

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ  
КАФЕДРА ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ

**Ю.С. Холодняк, Л.В.Кутовий**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
до самостійної роботи студентів  
з дисципліни  
**„Опір матеріалів”.**

Розділ:  
**„Побудова епюр внутрішніх  
силових факторів для рам”**  
(для студентів усіх спеціальностей і форм навчання)

Затверджено  
на засіданні кафедри  
технічної механіки  
Протокол № від

Краматорськ 2005

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів з дисципліни „Опір матеріалів”. Розділ „Побудова епюр внутрішніх силових факторів для рам” (для студентів усіх спеціальностей і форм навчання) / Укл. Л.В.Кутовий, Ю.С.Холодняк. – Краматорськ: ДДМА, 2005. – 20 с.

Містять основні теоретичні відомості і приклади побудови епюр внутрішніх силових факторів для рам, а також завдання для самостійного розв’язання і відповіді до них.

Укладачі:

Л.В.Кутовий, доц.

Ю.С.Холодняк, доц.

Рецензент

В.А.Овчаренко, доц.

Відп. за випуск

С.В.Подлесний, доц.

## ЗМІСТ

	Вступ . . . . .	4
1	Основні теоретичні відомості . . . . .	4
2	Приклади побудови епюр . . . . .	7
3	Завдання для самостійного розв'язання . . . . .	15
4	Відповіді до завдань . . . . .	17
	Список рекомендованої літератури . . . . .	19

## ВСТУП

Розв'язання переважної більшості задач опору матеріалів потребує визначення небезпечних, найбільш навантажених перерізів стрижнів, що входять до складу різноманітних конструкцій. Для визначення таких перерізів будують епюри внутрішніх силових факторів, тобто графічне зображення характеру їх змін за довжиною стрижня.

Найбільш складна побудова епюр в разі дії на стрижень поперечних навантажень у випадку розрахунку балок або рам.

Оскільки рама містить в собі декілька стрижнів, що жорстко скріплені один з одним, засвоєння прийомів побудови епюр слід починати саме з балок, тобто окремих стрижнів, на які діють поперечні навантаження. Набутий при цьому досвід значно полегшує сприйняття прийомів побудови епюр для рам.

Метою цих методичних вказівок є створення допоміжного матеріалу, який би комплексно та в подробицях освітлював процедуру побудови епюр для рам і нагадував студентам, особливо заочної форми навчання, про можливість самостійного засвоєння даного розділу. Саме такій меті і підпорядкований зміст цих вказівок. Вони містять необхідний теоретичний матеріал, детально розібрані приклади, завдання для самостійного розв'язування, відповіді до цих завдань, за допомогою яких студент зможе проконтролювати себе і виявити зроблені ним помилки. Більш детально питання побудови епюр можна знайти у підручниках [1] - [4].

## 1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Правила побудови епюр внутрішніх зусиль для балок та рам в основному однакові і детально викладені в методичних вказівках [5].

Нагадаємо основні правила побудови епюр.

В разі дії зовнішніх навантажень у будь-якому перерізі балки чи рами в загальному випадку можуть виникнути поздовжня сила  $N$ , поперечна сила  $Q$  і згинальний момент  $M$ , значення яких можна знайти за наступними правилами.

*Поздовжня сила  $N$  дорівнює сумі проекцій на вісь стрижня усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.*

*Поперечна сила  $Q$  дорівнює сумі проекцій на перпендикуляр усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.*

*Згинальний момент  $M$  дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від розглядаємого перерізу щодо центра ваги цього перетину.*

Будемо використовувати наступні правила знаків для  $N$ ,  $Q$  й  $M$ , які є однакові для балок та рам.

Поздовжня сила  $N$  вважається додатною, якщо вона визиває розтягання стрижня.

Поперечна сила  $Q$  в перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила намагається повернути розглядаємий переріз за напрямком годинникової стрілки.

При побудові епюр на балках прийняте таке правило знаків що до згинального моменту [5]: “згинальний момент  $M$  у перерізі вважається додатнім, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки”. За цим правилом епюра згинальних моментів будується на верхніх волокнах, якщо згинальний момент додатний (рис. 1, а), або на нижніх – якщо згинальний момент від’ємний (рис. 1, б).

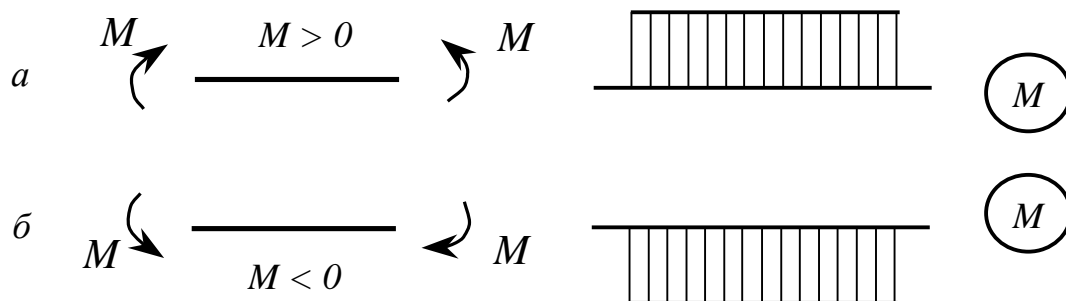


Рисунок 1

Таким чином загальне правило побудови епюри згинальних моментів  $M$  для балок та рам буде виглядати так: *епюру згинальних моментів будують на стиснутих волокнах*. Це правило може бути записано інакше: *епюра згинальних моментів будуються у тому напрямку, куди зовнішні сила чи момент загинають розглядаєму ділянку стрижня*.

Основні **правила побудови епюр** (детально див. [5]):

1 На ділянках, де немає розподіленого навантаження ( $q = 0$ ), епюри  $Q$  обмежені прямими, паралельними базової лінії, а епюри  $M$  являють собою похилені прямі, тангенси кутів нахилу яких дорівнюють  $Q$ .

