

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

ОПР МАТЕРІАЛІВ

**Збірник
розрахунково-графічних завдань**

Частина 2

**для студентів усіх механічних спеціальностей
денної форми навчання**

Затверджено
на засіданні методичної ради
Протокол №7 від 22.04.2021р.

Краматорськ
ДДМА
2021

УДК 539.3/.6

Опір матеріалів: *збірник розрахунково-графічних завдань [для студентів усіх механічних спеціальностей денної форми навчання]* / [уклад.: Ю. С. Холодняк, С. В. Капорович]. – Краматорськ : ДДМА, 2021. – Ч. 2. – 159 с.

Містить умови завдань, стислі теоретичні відомості до них, методичні вказівки і приклади розв'язання цих завдань.

Укладачі: Ю. С. Холодняк, доц. (вступ, розділи 5 і 7, додатки);
С. В. Капорович, ст.викл. (розділ 6).

Відп. за випуск

С. В. Подлесний, доц.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
5 Складний опір	7
5.1 Складне згинання.....	7
5.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 5.1	11
5.1.2 Приклад розв'язання задачі 5.1	12
5.2 Позацентрове стискання	18
5.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 5.2.....	23
5.2.2 Приклад розв'язання задачі 5.2	24
5.3 Згинання з крученням	27
5.3.1 Методичні вказівки до виконання задачі 5.3	28
5.3.2 Приклад розв'язання задачі 5.3	32
6 Розрахунок статично невизначуваних систем методом сил.....	36
6.1 Один раз статично невизначувана балка	36
6.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 6.1	40
6.1.2 Приклад розв'язання задачі 6.1	40
6.2 Один раз статично невизначувана рама	48
6.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 6.2.....	48
6.2.2 Приклад розв'язання задачі 6.2	52
6.3 Двічі статично невизначувана рама	57
6.3.1 Методичні вказівки до виконання задач 6.3...6.5	61
6.3.2 Приклад розв'язання задачі 6.3	62
6.4 Двічі статично невизначувана балка.....	75
6.4.1 Приклад розв'язання задачі 6.4	76
6.5 Тричі статично невизначувана балка	83
6.5.1 Приклад розв'язання задачі 6.5	84
7 Стійкість і динамічне навантаження.....	94
7.1 Підбір перерізу стиснутого стояка.....	94
7.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 7.1	94
7.1.2 Приклад 1 розв'язання задачі 7.1	99
7.1.3 Приклад 2 розв'язання задачі 7.1	105
7.2 Визначення напружень в рамі при ударі	110

7.2.1	Методичні вказівки до виконання задачі 7.2	114
7.2.2	Приклад розв'язання задачі 7.2.....	115
7.3	Розрахунок рами в умовах вимушених коливань	117
7.3.1	Методичні вказівки до виконання задачі 7.3	123
7.3.2	Приклад розв'язання задачі 7.3.....	126
7.4	Розрахунок ферми в умовах вимушених коливань.....	131
7.4.1	Методичні вказівки до виконання задачі 7.4	132
7.4.2	Приклад розв'язання задачі 7.4.....	141
	Література	149
	Додаток А. Основні параметри катаних профілів	150
	Додаток Б. Формула крайніх ординат і особливості її застосування	156
	Додаток В. Основні параметри стиснутих стрижнів	157
	Додаток Г. Зразок титульного аркуша розрахунково-графічного завдання	158

ВСТУП

Опір матеріалів закладає основи інженерних розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість деталей машин і елементів споруд. Розрахунково – графічні завдання з цього курсу призначені для розвитку у студентів навичок самостійного виконання зазначених розрахунків і допомагають кращому засвоєнню теоретичного матеріалу.

Даний збірник є модернізованою версією раніше виданого кафедрою технічної механіки Донбаської державної машинобудівної академії збірника розрахунково – графічних завдань з курсу опору матеріалів /1/, який базувався виключно на традиційних методичних підходах /2 – 4 та ін./ і не містив прогресивних розрахункових технологій з залученням комп'ютерної техніки. При його підготовці були виправлені редакційні помилки, замінено ряд невдалих конструктивних схем і числових даних до них, широко застосовано систему Mathcad /5/, істотно змінено постановку ряду задач по результатам новітніх наукових досліджень кафедри /6 та ін. /, додані сортаменти катаних профілів та інші довідкові матеріали.

Зважаючи на великий об'єм матеріалу, новий збірник для зручності користування розділено на дві частини. У частину 1 /9/ увійшли розділи 1...4, у частину 2 – розділи 5...7.

Порядок визначення варіантів завдань і правила оформлення результатів їх виконання наведені в частині 1 даного збірника. Для зручності наведемо їх і в частині 2.

Те чи інше завдання видається студентам після вивчення ними відповідного теоретичного матеріалу. До складу завдання входять постановка задачі, 30 конструктивних схем, дві таблиці числових даних, методичні вказівки і приклад (або приклади) розв'язання поставленої задачі.

Кожен студент одержує свій індивідуальний варіант для виконання усіх запланованих завдань. Номер варіанту визначається викладачем і складається з чотирьох цифр. Перша та друга цифри вказують номери стовпчиків відповідно в першій та другій таблицях числових даних, третя і четверта – номер конструктивної схеми відповідно до номера прізвища студента у списку академічної групи.

Основні вимоги до оформлення завдань:

1 Титульний аркуш і наступні сторінки повинні бути виконаними на білому цупкому папері формату А4 і скріплені між собою будь – яким способом.

2 Титульний аркуш повинен мати вигляд згідно зі зразком, наведеним у додатку Г.

3 Наступні сторінки за погодженням з викладачем оформляються в рукописному або друкованому варіанті на одній стороні аркуша. На них

наводяться умови завдання з вихідними даними відповідно до номера варіанту, розрахункова схема з усіма необхідними позначеннями, результати розрахунку разом з їх поясненнями.

4 Усі графічні побудови виконуються в певному масштабі з дотриманням існуючих стандартів і правил оформлення конструкторської документації.

5 Усі розміри, навантаження і результати обчислень повинні мати розмірності в міжнародній системі одиниць (СІ).

5 СКЛАДНИЙ ОПР

5.1 Складне згинання

Для заданої балки, що перебуває в умовах складного згинання, визначити найбільші за модулем нормальні напруження та побудувати епюру напружень у небезпечному перерізі.

Вихідні дані вибрати із таблиць 5.1 та 5.2 і рисунка 5.1.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані до задачі 5.1

Величина	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q , кН/м	20	22	25	28	30	20	28	25	22	30
P , кН	15	18	20	22	25	18	25	15	20	22
M , кН·м	10	12	15	18	20	15	10	20	18	12

Таблиця 5.2 – Вихідні дані до задачі 5.1

Величина		Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Розміри, м	a	1	1,2	1,5	1,8	2	1,2	1,5	1,8	2	1
	b	1,5	1,8	2	1	1,2	1	1,2	2	1,5	1,8
	c	1,2	1,5	1,8	2	1	1,8	2	1	1,2	1,5
Номер двотавра		20	22a	24	27a	30	20a	22	24a	27	30a
Номер швелера		24	27	30	33	36	27	30	33	36	24
Розміри, мм	кутика	200x125x11	125x80x7	180x110x10	140x90x8	125x80x12	160x100x9	140x90x10	180x110x12	160x100x14	200x125x16
	смуги	400x12	320x16	360x14	280x18	250x20	360x16	280x20	250x18	320x18	400x14

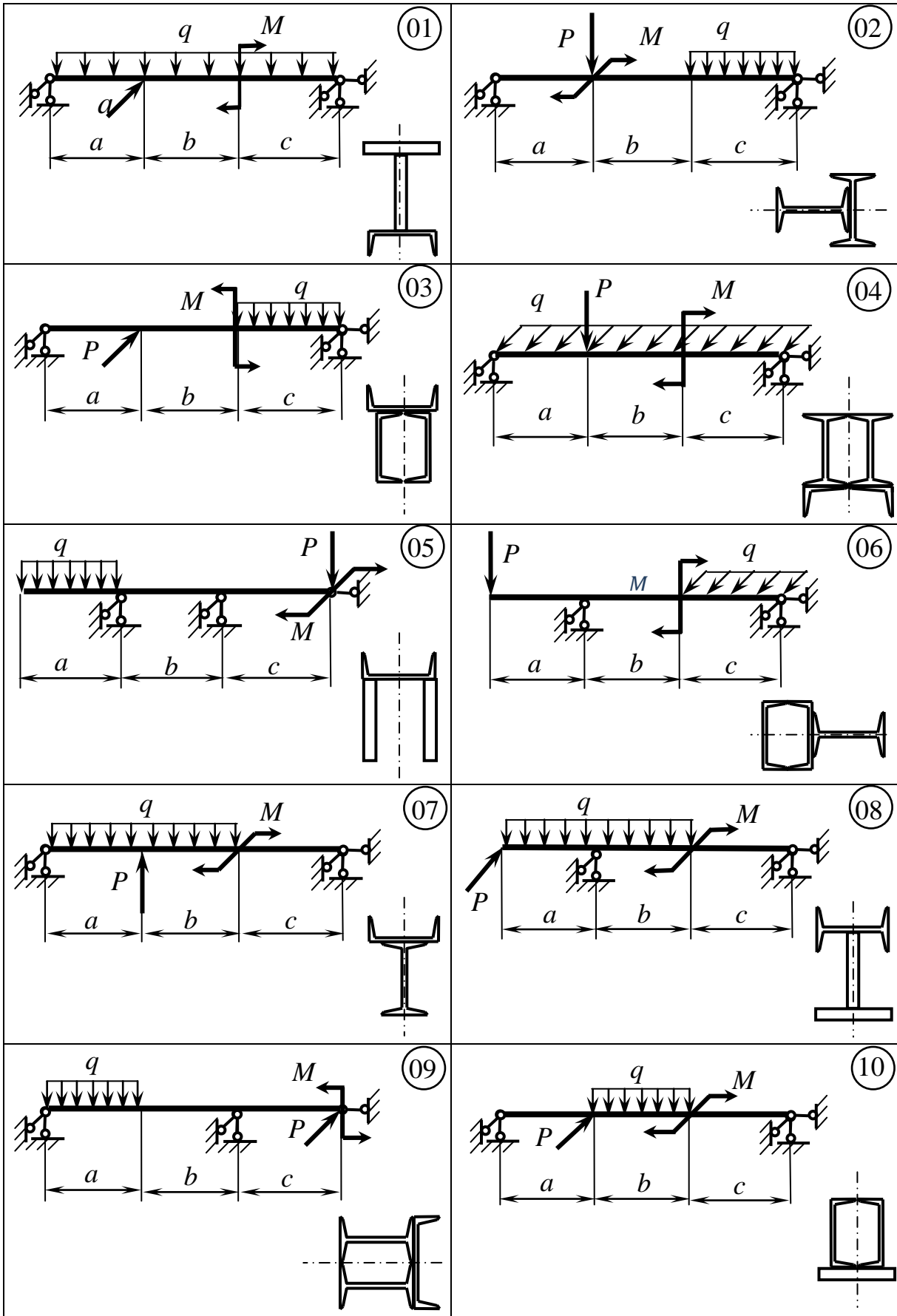


Рисунок 5.1 – Схеми балок до задачі 5.1

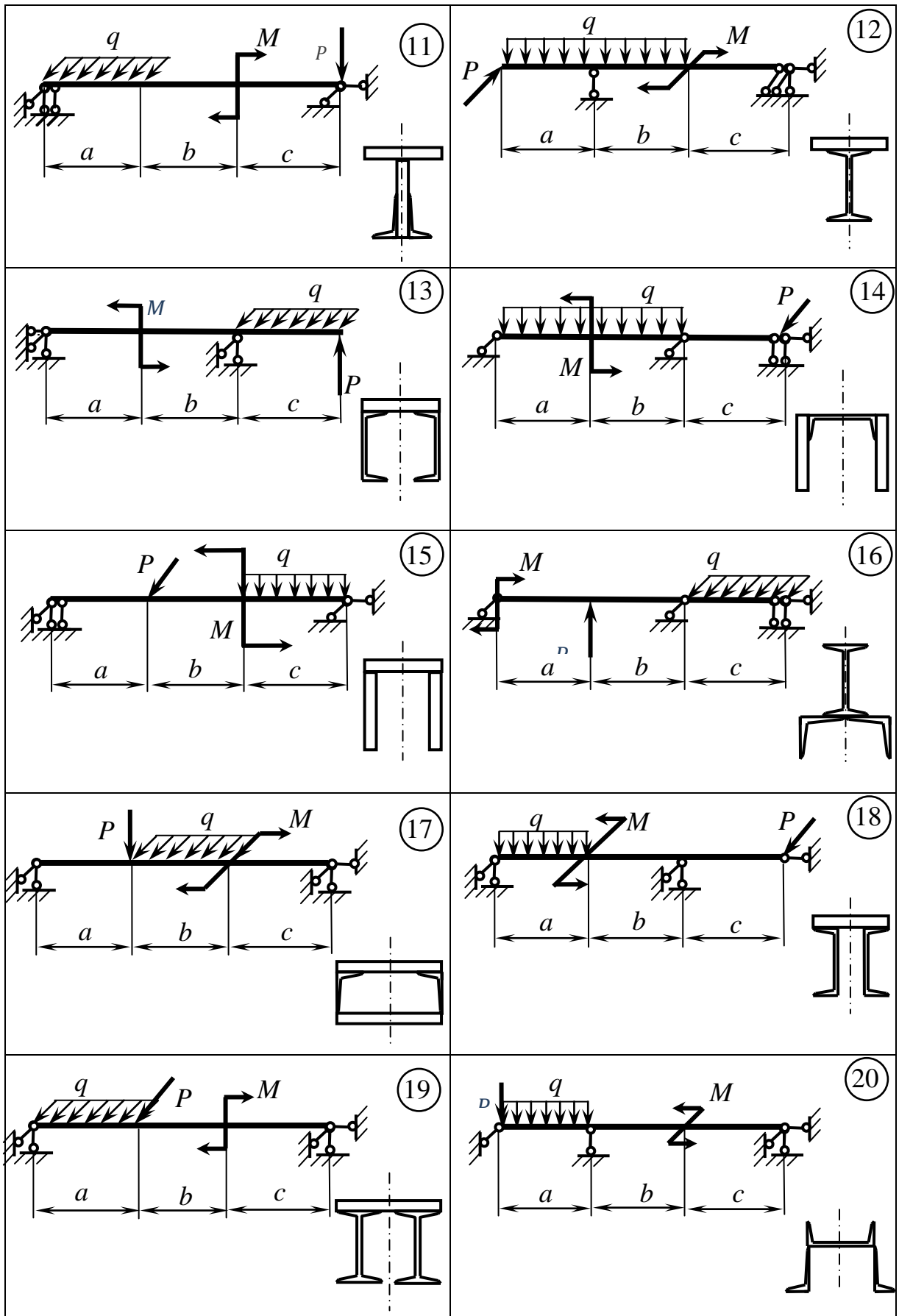


Рисунок 5.1, аркуш 2

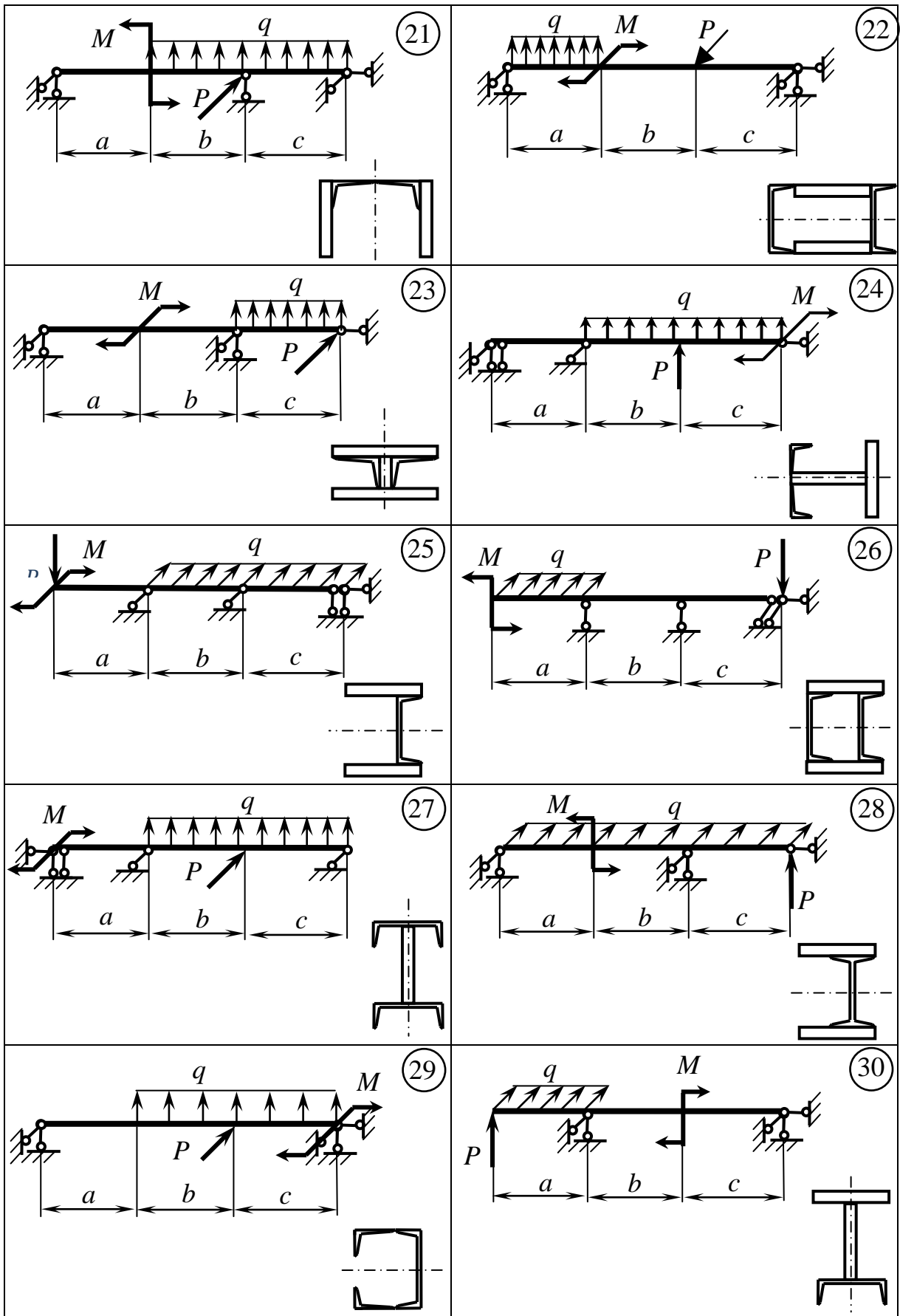


Рисунок 5.1, аркуш 3

5.1.1 Методичні вказівки до задачі 5.1

Розв'язання задачі відбувається у такій послідовності:

1 Зображується схема балки з навантаженням у вертикальній площині й визначаються її вертикальні реакції.

