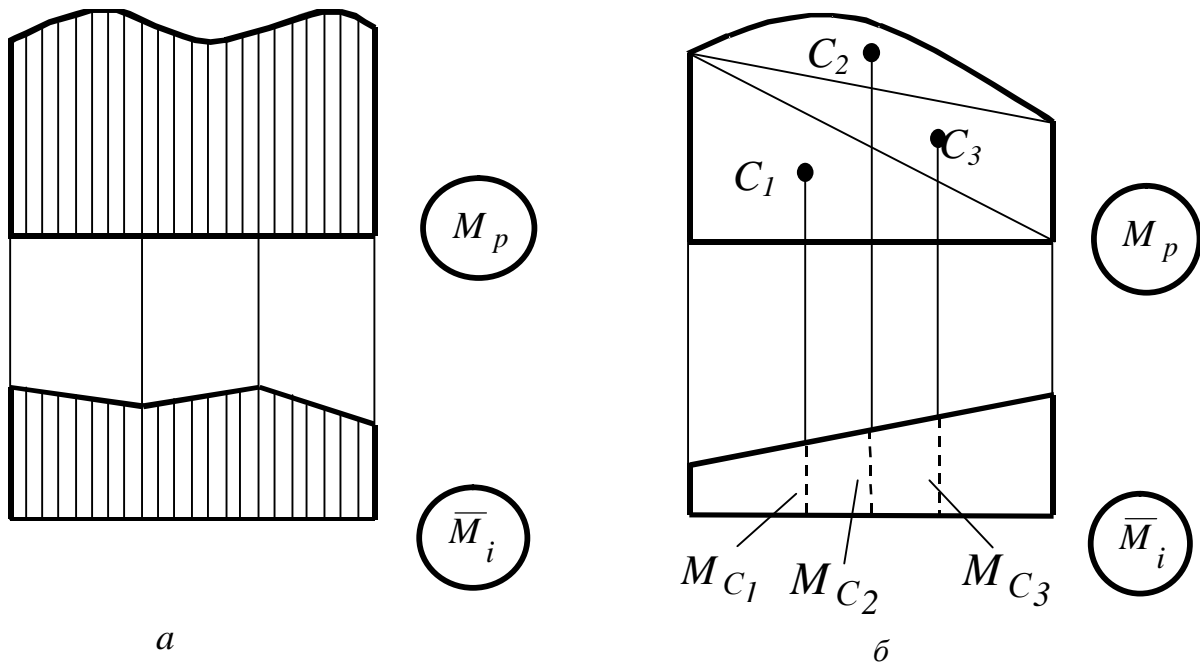


Рисунок 3.2

При крученні, розтяганні та зсуві епюри виявляються ще простішими: вони, як правило, лінійні та складаються з прямокутників і трикутників в різних комбінаціях.

На рисунках 3.3 і 3.4 дані площі  $\Omega$  різних простих фігур і положення їх центрів ваги (точки  $C$ ).

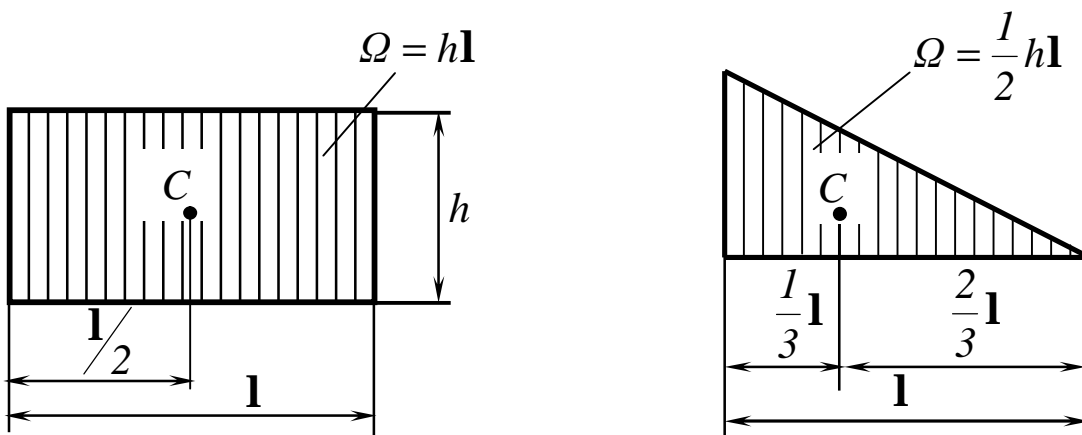


Рисунок 3.3

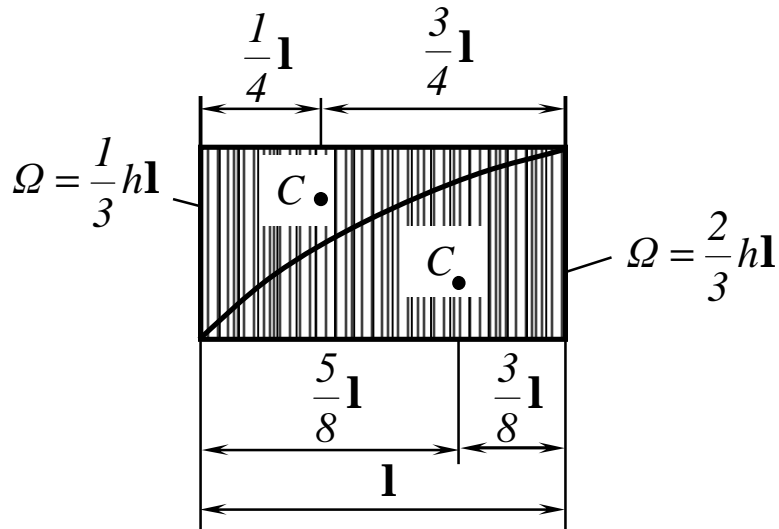


Рисунок 3.4

**Приклад 1.** Визначити вертикальне переміщення точки  $K$  (рис. 3.5). Скористаємося способом Верещагіна.

1 Визначимо реакції в опорах від зовнішнього навантаження. Зважаючи на симетрію прикладення сил  $P$ , реакції опор будуть однакові:  $R_A = R_B = P$ . Будуємо епюру згинальних моментів (вантажну епюру)  $M_p$  (див. рис.3.5, а).

2 До ненавантаженої балки прикладаємо в точці  $K$  одиничну силу  $X_1=1$ , визначаємо реакції опор, які також будуть рівні між собою, і будуємо одиничну епюру  $M_1$  (див. рис.3.5, б).

3 Далі проводимо "перемноження" цих епюр за способом Верещагіна. Для цього розбиваємо епюру  $M_p$  на ділянки, на яких епюра не має зломів. Таких ділянок три:  $AD$ ,  $DE$  і  $BE$ . Але ділянка  $DE$  не може розглядатися цілком, оскільки на цій ділянці одинична епюра  $M_1$  має злам, тому розіб'ємо його на дві ділянки:  $DK$  і  $KE$ .

Через симетрію епюр результати "перемноження" зліва і праворуч від точки  $K$  будуть однаковими. Тому "перемножимо" епюри, наприклад, зліва від точки  $K$  і подвоїмо результат.

Знайдемо площі елементів вантажної епюри:

трикутника – 
$$\Omega_1 = \frac{1}{2} Pa \cdot a = \frac{Pa^2}{2}$$

і прямокутника – 
$$\Omega_2 = Pa \cdot \frac{a}{2} = \frac{Pa^2}{2}.$$

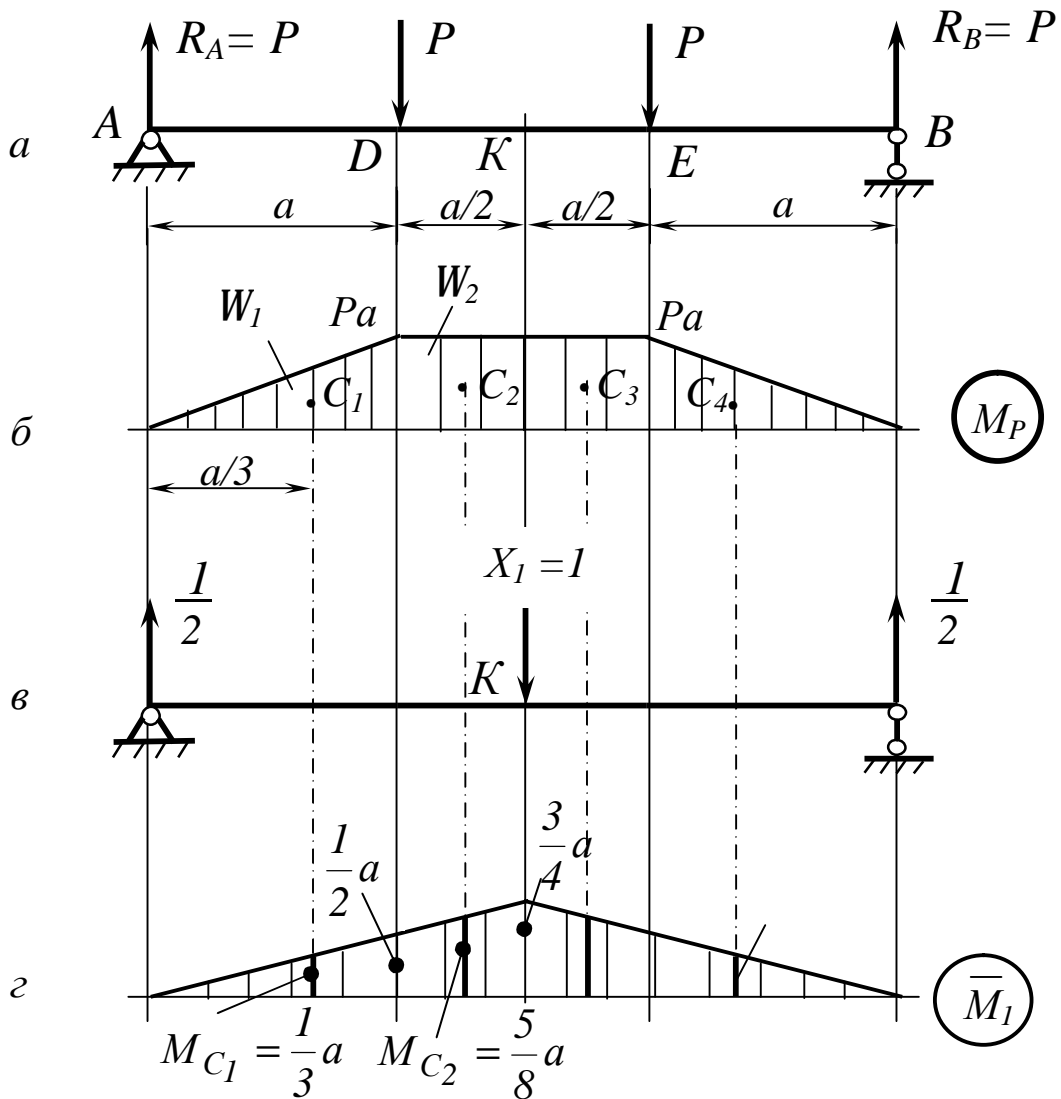


Рисунок 3.5

Ординати одиначної епюри під центрами ваги відповідних площ (див. рис. 3.5), дорівнюють

$$M_{C_1} = \frac{1}{3}a \quad \text{і} \quad M_{C_2} = \frac{5}{8}a$$

Згідно з формулою Верещагіна (3.1):

$$y_K = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot (\Omega_1 \bar{M}_{C_1} + \Omega_2 \bar{M}_{C_2}) \right] = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot \left( \frac{Pa^2}{2} \cdot \frac{1}{3}a + \frac{Pa^2}{2} \cdot \frac{5}{8}a \right) \right] = \frac{23}{24} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$$

Знак (+) говорить про те, що переміщення балки в т.  $K$  відбувається за напрямком сили  $X_1=I$ , тобто напрямлено вниз.

### 3.2 «Перемноження» епюр за допомогою формули крайніх ординат

Існує ще один спосіб чисельного рішення інтеграла Мора (2.4) – «Перемноження» епюр за допомогою формули крайніх ординат, яка є нічим іншим як вдосконаленою (або видозміненою) формулою способу Верещагіна.

Користуватися цим способом простіше, оскільки не потрібно розбивати вантажну епюру на прості фігури, запам'ятати координати розташування центрів ваги цих фігур і їх площі.

Як і для способу Верещагіна формулу крайніх ординат слід записувати для кожної прямолінійної ділянки епюри, тобто для ділянки без зламу епюри.

Розглянемо одну з ділянок балки або рами (рис. 3.6). Позначимо ординати на лівому і правому кінцях ділянки відповідно  $M_l$  і  $M_{np}$ .

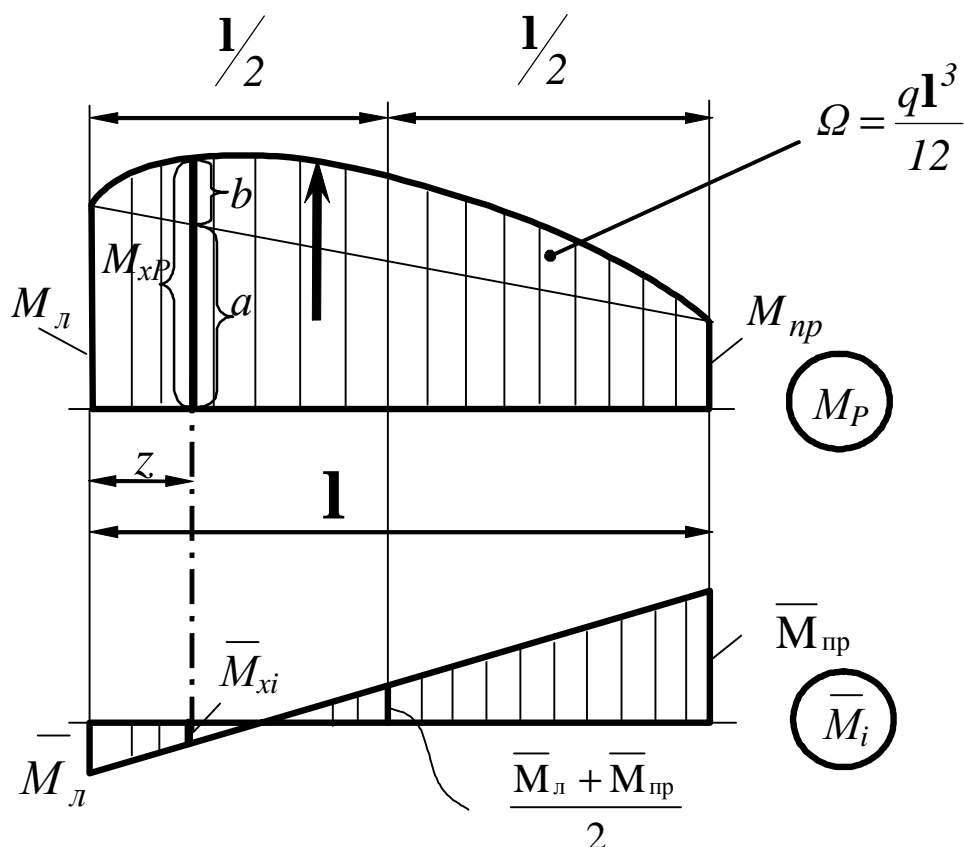


Рисунок 3.6

Подамо ординату  $M_{xP}$  (див. рис. 3.6) вантажної епюри у вигляді суми:

$$M_{xP} = a + b,$$

$$\text{де } a = M_l + \frac{M_{np} - M_l}{\mathbf{1}} \cdot z, \quad b = \frac{q\mathbf{1}}{2} z - \frac{qz^2}{2}.$$

Визначимо ординати згинальних моментів  $M_{xP}$  і  $\bar{M}_{xi}$  (див. рис. 3.6)

$$M_{xP} = M_l + \frac{M_{np} - M_l}{\mathbf{1}} z + \frac{q\mathbf{1}}{2} z - \frac{qz^2}{2}; \quad \bar{M}_{xi} = M_l + \frac{\bar{M}_{np} - \bar{M}_l}{\mathbf{1}} z. \quad (3.3)$$

Обчислимо переміщення за допомогою інтеграла Мора (див. формулу (2.4)):

$$\Delta_{iP} = \int_0^{\mathbf{1}} \frac{M_{xP} \bar{M}_{xi}}{EJ_x} dz = \frac{\int_0^{\mathbf{1}} M_{xP} \bar{M}_{xi} dz}{EJ_x}. \quad (3.4)$$

Визначимо чисельник формули (3.4), підставивши в нього значення (3.3):

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathbf{1}} M_{xP} \bar{M}_{xi} dz &= \int_0^{\mathbf{1}} \left[ M_l + \frac{M_{np} - M_l}{\mathbf{1}} z + \frac{q\mathbf{1}}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right] \cdot \left[ \bar{M}_l + \frac{\bar{M}_{np} - \bar{M}_l}{\mathbf{1}} z \right] dz = \\ &= \int_0^{\mathbf{1}} \left[ M_l \bar{M}_l + \frac{M_{np} - M_l}{\mathbf{1}} z \cdot \bar{M}_l + \frac{q\mathbf{1}}{2} z \cdot \bar{M}_l - \frac{qz^2}{2} \cdot \bar{M}_l + M_l \frac{\bar{M}_{np} - \bar{M}_l}{\mathbf{1}} z + \right. \\ &\left. + \frac{M_{np} - M_l}{\mathbf{1}} z \cdot \frac{\bar{M}_{np} - \bar{M}_l}{\mathbf{1}} z + \frac{q\mathbf{1}}{2} \cdot \frac{\bar{M}_{np} - \bar{M}_l}{\mathbf{1}} z^2 - \frac{qz^2}{2} \cdot \frac{\bar{M}_{np} - \bar{M}_l}{\mathbf{1}} z \right] dz. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши останній вираз, одержимо:

$$\begin{aligned} &M_l \bar{M}_l \cdot \mathbf{1} + \frac{M_{np} - M_l}{\mathbf{1}} \bar{M}_l \cdot \frac{\mathbf{1}^2}{2} + \frac{q\mathbf{1}}{2} \cdot \frac{\mathbf{1}^2}{2} \bar{M}_l - \frac{q\mathbf{1}^3}{6} \bar{M}_l + M_l \frac{\bar{M}_{np} - \bar{M}_l}{\mathbf{1}} \cdot \frac{\mathbf{1}^2}{2} + \\ &+ \frac{M_{np} - M_l}{\mathbf{1}} \cdot \frac{\bar{M}_{np} - \bar{M}_l}{\mathbf{1}} \cdot \frac{\mathbf{1}^3}{3} + \frac{q\mathbf{1}}{2} \cdot \frac{M_{np} - M_l}{\mathbf{1}} \cdot \frac{\mathbf{1}^3}{3} - \frac{q\mathbf{1}^4}{8} \cdot \frac{M_{np} - M_l}{\mathbf{1}} = \\ &= M_l \bar{M}_l \mathbf{1} + \frac{M_{np} - M_l}{2} \bar{M}_l \mathbf{1} + \frac{q\mathbf{1}^3}{4} \bar{M}_l - \frac{q\mathbf{1}^3}{6} \bar{M}_l + M_l \frac{\bar{M}_{np} - \bar{M}_l}{2} \mathbf{1} + \\ &+ \frac{M_{np} - M_l}{3} \cdot (\bar{M}_{np} - \bar{M}_l) \mathbf{1} + \frac{q\mathbf{1}^3}{6} (\bar{M}_{np} - \bar{M}_l) - \frac{q\mathbf{1}^3}{8} (\bar{M}_{np} - \bar{M}_l) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M_{л} \overline{M}_{л} \mathbf{1} + \frac{1}{2} M_{np} \overline{M}_{л} \mathbf{1} - \frac{1}{2} M_{л} \overline{M}_{л} \mathbf{1} + \frac{2q\mathbf{1}^3}{24} \overline{M}_{л} + \frac{1}{2} M_{л} \overline{M}_{np} \mathbf{1} - \frac{1}{2} M_{л} \overline{M}_{л} \mathbf{1} + \\
&+ \frac{1}{3} M_{np} \overline{M}_{np} \mathbf{1} - \frac{1}{3} M_{np} \overline{M}_{л} \mathbf{1} - \frac{1}{3} M_{л} \overline{M}_{np} \mathbf{1} + \frac{1}{3} M_{л} \overline{M}_{л} + \frac{q\mathbf{1}^3}{24} (\overline{M}_{np} - \overline{M}_{л}).
\end{aligned}$$

Після перетворень одержимо остаточний вид формули крайніх ординат

$$\Delta_{iP} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{\mathbf{1}}{6} (2M_{л} \cdot \overline{M}_{л} + 2M_{np} \cdot \overline{M}_{np} + M_{л} \cdot \overline{M}_{np} + M_{np} \cdot \overline{M}_{л}) + \frac{q\mathbf{1}^3}{12} \left( \frac{\overline{M}_{л} + \overline{M}_{np}}{2} \right) \right], \quad (3.5)$$

де  $M_{л}$ ,  $M_{np}$  – відповідно, ліва і права ординати даної ділянки вантажної епюри;

$\overline{M}_{л}$ ,  $\overline{M}_{np}$  – відповідно, ліва і права ординати даної ділянки одиничної епюри.

Другий доданок у формулі (3.5) називається *поправкою на кривизну епюри* і використовується, природно, тільки на тих ділянках, де прикладено розподілене навантаження інтенсивності  $q$ .

**Правило знаків для першого доданку формули (3.5)** таке ж, як і в способі Верещагіна, тобто якщо відповідні ординати на епюрах  $M_p$  і  $\overline{M}_i$  направлені **в один бік** від базової лінії, то результат “перемноження” епюр має знак “плюс”.

Наприклад, результат “перемноження” ординат  $M_{л}$  на  $\overline{M}_{л}$  (див. рис. 3.6) матиме знак “мінус”, а  $M_{np}$  на  $\overline{M}_{np}$  – знак “плюс”.

Поправка на кривизну епюри є добутком частини площі епюри, обмеженою параболою і прямою і такою, що має площу, яка дорівнює  $\Omega = \frac{q\mathbf{1}^3}{12}$ , (див. рис. 3.6) на величину середньої лінії трапеції, яку можна

визначити за формулою  $\frac{\overline{M}_{л} + \overline{M}_{np}}{2}$ .

**Правило знаків для поправки на кривизну, тобто для другого доданку формули (3.4)** наступне: ординати на одиничній епюрі  $\overline{M}_i$ , співпадаючі з напрямом опуклості параболу на вантажній епюрі (показано “стрілкою” на рис. 3.6), мають знак “плюс”.

Згідно з цим правилом знаків *для поправки на кривизну* ординату  $\bar{M}_{\text{лев}}$  (див. рис. 3.6) слід брати із знаком “мінус”, а ординату  $\bar{M}_{\text{пр}}$  – із знаком “плюс”.

**Приклад 2.** Визначити вертикальне переміщення точки (див. рис. 3.5), використовуючи *формулу крайніх ординат* (формула (3.5)).

Так само, як і в попередньому прикладі (див. стор. 30), “перемножуватимемо” епюри на ділянках  $AD$  і  $KE$ , а оскільки епюра  $M$  симетрична, то отриманий результат подвоїмо:

$$y_A = \frac{1}{EJ} 2 \left[ \frac{a}{6} \left( 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot P_A \cdot \frac{1}{2} \cdot a + 0 \cdot \frac{1}{2} + P_A \cdot 0 \right) + \frac{a/2}{6} \left( 2 \cdot P_A \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot P_A \cdot \frac{3}{4} a + P_A \cdot \frac{3}{4} a + P_A \cdot \frac{1}{2} a \right) \right] = \frac{23}{24} \cdot \frac{P a^3}{EJ}.$$

Результати обчислень, природно, співпадають з результатами попереднього прикладу 1 (див. стор. 31).

## **4 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ**

### **4.1 Статично невизначувані стрижневі системи. Їх степінь статистичної невизначуваності**

Раніше були розглянуті статично невизначувані стрижневі системи, що працюють на розтягання-стискання. Прийоми, які були використані для розкриття їх статичної невизначуваності для розрахунку більшості завдань, що зустрічаються на практиці, далеко не достатні. Зупинимось на загальних методах розкриття статичної невизначуваності стрижневих систем. Введемо поняття стрижневої системи.

*Стрижнева система – всяка конструкція, що складається з елементів, які мають форму бруса.*

*Якщо елементи стрижневої системи працюють на розтягання-стискання, то така стрижнева система називається фермою.*

Ферма складається з прямих стрижнів, утворюючих трикутник і сполучених шарнірами (рис.4.1, а). Навантаження прикладене у вузлах.

Стрижневі системи, елементи яких працюють в основному на згинання і кручення, називають рамами (див. рис. 4.1, б).

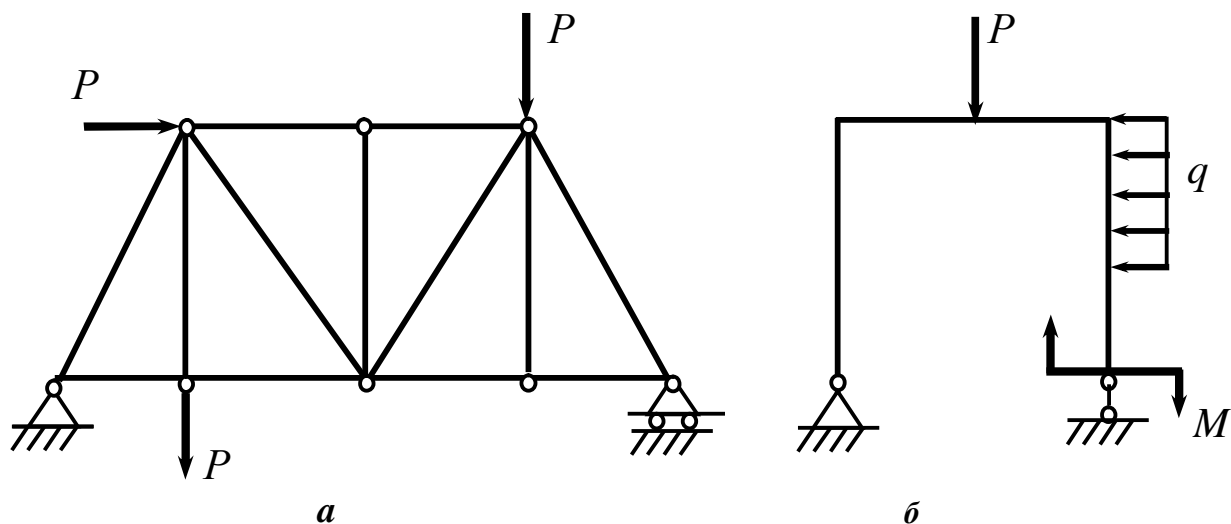


Рисунок 4.1

Усі стрижневі системи поділяються на плоскі, на півпросторові та просторові.

Плоскою називається рама, в якій стрижні та навантаження розташовані в одній площині (див. рис. 4.1, б).

Напівпросторові рами – це стрижневі системи, у яких всі елементи розташовані в одній площині, а зовнішні навантаження розташовані у взаємно перпендикулярних площинах (рис. 4.2, а).

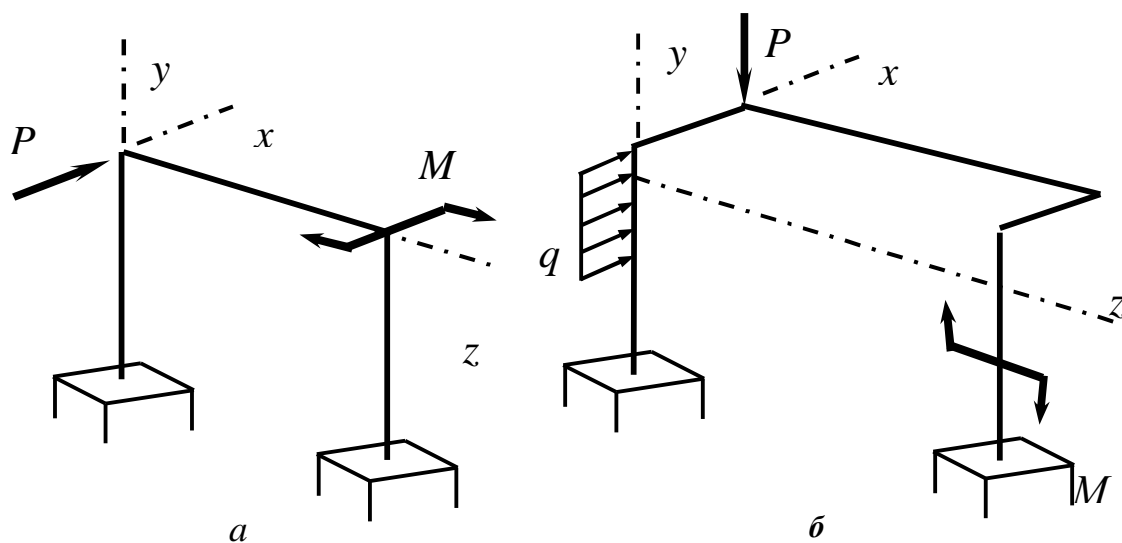


Рисунок 4.2

У просторовій рамі та стрижні й зовнішні навантаження можуть бути розташовані в різних площинах (рис. 4.2, б).

Усі стрижневі системи поділяються на статично визначувані та статично невизначувані.

*Кінематична незмінна система, для якої всі реакції опор і внутрішні силові чинники в будь-якому поперечному перерізі не можуть бути знайдені за допомогою рівнянь рівноваги і методу перерізів, називається статично невизначною.*

Покажемо декілька статично невизначуваних систем (рис. 4.3).

На рисунку 4.3, а рама має два додаткові зовнішні зв'язки. На рисунку 4.3, б рама не має додаткових зовнішніх зв'язків, але внутрішні силові чинники не можна визначити методом перерізів, оскільки їх шість, а рівнянь рівноваги можна скласти три. На рисунку 4.3, в рама має по три додаткові зовнішні й внутрішні зв'язки. Замкнутий контур тут тричі статично невизначуваний.

Кількість зв'язків, при яких досягається кінематична незмінність, називається *необхідним* числом зв'язків.

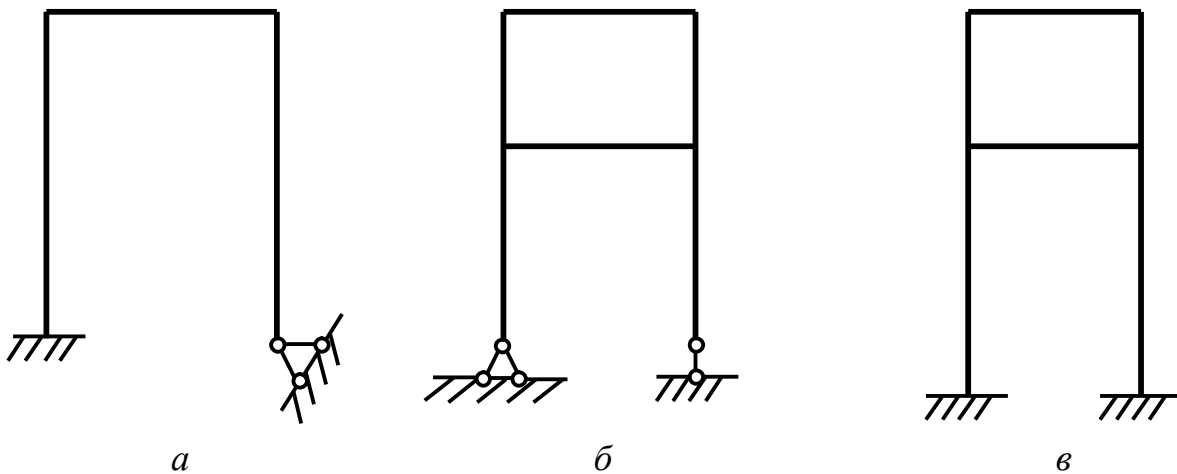


Рисунок 4.3

Усякий зв'язок, накладений понад необхідних, називають додатковим або "зайвим".

Кількість додаткових ("зайвих") зв'язків визначає ступінь статичної невизначуваності системи.

Зв'язки діляться на зовнішні та внутрішні. *Зовнішні зв'язки* перешкоджають абсолютним переміщенням деяких точок системи як єдиного цілого, а внутрішні – обмежують взаємні зсуви елементів системи.

Існують декілька способів визначення ступеня статичної невизначуваності.

Перший спосіб – ступінь статичної невизначуваності для довільних стрижневих систем можна підрахувати за кількістю “зайвих” зв'язків:

$$S = n_R - n_y \quad (4.1)$$

де  $n_R$  – кількість невідомих зусиль (реакцій)

$n_y$  – кількість рівнянь рівноваги заданої системи.

За другим способом ступінь статичної невизначуваності можна знайти за формулою

$$S = 3K - III, \quad (4.2)$$

де  $K$  – кількість замкнутих контурів;

$III$  – кількість шарнірів в перерахунку на одиночні.

Земля (підстава), тобто те, до чого кріпиться конструкція, розглядається як необмежений стрижень нескінченної жорсткості.

Постановка шарніра на осі стрижня обертає в нуль згинальний момент, тобто знижує ступінь статичної невизначуваності на одиницю.

Такий шарнір називається *одиночним* (рис.4.4, а):

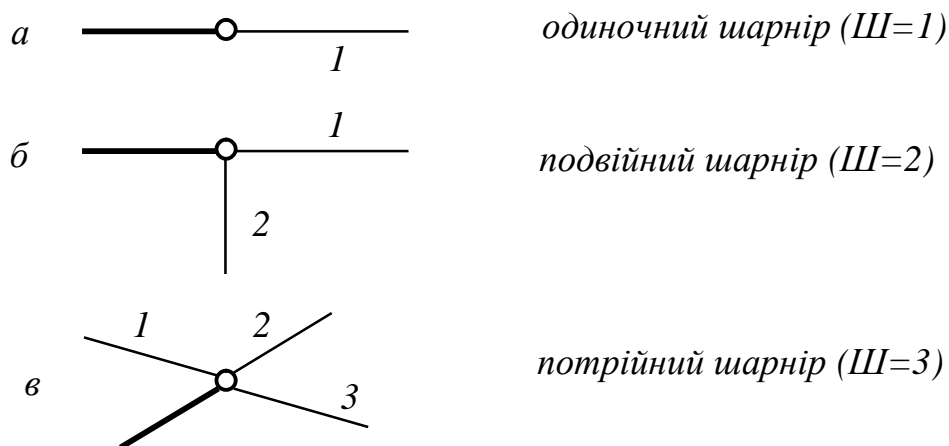


Рисунок 4.4

Шарнір, включений до вузла, де сходяться (або розходяться)  $n$  стрижнів, знижує ступінь статичної невизначуваності на  $n-1$ , оскільки замінює собою  $n-1$  одиночних шарнірів.

Такий шарнір називається *загальним* (див. рис. 4.4, б і в)

Встановимо ступінь статичної невизначуваності деяких рам (рис.4.5).

Рама, зображена на рисунку 4.5, а, має 4 зовнішні зв'язки і 3 внутрішні додаткові зв'язки. Таким чином ступінь статичної невизначуваності дорівнює  $S = 4 + 3 = 7$ .

Скористаємося формулою (4.1)  $S = n_R - n_y$ .

Кількість невідомих зусиль (реакцій) підраховується так: у кожному із закладень по 3 невідомих ( $2 \times 3 = 6$ ), у внутрішньому стрижні так само три зусилля (3), а в зовнішньому (опорному) – одна невідома реакція (1).

Таким чином  $n_R = 2 \times 3 + 3 + 1 = 10$ .

Для плоскої рами можна скласти три рівняння рівноваги:  $n_R = 3$ .

Тоді  $S = 10 - 3 = 7$ .

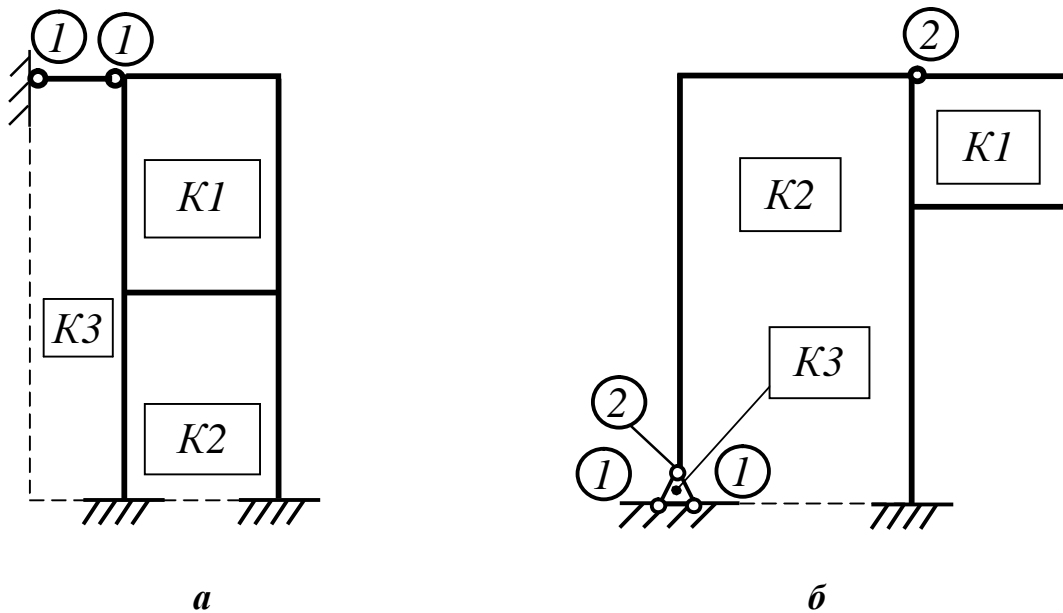


Рисунок 4.5

Для знаходження ступеня статичної невизначуваності за формулою (4.2) знаходимо, що в рамі три замкнуті контури ( $\kappa = 3$ ) і два одинарні шарніри.

Одержуємо:  $S = 3\kappa - Ш = 3 \cdot 3 - (1+1) = 7$ .

Таким чином, всі три способи підтверджують, що рама, (див. рис. 4.5, а) має ступінь статичної невизначуваності, який дорівнює 7.

Для рами, зображеної на рисунку 4.5, б, скористаємося формулою (4.2).

Оскільки  $K=3$ , а  $Ш=1+2+1+2=6$

Одержуємо:  $S=3K-Ш=3\cdot 3-6=3$ .

Отже рама (див. рис. 4.5, б) тричі статично невизначувана.

#### 4.2 Основні етапи розрахунку статично невизначуваних систем методом сил

Для розкриття статичної невизначуваності найширше в машинобудуванні використовується *метод сил*. Він полягає в наступному:

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності, тобто визначаємо кількість "зайвих" зв'язків або "зайвих" зусиль (будь-яким способом).

2 Шляхом видалення "зайвих" зв'язків замінюємо початкову статично невизначну систему статично визначною і кінематична незмінною.

*Система, звільнена від додаткових зв'язків, називається основною.*

Вибір основної системи (ОС) і, відповідно, "зайвих" невідомих залежить від розраховувача. Одній і тій же заданій системі (рис.4.6, а) може відповідати декілька основних систем (див. рис. 4.6, б-г).

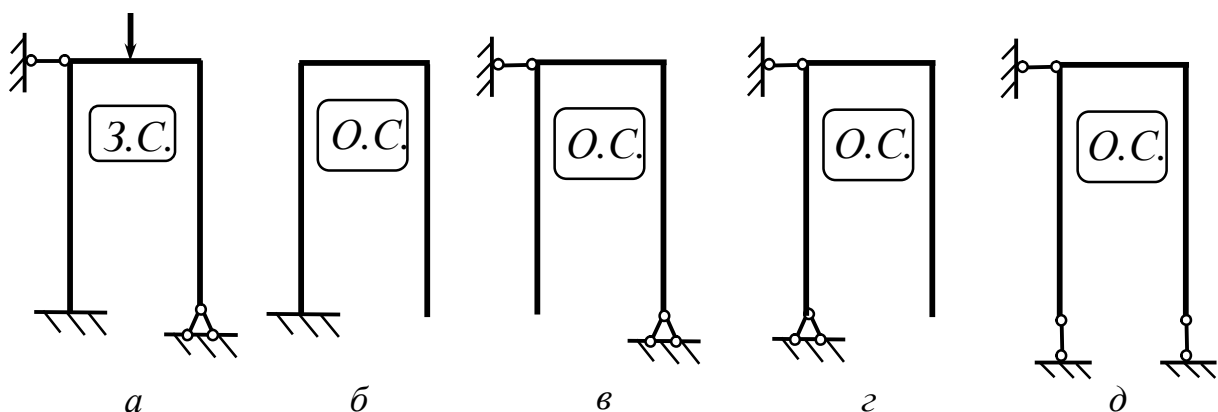


Рисунок 4.6

3 Навантажуємо основну систему (ОС) заданим навантаженням, а в точках прикріплення видалених зв'язків прикладаємо "зайві" невідомі зусилля, замінюючи дію видалених зв'язків.