2 Якщо на деякій ділянці епюри:

а)  $Q > 0$ , то епюра моментів  $M$  зростає (при побудові епюри зліва направо, тобто уздовж позитивного напрямку осі  $z$ );

б) якщо  $Q < 0$ , то епюра моментів  $M$  убиває.

3 На ділянках, де до стрижня прикладене рівномірно розподілене навантаження ( $q = const$ ), еюра поперечної сили  $Q$  окреслена похилою прямою, а еюра згинального моменту – квадратичною параболою.

Оскільки еюру  $M$  будемо на стиснутих волокнах, то опуклість параболи спрямована назустріч дії розподіленого навантаження  $q$ .

4 У перерізах, де  $Q = 0$  дотична до еюрі  $M$  паралельна базової лінії, а значення згинаючого моменту  $M$  – екстремальне. Якщо  $Q$  переходить через нуль, змінюючи знак з  $\langle\langle + \rangle\rangle$  на  $\langle\langle - \rangle\rangle$ , то  $M = M_{max}$ , а при зміні знака з  $\langle\langle - \rangle\rangle$  на  $\langle\langle + \rangle\rangle$  –  $M = M_{min}$ . Координату  $z$  перерізу, де  $Q = 0$ , зручно обчислювати за формулою

$$z = \frac{Q_l}{q} \quad \text{або} \quad z = \frac{Q_{np}}{q},$$

де  $Q_l$  та  $Q_{np}$  – значення поперечної сили відповідно до лівого або правого краю дільниці.

5 У перерізах, де до стрижня прикладені зосереджені сили на еюрі  $Q$  будуть “стрибки” на величину цих сил з урахуванням їх знаків, а на еюрі  $M$  будуть злами, вістря яких спрямовані проти напрямку зосереджених сил. При цьому слід зазначити, що при побудові еюр зліва направо напрямок “стрибка” збігається з напрямком сили.

6 У перерізах, де до стрижня прикладені зосереджені моменти, на еюрі  $M$  будуть “стрибки” на величину зовнішніх моментів з урахуванням їх знаків, причому лінії еюри  $M$  до стрибка і після нього паралельні, а на еюрі  $Q$  змін не буде. Слід, однак, відзначити, що, якщо в одному перерізі прикладені і сила, і момент, то сила викликає перелом і порушує паралельність.

Найбільш зручно будувати еюри  $N$ ,  $Q$  і  $M$  за характерними перерізами. *Характерними перерізами вважаються перерізи, у яких прикладені зосереджені сили чи зосереджені моменти, починається чи закінчується розподілене навантаження, перерізи, у яких  $Q$  дорівнює нулю, а також у місцях зміни напрямку осі стрижня чи величини його поперечного перерізу.*

Можна рекомендувати наступний порядок побудови епюр:

1 Знайти опорні реакції (для консолі реакції можна не знаходити і будувати епюру від “вільного” кінця рами, але при цьому буде неможливо здійснити перевірку правильності побудови епюр).

2 Визначити характерні перерізи.

3 Обчислити значення  $N$  в характерних перерізах.

4 Обчислити значення  $Q$  в характерних перерізах, потім “рухаючись” уздовж стрижнів (бажано зліва направо) побудувати епюру  $Q$ , використовуючи вищеописані правила.

5 Обчислити значення  $M$  в характерних перерізах. Побудувати епюру  $M$  за цими значеннями.

Перевірка правильності побудови епюр  $N$ ,  $Q$  і  $M$  зводиться до побудови епюри при “русі” у напрямку, протилежному первісному (наприклад, справа наліво). Крім цього варто звернути увагу на напрямки “стрибків” і нахилів прямих на епюрі  $M$ .

Ординати епюр, як і завжди, будемо відкладати перпендикулярно до осей стрижнів рами, що утворюють базу, контур якої збігається з контуром рами.

### 3 ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ ЕПЮР

#### Приклад розв’язання задачі 1

Для заданої рами (рис. 20) побудувати епюри поздовжніх сил  $N$ , поперечних сил  $Q$  та згинальних моментів  $M$ .

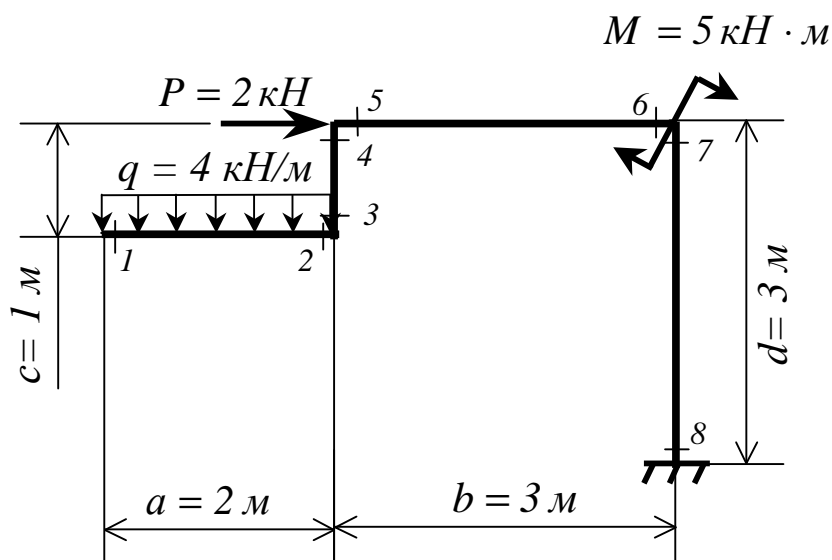


Рисунок 2 Консольна рама – задана схема

**Рішення.** Будемо будувати епюри, “рухаючись” з вільного кінця рами. Означимо на балці характерні перерізи (див. рис. 2) за правилами, які записані вище.

Визначимо поздовжні сили  $N$  в характерних перерізах.