2 Будуються епюри поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_x .

3 Зображується схема балки з навантаженням у горизонтальній площині і визначаються її горизонтальні реакції.

4 Будуються епюри поперечних сил Q_x і згинальних моментів M_y .

5 Аналізуються епюри згинальних моментів і визначається найбільше навантажений (небезпечний) переріз балки. Якщо M_x та M_y мають найбільші за модулем значення в одному і тому самому перерізі, то саме цей переріз і є небезпечним. Коли ж найбільші значення M_x та M_y належать різним перерізам, то обидва ці перерізи беруться до уваги як потенційно небезпечні, тобто такі, за якими слід вести паралельні розрахунки.

Крім зазначених до числа потенційно небезпечних треба включати і такі перерізи (їх може бути декілька), у яких значення M_x та M_y хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

6 Переріз зображується в певному масштабі і визначається положення його центра ваги.

7 Підраховуються моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей – J_{X_c} та J_{Y_c} .

8 Визначається кут нахилу нейтральної лінії до осі X_c у кожному з потенційно небезпечних перерізів:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_{X_c}}{J_{Y_c}}, \quad (5.1)$$

де M_y і M_x враховуються зі своїми знаками: кожен з них вважається додатним, якщо спричиняє розтягання волокон балки в частині перерізу, що належить до першого квадранта координатної площини X_c, Y_c .

9 У кожному з потенційно небезпечних перерізів зображується нейтральна лінія і визначаються (в системі головних центральних осей) координати найбільше віддалених від неї точок у розтягненій та стиснутій зонах. При зображенні нейтральної лінії кут β , якщо він додатний, слід відкладати від осі X_c у напрямку, протилежному ходу годинникової стрілки, а якщо він від'ємний – у зворотному напрямку.

Вірність побудови нейтральної лінії можна перевірити, зважаючи на знаки напружень від M_x і M_y у кожному з квадрантів: вона проходить через ті з них, у яких знаки напружень від M_x і M_y протилежні.

10 Визначаються найбільші розтягуючі (σ_{\max}^+) і найбільші стискаючі (σ_{\max}^-) напруження в кожному з потенційно небезпечних перерізів:

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_A = \frac{M_x}{J_{X_C}} \cdot Y_A + \frac{M_y}{J_{Y_C}} \cdot X_A, \quad (5.2)$$

$$\sigma_{\max}^- = \sigma_B = \frac{M_x}{J_{X_C}} \cdot Y_B + \frac{M_y}{J_{Y_C}} \cdot X_B. \quad (5.3)$$

Тут, як і раніше, величини M_x і M_y беруться з урахуванням їхніх знаків.

11 Шляхом порівняння (за модулем) напружень у точках A і B усіх потенційно небезпечних перерізів остаточно визначаються небезпечний переріз і найбільше напруження в балці.

12 Будуються епюри напружень у небезпечному перерізі балки. Спочатку проводиться база (нульова лінія) епюри перпендикулярно до нейтральної лінії. Після цього з точок A і B перерізу паралельно до нейтральної лінії проводяться прямі до перетину з базою і від неї уздовж цих прямих відкладаються відрізки, що дорівнюють у певному масштабі величинам σ_A і σ_B . Оскільки зазначені напруження мають протилежні знаки, відповідно до них відрізки відкладаються по різні боки від бази. Кінці відрізків з'єднуються прямою, яка в разі вірної побудови повинна перетинати базу в тій самій точці, що й нейтральна лінія.

5.1.2 Приклад розв'язання задачі 5.1

Вихідні дані прикладу наведені на рисунках 5.2, *a* і 5.2, *б*.

1 Зобразимо схему балки з навантаженням у вертикальній площині (рис. 5.2, *в*) і визначимо її вертикальні реакції:

$$\sum m_D = R_E^y \cdot 3 - q \cdot 1,6 \cdot 2,2 = 0, \quad R_E^y = \frac{q \cdot 1,6 \cdot 2,2}{3} = \frac{30 \cdot 1,6 \cdot 2,2}{3} = 35,2 \text{ кН};$$

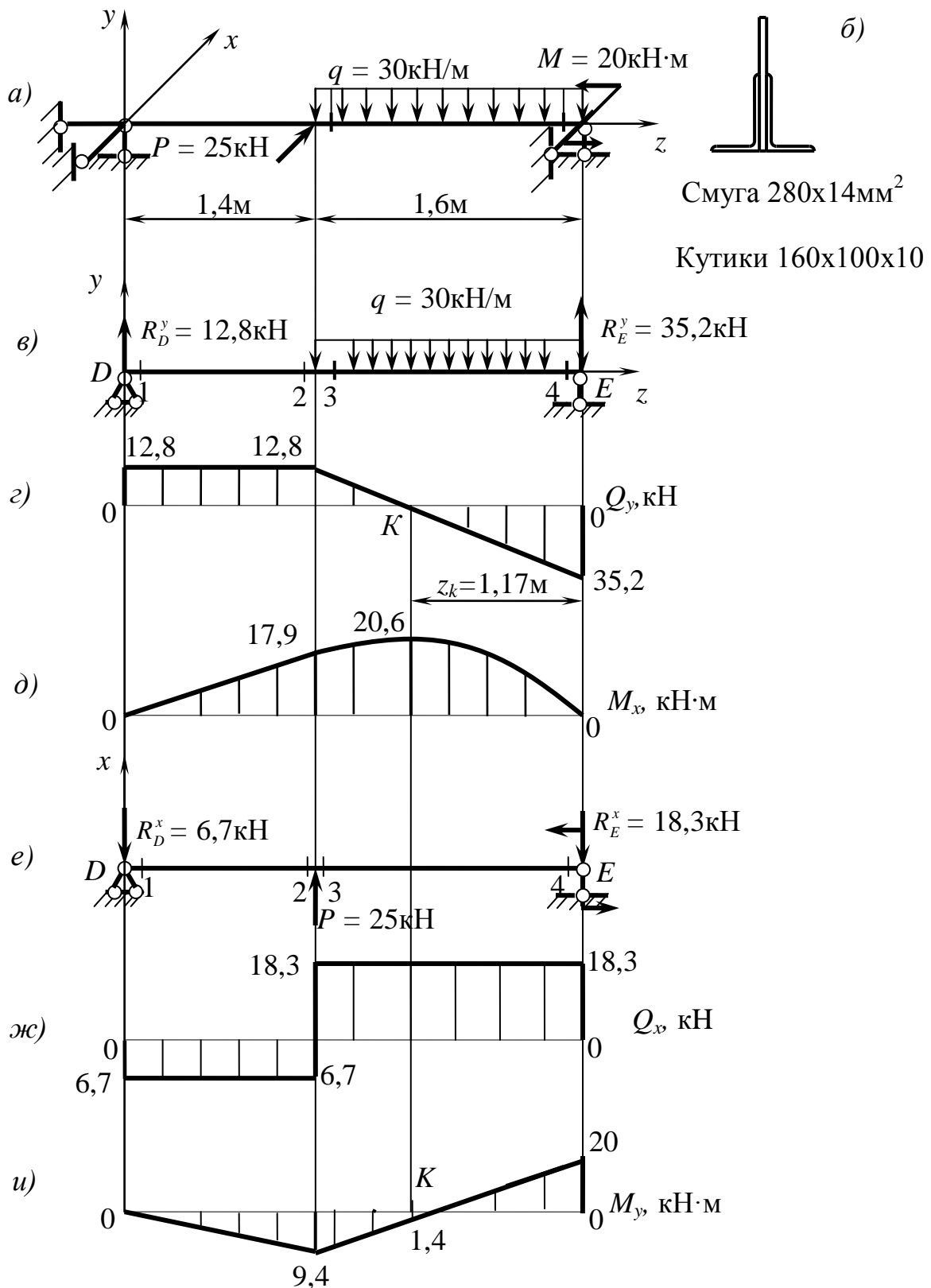
$$\sum m_E = -R_D^y \cdot 3 + q \cdot 1,6 \cdot 0,8 = 0, \quad R_D^y = \frac{q \cdot 1,6 \cdot 0,8}{3} = \frac{30 \cdot 1,6 \cdot 0,8}{3} = 12,8 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = R_D^y + R_E^y - q \cdot 1,6 = 12,8 + 35,2 - 30 \cdot 1,6 = 48 - 48 = 0.$$

2 Визначаємо величини поперечних сил і згинальних моментів у вертикальній площині і будуємо епюри Q_y та M_x (рис. 5.2, *г*; 5.2, *д*):

$$Q_1^y = Q_2^y = Q_3^y = R_D^y = 12,8 \text{ кН}; \quad Q_4^y = Q_3^y - q \cdot 1,6 = 12,8 - 30 \cdot 1,6 = -35,2 \text{ кН}.$$



а, б – відповідно схема балки і вид її перерізу; в, е – навантаження балки; г, ж – епюри поперечних сил; д, и – епюри згинальних моментів

Рисунок 5.2 – Графічні побудови до прикладу виконання задачі 5.1

Оскільки еюра Q_y перетинає базу, визначимо положення точки цього перетину:

$$z_k = \frac{|Q_4^y|}{q} = \frac{35,2}{30} = 1,17 \text{ м.}$$

$$M_1^x = 0; \quad M_2^x = M_3^x = R_D^y \cdot 1,4 = 12,8 \cdot 1,4 = 17,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4^x = 0;$$

$$M_K^x = R_E^y \cdot z_K - q \cdot z_K \cdot \frac{z_K}{2} = 35,2 \cdot 1,17 - 30 \cdot 1,17 \cdot \frac{1,17}{2} = 20,6 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

3 Зобразимо схему балки з навантаженням у горизонтальній площині (рис. 5.2, е) і визначимо її горизонтальні реакції:

$$\sum m_D = P \cdot 1,4 + M - R_E^x \cdot 3 = 0, \quad R_E^x = \frac{P \cdot 1,4 + M}{3} = \frac{25 \cdot 1,4 + 20}{3} = 18,3 \text{ кН.}$$

$$\sum m_E = R_D^x \cdot 3 - P \cdot 1,6 + M = 0, \quad R_D^x = \frac{P \cdot 1,6 - M}{3} = \frac{25 \cdot 1,6 - 20}{3} = 6,7 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum P_x = -R_D^x - R_E^x + P = -6,7 - 18,3 + 25 = -25 + 25 = 0.$$

4 Визначаємо величини поперечних сил і згинальних моментів у горизонтальній площині і будуємо еюри Q_x та M_y (рис. 5.2, ж; 5.2, и):

$$Q_1^x = Q_2^x = -R_D^x = -6,7 \text{ кН}; \quad Q_3^x = Q_4^x = Q_2^x + P = -6,7 + 25 = 18,3 \text{ кН.}$$

$$M_1^y = 0; \quad M_2^y = M_3^y = -R_D^x \cdot 1,4 = -6,7 \cdot 1,4 = -9,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^y = M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_K^y = M - R_E^x \cdot z_K = 20 - 18,3 \cdot 1,17 = -1,4 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

5 Аналізуємо еюри M_x і M_y , визначаємо потенційно небезпечні перерізи балки. Таких перерізів три: переріз K , у якому M_x максимальний, переріз 4, у якому M_y максимальний, також переріз 2 (або 3), в якому значення M_x та M_y хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

Надамо знаки величинам M_x та M_y у зазначених перерізах.

У перерізі K згинальний момент M_x стискає волокна у верхній частині перерізу (яка лежить вище від осі X_c), а розтягує у нижній, тому вважаємо його від'ємним.

Згинальний момент M_y у цьому перерізі стискає волокна у лівій (лівіше від осі Y_c) частині перерізу, а розтягує у правій, тому будемо вважати його додатним. У перерізі K : $M_x = -20,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_y = 1,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Аналогічно в перерізі 4 маємо: $M_x = 0$; $M_y = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, у перерізі 2 (або 3): $M_x = -17,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_y = 9,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

6 Зображуємо в масштабі переріз балки (рис. 5.3). Необхідні дані для цього беремо з сортаменту (див. додаток А).