Основна система, навантажена заданими зовнішніми силами і "зайвими" невідомими силами (або "зайвими" невідомими моментами), замінюючими видалені зв'язки, називається **еквівалентною системою**.

У тих перерізах, де заборонені лінійні переміщення, прикладаємо сили. У перерізах, де заборонені кутові зсуви, прикладаємо моменти.

Для основної системи (див. рис. 4.6, б) еквівалентна система має вигляд, як на рисунку 4.7.

4 Робота еквівалентної системи повинна бути ідентична роботі заданої (в даному випадку точка  $B$  (див. рис. 4.7) не повинна мати вертикального та горизонтального переміщень, а точка  $A$  – горизонтального переміщення). Для цього дорівнюємо нулю переміщення точок прикріплення "зайвих" зв'язків за напрямком їх дії. З одержаних рівнянь визначаємо значення "зайвих" невідомих. Визначення переміщень проводиться методом Мора або способом Верещагіна.

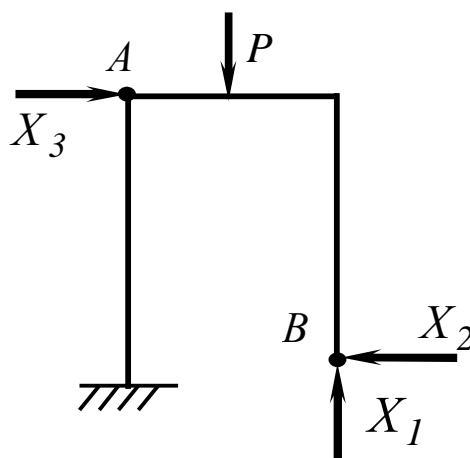


Рисунок 4.7

5 Після визначення кількості "зайвих" невідомих зусиль визначення реакцій, побудова епюр внутрішніх зусиль і міцнісні розрахунки проводять звичайними способами. Розрахунок за вказаною схемою носить назву *методу сил*, оскільки як невідомі вибирають сили за напрямком видалених зв'язків.

### 4.3 Канонічні рівняння методу сил

Зовнішні навантаження, що зустрічаються в задачах опору матеріалів, вельми різноманітні та зазвичай є групою сил. Роботу групи постійних сил можна подати у вигляді добутку двох величин  $A = P \cdot D_P$ , у якому множник  $P$  залежить тільки від сил групи і називається *узагальненою силою*, а  $D_P$  залежить від переміщень і називається *узагальненим переміщенням*.

Таким чином, під *узагальненою силою* розумітимемо будь-яке навантаження (зосереджені сили, зосереджені моменти, розподілені навантаження і т.д.), яке здатне здійснювати роботу на відповідному узагальненому переміщенні.

Прийнято позначати узагальнені переміщення (як лінійні, так і кутові) буквами  $\Delta_{ik}$  або  $d_{ik}$  з відповідними подвійними індексами. Перший індекс указує точку і напрям переміщення, другий – силовий чинник, що викликає це переміщення. Наприклад,  $\Delta_{PP}$  означає переміщення точки додатку сили  $P$  за напрямком її дії, викликане тією ж силою  $P$  (рис.4.8, а).

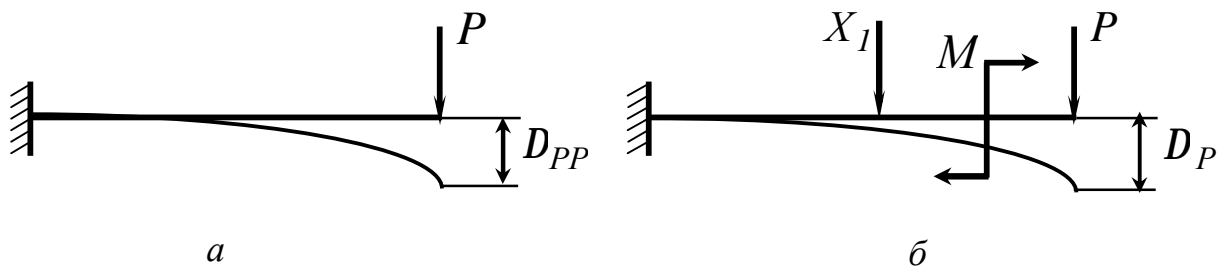


Рисунок 4.8

Для позначення повного переміщення, викликаного декількома силовими чинниками, наприклад зовнішніми силою  $P$ , моментом  $M$  і “зайвою” невідомою силою  $X_1$  (див. рис.4.8, б), при  $\Delta$  зберігають тільки перший індекс:

$$\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PM} + \Delta_{PX_1}. \quad (4.3)$$

Переміщення, викликані одиничною силою ( $X_1=1$ ), прийнято позначати буквою  $d$  і називати питомим переміщенням. Якщо одинична

сила  $X_1=1$  викликала переміщення  $d_{11}$ , то повне переміщення  $D_{11}$  може бути подане у вигляді

$$\Delta_{11} = X_1 \cdot d_{11}. \quad (4.4)$$

Додаткові рівняння переміщень, що виражають рівність нулю переміщень по напрямках “зайвих” невідомих, зручно складати в так званій *канонічній формі*, тобто по певній закономірності.

Покажемо це на **прикладі** рішення простої статично невизначуваної системи (рис.4.9, а).

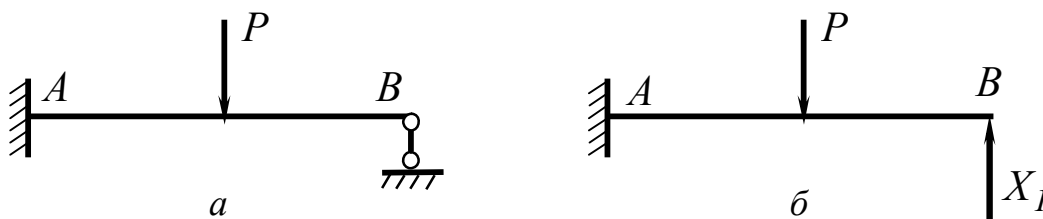


Рисунок 4.9

Виберемо як основну систему консоль, яку для отримання еквівалентної системи (рис.4.9, б) навантажимо зовнішньою силою  $P$  і “зайвою” невідомою  $X_1$ . Додаткове рівняння переміщень, що виражає рівність нулю переміщення точки  $B$  від сил  $P$  і  $X_1$ , буде

$$\Delta_1 = \Delta(P, X_1) = 0. \quad (4.5)$$

На підставі принципу незалежності дії сил запишемо

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11}, \quad (4.6)$$

де  $\Delta_{1P}$  – переміщення від заданого навантаження  $P$  (рис.4.10, а);

$\Delta_{11}$  – переміщення від сили  $X_1$ .

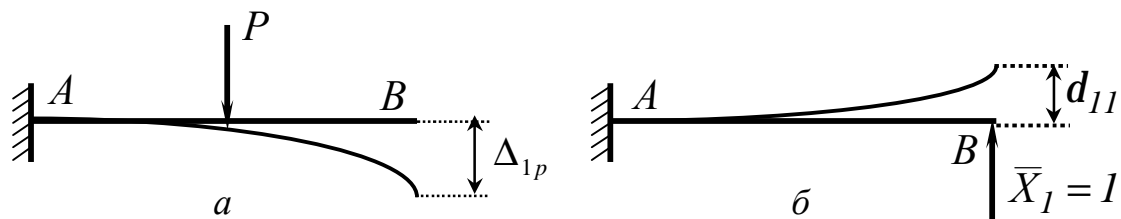


Рисунок 4.10

Позначивши переміщення від  $\bar{X}_1 = 1$  за його напрямком через  $d_{11}$  (рис.4.10, б), одержимо  $\Delta_{11} = d_{11} \cdot X_1$ .

Рівняння переміщень (4.6) набуде вигляду

$$d_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (4.7)$$

Рівняння (4.7) є канонічним рівнянням методу сил для один раз статично невизначної системи.

Аналогічно можуть бути записані канонічні рівняння методу сил для будь-якої  $n$  разів статично невизначної системи:

$$\begin{cases} d_{21} \cdot X_1 + d_{22} \cdot X_2 + d_{23} \cdot X_3 + \mathbf{K} + d_{2n} \cdot X_n + \Delta_{2P} = 0, \\ d_{n1} \cdot X_1 + d_{n2} \cdot X_2 + d_{n3} \cdot X_3 + \mathbf{K} + d_{nn} \cdot X_n + \Delta_{nP} = 0, \\ d_{n1} \cdot X_1 + d_{n2} \cdot X_2 + d_{n3} \cdot X_3 + \mathbf{K} + d_{nn} \cdot X_n + \Delta_{nP} = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

де  $d_{ik}$  – одиничні коефіцієнти канонічних рівнянь;

$\Delta_{iP}$  – вантажні коефіцієнти канонічних рівнянь.

Одиничні коефіцієнти з однаковими індексами називають *головними*, а з різними – *побічними*.

Кількість рівнянь системи (4.8) дорівнює ступеню статичної невизначуваності стрижневої системи.

Фізичний зміст канонічних рівнянь (4.8) - переміщення за напрямком відкинутих зв'язків дорівнюють нулю.

Для визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь необхідно виконати наступні дії:

1 До основної системи (ОС) по черзі прикласти сили  $X_i = 1$  і побудувати одиничні епюри.

2 “Перемноженням” відповідних одиничних епюр знайти одиничні коефіцієнти  $d_{ik}$ .

3 До основної системи прикласти зовнішнє навантаження і побудувати вантажну епюру.

4 По черзі “перемножуючи” вантажну епюру з кожною одиничною, одержати вантажні коефіцієнти  $\Delta_{ip}$ .

5 Визначивши коефіцієнти канонічних рівнянь і вирішивши систему (4.8), знайти невідомі зусилля  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Можна показати, що визначення одиничних переміщень можна спростити, якщо встановити між переміщеннями  $d_{ik}$  і  $d_{ki}$  взаємозв'язок.

#### 4.4 Теорема про взаємність робіт і переміщень

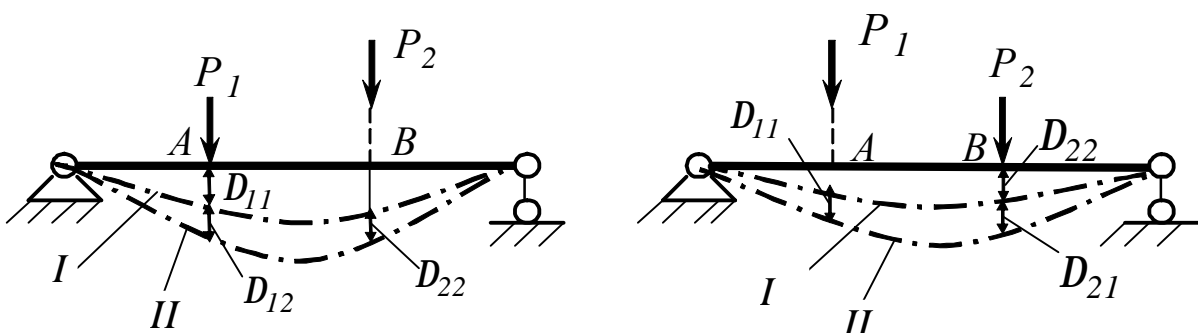
Теорема про взаємність робіт належить до загальних теорем опору матеріалів. Вона витікає з принципу незалежності дії сил і застосовна для всіх систем.

Розглянемо балку, до якої прикладені сили  $P_1$  і  $P_2$  (рис. 4.11).

Виконаємо пряме навантаження, тобто навантажимо балку в точці  $A$  силою  $P_1$  (див. рис.4.11, а). Вона виконає роботу

$$A = \frac{1}{2} P_1 \cdot \Delta_{11},$$

де  $D_{11}$  – переміщення т.  $A$  у напрямі сили  $P_1$ , викликане силою  $P_1$ .



а

Рисунок 4.11

б

Далі в точці  $B$  прикладаємо силу  $P_2$ . Вона виконає роботу, яка матиме аналогічний вираз:  $\frac{1}{2}P_2 \cdot \Delta_{22}$ .

Одночасно виконає роботу і сила  $P_1$ , оскільки при прикладанні сили  $P_2$  точка  $A$  теж переміститься. Сила  $P_1$  на цьому переміщенні залишається постійною, і її робота буде дорівнювати  $P_1 \cdot \Delta_{12}$ .

Отже, робота при прямому вантаженні балки (див. рис.4.11, а) буде дорівнювати

$$A_1 = \frac{1}{2}P_1 \cdot \Delta_{11} + \frac{1}{2}P_2 \cdot \Delta_{22} + P_1 \cdot \Delta_{12}. \quad (4.9)$$

Виконаємо зворотне навантаження (див. рис.4.11, а), тобто спочатку прикладемо силу  $P_2$  в точці  $B$ , а потім силу  $P_1$  в точці  $A$ . Тоді, відповідно, робота набуде вигляду

$$A_2 = \frac{1}{2}P_2 \cdot \Delta_{22} + \frac{1}{2}P_1 \cdot \Delta_{11} + P_2 \cdot \Delta_{21}. \quad (4.10)$$

Прирівнявши роботи  $A_1 = A_2$ , знаходимо

$$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}. \quad (4.11)$$

Це і є **теорема про взаємність робіт**: *робота першої сили на переміщенні точки її прикладання під дією другої сили дорівнює роботі другої сили на переміщенні точки її прикладання під дією першої сили.*

Якщо  $P_1 = P_2 = P$ , то

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}. \quad (4.12)$$

**Теорема про взаємність переміщень**: *переміщення першої одиничної сили в її напрямку під дією другої одиничної сили дорівнює переміщенню другої одиничної сили в її напрямку під дією першої одиничної сили.*

Цю теорему можна проілюструвати (рис. 4.12).

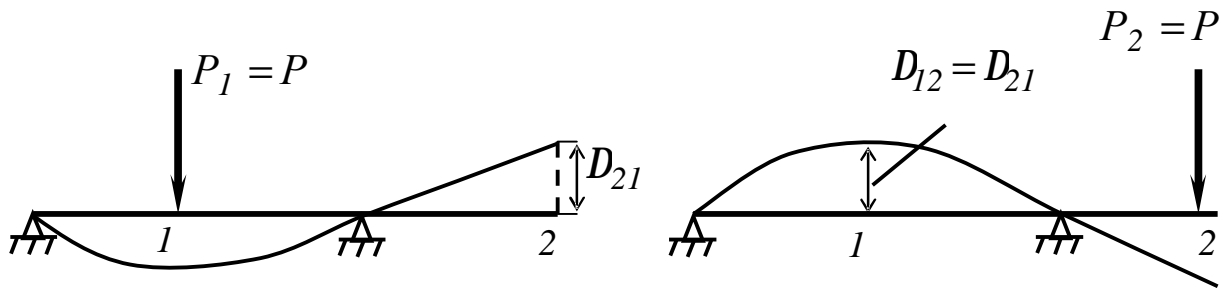


Рисунок 4.12

## 5 ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНОЇ РАМИ

Для заданої (рис. 5.1) рами підібрати розміри прямокутного перерізу  $h/b=2$  і  $[s]=120 \text{ МПа}$ , а також визначити кут повороту перерізу  $A$ .

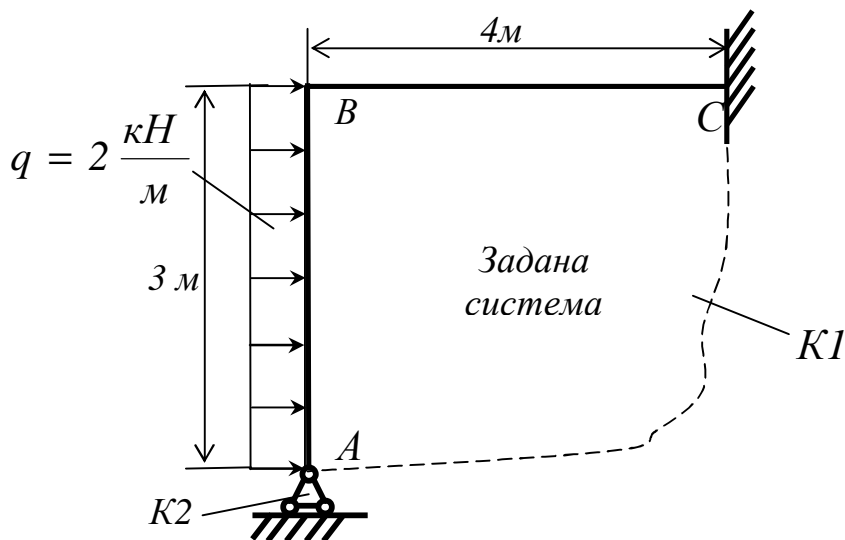


Рисунок 5.1

### Рішення

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності заданої системи:

1-й спосіб:

$$S = n_R - n_y = 5 - 3 = 2,$$

де  $n_R = 5$  – кількість невідомих реакцій

$n_y = 3$  – кількість рівнянь рівноваги;

- 2-й спосіб:

$$S = 3K - III = 3 \cdot 2 - 4 = 2,$$

де  $K = 2$  – кількість контурів;

$III = 4$  – кількість шарнірів в перерахунку на одиничні.

2 Вибираємо основну систему, відкидаючи опору  $A$  (рис. 5.2, а).

3 Переходимо до еквівалентної системи (див. рис.5.2, б), прикладаючи до основної задане навантаження  $q$  і реакції відкинутих зв'язків  $X_1$  і  $X_2$ .

4 Складаємо систему канонічних рівнянь спільності деформації (їх кількість складає  $S = 2$ ):

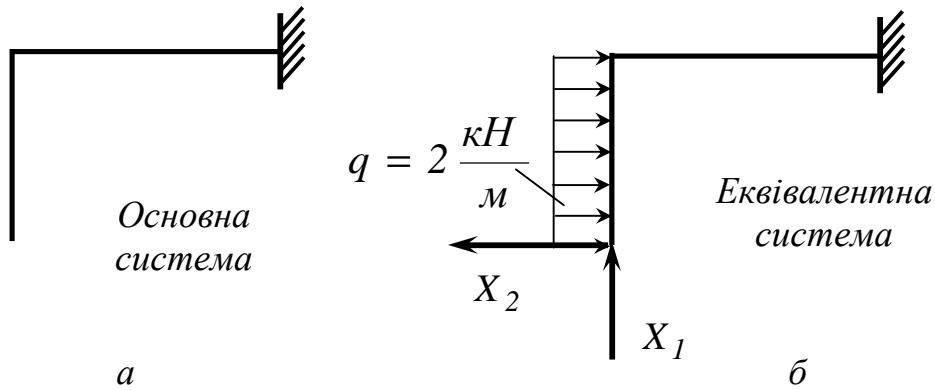


Рисунок 5.2

$$\begin{cases} d_{11}X_1 + d_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ d_{21}X_1 + d_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

5 Будуємо вантажну епюру згинальних моментів (рис. 5.3), для чого до основної системи прикладаємо зовнішнє навантаження.

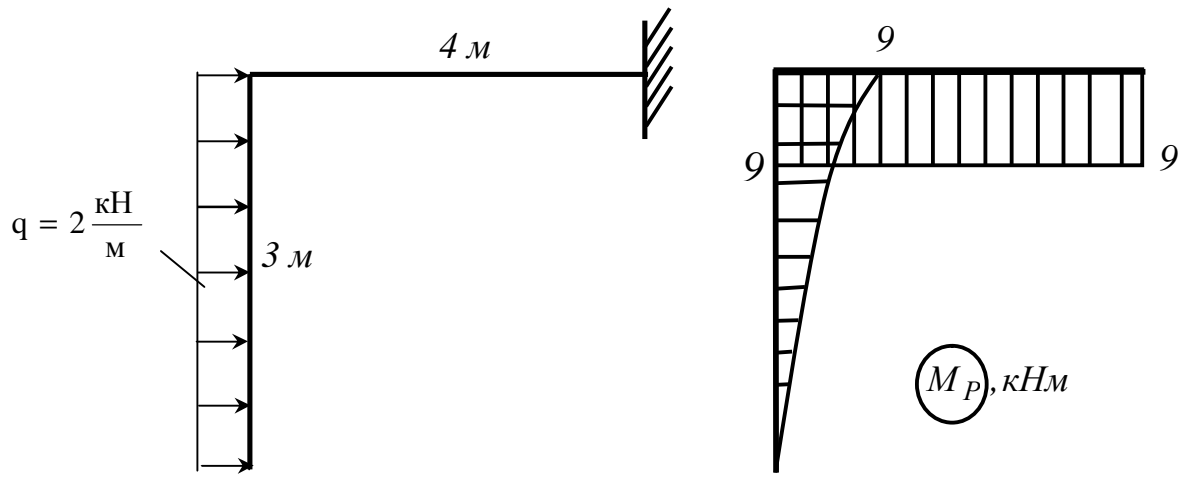


Рисунок 5.3

6 По черзі до основної системи прикладаємо одиничні навантаження  $X_1$  і  $X_2$  у напрямі "зайвих" зв'язків і будуємо епюри згинальних моментів (рис. 5.4).

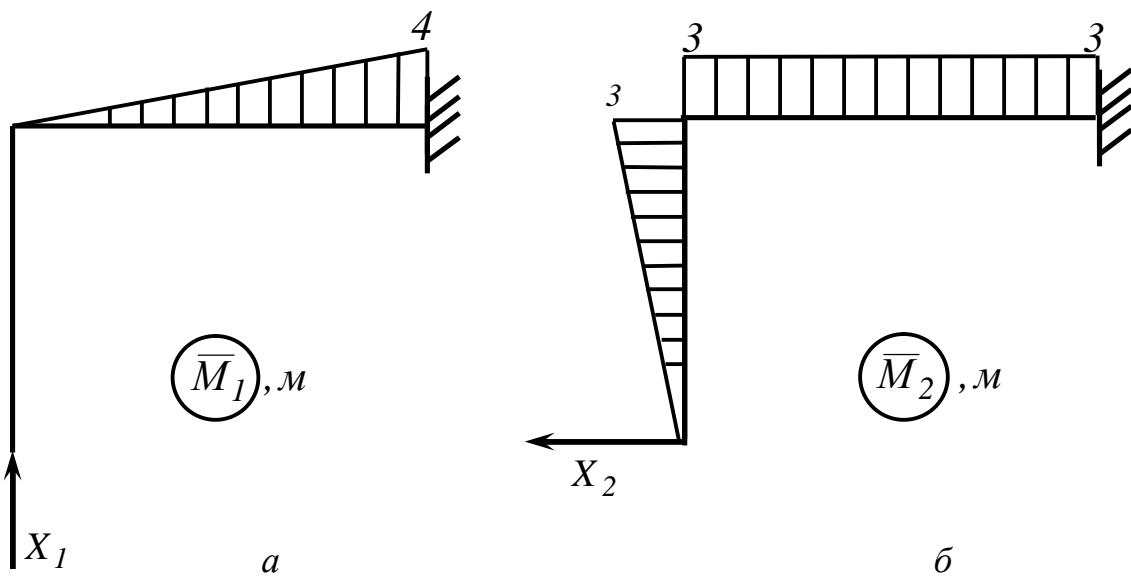


Рисунок 5.4

7 Шляхом "перемноження" відповідних епюр визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (2 \cdot 4 \cdot 4) \right] = \frac{64}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (2 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3) \right] = \frac{24}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (2 \cdot 3 \cdot 3) + \frac{4}{6} (6 \cdot 3 \cdot 3) \right] = \frac{45}{EI};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (-2 \cdot 4 \cdot 9 - 4 \cdot 9) \right] = -\frac{72}{EI};$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (-2 \cdot 9 \cdot 3) + \frac{2 \cdot 3^3}{24} (0+3) + \frac{4}{6} (-6 \cdot 3 \cdot 9) \right] = -\frac{128,25}{EI}.$$

7 Робимо перевірку правильності визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь. Для цього побудуємо допоміжну сумарну одиничну епюру  $\bar{M}_{\Sigma 1}$ , в якій відповідні ординати епюр  $\bar{M}_1$  і  $\bar{M}_2$  алгебраїчно підсумовуємо в кожному перерізі (рис 5.5):

а) Сума одиничних коефіцієнтів  $\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}$  має дорівнювати "перемноженню" епюри  $M_{\Sigma 1}$  самої на себе, оскільки

$$\begin{aligned} & (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \times (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) = \\ & = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 + \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 + \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_1 + \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2 = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}. \end{aligned}$$

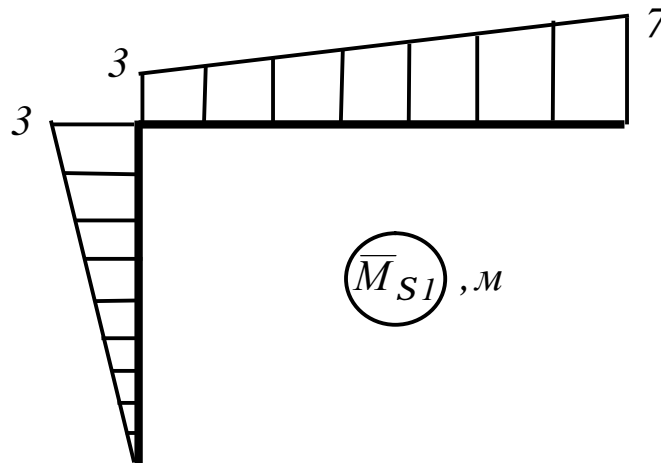


Рисунок 5.5

"Перемноження" епюри  $M_{\Sigma 1}$  самої на себе дає

$$\delta_{\Sigma 1} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (2 \cdot 3 \cdot 3) + \frac{4}{6} (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \cdot 7 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 3) \right] = \frac{343}{3EI}.$$

З іншого боку, сума одиничних коефіцієнтів дорівнює

$$d_{\Sigma_1} = \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{64}{3} + 2 \cdot 24 + 45 \right] = \frac{343}{3EI}.$$

Отже, одиничні коефіцієнти знайдені вірно.

б) Аналогічно перевіряємо правильність знаходження вантажних коефіцієнтів, для чого "перемножуємо" епюри  $\bar{M}_{\Sigma_1}$  і  $M_p$ :

$$(\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \times M_p = \Delta_{\Sigma p}.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma p} &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (-2 \cdot 3 \cdot 9) + \frac{2 \cdot 3^3}{24} (0+3) + \frac{4}{6} (-2 \cdot 3 \cdot 9 - 2 \cdot 7 \cdot 9 - 3 \cdot 9 - 7 \cdot 9) \right] = \\ &= -\frac{200,25}{EI}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{\Sigma p} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{72}{EI} - \frac{128,25}{EI} = -\frac{200,25}{EI}.$$

Вантажні коефіцієнти також знайдені вірно.

8 Підставимо знайдені переміщення в канонічні рівняння (5.1) і знайдемо  $X_1$  і  $X_2$ :

$$\begin{cases} \frac{64}{3} X_1 + 24 X_2 - 72,0 = 0; & X_1 = 0,422 \text{ кН}; \\ 24 X_1 + 45 X_2 - 128,25 = 0; & X_2 = 2,624 \text{ кН}. \end{cases}$$

10 Перевіряємо правильність рішення системи рівнянь підстановкою знайдених невідомих в рівняння (5.1):

$$\begin{cases} 21,33 \cdot 0,422 + 24 \cdot 2,629 - 72,0 = 0; \\ 24 \cdot 0,422 + 45 \cdot 2,629 - 128,25 = 0. \end{cases}$$

11 У еквівалентну систему замість невідомих  $X_1$  і  $X_2$  підставляємо знайдені значення (рис 5.6).

Якби зусилля одержали із знаком "мінус", то його початковий напрям слід було б замінити на протилежний.

12 Будуємо остаточні епюри  $N$  (рис. 5.7, а),  $Q$  (рис. 5.7, б) і  $M$  (рис. 5.7, в), відповідні заданій статично невизначуваній рамі і еквівалентній системі (див. рис.5.5).

13 Робимо *деформаційну перевірку* правильності розкриття статичної невизначуваності. Вона полягає в наступному: "перемножуємо" епюри  $M_s$  і  $\bar{M}_1$  (див. рис. 5.4, а), при цьому одержуємо переміщення  $D_{1S}$ , тобто переміщення у напрямку дії сили,  $X_1$  викликане діючими зусиллями. Оскільки в заданій рамі це переміщення відсутнє (у цьому напрямку є зв'язок), то результат "перемноження" має бути нуль.

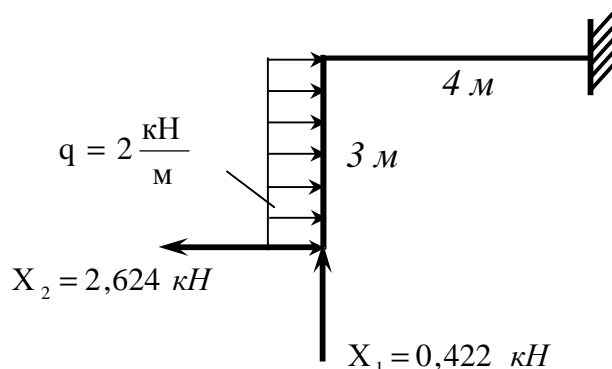


Рисунок 5.6

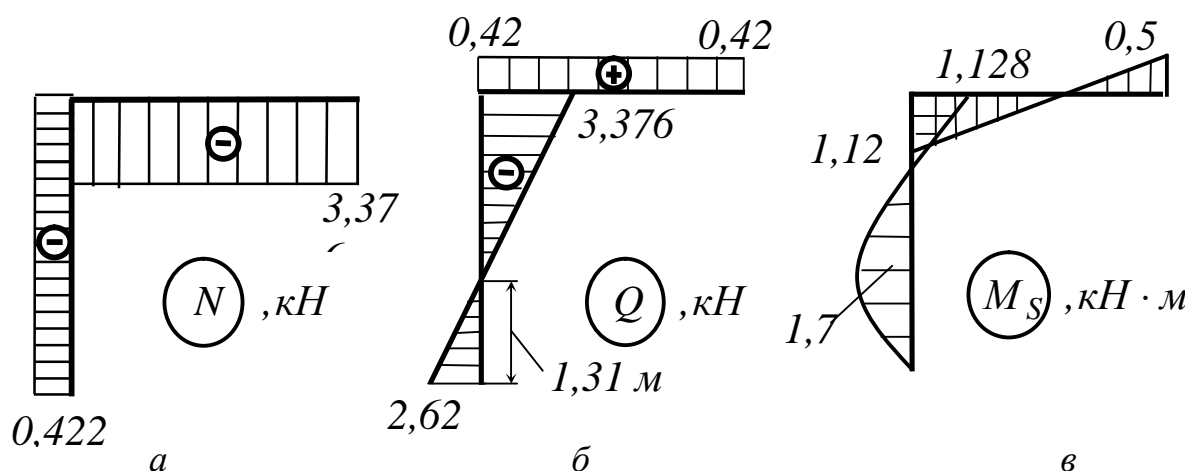


Рисунок 5.7

$$\Delta_{1s} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (2 \cdot 0,56 \cdot 4 - 4 \cdot 1,128) \right] = \frac{2,953 - 3,008}{EI} = \frac{0,055}{EI}.$$

Знайдемо погрішність розрахунку:

$$\frac{2,953 - 3,008}{2,953} = \frac{0,055}{2,953} \cdot 100 \% = 2\%.$$

Аналогічно знаходимо переміщення  $\Delta_{2S}$ , "перемножуючи" епюри  $M_s$  і  $\bar{M}_2$  (див. рис. 5.4, б):

$$\begin{aligned} \Delta_{2S} = \frac{I}{EI} \left[ \frac{3}{6} (-2 \cdot 3 \cdot 1,128) + \frac{3 \cdot 2^3}{24} (0+3) + \frac{4}{6} (-2 \cdot 1,128 \cdot 3 + 2 \cdot 0,56 \cdot 3 \cdot \right. \\ \left. 3 \cdot 1,128 + 3 \cdot 0,56) \right] = \frac{I}{EI} (10,11 - 10,152) = -\frac{0,042}{EI}. \end{aligned}$$

Погрішність розрахунку  $\Delta_{2S}$ :  $\frac{10,11 - 10,152}{10,11} = \frac{0,042}{10,11} \cdot 100\% = 0,4\%.$

14 Встановлюємо небезпечний переріз і, використовуючи умову міцності при згинанні, за величиною  $M_{небн} = M_{max} = 1,7 \text{ кН} \cdot \text{м}$  визначаємо розміри поперечного перерізу рами:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{1,7 \cdot 10^3}{160} \cdot 10^6 = 10,6 \text{ см}^3.$$

Момент опору прямокутного перерізу дорівнює

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{4}{6} b^3 = 10,6 \text{ см}^3,$$

Одержуємо  $b = \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10,6}{2}} = 2,5 \text{ см}$ , звідки  $h = 5 \text{ см}$ .

15 Для визначення кута повороту т. А знаходимо момент інерції перерізу:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{2,5 \cdot 5^3}{12} = 26,6 \text{ см}^4.$$

Будуємо одиничну епюру від моменту  $M_3$ , прикладеного в т. А (рис 5.8), і "перемножуємо" одержану епюру  $M_3$  з епюрою  $M_s$ .

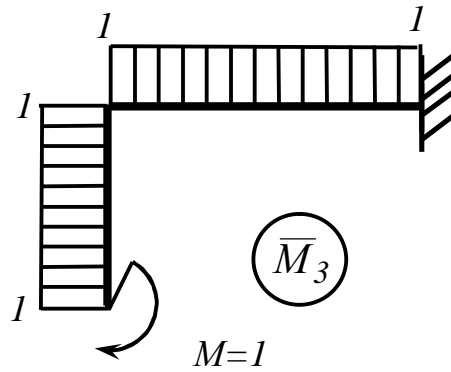


Рисунок 5.8

Кут повороту в перерізі  $A$  буде дорівнювати:

$$\Theta_A = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (-2 \cdot 1,128 \cdot 1 - 1,128 \cdot 1) + \frac{2 \cdot 3^3}{24} (1+1) + \frac{4}{6} (-2 \cdot 1,128 \cdot 1 + 2 \cdot 0,56 \cdot 1 - 1,128 \cdot 1 + 0,56 \cdot 1) \right] = \frac{1,67}{EI};$$

Остаточно

$$\Theta_A = \frac{1,67 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 26,6 \cdot 10^{-8}} = 0,03 \text{ рад.}$$

## 6 РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК

### 6.1 Поняття про нерозрізні балки

При конструюванні будівельних і мостових споруд виникає необхідність розрахунку на міцність багато опорних нерозрізних статично невизначуваних балок.

*Нерозрізними називаються балки, що спираються більш ніж на дві опори і що не мають проміжних шарнірів.*

До розрахункової схеми “нерозрізна балка” зводяться багато реальних конструкцій: валки прокатних станів, ролики листопрямильних машин, підкранові балки, довгі шпинделі, залізничні мости і т.д.

Розрахункова схема такої балки подана на рисунку 6.1, з якого видно, що балка “лежить” на п’яти опорах. Крайні опори можуть бути як шарнірними, так і затисненими.

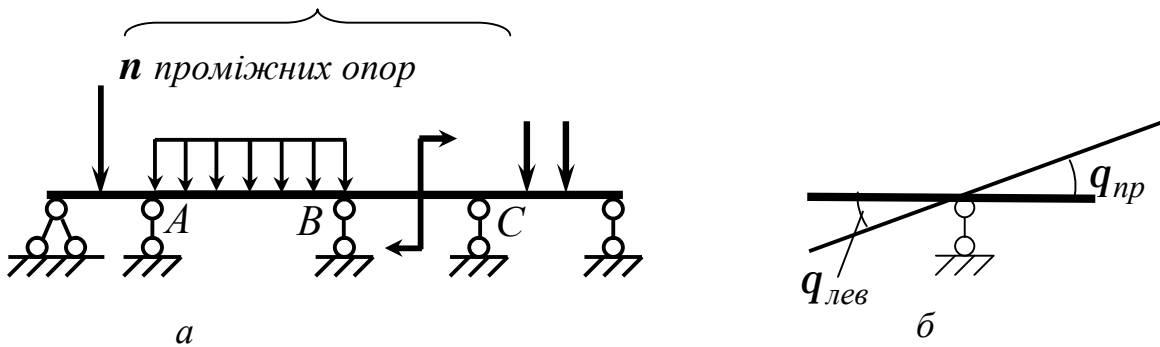


Рисунок 6.1

При цьому на будь-якій проміжній опорі взаємний кут повороту прольотів, що примикають до опори (див. рис.6.1, б), дорівнює нулю. Або, кажучи іншими словами, кути нахилу балки зліва і праворуч від опори рівні ( $q_{лев} = q_{пр}$ ).

Розглянемо спочатку випадок шарнірного спирання. При цьому одна з опор виконується шарнірно-нерухомою, а інші – шарнірно-рухомими. Легко переконатися, що кількість “зайвих” реакцій дорівнює  $n$ , тобто дорівнює кількості проміжних опор.

При  $n$  проміжних опорах кількість замкнутих контурів буде дорівнювати  $K=n+2$ , а одиночних шарнірів –  $Ш=2n+6$ .

$$\text{Тоді } 3n+6-2n-6=n. \quad S=3K-Ш=3(n+2)-(2n+6)=n.$$

Якщо балка має жорстке затискання (рис. 6.2), то ступінь статичної невизначуваності дорівнює кількості шарнірних опор, оскільки три зв'язки жорсткого затискання цілком достатньо для геометричної незмінності балки. Решта зв'язків – “зайві”, тобто  $S=2$  (дві шарнірні опори).

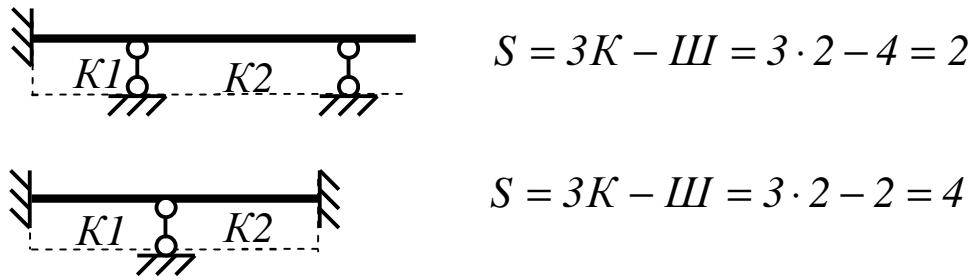


Рисунок 6.2

## 6.2 Особливості вибору основної системи

Нерозрізна балка є окремим випадком статично невизначної стрижневої системи, тому до неї застосовні всі положення розрахунку таких систем. Їх розрахунок, як відомо, починається з вибору *основної системи*. При її виборі необхідно прагнути до того, щоб канонічні рівняння вийшли можливо простішими. При найбільш вдалому виборі основної системи для нерозрізної балки можна добитися того, що деякі коефіцієнти канонічних рівнянь перетворяться на нулі, і при будь-якій кількості прольотів жодне рівняння не міститиме більше трьох невідомих.

Для розкриття статичної невизначуваності нерозрізної балки, зображеної на рисунку 6.1, як *основну систему* найзручніше застосовувати систему з *врізаними шарнірами*, які замінюють “зайві” проміжні опори (рис. 6.3).

У цьому випадку балка розбивається шарнірами на окремі, незалежні балки, кожна з яких деформується самостійно. При цьому їх кути нахилу (рис. 6.4, а), зліва і праворуч від шарніра, не дорівнюють один одному ( $q_{лев} \neq q_{пр}$ ).