Ділянка 1...2 розташована горизонтально, тому поздовжні сили повинні діяти також горизонтально. Таких сил в перерізах 1 та 2 немає, отже

$$N_1 = N_2 = 0.$$

Ділянка 3...4 розташована вертикально, тому сила розподіленого навантаження  $q$  працює як поздовжня сила, яка розтягає ділянку

$$N_3 = N_4 = q \cdot a = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кН}.$$

На перерізі 5 та 6 діє горизонтально розміщена сила  $P=2 \text{ кН}$ , яка стискає ділянку 5...6, тому

$$N_5 = N_6 = -P = -2 \text{ кН}.$$

Ділянка 7...8 також розташована вертикально і на неї стискаючи діє сила розподіленого навантаження

$$N_7 = N_8 = -q \cdot a = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН}.$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил  $N$ , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих точок (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 3). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючі правила, які наведені вище.

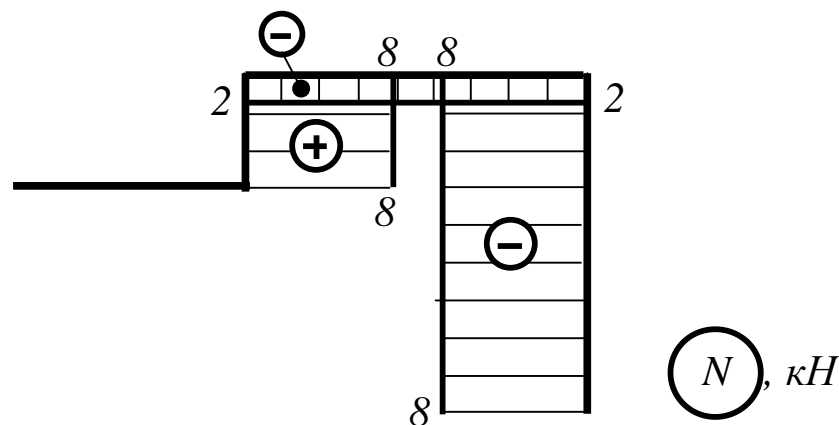


Рисунок 3 Епюра поздовжніх сил

Визначимо поперечні сили  $Q$  в характерних перерізах.

У перерізі 1 поперечною силою є розподілене навантаження, яке діє на нескінченно малому відрізку, тому

$$Q_1 = q \cdot 0 = 0.$$

У перерізі 2 розподілене навантаження поривається повернути ділянку 1...2 проти хода годинникової стрілки і поперечна сила досягає величини



$$Q_2 = -qa = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН}.$$

На ділянці 3...4, яка розташована вертикально, немає жодної горизонтально розміщеної, тобто поперечної сили, тому

$$Q_3 = Q_4 = 0.$$

У перерізах 5 та 6 поперечною силою є сила розподіленого навантаження, яка поривається повернути ділянку 5...6 проти хода годинникової стрілки

$$Q_5 = Q_6 = Q_2 = -qa = -8 \text{ кН}.$$

У перерізах 7 та 8 поперечною силою є сила  $P=2 \text{ кН}$ , яка поривається повернути ділянку 7...8 за ходом годинникової стрілки, тому

$$Q_7 = Q_8 = P = 2 \text{ кН}.$$

Побудуємо епюру поперечних сил  $Q$ , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих точок (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 4). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючі правила, які наведені вище. На ділянці 1...2, де діє розподільне навантаження інтенсивністю  $q$ , епюра  $Q$  обмежується похилою прямою (див. правило 2). На ділянках 5...6 та 7...8 розподільного навантаження немає, то (див. правило 1) епюра  $Q$  окреслюється прямими, паралельними базі.

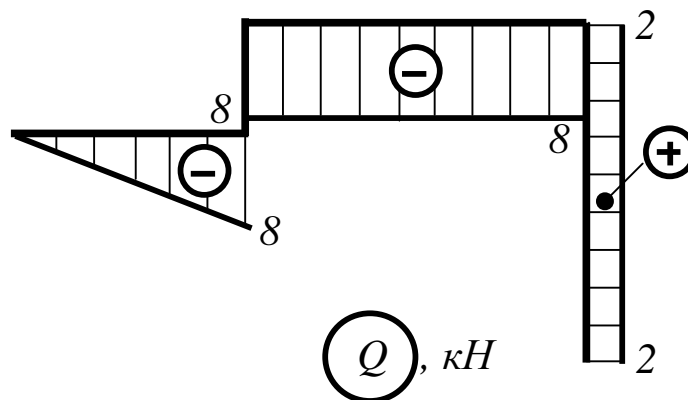


Рисунок 4 Епюра поперечних сил

Визначимо згинальні моменти  $M$  в характерних перерізах.

У перерізі 1 згинальний момент  $M$  дорівнює нулю, оскільки розподілене навантаження діє на нескінченно малому відрізку

$$M_1 = 0.$$

На 2-й переріз діє розподілене навантаження інтенсивністю  $q$ , яке загинає балку униз, тому означимо цей момент, як і в балках, позначкою “мінус”

$$M_2 = -q \cdot 2 \cdot l = -4 \cdot 2 \cdot l = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 3 діє той же момент, що і у перерізі 2, але він загинає ділянку 3...4 вправо. Будемо означати його тій же позначкою

$$M_3 = M_2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці 3...4 немає ніяких зовнішніх зусиль, тому

$$M_4 = M_3 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 5 діє той же момент, що і у перерізах 2, 3 та 4, який також загинає балку униз, тому

$$M_5 = M_4 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 6 згинальний момент дорівнює

$$M_6 = -q \cdot 2 \cdot 4 = -4 \cdot 2 \cdot 4 = -32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 7 крім згинального моменту  $M_6$ , який загинає вертикальну ділянку вліво, з'являються також зовнішній зосереджений момент  $M$ , але він діє в протилежному напрямку, тому

$$M_7 = M_6 + M = -32 + 5 = -27 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На 8-й переріз діють момент  $M$ , сила  $P$  та розподілене навантаження інтенсивністю  $q$ , тому з урахуванням їх плечей маємо

$$M_8 = -q \cdot 2 \cdot 4 + M + P \cdot 3 = -4 \cdot 2 \cdot 4 + 5 + 2 \cdot 3 = -21 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (рис. 5). При цьому треба мати на увазі, що на ділянці 1...2 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, опуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто уверх. А на всіх інших ділянках добуті точки треба з'єднувати прямими лініями.