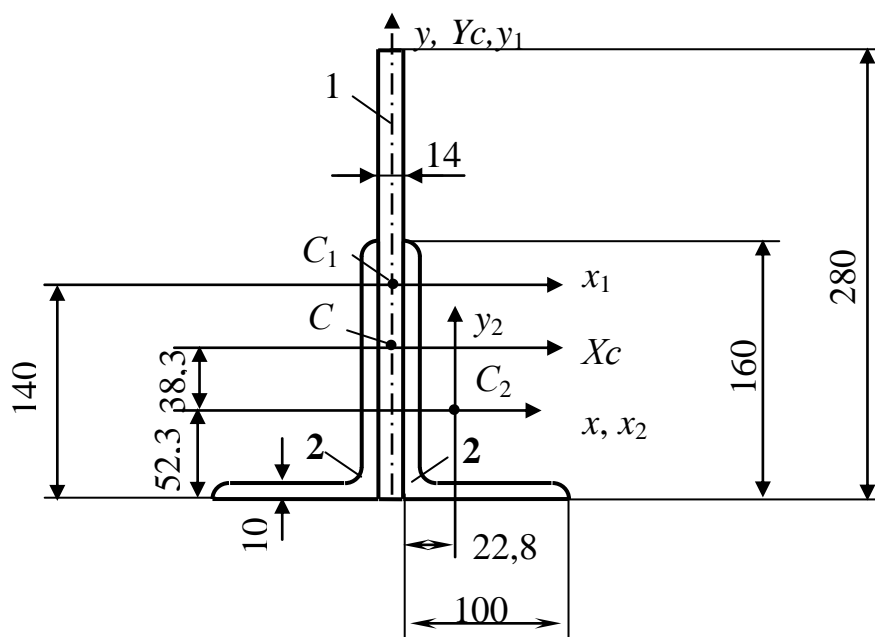
7 Визначаємо положення центра ваги перерізу:

$x_c = 0$, тому що переріз симетричний;

$$y_c = \frac{y_1 \cdot F_1 + 2 \cdot y_2 \cdot F_2}{F_1 + 2F_2} = \frac{87,7 \cdot 3920}{3920 + 2 \cdot 2530} = 38,3 \text{ мм.}$$

$$y_1 = 140 - 52,3 = 87,7 \text{ мм}; \quad y_2 = 0;$$

$$F_1 = 280 \times 14 = 3920 \text{ мм}^2; \quad F_2 = 25,3 \text{ см}^2 = 2530 \text{ мм}^2 \dots$$



1 – смуга 280x14 мм²; 2 – кутики 160x100x10

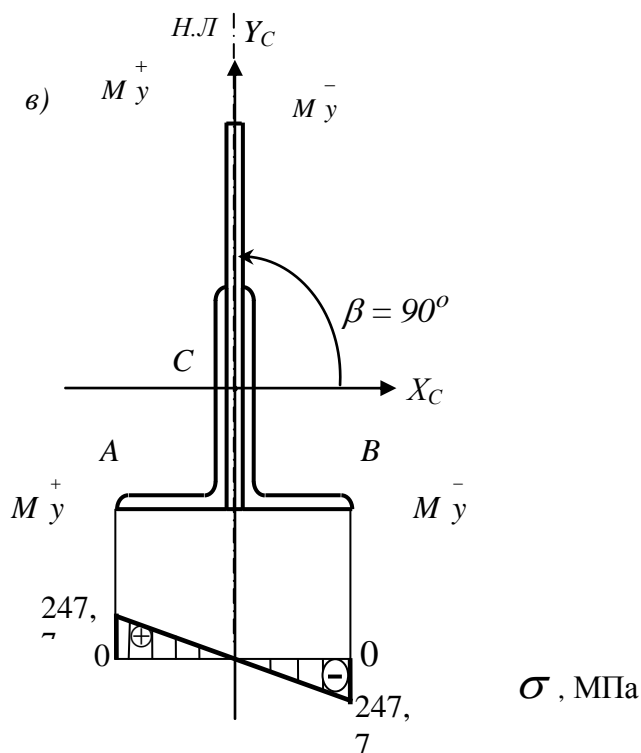
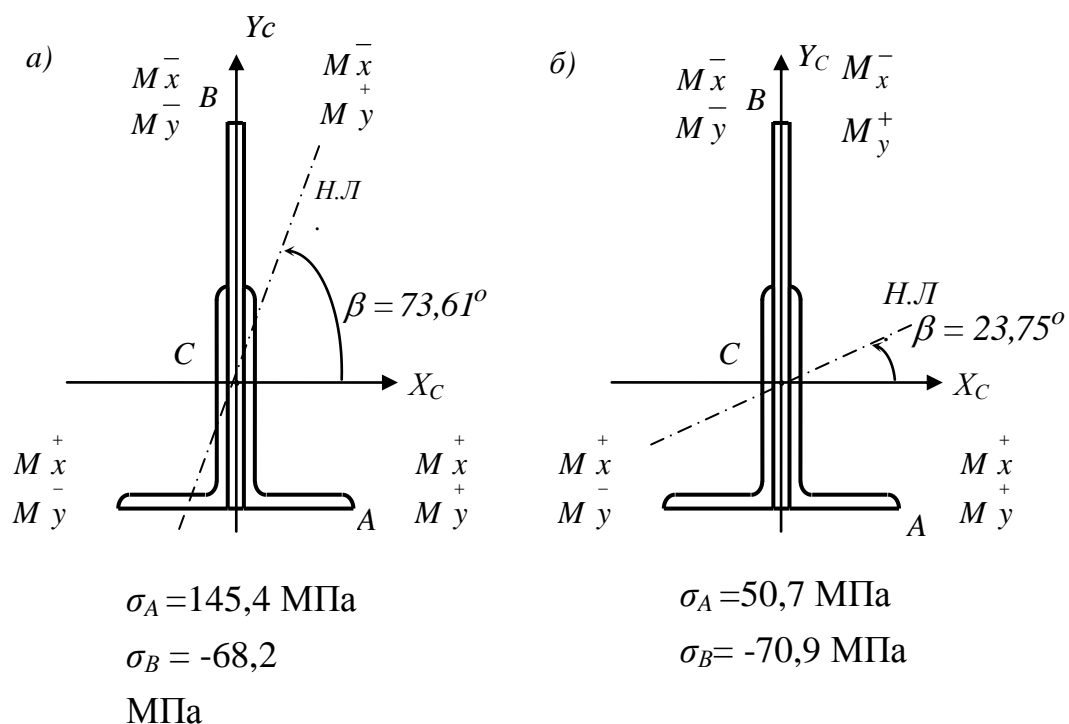
Рисунок 5.3 – Схема до визначення центра ваги перерізу та його головних моментів інерції

8 Визначаємо головні моменти інерції перерізу:

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= J_{x_1} + F_1 \cdot (y_1 - y_c)^2 + 2 \cdot [J_{x_2} + F_2 \cdot (y_c - y_2)^2] = \\ &= \frac{1}{12} \cdot 14 \cdot 280^3 + 3920 \cdot (87,7 - 38,3)^2 + \\ &+ 2 \cdot [667 \cdot 10^4 + 2530 \cdot (38,3 - 0)^2] = 5594 \cdot 10^4 \text{ мм}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{y_c} &= J_{y_1} + 2 \cdot [J_{y_2} + F_2 \cdot (x_2)^2] = \frac{1}{12} \cdot 280 \cdot 14^2 + \\ &+ 2 \cdot \left[204 \cdot 10^4 + 2530 \cdot \left(22,8 + \frac{14}{2} \right)^2 \right] = 864 \cdot 10^4 \text{ мм}^4. \end{aligned}$$

9 Визначимо положення нейтральної лінії (н. л.) в кожному з потенційно небезпечних перерізів (рис. 5.4).



а – переріз 2; б – переріз К; в – переріз 4

Рисунок 5.4 – Схема до визначення напружень у потенційно небезпечних перерізах балки

Переріз 2:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_{X_C}}{J_{Y_C}} = -\frac{9,4}{(-17,9)} \cdot \frac{5594}{864} = 3,400; \quad \beta = +73,61^\circ.$$

Переріз *K*:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_{X_C}}{J_{Y_C}} = -\frac{14}{(-20,6)} \cdot \frac{5594}{864} = 0,440; \quad \beta = +23,75^\circ.$$

Переріз 4:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_{X_C}}{J_{Y_C}} = -\frac{(-20)}{0} \cdot \frac{5594}{864} = +\infty; \quad \beta = +90^\circ.$$

10 Визначимо координати точок *A* і *B* в системі осей X_C, Y_C для кожного з потенційно небезпечних перерізів (див. рис. 5.3, 5.4).

Переріз 2:

$$X_A = \frac{14}{2} + 100 = 107 \text{ мм};$$

$$Y_A = -(52,3 + 38,3) = -90,6 \text{ мм};$$

$$X_B = -\frac{14}{2} = -7 \text{ мм};$$

$$Y_B = 280 - (52,3 + 38,3) = 189,4 \text{ мм}.$$

Переріз *K*:

$$X_A = 107 \text{ мм}; Y_A = -90,6 \text{ мм};$$

$$X_B = -7 \text{ мм}; Y_B = 189,4 \text{ мм}.$$

Переріз 4:

$$X_A = -107 \text{ мм}; Y_A = -90,6 \text{ мм};$$

$$X_B = 107 \text{ мм}; Y_B = -90,6 \text{ мм}.$$

11 Визначимо напруження в точках *A* і *B* кожного з потенційно небезпечних перерізів (див. рис. 5.4).

Переріз 2:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{J_{X_C}} \cdot Y_A + \frac{M_y}{J_{Y_C}} \cdot X_A = \frac{-17,9 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot (-90,6) + \frac{9,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot 107 = 145,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_B = \frac{M_x}{J_{X_C}} \cdot Y_B + \frac{M_y}{J_{Y_C}} \cdot X_B = \frac{-17,9 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot 189,4 + \frac{9,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot (-7) = -68,2 \text{ МПа}$$

Переріз К:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{J_{X_C}} \cdot Y_A + \frac{M_y}{J_{Y_C}} \cdot X_A = \frac{-20,6 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot (-90,6) + \frac{1,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot 107 = 50,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_B = \frac{M_x}{J_{X_C}} \cdot Y_B + \frac{M_y}{J_{Y_C}} \cdot X_B = \frac{-20,6 \cdot 10^6}{5594 \cdot 10^4} \cdot 189,4 + \frac{1,4 \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot (-7) = -70,9 \text{ МПа}.$$

Переріз 4:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{J_{X_C}} \cdot Y_A + \frac{M_y}{J_{Y_C}} \cdot X_A = 0 + \frac{(-20) \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot (-107) = 247,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_B = \frac{M_x}{J_{X_C}} \cdot Y_B + \frac{M_y}{J_{Y_C}} \cdot X_B = 0 + \frac{(-20) \cdot 10^6}{864 \cdot 10^4} \cdot 107 = 247,7 \text{ МПа}.$$

12 Аналізуючи величини визначених напружень, бачимо, що найбільш навантаженим (тобто небезпечним) є переріз 4. Саме в ньому діють найбільші за модулем напруження у балці: $|\sigma|_{\max} = 247,7 \text{ МПа}$.

13 Будуємо епюру напружень у небезпечному перерізі (див. рис. 5.4, в).

5.2 Позацентрове стискання

Визначити максимально допустиму силу, що стискає стрижень, – P_{\max} . Координати точки прикладення стискаючої сили у вихідній системі координат (рис. 5.5) – x_P і y_P , допустиме напруження – $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$. Побудувати також епюру напружень у перерізі стрижня від максимально допустимої сили.

Вихідні дані вибрати із таблиць 5.3 та 5.4 і рисунка 5.5, на якому всі варіанти зображених перерізів – симетричні відносно однієї з вихідних осей координат – x або y .

Таблиця 5.3 – Вихідні дані до задачі 5.2

Величина		Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Розміри, см	x_p	1	1,5	2	2,5	3	1	1,5	2	2,5	3
	a	4	4,5	5	5,5	6	5,5	5	4,5	6	4
	c	8	7,5	6	7	6,5	6	7,5	8	7	8,5
Номер двотавра		10	12	14	16	18	10	12	14	16	18
Розміри смуги, см		14 x 1,2	16 x 1,4	18 x 1,6	20 x 1,8	22 x 2,0	14 x 2,0	16 x 1,8	18 x 1,4	20 x 1,6	22 x 1,2

Таблиця 5.4 – Вихідні дані до задачі 5.2

Величина		Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Розміри, см	y_p	4	3,5	3	2,5	2	4	3,5	3	2,5	2
	b	5	5,5	6	6,5	7	6	5,5	6,5	7	5
	d	7	8,5	8	7,5	9	8,5	9	7	7,5	8
Номер швелера		18	16	14	12	10	18	16	14	12	10
Розміри кутика, мм		100 x 63x8	50 x 32 x 4	63 x 40 x 6	75 x 50 x 8	80 x 60 x 6	100 x 63 x 10	50 x 32 x 3	63 x 40 x 4	75 x 50 x 7	80 x 60 x 7