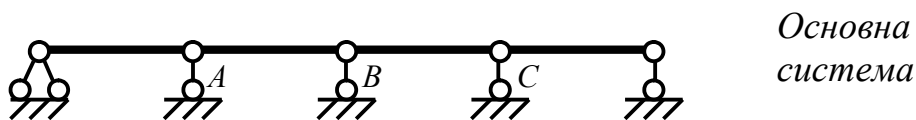


Рисунок 6.3



Рисунок 6.4

Оскільки постановкою шарніра ліквідується згинальний момент в даному перерізі балки, то для відновлення втрачених зв'язків прикладаємо до кожної опори два рівних і протилежно направлених моменти  $M = X_n$  (див. рис. 6.4, б), таких, що є дією одного на інший віддалених шарніром частин балки.

Рівняння переміщень в цьому випадку вказує на рівність нулю взаємного кута повороту перерізів правої і лівої балки, що примикають до шарніра:

$$\Delta q = q_{лев} + q_{прав} = 0. \quad (6.1)$$

При такому виборі основної системи дія заданого навантаження розповсюджується тільки на проліт, де вона прикладена. Тому для наочності проміжні опори часто зображають спареними (рис. 6.5).

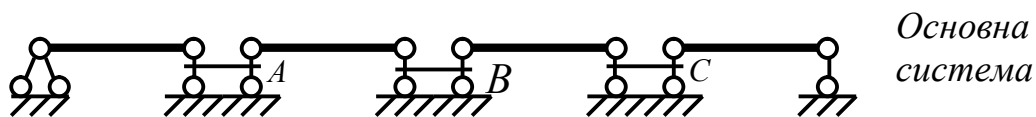


Рисунок 6.5

Таким чином, *еквівалентна система* буде рядом простих шарнірно спертих балок, навантажених заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами  $M_1 = X_1; M_2 = X_2 \dots M_n = X_n$  (рис. 6.6), замінюючими відкинутий зв'язок між сусідніми прогонами.

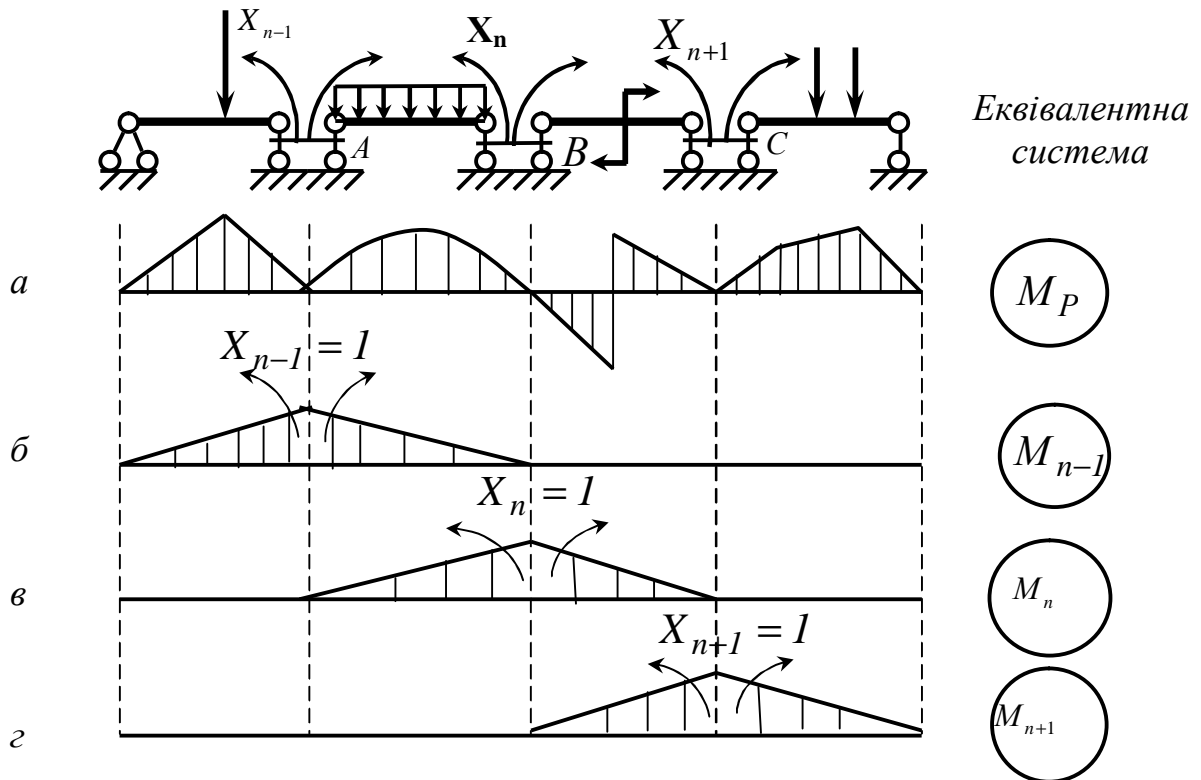


Рисунок 6.6

Розглянемо, як при такій схемі перетвориться  $n$ -е рівняння системи канонічних рівнянь:

$$d_{n1}X_1 + d_{n2}X_2 + \mathbf{K} + d_{nn}X_n + d_{n,n+1}X_{n+1} + \Delta_{nP} = 0. \quad (6.2)$$

Визначимо коефіцієнти цього рівняння. Для цього побудуємо вантажну епюру  $M_p$  від зовнішніх сил і одиничні епюри, вважаючи моменти  $X_1, X_2, \mathbf{K}, X_n, X_{n+1}$ , які по черзі дорівнюють одиниці (див. рис. 6.6).

Оскільки всі балки роз'єднані, то навантаження якого-небудь прогону не робить впливу на сусідні прогони. Таким чином, вантажна епюра  $M_p$  (див. рис. 6.6, а) на кожному прогоні будується від навантажень, що належать тільки цьому прогону. Так само будуються одиничні епюри від опорних одиничних моментів.

Природно, що в  $n$ -му канонічному рівнянні перетворяться на нуль всі коефіцієнти, окрім  $d_{n,n-1}$ ,  $d_{n,n}$  і  $d_{n,n+1}$ , і рівняння (6.2) набуде вигляду:

$$d_{n1,n-1}X_{n-1} + d_{nn}X_n + d_{n,n+1}X_{n+1} + \Delta_{nP} = 0. \quad (6.3)$$

Дійсно, одиничний  $n$ -й момент створює згинальні моменти тільки в прольотах  $AB$  і  $BC$  (див. рис. 6.5). У цих же прольотах виникають згинальні моменти від  $n-1$  і  $n+1$  моментів і від заданих навантажень. Звідси витікає, що всі добутки епюр звертаються в нуль, окрім тих, за допомогою яких знаходяться  $d_{n,n}$ ,  $d_{n,n-1}$ ,  $d_{n,n}$ ,  $d_{n,n+1}$  і  $\Delta_{nP}$ .

*Канонічне рівняння (6.3) виражає рівність нулю взаємного кута повороту перерізів на проміжній опорі.*

Усі дії, пов'язані з розкриттям статичної невизначуваності балок, виконуються так само, як і для рам.

### 6.3 Приклад розрахунку нерозрізної балки

Для заданої балки (рис. 6.7, а) підібрати двотавровий поперечний переріз і визначити прогин в точці  $D$ .

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності:

$$S = 3K - III = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

2 Вибираємо *основну систему*, шляхом врізання шарнірів в жорсткому затисканні та в місці проміжної опори (див. рис. 6.7, б).

3 Переходимо до *еквівалентної системи*, прикладаючи до основної системи зовнішнє навантаження і невідомі моменти на проміжних опорах (див. рис. 6.7, в).

4 Складаємо канонічні рівняння методу сил:

$$\begin{cases} d_{11}X_1 + d_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ d_{21}X_1 + d_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

5 Для визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь будуємо епюри: вантажну  $M_P$  (див. рис. 6.7, з) і одиничні  $\bar{M}_1$  і  $\bar{M}_2$  (див. рис. 6.7, д і е).

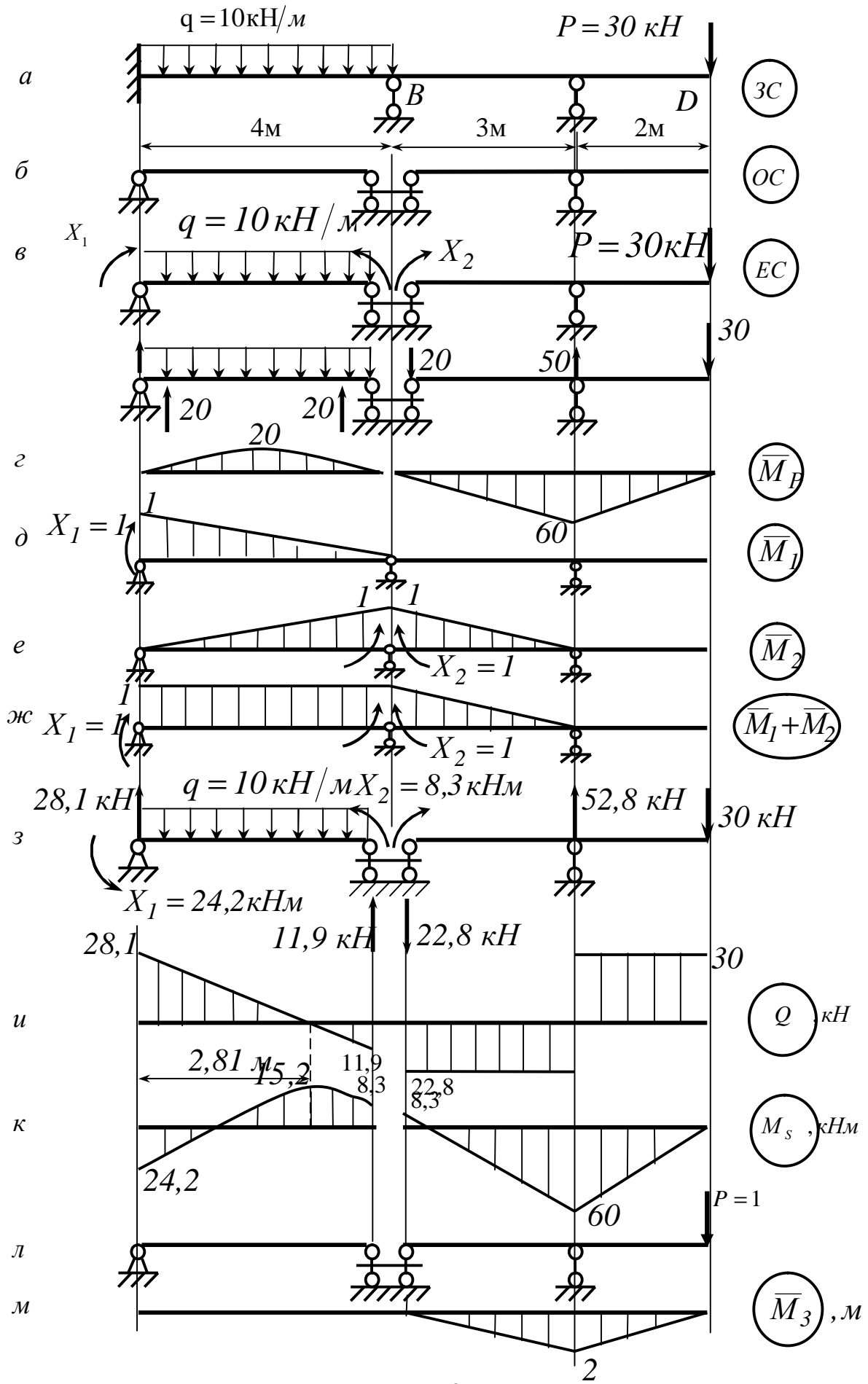


Рисунок 6.7

6 Відповідним “перемноженням” епюр знаходимо коефіцієнти:

$$d_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (2 \cdot 1 \cdot 1) \right] = \frac{4}{3EI};$$

$$d_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{3}{6} (2 \cdot 1 \cdot 1) \right] = \frac{7}{3EI};$$

$$d_{12} = d_{21} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (1 \cdot 1) \right] = \frac{2}{3EI};$$

$$\Delta_{1p} = \bar{M}_1 \times M_p = \frac{1}{EI} \left[ \frac{10 \cdot 4^3}{24} (1+0) \right] = \frac{80}{3EI};$$

$$\Delta_{2p} = \bar{M}_2 \times M_p = \frac{1}{EI} \left[ \frac{10 \cdot 4^3}{24} (1+0) + \frac{3}{6} ((-60) \cdot 1) \right] = -\frac{10}{3EI}.$$

$$(\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \times (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (6 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{3}{6} (2 \cdot 1 \cdot 1) \right] = \frac{5}{EI}$$

7 Перевіряємо правильність знаходження коефіцієнтів канонічного рівняння, для чого будемо сумарну одиничну епюру  $(\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$  (див. рис. 6.7, ж). Для перевірки одиничних коефіцієнтів “помножимо” епюру  $(\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$  на епюру  $(\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$ .

$$\text{З іншого боку: } d_{11} + 2d_{12} + d_{22} = \frac{1}{EI} \left( \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \right) = \frac{5}{EI}.$$

Отже, одиничні коефіцієнти знайдені правильно.

Аналогічно перевіряємо вантажні коефіцієнти:

$$(\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \times M_p = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (0) + \frac{10 \cdot 4^3}{24} (1+1) + \frac{3}{6} (-60 \cdot 1) \right] = \frac{70}{3EI}.$$

$$\text{Сума вантажних коефіцієнтів: } \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = \frac{80}{3EI} - \frac{10}{3EI} = \frac{70}{3EI}.$$

Вантажні коефіцієнти також знайдені правильно.

8 Підставляємо знайдені коефіцієнти в канонічні рівняння (6.4), скоротивши на величину жорсткості  $EI$ :

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + 80 = 0; \\ 2X_1 + 7X_2 - 10 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо невідомі зусилля:

$$X_1 = -24,2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_2 = 8,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

9 Перевіряємо правильність рішення системи канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned} 4(-24,2) + 2 \cdot 8,3 + 80 &= 0; \\ 2(-24,2) + 7 \cdot 8,3 - 10 &= 0. \end{aligned}$$

10 В *еквівалентній системі* замінюємо  $X_1$  і  $X_2$  на знайдені значення і визначаємо реакції в кожній балці (див. рис.6.8, з). При цьому слід врахувати, що оскільки для  $X_1$  значення одержали від'ємним, то його напрямок в еквівалентній системі міняємо на протилежний.

11 Будуємо епюри  $Q$  (див. рис.6.8, і) і  $M_\Sigma$  (див. рис.6.8, к) для кожної балки окремо з урахуванням знайдених сил  $X_1$  і  $X_2$  і об'єднуємо їх.

12 Виконуємо *деформаційні перевірки*.

Для цього “перемножуємо” спочатку епюри  $\bar{M}_1$  (див. рис.6.8, д) і  $M_\Sigma$  (див. рис.6.8, к). Цим самим ми визначаємо кут повороту балки в закладенні. Він повинен дорівнювати нулю.

$$\begin{aligned} \Delta_{1S} &= (\bar{M}_1 \times M_\Sigma) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (2 \cdot 1 \cdot (-24,2) + 1 \cdot 8,3) + \frac{10 \cdot 4^3}{24} (1+0) \right] = \\ &= \frac{1}{EI} (-32,27 + 32,2) = -\frac{0,07}{EI}. \end{aligned}$$

Погрішність розрахунку дорівнює:

$$\left| \frac{(-32,27 + 32,2)}{32,2} \cdot 100 \% \right| = 0,22 \%.$$

Потім “перемножимо” епюри  $\bar{M}_2$  (див. рис.6.8, е) і  $M_\Sigma$  (див. рис.6.8,к).

Якщо в результаті даного “перемноження” вийде нуль, то це означатиме, що взаємний кут повороту балки в т. В відсутній.

$$\Delta_{2s} = (\bar{M}_2 \times M_\Sigma) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (2 \cdot 1 \cdot 8,3 + 1 \cdot (-24,2)) + \frac{10 \cdot 4^3}{24} (0+1) + \frac{3}{6} (2 \cdot 1 \cdot 8,3 + 1 \cdot (-60)) \right] = \frac{1}{EI} (46,033 - 46,117) = -\frac{0,084}{EI}.$$

Погрішність:  $\left| \frac{(46,033 - 46,117)}{46,033} \cdot 100 \% \right| = 0,18 \%.$

13 З умови міцності за нормальним напруженням знаходимо момент опору поперечного перерізу, узявши  $M_{\max}$  з епюри  $M_\Sigma$ :

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 375 \text{ см}^3.$$

За сортаментом (ГОСТ 8239-89) знаходимо номер профілю. Беремо двотавр № 27, у якого  $W_x = 371 \text{ см}^3$ , що менше розрахункового моменту опору на 3%, але в границях допустимого перенапруження (до 5%).

14 Визначаємо прогин балки в т.  $D$ . Прикладаємо до основної системи в т.  $D$  одиничну силу (див. рис.6.7, л) і будуємо епюру  $\bar{M}_3$  (див. рис. 6.7, м). “Перемножуємо”  $M_\Sigma$  з  $\bar{M}_3$  і одержуємо прогин в т.  $D$ :

$$y_D = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = \left[ \frac{3}{6} (2(-2)(-60) + 8,3(-2)) + \frac{2}{6} (2(-2)(-60)) \right] \cdot 10^2 = 1,19 \text{ см}.$$

Це переміщення складає всього 0,5% від довжини прольоту балки, що підтверджує її необхідну жорсткість.

## 7 СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ

### 7.1. Явище подовжнього згинання. Поняття про стійкість.

#### Види рівноваги пружних систем. Критичні сили і критичні напруження

У всьому попередньому викладі ми визначали поперечні розміри стрижнів з умови міцності. Проте руйнування стрижня може відбутися не тільки тому, що буде порушена міцність, але і тому, що стрижень не збереже тієї форми, яка йому надана конструктором.

Якщо стрижень стискати подовжніми силами до тих пір, поки стискаючі сили не перевершать деякої величини, залежної від довжини стрижня і жорсткості його поперечного перерізу, то стрижень випробовуватиме звичайне стискання, і вісь його залишатиметься прямолінійною. Проте, якщо стискаючі сили стануть більші за цю граничну величину, то стрижень *раптово викривиться*, і вісь його зігнеться.

*Викривлення довгих стрижнів, що стискаються подовжніми силами, називається подовжнім згинанням.*

Унаслідок згинання з'явиться згинальний момент, який викличе додаткові напруження, і стрижень може *раптово* руйнуватися. Подібні аварії, на жаль, мали місце з опорами деяких мостів до тих пір, поки вчені не з'ясували, що причиною цих аварій була втрата стійкості опор.

Тому для надійної роботи конструкції недостатньо, щоб вона була міцна, необхідно, щоб всі її елементи були *стійкі*, тобто вони повинні при дії навантажень деформуватися в таких межах, щоб характер їх роботи залишався незмінним. Тому у цілому ряді випадків, зокрема, для стислих стрижнів, крім перевірки на міцність, необхідна і перевірка на стійкість.

*Стойкістю називається здатність конструкції або її елементів зберігати задану початкову формулу пружної рівноваги.*

Поняття стійкості має універсальний характер і відноситься в рівній мірі як до стійкості хімічних і біологічних явищ, так і до стійкості механічних, електричних та інших систем.

Щоб з'ясувати, стійка система чи ні, треба дати їй *мале відхилення* і надати самій собі. Якщо система повернеться в початковий стан, то кажуть, що вона стійка.

Наочно поняття стійкості можна продемонструвати на прикладі кульки, яка лежить на різних поверхнях (рис.7.1).

Якщо кульку, яка лежить на увігнутій поверхні (див. рис 7.1, *а*), змістити з положення рівноваги, то сили ваги повернуть її в початкове положення, яке називається *стійким*.

Кулька, яка лежить на опуклій поверхні (див. рис.7.1, *б*), при незначному відхиленні самостійно не може повернутися в початковий стан рівноваги, який є *нестійким*.

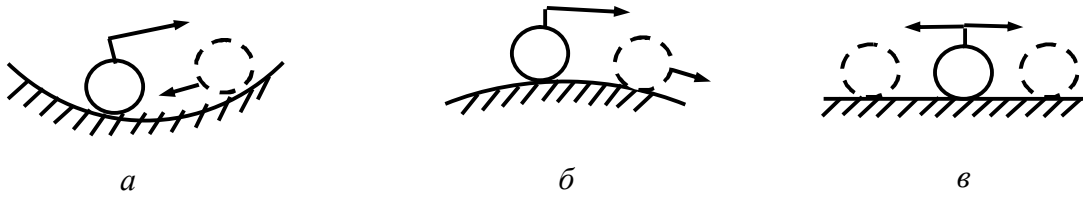


Рисунок 7.1

Якщо кулька лежить на горизонтальній поверхні (див. рис.7.1, в), то така рівновага називається *байдужою* (або *критичною*), оскільки кулька залишатиметься в положенні рівноваги при будь-якому його відхиленні.

Поняття стійкості застосовне і до пружних систем. Явище втрати стійкості для пружних тіл можна спостерігати на цілому ряді різних прикладів. Найбільш простим випадком є втрата стійкості центрально стислого стрижня.

Розглянемо довгий тонкий стрижень (рис.7.2).

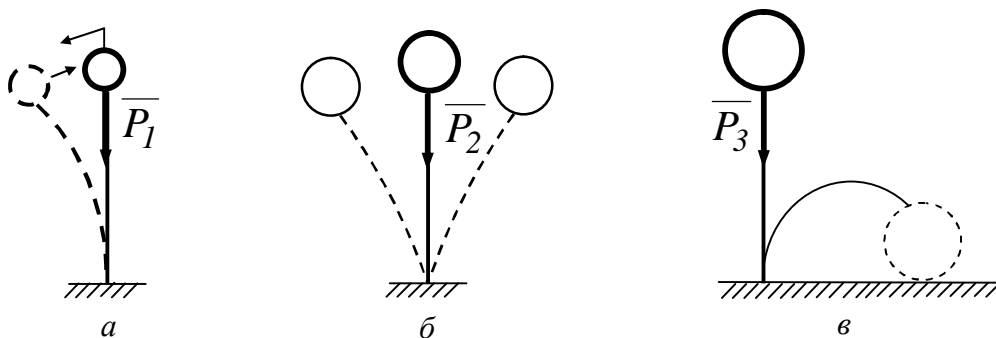


Рисунок 7.2

Нижній кінець стрижня жорстко закріпимо, а до верхнього прикладемо стискаючу силу  $P$ , що діє чітко за віссю стрижня.

При незначній стискаючій силі  $P_1$  стрижень спочатку тільки стискатиметься, і вісь його залишатиметься прямолінійною. Якщо стрижень вивести з прямолінійного стану, то після видалення зовнішньої сили внутрішні пружні сили знову повернуть стрижень в первинний прямолінійний стан (див. рис.7.2, а). На цій стадії прямолінійна форма рівноваги стрижня *стійка*.

При збільшенні подовжньої сили до деякої величини  $P_2$  стійкою формою рівноваги буде зігнута вісь (див. рис.7.2, б). У цій стадії подовжнього згинання навіть невелике збільшення сили може призвести до незначного згинання стрижня.

Якщо збільшити подовжню силу  $P_3$ , то внутрішні сили вже не зможуть зрівноважити зовнішнє навантаження. При цьому стрижень або зламається, якщо він зроблений з крихкого матеріалу, або зігнеться (див. рис. 7.2, в), якщо матеріал пластичний.

Таким чином, існує три види рівноваги пружних систем.

Пружна рівновага буде **стійкою**, якщо тіло, що деформується, при будь-якому малому відхиленні від стану рівноваги прагне повернутися до початкового стану і повертається до нього після видалення зовнішньої дії, що порушила початковий рівноважний стан.

Пружна рівновага буде **нестійкою**, якщо деформоване тіло, будучи виведено з нього якою-небудь дією, набуває прагнення продовжувати деформуватися у напрямку даного йому відхилення і після видалення дії до початкового стану не повертається. При втраті стійкості пружної системи один вид деформації (стискання) переходить в іншій (згинання).

Між цими двома станами рівноваги існує перехідний стан, званий **критичним**. При критичному стані деформоване тіло знаходиться в байдужій рівновазі: воно може зберегти спочатку надану йому форму, але може і втратити її від самої незначної дії.

*Навантаження, перевищення якого викликає втрату стійкості первинної форми тіла, називається критичним навантаженням і позначається через  $P_{кр}$ .*

Можна стверджувати, що досягнення навантаженнями критичних значень рівні руйнуванню конструкції, оскільки нестійка форма рівноваги неминуче буде втрачена, що пов'язано з практично необмеженим зростанням деформації і напруження. Руйнування при цьому відбувається раптово і при низьких значеннях напруження, коли міцність ще далеко не вичерпана.

## 7.2 Формула Ейлера для визначення критичної сили шарнірно-закріпленого стрижня

При байдужому стані рівноваги діюче навантаження рівне критичному. У зв'язку з цим необхідно уміти визначати її величину.

Перші дослідження стійкості стислих стрижнів були проведені в XVIII сторіччі російським академіком *Л.Ейлером* (1707-1783). Надалі велика робота в галузі теоретичного та експериментального досліджень питань стійкості була проведена вченими Ф.С. Ясинським, Н.Н. Дінником, С.П. Тимошенко та ін. Серед іноземних учених слід назвати Тетмаєра, Енгесера, Кармана. Блискучим завершенням всіх робіт у галузі пружної стійкості є теорія, створена видатним радянським ученим В.З. Власовим.

Зі всього різноманіття розрахунків на стійкість пружних систем детально розглянемо лише випадок втрати стійкості при стисканні довгого тонкого стрижня або так зване подовжнє згинання.

Припустимо, що під дією сили, величина якої перевищує критичну силу, стрижень з шарнірно закріпленими кінцями злегка зігнувся (рис.7.3).

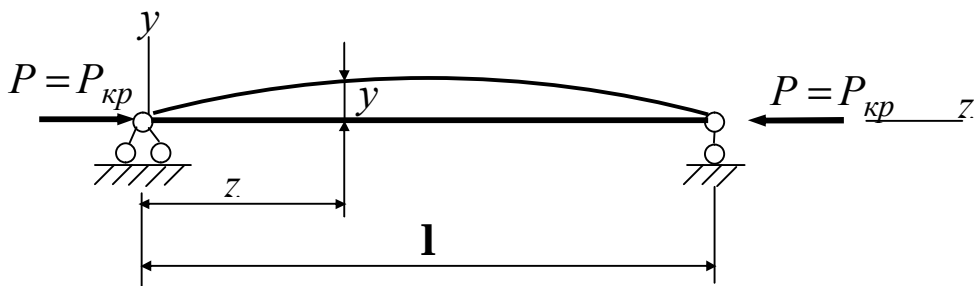


Рисунок 7.3

Згинання, природно, відбувається в площині найменшої жорсткості. Розглянемо умови, при яких можлива рівновага стрижня із зігнутою віссю.

В основу виведення формули покладені наступні передумови, що ідеалізують реальний об'єкт:

1 Стрижень вважається абсолютно прямолінійним і виконаний з однорідного пружного матеріалу.

2 Навантаження прикладене точно уздовж осі стрижня.

6 Переміщення точок стрижня після втрати стійкості дуже малі.

4 Критична сила  $P_{кр}$  не викликає в стрижні напруження, що перевищує межу пропорційності.

Співвідношення між радіусом кривизни  $r$  балки і згинальним моментом  $M$  було виведено при вивченні чистого згинання і має вигляд:

$$\frac{1}{r} = \frac{M(z)}{EI_x}$$

З математичного аналізу відомо, що кривизна балки виражається формулою

$$\frac{1}{r} = \frac{\pm \frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Тоді точне диференціальне рівняння зігнутої осі балки можна записати так:

$$\frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M(z)}{EI_x}.$$

Враховуючи допущення про малі деформації балки і нехтуючи квадратом похідної  $\frac{dy}{dz}$  в порівнянні з одиницею:

$$1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 \approx 1$$

Запишемо наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки в площині найменшої жорсткості:

$$EI_{min} \frac{d^2 y}{dz^2} = \pm M(z). \quad (7.1)$$

Розглянемо переріз стрижня (див. рис. 7.3) на відстані  $z$  від початку

координат. У цьому місці ордината зігнутої осі рівна  $y$ , а згинальний момент

$$M(z) = -P_{KP} y.$$

За схемою, зображеною на рисунку 7.3, згинальний момент виходить від'ємним, ордината ж точки  $y > 0$ . Якби стрижень був викривлений опуклістю вниз, то момент  $M(z)$  був би додатним, а  $y < 0$ .

У будь-якому випадку в диференціальному рівнянні (7.1) буде присутній знак «мінус»:

$$EI_{\min} \frac{d^2 y}{dz^2} = -P_{KP} y. \quad (7.2)$$

Позначимо

$$\frac{P_{KP}}{EI_{\min}} = k^2. \quad (7.3)$$

Тоді рівняння (7.2) набуде вигляду

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 y = 0. \quad (7.4)$$

Ми одержали диференціальне лінійне однорідне рівняння другого порядку. Воно має тривіальне рішення:

$$y = A \sin kz + B \cos kz. \quad (7.5)$$

Постійні  $A$  і  $B$  мають бути вибрані так, щоб були задоволені граничні умови:

- при  $z=0$   $y=0$ ;

- при  $z=l$   $y=0$ .

З першої умови витікає, що  $B=0$ , а з другої

$$A \sin kl = 0.$$

Це рівняння має два можливі рішення.

Якщо  $A=0$ , то переміщення  $y$  тотожно обертаються в нуль, і стрижень, отже, зберігає прямолінійну форму. Цей випадок нас не цікавить.

У другому випадку:  $\sin kl = 0$ .

Це можливо, коли  $n$  – довільне ціле число.

Враховуючи рівняння (7.3), одержуємо:

$$P_{кр} = \frac{p^2 n^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (7.6)$$

Це *формула Ейлера* для стрижня з шарнірно-закріпленими кінцями.

Це означає, що для того, щоб стрижень зберігав криволінійну форму, необхідно, щоб сила  $P_{кр}$  набувала певного значення.

Найменша сила  $P_{кр}$  буде при  $n=1$ :

$$P_{кр} = \frac{p^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (7.7)$$

Ця сила носить назву *першої критичної сили*.

При  $n=1$  величина  $kl = p$  і рівняння пружної лінії набуває вигляду:

$$y = A \sin \frac{pz}{l}. \quad (7.8)$$

У цьому випадку максимальний прогин осі стрижня рівний  $A$  (рис.7.4), а стрижень згинається на одній півхвилі синусоїди.

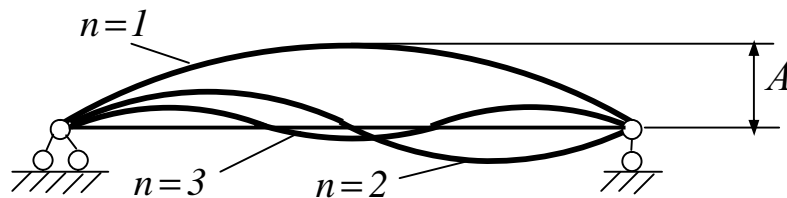


Рисунок 7.4

При будь-якому цілочисельному значенні  $n$

$$y = A \sin \frac{npz}{l} = A \sin kz \quad (7.9)$$

і пружна лінія стрижня зображається кривою у вигляді синусоїди з кількістю півхвиль, рівною  $n$  (див. рис. 7.4).

Ми розглянули достатньо спрощений підхід до визначення критичної сили. З рівняння (7.9) залишається неясним, чому дорівнює амплітуда  $A$ . Не ясно, якого вигляду (першого або другого) набуде стрижень, що втратив стійкість, якщо  $P > P_{кр}$ .

Якщо  $P > P_{кр}$  хоч би на 10%, то прогин буде значним, і рівнянням Ейлера користуватися не можна.

Диференціальне рівняння (7.2) є наближеним і придатне лише у разі малих прогинів. Якщо це рівняння написати точно, то одержимо:

$$EI_{\min} \frac{1}{r} = \frac{EI_{\min} \frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -Py. \quad (7.10)$$

При силі, більшій критичної ( $P > P_{кр}$ ), переміщення зростають так швидко, що нехтувати величиною  $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$  в знаменнику не можна.

### 7.3 Вплив умов закріплення кінців стрижня на величину критичної сили

У межах малих переміщень для стрижня, шарнірно-закріпленого по кінцях, згинання при втраті стійкості відбувається за півхвилею синусоїди ( $n=1$ ), і критична сила дорівнює

$$P_{кр} = \frac{p^2 EI_{\min}}{l^2}.$$

Використовуючи особливості пружної лінії, виявляється можливим досить просто розповсюдити одержане рішення і на інші випадки закріплення стрижня. Для цього треба порівняти форму втрати стійкості

стрижнів з різними типами закріплень з втратою стійкості шарнірно закріпленого стрижня (рис.7.5).

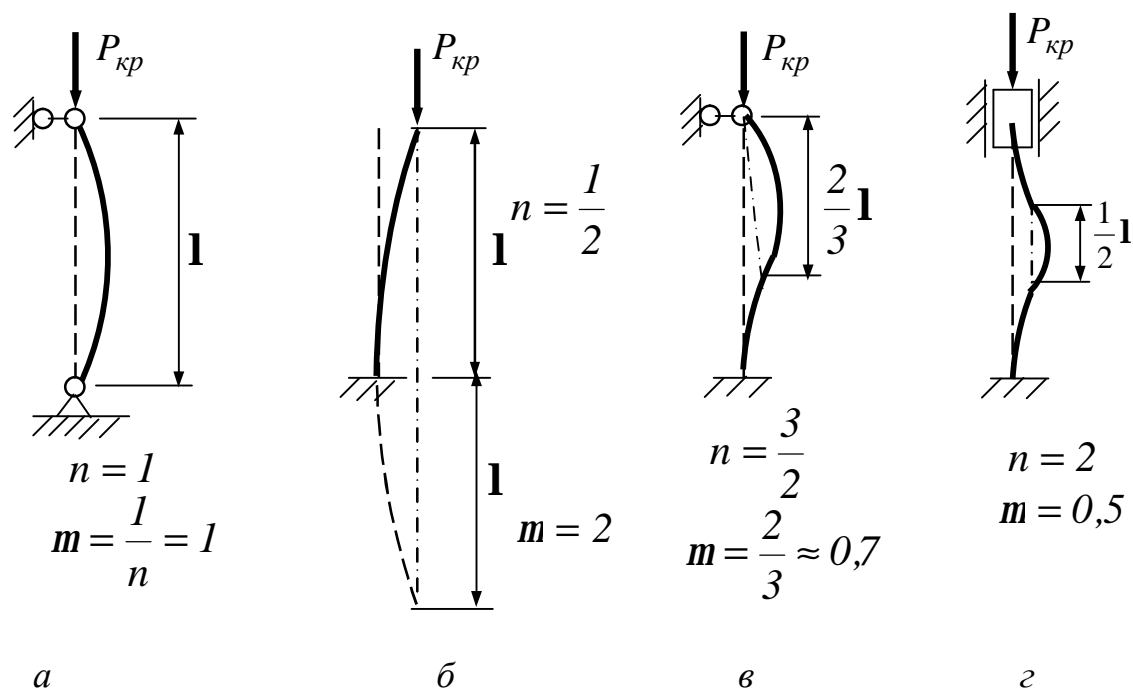


Рисунок 7.5

Розглянемо стрижень завдовжки  $l$ , який закладений одним кінцем і стиснутий подовжньою силою, прикладеною до вільного кінця (див. рис. 7.5, б). Порівнюючи рисунки 7.6, а і б, бачимо, що зігнута вісь стрижня, закладеного одним кінцем, знаходиться в таких же умовах, як і верхня половина стрижня завдовжки  $2l$  з шарнірно-закріпленими кінцями. Таким чином, критичну силу для стрижня з одним закладеним кінцем можна одержати, використовуючи формулу Ейлера (7.7), підставивши в знаменник довжину стрижня, рівну  $2l$ :

$$P_{кр} = \frac{p^2 EI_{\min}}{(2l)^2}. \quad (7.11)$$

При цьому зігнута вісь стрижня (див. рис.7.5, б) має вид половини півхвилі синусоїди  $\left(n = \frac{1}{2}\right)$ .

Розглядаючи форму втрати стійкості стрижня із закладенням на одному кінці та з шарніром на іншому (див. рис. 7.5, в), можна побачити,

що на довжині стрижня утворюється півтори півхвилі синусоїди  $\left(n = \frac{3}{2}\right)$ , і, кажучи по-іншому, півхвиля синусоїди утворюється на ділянці стрижня завдовжки  $\frac{2}{3}l = 0,67l \approx 0,7l$ . Використовуючи формулу (7.7), знайдемо критичну силу

$$P_{кр} = \frac{p^2 EI_{\min}}{(0,7l)^2}. \quad (7.12)$$

Міркуючи аналогічно, для стрижня, затисненого на обох кінцях (див. рис. 7.5, г), знайдемо, що на довжині стрижня укладаються дві півхвилі ( $n=2$ ), а повна півхвиля синусоїди утворюється на ділянці завдовжки  $0,5l$ , і формула (7.7) набуде вигляду

$$P_{кр} = \frac{p^2 EI_{\min}}{(0,5l)^2}. \quad (7.13)$$

Співвідношення (7.7) (7.11)...(7.13) можна об'єднати в одну формулу

$$P_{кр} = \frac{p^2 EI_{\min}}{(ml)^2}, \quad (7.14)$$

де  $l_{пр} = ml$  – приведена довжина стрижня;

$l$  – фактична довжина стрижня;

$m$  – коефіцієнт приведення довжини.

Коефіцієнт приведення довжини стрижня  $m$  показує, яку частину довжини стрижня необхідно узяти при визначенні критичної сили  $P_{кр}$  при використанні формули Ейлера.

Практично величину коефіцієнта приведення довжини  $m$  можна знаходити, враховуючи, що

$$m = \frac{1}{n}, \quad (7.15)$$

де  $n$  – кількість півхвиль синусоїди, що утворюються при втраті стійкості стрижня.

Для прикладу розглянемо дві конструкції (рис.7.6), в яких стиснуті стрижні мають різні види кріплень.

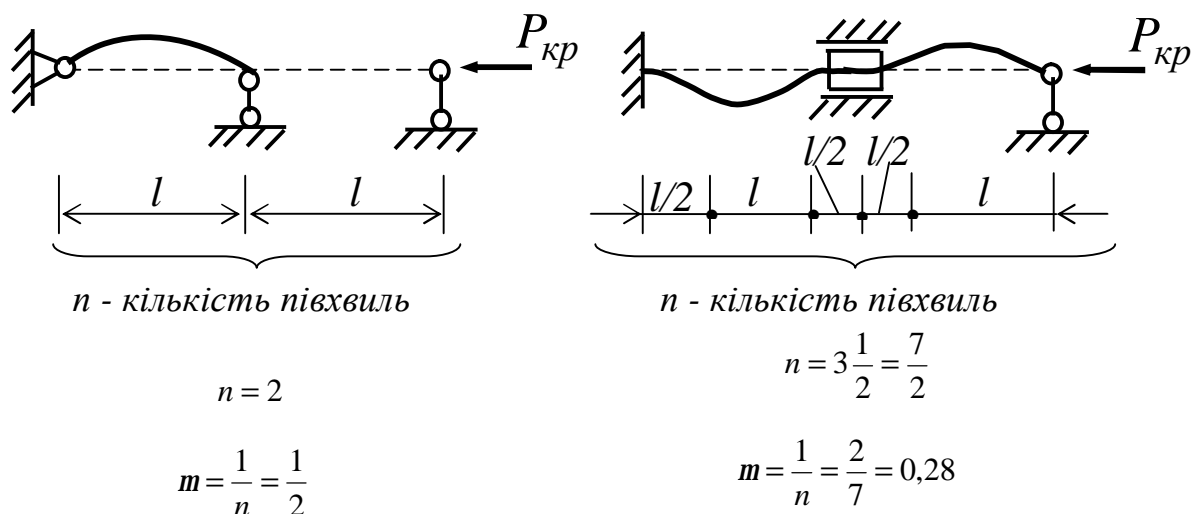


Рисунок 7.6

Під схемами показана кількість півхвиль синусоїди, стрижнів, що утворюються при деформації, і метод знаходження коефіцієнтів приведення довжини.