Епюри згинальних моментів на всіх ділянках будемо будувати на стиснутих волокнах, або у тому напрямку, куди сили та момент загинають стрижні. Так на ділянках 1...2 та 5...6 стрижні загинаються униз, на ділянці 3...4 розподілене навантаження загинає вертикальний стрижень праворуч, а на ділянці 7...8 сумісна дія зовнішніх факторів ( $q$ ,  $P$ ,  $M$ ) загинає вертикальний стрижень ліворуч (див. рис. 5).

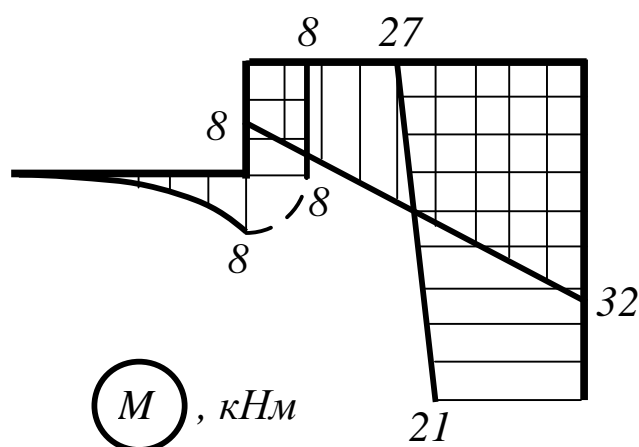


Рисунок 5 Епюра згинальних моментів

## Приклад розв'язання задачі 2

Для заданої рами (рис. 6) побудувати епюри поздовжніх сил  $N$ , поперечних сил  $Q$  та згинальних моментів  $M$ .

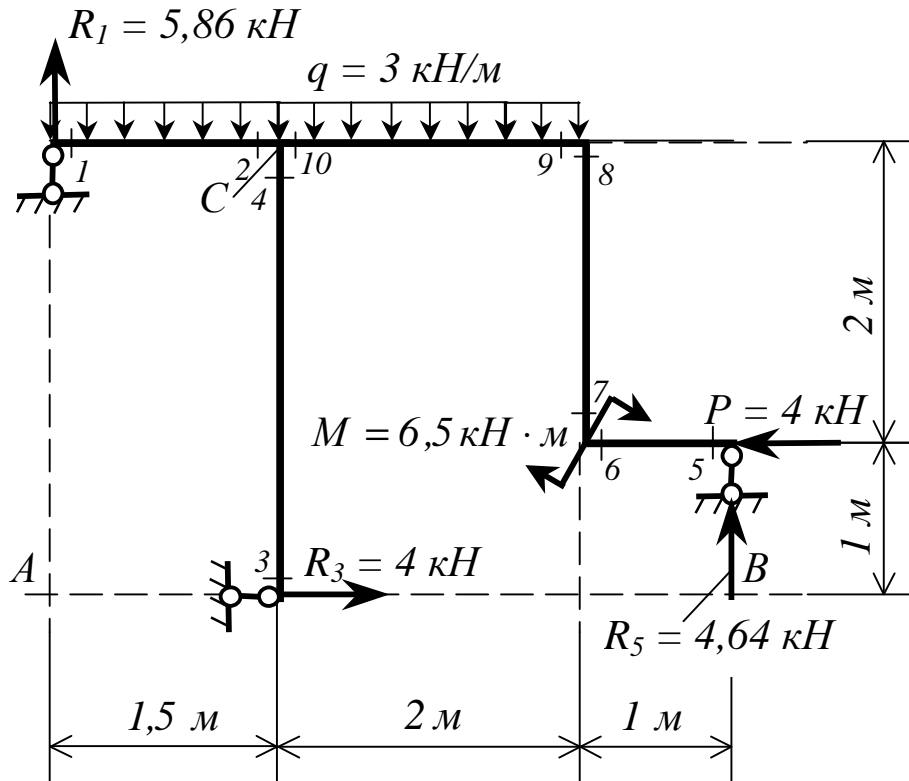


Рисунок 6 Трьохопорна рама – задана схема

**Рішення.** Задана рама опирається на три шарнірно-рухомі опори, кожна з котрих має по одній реакції.

Знайдемо опорні реакції, для чого складемо для балки рівняння рівноваги. При складанні рівнянь зручно, щоб у кожному рівнянні було лише по одній невідомій реакції. Для цього використаємо точки перетинань ліній дій реакцій.

$$\sum M_A(\bar{P}_k) = 0; \quad q \cdot 3,5 \cdot 1,75 + M - P \cdot 1 - R_5 \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_5 = \frac{3 \cdot 3,5 \cdot 1,75 + 6,5 - 4 \cdot 1}{4,5} = 4,64 \text{ кН};$$

$$\sum M_B(\bar{P}_k) = 0; \quad q \cdot 3,5 \cdot 2,75 - M + P \cdot 1 - R_1 \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_1 = \frac{3 \cdot 3,5 \cdot 2,75 - 6,5 + 4 \cdot 1}{4,5} = 5,86 \text{ кН};$$

$$\sum P_{kx} = 0; \quad R_3 - P = 0; \quad R_3 = P = 4 \text{ кН}.$$

Зробимо перевірку:  $\sum P_{ky} = 0$ ;  $R_1 - q \cdot 3,5 + R_5 = 0$ ;  
 $5,86 - 3 \cdot 3,5 + 4,64 = 10,5 - 10,5 = 0$ .

Таким чином, реакції знайдені вірно.

Означимо на балці характерні перерізи (див. рис. 6) так, щоб будувати епюру, "сходячись" к вузлу С.

Визначимо поздовжні сили  $N$  в характерних перерізах.