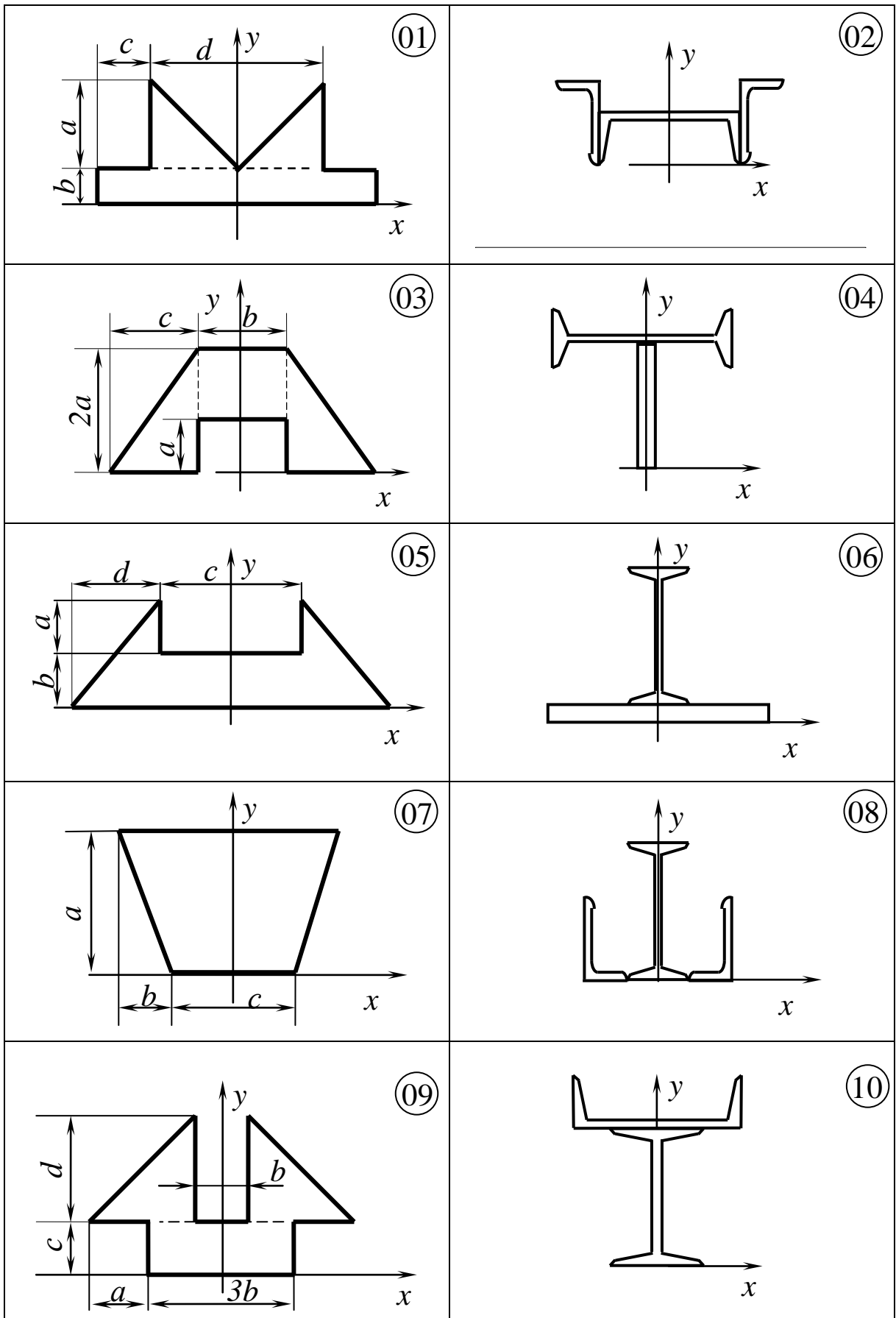


Рисунок 5.5 – Перерізи стиснутих стрижнів до задачі 5.2

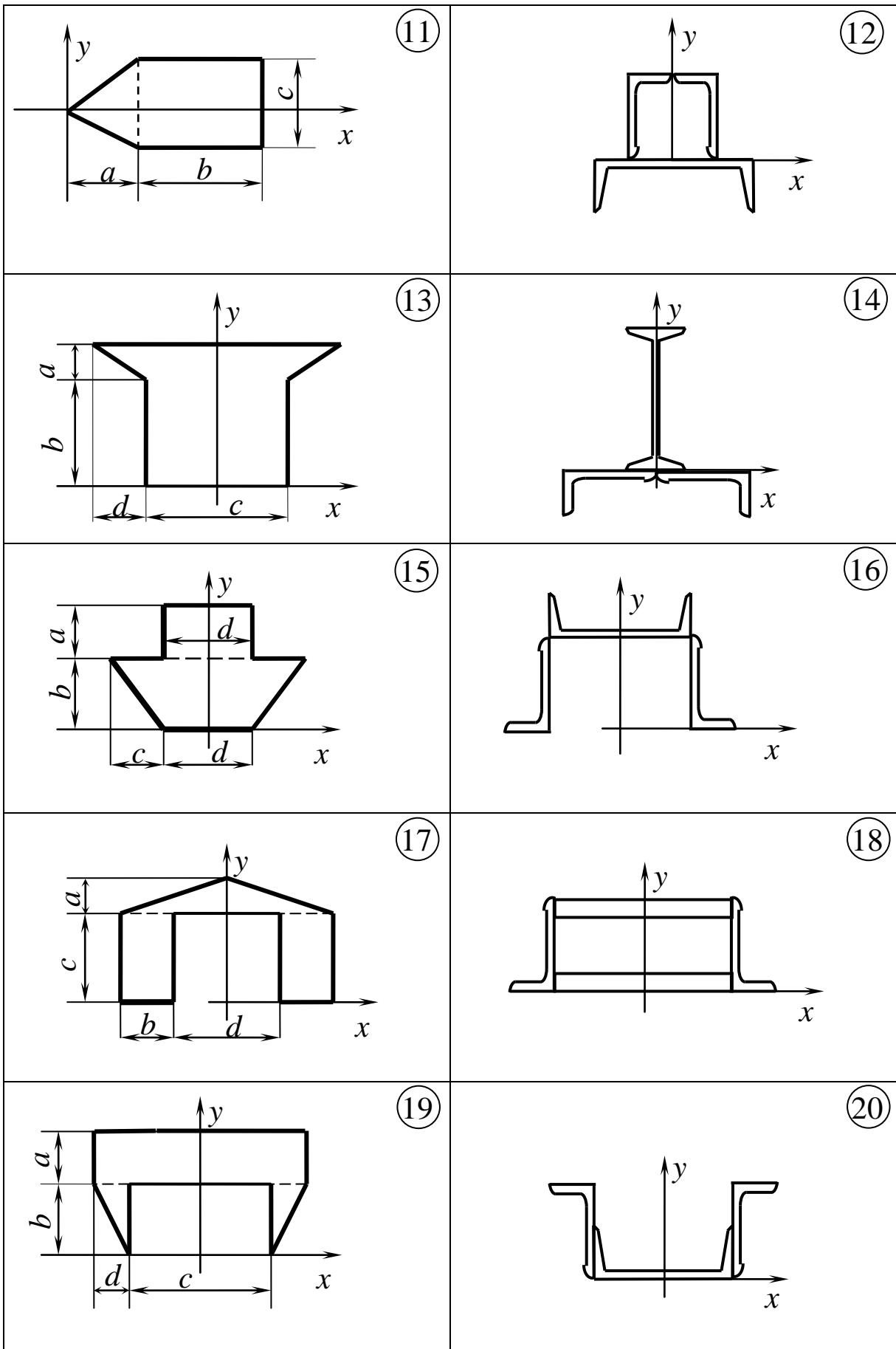


Рисунок 5.5, аркуш 2

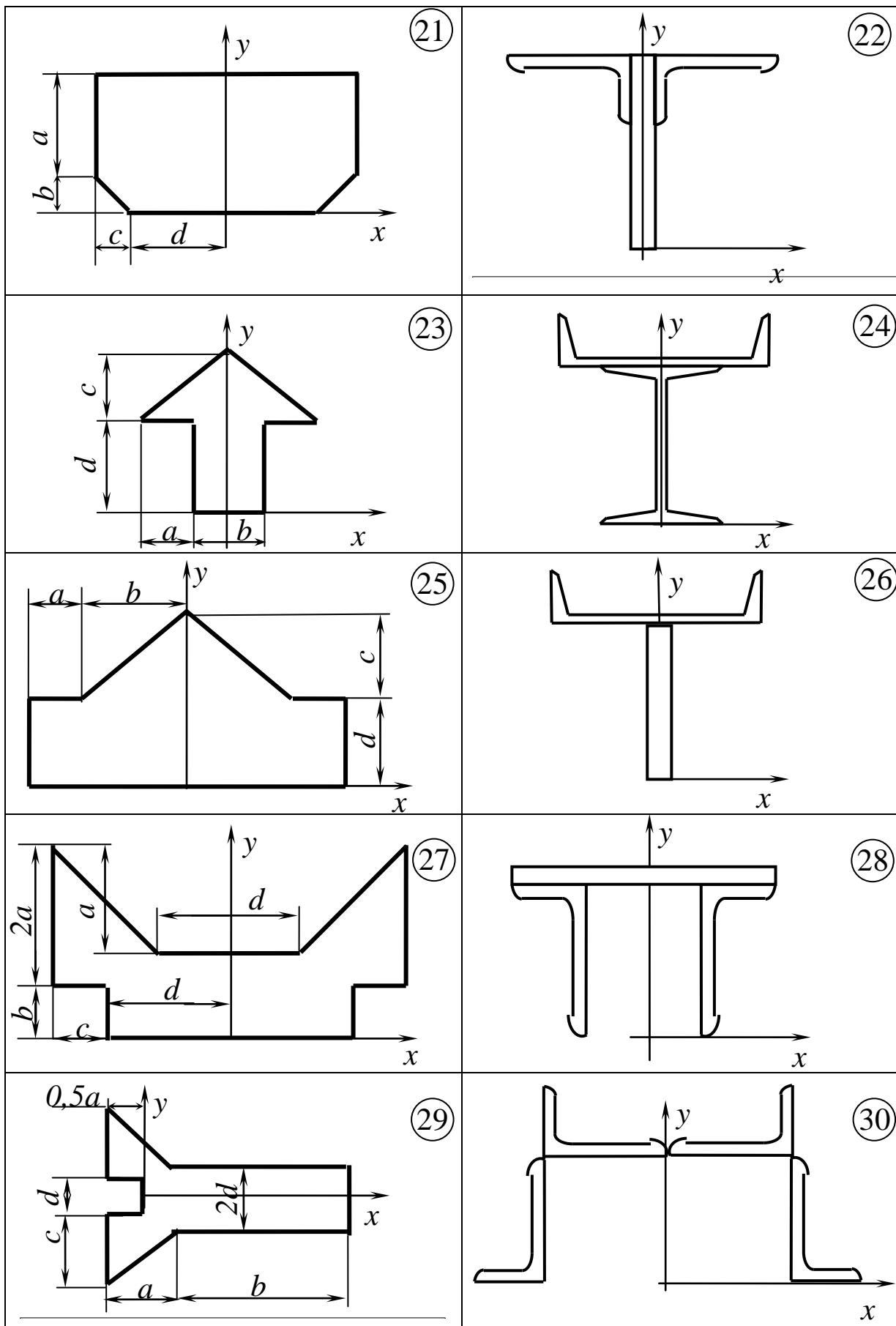


Рисунок 5.5, аркуш 3

5.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 5.2

Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

1 Зображується в певному масштабі переріз стрижня, визначається положення його центра ваги і проводяться головні центральні осі X_C та Y_C .

2 Визначаються моменти інерції перерізу відносно його головних центральних осей J_{X_C} та J_{Y_C} .

3 Визначаються координати точки прикладення стискаючої сили в системі головних центральних осей:

$$X_P = x_P - x_C, \quad (5.4)$$

$$Y_P = y_P - y_C, \quad (5.5)$$

де x_C та y_C – координати центра ваги перерізу у вихідній системі координат (див. рис. 5.5).

4 На схемі перерізу зображується його нейтральна лінія. Для її побудови визначаються координати точок її перетину з головними центральними осями:

$$X = 0; \quad Y = -J_{X_C} / F \cdot Y_P; \quad (5.6)$$

$$Y = 0; \quad X = -J_{Y_C} / F \cdot X_P, \quad (5.7)$$

де F – площа перерізу стрижня.

5 Визначаються координати в системі головних центральних осей найбільше віддаленої від нейтральної лінії точки в зоні стискання – X_A та Y_A .

6 Визначається модуль максимально допустимої стискаючої сили:

$$P_{\max} = \frac{[\sigma]}{\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_A}{J_{Y_C}} + \frac{Y_P \cdot Y_A}{J_{X_C}}}. \quad (5.8)$$

7 Для побудови епюри напружень у перерізі стрижня визначаються координати другої особливої його точки – X_B та Y_B . Якщо нейтральна лінія перетинає переріз, то точка B лежить в зоні розтягання на максимальній відстані від нейтральної лінії. Коли ж ця лінія проходить поза межами перерізу, точка B – це найближча до неї точка в зоні стискання.

8 Визначаються напруження в точках A і B перерізу від дії стискаючої сили P_{\max} :

$$\sigma_A = -P_{\max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_A}{J_{Y_C}} + \frac{Y_P \cdot Y_A}{J_{X_C}} \right), \quad (5.9)$$

$$\sigma_B = -P_{\max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_B}{J_{Yc}} + \frac{Y_P \cdot Y_B}{J_{Xc}} \right). \quad (5.10)$$

9 Будеться епюра напружень у перерізі стрижня. Для цього поза межами перерізу проводиться база епюри під прямим кутом до нейтральної лінії. До бази проводяться лінії з точок A і B паралельно до нейтральної лінії. Від бази уздовж цих ліній відкладаються у певному масштабі і з урахуванням знаків величини σ_A і σ_B , а кінці відповідних відрізків з'єднуються прямою лінією.

5.2.2 Приклад розв'язання задачі 5.2

Схема перерізу стрижня зображена на рисунку 5.6, координати точки P прикладення стискувочої сили: $x_P = 1$ см, $y_P = 2$ см.

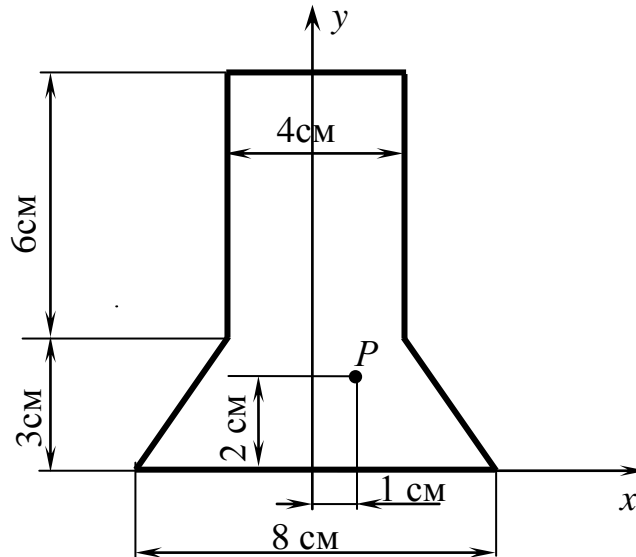


Рисунок 5.6 – Переріз стрижня до прикладу задачі 5.2

Розв'язання

1 Визначаємо положення центра ваги перерізу (рис. 5.7). Оскільки переріз є симетричним відносно осі y , $x_C = 0$, а величину y_C визначимо за формулою:

$$y_C = \frac{y_1 \cdot F_1 + 2y_2 \cdot F_2}{F_1 + 2F_2}, \quad (5.11)$$

де $F_1 = 4 \cdot 9 = 36 \text{ см}^2$ – площа прямокутника (див. рис. 5.7);

$y_1 = 0,5 \cdot 9 = 4,5 \text{ см}$ – ордината центра ваги прямокутника;

$F_2 = 0,5 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \text{ см}^2$ – площа кожного з двох трикутників;

$y_2 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ см}$ – ордината центра ваги трикутника.

Таким чином, із (5.11) маємо:

$$y_c = \frac{4,5 \cdot 36 + 2 \cdot 1 \cdot 3}{36 + 2 \cdot 3} = \frac{168}{42} = 4 \text{ см.}$$

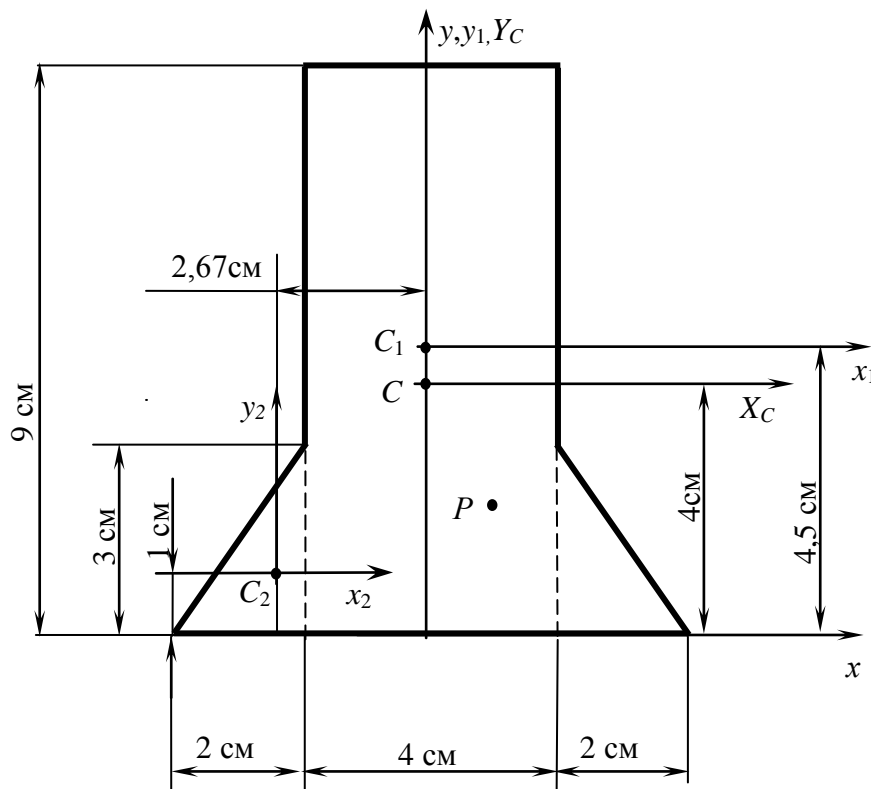


Рисунок 5.7 – Схема до визначення головних моментів інерції перерізу стрижня

2 Визначаємо головні моменти інерції перерізу (див. рис. 5.7):

$$\begin{aligned} J_{X_c} &= J_{x_1} + F_1 \cdot (y_1 - y_c)^2 + 2 \cdot [J_{x_2} + F_2 \cdot (y_c - y_2)^2] = \\ &= \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 9^3 + 36 \cdot (4,5 - 4)^2 + 2 \cdot \left[\frac{1}{36} \cdot 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot (4 - 1)^2 \right] = 309 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$J_{Y_C} = J_{y_1} + 2 \cdot [J_{y_2} + F_2 \cdot (x_2)^2] =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 9 \cdot 4^3 + 2 \cdot \left[\frac{1}{36} \cdot 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot (-2,67)^2 \right] = 92 \text{ см}^4.$$

3 Визначаємо координати точки P прикладення стискаючої сили в системі головних центральних осей перерізу – X_C, Y_C (див. рис. 5.7):

$$X_P = x_P - x_C = 1 - 0 = 1 \text{ см}; \quad Y_P = y_P - y_C = 2 - 4 = -2 \text{ см}.$$

4 Визначаємо координати точок перетину нейтральної лінії з осями X_C і Y_C та зображуємо їх на схемі перерізу (рис. 5.8).

Точка O_1 : $X = 0; \quad Y = -\frac{J_{X_C}}{F \cdot Y_P} = -\frac{309}{42 \cdot (-2)} = 3,69 \text{ см};$

Точка O_2 : $Y = 0; \quad X = -\frac{J_{Y_C}}{F \cdot X_P} = -\frac{92}{42 \cdot 1} = -2,19 \text{ см}.$

Тут $F = F_1 + 2 \cdot F_2 = 36 + 2 \cdot 3 = 42 \text{ см}^2$ – площа всього перерізу.

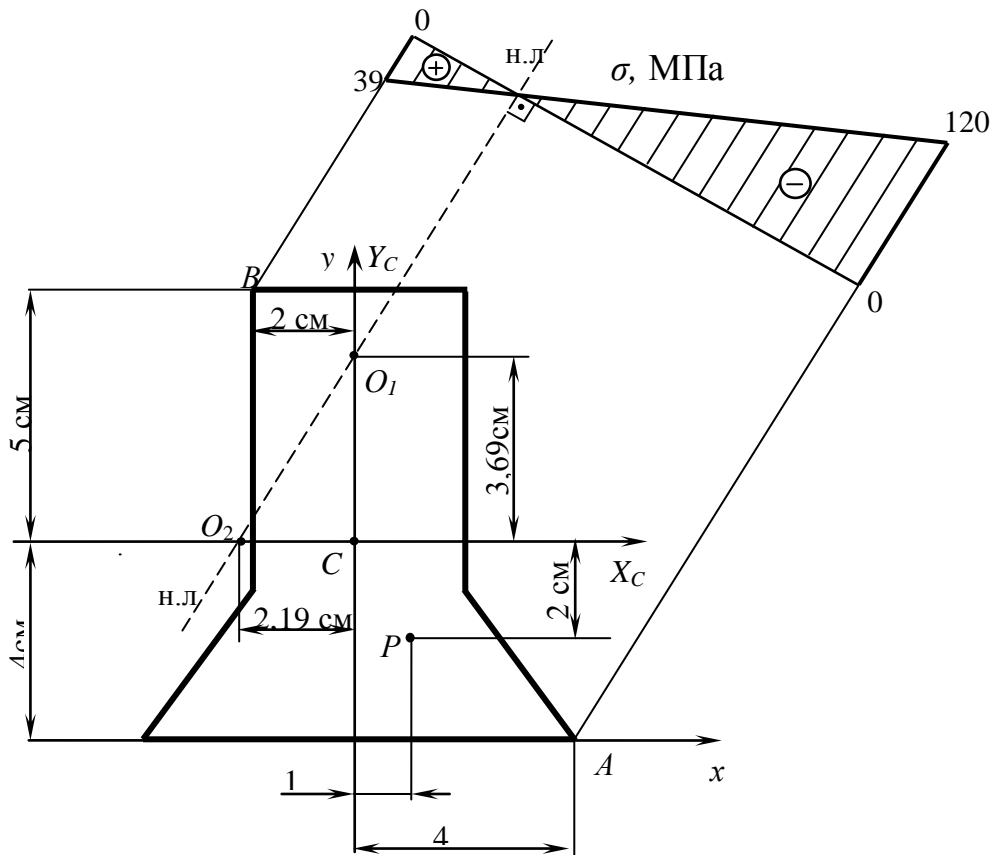


Рисунок 5.8 – Схема побудови епюри напружень в перерізі стиснутого стрижня

З рисунку 5.8 бачимо, що координати точки A , яка є найбільш віддаленою від нейтральної лінії в зоні стискання, дорівнюють: $X_A = 4$ см; $Y_A = -4$ см.