## 8 ПРАКТИЧНІ РОЗРАХУНКИ СТРИЖНІВ НА СТІЙКІСТЬ

### 8.1 Межі застосовності формули Ейлера. Формула Ясинського

Виведення формули Ейлера засноване на використанні диференціального рівняння пружної лінії, яке справедливе в межах закону Гука, тобто поки критичні напруження (напруження стискання, відповідні критичній силі) не перевищують межу пропорційності:

$$s_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \leq s_{пч}. \quad (8.1)$$

Дійсно, якщо прямолінійна форма стрижня залишається стійкою і при напруженнях, які перевищують межу пропорційності, то

диференціальне рівняння (7.1), що припускає справедливість закону Гука, вже не придатне.

Виведемо формулу для критичного напруження  $S_{кр}$ , підставивши в рівняння (8.1) формулу Ейлера (7.14):

$$S_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{p^2 EI_{\min}}{(ml)^2 F}. \quad (8.2)$$

Враховуючи, що квадрат радіусу інерції площі перерізу

$$i_{\min}^2 = \frac{I_{\min}}{F},$$

одержуємо

$$S_{кр} = \frac{p^2 E \cdot i_{\min}^2}{(ml)^2}.$$

Введемо безрозмірну величину

$$I = \frac{ml}{i_{\min}}.$$

Коефіцієнт  $I$  заведено називати *гнучкістю стрижня*.

Остаточно формула (8.2) набуде вигляду

$$S_{кр} = \frac{p^2 E}{I^2}. \quad (8.3)$$

Звідки видно, що критичні напруження стрижня залежать від пружних властивостей матеріалу (від модуля пружності  $E$ ) і гнучкості стрижня ( $I$ ).

Формула (8.3) є *видозміною формули Ейлера* і в системі координат  $S_{кр} = f(I)$  ця залежність може бути описана гіперболічною кривою, званою *гіперболою Ейлера*.

Як приклад наведемо такий графік (рис. 8.1) для стрижня із сталі Ст.3, для якої модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , межа текучості  $S_m = 240 \text{ МПа}$ , а межа пропорційності  $S_{ny} = 200 \text{ МПа}$ .

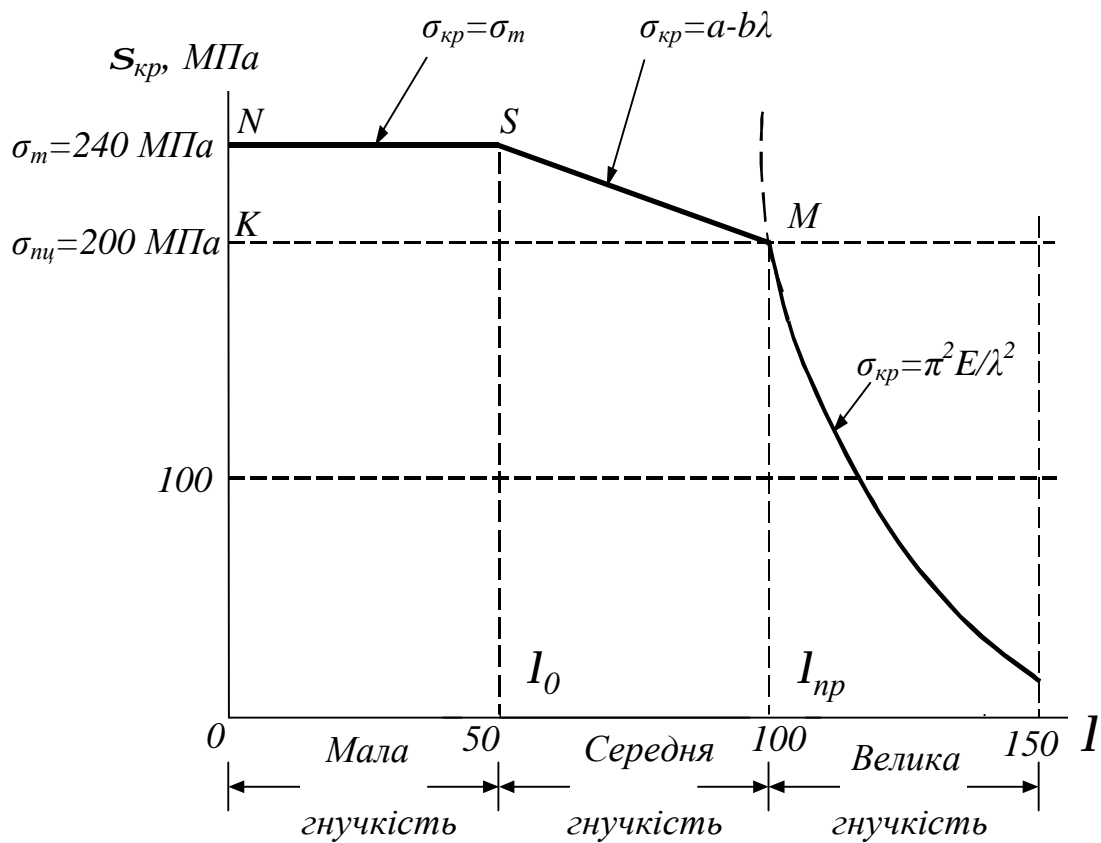


Рисунок 8.1

Графік показує, що через зростання гнучкості стрижня  $I$  критичні напруження прагнуть до нуля, і навпаки, через наближення гнучкості стрижня до нуля критичні напруження прагнуть до нескінченості.

Знайдемо межі застосовності формули Ейлера.

З умови (8.1) відповідно до формули (8.3) маємо:

$$s_{kp} = \frac{p^2 E}{I_{cp}^2} \leq s_{nu},$$

звідки одержимо вираз для граничної гнучкості

$$I_{cp} \geq \sqrt{\frac{p^2 E}{s_{nu}}}. \quad (8.4)$$

Значить, формула Ейлера стає непридатною при гнучкості стрижня, меншій граничного значення, залежного тільки від властивостей матеріалу,

тобто в даному випадку формула Ейлера стає непридатною при гнучкості стрижня меншою за

$$I_{up} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Дослідним шляхом встановлено, що дійсні значення критичних напружень для стрижнів середньої і малої гнучкості ( $I < I_{np}$ ) нижчі за критичні напруження, знайдені за формулою Ейлера. Таким чином, формула Ейлера в цьому випадку дає завищені значення критичної сили, тобто завжди переоцінює дійсну стійкість стрижня. Тому використання формули Ейлера для стрижнів, що втрачають стійкість за межами пружності, не тільки принципово неправильно, але і у край небезпечно за своїми наслідками.

Теоретичне рішення задачі про стійкість за межею пропорційності складно, тому зазвичай користуються емпіричними формулами, одержаними шляхом обробки великої кількості дослідних даних. **Ф.С. Ясинський**, зібравши і відпрацювавши обширний дослідницький матеріал про подовжнє згинання стрижнів, запропонував просту формулу для визначення критичних напружень за межею пропорційності:

$$s_{кр} = a - bI, \quad (8.5)$$

де  $a$  і  $b$  – експериментальні коефіцієнти, залежні від виду матеріалу. Наприклад, для сталі Ст.3:  $a = 310 \text{ МПа}$ ,  $b = 1,14 \text{ МПа}$ .

Для чавуну замість лінійної формули Ф.С. Ясинський запропонував параболічну залежність

$$s_{кр} = a - bI + cI^2, \quad (8.6)$$

де  $c = 0,53 \text{ МПа}$ .

Формули (8.5) і (8.6) носять назву *формул Ясинського*.

При деяких значеннях гнучкості (позначимо її  $I_0$ ) величина  $s_{кр}$  стає рівною  $s_m$ . Стрижні, в яких  $I < I_0$ , називаються *стрижнями малої гнучкості*. Їх розраховують тільки на міцність.

Знайдемо  $I_0$  для сталевго стрижня, використовуючи формулу Ясинського (8.5)

$$s_{кр} = a - bI_0 = s_m,$$

звідки 
$$I_0 = \frac{a - s_m}{b} = \frac{310 - 240}{1,14} = 61.$$

Розглядаючи графік  $s_{кр} = f(I)$  для сталі Ст.3 (див. рис. 8.1), можна зазначити три його частини:

- гіперболу Ейлера при  $l > l_{np} = 100$ ;
- похилу пряму, описану формулою Ясинського і справедливу в межах

$$60 = I_0 \leq l \leq l_{np} = 100;$$

- майже горизонтальну пряму при  $l < I_0$ .

Залежно від величини гнучкості  $I$  стрижні заведено називати:

- при  $l > l_{np}$  – стрижні великої гнучкості
- при  $I_0 \leq l \leq l_{np}$  – стрижні середньої гнучкості
- при  $0 \leq l \leq I_0$  – стрижні малої гнучкості.

**Приклад 1.** Розглянемо застосування формул розрахунку критичних напружень для круглого сталевго стрижня  $d = 8$  см, затисненого одним кінцем і шарнірно-закріпленого на іншому кінці (рис.8.2).

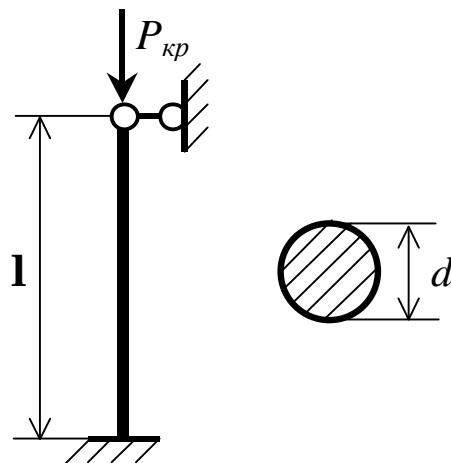


Рисунок 8.2

Для даного способу закріплення стрижня (див. рис.8.2) коефіцієнт приведення довжини  $m = 0,7$ .

Змінюватимемо довжину стрижня.

а) Хай спочатку довжина стрижня  $l = 4,6$  м.

$$\text{Знайдемо радіус інерції перерізу: } i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{pd^4}{64} \cdot \frac{4}{pd^2}} = \frac{d}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ см.}$$

$$\text{Гнучкість стрижня } I = \frac{ml}{i} = \frac{0,7 \cdot 460}{2} = 161 > I_{np} = 100 .$$

Отже, стрижень відноситься до стрижнів *великої гнучкості*.

У цьому випадку застосовуємо *формулу Ейлера*:

$$P_{кр} = \frac{p^2 EI}{(ml)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 201 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 4,6)^2} = 382,2 \text{ кН},$$

$$\text{де } I = \frac{pd^4}{64} = 201 \text{ см}^4 .$$

б) Змінимо довжину стрижня. Хай довжина стрижня  $l = 2,3$  м. Тоді

$$I = \frac{ml}{i} = \frac{0,7 \cdot 230}{2} = 80 ,$$

тобто  $I_0 = 60 \leq I = 80 \leq I_{np} = 100$  .

Стрижень відноситься до стрижнів *середньої гнучкості*, для яких справедлива *формула Ясинського*

$$s_{кр} = a - bl = 310 - 1,14 \cdot 80 = 218,8 \text{ МПа} .$$

$$\text{Знайдемо } P_{кр} = s_{кр} \cdot F = 218,8 \cdot 10^3 \cdot 50,24 \cdot 10^{-4} = 1099,2 \text{ кН} ,$$

$$\text{де } F = \frac{pd^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 8^2}{4} = 50,24 \text{ см}^2 .$$

в) І, нарешті, при довжині стрижня  $l = 1,1$  м гнучкість

$$I = \frac{ml}{i} = \frac{0,7 \cdot 110}{2} = 38,5 .$$

Оскільки  $I = 38,5 < I_0 = 60$ , то стрижень має *малу гнучкість*.

У цьому випадку  $s_{кр} = s_m = 240 \text{ МПа}$  .

$$\text{Тоді } P_{кр} = s_{кр} \cdot F = 240 \cdot 10^3 \cdot 50,24 \cdot 10^{-4} = 1205,8 \text{ кН} .$$

Таким чином, при однакових видах кріплення стрижні різної довжини розраховуються за різними формулами.

## 8.2 Коефіцієнт зменшення основних допустимих напружень.

### Умова стійкості

Можна вважати, що центрально стиснуті стрижні втрачають свою несучу здатність від втрати стійкості раніше, ніж від втрати міцності, оскільки критичні напруження завжди менше межі текучості або межі міцності, тобто

$$s_{кр} < s^{\circ},$$

де  $s^{\circ} = s_m$  – для пластичних матеріалів

$s^{\circ} = s_{ep}$  – для крихких матеріалів.

Необхідно пам'ятати, що для стрижнів малої гнучкості ( $I \leq I_0$ ) важко говорити про втрату стійкості прямолінійної форми стрижня, як це має місце для стрижнів великої і середньої гнучкості. Несуча здатність стрижнів малої гнучкості визначається міцністю матеріалу.

Критичні напруження для центрально стиснутих стрижнів є такими ж небезпечними, як межа текучості для пластичних матеріалів або як межа міцності для крихких матеріалів. Очевидно, при практичному рішенні питання про стійкість стрижня не можна допустити виникнення в ньому критичних напружень, а слід взяти відповідний запас стійкості.

Коефіцієнт запасу стійкості при подовжньому згинанні для більшості матеріалів вибирається вищий, ніж з розрахунку на міцність при простому стисканні. Так, наприклад, для сталі, вибираємо в межах від 1,8 до 3,0; для чавуну – від 5 до 5,5; для дерева – від 2,8 до 3,2. Це збільшення пояснюється цілим рядом причин, які різко знижують опір стрижнів подовжньому згинанню. До цих причин відносяться можливі початкові викривлення стрижня, ексцентриситет прикладання навантаження, неоднорідність матеріалу і т.д. Таким чином, допустимі напруження на стійкість будуть рівні критичним напруженням, розділеним на коефіцієнт запасу  $n_{cm}$ .

Допустимі напруження на стійкість  $[s]_{cn} = s_{кр} / n_{cn}$  і допустимі напруження на міцність при стисканні  $[s] = s^{\circ} / n$  взаємозв'язані.

Складемо їх відношення:

$$\frac{[s]_{cm}}{[s]} = \frac{s_{kp}}{n_{cm}} \cdot \frac{n}{s^0} \text{ або } [s]_{cm} = \frac{s_{kp}}{s^0} \cdot \frac{n}{n_{cm}} \cdot [s]. \quad (8.7)$$

Позначивши 
$$\frac{s_{kp}}{s^0} \cdot \frac{n}{n_{cm}} = j, \quad (8.8)$$

одержимо

$$[s]_{cm} = j [s], \quad (8.9)$$

де  $j$  – коефіцієнт зменшення основних допустимих напружень при розрахунку на стійкість.

Коефіцієнт зменшення основних допустимих напружень  $j$  завжди менше одиниці:

$0 \leq j \leq 1$ . Коефіцієнт  $j$  залежить від гнучкості стрижня  $l$  і матеріалу.

Значення коефіцієнта  $j$  для сталі, чавуну і дерева наведені в додатку А.

Складемо умову стійкості стиснутих стрижнів

$$s \leq [s]_y \quad (8.10)$$

Оскільки  $s = \frac{N}{F}$ , а  $[s]_y = j [s]$ , то умова стійкості набуде вигляду

$$s = \frac{N}{F} \leq j [s]. \quad (8.11)$$

Розглянемо два види розрахунку на стійкість стиснутих стрижнів – перевірочний і проектувальний.

### 8.3 Практичні розрахунки на стійкість

*Перевірочний розрахунок стиснутих стрижнів*

Він полягає в тому, що відомі діючі навантаження, матеріал і розміри поперечного перерізу. Необхідно перевірити умову стійкості.

Порядок перевірочного розрахунку на стійкість при використанні таблиці коефіцієнтів  $j$  наступний:

1 Виходячи з відомих розмірів і форми поперечного перерізу, визначаємо найменший осьовий момент інерції перерізу  $I_{min}$  і його площу  $F$ , обчислюємо мінімальний радіус інерції перерізу і гнучкість стрижня  $I = \frac{m\mathbf{l}}{i}$ .

2 Знаходимо коефіцієнт  $j$  (див. додаток  $A$ ) і обчислюємо допустимі напруження на стійкість

$$[s]_{cm} = j [s].$$

3 Порівнюємо дійсні напруження в стрижні  $s = \frac{N}{F}$  з допустимими напруженнями на стійкість  $[s]_{cm} \leq j [s]$  і робимо відповідний висновок.

#### *Проектувальний розрахунок*

Він полягає в тому, що відомі діючі навантаження, матеріал і тип поперечного перерізу. Необхідно визначити розміри поперечного перерізу.

У розрахунковій формулі на стійкість  $s = \frac{N}{j F} \leq [s]$ ,

яку можна переписати по-іншому:  $F = \frac{P}{j [s]}$ , є дві невідомі величини – коефіцієнт  $j$  і шукана площа –  $F$ , залежні один від одного.

Тому при підборі перерізів доводиться користуватися *методом послідовних наближень*, варіюючи величиною коефіцієнта  $j$ .

Оскільки коефіцієнт зменшення основних допустимих напруження змінюється в межах  $0 \leq j \leq 1$ , то при першій спробі його зазвичай беруть рівним  $j = 0,5 \div 0,6$ .

1 Візьмемо, наприклад  $j_1 = 0,5$ .

2 Визначимо необхідну площу поперечного перерізу  $F_1 \geq \frac{P}{j_1 [s]}$ , знаючи яку, знайдемо розміри перерізу.

3 Визначимо гнучкість стрижня  $I = \frac{m\mathbf{l}}{i}$

4 Знаючи  $I$ , за допомогою таблиці 8.1, знаходимо значення  $j'_1$ .

5 Знаходимо  $s$ . Якщо знайдені напруження знаходиться в межах  $0,9[s] \leq s \leq 1,05[s]$ , то розрахунок закінчуємо. Якщо дані умови не

задовольняються, то розрахунок необхідно повторити, взявши  $j_2 = \frac{j_1 + j'_1}{2}$ .

У результаті другої спроби повторити пункти 2...4. Якщо  $j'_2$  знову відрізнятиметься від  $\varphi_2$ , то потрібна третя спроба, для якої береться

$$j_3 = \frac{j_2 + j'_2}{2}.$$

Зазвичай при підборі перерізів потрібно більше двох-трьох спроб.

**Приклад 2.** Визначити розміри прямокутного поперечного перерізу стрижня (рис. 8.3) завдовжки  $l=1,3\text{ м}$ , навантаженого силою  $P=200\text{ кН}$ .

Допустимі напруження  $[\sigma]=160\text{ МПа}$ .

1 Беремо  $j_1=0,5$ .

2 З умови стійкості знаходимо:

$$F \geq \frac{P}{j_1[\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} \cdot 10^4 = 25\text{ см}^2,$$

оскільки  $F = h \cdot b = 2b^2 = 25\text{ см}^2$ , то

$$b = \sqrt{\frac{F}{2}} = 3,25\text{ см}.$$

3 Радіус інерції перерізу:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{b^3 \cdot h}{12 \cdot b \cdot h}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{3,25}{2 \cdot 1,73} = \frac{3,25}{3,16} = 1,01\text{ см}.$$

4 Знаходимо гнучкість стрижня:

$$l = \frac{m l}{i} = \frac{0,7 \cdot 130}{1,01} = 90.$$

5 За  $l$  знаходимо з додатку А  $j'_1=0,69$ , і оскільки  $\varphi_1 \neq \varphi'_1$ , то розрахунок слід повторити, взявши як коефіцієнт  $j_2$  середнє арифметичне від  $j_1$  і  $j'_1$  тобто  $j_2 = \frac{j_1 + j'_1}{2}$ .

$$j_2 = \frac{0,5 + 0,69}{2} = \frac{1,19}{2} = 0,595 \approx 0,6.$$

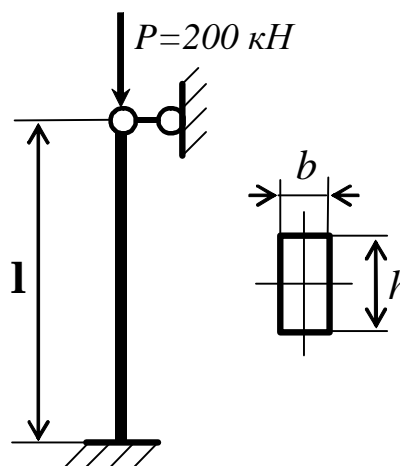


Рисунок 8.3

6 Повторюємо розрахунок, починаючи з пункту 2:

$$F \geq \frac{200 \cdot 10^{-3}}{0,6 \cdot 160} = 20,8 \text{ см}^2;$$

$$b^2 = 10,35; \quad b = 3,2 \text{ см.}$$

$$i_{\min} = \frac{3,2}{3,46} = 0,925 \text{ см.}$$

тоді 
$$I = \frac{0,7 \cdot 130}{0,925} = 98,3.$$

Оскільки даного значення гнучкості  $I$  в таблиці Д.1 (додаток Д) немає, то для визначення коефіцієнта  $j'_2$  слід апроксимувати наявні значення гнучкості  $I$ .

Використовуючи лінійну апроксимацію (рис 8.4), одержимо:

$$j'_2 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,6}{10} \cdot 8,3 = 0,61$$

$$s_{\max} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{0,61 \cdot 20,7} = 158 \text{ МПа} < [s] = 160 \text{ МПа.}$$

Остаточню беремо стрижень з розмірами поперечного перерізу

$$h = 6,4 \text{ см, } b = 3,2 \text{ см.}$$

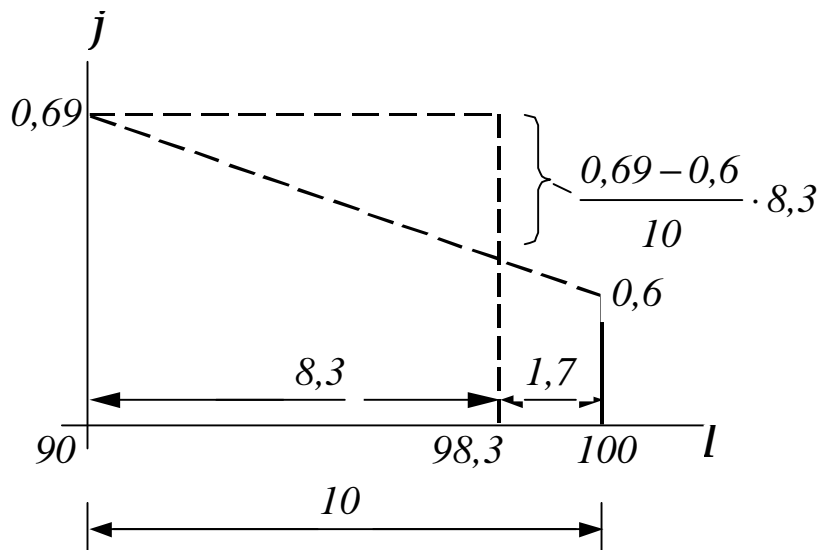


Рисунок 8.4

## 9 ДЕФОРМАЦІЯ СТРИЖНІВ ПРИ ДИНАМІЧНОМУ РЕЖИМІ НАВАНТАЖЕННЯ

### 9.1 Поняття про динамічний режим навантаження. Його особливості

До цих пір ми вирішували задачі в припущенні, що сили прикладені до конструкції *статично*. При статичному прикладанні навантаження у будь-який момент часу між зовнішніми навантаженнями і внутрішніми зусиллями існує рівновага, а швидкості даних деталей не міняються – відсутнє прискорення частинок елементів конструкцій.

*Динамічним називається таке навантаження, яке супроводжується силами інерції даної системи.*

Динамічний режим настає всякий раз, коли система переміщається з непостійною швидкістю. Порушення рівноваги і рух окремих матеріальних частинок тіла, що деформується, виникає тоді, коли наростання в ній навантаження випереджає наростання внутрішніх сил. Прискорення і відповідні ним сили (сили інерції) в тілі, що деформується, пов'язані з переміщенням його частинок, якими визначається деформація тіла, якщо переміщення його точок неоднакові. Таким чином, істотна особливість сил інерції тіла, що деформується, полягає в тому, що їх визначення вимагає обчислення деформації тіла. З цим пов'язана, як і при рішенні статично невизначуваних завдань, необхідність сумісного застосування рівнянь рівноваги, спільності деформації і фізичного закону, що зв'язує напруження і деформації. Інша особливість інерційних сил полягає в тому, що вони залежать від маси тіла, яка тому є особливим чинником динамічного режиму навантаження.

Для статичного навантаження потрібна рівновага між зовнішніми і внутрішніми силами в кожний, який завгодно, малий етап навантаження. Суворе дотримання цієї умови неможливе навіть в лабораторних умовах. Тому в реальності зовнішнє навантаження випереджає наростання внутрішніх сил, що порушує рівновагу і призводить до динамічного навантаження конструкції. Але в тих випадках, коли сили інерції незначні, режим навантаження для спрощення розрахунку вважають статичним.

При великих силах інерції, а також при вивченні питань резонансу потрібно проводити розрахунок конструкції з урахуванням динамічного навантаження.

Динамічні навантаження разом з характеристиками, властивими всякому іншому, у тому числі й статичному навантаженню, мають ще свої особливі характеристики, пов'язані із зміною навантаження з часом. У цьому відношенні вони розподіляються на дві основні групи:

1 Навантаження, що змінюються довільно з часом.

2 Навантаження, що змінюються періодично, зокрема, гармонійно з часом, тобто згідно із законом  $\sin \omega t$  або  $\cos \omega t$ . Тут  $\omega$  – коефіцієнт в аргументі при змінній  $t$  називається *круговою частотою коливань* навантаження.

Серед довільно змінних навантажень слід розрізняти навантаження, зміна яких з часом відбувається періодично і не періодично.

До останньої категорії, зокрема, відносяться імпульсні та ударні навантаження.

Для динамічної деформації істотне значення має разом з характером навантаження також *опір середовища*, що виникає при русі тіла. Опори бувають двох типів:

а) *зовнішні*, такі, що визиваються опором повітря (або рідини) при русі деталі; такі опори пропорційні квадрату швидкості руху тіла;

б) *внутрішні*, такі, що виникають на молекулярному рівні та набувають особливого значення у зв'язку з явищем гістерезису, що з'являється при розвантаженні та навантаженні матеріалу в процесі коливального руху тіла.

Основи рішення задачі деформації суцільного твердого тіла зберігаються одними і тими ж при будь-якому режимі навантаження. Для отримання рішення розглядаються три сторони задачі: *статична, геометрична та фізична*. Умови режиму навантаження впливають в першу чергу на рівняння, витікаючи з розгляду статичної та фізичної сторони задачі. Рівняння спільності деформації залишаються без змін за будь-яких умов, якщо тільки не порушується суцільність.

Основними умовами динамічного режиму навантаження, що відрізняють його від статичного, є:

- а) порушення рівноваги, і поява сил інерції;
- б) зміна механічних властивостей, а звідси і фізичного закону для матеріалу.

Остання обставина значно ускладнює рішення динамічної задачі. З метою спрощення її вирішують так, якби механічні властивості матеріалу не змінювалися від динамічних дій. Дія сил інерції на тіло, що деформується, зберігається таким же, як на те, що не деформується. Таким чином, стає можливим віднести сили інерції до зовнішніх сил і застосувати принцип Даламбера, тобто складати рівняння рівноваги.

Оскільки сили інерції залежать від переміщення тіла, то будь-яке завдання динамічного режиму навантаження є статично невизначним, а, отже, вимагає розгляду три її сторін: статичної, геометричної та фізичної.

При розгляді *статичної сторони задачі* необхідно (згідно з принципом Даламбера) до зовнішніх навантажень додати сили інерції, і тоді рівняння руху можна замінити рівняннями рівноваги.

*Геометрична сторона задачі* не залежить від режиму навантаження, оскільки положення системи після деформації залежить тільки від умов її закріплення.

*Фізична сторона задачі* при динамічному режимі навантаження так само, як при статичному вантаженні, полягає у використанні закону Гука в абсолютній формі. Практикою встановлено, що механічні характеристики матеріалів залежать від режиму навантаження, тобто при динамічному режимі навантаження модуль пружності  $E$  міняється з часом, що дуже ускладнює рішення задачі. Але оскільки модуль пружності міняється не істотно, то можна цією зміною нехтувати і вважати, що,  $E = const$  як і при статичному вантаженні.

Не дивлячись на вказані спрощення, завдання при динамічному режимі навантаження залишається складним, оскільки внутрішні зусилля змінюються з часом. Таке завдання вирішується, як правило, в часткових похідних.

Для спрощення рішення задачі вагому систему, наприклад, балку (рис. 9.1, а) з необмеженою кількістю степенів вільності замінюють невагомою конструкцією з обмеженою кількістю мас (див. рис. 9.1, б), яку найчастіше зменшують до двох (див. рис. 9.1, в) або навіть до однієї (див. рис. 9.1, г).

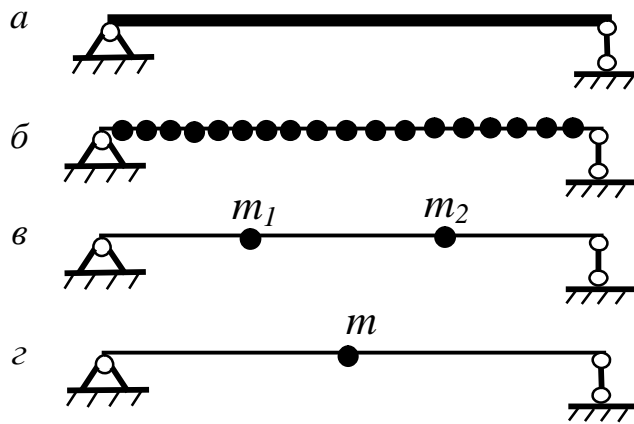


Рисунок 9.1

Під *степенем вільності* розуміється кількість незалежних параметрів, що визначають положення системи в довільний момент часу. Так, наприклад, невагома балка, що несе дві маси (див. рис. 9.1, в), володіє двома степенями вільності, оскільки як незалежні параметри можуть бути взяті переміщення мас  $m_1$  і  $m_2$  у відношенні до положення рівноваги.

У простих випадках положення системи може бути визначене тільки однією величиною, наприклад масою  $m$  (див. рис.9.1, г). Такі системи називаються системами з одним степенем вільності.

## 9.2 Коливання: основні поняття

Теорія коливань є обширним розділом сучасної фізики, охоплюючим вельми широкий діапазон питань з механіки, електростатики, радіотехніки, оптики й ін. Особливе значення має теорія коливань для прикладних завдань, що зустрічаються в інженерній практиці, зокрема, в питаннях міцності машин і споруд. Відомі випадки, коли будівельна споруда, розрахована з великим запасом міцності на статичне навантаження, руйнувалася під дією порівняно невеликих періодично діючих сил, тоді як така ж легша і на перший погляд менш міцна конструкція сприймає ці зусилля абсолютно спокійно. Тому питання коливань і, взагалі, поведінки пружних систем під дією змінних навантажень вимагають від конструктора особливої уваги.

При вивченні коливань пружні системи заведено розрізняти, перш за все, за *числом степенів вільності*.

Під числом степенів вільності розуміється число незалежних координат, що визначають положення системи.

Розглянемо декілька систем (рис.9.2), які можуть здійснювати коливальні рухи.

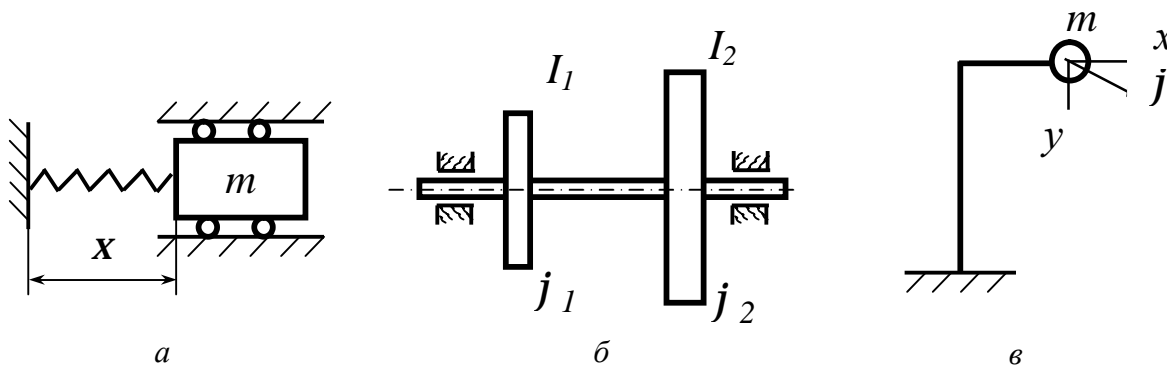


Рисунок 9.2

Ці системи мають одну, дві (див. рис.9.2, б) або три степені вільності.

Переміщення вантажу  $m$  (див. рис.9.2, а) може бути описане однією координатою  $X$ , отже, система має одну степінь вільності – горизонтальне переміщення.

Обертання вала (див. рис.9.2, б) і поворот одного шківця щодо іншого можуть бути описані двома координатами – кутами  $j_1$  і  $j_2$ , тобто система має два степеня вільності.

Положення вантажу  $m$  (див. рис.9.2, в), що коливається, задається трьома координатами: переміщеннями центра маси  $x$  і  $y$  і кутом повороту  $j$  маси щодо її центра ваги. У разі малого моменту інерції масу  $m$  можна розглядати як точкову, тоді система має всього два степеня вільності.

Число степенів вільності визначається вибором розрахункової схеми, тобто залежить від міри наближення, з яким ми вважаємо необхідними досліджувати реальний об'єкт.

При дослідженні пружних коливальних систем розрізняють *власні та вимушені коливання, параметричні та автоколивання*.

*Власними (вільними) називаються коливання, що виникають в ізольованій системі унаслідок зовнішнього збудження («поштовху»), що*

викликає в точок системи початкові відхилення від положення рівноваги або початкові швидкості, і що продовжуються потім завдяки наявності внутрішніх пружних сил.

Під вимушеними коливаннями розуміється рух пружної системи, що відбувається під впливом змінних в часі зовнішніх сил. Прикладом вимушених коливань є рух, який здійснює пружна система, якщо на ній встановлений не повністю збалансований двигун.

Сила, що діє на пружну систему з боку двигуна, є збуджуючою силою. При цьому частота вимушених коливань визначається за формулою

$$\Omega = \frac{pn}{30},$$

де  $n$  – кількість обертів двигуна.

Проміжок часу між двома подальшими максимальними відхиленнями пружної системи від положення рівноваги, називають періодом (власних або вимушених) коливань (рис.9.3). Період коливань позначається через  $T$ .

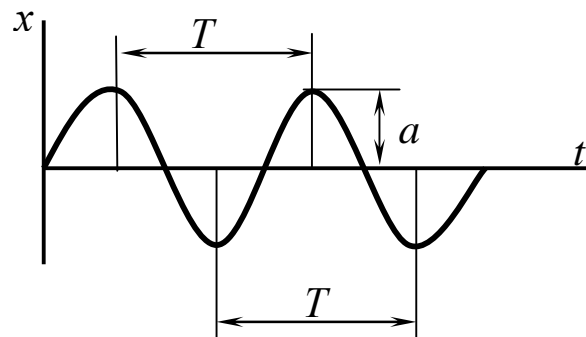


Рисунок 9.3

Величина, зворотна періоду, називається частотою коливань і дорівнює кількості коливань за одиницю часу:

$$n = \frac{1}{T}.$$

У техніці замість частоти  $n$  використовується в більшості випадків кругова частота  $\omega$ , що є числом коливань за  $2\pi$  секунди:

$$w = 2\pi n = \frac{2p}{T}.$$

Найбільше відхилення системи від положення рівноваги називається амплітудою  $a$  (див. рис. 9.3).

На відміну від власних коливань вимушені коливання не затухають, а за умови збігу їх частот амплітуда коливань може значно збільшитися і призвести до руйнування конструкції. Це явище носить назву *резонансу*.

*Параметричними* називають коливання пружної системи, в процесі яких періодично міняються її фізичні параметри (маса, жорсткість, довжина і т.д.).

*Автоколиваннями* (або самоколиваннями) пружної системи називаються незгасаючі коливання, що здійснюються під дією *постійних* сил. Характер коливань визначається виключно пристроєм системи (дерево на вітру, очерет в річці, шланг, з якого під натиском витікає вода, і т.д.).

На відміну від власних коливань автоколивання не затухають. У авіації такі коливання називають *флатером*.

За виглядом пружних коливань розрізняють *подовжні*, *поперечні* та *крутильні* коливання систем, а також їх поєднання.

### 9.3 Вільні (гармонійні) коливання пружної системи з одним ступенем вільності

Розглянемо вільні коливання пружної системи, що складається з маси і пружини (рис.9.4).

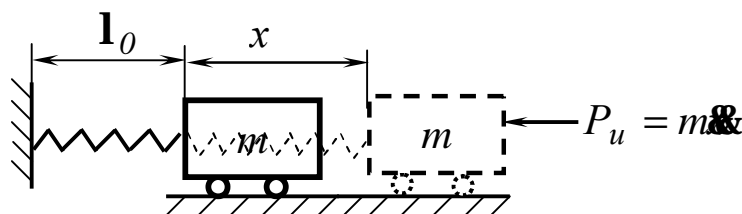


Рисунок 9.4

При складанні рівнянь руху виходитимемо з принципу Даламбера, який полягає в тому, що до рухомої з прискоренням системи можуть бути

застосовані рівняння статики за умови, що до зовнішніх сил включена сила інерції, рівна добутку маси на прискорення і направлена проти прискорення, тобто

$$P_u = -m\ddot{x}$$

Якщо нехтувати масою пружини, то відхилення вантажу від положення рівноваги може бути описане рівнянням

$$x = d_{11}(-m\ddot{x}) \quad (9.1)$$

звідки

$$\ddot{x} + \frac{1}{d_{11}m}x = 0 \quad \text{або}$$

$$\ddot{x} + w^2 x = 0, \quad (9.2)$$

де  $w = \sqrt{\frac{1}{d_{11}m}}$  – кругова частота власних коливань;

$d_{11}$  – переміщення маси під дією статично прикладеної одиничної сили у напрямку коливань.

Таким чином, переміщення  $d_{11}$  визначається жорсткістю пружини.

Рівняння (9.2) має рішення

$$x = A \sin wt + B \cos wt, \quad (9.3)$$

де  $A, B$  – постійні, залежні від початкових умов рухи, тобто від положення маси і її швидкості в момент  $t = 0$ .

Рішення рівняння (9.2) може бути записане також у формі

$$x = a \sin(wt + j), \quad (9.4)$$

де  $wt + j$  – фаза коливань;

$j$  – зсув фази.

Амплітуда  $a$  і зсув фази  $j$ , також можуть бути визначені з початкових умов

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{w^2}},$$

$$j = \text{ark tg } \frac{x_0 W}{V_0}.$$

Кругову частоту власних коливань системи також можна знайти і за формулою  $w = \sqrt{\frac{g}{d_{CT}}}$ .

Тоді період коливань

$$T = \frac{2p}{w} = 2p \sqrt{\frac{g}{d_{CT}}} = 2p \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

З формули  $w = \sqrt{\frac{m}{c}}$  видно, що частота вільних коливань системи зростає із збільшенням жорсткості. Легко переконатися, що вантаж, підвішений до пружного стрижня, володітиме значно вищою власною частотою коливання, чим той же вантаж, підвішений до легкої пружини.

**Приклад 1.** Визначити власну частоту консольної балки завдовжки  $l = 3 \text{ м}$  (момент інерції балки  $I_x = 5000 \text{ см}^4$ ) з вантажем  $m = 2000 \text{ кг}$  на кінці (рис.9.5).

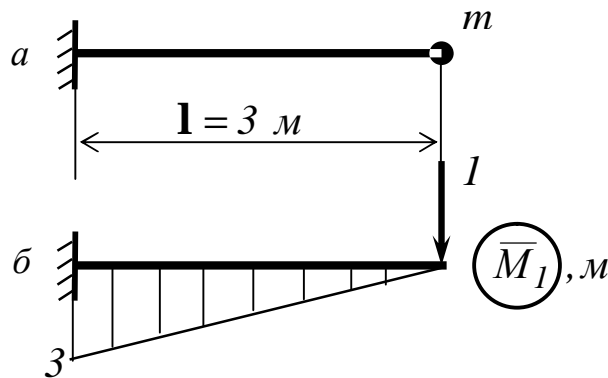


Рисунок 9.5

*Рішення* Прикладемо до кінця балки одиничну силу (див. рис. 9.5, б) і побудуємо епюру  $\bar{M}_1$ .