Ділянка 1...2 розташована горизонтально, тому поздовжні сили повинні діяти також горизонтально. Таких сил в перерізах 1 та 2 немає, отже

$$N_1 = N_2 = 0.$$

Ділянка 3...4 розташована вертикально, тому поздовжні сили повинні діяти також вертикально, але їх немає

$$N_3 = N_4 = 0.$$

На перерізи 5 та 6 діє горизонтально розміщена сила  $P=4$  кН, яка стискає ділянку 5...6, тому

$$N_5 = N_6 = -P = -4 \text{ кН}.$$

Ділянка 7...8 також розташована вертикально і на неї стискаючи діє реакції  $R_5 = 4,64$  кН, тому

$$N_7 = N_8 = -q \cdot a = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН}.$$

На ділянку 9...10 також діє горизонтально розміщена сила  $P=4$  кН, яка її стискає, тому

$$N_9 = N_{10} = -P = -4 \text{ кН}.$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил  $N$ , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих точок (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 7). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючі правила, які наведені вище.

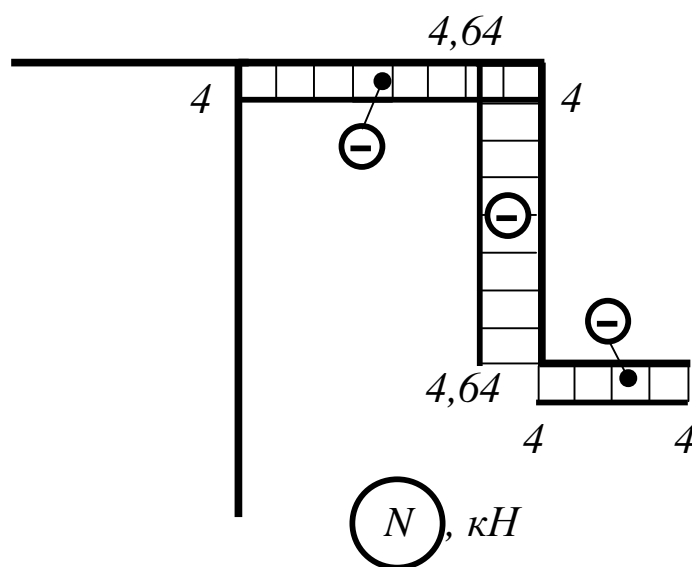


Рисунок 7 Епюра поздовжніх сил

Визначимо поперечні сили  $Q$  в характерних перерізах.

У перерізі 1 діє реакція  $R_1 = 5,86 \text{ кН}$ , яка намагається повернути відрізок рами за ходом годинникової стрілки, тобто має позначку “плюс”, тому

$$Q_1 = R_1 = 5,86 \text{ кН}.$$

У перерізі 2 завдяки розподіленому навантаженню поперечна сила зменшується до величини

$$Q_2 = R_1 - q \cdot 1,5 = 5,86 - 3 \cdot 1,5 = 1,36 \text{ кН}.$$

У перерізах 3 та 4 поперечною силою є реакція  $R_3 = 4 \text{ кН}$ , яка поривається повернути ділянку 3...4 проти хода годинникової стрілки, тому

$$Q_3 = Q_4 = -R_3 = -4 \text{ кН}.$$

На ділянці 5...6, яка розташована горизонтально, поперечною силою є реакція  $R_5 = 4,64 \text{ кН}$ , яка поривається повернути цю ділянку проти хода годинникової стрілки, тому

$$Q_5 = Q_6 = -R_5 = -4,64 \text{ кН}.$$

У перерізах 7 та 8 поперечною силою є сила  $P = 4 \text{ кН}$ , яка поривається повернути ділянку 5...6 за ходом годинникової стрілки

$$Q_7 = Q_8 = P = 4 \text{ кН}.$$

На переріз 9 діє реакція  $R_5 = 4,64 \text{ кН}$ , яка намагається повернути відрізок рами проти хода годинникової стрілки, тобто має позначку “мінус”, тому

$$Q_9 = -R_5 = -4,64 \text{ кН}.$$

У перерізі 10 ми маємо реакцію  $R_5$  та розподілене навантаження інтенсивністю  $q$ , яке поривається повернути ділянку 9...10 за ходом годинникової стрілки, тому

$$Q_{10} = -R_5 + q \cdot 2 = 4,64 - 3 \cdot 2 = 1,36 \text{ кН}.$$

Побудуємо епюру поперечних сил  $Q$ , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих точок (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 8).

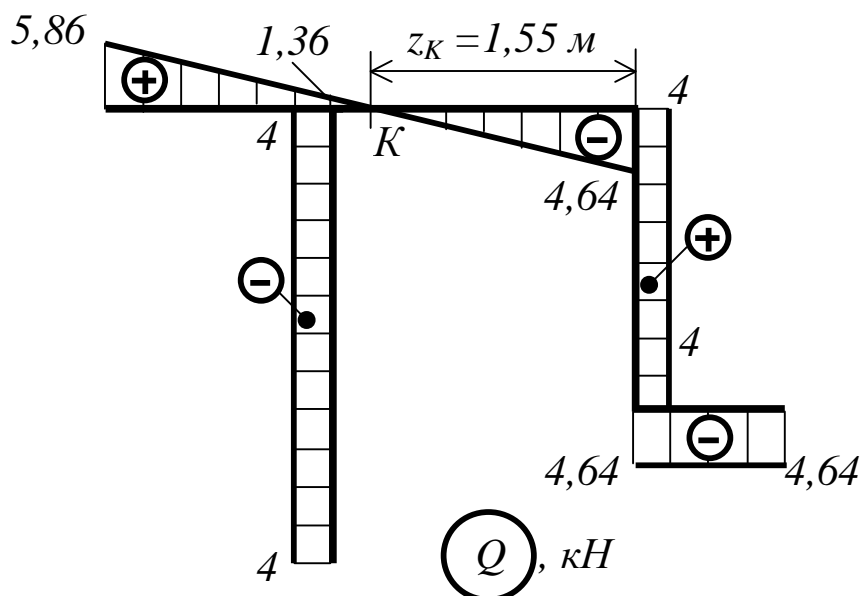


Рисунок 8 Епюра поперечних сил

З'єднаємо добуті точки (див. рис. 8) прямими лініями, враховуючі правила, які наведені вище. На ділянках 1...2 та 9...10, де діє розподільне навантаження інтенсивністю  $q$ , епюра  $Q$  обмежується похилою прямою (див. правило 2). На інших ділянках розподільного навантаження немає, тому (див. правило 1) епюра  $Q$  окреслюються прямими, паралельними базі.