5 Визначаємо модуль максимально допустимої стискаючої сили:

$$P_{\max} = \frac{[\sigma]}{\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_A}{J_{Y_C}} + \frac{Y_P \cdot Y_A}{J_{X_C}}} = \frac{120}{\frac{1}{42 \cdot 10^2} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 10^2}{92 \cdot 10^4} + \frac{(-2) \cdot (-4) \cdot 10^2}{309 \cdot 10^4}} =$$

$$= \frac{120 \cdot 10^2}{\frac{1}{42} + \frac{4}{92} + \frac{8}{309}} = 128786 \text{ Н} = 128,786 \text{ кН}.$$

6 Визначаємо координати точки B (див. рис. 5.8), яка є найбільше віддаленою від нейтральної лінії у зоні розтягання:

$$X_B = -2 \text{ см}, \quad Y_B = 5 \text{ см}.$$

7 Визначаємо напруження в точках A і B від дії стискаючої сили P_{\max} :

$$\sigma_A = -P_{\max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_A}{J_{Y_C}} + \frac{Y_P \cdot Y_A}{J_{X_C}} \right) =$$

$$= -128786 \cdot \left(\frac{1}{42} + \frac{4}{92} + \frac{8}{309} \right) \cdot 10^{-2} = -120 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_B = -P_{\max} \cdot \left(\frac{1}{F} + \frac{X_P \cdot X_B}{J_{Y_C}} + \frac{Y_P \cdot Y_B}{J_{X_C}} \right) =$$

$$= -128786 \cdot \left(\frac{1}{42 \cdot 10^2} + \frac{1 \cdot (-2) \cdot 10^2}{92 \cdot 10^4} + \frac{(-2) \cdot 5 \cdot 10^2}{309 \cdot 10^4} \right) = 39 \text{ МПа}.$$

8 За результатами розрахунків будемо епюру напружень у перерізі стрижня (див. рис. 5.8).

5.3 Згинання з крученням

Нехтуючи подовжньою силою і застосовуючи третю теорію міцності, визначити необхідний діаметр проміжного вала редуктора (рис. 5.9), якщо $[\sigma] = 80$ МПа. Потужність, яка передається валом, – K , частота його обертання – n (обертів за хвилину), діаметри зубчатих коліс, з'єднаних з валом, – d_1 , та d_2 .

Вихідні дані вибрати з таблиць 5.5 та 5.6 і рисунка 5.9.

Таблиця 5.5 – Вихідні дані до задачі 5.3

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n , об./хв.	200	400	250	350	300	400	200	350	250	300
a , м	0,1	0,3	0,15	0,25	0,2	0,15	0,3	0,2	0,25	0,1
b , м	0,2	0,15	0,25	0,1	0,3	0,2	0,1	0,25	0,3	0,15
c , м	0,3	0,2	0,1	0,15	0,1	0,25	0,25	0,15	0,2	0,3

Таблиця 5.6 – Вихідні дані до задачі 5.3

Величина	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K , кВт	30	50	35	45	40	50	30	45	35	40
d_1 , м	0,2	0,4	0,25	0,35	0,3	0,25	0,35	0,4	0,3	0,2
d_2 , м	0,35	0,2	0,4	0,25	0,35	0,3	0,2	0,3	0,25	0,4

5.3.1 Методичні вказівки до виконання задачі 5.3

Розв'язання задачі здійснюється в такій послідовності:

1 Визначаються крутний момент та сили, що діють на зубчаті колеса (див. рис. 5.9):

$$M_{кр} = \frac{30 \cdot K}{\pi \cdot n}; \quad (5.12)$$

$$P_i = \frac{2 \cdot M_{кр}}{d_i}; \quad (5.13)$$

$$T_i = 0,4P_i, \quad (5.14)$$

$$S_i = 0,2P_i. \quad (5.15)$$

2 Усі зазначені сили прикладаються безпосередньо до вала з додаванням відповідних моментів, які виникають, коли лінія дії сили не перетинає осі вала.

3 Визначаються опорні реакції вала у вертикальній площині та будується епюра згинальних моментів M_x .

4 Визначаються опорні реакції вала у горизонтальній площині, та будується епюра згинальних моментів M_y .

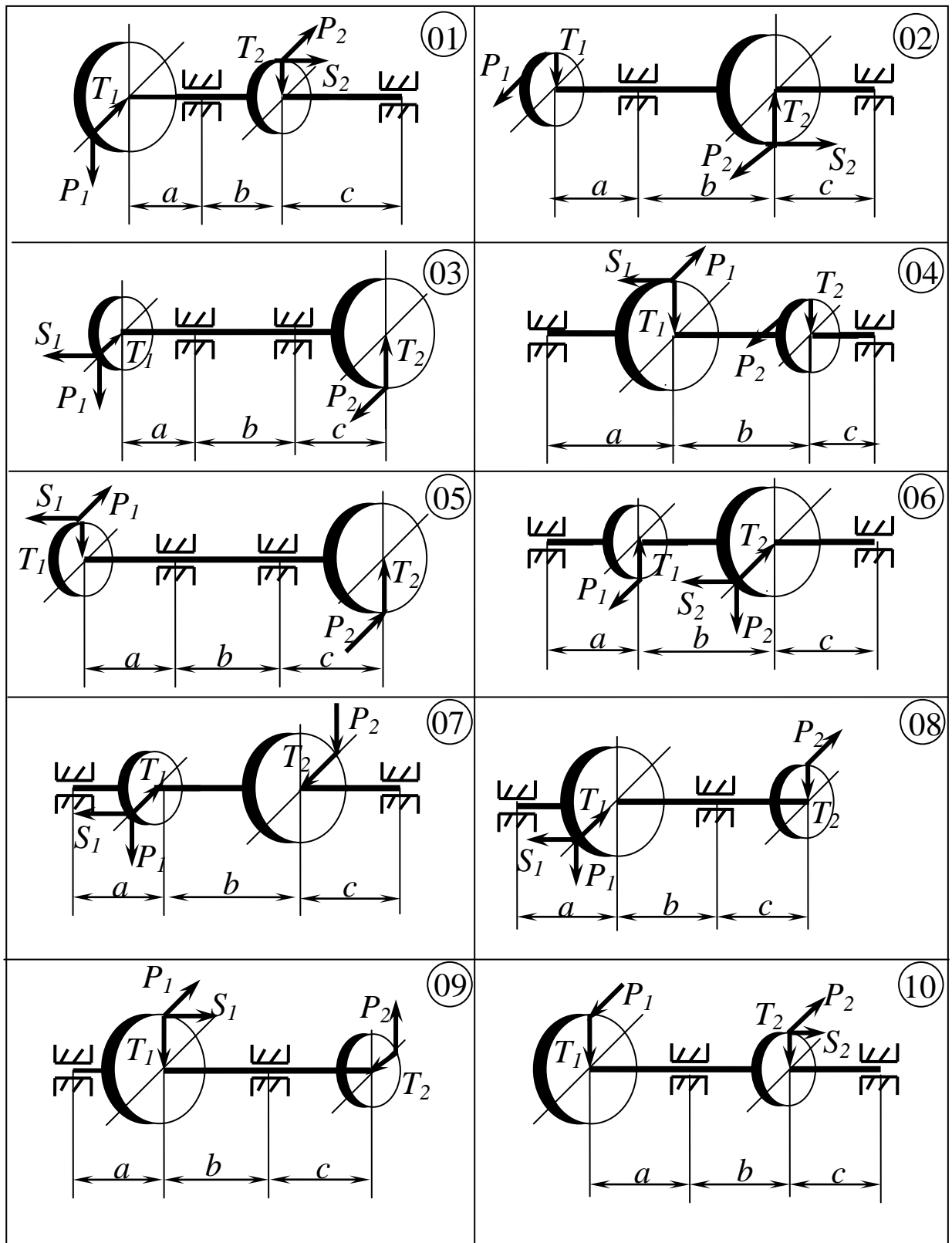


Рисунок 5.9 – Схеми валів до задачі 5.3

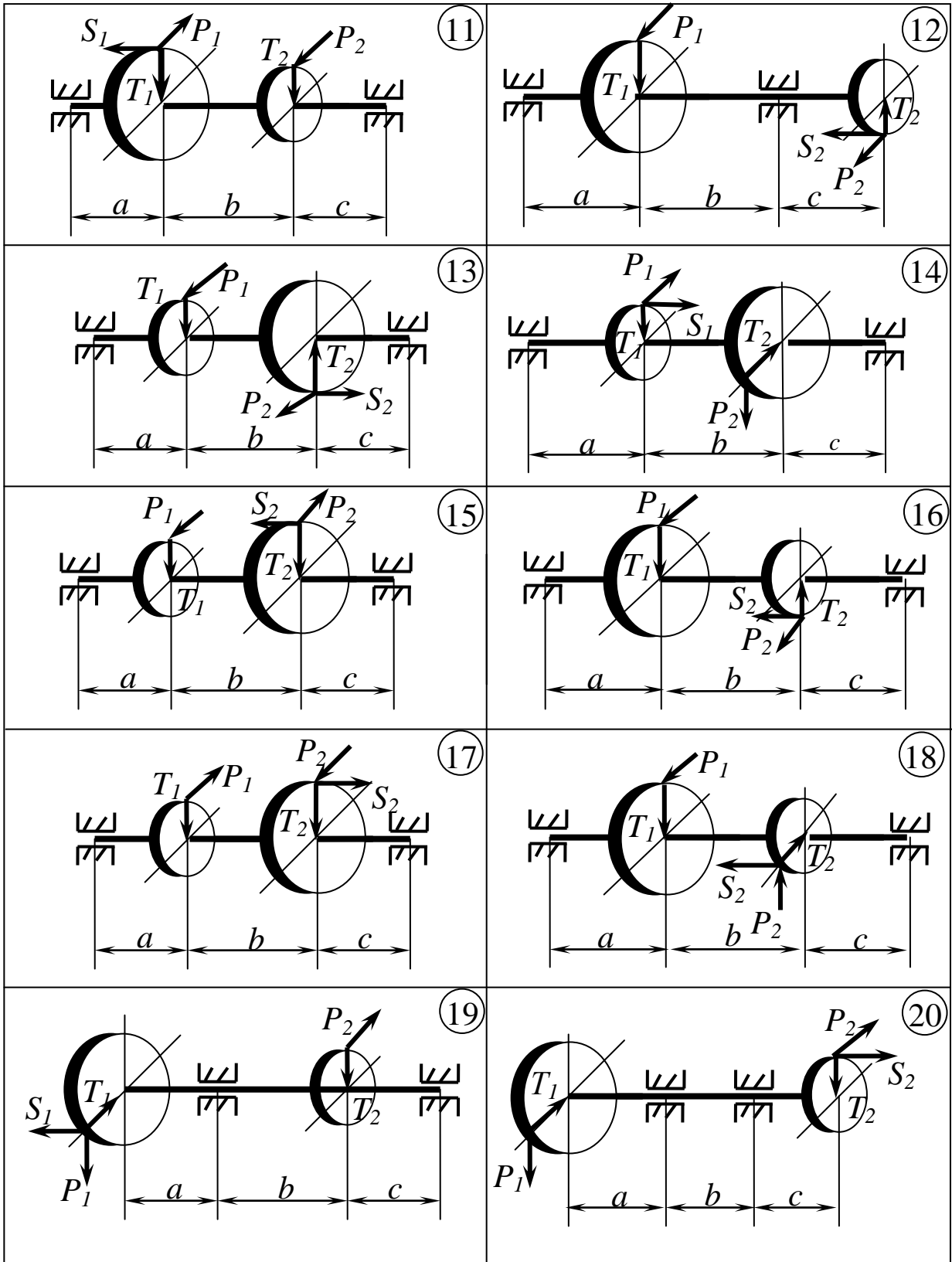


Рисунок 5.9, аркуш 2

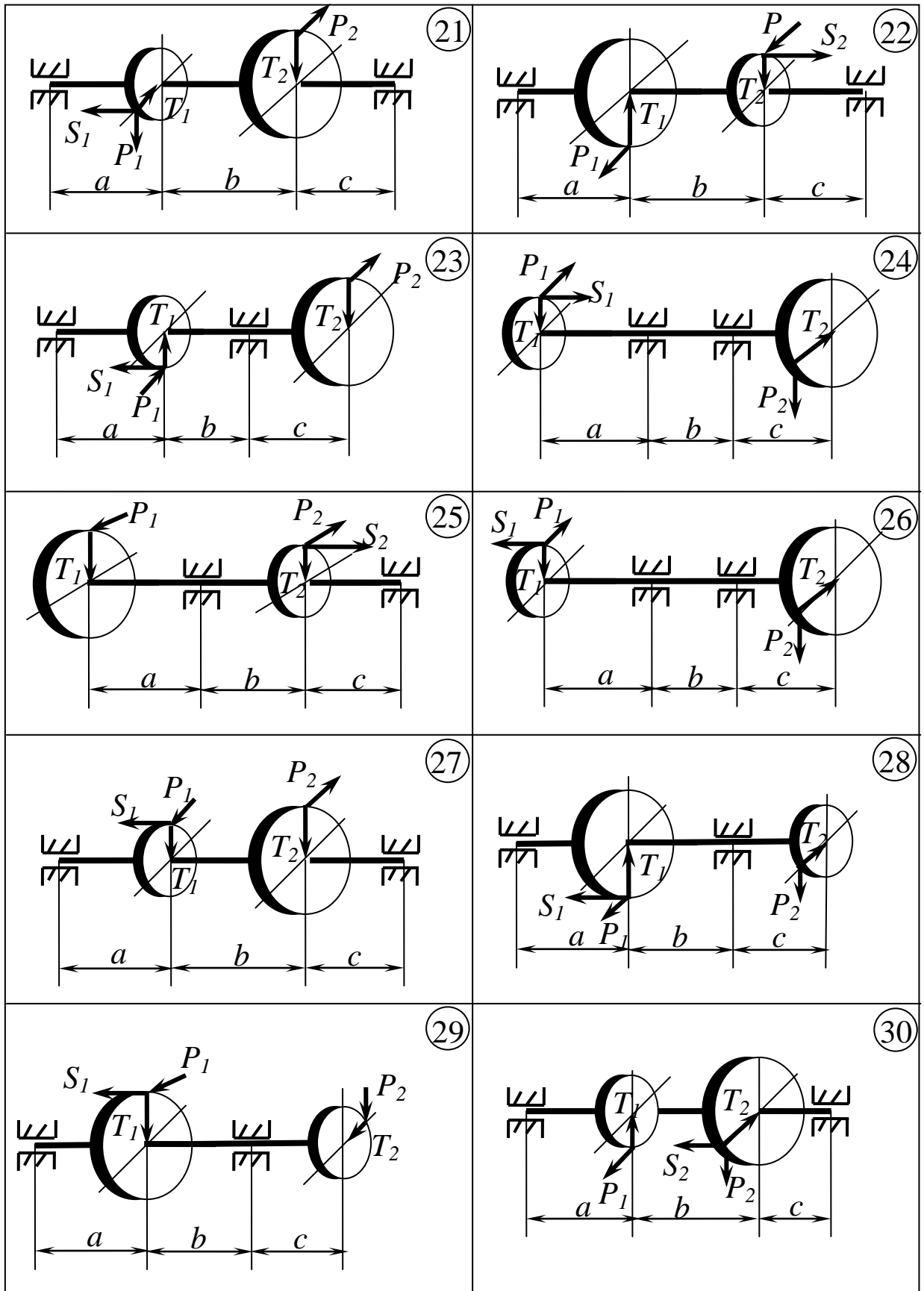


Рисунок 5.9, аркуш 3

5 Будується еюра крутних моментів – $M_{кр}$.