Знайдемо переміщення вантажу

$$d_{11} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (2 \cdot 3 \cdot 3) \right] = \frac{9 \cdot}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5000 \cdot 10^{-8}} = 0,9 \cdot 10^{-6} \left( \frac{H}{M} \right).$$

Власна частота коливань системи

$$w = \sqrt{\frac{1}{d_{11}m}} = \sqrt{\frac{1}{0,9 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^3}} = 23,6 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

#### 9.4 Коливання пружної системи з одним ступенем вільності з лінійним загасанням

У дійсності завжди існують сили, які направлені проти руху мас і призводять до поступового зменшення амплітуди власних коливань.. Після деякого часу власні коливання повністю припиняються.

Природа сил опору буває різна (повітря, вода, масляний шар, внутрішнє тертя в частинках металу і т.д.). Для більшої простоти приймають зазвичай, що сила опору пропорційна першому ступеню швидкості руху.

Для системи «маса-пружина» (рис. 9.6) при складанні рівняння руху до зовнішніх сил необхідно включити силу опору, направлену убік, протилежний руху та рівну

$$R = -a \dot{x},$$

де  $a$  – коефіцієнт пропорційності між силою і швидкістю, що характеризує вплив середовища.

Рівняння руху має вигляд

$$x = d_{11}(-m\ddot{x} - a\dot{x})$$

або

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + w^2x = 0 \tag{9.5}$$

де  $2n = \frac{a}{m}$ ,  $n$  – коефіцієнт загасання, залежний від виду середовища;

$$w = \sqrt{\frac{1}{d_{11}m}} \text{ – кругова частота власних коливань.}$$

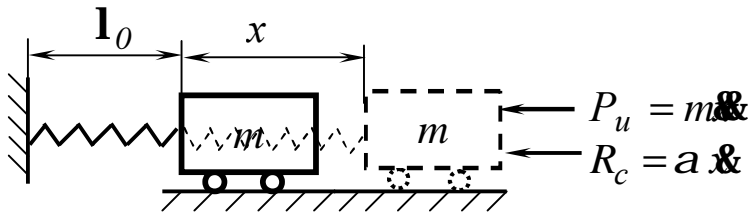


Рисунок 9.6

Рішення рівняння (9.5) має вигляд

$$x = ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + j),$$

де  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$  – кругова частота затухаючих коливань.

З одержаного виразу видно, що при лінійному загасанні коливання відбуваються з амплітудою, що зменшується, при частоті  $\omega_1$  (рис.9.7).

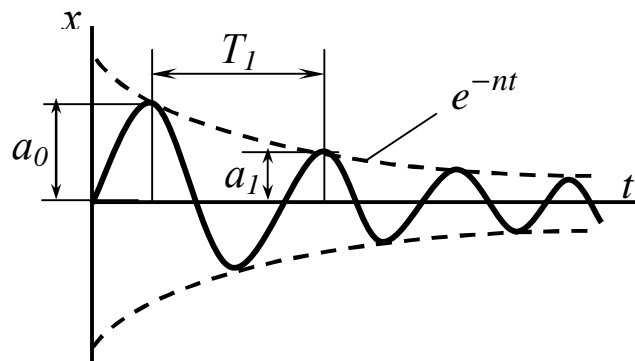


Рисунок 9.7

Зазвичай величина  $\omega_1$  мало відрізняється від  $\omega$ , тобто від частоти власних коливань без загасання, оскільки величина  $n^2$  дуже мала в порівнянні з  $\omega^2$ .

Через інтервал часу  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  амплітуда коливань зменшується.

Відношення якої-небудь амплітуди коливань до безпосередньо наступною за нею через один період амплітуді називається *декрементом коливань*, який рівний

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{e^{-knT}}{e^{-(k+1)nT}} = e^{nT},$$

Звідки 
$$\ln\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right) = \ln e^{nT} = nT = d.$$

Величина  $d$  називається *логарифмічним декрементом загасання коливань* і зазвичай є основною характеристикою загасання коливань.

## 10 ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТЕПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

Під *вимушеними коливаннями* розуміється рух пружної системи, що відбувається під дією тимчасових змінних сил. Розглянемо випадок, коли на систему, що має один степінь вільності, діє сила опору, а також збуджуюча сила, яка змінюється за гармонійним законом

$$P(t) = P_0 \sin \Omega t,$$

де  $P_0$  – максимальне значення збуджуючої сили

$\Omega$  – кругова частота вимушених коливань.

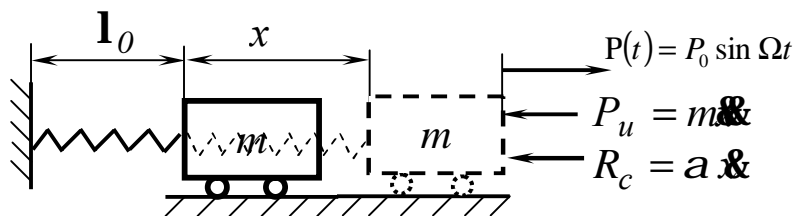


Рисунок 10.1

При складанні рівняння руху маси необхідно ввести в розгляд не тільки силу інерції  $P_{in} = -m\ddot{x}$  і силу опору, але також і зовнішню силу  $P(t) = P_0 \sin \Omega t$ .

Переміщення  $x$  залежатиме від трьох сил:

$$x = d_{11} [P(t) - m\ddot{x} - c\dot{x}]$$

$$\text{або} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + w^2 x = \frac{P_0}{m} \sin \Omega t. \quad (10.1)$$

Позначення для  $n$  і  $W$  залишаються тим самим:

$$2n = \frac{a}{m}, \quad w^2 = \frac{1}{d_1 m}.$$

Таким чином, одержано диференціальне рівняння з правою частиною. Повне рішення цього рівняння складається з рішення одного рівняння без правої частини і приватного рішення рівняння з правою частиною.

Загальне рішення рівняння (10.1), як відомо, може бути подано у вигляді суми рішень

$$x = x_1 + x_2,$$

де  $x_1$  – рішення однорідного рівняння

$$x_1 = ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + j) \quad (10.2)$$

а  $x_2$  – часткове рішення неоднорідного рівняння, яке шукатимемо у вигляді

$$x_2 = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t \quad (10.3)$$

де  $C_1, C_2$  – невідомі постійні.

Продиференціюємо двічі рівняння (10.3):

$$\dot{x}_2 = C_1 \Omega \cos \Omega t - C_2 \Omega \sin \Omega t;$$

$$\ddot{x}_2 = -C_1 \Omega \sin \Omega t - C_2 \Omega \cos \Omega t$$

і підставимо знайдені вирази для  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  в рівняння (10.1):

$$\begin{aligned} & -C_1 \Omega^2 \sin \Omega t - C_2 \Omega^2 \cos \Omega t + 2nC_1 \Omega \cos \Omega t - 2nC_2 \Omega \sin \Omega t + \\ & + w^2 C_1 \sin \Omega t + w^2 C_2 \cos \Omega t = \frac{P_0}{m} \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти при  $\sin \Omega t$  і  $\cos \Omega t$  правої і лівої частин.

При  $\sin \Omega t$ :

$$-C_1 \Omega^2 - 2nC_2 \Omega + w^2 C_1 = \frac{P_0}{m}$$

або

$$C_1(w^2 - \Omega^2) - 2nC_2\Omega = \frac{P_0}{m}. \quad (10.4)$$

При  $\cos \Omega t$ :

$$-C_2\Omega^2 + 2nC_1\Omega + w^2C_2 = 0,$$

або

$$C_2(w^2 - \Omega^2) + 2nC_1\Omega = 0. \quad (10.5)$$

Помножимо рівняння (10.4) на  $2n\Omega$ , а рівняння (10.5) на  $(w^2 - \Omega^2)$  і віднімемо одне з іншого:

$$\begin{cases} C_1(w^2 - \Omega^2) - 2nC_2\Omega = \frac{P_0}{m} & \times 2n\Omega \\ C_1 2n\Omega + C_2(w^2 - \Omega^2) = 0 & \times (w^2 - \Omega^2) \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_1 2n\Omega(w^2 - \Omega^2) - 4n^2\Omega^2C_2 = \frac{P_0}{m} 2n\Omega \\ C_1 2n\Omega(w^2 - \Omega^2) + (w^2 - \Omega^2)^2C_2 = 0 \end{cases}.$$

Вирішуючи спільно одержану систему двох рівнянь щодо невідомих постійних  $C_1$  і  $C_2$  одержимо:

$$C_1 = \frac{P_0}{m} \cdot \frac{w^2 - \Omega^2}{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2},$$

$$C_2 = -\frac{P_0}{m} \cdot \frac{2n\Omega}{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2},$$

Тоді часткове рішення рівняння (10.1) набуде вигляду

$$x_2 = \frac{P_0/m}{\sqrt{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \left[ \frac{(w^2 - \Omega^2)\sin\Omega t}{\sqrt{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} - \frac{2n\Omega\cos\Omega t}{\sqrt{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \right].$$

Введемо позначення:

$$\frac{w^2 - \Omega^2}{\sqrt{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} = \cos y;$$

$$\frac{2n\Omega}{\sqrt{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} = \sin y.$$

Тоді

$$x_2 = \frac{\frac{P_0}{m w^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right)^2 + 4n^2 \left(\frac{\Omega^2}{w^4}\right)}} \sin(\Omega t - y).$$

Таким чином, повне рішення рівняння (10.1) має вигляд

$$x = e^{-nt} [a \sin j (w_1 t + j)] + \frac{\frac{P_0}{m w^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{\Omega^2}{w^4}}} \sin(\Omega t - y).$$

Ми бачимо, що в даному випадку система бере участь одночасно в двох коливальних рухах.

Перше є власним коливальним рухом, амплітуда  $a$  і фаза  $j$  якого визначаються початковими умовами. Ці коливання є згасаючими і після закінчення деякого часу практично зникають.

Другий коливальний рух відбувається з частотою збуджуючої сили  $\Omega$  і зсувом фази  $y$ . Він не згасає, а продовжується, поки діє збуджуюча сила.

Амплітуда вимушених коливань дорівнює

$$a_{\text{вим}} = \frac{P_0 d_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \Omega^2}{w^4}}}. \quad (10.6)$$

Добуток  $P_0 d_{11}$  є тим переміщенням, яке одержала б маса, якби до неї статично була прикладена сила  $P_0$ .

Отже, коефіцієнт наростання коливань

$$b = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{W^2}{w^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{W^2}{w^4}}}. \quad (10.7)$$

показує, в скільки разів амплітуда вимушених коливань більше статичного переміщення, викликаного максимальним значенням збуджуючої сили.

У стільки ж раз більшими в порівнянні із статичними будуть і напруження, які виникають в пружному елементі (балці, пружині й ін.), тобто

$$s_d = s_{ст} b .$$

Побудуємо графік залежності коефіцієнта загасання, змінюючи відношення частот  $\frac{\Omega}{w}$  і параметр загасання  $n$ .

1  $n=0$  (опір середовища відсутній).

З формули (10.7) 
$$b = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right)^2}} = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{w^2}} .$$

а)  $\frac{\Omega}{w} = 0$ , при цьому  $b = 1$ ;

б)  $\frac{\Omega}{w} = 1$ , при цьому  $b = \infty$  – резонанс; це означає, що за таких

умов амплітуда вимушених коливань необмежено зростає.

*Явище збільшення амплітуди при збігу частот власних коливань і збуджуючої сили носить назву **резонансу**, а сам збіг частот називається **умовою резонансу**.*

в)  $\frac{\Omega}{w} = 2$  при цьому  $b = 0,33$ .

2  $\frac{2n}{w} = 0,2$  (опір середовища незначний).

Перетворимо формулу (10.7):

$$b = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{w}\right)^2 \frac{\Omega^2}{w^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega}{w}\right)^2 + (0,2)^2 \left(\frac{\Omega}{w}\right)^2}} .$$

а)  $\frac{\Omega}{w} = 0$  при цьому  $b = 1$ ;

б)  $\frac{\Omega}{w} = 1$  при цьому  $b = 5$ ;

в)  $\frac{\Omega}{w} = 2$  при цьому  $b = 0,31$ .

3  $\frac{2n}{w} = 0,2$  (опір середовища значний).

Перетворимо формулу (10.7):

$$b = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{w}\right)^2 \frac{\Omega^2}{w^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega}{w}\right)^2 + (0,4)^2 \left(\frac{\Omega}{w}\right)^2}}$$

- а)  $\frac{\Omega}{w} = 0$  при цьому  $b = 1$ ;
- б)  $\frac{\Omega}{w} = 1$  при цьому  $b = 2,5$ ;
- в)  $\frac{\Omega}{w} = 2$  при цьому  $b \approx 0,3$ .

За одержаними даними побудуємо залежність « $b - \frac{\Omega}{w}$ » (рис.10.2).

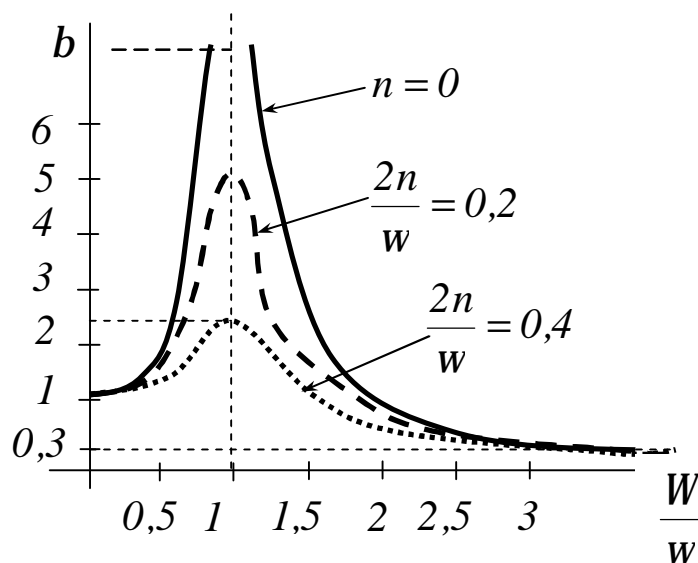


Рисунок 10.2

У практиці інженерних розрахунків на динамічну міцність питання резонансу за своєю значущістю посідають одне з перших місць. Річ у тому, що в більшості випадків закони зміни збуджуючих сил носять періодичний характер, незбалансовані рухомі частини працюючого двигуна створюють сили, що періодично змінюються; потяг, що їде по дорозі з постійною швидкістю одержує періодично поштовхи на стиках рейок; деталі приладів встановлені на віброуючій підставі – у літаку, автомобілі – одержують в процесі роботи поштовхи з частотою підстави, що коливається.

У всіх цих випадках виникає питання про те, наскільки небезпечні збуджуючі сили для роботи пружної системи і чи не призведуть вони до надмірного розгойдування і передчасного руйнування.

Таке завдання вирішується, перш за все, шляхом зіставлення частот власних коливань і збуджуючої сили. Якщо ці частоти сильно відрізняються один від одного, можна бути упевненим в тому що, явище резонансу не виникне і умови роботи для пружних елементів є сприятливими.

При цьому є можливим підрахувати амплітуду вимушених коливань, не знаючи наперед величину коефіцієнта загасання  $n$ . Як видно з рисунка 10.2., криві помітно відрізняються одна від одної лише в зоні резонансу. Вже у разі, коли частота  $W$  більше або менше частоти  $W$  в 1,5...2 рази, можна вважати, що наведені криві практично співпадають і коефіцієнт загасання  $n$  значення не має. Його можна просто взяти за нуль, що йде в запас міцності. Тоді вираз (10.7) можна переписати:

$$b = \frac{1}{\left|1 - \frac{\Omega^2}{w^2}\right|}. \quad (10.8)$$

Якщо коефіцієнт  $b$  знайдений, легко визначаються напруження в пружних елементах коливальної системи

$$s_d = s_{cr} b, \quad (10.9)$$

де  $s_{cr}$  – напруження, які виникали б в системі при статичному прикладанні максимального значення збуджуючої сили.

Якщо конструктор позбавлений можливості варіювати частотами, то при виникненні небезпеки резонансу практикується установка спеціальних пристроїв, що підвищують розсіювання енергії при коливаннях (демпфуючі системи). Коефіцієнт загасання  $n$  при цьому зростає, і амплітуда в зоні резонансу при незмінному відношенні частот знижується.

При прикладанні збуджуючих сил амплітуда вимушених коливань (10.6) досягає свого значення не відразу, потрібний досить тривалий час, щоб "розгойдати" систему. У зв'язку з цим короткочасний стан резонансу для споруд не є небезпечним, оскільки амплітуда протягом короткого проміжку часу не встигає досягти великих значень.

**Приклад.** На балці, що складається з двох швелерів 12 (рис.10.3), встановлений двигун, в якому є незбалансована маса, що обертається  $m_0$  ( $m_0 = 0,4 \text{ т.}$ ). Радіус дисбалансу  $r = 0,1 \text{ см.}$  Кількість оборотів маси  $n = 3000 \text{ об/хв.}$  Вага двигуна  $G = 2 \text{ кН.}$  Довжина балки  $l = 1,5 \text{ м.}$  Момент інерції кожного швелера  $I_x = 346,3 \text{ см}^4$ . Перевірити конструкцію на резонанс.

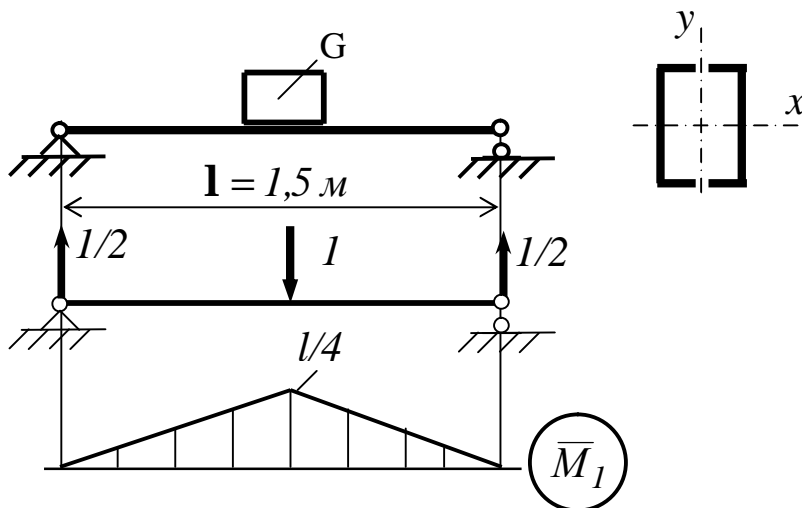


Рисунок 10.3

1 Кругова частота збуджуючої сили рівна кутовій швидкості обертання маси  $m_0$ :

$$\Omega = \frac{pn}{30} = \frac{3000p}{30} = 314 \text{ сек}^{-1}.$$

2 Визначаємо частоту власних коливань системи, нехтуючи масою балок:

$$w = \sqrt{\frac{1}{d_{11} m}} \quad (m = \frac{G}{g}).$$

Знаходимо, "перемножуючи" одиничну епюру (див. рис.10.3) саму на себе:

$$d_{11} = \frac{l^3}{48E \cdot 2I_x}$$

тоді

$$w = \sqrt{\frac{48E \cdot 2I_x \cdot g}{l^3 G}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 346,3 \cdot 10^{-8} \cdot 9,8}{1,5^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 311 \text{ сек}^{-1}.$$

Частоти практично співпадають.

Змінимо профіль.

Візьмемо швелер 8 ( $I_x = 101,3 \text{ см}^4$ )

Тоді  $w = 171 \text{ сек}^{-1}$ .

Ця частота вже сильно відрізняється від  $\Omega$ .

3 Визначимо коефіцієнт наростання коливань:

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - \frac{314^2}{171^2}\right|} = 0,4.$$

4 Визначимо максимальне значення збуджуючої сили:

$$P_0 = m_0 \Omega^2 r = \frac{0,4}{9,8} \cdot 314^2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-2} = 4,02 \text{ кН}.$$

5 Напруження, що виникає в блоках під дією сили  $P_0$ , за умови її статичної дії, дорівнюватиме:

$$s_{CT}^{P_0} = \frac{M}{2W_x} = \frac{P_0 l}{8W_x} = \frac{4,02 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{8 \cdot 25,3 \cdot 10^{-6}} = 29,8 \text{ МПа}.$$

6 Напруження при вимушених коливаннях буде:

$$s_d = s_{CT}^{P_0} \beta = 29,8 \cdot 0,4 = 11,92 \text{ МПа}.$$

7 Ці змінні напруження накладаються на постійні напруження від власної ваги двигуна  $G = mg = 2 \text{ кН}$ .

$$s_{CT}^G = \frac{M^{\max}_G}{2W_x} = \frac{Gl}{4 \cdot 2W_x} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{4 \cdot 2 \cdot 25,3 \cdot 10^{-6}} = 14,8 \text{ МПа}.$$

8 Максимальні сумарні напруження

$$s = s_{CT}^G + s_d = 11,92 + 14,8 = 26,72 \text{ МПа}.$$

## 11 РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ІНЕРЦІЇ

### 11.1 Визначення напружень і деформацій при рівноприскореному русі стрижня з урахуванням власної ваги

Розглянемо рівноприскорений підйом вантажу  $Q$  (рис.11.1), підвішеного на стрижні завдовжки  $l$  і площею поперечного перерізу  $F$ , об'ємна вага матеріалу стрижня дорівнює  $g$ , вантаж піднімається з прискоренням  $a$  (см/сек<sup>2</sup>).

Знайдемо напруження в якому-небудь перерізі на відстані  $z$  від нижнього кінця стрижня. Розрізатимемо стрижень в цьому перерізі та розглянемо нижню відсічену частину, яка рухатиметься вгору з прискоренням  $a$  (див. рис.11.1, б).

Значить, на нижню частину від верхньої частини стрижня передаватиметься крім сили, що врівноважує її вагу, ще сила інерції  $P_{in}$ , рівна добутку її маси на прискорення, тобто

$$P_{in} = ma = \frac{Q + gFz}{g} a, \quad (11.1)$$

де  $g$  – прискорення сили ваги.

Таким чином, динамічні напруження  $S_D$ , які виникають в проведеному перерізі, врівноважуватимуть не тільки статичне навантаження  $Q + gFz$ , але і додаткову силу інерції  $\frac{Q + gFz}{g} a$ .

Щоб визначити ці напруження, треба розглянути рівновагу виділеної нижньої частини стрижня (див. рис.11.1, б) під дією динамічних напружень  $S_D$ , статичного навантаження  $Q + gFz$  і сили інерції  $\frac{Q + gFz}{g} a$ .

$$\text{Тоді} \quad \Sigma Z = 0; \quad S_D \cdot F - (Q + gF) - \left( \frac{Q + gF}{g} \right) a = 0. \quad (11.2)$$

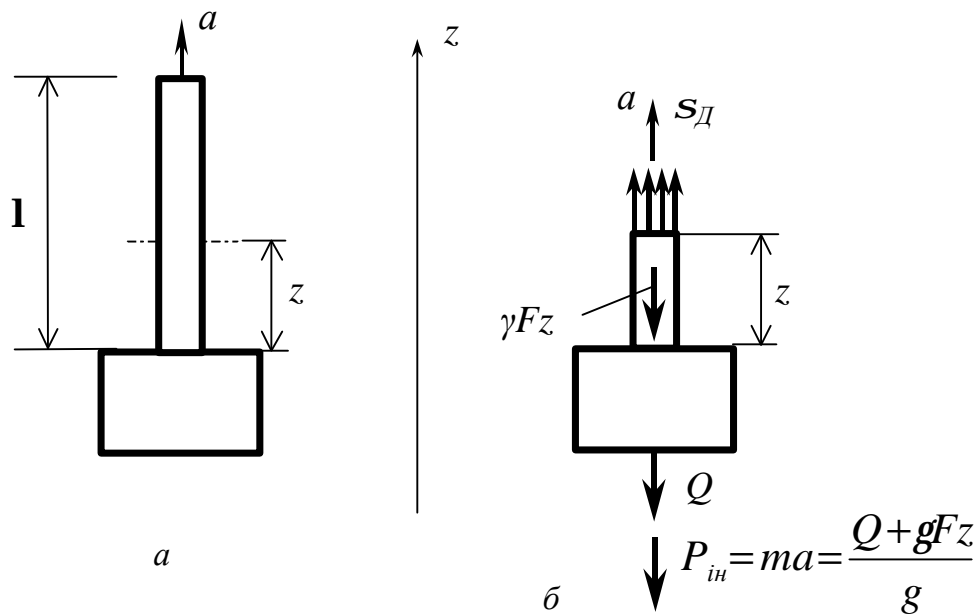


Рисунок 11.1

Звідки

$$s_D = \frac{Q + gFz}{F} + \frac{Q + gFz}{g \cdot F} \cdot a = \frac{Q + gFz}{F} \left( 1 + \frac{a}{g} \right), \quad (11.3)$$

тобто динамічні напруження рівні статичному, помноженому на коефіцієнт  $K_D = 1 + \frac{a}{g}$ , який називається коефіцієнтом динамічності.

Отже

$$s_D = s_{CT} \cdot K_D. \quad (11.4)$$

Умова міцності набуде вигляду

$$s_{Dmax} = s_{CTmax} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = s_{CTmax} \cdot K_D \leq [s]. \quad (11.5)$$

Оскільки ми розглядаємо роботу матеріалу і всієї конструкції в межах закону Гука, тобто між напруженнями і деформаціями існує пряма залежність, то і деформації при динамічному вантаженні можна знайти за формулою

$$D_D = D_{CT} \cdot K_D. \quad (11.6)$$

## 11.2 Розрахунок кільця при рівномірному обертанні

Розглянемо обчислення напружень в кільці постійного перерізу, що швидко обертається (рис. 11.2, а). З відомим наближенням в подібних умовах знаходиться колесо велосипеда або обід маховика, якщо нехтувати впливом спиць.

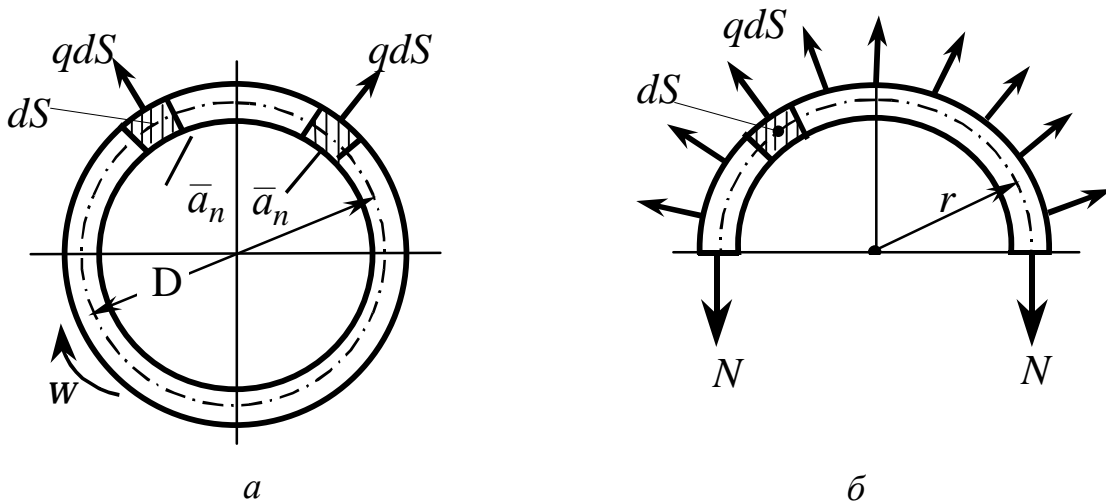


Рисунок 11.2

Кільце вважатимемо тонким, якщо товщина його невелика в порівнянні з радіусом  $r$ . У цьому випадку можна вважати, що всі точки кільця знаходяться на однаковій відстані від осі обертання, яка дорівнює  $D/2$ .

Позначимо через  $F$  площу поперечного перерізу кільця,  $\gamma$  – об'ємна вага матеріалу,  $n$  – кількість обертів за одиницю часу  $w = \frac{p \cdot n}{30}$  (1/сек) – кутова швидкість обертання,  $D$  – діаметр осі кільця.

Виділимо елемент кільця довжиною  $ds$ . При обертанні цей елемент рухається колом з постійною кутовою швидкістю  $w$ . Кутове прискорення  $e$  дорівнює нулю. Тому тангенціальне прискорення елемента дорівнює нулю:

$$a_t = e \cdot \frac{D}{2} = 0, \text{ радіальне ж (доцентрове) прискорення елемента}$$

$$a_n = \frac{w^2 \cdot D}{2} = w^2 r$$

і напрямлено до центра кільця.

На елемент кільця завдовжки, який дорівнює одиниці, діє сила інерції у вигляді відцентрової сили, величина якої (інтенсивність) рівна

$$q = \frac{g \cdot F}{g} \cdot \omega^2 r. \quad (11.7)$$

Відцентрові сили направлені за радіусом. Їх дія на кільце аналогічна дії рівномірного внутрішнього тиску інтенсивністю  $q$ . Унаслідок осьової симетрії системи і навантаження в поперечних перерізах згинальні моменти і поперечні сили дорівнюють нулю. Для визначення нормальних зусиль, що діють в поперечних (радіальних) перерізах кільця, розглянемо рівновагу його половини (див. рис.11.2, б).

Рівнодіюча розподіленого навантаження інтенсивністю  $q$  рівна добутку  $q$  на діаметр, перпендикулярна до діаметра і діє за віссю, що проходить через його середину, тобто за віссю  $y$ . Умова рівноваги півкільця набуде вигляду

$$\Sigma Y = 0; \quad 2N - q2r = 0. \quad (11.8)$$

Звідки  $N = q \cdot r.$

Нормальні напруження в поперечному перерізі кільця

$$s = \frac{N}{F} = \frac{q \cdot r}{F}. \quad (11.9)$$

Підставляючи значення  $q$  з формули (11.7), одержимо:

$$s = \frac{g}{g} \omega^2 r^2 \quad (11.10)$$

або  $s = \frac{g}{g} \left( \frac{p \cdot n}{30} \right)^2 r^2. \quad (11.11)$

Напруження можна виразити через його колову швидкість  $V$ . Враховуючи рівняння (11.10), матимемо:

$$s = \frac{g}{g} V^2 \cdot \quad (11.12)$$

Як видно з формули (11.12), напруження не залежить від площі поперечного перерізу кільця.

Умова міцності кільця, що обертається,

$$s = \frac{g}{g} V^2 \leq [s]$$

Визначаємо величину допустимої колової швидкості (критичної):

$$V_{KP} = \sqrt{\frac{[s]g}{g}}. \quad (11.13)$$

Як видно з формули (11.13), *критична швидкість*, при якій кільце може руйнуватися, залежить *тільки від матеріалу*, але не від розмірів кільця.

Відносне подовження кільця в коловому напрямку рівне

$$e_q = \frac{s}{E} = \frac{g}{g \cdot E} w^2 r^2$$

або

$$e_q = \frac{2p \cdot r_1 - 2p \cdot r}{2p \cdot r} = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{u}{r}, \quad (11.14)$$

де  $u = r_1 - r$  – зміна розміру кільця в радіальному напрямку.

Таким же є відносне подовження кільця в радіальному напрямку:

$$e_r = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{u}{r}. \quad (11.15)$$

Отже  $e_q = e_r$ .

### 11.3 Розрахунки на ударну дію навантажень

*Під ударом розуміється всяка раптова зміна швидкості тіла, що супроводжується швидкою зміною сил.*

Завдання про розрахунок конструкції на ударне навантаження містить в собі багато труднощів, які не завжди можуть бути подолані

простими засобами. До цього відноситься, в першу чергу, аналіз напруженого стану в зоні контакту тіл, які ударяються, і процесу зміни контактних сил за часом. Великі складнощі викликає необхідність обліку при різких ударах додаткових степенів вільності пружного тіла, впливом яких при інших видах навантаження можна було б нехтувати. Істотну роль в процесі удару грає чинник розсіяння енергії, що важко підкоряється аналізу.

Обмежимося простими прийомами розрахунку, які не дають високої точності, але в той же час дозволяють правильно оцінити порядок переміщень, напруження і деформацій при ударі.

Розглянемо, як сприймається ударне навантаження в системі з одним ступенем вільності. Використовуємо закон збереження енергії.

При ударі відбувається дуже швидке перетворення одного виду енергії на інший: кінетична енергія  $K$  ударяючого тіла перетворюється на потенціальну енергію  $U_D$  деформації тіла, що ударяється.

$$K = U_D. \quad (11.16)$$

Припустимо, що дуже жорстке тіло  $A$  вагою, падаючи з деякої висоти, ударяє по іншому тілу, що спирається на пружну систему, яка має жорсткість  $c$  (рис.11.3.). В окремому випадку це може бути падіння вантажу на кінець призматичного стрижня, інший кінець якого закріплений (подовжній удар), а також падіння вантажу на балку або раму на опорах (згинальний удар) і т.д.

Протягом дуже короткого часу пружна система випробовує деяку деформацію. Позначимо через  $\Delta_D$  переміщення тіла  $B$  (деформацією цього тіла нехтуємо) у напрямку удару.

Оскільки до моменту закінчення деформації ударяюче тіло пройде шлях  $H + \Delta_D$ , то зміна його кінетичної енергії вимірюватиметься проведеною ним роботою і буде рівна

$$K = Q(H + \Delta_D). \quad (11.17)$$

Обчислимо тепер  $U_D$ .

При статичній деформації

$$U_{CT} = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta_{CT} = \frac{1}{2} c \cdot \Delta_{CT}^2, \quad (11.18)$$

де  $\Delta_{CT} = \frac{Q}{c}$  – закон Гука в загальному вигляді;

$c$  – жорсткість системи, яка залежить від властивостей матеріалу, виду деформації і положення перерізу, що ударяється.

В основу формули (11.18) покладено дві передумови:

а) справедливість закону Гука;

б) поступовий – від нуля до остаточного значення – зростання сили, напруження і пропорційних ним деформацій  $\Delta_{CT}$ .

Аналогічно запишемо  $U_d$ :

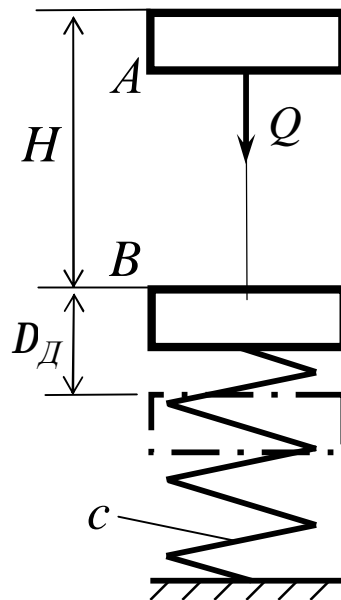


Рисунок 11.3

$$U_d = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta_d = \frac{1}{2} c \cdot \Delta_d^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{\Delta_{CT}} \cdot \Delta_d^2.$$

Використовуючи закон збереження енергії (11.16), одержимо:

$$Q(H + \Delta_d) = \frac{1}{2} \frac{Q}{\Delta_{CT}} \cdot \Delta_d^2$$

або  $\Delta_d^2 - 2\Delta_{CT} \cdot \Delta_d - 2H \cdot \Delta_{CT} = 0.$

Звідси 
$$\Delta_D = \Delta_{CT} \pm \sqrt{\Delta_{CT}^2 + 2H \cdot \Delta_{CT}}$$

або 
$$\Delta_D = \Delta_{CT} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{CT}}} \right).$$

Оскільки нас цікавить найбільша величина деформації системи у напрямку удару, то беремо корінь тільки з плюсом:

$$\Delta_D = \Delta_{CT} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{CT}}} \right) = \Delta_{CT} \cdot K_D, \quad (11.19)$$

де  $K_D = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{CT}}} \right)$  – коефіцієнт динамічності.

Оскільки за законом Гука зусилля і напруження пропорційні деформації, то

$$s_D = s_{CT} \cdot K_D = s_{CT} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{CT}}} \right), \quad (11.20)$$

$$P_D = Q \cdot K_D = Q \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{CT}}} \right). \quad (11.21)$$

З формул (11.19)...(11.21) видно, що величина динамічних деформацій, напруження, зусиль залежить від величини статичної деформації, тобто від жорсткості та розмірів тіла, що ударяється.

Якщо  $H=0$ , тобто вантаж  $Q$  прикладений миттєво, то  $K_D=2$ , тоді

$$\Delta_D = 2\Delta_{CT}, \quad s_D = 2s_{CT}, \quad P_D = 2Q.$$

Навпаки, якщо висота падіння вантажу  $H$  велика в порівнянні з деформацією, то в підкорінному виразі можна нехтувати одиницею в

порівнянні з величиною, тобто  $K_D = \left( 1 + \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{CT}}} \right)$ .

Тоді і  $\Delta_D = \Delta_{CT} \left( 1 + \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{CT}}} \right)$   $s_D = s_{CT} \left( 1 + \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{CT}}} \right)$ .

При дуже великій величині  $H$  можна нехтувати і одиницею, що стоїть перед коренем, тоді

$$K_D = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{CT}}} \quad \text{і} \quad \Delta_D = \Delta_{CT} \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{CT}}} \quad \text{або} \quad s_D = s_{CT} \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{CT}}}.$$

Аналізуючи одержані формули, бачимо, що величина динамічних напружень залежить не тільки від геометричних характеристик поперечного перерізу ( $F, I_x, W_x$ ), як це має місце при статичному навантаженні в статично визначних системах, але і від довжини стрижня і модуля пружності матеріалу (при подовжньому ударі  $\Delta_{CT} = \frac{Ql}{EF}$ ).

При цьому, чим більше об'єм матеріалу пружного стрижня, тим менш динамічні напруження, а чим більше модуль пружності, тим динамічні напруження більші.

Для зниження напруження треба досягти збільшення довжини і заміни матеріалу іншим, з нижчим модулем пружності.

Умова міцності при ударі має вигляд

$$s_D \leq [s], \quad (11.22)$$

де  $[s]$  – допустимі напруження при ударі.

**Приклад 1.** Вантаж  $Q$  падає з висоти  $H$  на стійку завдовжки  $l$  (рис. 11.4). Визначити напруження і деформації в момент удару.

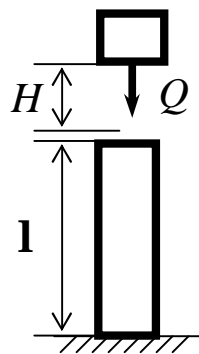


Рисунок 11.4

Визначимо статичну деформацію:

$$\Delta_{CT} = \Delta l_{CT} = \frac{Q \cdot l}{EF}.$$

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H \cdot EF}{Ql}},$$

$$\Delta_D = \Delta_{CT} \cdot K_D = \frac{Q \cdot l}{EF} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H \cdot EF}{Ql}} \right)$$

$$s_D = s_{CT} \cdot K_D = \frac{Q}{F} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H \cdot EF}{Ql}} \right).$$

**Приклад 2.** На балку (рис.11.5) з висоти Н падає вантаж Q.

Визначити максимальний прогин балки і максимальні нормальні напруження.