Визначимо згинальні моменти  $M$  в характерних перерізах.

У перерізі 1 згинальний момент  $M$  дорівнює нулю, оскільки реакція  $R_1$  та розподілене навантаження діють на нескінченно малому відрізку

$$M_1 = 0.$$

На 2-й переріз діє розподілене навантаження інтенсивністю  $q$ , яке загинає частину рами униз, тому означимо момент від неї, як і в балках, позначкою “мінус”, а момент від реакції  $R_1$  нехай буде додатний

$$M_2 = R_1 \cdot 1,5 - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 5,86 \cdot 1,5 - 3 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 5,415 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 3 згинальний момент  $M$  дорівнює нулю, оскільки реакція  $R_3$  діє на нескінченно малому відрізку,

$$M_3 = 0,$$

а 4-м перерізі:

$$M_4 = R_3 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізах 5 та 6 будемо розмірковувати аналогічно попередньому

$$M_5 = 0; \quad M_6 = R_5 \cdot 1 = 4,64 \cdot 1 = 4,64 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 7 діє той же момент, що і у перерізі 6, який загинає вертикальний стрижень вправо (будемо означати його позначкою “плюс”), а також зовнішній момент  $M$ , який загинає вертикальний стрижень в протилежному напрямку

$$M_7 = M_6 - M = 4,64 - 6,5 = -1,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При обчислюванні згинального моменту у перерізі 8 треба враховувати всі зусилля, які діють нижче та праворуч даного перерізу, тобто силу  $P$ , реакцію  $R_5$  та момент  $M$

$$M_8 = R_5 \cdot 1 - P \cdot 2 - M = 4,64 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 6,5 = -9,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 9 діє той же момент, що і у перерізі 8, але він загинає дану частину рами униз. Будемо означати його тій же позначкою

$$M_9 = M_8 = -9,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На переріз 10 крім сили  $P$ , реакції  $R_5$  та моменту  $M$  діє також розподілене навантаження, тому знаходимо

$$M_{10} = R_5 \cdot 3 - P \cdot 2 - M - q \cdot 2 \cdot 1 = 4,64 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 6,5 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = -6,58 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці 9...10 в перерізі  $K$ , де  $Q = 0$  (див. рис.8), на епюрі  $M$  має бути екстремум. Підрахуємо значення  $z_K$  і  $M_K = M_{ЕКСТР}$ :

$$z_K = \frac{Q_9}{q} = \frac{4,64}{3} = 1,55 \text{ м};$$

$$M_K = M_{EKCTP} = R_5(1 + z_K) - P \cdot 2 - M - q \cdot \frac{z_K^2}{2} =$$

$$= 4,64 \cdot 2,55 - 4 \cdot 2 - 6,5 - 3 \cdot 1,55 \cdot 0,775 = -6,27 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (рис. 9).

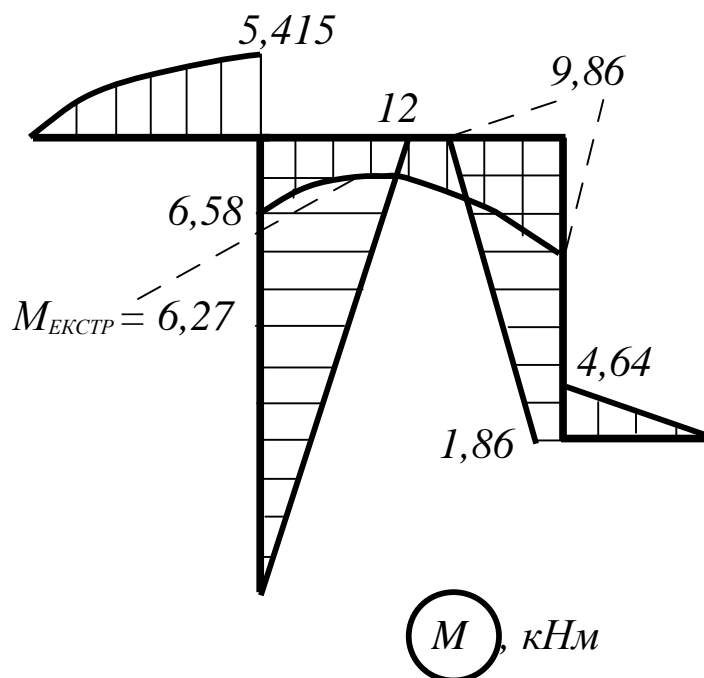


Рисунок 9 Епюра згинальних моментів

При цьому будемо мати на увазі, що епюру згинальних моментів треба будувати на стиснутих волокнах, або у напрямку, куди сила чи момент загинає ділянку стрижня.

Так на ділянці 1...2 розподілене навантаження  $q$  загинає стрижень униз (домовимось означати цей момент позначкою “мінус”), а реакція  $R_1$  – уверх (означимо момент від  $R_1$  позначкою “плюс”). Оскільки після підрахування момент  $M_2 = 5,415 \text{ кН} \cdot \text{м}$  (тобто має позначку “плюс”), то будемо відкладати епюру  $M$  уверх. При цьому треба мати на увазі, що на ділянці 1...2 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, опуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто уверх (див. рис. 9).

На ділянці 3...4 реакція  $R_3$  загинає стрижень вправо, тому епюру  $M$  будемо будувати на стиснутих волокнах, тобто праворуч (див. рис. 9). Значення моментів  $M_3 = 0$  та  $M_4 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$  з'єднаємо прямою лінією.

На ділянці 5...6 реакція  $R_5$  загинає стрижень уверх, тому епюру  $M$  будемо на верхніх (стиснутих) волокнах (див. рис. 9). Значення моментів  $M_5 = 0$  та  $M_6 = 4,64 \text{ кН} \cdot \text{м}$  з'єднаємо також прямою лінією.