6 Визначаються величини приведених моментів у характерних перерізах вала і будується їх еюра:

$$M_{пр} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} \quad (5.16)$$

8 За еюрою приведених моментів визначаються найбільше їх значення – $M_{пр}^{max}$ і потрібний діаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{32 \cdot M_{пр}^{max} / \pi \cdot [\sigma]}. \quad (5.17)$$

5.3.2 Приклад розв'язання задачі 5.3

Схема вала зображена на рисунку 5.10, а. Розрахунки виконаємо відповідно до таких вихідних даних: $a = 0,2$ м; $b = 0,3$ м; $c = 0,1$ м; $d_1 = 0,4$ м; $d_2 = 0,3$ м; $K = 45$ кВт; $n = 350$ обертів за хвилину.

Розв'язання

1 Визначаємо крутний момент та сили, що діють на зубчаті колеса:

$$M_{кр} = \frac{30 \cdot K}{\pi \cdot n} = \frac{30 \cdot 45}{3,14 \cdot 350} = 1,228 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$P_1 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{d_1} = \frac{2 \cdot 1,228}{0,4} = 6,140 \text{ кН};$$

$$T_1 = 0,4 \cdot P_1 = 0,4 \cdot 6,140 = 2,456 \text{ кН};$$

$$P_2 = \frac{2 \cdot M_{кр}}{d_2} = \frac{2 \cdot 1,228}{0,3} = 8,187 \text{ кН};$$

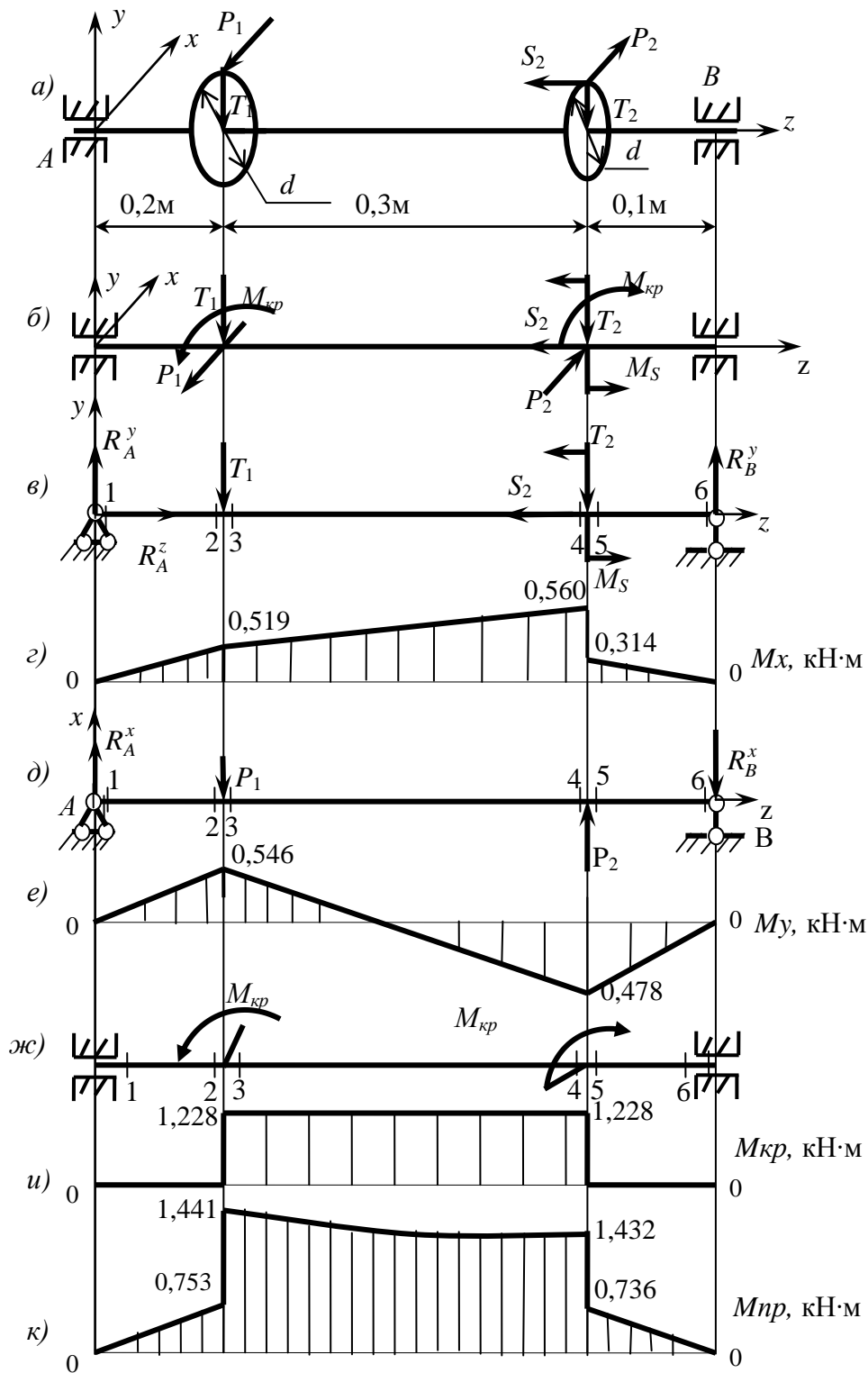
$$T_2 = 0,4 \cdot P_2 = 0,4 \cdot 8,187 = 3,275 \text{ кН};$$

$$S_2 = 0,2 \cdot P_2 = 0,2 \cdot 8,187 = 1,637 \text{ кН}.$$

2 Прикладаємо усі зазначені сили до осі вала (рис. 5.10, б).

Зважаючи на те, що сили P_1 та P_2 не перетинають осі вала, до них додаються відповідні добутки, які дорівнюють крутному моменту:

$$P_1 \cdot \frac{d_1}{2} = P_2 \cdot \frac{d_2}{2} = M_{кр} = 1,228 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



а – схема вала; б – приведення сил до осі вала; в, г – навантаження вала і епюра згинальних моментів у площині yz ;

д, е – навантаження вала і епюра згинальних моментів у площині xz ;

ж – схема дії крутних моментів;

и – епюра крутних моментів; к – епюра приведених моментів

Рисунок 5.10 – Графічні побудови до прикладу задачі 5.3

З цієї ж причини до сили S_2 додається згинальний момент:

$$M_S = S_2 \cdot \frac{d_2}{2} = 1,637 \cdot \frac{0,3}{2} = 0,246 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3 Визначаємо опорні реакції вала у вертикальній площині (рис. 5.10, в) :

$$\begin{aligned} \sum m_A = 0: \quad R_B^y \cdot 0,6 + M_S - T_1 \cdot 0,2 - T_2 \cdot 0,5 &= 0, \\ R_B^y &= \frac{1}{0,6} \cdot (-M_S + T_1 \cdot 0,2 + T_2 \cdot 0,5) = \\ &= \frac{1}{0,6} \cdot (-0,246 + 2,456 \cdot 0,2 + 3,275 \cdot 0,5) = 3,138 \text{ кН}; \\ \sum m_B = 0: \quad -R_A^y \cdot 0,6 + M_S + T_1 \cdot 0,4 + T_2 \cdot 0,1 &= 0, \\ R_A^y &= \frac{1}{0,6} \cdot (T_1 \cdot 0,4 + M_S + T_2 \cdot 0,1) = \\ &= \frac{1}{0,6} \cdot (2,456 \cdot 0,4 + 0,246 + 3,275 \cdot 0,1) = 2,593 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum P_y = R_A^y - T_1 - T_2 + R_B^y = 2,593 - 2,456 - 3,275 + 3,138 = 5,731 - 5,731 = 0.$$

Додатково визначаємо подовжню реакцію опори А:

$$\sum P_z = 0: \quad R_A^z - S_2 = 0; \quad R_A^z = S_2 = 1,637 \text{ кН}.$$

4 Будуємо епюру згинальних моментів M_x (рис. 5.10, з):

$$\begin{aligned} M_1^x &= 0; \quad M_2^x = M_3^x = R_A^y \cdot 0,2 = 2,593 \cdot 0,2 = 0,519 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_4^x &= R_A^y \cdot 0,5 - T_1 \cdot 0,3 = 2,593 \cdot 0,5 - 2,456 \cdot 0,3 = 0,560 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_5^x &= M_4^x - M_S = 0,560 - 0,246 = 0,314 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_6^x = 0. \end{aligned}$$

5 Визначаємо реакції вала у горизонтальній площині (рис. 5.10, д) :

$$\begin{aligned} \sum m_A = 0: \quad -P_1 \cdot 0,2 + P_2 \cdot 0,5 - R_B^x \cdot 0,6 &= 0, \\ R_B^x &= \frac{1}{0,6} \cdot (-P_1 \cdot 0,2 + P_2 \cdot 0,5) = \\ &= \frac{1}{0,6} \cdot (-6,140 \cdot 0,2 + 8,187 \cdot 0,5) = 4,776 \text{ кН}; \\ \sum m_B = 0: \quad -R_A^x \cdot 0,6 + P_1 \cdot 0,4 - P_2 \cdot 0,1 &= 0, \\ R_A^x &= \frac{1}{0,6} \cdot (P_1 \cdot 0,4 - P_2 \cdot 0,1) = \\ &= \frac{1}{0,6} \cdot (6,140 \cdot 0,4 - 8,187 \cdot 0,1) = 2,729 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum P_x = R_A^x - P_1 + P_2 - R_B^x = 2,729 - 6,140 + 8,187 - 4,776 = 10,916 - 10,916 = 0.$$

6 Будуємо епюру згинальних моментів M_y (рис. 5.10,е):

$$M_1^y = 0; \quad M_2^y = M_3^y = R_A^x \cdot 0,2 = 2,729 \cdot 0,2 = 0,546 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_4^y = M_5^y = R_A^x \cdot 0,5 - P_1 \cdot 0,3 = 2,729 \cdot 0,5 - 6,140 \cdot 0,3 = -0,478 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_6^y = 0.$$

7 Прикладаємо крутні моменти до вала (рис. 5.10,ж) та будуємо епюру крутних моментів – $M_{кр}$ (рис. 5.10,з):

$$M_1^{кр} = 0; \quad M_2^{кр} = 0; \quad M_3^{кр} = M_{кр} = 1,228 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_4^{кр} = M_{кр} = 1,228 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5^{кр} = 0; \quad M_6^{кр} = 0.$$

6 Визначаємо величини приведених моментів у характерних перерізах балки і будуємо епюру M_{np} (рис. 5.10,к):

$$M_1^{np} = \sqrt{(M_1^x)^2 + (M_1^y)^2 + (M_1^{кр})^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0;$$
$$M_2^{np} = \sqrt{(M_2^x)^2 + (M_2^y)^2 + (M_2^{кр})^2} = \sqrt{0,519^2 + 0,546^2 + 0^2} = 0,753 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_3^{np} = \sqrt{(M_3^x)^2 + (M_3^y)^2 + (M_3^{кр})^2} = \sqrt{0,519^2 + 0,546^2 + 1,228^2} = 1,441 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_4^{np} = \sqrt{(M_4^x)^2 + (M_4^y)^2 + (M_4^{кр})^2} = \sqrt{0,560^2 + 0,478^2 + 1,228^2} = 1,432 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_5^{np} = \sqrt{(M_5^x)^2 + (M_5^y)^2 + (M_5^{кр})^2} = \sqrt{0,560^2 + 0,478^2 + 0^2} = 0,736 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_6^{np} = \sqrt{(M_6^x)^2 + (M_6^y)^2 + (M_6^{кр})^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0.$$

Зауважимо, що на ділянках вала, де діє крутний момент, епюра M_{np} – криволінійна і угнута, а на інших – прямолінійна. В цьому можна пересвідчитись, підрахувавши величину M_{np} в додатковому (середньому) перерізі тієї чи іншої ділянки вала.

7 Аналізуючи епюру M_{np} (див. рис. 5.10,к), бачимо, що небезпечним перерізом вала є переріз 3, в якому

$$M_3^{np} = M_{np}^{max} = 1,441 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

8 Визначаємо необхідний діаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{np}^{max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,441 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 80}} = 56,83 \text{ мм}.$$

З нормального ряду (див. додаток А) приймаємо: $d = 63 \text{ мм}$.

6 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

6.1 Один раз статично невизначувана балка

Для нерозрізної балки побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати двотавровий переріз і визначити прогин в точці K і кут повороту перерізу A , якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Вихідні дані вибрати із таблиць 6.1 і 6.2 і рисунку 6.1.

Таблиця 6.1 – Вихідні дані до задачі 6.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	2,6	2,4	2,5	2,2	3,0	2,6	2,4	1,8	2,6	2,0
$b, \text{ м}$	4,2	3,4	4,0	3,6	4,5	3,0	3,5	2,5	3,2	4,4
$c, \text{ м}$	1,2	1,0	0,8	0,9	1,3	1,1	0,9	0,8	1,0	1,4

Таблиця 6.2 – Вихідні дані до задачі 6.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M, \text{ кН}\cdot\text{м}$	60	25	65	35	48	30	56	32	40	62
$P, \text{ кН}$	35	42	38	58	40	56	45	54	50	52
$q, \text{ кН/м}$	20	30	22	32	24	34	26	36	28	40