Визначимо статичне переміщення балки методом "перемноження" епюр  $M_p$  і  $\bar{M}_1$  (див. рис.11.5):

$$y_{CT} = 2 \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{1}{2} \left( 2 \cdot \frac{Ql}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{Ql^3}{48EI_x}$$

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H \cdot 48EI_x}{Ql^3}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{96H \cdot EI_x}{Ql^3}};$$

Тоді

$$\Delta_D = \Delta_{CT} \cdot K_D = \frac{Ql^3}{48EI_x} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96H \cdot EI_x}{Ql^3}} \right)$$

$$s_D = s_{CT} \cdot K_D = \frac{Ql}{4W_x} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96H \cdot EI_x}{Ql^3}} \right)$$

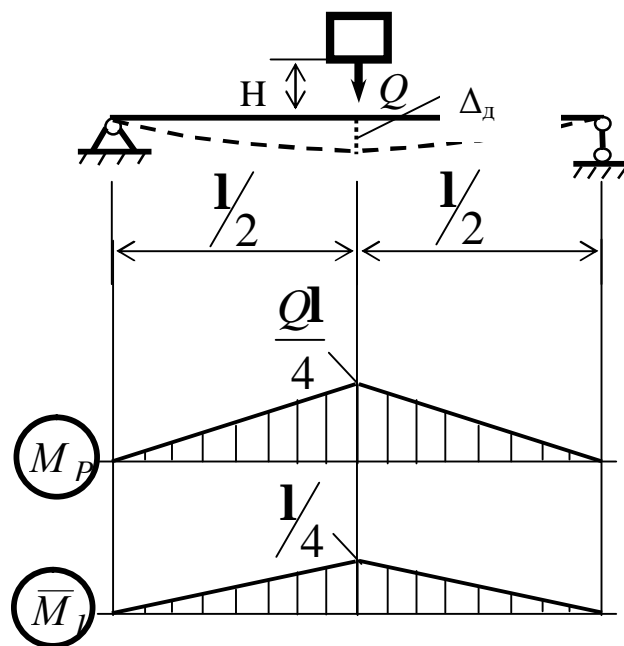


Рисунок 11.5

## 12 МІЦНІСТЬ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ НАПРУЖЕННЯХ, ЩО ЦИКЛІЧНО ЗМІНЮЮТЬСЯ ЗА ЧАСОМ

### 12.1 Утомна міцність і її особливості. Механізм втомних руйнувань

Необхідність розрахунків на втому важко переоцінити, оскільки 80% руйнувань походить від змінних напружень. Багато деталей машин в процесі роботи випробовують напруження, циклічно змінюючись з часом. Так, наприклад, поршень і всі деталі кривошипно-шатунного механізму двигуна внутрішнього згорання (вали, що обертаються, зубчаті шестерні, болти) знаходяться під дією періодично змінних сил.

Вісь вагону (рис.12.1), яка обертається разом з колесами, так само випробовує напруження, що циклічно змінюються, хоча зовнішні сили  $P$  зберігають свою величину. Еюра згинальних моментів, для неї показана на рисунку 12.1, а.

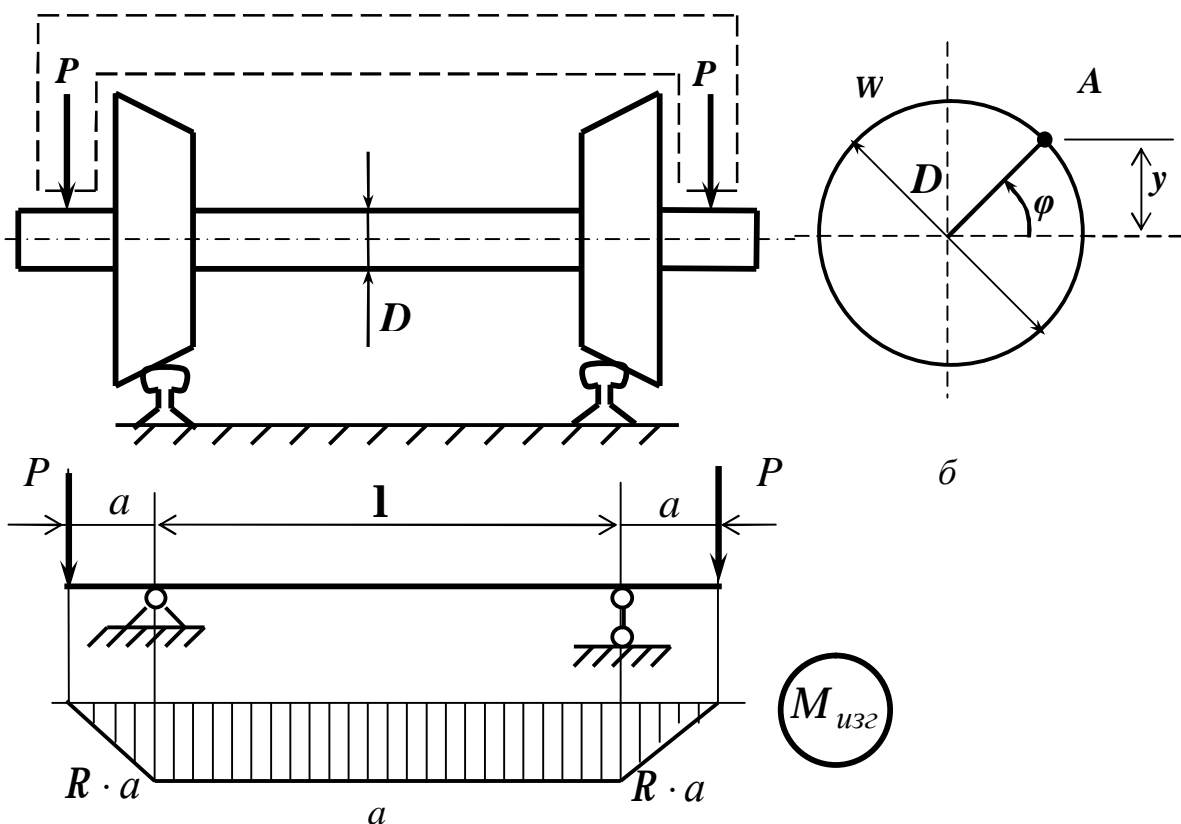


Рисунок 12.1

У довільній точці  $A$  поперечного перерізу осі виникає напруження:

$$s = \frac{M_{usz}}{I_x} y. \quad (12.1)$$

Відстань  $y$  від нейтральної лінії до точки  $A$  осі вагону (див. рис. 12.1, б) міняється з часом згідно із законом

$$y = \frac{D}{2} \sin wt,$$

де  $W$  – кутова швидкість обертання осі.

Отже, нормальні напруження в довільній точці осі вагону також змінюється за синусоїдальним законом:

$$s = \frac{P \cdot a \cdot D}{2 I_x} \sin wt. \quad (12.2)$$

Опір різних матеріалів при дії навантажень, змінних в часі за величиною або одночасно за величиною і знаком, істотно відрізняється від опору дії статичного навантаження. При цьому елементи конструкції під дією змінних навантажень руйнуються при значно менших напруженнях, чим у випадках статичних навантажень.

Практикою встановлено, що якщо елемент тієї або іншої конструкції багато разів піддавати змінному вантаженню розтягання або стисканню, то після певної кількості змін з'явиться тріщина, яка постійно розвиватиметься і, врешті-решт, деталь руйнуватиметься, не давши при цьому помітних залишкових деформацій навіть у тому випадку, коли матеріал деталі володітиме високою пластичністю.

Кількість циклів до появи першої тріщини і до повного руйнування стрижня буде тим більше, чим менше напруження. Характерно, що руйнування матеріалу у разі дії повторно змінних навантажень може відбутися при напруженнях нижче межі текучості.

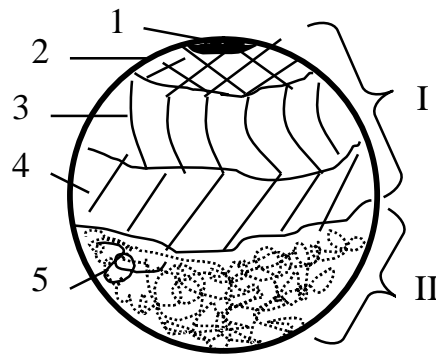
Руйнування матеріалу під дією повторно-змінних навантажень унаслідок розвитку тріщин називається *руйнуванням від втоми*.

Взагалі ж *втомою матеріалів* (зокрема металів) називають явище руйнування при багатократному повторенні вантажень.

*Здатність металів чинити опір руйнуванню при дії повторно-змінних навантажень називається витривалістю матеріалу.*

Вивчення питань втоми в опорі матеріалів має надзвичайно велике значення. Такі відповідальні деталі, як осі залізничних вагонів, колінчасті вали, шатуни моторів, повітряні гвинти, клапанні пружини, поршневі пальці та багато інших деталей виходять з ладу головним чином унаслідок руйнування втомного характеру.

При руйнуванні на поверхні зламу деталі (рис. 12.2) зазвичай виявляються дві яскраво виражені зони.



*Рисунок 12.2*

У зоні I (див. рис. 12.2) кристали важко розрізняються неозброєним оком. Поверхня зламу має згладжений контур.

У зоні II (див. рис.12.2) явно виступають ознаки свіжого крихкого руйнування. Кристали мають гостре ограновування і блискучу чисту поверхню.

Детальніше зону I можна розподілити на декілька зон (див. рис. 12.2):

1) *фокус зламу* – мала локальна зона, близька до точки, в якій виникає мікротріщина, звідки і починається її розвиток;

2) *осередок руйнування* – мала зона, прилегла до фокусу зламу і відповідна початковій мікроскопічній тріщині;

3) *зона виборчого розвитку тріщини*;

4) *зона прискореного розвитку тріщини*, передуюча руйнуванню.

*Зона долома* (див. рис. 12.2, поз. 5) – частина перерізу, де руйнується метал. Вона відноситься до зони II і характеризується макрокрихким руйнуванням.

Умови виникнення тріщини залежать від дотичних напружень, а її розвиток – від нормальних напружень. Створюється перше враження, що подібного роду руйнування пов'язане із зміною кристалічної структури металу. Саме цим свого часу вчені пояснювали руйнування при циклічних напруженнях. Описане явище одержало тоді назву *втоми*.

Надалі точка зору на причини втомного руйнування змінилася, але сам термін зберігся.

У даний час встановлено, що структура металу при циклічних навантаженнях не міняється. Початок руйнування носить суто місцевий характер. У зоні підвищених напружень, обумовлених конструктивними, технологічними або структурними чинниками, може утворитися мікротріщина. При багатократній зміні навантаження кристали, розташовані в зоні тріщини, починають руйнуватися, і тріщина проникає в глиб тіла. Дотичні поверхні в зоні тріщини, що утворилася, випробовують контактну взаємодію, внаслідок чого кристали стираються, а поверхні набувають вигляду дрібнозернистої структури. Так утворюється одна із зон поверхні майбутнього зламу (зони 1–4, див. рис. 12.2).

У результаті розвитку тріщини переріз ослабляється. На останньому етапі відбувається раптове руйнування. Злам має характерну поверхню з чистими непошкодженими кристалами. Тріщина може утворитися з краю перерізу або усередині нього.

Теоретично аналіз втомної міцності пов'язаний з великими труднощами. Природа встановленого руйнування обумовлена особливостями молекулярної будови речовини. Схема суцільного середовища, яке до цих пір застосовується при розгляді різних завдань, в даному випадку не може бути прийнята як основа для дослідження.

У даний час фізичні основи теорії твердого тіла не знаходяться ще на такій стадії розвитку, щоб на їх базі створити методи розрахунку на втомну міцність, що задовольняють запитам практики. Тому доводиться йти шляхом накопичення експериментальних чинників.

Відсутність єдиних основоположних законів в цій теорії позбавляє її стрункості. У результаті одержані експериментальні залежності, які не є універсальними, а самі розрахунки дають порівняно невисоку точність.

## 12.2 Основні характеристики циклу напружень.

### Межа витривалості

Змінна напруження в частинах машин змінюється між двома крайніми значеннями, між найбільшим напруженням  $S_{max}$  і найменшим  $S_{min}$  (рис. 12.3). При цьому напруження змінюється за періодичним законом  $S = f(t)$  з періодом, рівним  $T$ .

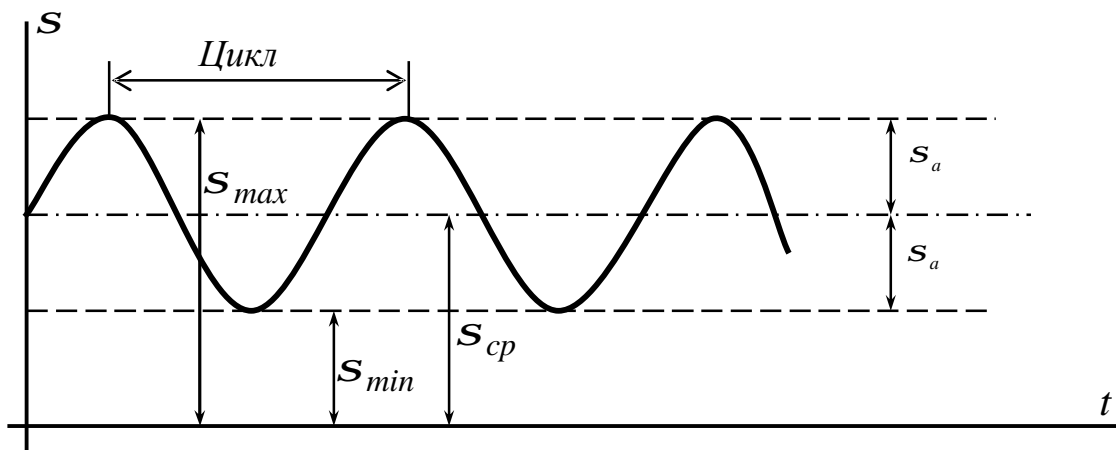


Рисунок 12.3

Сукупність всіх значень напружень за час одного періоду називається циклом напруження.

Алгебраїчна напівсума найбільших і найменших напружень циклу називається середнім напруженням циклу.

$$S_{cp} = \frac{S_{max} + S_{min}}{2}. \quad (12.3)$$

Алгебраїчна напіврізниця найбільших і найменших напружень циклу називається середньою амплітудою циклу.

$$S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2}. \quad (12.4)$$

Відношення найменших напружень до найбільших, узятє з урахуванням знаку, називається коефіцієнтом асиметрії циклу.

$$R = \frac{S_{min}}{S_{max}}. \quad (12.5)$$

Коефіцієнт асиметрії  $R$  є основною характеристикою циклу.

Якщо найбільші та найменші напруження однакові за величиною і зворотні за знаком, тобто  $R=-1$ , то цикл зміни напружень називається *симетричним* (рис. 12.4, а).

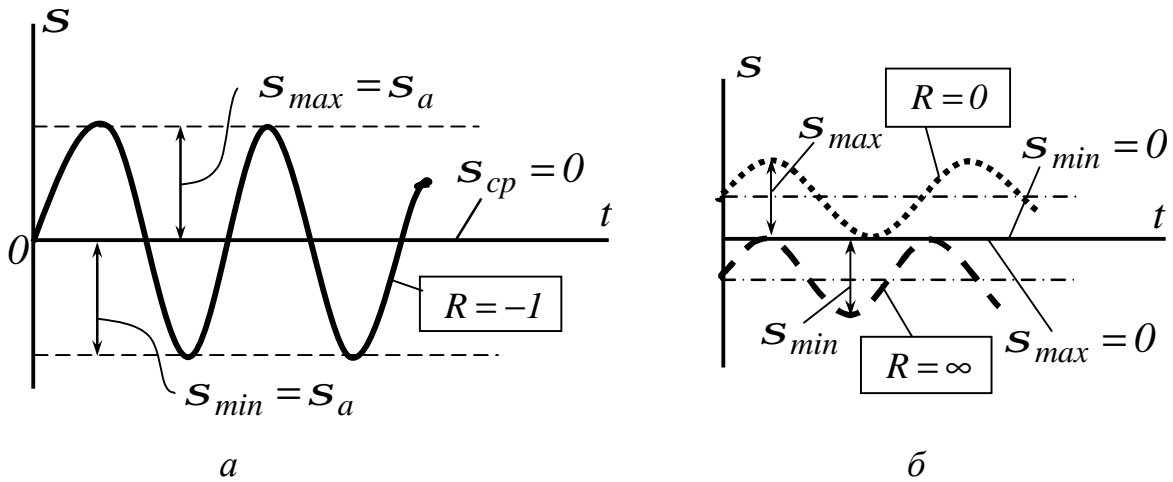


Рисунок 12.4

Якщо найменше напруження циклу  $s_{min}$  дорівнює  $0$ , тобто  $R=0$ , то цикл називається *пульсуючим* (віднульовим). Пульсуючим може бути також цикл з  $\sigma_{max}=0$ , тоді  $R = \infty$ .

Якщо найбільші та найменші напруження не однакові за величиною, то цикл називається *несиметричним* (див. рис. 12.3).

Цикли, що мають однакові коефіцієнти асиметрії  $R$ , називаються *подібними*.

Будь-який цикл може бути поданий як результат накладення напружень, змінних за симетричним циклом з амплітудою, на постійне середнє напруження  $s_{cp} = \frac{s_{max} + s_{min}}{2}$ .

Вважається загальновизнаним, що втомна міцність деталі не залежить від закону зміни напружень усередині інтервалу  $s_{max} - s_{min}$ . Тому між циклами, показаними на рис. 12.5, відмінність не робиться. Вважається неістотною і частота зміни циклу.

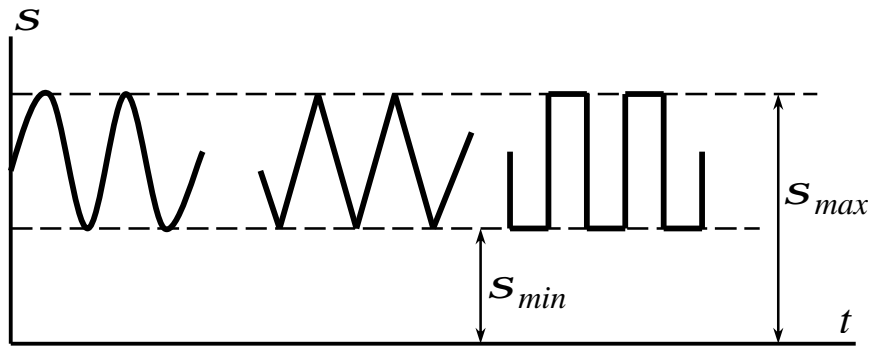


Рисунок 12.5

### 12.3 Випробування матеріалів на втому

Для вивчення явища втоми проводять втомні випробування на різних випробувальних машинах. За видом навантаження розрізняють машини для випробування на кручення, на згинання, на розтягання-стискання, на складний опір, а також універсальні.

Найбільш поширеними є випробування в умовах симетричного циклу. При цьому зазвичай використовується принцип чистого згинання зразка, що обертається. Схема однієї з найбільш поширених машин для випробування на втому при згинанні показана на рисунку 12.6.

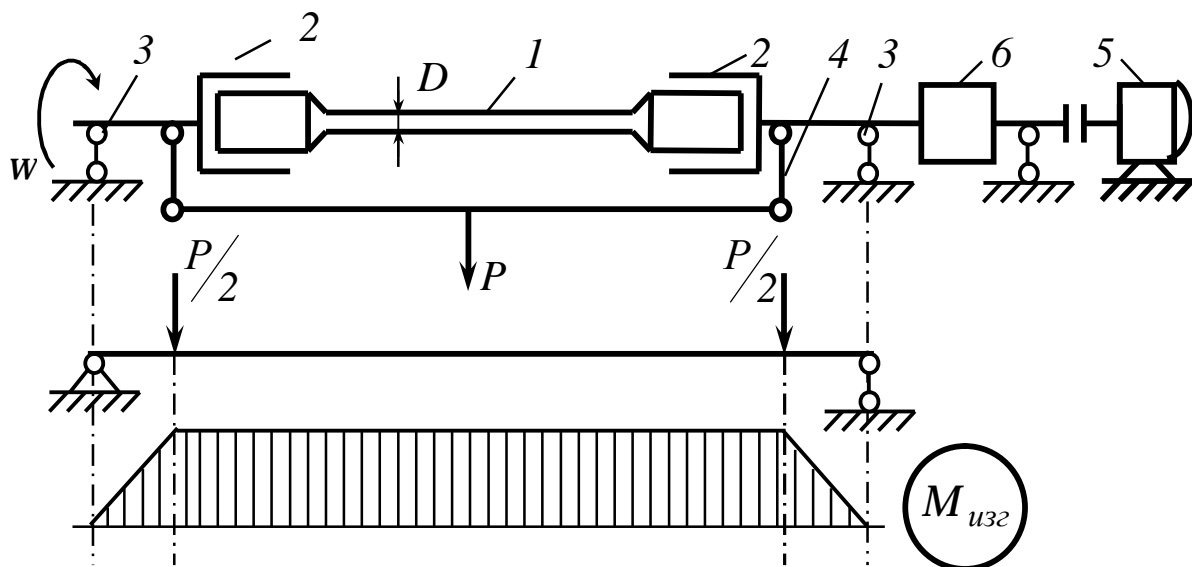


Рисунок 12.6

Стандартний зразок  $1$  разом з конусними затисками (цапфами)  $2$  утворює балку, вільно обперту на підшипниках  $3$ . До цієї балки на

сережках 4 підвішений вантаж  $P$ . За епюрою згинальних моментів  $M_{зг}$  (див. рис. 12.6) неважко побачити, що зразок 1 піддається чистому згинанню.

Зразок 1 починає обертатися електродвигуном 5 з частотою, кількість оборотів якого реєструє лічильник 6.

Для випробування використовують стандартні зразки з  $d=7...10$  мм, гладкі, поліровані. Випробування проводять при кімнатній температурі.

Зазвичай випробування проводять так. Навантажують 1-й зразок так, щоб напруження в ньому складали  $s_{max} = (0,65 \div 0,75)s_T$ . Доводять зразок до руйнування і фіксують кількість циклів навантаження.

Потім напруження зменшують, руйнують зразок і знову фіксують кількість циклів. Шляхом багатократних випробувань можна визначити кількість циклів, яке витримує зразок до руйнування залежно від величини  $s_{max}$  циклу.

За отриманими результатами будують діаграми (рис. 12.7), які називаються *кривими витривалості або втоми* (крива Велера).

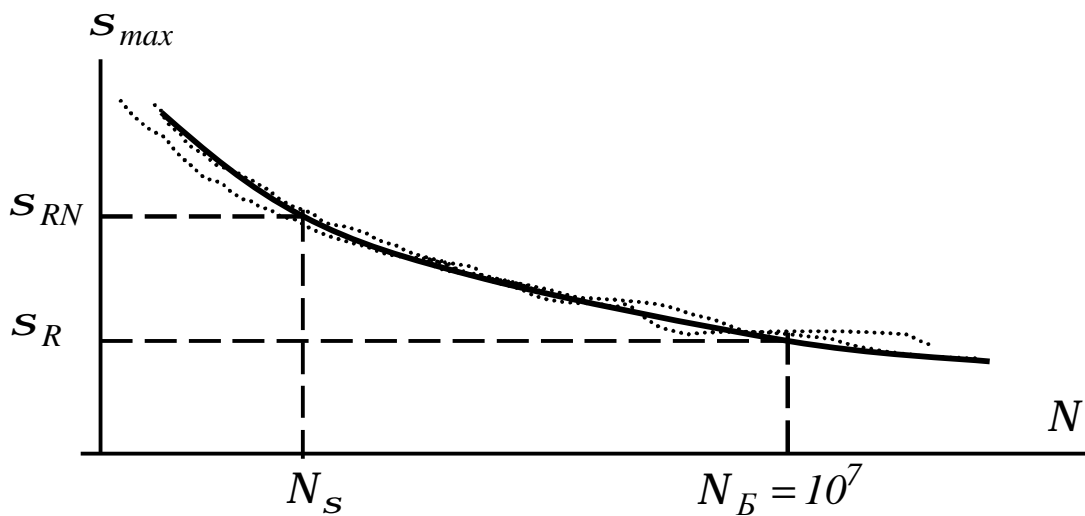


Рисунок 12.7

Як показують досліди, якщо зразок не руйнується при  $N_B = 10^7$  циклів, то він не руйнуватиметься і надалі. Це кількість циклів називається *базовою*.

Напруження, при яких матеріал не руйнується при будь-якій кількості циклів, називається межею втоми або межею витривалості ( $s_R$ ).

При симетричному циклі межа витривалості позначається  $\sigma_{-1}$ , а при пульсаційному  $s_0$  або  $s_{\pm\infty}$ .

Для кольорових металів і для загартованих до високої твердості в легованих сталях не вдається встановити таку кількість циклів, витримавши яку зразок не руйнувався б надалі. Тому в подібних випадках вводиться поняття умовної межі витривалості. За умовну межу витривалості береться напруження, при яких зразок здатний витримати  $10^8$  циклів.

Криву Велера можна описати рівнянням

$$s_R^m \cdot N = const, \quad (12.6)$$

де  $m$  – залежить від матеріалу зразка.

Користуючись цією залежністю, можна знайти обмежену межу витривалості ( $s_{RN}$ ), при якому зразок може витримати наперед задану кількість циклів ( $N_s$ ). Враховуючи, що

$$s_R^m \cdot N = s_{RN}^m \cdot N_s \quad (12.7)$$

одержуємо 
$$s_{RN} = \sqrt[m]{\frac{N_s}{N}} \cdot s_R. \quad (12.8)$$

Визначення межі витривалості – трудомістка операція, тому були зроблені ряд спроб зв'язати емпіричними формулами межу витривалості з відомими механічними характеристиками матеріалу.

1 Межа витривалості при згинанні конструкційної сталі:

$$s_{-1} \approx (0,4 \div 0,5)s_B.$$

2 Для кольорових металів:

$$s_{-1} \approx (0,25 \div 0,5)s_B.$$

9 При крученні:

$$t_{-1} \approx (0,2 \div 0,3)s_B.$$

10 Для чорних металів:

$$s_{-1} = (0,4 \div 0,65)s_B.$$

Вказані співвідношення слід застосовувати з великою обережністю.

#### 12.4 Діаграми граничних напружень і граничних амплітуд

Вказані співвідношення є наближеними, оскільки вони одержані для певних матеріалів і в певних умовах випробувань.

Межа витривалості  $s_R$  не є характеристикою тільки властивостей матеріалу ( $E, G, s_T, s_B$ ), але залежить і від способу випробування. При циклічному розтяганні-стисканні  $s_R$  на 10...20% нижче, ніж при згинанні. Межа витривалості, одержана при крученні суцільних зразків, відрізняється від межі витривалості, одержаної для порожнистих зразків, і т.д.

За наслідками випробувань зразків в умовах будь-якого несиметричного циклу можна побудувати діаграму граничних напружень. Задаючи постійне значення, знаходимо шляхом послідовних випробувань зразків таке найбільше значення, при якому матеріал здатний ще витримувати необмежену кількість циклів (або за умовним базовим числом  $N$ ).

Отриманий результат може бути графічно зображений точкою в системі координат  $s_{cp} - s_a$  (рис.12.8).

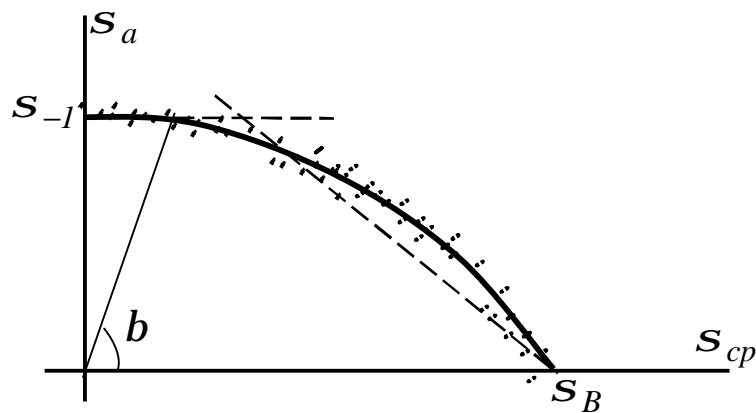


Рисунок 12.8

Сума координат цієї точки дає граничні максимальні напруження циклу, тобто межу втоми  $\sigma_R$ :

$$\text{де} \quad R = \frac{s_{\min}}{s_{\max}} = \frac{s_{cp} - s_a}{s_{cp} + s_a}.$$

$$\text{Звідки} \quad \operatorname{tg} b = \frac{s_a}{s_{cp}} = \frac{\frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}}{\frac{s_{\max} + s_{\min}}{2}} = \frac{1 - R}{1 + R}. \quad (12.9)$$

$$\text{Одержуємо} \quad s_R = s_{cp} + s_a. \quad (12.10)$$

Продовжуючи такі випробування, одержуємо безліч точок, через які проводиться гранична крива (див. рис.12.8), що характеризує міцнісні властивості матеріалу в умовах несиметричних циклів. Вона носить назву *діаграми граничних амплітуд*.

Діаграма дає можливість судити про міцність конструкції, що працює при напруженнях, що циклічно змінюється. Якщо робоча точка розташовується нижче за граничну криву, дана деталь може працювати в умовах напруження, що циклічно змінюється, необмежено довго. Якщо робоча точка виявиться вищою за граничну криву, то деталь починає руйнуватися після деякої кількості циклів.

Маючи таку діаграму для даного матеріалу, легко бачити, яку амплітуду напружень ( $s_a$ ) може переносити матеріал, не руйнуючись при даних середніх напруженнях ( $s_{cp}$ ).

Оскільки побудова діаграми граничних амплітуд є достатньо трудомісткою і економічно недоцільною (необхідна дуже велика кількість дослідів, оскільки дуже багато різних коефіцієнтів асиметрії циклу  $R$  і багато матеріалів), а задовільного аналітичного опису кривої не знайдено, то зазвичай будують спрощену діаграму, запропоновану Кінасошвілі.

Вважатимемо, що для даної сталі нам відомі наступні характеристики міцності: межа витривалості при симетричному циклі, межа витривалості при пульсуючому циклі  $s_0$  і межа текучості  $S_T$ . Розглянемо побудову наближеної діаграми при  $s_0 < s_T$  (рис. 12.9).

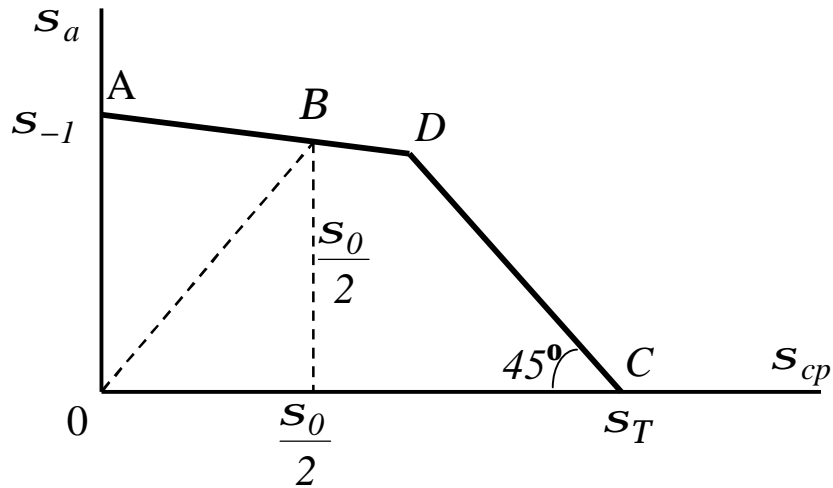


Рисунок 12.9

На осі ординат наносимо точку  $A$  (див. рис. 12.9) з координатами  $(\sigma_{cp}=0, \sigma_a=\sigma_{-1})$   $s_a = s_{-1}$ , що позначає симетричний цикл.

Наносимо точку  $B$ , що позначає пульсуючий цикл. При пульсуючому циклі  $s_{\max} = s_0$ ; отже, координати точки  $B$  будуть

$$s_{cp} = \frac{s_0}{2}, \quad s_a = \frac{s_0}{2}.$$

Наносимо точку  $C$  з координатами  $(s_{cp} = s_T, s_a = 0)$ , що позначають постійні напруження, рівні межі текучості. Через точки  $A$  і  $B$  проводимо пряму до перерізу в точці  $D$  з прямою, проведеною з точки  $C$  під кутом  $45^\circ$  до осі абсцис. Точки, які лежать на прямій  $CD$ , позначають цикли з максимальними напруженнями, рівними межі текучості. Це витікає з того, що сума ординат цих точок дорівнює  $s_T$ . Таким чином, ординати ламаної лінії  $ABC$  позначають граничні амплітуди напружень. Оскільки максимальні напруження не повинні бути вище за межу текучості, то втомна діаграма обмежується максимальним напруженням, рівним межі текучості.

## 13 ПЛИВ КОНСТРУКТИВНО-ТЕХНОЛОГІЧНИХ ЧИННИКІВ НА МЕЖУ ВИТРИВАЛОСТІ МАТЕРІАЛУ

### 13.1 Вплив концентрації напружень

На величину межі витривалості зразків і деталей, що виготовляються з того або іншого матеріалу, окрім характеристики циклу, впливає цілий ряд різних чинників. До них відносяться: форма зразка, розміри, стан поверхні, середовище, в якому відбуваються випробування, температура при випробуваннях, режим циклічної силової дії (тренування, паузи, перенавантаження, частота навантаження і т.п.), попередня внутрішня напруженість матеріалу й ін.

Вплив того або іншого чинника заведено оцінювати за відхиленням межі витривалості при симетричному циклі навантаження заданого зразка від межі витривалості, що одержується випробуванням в повітрі стандартного зразка, тобто гладкого полірованого круглого зразка діаметром 7...10 мм.

Межа втоми  $S_{-1}$  береться як еталон.

Зупинимось детальніше на впливі деяких чинників.

Найбільш важливим чинником, що впливає на зниження межі витривалості, є *концентрація напружень*, викликана різкою зміною перерізу деталі.

Концентраторами напружень на практиці є отвори в деталі (рис.13.1, а – пер. А-А), малі радіуси закруглення в місцях різкої зміни розмірів перерізу (див. рис.13.1, б – пер. В-В), виточки, канавки шпонок і т.п.

Так, наприклад, при розтяганні деталі (див. рис.13.1, а) напруження, далекі від концентратора (отвори) і місць прикладення сили  $P$ , можуть бути визначені за формулою

$$s = \frac{P}{F},$$

де  $F$  – площа довільного перерізу. На перший погляд здається, що в перерізі, ослабленому отвором, напруження повинні бути трохи більшими і можуть бути так само визначені за формулою

$$s_{ном} = \frac{P}{F_{AA}},$$

де  $F_{AA}$  – площа перерізу в місці концентратора.

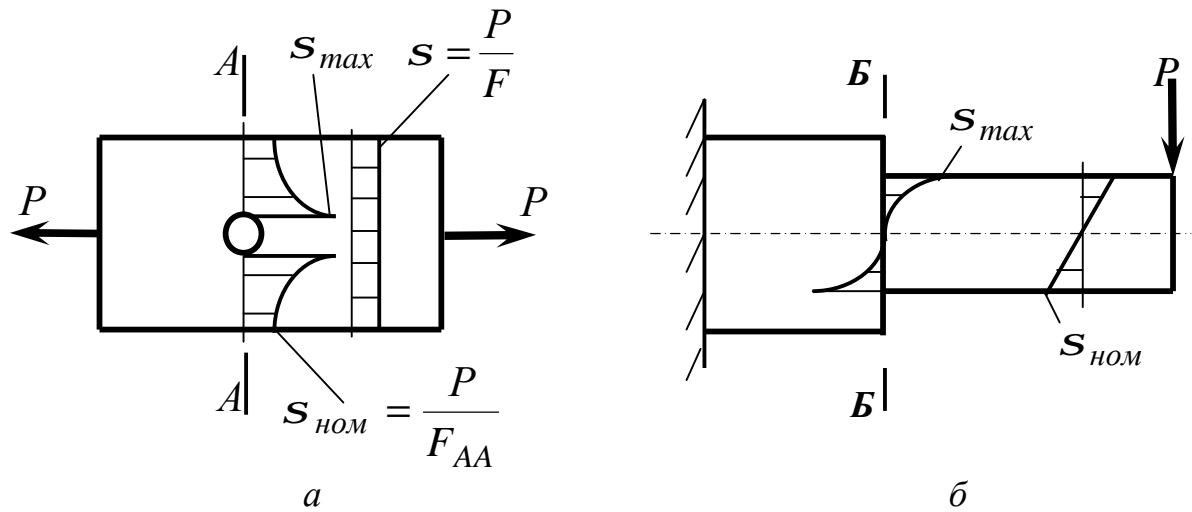


Рисунок 13.1

Проте насправді найбільші напруження, що викликаються концентратором, можуть перевищувати розрахункові в декілька разів.

Аналогічна ситуація спостерігається і в місцях різкого переходу від одного розміру деталі до іншого (див. рис.13.1, б – пер. Б-Б).

Концентрація напружень, як правило, відповідає зародженню втомної тріщини, яка, розвиваючись, призводить до руйнування деталі.

Величина місцевих напружень залежно від геометричної форми деталі визначається зазвичай теоретично за допомогою методів теорії пружності. Часто використовують також випробування моделей. Зазвичай тут застосовується поляризаційно-оптичний метод.

Основним показником місцевих напружень є *теоретичний коефіцієнт концентрації напружень*

$$a_s = \frac{s_{max}}{s_{ном}} \quad (13.1)$$

де  $s_{max}$  – найбільші місцеві напруження;

$s_{ном}$  – номінальні напруження, які визначаються за формулами опору матеріалів без урахування ефекту концентрації.

Зазвичай підрахунок  $s_{ном}$  ведеться за найбільш ослабленим перерізом деталі (див. рис. 13.1, а, пер. А-А).

Величина теоретичного коефіцієнта концентрації визначена для більшості типових конструктивних елементів, що зустрічаються на практиці. Дані про величину  $a_s$  наводяться у вигляді таблиць в довідковій літературі з машинобудування.

Наявність місцевих напружень впливає на міцність деталі по-різному залежно від властивостей матеріалу і від характеристик навантаження. У зв'язку з цим, на відміну від теоретичного, вводиться поняття *ефективного коефіцієнта концентрації для нормальних напружень*:

$$K_s = \frac{s_{-1}}{s_{-1к}}, \quad (13.2)$$

де  $s_{-1}$  – межа витривалості гладкого зразка;

$s_{-1к}$  – межа витривалості зразка з концентратором напружень.

При цьому розміри поперечних перерізів у гладких зразків і у зразків з концентраторами повинні бути однакові.

Ефективні коефіцієнти концентрації напруження мають менші значення, чим теоретичні коефіцієнти концентрації напруження ( $K_s < a_s$ ), які визначаються теоретичним шляхом у припущенні «пружного» розподілу напружень. Кількісна оцінка вказаної різниці коефіцієнтів  $K_s$  і  $a_s$  може бути одержана введенням так званого *коефіцієнта чутливості матеріалу* до концентрації напружень:

$$q_s = \frac{K_s - 1}{a_s - 1}. \quad (13.3)$$

Знаючи  $q_s$  за довідковою літературою, можна за  $a_s$  визначити значення ефективних коефіцієнтів концентрації напружень:

$$K_s = 1 + q_s (a_s - 1). \quad (13.4)$$

Для матеріалу, не чутливого до концентрації напружень  $q_s=0$ , тоді  $K_s=1$ . При  $q_s=1$ ,  $K_s=a_s$  тобто матеріал володіє повною чутливістю до концентрації напружень.

Для конструкційних сталей зазвичай  $q_s = 0,6 \div 0,8$ . А сірий чавун не чутливий до концентрації напруження, тобто для нього  $q_s = 0$ .

Чутливість металу до концентрації залежить від його властивостей. При цьому чим вище міцність металу, тим вище чутливість до концентрації напружень, тобто вона вище у крихких матеріалів, ніж у пластичних.

Коефіцієнти чутливості до концентрації напруження, як показують експериментальні дані, залежать не тільки від механічних властивостей, але і від конструктивної форми самої деталі, а також від розподілу в ній напружень.

Оскільки наявність концентрації знижує втомну міцність деталі, то при проектуванні машин слід прагнути до того, щоб вплив місцевих напружень був зведений до мінімуму. Досягається це, перш за все, конструктивними заходами – зовнішні обводи прагнуть зробити плавними, радіуси закруглення у внутрішніх кутках збільшують, необхідні отвори розташовують в зоні знижених напружень.

### **13.2 Вплив розмірів (масштабний чинник)**

Ефективність концентрації напружень пов'язана з абсолютними розмірами перерізу деталі, а саме: із збільшенням розмірів деталі при збереженні її геометричної подібності збільшуються значення ефективних коефіцієнтів концентрації.