Частина вертикального стрижня нижче перерізу 7 моментом від дії реакції  $R_5$  загинається праворуч (означимо момент від  $R_5$  позначкою “плюс”). Але зовнішній момент  $M$  згинає розглядаєму частину стрижня ліворуч (тобто з позначкою “мінус”). Після підрахування маємо  $M_7 = -1,86 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Таким чином ми повинні відкласти знайдене значення ліворуч (див. рис. 9). У перерізі 8 ми маємо  $M_8 = -9,86 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , тому його також відкладаємо ліворуч вертикально розміщеної базової лінії.

Ділянка 9...10 зовнішніми силами загинається униз, що підтверджується позначками “мінус” в моментах  $M_9$  та  $M_{10}$ . Тому відкладаємо епюру униз (див. рис. 9). А оскільки на ділянці 9...10 діє розподілене навантаження  $q$ , то епюра згинального моменту повинна бути окреслена параболою, опуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто уверх.

Зробимо перевірку побудови епюри  $M$ , для чого розглянемо рівновагу вузлу  $C$  (див. рис. 6) під дією моментів  $M_2$ ,  $M_4$  та  $M_{10}$ .

Виріжемо вузол  $C$  (рис. 10).

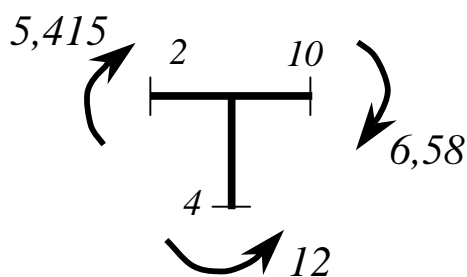


Рисунок 10 Вузол  $C$  з трьохопорної рами

Згідно з епюрою  $M$  (див. рис. 9), в перерізу 2 згинальний момент дорівнює  $M_2 = 5,415 \text{ кН} \cdot \text{м}$  і загинає переріз 2 уверх, тобто момент  $M_2$  діє за ходом годинникової стрілки (див. рис. 10). Згинальний момент у перерізі 10 загинає розглядаємий переріз униз, тобто момент  $M_{10} = 6,58 \text{ кН} \cdot \text{м}$  треба направити



також за ходом годинникової стрілки (див. рис. 10). У перерізі 4 згинальний момент  $M_4 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$  згинає ділянку вертикального стрижня праворуч (див. рис. 9), тому момент  $M_4$  діє проти хода годинникової стрілки (див. рис. 10).

Сума цих моментів дорівнює

$$M_2 + M_4 + M_{10} = 5,415 - 12 + 6,58 = -0,005 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

що співпадає з похибкою розрахунку. Тому можна вважати, що епюра згинальних моментів побудована вірно.

### **3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ**

На рисунку 9 зображені завдання для їх самостійного розв'язання студентами. Для спрощення підрахунків у всіх завданнях взяті однакові числові значення величин:  $a = b = c = 2 \text{ м}$ ;  $P = 12 \text{ кН}$ ;  $q = 8 \text{ кН/м}$ ;  $M = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Завдання розташовані таким чином, щоб надати студентам можливість поступово ускладнювати розрахункові схеми, пересуваючись від першого завдання до останнього.