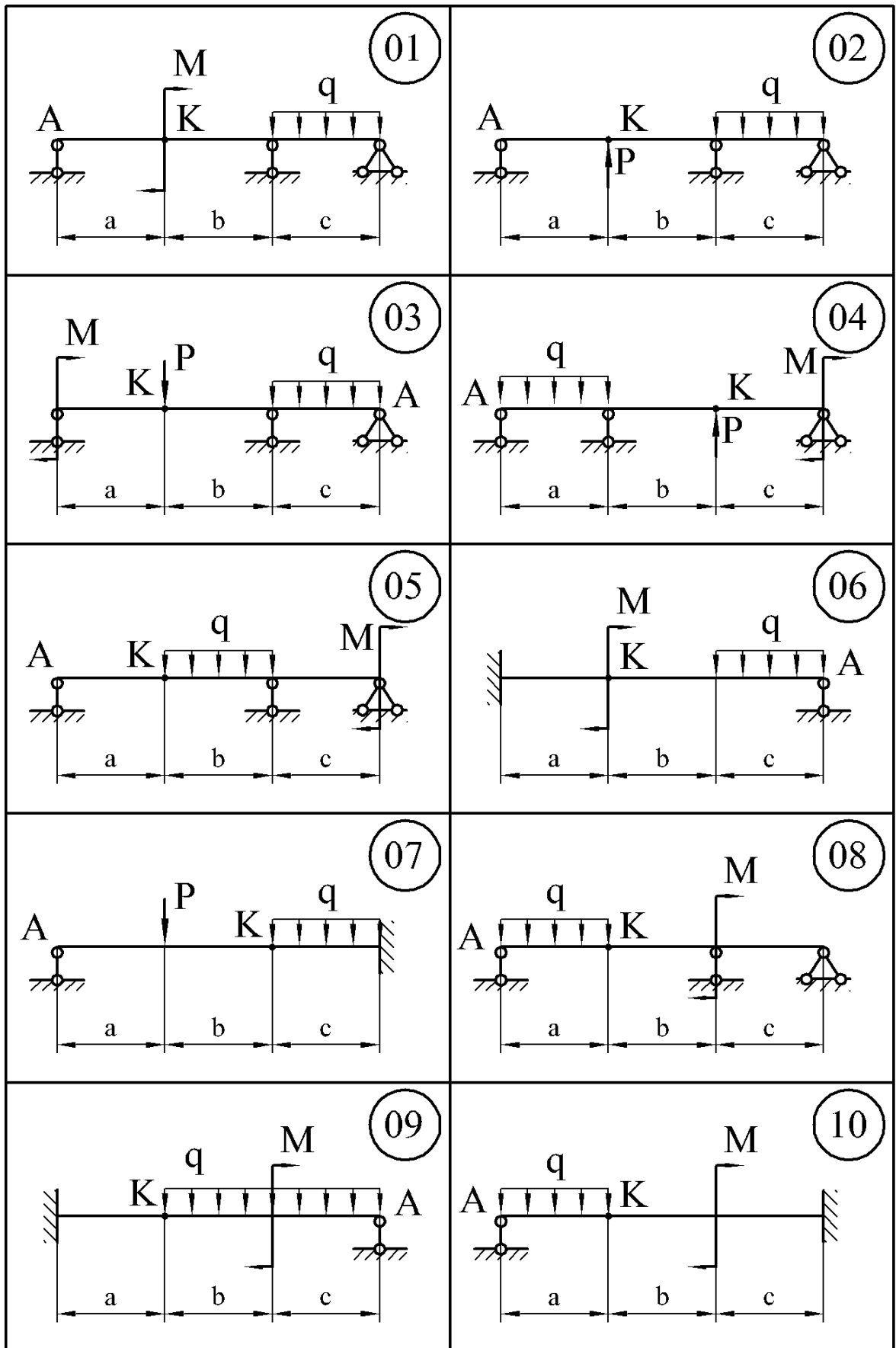


Рисунок 6.1

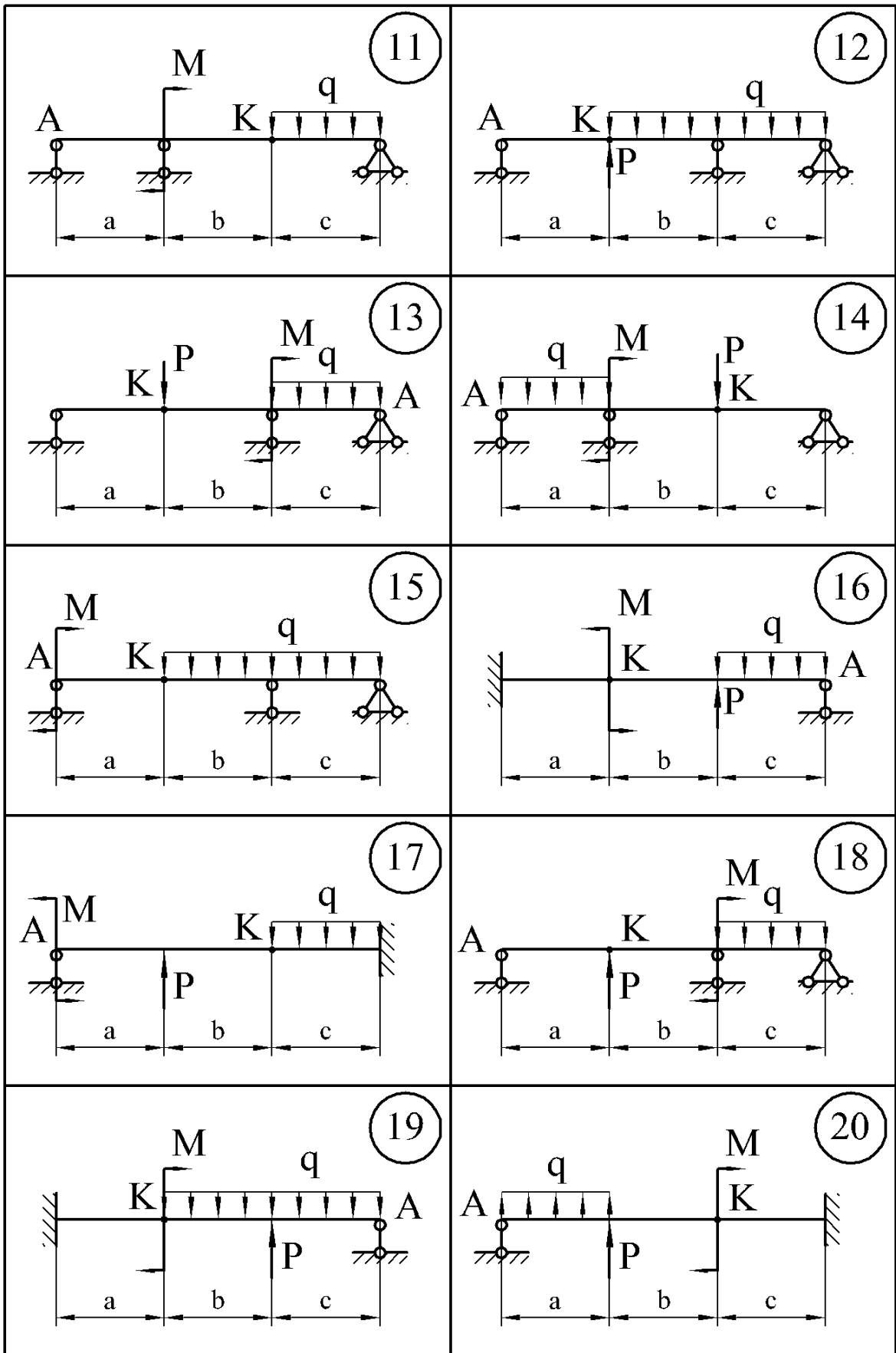


Рисунок 6.1, аркуш 2

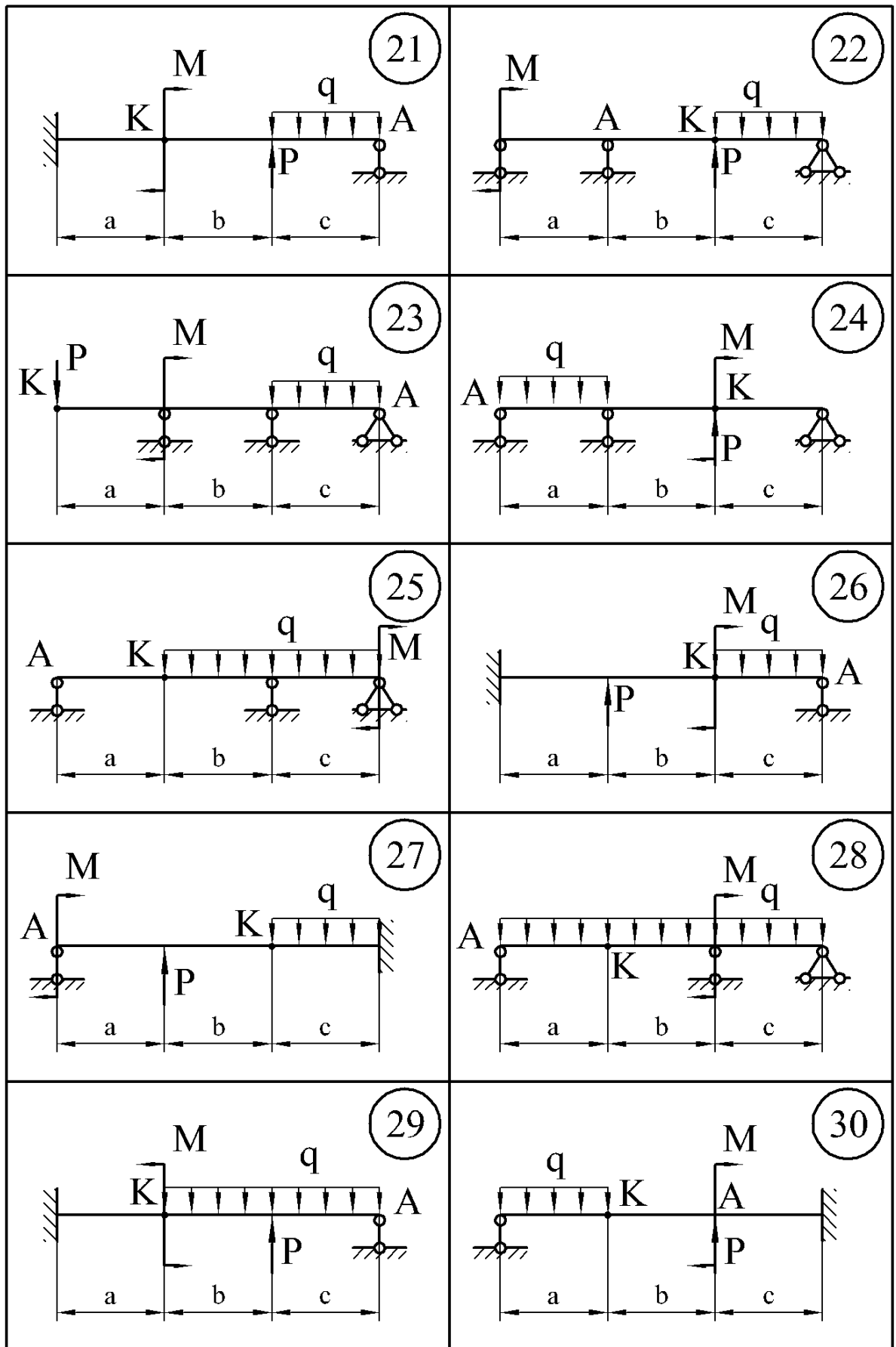


Рисунок 6.1, аркуш 3

6.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 6.1

Для розрахунку нерозрізних балок застосувати метод сил в наступному порядку:

- 1 Встановити ступінь статичної невизначуваності S .
- 2 Вибрати основну систему шляхом урізання шарнірів в місцях проміжних опор або заміни защемлення шарнірно-нерухомою опорою.
- 3 Побудувати еквівалентну систему, для чого до основної системи прикласти зовнішні навантаження і невідомі зусилля (моменти в місцях врізаних шарнірів).
- 4 Скласти систему канонічних рівнянь.
- 5 Побудувати епюри згинальних моментів окремо від зовнішніх навантажень і від одиничних моментів, прикладених в місцях постановки шарнірів.
- 6 Шляхом «перемножування» епюр визначити коефіцієнти канонічних рівнянь і вільні члени.
- 7 Вирішити систему рівнянь і визначити невідомі моменти. До кожної окремої балки прикласти задане навантаження, обчислені опорні моменти і побудувати епюри поперечних сил та згинальних моментів.
- 8 По найбільшому згинаючому моменту з умови міцності на згинання визначити момент опору і з таблиць сортаменту підібрати двотавр.
- 9 Використовуючи один із способів «перемножування» епюр, визначити прогин і кут повороту у вказаних перерізах.

6.1.2 Приклад розв'язання задачі 6.1

1 Розрахунок починаємо з визначення ступеня статичної невизначуваності. Оскільки невідомих реакцій чотири (рис. 6.2, а), а рівнянь статички можна скласти тільки три, то дана задача один раз статично невизначувана.

2 Вибираємо основну систему. Як основну систему застосовуємо систему із врізаним шарніром, що заміняє «зайву» проміжну опору (рис. 6.2, б).

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням і невідомим згинальним моментом X_1 (рис. 6.2, в). Таким чином, еквівалентна система являє собою дві прості шарнірно обперті балки AB та BC , навантажені заданим навантаженням і невідомим згинальним моментом X_1 , що заміняє відкинутий зв'язок між сусідніми прольотами.

4 Для того, щоб визначити невідомий згинальний момент X_1 , скористаємося канонічним рівнянням

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

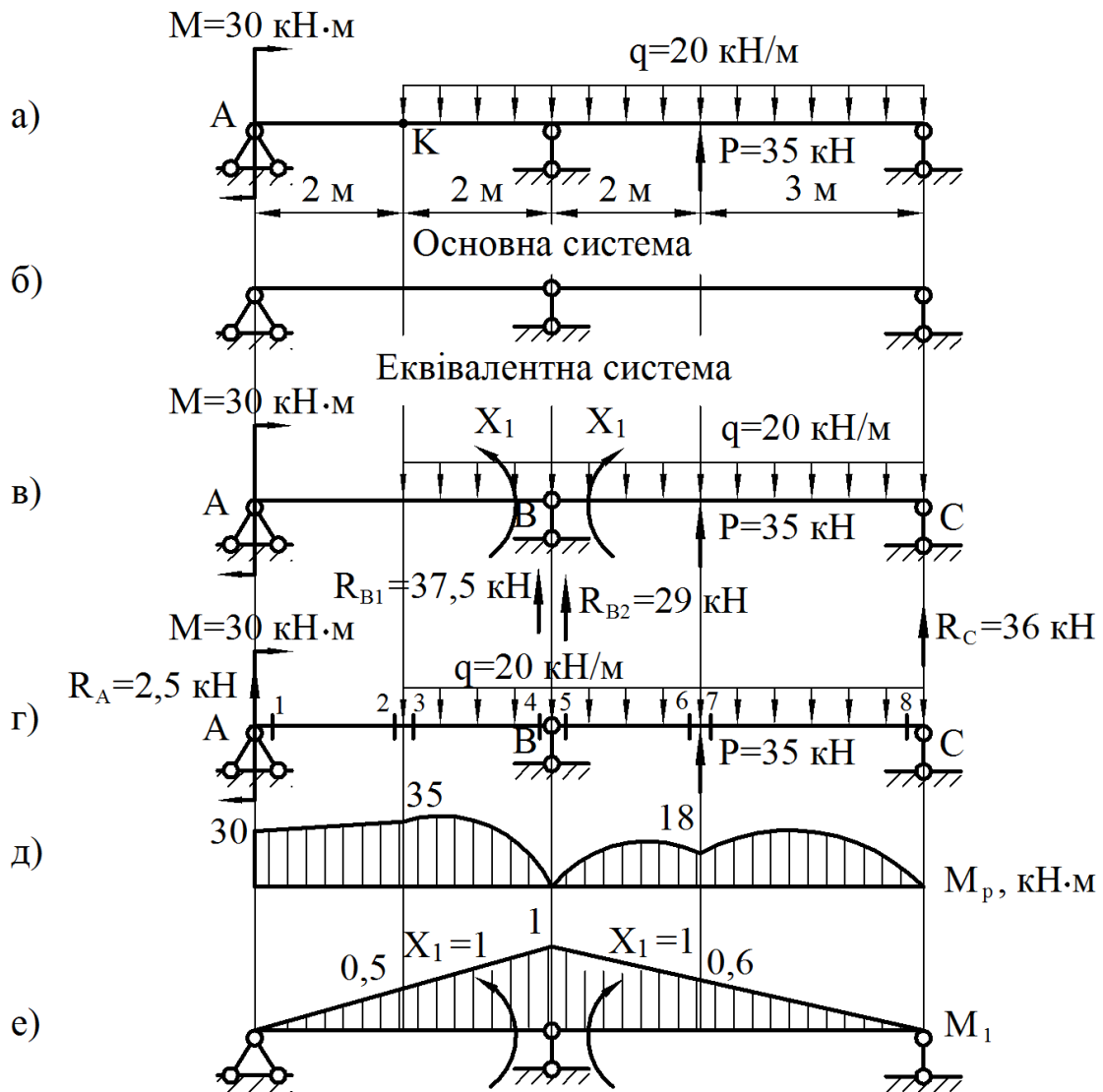


Рисунок 6.2

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням (рис. 6.2, г). Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження, розглядаючи балку AB (рис. 6.2, г).

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - q \cdot 2 \cdot 3 + R_{B1} \cdot 4 = 0,$$

$$R_{B1} = \frac{M + q \cdot 2 \cdot 3}{4} = \frac{30 + 20 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 37,5 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 4 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 1}{4} = \frac{-30 + 20 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 2,5 \text{ кН.}$$

Для перевірки використаємо рівняння

$$\sum P_y = 0.$$

$$-q \cdot 2 + R_A + R_{B1} = 0,$$

$$-20 \cdot 2 + 2,5 + 37,5 = 0,$$

$$-40 + 40 = 0.$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p для балки AB , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 6.2, г):

$$M_1 = M = 30 \text{ кНм,}$$

$$M_2 = M_3 = M + R_A \cdot 2 = 30 + 2,5 \cdot 2 = 35 \text{ кНм,}$$

$$M_4 = 0 \text{ кНм.}$$

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження, розглядаючи балку BC (рис. 6.2, г).

$$\sum M_B = 0,$$

$$P \cdot 2 - q \cdot 5 \cdot 2,5 + R_C \cdot 5 = 0,$$

$$R_C = \frac{P \cdot 2 - q \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = \frac{35 \cdot 2 - 20 \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = 36 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0,$$

$$-P \cdot 3 + q \cdot 5 \cdot 2,5 - R_{B2} \cdot 5 = 0,$$

$$R_{B2} = \frac{-P \cdot 3 + q \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = \frac{-35 \cdot 3 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = 29 \text{ кН.}$$

Для перевірки використаємо рівняння

$$\sum P_y = 0.$$

$$\begin{aligned}
 P - q \cdot 5 + R_{B2} + R_C &= 0, \\
 35 - 20 \cdot 5 + 29 + 36 &= 0, \\
 100 - 100 &= 0.
 \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p для балки BC , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 6.2, г):

$$\begin{aligned}
 M_5 = M_8 &= 0 \text{ кНм}, \\
 M_6 = M_7 &= R_{B2} \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 29 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = 18 \text{ кНм}.
 \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження по характерних перерізах (рис. 6.2, д).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничним моментом X_1 .