Абсолютні розміри перерізів деталі разом з впливом на ефективність концентрації напружень роблять істотний вплив на межі витривалості зразків без концентрації напружень. Зниження межі витривалості із зростанням абсолютних розмірів деталі одержало назву *масштабного чинника*.

Відношення межі витривалості деталі діаметром  $d$  до межі витривалості лабораторного зразка подібної конфігурації, що має малі розміри ( $d_0 = 7 \dots 10$  мм), називають *коефіцієнтом впливу абсолютних розмірів перерізу або масштабним чинником*. Стосовно нормальних напружень

$$K_{Ds} = \frac{s_{-1D}}{s_{-1}}, \quad (13.5)$$

де  $s_{-1D}$ ,  $s_{-1}$  – межі витривалості при симетричному циклі навантаження, відповідно, деталі та стандартного лабораторного зразка.

Зниження меж витривалості із зростанням абсолютних розмірів перерізів деталі пояснюється наступними причинами:

- зменшенням механічної міцності матеріалу, навіть за умови дотримання їх належної термічної обробки;

- зміною властивостей поверхневого шару після механічної обробки, оскільки ці зміни виявляються різними при різних розмірах деталі;

- неоднорідністю механічних властивостей різних зерен металу у зв'язку з його полікристалічною структурою і підвищенням вірогідності більш раннього втомного руйнування із зростанням розмірів деталі.

### 13.3 Вплив стану поверхні

Оскільки при циклічних напруженнях початок руйнування пов'язаний з утворенням місцевої тріщини, то зрозуміла та роль, яку грає у втомній міцності деталі стан її поверхні. Абсолютно очевидно, що у разі чистої і тонко обробленої поверхні межа втоми зростає. При грубій обробці наявність дрібних поверхневих дефектів призводить до зниження показників втомної міцності. При цьому для матеріалів, що володіють великою чутливістю до місцевих напружень, вплив стану поверхні буде помітнішим.

При розрахунках на втомну міцність особливості, пов'язані з обробкою поверхні деталі, враховуються *коефіцієнтом якості поверхні*

$$K_F = \frac{s'_{-1}}{s_{-1}}, \quad (13.6)$$

де  $s'_{-1}$  і  $s_{-1}$  – межі витривалості при симетричному циклі навантаження, одержані на зразках, стан поверхні яких відповідає стану поверхні деталі, що розраховується, і зразку із стандартною обробкою. Як стандартна обробка береться полірування.

Вплив на межу витривалості одночасно всіх вище перелічених чинників можна знехтувати деяким коефіцієнтом зниження межі витривалості

$$K = \frac{K_s}{K_{дs}} + \frac{1}{K_F} - 1. \quad (13.7)$$

За допомогою різних технологічних методів можна поліпшити якість матеріалу і таким чином підвищити його межу витривалості.

Існують різні технологічні методи поверхневого зміцнення матеріалу:

- механічні методи – надклепання поверхневого шару шляхом обкатки роликми або обдуванням дробом, алмазне випрасовування і т.д.;
- хіміко-термічні методи – азотування, цементация, ціанування;
- термічні – поверхневий гарт струмами високої частоти (СВЧ) або газовим полум'ям.

Використовуються також комбіновані методи, наприклад цементация з обдуванням дробом та ін.

Вказані методи обробки збільшують міцності поверхневого шару деталі та створюють в ньому значних стискуючих напружень, що утрудняє утворення втомної тріщини, а тому впливають на підвищення межі витривалості.

Вплив зміцнення враховується коефіцієнтом зміцнення  $K_n$ :

$$K_n = \frac{s_{-1Д}^{змц}}{s_{-1Д}}, \quad (13.8)$$

де  $s_{-1Д}^{змц}$ ,  $s_{-1Д}$  – межа витривалості при симетричному циклі навантаження деталей, відповідно, із зміцненою поверхнею і до зміцнення.

З урахуванням коефіцієнта зміцнення  $K_n$  коефіцієнт зниження межі витривалості (13.7) набуде вигляду

$$K = \left( \frac{K_s}{K_{дs}} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) \frac{1}{K_n}. \quad (13.9)$$

### 13.4 Вплив технологічних та експлуатаційних чинників

На межу витривалості деталі також впливають умови її роботи: навантаження, паузи (перерви у навантаженнях), температурний режим, середовище, в якому працює деталь, та інші.

Підвищити межу витривалості деталі можна, навантажуючи деталь спочатку напруженнями небагато нижче межі витривалості, а потім поступово підвищуючи величину змінного навантаження. При цьому опір втомі може бути значно підвищений. Таке явище, називається тренуванням матеріалу, широко використовується в техніці.

На межу витривалості впливає також *середовище*, в якому експлуатується матеріал і яке викликає корозію: прісна і морська вода, кислоти і т.п.

Корозія призводить до погіршення міцнісних властивостей поверхневого шару, сприяє концентрації напружень на поверхні деталі та утворенню корозійних тріщин, вплив корозії на межу витривалості матеріалу враховується коефіцієнтом корозії

$$K_{кор} = \frac{s_{-1кор}}{s_{-1}}, \quad (13.10)$$

де  $s_{-1кор}$ ,  $s_{-1}$  – межі витривалості при симетричному циклі навантаження лабораторного зразка, відповідно, в умовах корозії і на повітрі.

Оскільки корозія зводить нанівець як якість обробки деталі, так і зміцнення її поверхневого шару, то з урахуванням коефіцієнта корозії  $K_{кор}$  у формулі (13.9) для знаходження коефіцієнта зниження межі витривалості можна нехтувати коефіцієнтами якості поверхні  $K_F$  і зміцнення  $K_n$ :

$$K = \frac{K_s}{K_{дs}} + \frac{1}{K_{кор}} - 1. \quad (13.11)$$

З підвищенням *температури* межа витривалості зазвичай падає, а з її пониженням – зростає, як у гладких зразків, так і зразках з концентраторами.

Для сталі при  $t > 300^{\circ}\text{C}$  спостерігається пониження межі втоми приблизно на 15...20% на кожні  $100^{\circ}$  підвищення температури.

При підвищених температурах навіть при дуже великій кількості циклів крива втоми не має горизонтальної ділянки.

Вплив концентрації напружень з підвищенням температури загалом зменшується.

При вищих температурах, близько  $500...600^{\circ}\text{C}$ , у сталі починаються процеси повзучості.

При зниженні температури від  $200^{\circ}\text{C}$  до  $190^{\circ}\text{C}$  межа витривалості у деяких сталей збільшується більш ніж удвічі, хоча ударна в'язкість цих сталей в тому ж температурному інтервалі знижується.

Це ще раз указує на принципову відмінність між втомним і крихким руйнуваннями шляхом відриву при статичних і ударних навантаженнях.

### **13.5 Заходи боротьби зі зломами втоми**

На практиці здійснюється ряд заходів щодо боротьби зі зломами втоми. Ці заходи можуть бути розподілені на дві категорії.

*Перша категорія заходів* направлена на виготовлення елементів машин і конструкцій з матеріалів, які найкращим чином чинили би опір дії змінних вантажень. Для цього необхідно:

- застосовувати метал з високою межею міцності при достатній пластичності, що забезпечить високе значення межі витривалості;
- матеріал має бути вільний від різних внутрішніх концентрацій (однорідний, мати дрібнозернисту структуру, відсутність залишкових напружень і порушень суцільності у вигляді тріщин, газових бульбашок, неметалічних включень).

*Друга категорія заходів* забезпечення міцності матеріалу при змінних напруженнях зводиться до грамотного, культурного проектування контурів деталі та ретельної обробки її поверхні. Основна мета, яку повинні ставити конструктор і технолог при проектуванні та виготовленні деталі, – це зниження коефіцієнтів концентрації напружень, що викликається різкими змінами контура деталі та дефектами обробки поверхні.

З концентрацією напруження можна боротися не тільки за рахунок плавних переходів, але і шляхом зниження різниці в жорсткості суміжних частин деталі в тих місцях, де неминуча концентрація. Наприклад, при глухій посадці з натягом ступиці колеса на вісь або шків на вал (рис.13.2, а) виникає дуже значні місцеві напруження в матеріалі вала ( $K_s = 1,8 \div 2,0$ ). Якщо в ступиці біля місця посадки зробити надріз (рис.13.2, б), пом'якшувальний жорсткість деталі з її краю, то місцеві напруження падають і розподіляються більш рівномірно.

Можна також цю частину вала зробити декілька більшого діаметра (рис.13.2, в), що також знижує напруження.

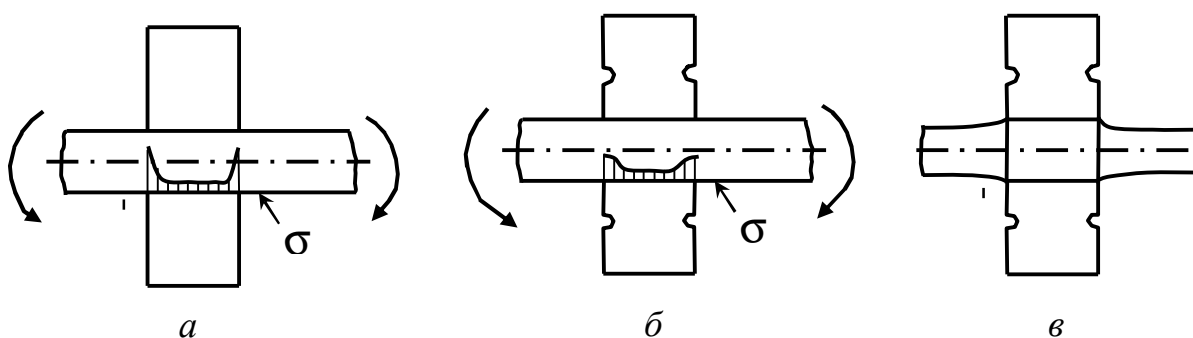


Рисунок 13.2

Дуже важливу роль грає при змінних напруженнях і чистота обробки поверхні. Груба обробка сприяє зародженню тріщин. Чим краще застосована нами сталь, тим більше культурної і ретельної обробки вона вимагає, щоб всі її переваги могли бути використані повною мірою.

## 14 РАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗМІННИХ НАПРУЖЕННЯХ

### 14.1 Виведення коефіцієнта запасу міцності

Особливістю розрахунку при дії змінних напружень є визначення запасів міцності.

Побудуємо спрощену діаграму граничних амплітуд (діаграму Серенсен - Кінасошвілі) і нанесемо на ній робочу точку А (рис.14.1).

Діаграма будується, як це було показано в розділі 12, на основі заданих механічних характеристик матеріалу ( $\sigma_y, \sigma_T, \sigma_{-1}, \sigma_0$ ), а робоча точка визначається за номінальними значеннями напружень циклу  $S_{cp}$  і  $\sigma_a$ . З урахуванням поправки на концентрацію напружень, розміри деталі та якість обробки поверхні, координати робочої поверхні набудуть значення:

$$(s_a \cdot K \text{ і } s_{cp})$$

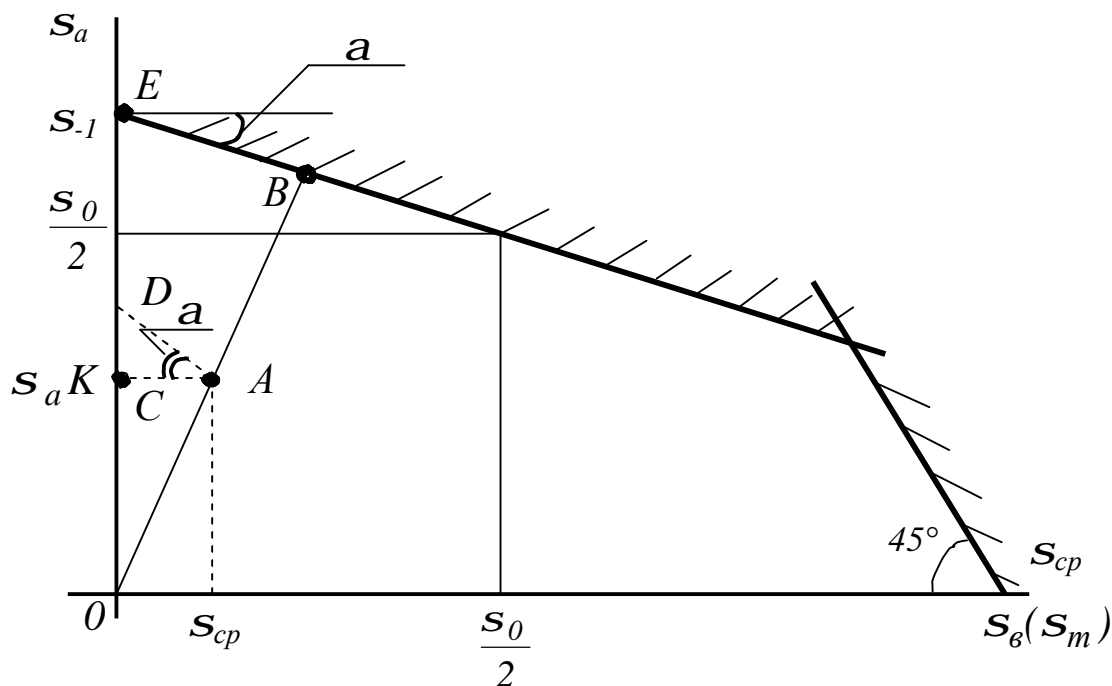


Рисунок 14.1

при цьому середні напруження  $S_{cp}$  не міняються, вони постійні та поправка для них не потрібна.

Умовимося під *запасом втомної міцності* розуміти відношення відрізка  $OB$  до  $OA$ :

$$n = \frac{OB}{OA}.$$

Це відношення характеризує ступінь близькості робочих умов до граничних для даного матеріалу. Зокрема, коли напруження не міняється в часі ( $s_a=0$ ), дане визначення запасу міцності співпадає зі звичайним. При підрахунку  $n$  можна вдатися до графічного рішення.

Визначимо коефіцієнт запасу міцності за нормальним напруженням, використовуючи діаграму Кинасошвілі (див. рис. 14.1). З діаграми

$$\text{знаходимо } n_s = \frac{OB}{OA} = \frac{OE}{OD} = \frac{OE}{OC + CD},$$

$$\text{де } OE = s_{-1}, \quad OC = s_a \cdot K, \quad CD = s_m \cdot \operatorname{tg} a = s_m \cdot \Psi_s;$$

$$\Psi_s = \frac{2 \cdot s_{-1} - s_0}{s_0} = \operatorname{tg} a \quad - \text{ коефіцієнт асиметрії циклу за нормальним}$$

напруженням.

Тоді коефіцієнт запасу міцності за нормальним напруженням

$$n_s = \frac{s_{-1}}{s_a \cdot K + s_{cp} \cdot \Psi_s}. \quad (14.1)$$

Аналогічно знаходимо коефіцієнт запасу міцності за дотичним напруженням

$$n_t = \frac{t_{-1}}{t_a \cdot K + t_{cp} \cdot \Psi_t}, \quad (14.2)$$

$$\text{де } \Psi_t = \frac{2 \cdot t_{-1} - t_0}{t_0} \quad - \text{ коефіцієнт асиметрії циклу за дотичним}$$

напруженням.

При цьому міцність оцінюється за найменшим із запасів міцності та за статичною здатністю. Величина запасів міцності при розрахунку на витривалість залежить від правильності визначення зусиль, від однорідності матеріалу, якості технології виготовлення деталі й т.д.

Для оцінки міцності деталі в умовах складного напруженого стану, коли циклічно міняються нормальні та дотичні напруження, загальноприйнятою в даний час є емпірична формула Гафа і Поларда

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_s^2} + \frac{1}{n_t^2}, \quad (14.3)$$

де  $n$  – загальний коефіцієнт запасу втомної міцності;

$n_s$  – коефіцієнт запасу втомної міцності за нормальними напруженнями;

$n_t$  – коефіцієнт запасу втомної міцності за дотичними напруженнями.

Остаточно маємо коефіцієнт запасу втомної міцності

$$n = \frac{n_s \cdot n_t}{\sqrt{n_s^2 + n_t^2}}. \quad (14.4)$$

При підвищенні точності розрахунку з широким використанням експериментальних даних про визначення зусиль, напружень і якості технологічних процесів допустимий коефіцієнт запасу міцності зазвичай береться в межах  $[n] = 1,3 \dots 1,4$ .

Для звичайної точності розрахунку за відсутності належної експериментальної перевірки і помірної однорідності матеріалу

$$[n] = 1,4 \dots 1,7.$$

При зниженій точності та відсутності експериментальної перевірки

$$[n] = 1,7 \dots 3,0.$$

Найбільш достовірні дані про необхідні запаси міцності деталі можуть бути встановлені на основі серії випробувань деталі в натурі або досвіду експлуатації машин з деталями даного типу.

## 14.2 Розрахунок вала з урахуванням циклічних напружень

Розглянемо проміжний вал редуктора (рис. 14.2), що передає крутний момент  $M_{кр} = 1,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , який змінюється за пульсаційним циклом.

Матеріал – вуглецева сталь:

$$s_{ep} = 800 \text{ МПа}, s_T = 600 \text{ МПа}, \sigma_{-1} = 360 \text{ МПа}.$$

Діаметр вала  $d = 60 \text{ мм}$ . Розміри вала і шестерень наведені на рис. 14.2, а. Обробка вала – шліфування.

На валі є концентратор напруження – паз шпонки. Визначити коефіцієнт запасу втомної міцності.

Зобразимо розрахункову схему проміжного вала редуктора, привівши діюче навантаження до головних площин (рис. 14.2, б).

У зубчатому зачепленні від дії крутних моментів виникають окружні зусилля:

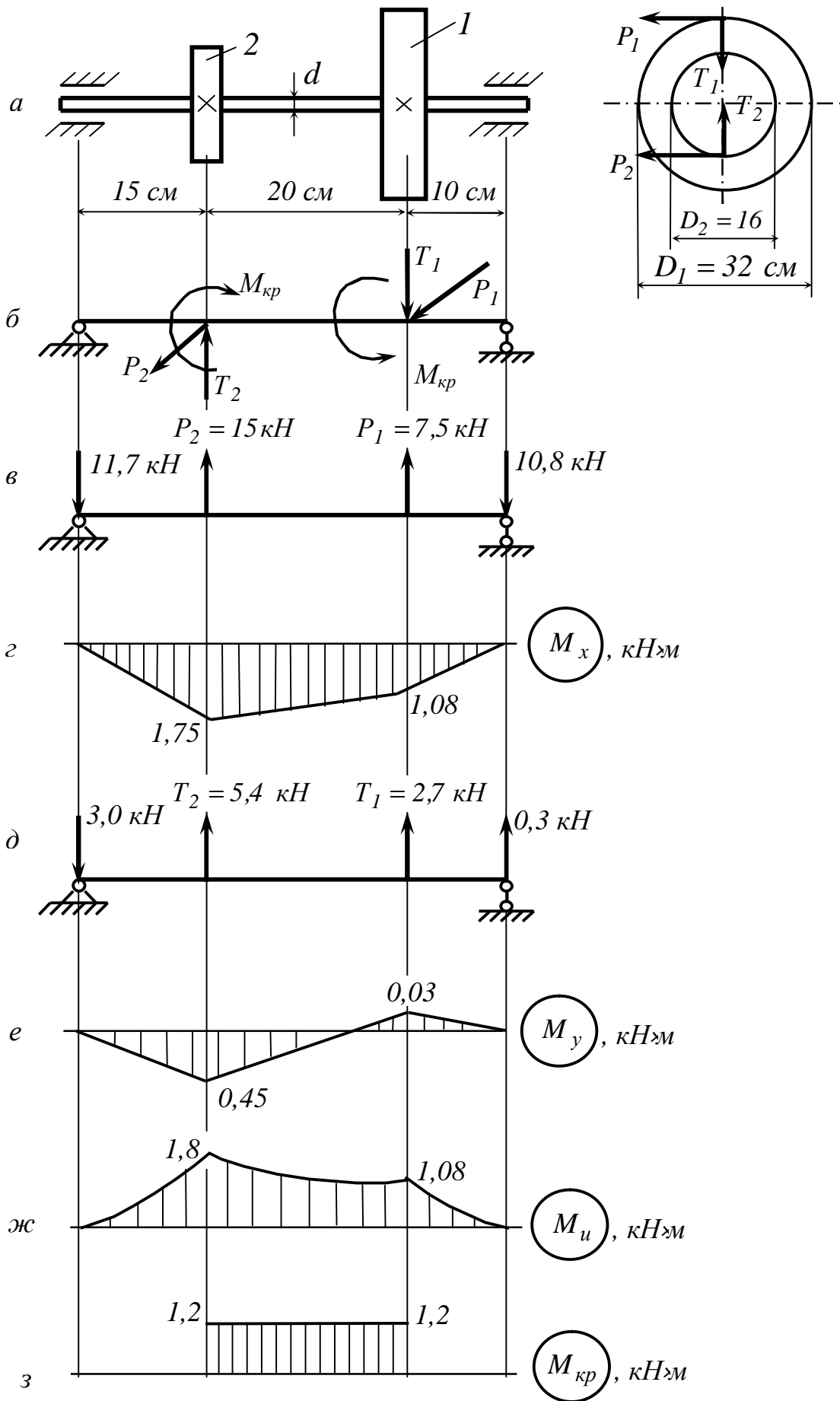


Рисунок 14.2

$$P_1 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,2}{32 \cdot 10^{-2}} = 7,5 \text{ кН} ;$$

$$P_2 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,2}{16 \cdot 10^{-2}} = 15 \text{ кН}$$

Колові зусилля діють в горизонтальній площині (рис.14.2, в).  
Радіальні зусилля визначатимемо за формулою  $T_i = 0,36 \cdot P_i$ .

$$T_1 = 0,36 \cdot 7,5 = 2,7 \text{ кН} ;$$

$$T_2 = 0,36 \cdot 15 = 5,4 \text{ кН} .$$

Зусилля  $T_1$  і  $T_2$  діють у вертикальній площині (рис.14.2, д).

Будуємо епюри згинальних моментів у вертикальній (рис.14,2 г) і горизонтальній (рис.14.2, е) площинах, а потім і сумарну епюру згинальних моментів (рис.14.2, ж).

Будуємо так само епюру крутних моментів (рис.14.2, з).

Нормальні напруження при згинанні змінюється за синусоїдальним законом (рис.14.3).

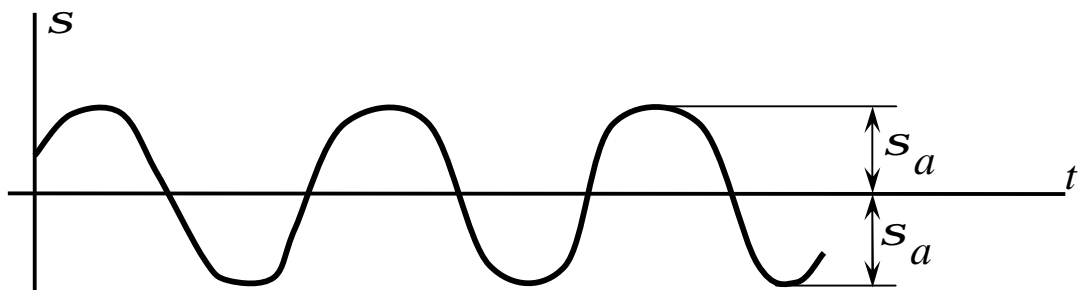


Рисунок 14.3

Визначаємо  $s_{max}$  при статичній дії згинального моменту  $M_{max}$ .

$$s_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{0,16^3 \cdot 10^{-6}} = 83,3 \text{ МПа} .$$

У нашому випадку  $s_{min} = -s_{max}$  .

За  $s_{max}$  і  $s_{min}$  визначаємо амплітудне і середнє напруження:

$$s_a = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2} = \frac{s_{\max} - (-s_{\max})}{2} = s_{\max} \quad \text{тобто } s_a = 83,3 \text{ МПа} .$$

$$s_{cp} = \frac{s_{\max} + s_{\min}}{2} = \frac{s_{\max} + (-s_{\max})}{2} = 0 .$$

Визначаємо коефіцієнт запасу міцності за нормальним напруженням

$$n_s = \frac{s_{-1}}{s_a \cdot K + s_{cp} \cdot \Psi_s} ,$$

де 
$$K = \frac{K_s}{K_{Дс}} + \frac{1}{K_F} - 1 .$$

За таблицями або графіками (див., наприклад [7]) визначаємо  $K_s$ ,  $K_{Дс}$ ,  $K_F$ .

Для паза шпони при  $s_\sigma = 800 \text{ МПа}$   $K_s = 2$ .

Для  $d=60 \text{ мм}$  при  $s_\sigma = 800 \text{ МПа}$  масштабний чинник  $K_{Дс} = 0,67$ .

При обробці вала шляхом шліфування при  $s_\sigma = 800 \text{ МПа}$ ,  $K_F = 0,9$ .

Тоді 
$$K = \frac{2}{0,67} + \frac{1}{0,9} - 1 = 3,1 .$$

Знаходимо 
$$n_s = \frac{360}{83,3 \cdot 3,1} = 1,3 .$$

Дотичні напруження міняються за пульсаційним циклом (рис.14.4).

Визначаємо  $t_{\max}$  при статичній дії крутного моменту  $M_{кр}$

$$t_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_r} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{0,2 \cdot 6^3 \cdot 10^{-6}} = 27,8 \text{ МПа} .$$

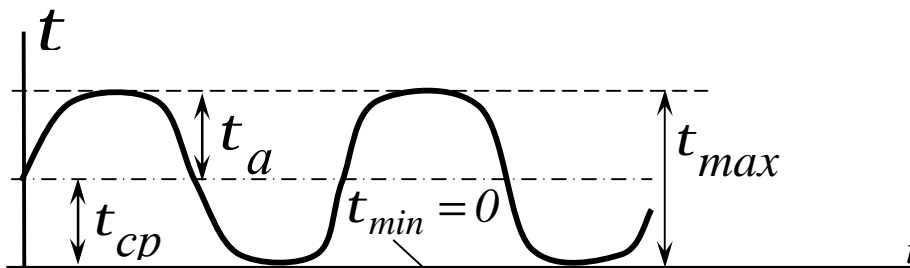


Рисунок 14.4

За  $t_{\max}$  і  $t_{\min}$  визначаємо амплітудне і середнє значення напруження.

$$t_a = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{2} = \frac{t_{\max}}{2} = \frac{27,8}{2} = 13,9 \text{ МПа} ;$$

$$t_{cp} = \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2} = \frac{t_{\max}}{2} = 13,9 \text{ МПа} .$$

Визначаємо коефіцієнт запасу міцності за дотичним напруженням

$$n_t = \frac{t_{-1}}{t_a \cdot K + t_m \cdot \Psi_t} ,$$

де 
$$K = \frac{K_t}{K_{\Delta t}} + \frac{1}{K_F} - 1 .$$

Для визначення  $K_t$ ,  $K_{\Delta t}$ ,  $K_F$  використовуємо ті ж таблиці або графіки (див., наприклад [9]), що і для нормальних напружень при згинанні, з яких знаходимо:

$$K_t = 1,9 ; \quad K_{\Delta t} = 0,67 ; \quad K_F = 0,9 ; \quad \Psi_t = 0,05 .$$

Тоді 
$$K = \frac{1,9}{0,67} + \frac{1}{0,9} - 1 = 2,9 .$$

Одержуємо 
$$n_t = \frac{0,6 \cdot 360}{13,9 \cdot 2,9 + 13,9 \cdot 0,05} = 5,2 .$$

Коефіцієнт запасу втомної міцності:

$$n = \frac{n_s \cdot n_t}{\sqrt{n_s^2 + n_t^2}} = \frac{1,3 \cdot 5,2}{\sqrt{1,3^2 + 5,2^2}} = 1,27 .$$

## 15 РОЗРАХУНКИ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ГРАНИЧНИМИ СТАНАМИ

### 15.1 Основні поняття про граничний стан. Схематизація діаграми розтягування

Усі розглянуті до цих пір питання відносилися до розрахунку елементів конструкцій в межах пружних деформацій. При цьому залежно від виду напруженого стану і прийнятої теорії міцності при таких

розрахунках найбільші нормальні, дотичні або наведені напруження в небезпечному перерізі та в небезпечній точці порівнюються з допустимими напруженнями. Якщо найбільші розрахункові напруження не перевищують допустимих, то вважається, що цим забезпечується належний запас міцності конструкцій. Такий спосіб розрахунку на міцність називається способом *розрахунку за допустимими напруженнями*.

Проте різноманіття виникаючих на практиці завдань далеко виходить за рамки, обкреслені законом Гука, і часто-густо доводиться розглядати питання, пов'язані з пластичними деформаціями тіл (набивання пружин, штампування різних виробів, сильно напружені елементи конструкцій типу оболонок ракетних двигунів і багато що інше).

Практика показує, що при появі місцевих пластичних деформацій конструкція ще може задовольняти вимогам, які висувуються до неї, і для її переходу в граничний стан потрібне подальше зростання навантаження. Насправді конструкція володіє запасом міцності більшим, ніж це визначається порівнянням допустимих напружень з критичними.

У зв'язку з вказаним недоліком методу розрахунку на міцність за допустимими напруженнями виникла необхідність в новому підході до оцінки міцності конструкцій – *розрахунку за руйнуючими навантаженнями*, при яких запас міцності розуміється як відношення руйнуючого навантаження до дійсного.

Розрізняють три види граничних станів:

1) за несучою здатністю – конструкція втрачає здатність чинити опір зовнішнім діям або одержує такі залишкові зміни, при яких вона перестає задовольняти експлуатаційним вимогам, що висувуються до неї;

2) за розвитком надмірних деформацій – в конструкції, що зберігає міцність і стійкість, з'являються такі необоротні деформації, при яких конструкція перестає задовольняти експлуатаційним вимогам, що висувуються до неї;

3) за появою і розкриттям тріщин – в конструкції, що зберігає міцність і стійкість, з'являються і розкриваються крупні тріщини, унаслідок чого подальша експлуатація конструкції стає неможливою.

Методи *розрахунків за граничними станами* широко застосовуються при проектуванні будівельних конструкцій і все більшого поширення набувають в машинобудуванні. Вони дозволяють розкрити резерви

міцності, не використовувані при розрахунку за допустимими напруженнями. Розрахунок за граничними станами дає можливість зменшити вагу конструкцій.

Для того, щоб ввести до розрахункових формул залежність, одержану з випробувань матеріалу, необхідно діаграму розтягування схематизувати (рис. 15.1).

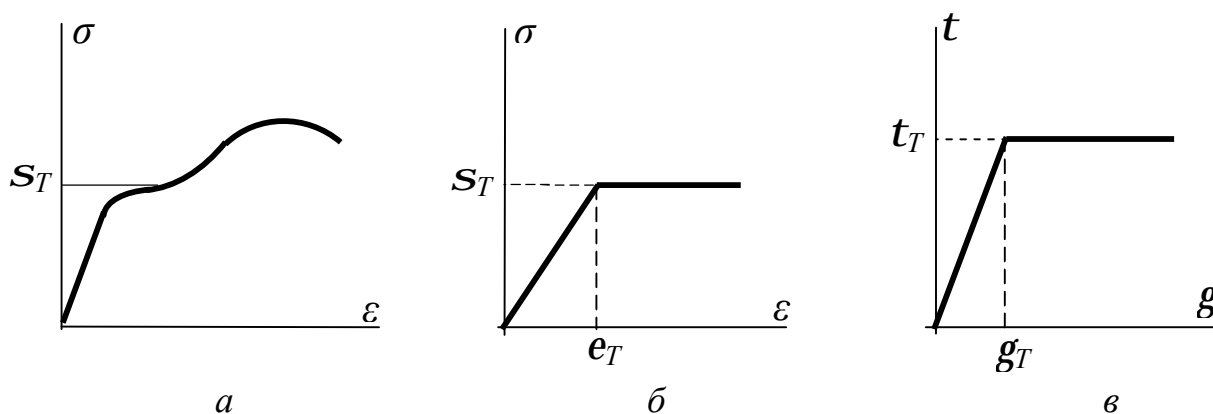


Рисунок 15.1

З метою спрощення розрахунків діаграма розтягання матеріалу (рис 15.1, а) схематизувалася таким чином, що пряма закону Гука безпосередньо сполучалася з горизонтальною прямою без плавного переходу (див. рис. 15.1, б, в).

Довжина горизонтальної ділянки діаграми не обмежується, тобто матеріал вважається таким, що не зміцнюється, ідеально пластичним. Така діаграма носить назву діаграми Прандтля.

Напруження  $s_T$  і деформації  $e_T$  (див. рис. 15.1, б) відповідають межі текучості при розтяганні, а  $t_T$  і  $g_T$  – при зсуві (див. рис. 15.1, в).

Для складного напруженого стану запропоновані різні теорії переходу матеріалу в пластичний стан. Найбільш поширена теорія пластичності **Сен-Венана**, згідно з якою пластичний стан матеріалу при складному напруженому стані наступає тоді, коли найбільші дотичні напруження досягають граничного значення – межі текучості при зсуві  $t_{\max} = t_T$ .

## 15.2 Розрахунки при розтяганні та стисканні

При розтяганні та стисканні напруження розподіляється рівномірно на площі поперечного перерізу стрижня. Тому розрахунок на міцність статично визначних систем за допустимими напруженнями і граничним станом дає один і той же результат.

**Приклад 1.** Визначити запас міцності двох стрижневої підвіски, навантаженої силою  $P$  (рис. 15.2).

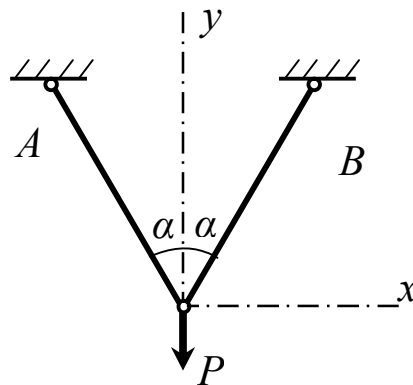


Рисунок 15.2

а) Розрахунок за допустимими напруженнями  
З рівняння рівноваги

$$\Sigma Y = 0; (N_1 + N_2) \cos \alpha - P = 0,$$

вважаючи, що  $N_1 = N_2 = N$ , знаходимо

$$N = \frac{P}{2 \cos \alpha}.$$

Тоді

$$s = \frac{N}{F} = \frac{P}{2F \cos \alpha}.$$

Запас міцності за допустимими напруженнями

$$n_T = \frac{s_T}{s} = \frac{s_m \cdot 2 \cos \alpha F}{P}. \quad (15.1)$$

б) Розрахунок за граничним станом (припускаємо, що напруження в перерізі досягли  $\sigma_T$ ):

$$P_{zp} = s_T \cdot 2 \cos a ,$$

$$n_{zp} = \frac{P_{zp}}{P} = \frac{s_T \cdot 2 \cos a F}{P} . \quad (15.2)$$

Порівнюючи формули (15.1) і (15.2), можна дійти висновку, що запас міцності при розрахунку двох стрижневої (статично визначуваної) системи за допустимими напруженнями  $n_T$  рівний запасу міцності при розрахунку за граничним станом  $n_{zp}$ :

$$n_T = n_{zp} .$$

**Приклад 2.** Визначити запас міцності три стрижневої підвіски, навантаженої силою  $P$  (рис. 15.3).

Площі поперечних перерізів стрижнів однакові ( $F_1 = F_2 = F_3 = F$ ).

Матеріал пластичний з межею текучості  $\sigma_T$ .

1) Розрахунок за допустимими напруженнями

а)  $S = 1$

б)  $\sum X = 0$ ;  $-N_1 \sin a + N_2 \sin a = 0$ , звідки  $N_1 = N_2$ ;

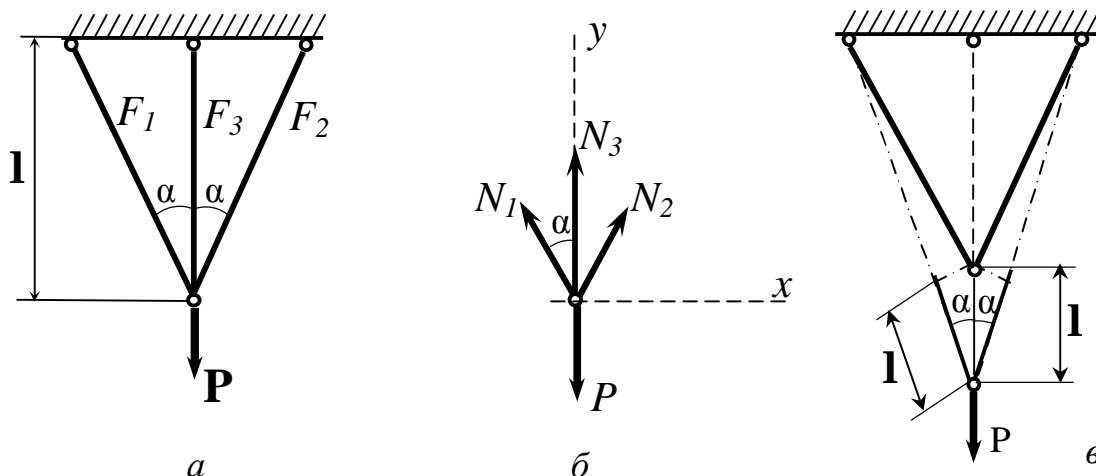


Рисунок 15.3

$$\sum Y = 0; N_3 - P + N_2 \cos a + N_1 \cos a = 0 .$$

$$в) \Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 \cos a.$$

$$\frac{N_1 l_1}{EF} = \frac{N_3 l_3}{EF} \cos a.$$

Оскільки  $l_3 = l_1 \cos a$ , то  $N_1 = N_3 \cos^2 a$ .

Тоді з рівняння (15.1) знаходимо:

$$N_3 = \frac{1}{1 + 2 \cos^3 a} P, \quad N_1 = \frac{\cos^2 a}{1 + 2 \cos^3 a} P = N_2.$$

З останніх формул видно, що завжди  $N_3 > N_1 = N_2$ , тобто більше зусилля виникає в середньому стрижні.

Отже, в середньому стрижні будуть і найбільші напруження.

$$s_3 = \frac{N_3}{F} = \frac{1}{1 + 2 \cos^3 a} \cdot \frac{P}{F}.$$

Запас міцності за допустимими напруженнями дорівнюватиме

$$n_T = \frac{s_T}{s} = \frac{s_m (1 + 2 \cos^3 a) F}{P}. \quad (15.3)$$

## 2) Розрахунок за граничним станом

Граничний стан конструкції характеризуватиметься вичерпанням несучої здатності, яке наступить тоді, коли у всіх стрижнях напруження досягнуть межі текучості. Знайдемо граничне навантаження для конструкцій.

Оскільки напруження в стрижнях при пружній їх роботі неоднакові, вони досягнуть межі текучості не одночасно у всіх стрижнях. Спочатку наступить пластична деформація в середньому стрижні. Зусилля в ньому дорівнюватиме

$$N_3 = s_T F.$$

Після появи пластичної течії в середньому стрижні конструкція ще здатна сприймати зростаюче навантаження. При цьому зусилля в середньому стрижні залишається постійним. Конструкція перетворюється на статично визначувану, і зусилля  $N_1$  і  $N_2$  визначаються з умови рівноваги вузла.

$$N_1 = N_2 = \frac{P - s_T F}{2 \cos a}.$$

Вичерпання несучої здатності конструкції наступить, коли і в крайніх стрижнях напруження досягнуть межі текучості. Відповідне цьому моменту навантаження дорівнюватиме

$$P_{zp} = s_T F + 2s_T F \cos a = (1 + 2 \cos a) s_T F.$$

Запас міцності при розрахунку за граничним станом:

$$n_{zp} = \frac{P_{zp}}{P} = \frac{(1 + 2 \cos a) s_T F}{P}. \quad (15.4)$$

Порівнюючи формули (15.3) і (15.4), можна дійти висновку, що  $n_{zp} > n_T$ .

Наприклад, при  $\alpha = 30^\circ$   $\frac{n_{zp}}{n_T} = 1,19$ , тобто конструкція має прихований запас міцності який дорівнює майже 20%.

### 15.3 Розрахунки при крученні

При крученні стрижнів круглого поперечного перерізу дотичні напруження в пружній області в довільній точці перерізу (рис.15.4) визначаються за формулою  $t = \frac{M_{кр}}{I_r} r$ .