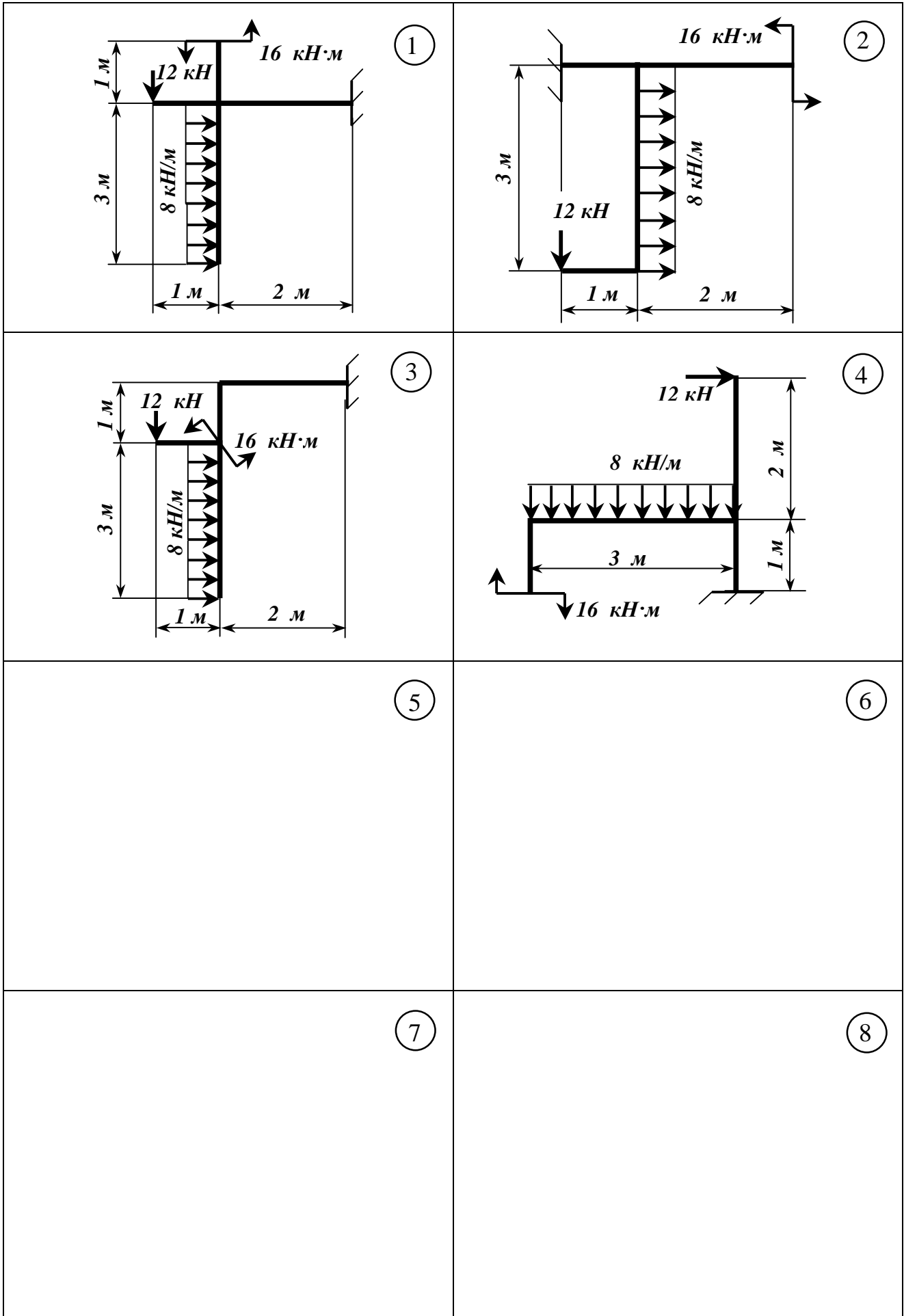


Рисунок 9

## 4 ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ

Відповіді до завдань, що наведені на рисунку 10.

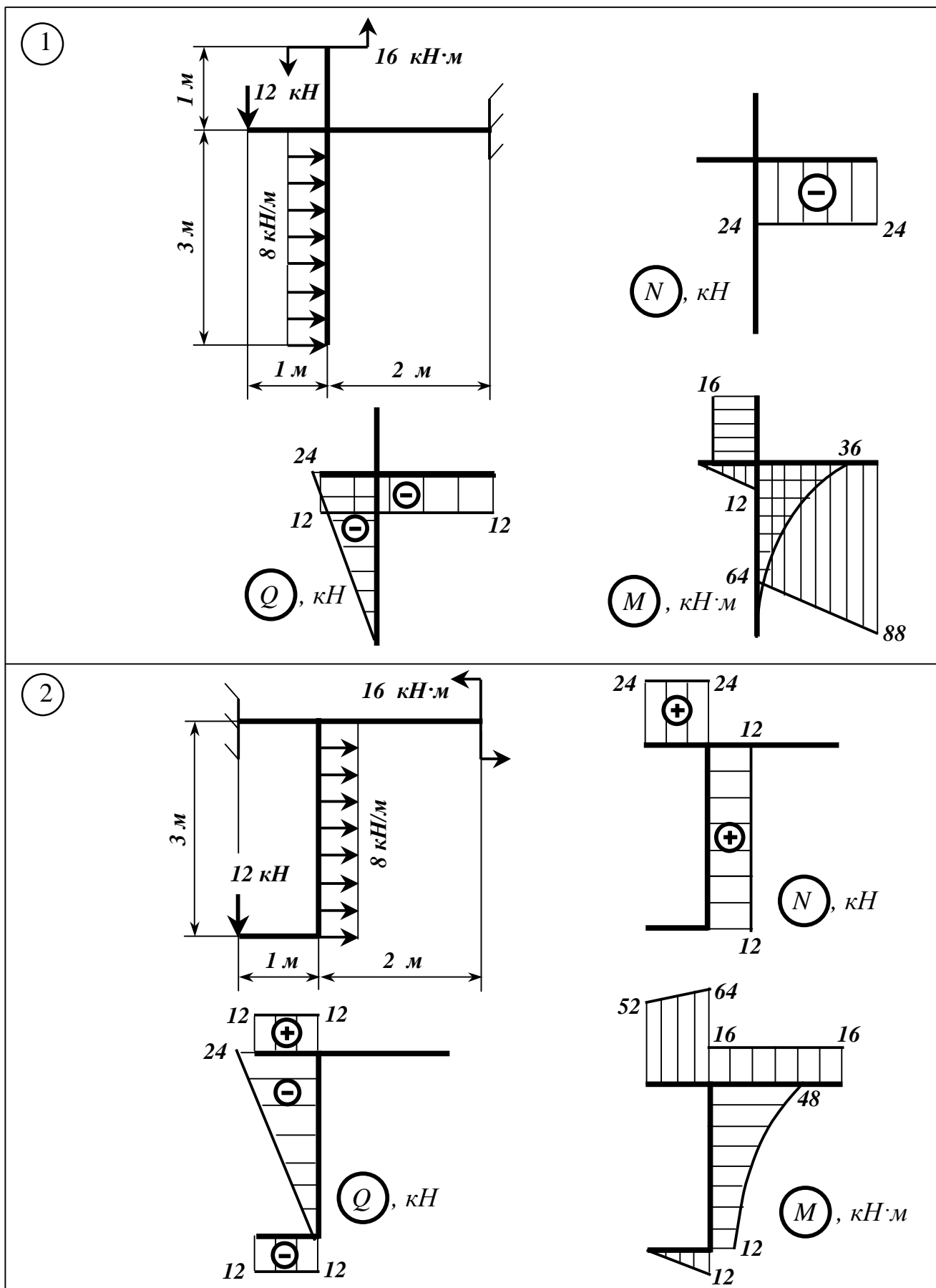


Рисунок 10



## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Писаренко Г.С. Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Писаренко, О.А. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
- 2 Дарков А.В. Сопротивление материалов: Учеб. для техн. вузов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.
- 3 Ковтун В.В. Опір матеріалів. Розрахункові роботи: Навчальний посібник / В.В. Ковтун, В.С. Павлов, О.А. Дорофєєв. – Львів: Афіша, 2002. – 280с.
- 4 Ицкович Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учебное пособие для вузов / Г.М. Ицкович, Л.С. Минин, А.И. Винокуров; Под ред. Л.С. Минина. – М.: Высш. шк., 2001. – 592 с.
- 5 Методичні вказівки до самостійної роботи студентів з дисципліни „Опір матеріалів”, розділ “Побудова епюр внутрішніх силових факторів для балок” (для студентів усіх спеціальностей і форм навчання)/ Укл. Л.В.Кутовий, Ю.С.Холодняк. – Краматорськ: ДДМА, 2004. – 24 с.