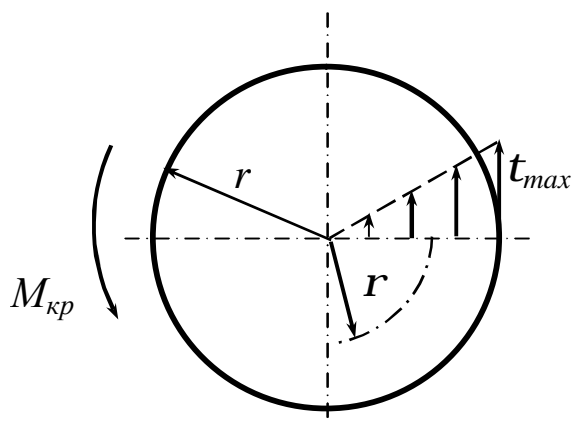


Рисунок 15.4

Максимальні напруження (див. рис. 15.4) в найбільш віддалених від осі точках рівні:

$$t_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_r}. \quad (15.5)$$

При збільшенні крутного моменту пластичні деформації з'являються не відразу по всьому поперечному перерізу. Через зростання крутного моменту вони розповсюджуються від найбільш видалених точок до осі стрижня. Тому розрахунок на міцність за напруженнями в найбільш небезпечних точках і за граничним станом дає різні результати навіть в статично визначуваних системах. При розгляді кручення в пластичній області припустимо, що залежність між дотичними напруженнями і відносним зсувом для матеріалу відповідає діаграмі, що ідеалізується, з необмеженою горизонтальною ділянкою (див. рис. 15.1, в).

При деякому значенні крутного моменту, коли найбільші дотичні напруження  $t_{\max}$  в найбільш віддалених точках перерізу досягнуть межі текучості, крутний момент (позначимо його через  $M_{\text{сп}}$ ) досягне свого граничного значення і дорівнюватиме  $M_{\text{сп}} = t_r W_p$ . При цьому стрижень збереже здатність сприймати зростаючий крутний момент унаслідок можливого зростання напружень в усіх точках, які лежать ближче до осі.

Із зростанням крутного моменту пластичні деформації спочатку з'являться поблизу поверхні в найбільш віддалених точках, а далі із збільшенням зовнішнього навантаження вони поступово переміщатимуться в напрямку осі стрижня (рис. 15.5, а).

З подальшим збільшенням  $M_{\text{кр}}$  зростання напружень припиняється в тих точках, в яких вони досягли межі текучості, в решті точок перерізу, утворюючих так зване *пружне ядро*, напруження зростає (на рис. 15.5, а пружне ядро має радіус  $r_1$ ).

Коли пластична зона охопить весь переріз (див. рис 15.5, б), несуча здатність стрижня буде вичерпана, оскільки він далі закручуватиметься без збільшення крутного моменту.

Визначимо значення граничного крутного моменту, відповідного вичерпанню несучої здатності стрижня.

Виділимо в перерізі стрижня елементарну площадку у вигляді кільця шириною  $dr$  (див. рис. 15.5, в).

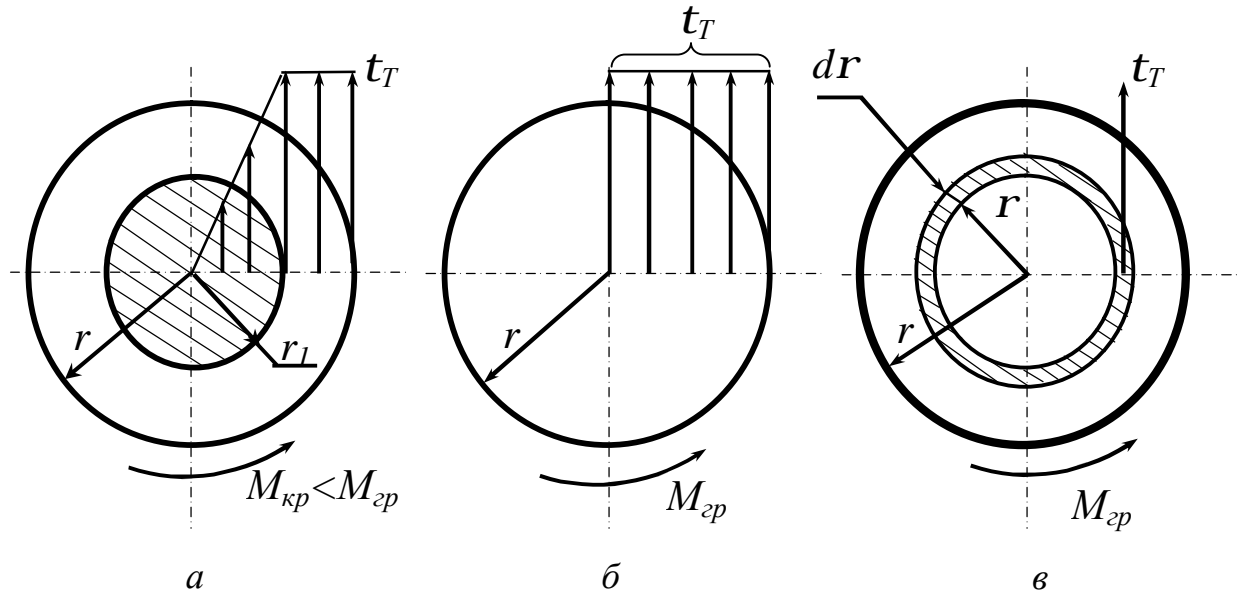


Рисунок 15.5

Елементарний момент від напруження  $t_T$  на площадці відносно осі стрижня рівний

$$dM_{np} = t_T 2p r dr \cdot r.$$

Крутний момент у всьому перерізі рівний

$$M_{np} = t_T 2p \int_0^{\frac{d}{2}} r^2 dr = 2t_T \frac{r^3}{3} \Big|_0^{\frac{d}{2}}.$$

Одержуємо

$$M_{np} = t_T \frac{pd^3}{12}. \quad (15.6)$$

З введенням геометричної характеристики

$$W_{k(nл)} = \frac{pd^3}{12}.$$

Вираз (15.5) набуде вигляду

$$M_{np} = t_T W_{k(nл)},$$

де  $W_{k(nл)}$  – пластичний момент опору перерізу при крученні.

Знайдемо відношення  $M_{zp}$  і моменту  $M_T$ , при якому вперше виникне напруження текучості:

$$\frac{M_{np}}{M_T} = \frac{W_{\kappa(nl)}}{W_T} = \frac{pd^3/12}{pd^3/16} = \frac{4}{3}.$$

Отже 
$$M_{cp} = \frac{4}{3}M_T = 1,33M_T.$$

З останнього видно, що після початкового виникнення пластичних деформацій в перерізі несуча здатність вала може зрости ще на третину при збільшенні крутного моменту. Такий прихований запас міцності круглого стрижня виявляється при переході від розрахунку за допустимими напруженнями до розрахунку за граничним станом.

#### 15.4 Розрахунки при плоскому згинанні

При згинанні, як і при крученні в пружній стадії роботи в поперечних перерізах нормальні напруження розподіляються нерівномірно, змінюючись за висотою перерізу за лінійним законом (рис 15.6, а), і визначаються за формулою

$$s = \frac{M}{J} y.$$

Найбільші напруження 
$$s_{\max} = \frac{M}{W_{oc}}.$$

При розрахунку за допустимими напруженнями, запас міцності визначається за формулою  $n_T = \frac{s_T}{s_{\max}}$ , тобто за небезпечний стан балки береться її стан, відповідний досягненню найбільшими нормальними напруженнями в небезпечних перерізах межі текучості. Такий стан лише умовно можна вважати небезпечним. Балка зберігає здатність сприймати згинаючий момент, що збільшується.

Розглянемо симетричний переріз. До повного вичерпання несучої здатності балки в її поперечних перерізах будуть дві зони (див. рис 15.6, б) – пружна та пластична.

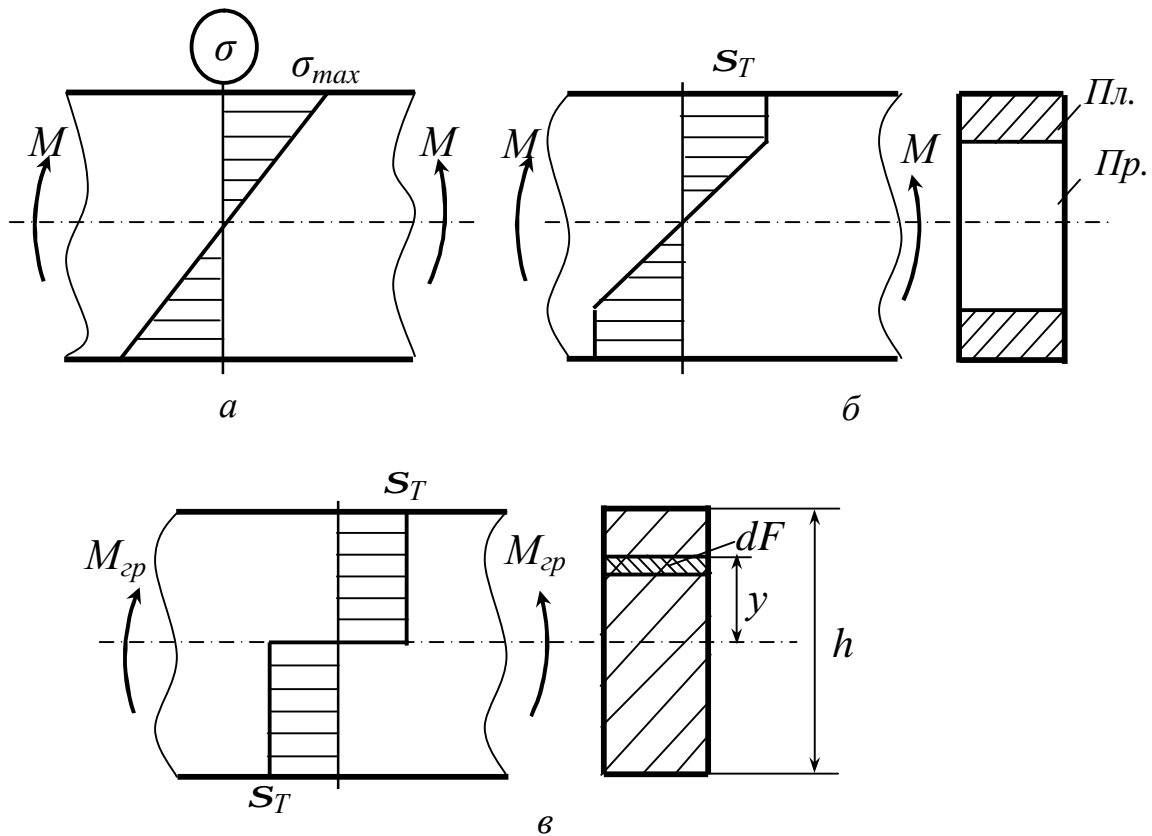


Рисунок 15.6

Граничний стан настане тоді, коли текучість розповсюдиться по всьому перерізу, оскільки після цього подальша деформація балки відбуватиметься без збільшення згинального моменту. У даному поперечному перерізі утворюється так званий пластичний шарнір, який передає постійний момент, рівний граничному згинальному моменту:

$$M_{np} = \int_F s_T y dF = 2s_T \int_{\frac{F}{2}} y dF = s_T 2S_{max} \quad (15.6)$$

де  $S_{max}$  – статичний момент площі половини поперечного перерізу щодо нейтральної осі.

Величину  $2S_{max}$  прийнято називати *пластичним моментом опору* ( $W_{nl}$ ), і тоді формула (15.6) набуде вигляду

$$M_{зр} = s_T W_{nl} .$$

Для прямокутного поперечного перерізу

$$W_{nz} = \frac{bh^2}{4},$$

де  $b$  і  $h$  – відповідно, ширина та висота прямокутника.

Якщо переріз балки має одну вісь симетрії в площині навантаження (рис.15.7), то в граничному стані нейтральна вісь не проходить через центр ваги поперечного перерізу. Положення нейтральної осі визначається з суми проекції на вісь балки всіх подовжніх сил  $S_T dF$ , розподілених за її перерізом, яка дорівнює нулю:

$$N = \int_F S_T dF = \int_{F_1} S_T dF + \int_{F_2} (-S_T) dF = 0, \quad (15.7)$$

де  $F_1$  і  $F_2$  – площі, відповідно, розтягнутої й стиснутої зон перерізу.

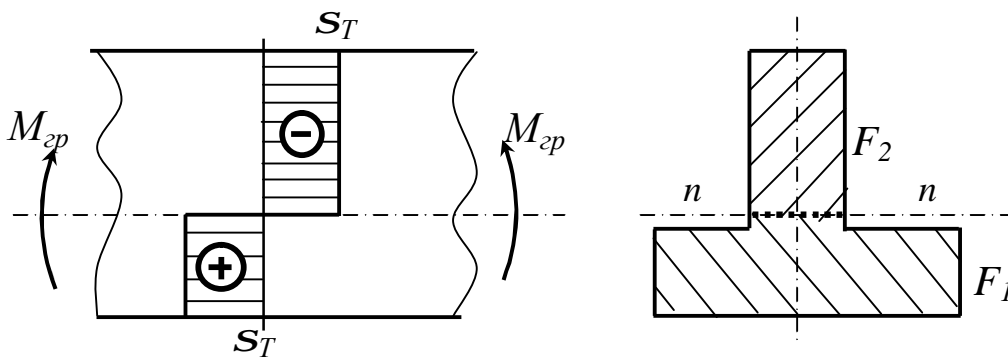


Рисунок 15.7

З рівняння (15.7) знаходимо, що

$$F_1 - F_2 = 0 \quad \text{або} \quad F_1 = F_2.$$

Отже, в граничному стані нейтральна лінія  $n-n$  перерізу повинна поділити його площу навпіл (див. рис. 15.7).

Граничний згинальний момент знайдемо, інтегруючи рівняння рівноваги

$$M_{zp} = \int_F S_T y dF = \int_{F_1} S_T y dF + \int_{F_2} (-S_T)(-y) dF = S_T (S_1 + S_2) = S_T (S_p + S_c),$$

де  $S_p$  і  $S_c$  – статичні моменти відповідно розтягнутої і стиснутої зон перерізу щодо нейтральної осі.

$$W_{nl} = S_p + S_c \cdot$$

Небезпечна величина моменту при розрахунку за допустимими напруженнями:

$$M_T = \sigma_T W_{oc},$$

де  $W_{oc}$  – осьовий момент опору перетину.

Тоді відношення

$$\frac{M_{np}}{M_T} = \frac{W_{nl}}{W_{oc}}$$

характеризує ступінь збільшення запасу міцності балки при переході до розрахунку за граничним станом.

У разі балки прямокутного перерізу

$$\frac{W_{nl}}{W_{oc}} = \frac{bh^2/4}{bh^2/6} = 1,5.$$

Для двотаврових прокатних балок в середньому

$$\frac{W_{nl}}{W} = 1,18.$$

Таким чином, прихований запас міцності при згинанні, який виявляється при переході від розрахунку за допустимими напруженнями до розрахунку за граничним станом, може досягати 50%, а в розрахунках статично невизначуваних системах ще більше.

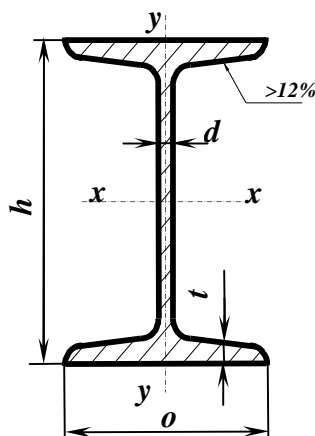
## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1 **Феодосьев, В.И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов /В.И. Феодосьев – М.: Наука, 1998. – 612 с.
- 2 Сопротивление материалов: учебник для вузов /Г.С.Писаренко и др. – К.: Высшая школа, 1997. – 773 с.
- 3 Опір матеріалів: підручник для вузів: /Г.С.Писаренко та ін. – К.: Вища школа, 2004. – 656 с.
- 4 **Дарков, А.В.** Сопротивление материалов: учебник для вузов /А.В.Дарков – М.: Высшая. школа., 1989. – 624 с.
- 5 **Беляев, Н.М.** Сборник задач по сопротивлению материалов: /Н.М. Беляев – М.: Наука, 1976. – 670 с.
- 6 Сборник задач по сопротивлению материалов: / В.К. Качурин и др.– М.: Наука, 1970. – 432 с.
- 7 Справочник по сопротивлению материалов/ Г.С.Писаренко и др. Киев.: Наукова думка. 1988. – 704 с.
- 8 **Ободовский, Б.А.** Пособие по сопротивлению материалов в примерах и задачах / Б.А. Ободовский – Харьков: ХГУ, 1987. – 383 с.
- 9 **Афанасьев, А.М.** Лабораторные работы по сопротивлению материалов/ А.М.Афанасьев, В.А.Марьин. – М.: Наука.1975. – 284 с.
- 10 Методичні вказівки до розрахунково-графічних завдань №1-3 з дисципліни “Опір матеріалів” (для студентів денної форми навчання усіх механічних спеціальностей) / укл.: В.А.Овчаренко, Т.П. Зінченко – Краматорськ: ДДМА, 1999. – 44 с.
- 11 Методические указания к контрольным работам №1 и №2 по дисциплине «Сопротивление материалов» (для студентов заочной формы обучения всех механических специальностей) / сост. В.А. Овчаренко – Краматорск: ДГМА, 2006. – .60.с.
- 12 Методические указания к контрольным работам №3 и №4 по дисциплине «Сопротивление материалов» (для студентов заочной

- формы обучения всех механических специальностей)/ сост.: В.А.Овчаренко , Н.А. Соломин – Краматорск: ДГМА, 2007. – 48.с.
- 13 Методические указания к контрольным работам по дисциплине «Соппротивление материалов» (для студентов заочной формы обучения специальности «Информационные технологии проектирования») / сост. В.А. Овчаренко – Краматорск: ДГМА, 2004. – 56 с.
  - 14 Методичні вказівки до розрахунково-графічних завдань з дисципліни “Опір матеріалів” (для студентів денної форми навчання спеціальності “Інформаційні технології проектування”)/ укл. В.А.Овчаренко – Краматорськ: ДДМА, 2000. – 44 с.
  - 15 Методические указания к курсовым расчетно-графическим работам по дисциплине “Соппротивление материалов”. Задания 4-6/ сост.: Н.А.Соломин , А.Ю. Деньщиков – Краматорск: ДГМА, 2004. – 56 с.
  - 16 Методические указания к выполнению расчетно-графической работы “Определение внутренних усилий в балках” по дисциплине “Соппротивление материалов”/ сост.: Ю.С. Холодняк, Л.В. Кутовой – Краматорск: ДГМА, 2005. – 28 с.
  - 17 Соппротивление материалов. Конспект лекций. Ч. I / укл.: Л.В. Кутовой ,Т.П. Зинченко , В.А. Овчаренко – Краматорск: ДДМА, 2004. – 176с.
  - 18 Соппротивление материалов. Конспект лекций. Ч. II / укл.: Л.В. Кутовой , Т.П. Зинченко , В.А. Овчаренко – Краматорск 2005. – 176 с.
  - 19 Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Опір матеріалів» Розділ: «Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок» /укл.. Л.В. Кутовий, Ю.С. Холодняк. – Краматорськ: ДДМА, 2004. – 24 с.
  - 20 Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Опір матеріалів» Розділ: «Побудова епюр внутрішніх зусиль для рам» /укл.: Л.В. Кутовий, Ю.С. Холодняк. – Краматорськ: ДДМА, 2005. – 24 с.

- 21 Методичні вказівки щодо підготовки до екзаменів з дисципліни «Опір матеріалів» / укл. В.А. Овчаренко. – Краматорськ: ДДМА, 2004. – 20 с.
- 22 Овчаренко, В.А. Самостійна робота студентів з дисципліни «Опір матеріалів»: навчальний посібник /В.А.Овчаренко, Л.В. Кутовий, М.О. Соломін, О.Ю. Деньщиков. – Краматорськ: ДДМА 2004. – 208 с. – ISBN 966-7851-27-3
- 23 Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів»: навчальний посібник /Л.В. Кутовий, В.А. Овчаренко, Ю.С. Холодняк, М.О. Соломін, О.Ю. Деньщиков. – Краматорськ: ДДМА, 2007. – 228 с. – ISBN 978-966-379-156-2.

## Додаток А



### ДВОТАВРИ сталеві гарячекатані (по ГОСТ 8239-89)

*Приклад позначення  
Двутавр 30 ГОСТ 8239-89*

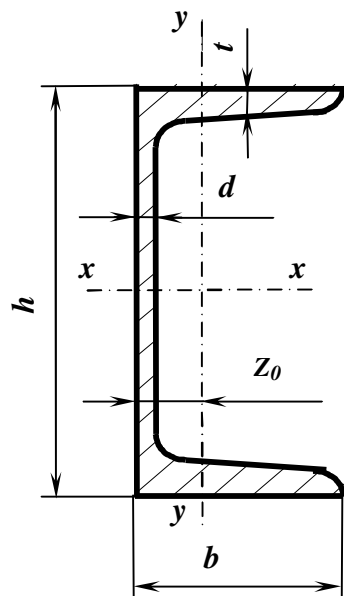
Таблиця А.1

Номер профілю	Розмір, мм				$F$ см <sup>2</sup>	$J_X$ см <sup>4</sup>	$W_X$ см <sup>3</sup>	$i_X$ см	$S_X$ см <sup>3</sup>	$J_Y$ см <sup>4</sup>	$W_Y$ см <sup>3</sup>	$i_Y$ см
	$h$	$b$	$d$	$t$								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Нормальні лінійні розміри, мм (за ГОСТ 6636-69)

1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6
4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0	10	11	12	14
16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56
63	71	80	90	100	110	125	140	160	180	200	220
250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900

## Додаток Б



### ШВЕЛЕРИ сталеві гарячекатані ( по ГОСТ 8240-97 або ДСТУ 3436-96)

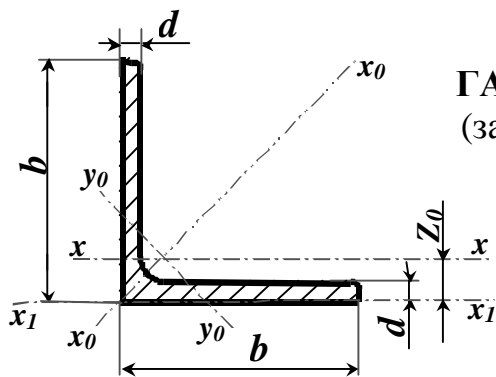
Приклад позначення:  
**Швелер 30 ГОСТ 8240-97**

Таблиця Б.1

Номер профілю	Розмір, мм				$F$ см <sup>2</sup>	$J_X$ см <sup>4</sup>	$W_X$ см <sup>3</sup>	$i_X$ см	$S_X$ см <sup>3</sup>	$J_Y$ см <sup>4</sup>	$W_Y$ см <sup>3</sup>	$i_Y$ см	$Z_0$ см
	$h$	$b$	$d$	$t$									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

## Додаток В

### КУТИКИ СТАЛЄВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ РІВНОСМУЖНІ (за ГОСТ 8509-93 або ДСТУ2251-93)



*Приклад позначення:*

**Куттик 50x50x3 ГОСТ 8509-93**

Таблиця В.1

Номер куттика	Розмір мм		$F$ см <sup>2</sup>	$I_x$ см <sup>4</sup>	$i_x$ см	$I_{x_0}$ маx см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ маx см	$I_{y_0}$ min см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ min см	$z_0$ см
	$b$	$d$								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
		5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
		6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18

Продовження таблиці В.1

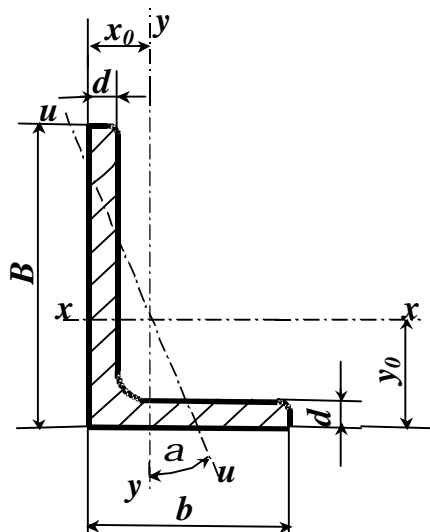
Номер кутика	Розмір, мм		$F$ см <sup>2</sup>	$I_x$ см <sup>4</sup>	$i_x$ см	$I_{x0}$ max см <sup>4</sup>	$i_{x0}$ max см	$I_{y0}$ min см <sup>4</sup>	$i_{y0}$ min см	$z_0$ см
	$b$	$d$								
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	8117	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31

## Додаток Г

### КУТИКИ СТАЛЕВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ НЕРІВНОСМУЖНІ (за ГОСТ 8510-93)

Приклад позначення:

**Кутик 50x32x3 ГОСТ 8510-93**



Таблиця Г.1

Номер кутика	Розмір, мм			$F$ см <sup>2</sup>	$I_x$ см <sup>4</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$I_u$ мин см <sup>4</sup>	$i_u$ мин см	$x_0$ см	$y_0$ см	Кут нахилу осі $u$ , $\text{tg } \alpha$
	$B$	$b$	$d$								
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392
3/2	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	0,54	1,04	0,421
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382
			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385
			4	2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
			5	3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	0,66	1,41	0,374
4/3	40	39	4	2,67	4,18	2,01	1,09	0,64	0,78	1,28	0,544
			5	3,28	5,04	2,41	1,33	0,64	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382
			4	2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403
			4	3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
			5	4,41	13,8	4,48	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
			5	4,98	19,9	6,26	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6	5,90	23,3	7,28	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8	7,68	29,6	9,15	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	23,41	12,08	6,41	1,07	1,26	2,00	0,576
			6	6,60	27,46	14,12	7,52	1,07	1,30	2,04	0,575
			7	7,62	31,32	16,05	8,60	1,06	1,34	2,08	0,571
			8	8,62	35,00	18,88	9,65	1,06	1,37	2,12	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
			6	7,25	40,92	14,60	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			7	8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	1,25	2,48	0,435
			8	9,47	52,38	18,52	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430

Продовження таблиці Г.1

Номер кутика	Розмір, мм			$F$ см <sup>2</sup>	$I_x$ см <sup>4</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$I_u$ min см <sup>4</sup>	$i_u$ min см	$x_0$ см	$y_0$ см	Кут нахилу осі $u$ , $tg \alpha$
	$B$	$b$	$d$								
8/5	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	1,09	1,13	2,60	0,387
			6	7,55	48,98	14,85	8,88	1,08	1,17	2,65	0,386
8/6	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	1,29	1,49	2,47	0,547
			7	9,42	59,61	28,74	15,58	1,29	1,53	2,52	0,546
			8	10,6	66,88	32,15	17,49	1,28	1,57	2,56	0,544
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	19,7	11,8	1,22	1,26	2,92	0,384
			6	8,54	70,6	21,2	12,7	1,22	1,28	2,95	0,384
			8	11,2	90,9	27,1	16,3	1,21	1,36	3,04	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	30,6	18,20	1,38	1,42	3,23	0,393
			7	11,1	113,0	35,0	20,83	1,37	1,46	3,28	0,392
			8	12,6	127,0	39,2	23,38	1,36	1,50	3,32	0,391
			10	15,5	154,0	47,1	28,34	1,35	1,58	3,40	0,387
10/6,5	100	65	7	11,2	114,0	38,3	22,77	1,41	1,52	3,24	0,415
			8	12,7	138,3	43,0	25,24	1,41	1,56	3,28	0,414
			10	15,7	155,5	51,7	30,60	1,40	1,64	3,37	0,410
11/7	110	70	6,5	11,4	142	45,6	26,9	1,53	1,58	3,55	0,402
			8	13,9	172	54,6	32,3	1,52	1,64	3,61	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	227	73,7	43,4	1,76	1,80	4,01	0,407
			8	16,0	256	83,0	48,8	1,75	1,84	4,05	0,406
			10	19,7	312	100,0	59,3	1,74	1,92	4,14	0,404
			12	23,4	365	117,0	69,5	1,72	2,00	4,22	0,400
14/9	140	90	8	18,0	364	120	70,3	1,98	2,03	4,49	0,411
			10	22,2	444	146	85,5	1,96	2,12	4,58	0,409
16/10	160	100	9	22,9	606	186	110	2,20	2,23	5,19	0,391
			10	25,3	667	204	121	2,19	2,28	5,23	0,390
			12	30,0	784	239	142	2,18	2,36	5,32	0,388
			14	34,7	897	272	162	2,16	2,43	5,40	0,385
18/11	180	110	10	28,3	952	276	165	2,42	2,44	5,88	0,375
			12	33,7	1123	324	194	2,40	2,52	5,97	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	446	264	2,75	2,79	6,50	0,392
			12	37,9	1568	482	285	2,74	2,83	6,54	0,392
			14	43,9	1801	551	327	2,73	2,91	6,62	0,390
			16	49,8	2026	617	367	2,72	2,99	6,71	0,388
25/16	250	160	12	48,3	3147	1032	604	3,54	3,53	7,97	0,410
			16	63,6	4091	1333	781	3,50	3,69	8,14	0,408
			18	71,1	4545	1475	896	3,49	3,77	8,23	0,407
			20	78,5	4987	1613	949	3,48	3,85	8,31	0,405

Додаток Д

КОЕФІЦІЄНТИ  $j$  ДЛЯ РІЗНИХ МАТЕРІАЛІВ

Таблиця Д.1

Гнучкість $j = \frac{m l}{i}$	Сталь Ст. 4, 3, 2	Сталь Ст5	Сталь СПК	Чавун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

## ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ЕКЗАМЕНУ

- 1 Складне та косо згинання. Визначення напружень в довільній точці поперечного перерізу. Умова міцності для стрижня з біси метричним перерізом і виступаючими кутами.
- 2 Складне та косо згинання. Визначення положення нейтральної осі для довільного поперечного перерізу. Умова міцності для стрижня з довільним поперечним перерізом.
- 3 Складне згинання з розтяганням та поза центрове розтягання. Визначення напружень в довільній точці поперечного перерізу. Умова міцності для стрижня з біси метричним перерізом і виступаючими кутами.
- 4 Позацентрове розтягання. Визначення положення нейтральної осі для стрижня з довільним поперечним перерізом. Умова міцності.
- 5 Згинання з крученням круглого вала. Послідовність розрахунку. Умова міцності.
- 6 Поняття про потенціальну енергію деформації пружної системи. Потенціальна енергія для простих видів навантаження ( розтягання, зсув, кручення, згинання ).
- 7 Потенціальна енергія для загального випадку навантаження.
- 8 Теорема Кастіліано (доказ). Послідовність визначення переміщень за її допомогою.
- 9 Визначення переміщень за допомогою інтеграла Мора
- 10 Визначення переміщень балок та рам за допомогою числових методів. Показати на прикладі.
- 11 Розрахунок статично невизначуваних систем методом сил. Основи методу сил. Послідовність розрахунку.
- 12 Канонічні рівняння метода сил. Їх фізична суть. Визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь.
- 13 Побудова епюр повздожніх, поперечних сил та згинальних моментів і контроль вірності їх побудови.
- 14 Визначення переміщень в статично невизначуваних системах.
- 15 Поняття про нерозрізні балки. Розрахунок нерозрізних балок. Вибір основної системи, канонічні рівняння, послідовність розрахунку.

- 16 Поняття про стійкість пружних систем. Види рівноваги. Визначення критичних сил для шарнірно закріпленого стрижня (формула Ейлера).
- 17 Залежність величини критичної сили від умов закріплення стрижня. Межі застосування формули Ейлера.
- 18 Поняття про втрату стійкості стрижнем при напруженнях вищих за границю пропорційності. Формула Ясинського.
- 19 Практичні розрахунки на стійкість стрижня. Коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження.
- 20 Умова міцності стиснутої стійки. Види розрахунків. Послідовність розрахунку при перевірці умови міцності стійки.
- 21 Умова міцності стиснутої стійки. Послідовність розрахунку при визначенні розмірів стійки.
- 22 Динамічний режим навантаження. Характеристики і основи рішення задачі при динамічному режимі навантаження.
- 23 Коливання. Кількість степенів вільності. Власні коливання пружної системи з одним ступенем вільності без затухань та з затуханням.
- 24 Вимушені коливання пружної системи з одним ступенем вільності з затуханням.
- 25 Визначення напружень і переміщень при вимушених коливаннях пружної системи з одним ступенем вільності з затуханням.
- 26 Розрахунок на дію ударного навантаження. Визначення коефіцієнта динамічності.
- 27 Врахування сил інерції при поступальному русі.
- 28 Визначення критичної швидкості вала.
- 29 Міцність при напруженнях, які циклічно змінюються в часі. Поняття про механізм втомленості. Характеристика циклів, види циклів.
- 30 Міцність при напруженнях, які циклічно змінюються в часі. Межа витривалості. Криві втомленості. Діаграма граничних амплітуд.
- 31 Вплив конструктивно-технологічних факторів на величину межі витривалості (концентрації напружень, розмірів деталі, якості поверхні та інше).
- 32 Розрахунки на витривалість. Визначення коефіцієнта запасу міцності.
- 33 Розрахунок конструкцій за граничним станом. Поняття про граничний стан. Види граничних станів. Діаграма для ідеального пружно-пластичного матеріалу. Розрахунки при розтяганні та стисканні.
- 34 Розрахунок конструкцій за граничним станом при крученні.
- 35 Розрахунок конструкцій за граничним станом при згинанні.

## Додаток Ж

### ПИТАННЯ ДЛЯ ЗДАЧІ МОДУЛІВ

- 1 Що таке чисте та поперечне згинання?
- 2 Як визначаються напруження при згинанні?
- 3 Який характер має епюра нормальних напружень в поперечному перерізі при згинанні?
- 4 Як визначається дотична напруження при згинання?
- 5 Який характер має епюра дотичних напружень при згинанні для круглого, прямокутного та двотаврового перерізів?
- 6 Як визначаються еквівалентні напруження за 3-ю теорією міцності при згинанні?
- 7 Яка послідовність розрахунку при повній перевірці міцності балки при згинанні?
- 8 Як визначається осьовий момент опору для прямокутника та круга?
- 9 Що таке складний опір?
- 10 Які види складного опору ви знаєте?
- 11 Що таке складне та косе згинання?
- 12 Як визначаються напруження при складному згинанні?
- 13 Як записується умова міцності при складному згинанні для бісиметричного перерізу з виступаючими кутами?
- 14 За яким законом розподіляються нормальні напруження при складному згинанні?
- 15 Як проходить нейтральна вісь при складному згинанні?
- 16 Як записується умова міцності при складному згинанні для довільного перерізу?
- 17 Що називається складним згинанням із розтяганням?
- 18 Що називається поза центровим розтяганням?
- 19 Як визначаються напруження при складному згинанні із розтяганням?
- 20 Як записується умова міцності при складному згинанні із розтяганням для бісиметричного перерізу з виступаючими кутами?
- 21 Як записується умова міцності при складному згинанні із розтяганням для стрижня з довільним перерізом?
- 22 Яка послідовність розрахунку круглого вала при згинанні з крученням?

- 23 Як записується умова міцності круглого вала при згинанні з крученням?
- 24 Як записується і формулюється теорема Кастіліано?
- 25 Що таке потенціальна енергія деформації пружної системи?
- 26 Як визначається потенціальна енергія деформації стрижня при розтяганні, крученні та згинанні?
- 27 Як визначається потенціальна енергія деформації стрижня в загальному випадку навантаження?
- 28 Як записується інтеграл Мора?
- 29 Яка послідовність визначення переміщень за допомогою інтеграла Мора?
- 30 Як записується формула крайніх ординат для визначення переміщень стрижнів?
- 31 Яка послідовність визначення переміщень стрижнів за допомогою формули крайніх ординат?
- 32 Що таке статично невизначувана система?
- 33 Як визначається ступінь статичної невизначуваності системи?
- 34 Що таке основна система?
- 35 Які вимоги ставляться при виборі основної системи ?
- 36 Як записується система канонічних рівнянь для тричі статично невизначуваної системи?
- 37 Яка фізична суть коефіцієнта  $\delta_{ik}$  ?
- 38 Яка фізична суть канонічного рівняння для статично невизначуваної системи?
- 39 Яка послідовність розрахунку статично невизначуваної системи?
- 40 Яка фізична суть добутку  $\delta_{ik} \times X_k$ ?
- 41 Що таке нерозрізна балка?
- 42 Яка основна система вибирається для нерозрізної балки? Чому?
- 43 Яка фізична суть канонічного рівняння для нерозрізної балки?
- 44 Як визначаються лінійні переміщення в статично невизначуваній системі?
- 45 Як визначаються кути повороту перерізу для статично невизначуваної системи?
- 46 Яка послідовність розрахунку нерозрізної балки?
- 47 Що таке стійкість?
- 48 Які бувають види рівноваги?

- 49 Що таке критична сила?
- 50 Яким формі та рівновазі відповідає критична сила?
- 51 Що таке критичні напруження?
- 52 Як визначаються критичні напруження через критичну силу?
- 53 Як записується формула Ейлера?
- 54 Що таке гнучкість стрижня?
- 55 Як залежить величина критичної сили від умов закріплення стрижня?
- 56 Що таке коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження? Від чого він залежить?
- 57 Як визначається критична сила для стрижнів середньої гнучкості?
- 58 Що таке динамічний режим навантаження? Чим відрізняється розрахунок при динамічному навантаженні від статичного?
- 59 Чому дорівнює частота вільних коливань без затухання системи з одним ступенем вільності?
- 60 Чому дорівнює коефіцієнт зростання коливань?
- 61 Як визначається частота вільних коливань системи з одним ступенем вільності?
- 62 Що таке резонанс?
- 63 Який вигляд мають резонансні криві для системи з одним ступенем вільності?
- 64 Як визначаються переміщення, зусилля та напруження при вимушених коливаннях системи з одним ступенем вільності?
- 65 Що таке удар?
- 66 Як визначається переміщення, зусилля та напруження при ударі?
- 67 Як визначається коефіцієнт динамічності при ударі?
- 68 Як визначається коефіцієнт динамічності при поступальному рівноприскореному русі?
- 69 Як визначається критична швидкість вала при обертання?
- 70 Що таке втомленість та витривалість?
- 71 Що таке межа витривалості?
- 72 Від яких конструктивно-технологічних факторів залежить межа витривалості?
- 73 Що таке концентрація напружень? Якими коефіцієнтами вона враховується?
- 74 Що таке характеристика циклу? Чому вона дорівнює для пульсуючого та симетричного циклів?

- 75 Що є концентратором напружень?
- 76 Як впливають розміри деталі на величину межі витривалості?
- 77 Як визначається коефіцієнт запасу міцності при змінних напруженнях?
- 78 Як враховується дія конструктивно-технологічних факторів?
- 79 Який вигляд має наближена діаграма граничних амплітуд?
- 80 Як визначається коефіцієнт запасу міцності за нормальними напруженнями при розрахунку на витривалість?
- 81 Що таке граничний стан?
- 82 Які розрахунки на граничний стан ви знаєте?
- 83 Які види мають епюри дотичних напружень при крученні за допустимим напруженням та граничним станом?
- 84 Який вигляд мають епюри нормальних напружень при згинанні за допустимими напруженнями та граничним станом?
- 85 Як визначаються коефіцієнти запасу міцності за допустимими напруженнями та критичним станом?

*Навчальне видання*

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

**з дисципліни**

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ**

(для студентів всіх механічних спеціальностей  
очної і заочної форм навчання)

**ЧАСТИНА 2**

**КУТОВИЙ Леонід Володимирович**  
**ЗІНЧЕНКО Таміла Павлівна**  
**ОВЧАРЕНКО Володимир Андрійович**

Редактор

І.І.Дьякова

Комп'ютерна верстка

О.П.Ордіна

179/2007. Підп. до друку

Формат 60x84/16.

Папір офсетний. Ум. друк. арк. 9,77.

Обл.-вид. арк. 8,43.

Тираж прим.

Зам. №

Видавець і виготівник

«Донбаська державна машинобудівна академія»

84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру  
серія ДК № 1633 від 24.12.2003