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис. 6.2, е):

$$\begin{aligned}
 M_1 = M_8 &= 0, \\
 M_4 = M_5 &= X_1 = 1, \\
 M_2 = M_3 &= \frac{2}{4} = 0,5, \\
 M_6 = M_7 &= \frac{3}{5} = 0,6.
 \end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту по характерних перерізах (див. рис. 6.2, е).

7 Коефіцієнти рівняння δ_{11} і Δ_{1p} визначаємо методом Мору шляхом «перемножування» відповідних епюр.

«Перемноживши» епюру M_1 на епюру M_1 , одержимо δ_{11} .

$$\delta_{11} = \frac{4}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{5}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{3}{EJ_x}.$$

«Помноживши» M_1 на M_p , одержимо Δ_{1p} .

$$\begin{aligned}
 \Delta_{1p} &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 35 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 35 \cdot 0,5 + 35 \cdot 1) + \\
 &+ \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x} (0,5 + 1) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 18 \cdot 0,6 + 18 \cdot 1) +
 \end{aligned}$$

$$+\frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_{\delta}}(1+0,6) + \frac{3}{6EJ_X}(2 \cdot 18 \cdot 0,6) + \frac{20 \cdot 3^3}{24EJ_X}(0,6+0) = \frac{98,2}{EJ_X}.$$

8 Підставляємо коефіцієнти в канонічне рівняння, з рішення якого знаходимо X_1 :

$$\frac{3}{EJ_X} X_1 + \frac{98,2}{EJ_X} = 0,$$

$$3X_1 + 98,2 = 0,$$

$$X_1 = -\frac{98,2}{3} = -32,7 \text{ кНм}.$$

9 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначену основну систему, під дією заданого навантаження та знайденого моменту $X_1 = 32,7 \text{ кНм}$. Тому що X_1 одержали зі знаком «-», то його напрямок змінюємо на протилежний (рис. 6.3, а).

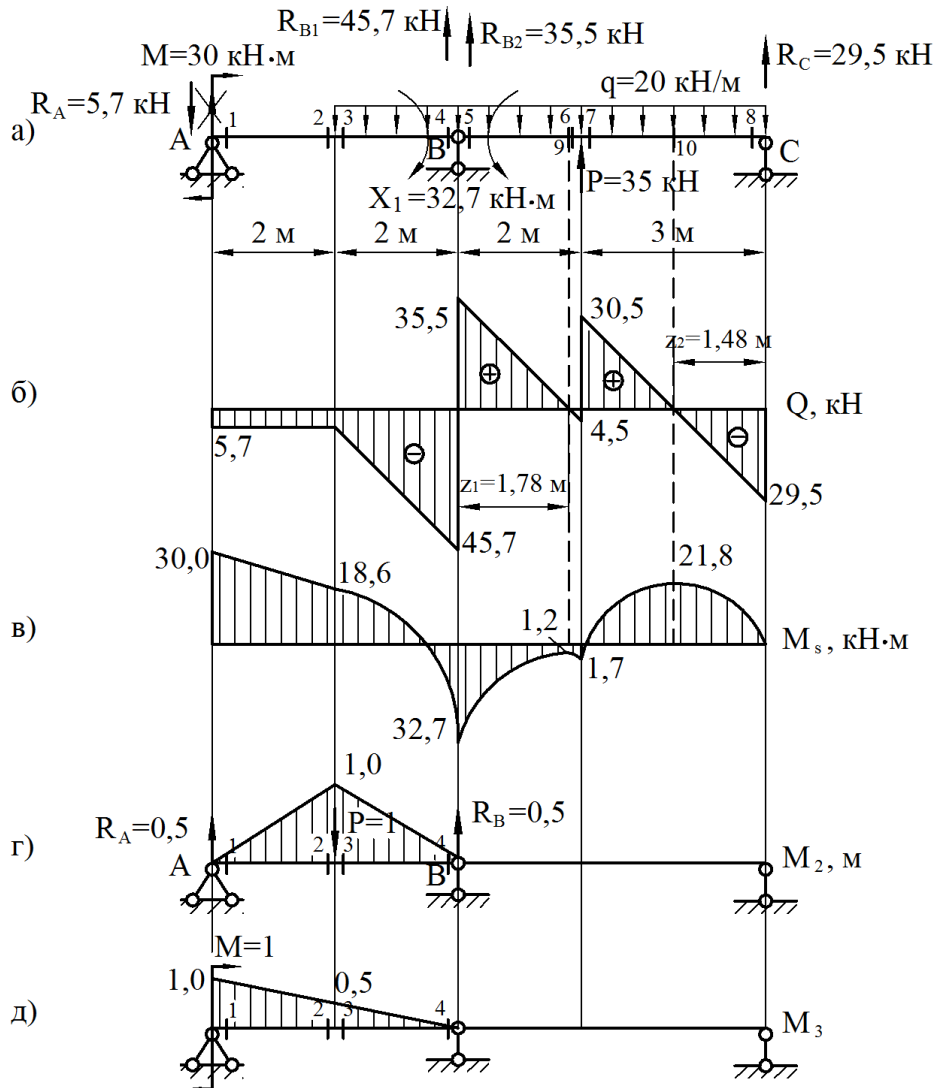


Рисунок 6.3

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайденого моменту $X_1 = 32,7$ кНм, розглядаючи балку AB (рис. 6.3, а):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M - q \cdot 2 \cdot 3 - X_1 + R_{B1} \cdot 4 &= 0, \\ R_{B1} &= \frac{M + q \cdot 2 \cdot 3 + X_1}{4} = \frac{30 + 20 \cdot 2 \cdot 3 + 32,7}{4} = 45,7 \text{ кН.} \\ \sum M_B &= 0, \\ -M + q \cdot 2 \cdot 1 - X_1 - R_A \cdot 4 &= 0, \\ R_A &= \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 1 - X_1}{4} = \frac{-30 + 20 \cdot 2 \cdot 1 - 32,7}{4} = -5,7 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0. \\ -q \cdot 2 + R_A + R_{B1} &= 0, \\ -20 \cdot 2 - 5,7 + 45,7 &= 0, \\ -45,7 + 45,7 &= 0.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$\begin{aligned}Q_1 = Q_2 = Q_3 &= -R_A = -5,7 \text{ кН}, \\ Q_4 &= -R_{B1} = -45,7 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$\begin{aligned}M_1 &= M = 30 \text{ кНм}, \\ M_2 = M_3 &= M - R_A \cdot 2 = 30 - 5,7 \cdot 2 = 18,6 \text{ кНм}, \\ M_4 &= -X_1 = -32,7 \text{ кНм}.\end{aligned}$$

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та знайденого моменту $X_1 = 32,7$ кНм, розглядаючи балку BC (рис. 6.3, а):

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ P \cdot 2 - q \cdot 5 \cdot 2,5 + X_1 + R_C \cdot 5 &= 0, \\ R_C &= \frac{-P \cdot 2 + q \cdot 5 \cdot 2,5 - X_1}{5} = \frac{-35 \cdot 2 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5 - 32,7}{5} = 29,5 \text{ кН.} \\ \sum M_C &= 0,\end{aligned}$$

$$-P \cdot 3 + q \cdot 5 \cdot 2,5 + X_1 - R_{B2} \cdot 5 = 0,$$

$$R_{B2} = \frac{-P \cdot 3 + q \cdot 5 \cdot 2,5 + X_1}{5} = \frac{-35 \cdot 3 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5 + 32,7}{5} = 35,5 \text{ кН}.$$

Для перевірки використаємо рівняння

$$\sum P_y = 0,$$

$$P - q \cdot 5 + R_{B2} + R_C = 0,$$

$$35 - 20 \cdot 5 + 35,5 + 29,5 = 0,$$

$$100 - 100 = 0.$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q_5 = R_{B1} = 35,5 \text{ кН},$$

$$Q_6 = R_{B1} - q \cdot 2 = 35,5 - 20 \cdot 2 = -4,5 \text{ кН},$$

$$Q_8 = -R_C = -29,5 \text{ кН},$$

$$Q_7 = -R_C + q \cdot 3 = -29,5 + 20 \cdot 3 = 30,5 \text{ кН}.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M_5 = -X_1 = -32,7 \text{ кНм},$$

$$M_6 = M_7 = -X_1 + R_{B2} \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -32,7 + 35,5 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = -1,7 \text{ кНм},$$

$$M_8 = 0 \text{ кНм}.$$

Так як епюра поперечних сил пересікає базову лінію та міняє знак з «+» на «-», то в цих точках маємо максимальні значення згинальних моментів.

$$z_1 = \frac{35,5}{20} = 1,78 \text{ м},$$

$$M_9 = -X_1 + R_{B2} \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} =$$

$$= -32,7 + 35,5 \cdot 1,78 - 20 \cdot 1,78 \cdot \frac{1,78}{2} = -1,2 \text{ кНм},$$

$$z_2 = \frac{29,5}{20} = 1,48 \text{ м},$$

$$M_{10} = R_C \cdot z_2 - q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2} = 29,5 \cdot 1,48 - 20 \cdot 1,48 \cdot \frac{1,48}{2} = 21,8 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри поперечних сил (рис. 6.3, б) і згинальних моментів (рис. 6.3, в).

10 Виконуємо деформаційну перевірку. Вона полягає в тому, що при «перемножуванні» епюри M_5 на M_1 повинен вийти нуль.

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} &= \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 18,6 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5) + \\ &+ \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 18,6 \cdot 0,5 - 2 \cdot 32,7 \cdot 1 + 18,6 \cdot 1 - 32,7 \cdot 0,5) + \\ &+ \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(0,5 + 1) + \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 32,7 \cdot 1 - 2 \cdot 1,7 \cdot 0,6 - 32,7 \cdot 0,6 - 1,7 \cdot 1) + \\ &+ \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(1 + 0,6) + \frac{3}{6EJ_x}(-2 \cdot 1,7 \cdot 0,6) + \frac{20 \cdot 3^3}{24EJ_x}(0,6 + 0) = \\ &= \frac{11,20 - 14,85 + 10 - 29,59 + 10,67 - 1,02 + 13,50}{EJ_x} = \frac{45,37 - 45,46}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Визначаємо похибку. При визначенні похибки необхідно обчислити всі додатні та від'ємні величини окремо, а потім різницю розділити на меншу з величин за модулем та помножити на 100%. Похибка складає:

$$\left| \frac{45,37 - 45,46}{45,37} \right| \cdot 100\% = 0,20\%$$

11 На епюрі згинальних моментів (див. рис.6.3, в) знаходимо небезпечний переріз, в якому $M_{\max} = 30$ кНм. Розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$\begin{aligned} W_x &\geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \\ W_x &\geq \frac{30 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 187,5 \text{ м}^3. \end{aligned}$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 187,5 \text{ см}^3$. По таблиці сортаменту (див. додаток А) вибираємо двотавр № 20а, для якого $W_x = 203 \text{ см}^3$, $J_x = 2030 \text{ см}^4$.

12 Визначаємо прогин в точці К. Для цього до основної системи в точці К прикладаємо одиничну силу, від неї визначаємо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів (рис.6.3, г), яку «перемножуємо» на епюру M_s (див. рис.6.3, в).

$$y_K = \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 18,6 \cdot 1 + 30 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 18,6 \cdot 1 - 32,7 \cdot 1) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(0 + 1) = \frac{22,40 + 1,50 + 6,67}{EJ_x} = \frac{30,57}{EJ_x} = \frac{30,57 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 7,53 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7,53 \text{ мм}.$$

Знак «плюс» вказує на те, що точка K переміщається по напрямку одиничної сили, тобто вниз.

13 Визначення кута повороту перерізу A . У перерізі A прикладаємо одиничний момент, від нього будемо епюру згинальних моментів (рис.6.3, д), яку «перемножимо» на епюру M_G (див. рис. 6.3, в).

$$\theta_A = \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 30 \cdot 1 + 2 \cdot 18,6 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5 + 18,6 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 18,6 \cdot 0,5 - 32,7 \cdot 0,5) + \frac{20 \cdot 2^3}{24EJ_x}(0,5 + 0) = \frac{37,40 - 4,70 + 3,33}{EJ_x} = \frac{36,03}{EJ_x} = \frac{36,03 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 0,0089 \text{ рад}.$$

Знак «плюс» указує на те, що переріз A повертається у напрямі одиничного моменту, тобто за годинниковою стрілкою.

6.2 Один раз статично невизначувана рама

Для сталеві рами необхідно розкрити статичну невизначуваність, побудувати епюри повздовжніх, поперечних сил і згинальних моментів, підібрати номер двотавра і визначити кут повороту перерізу K , якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Вихідні дані вибрати із таблиць 6.1 і 6.2 і рисунку 6.4.

6.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 6.2

План розв'язання задачі 6.2 такий же, як і для задачі 6.1. Вибір основної системи здійснюється шляхом відкидання «зайвих» зв'язків, решта етапів розв'язання аналогічна таким задачі 6.1.

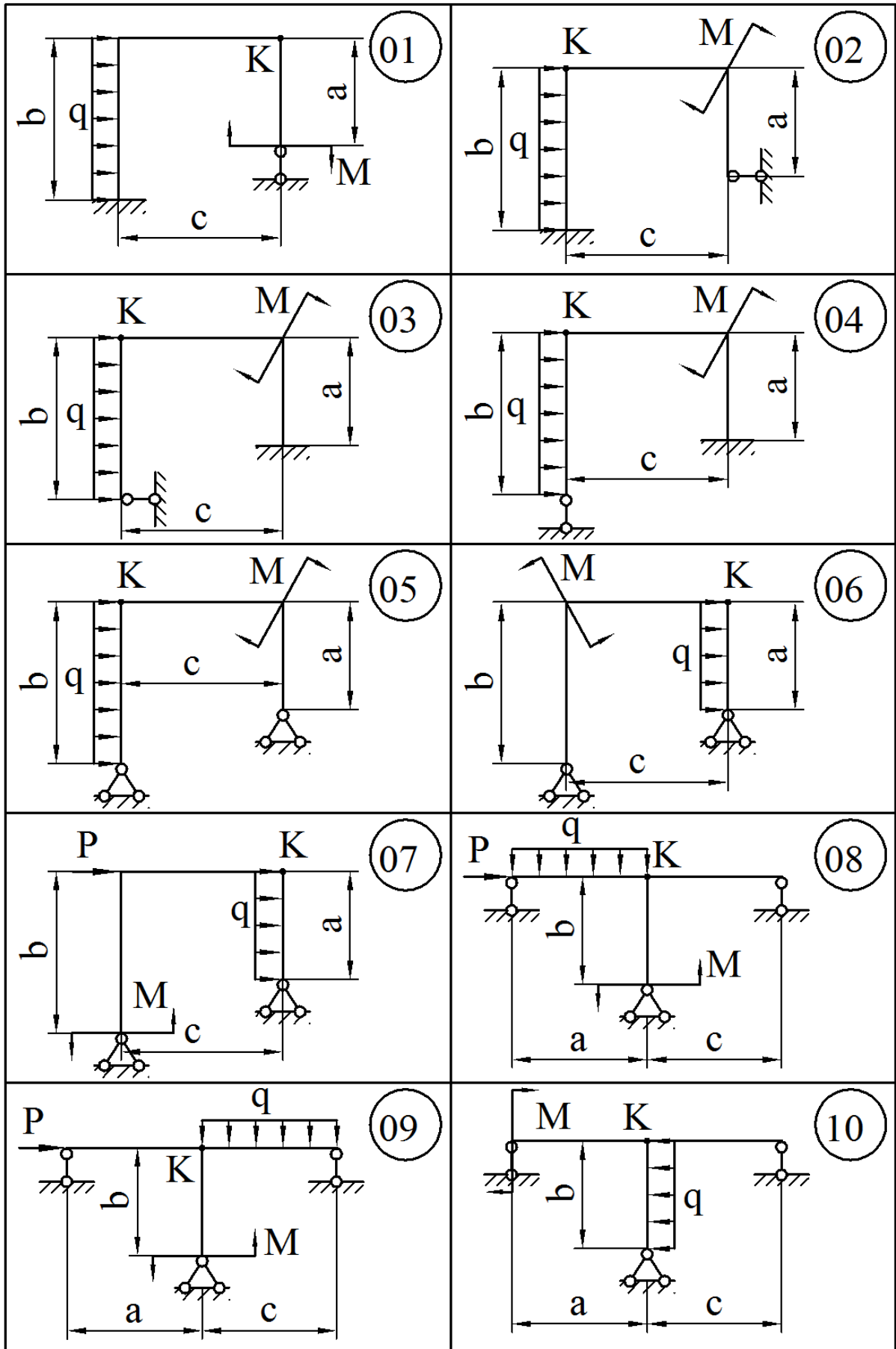


Рисунок 6.4

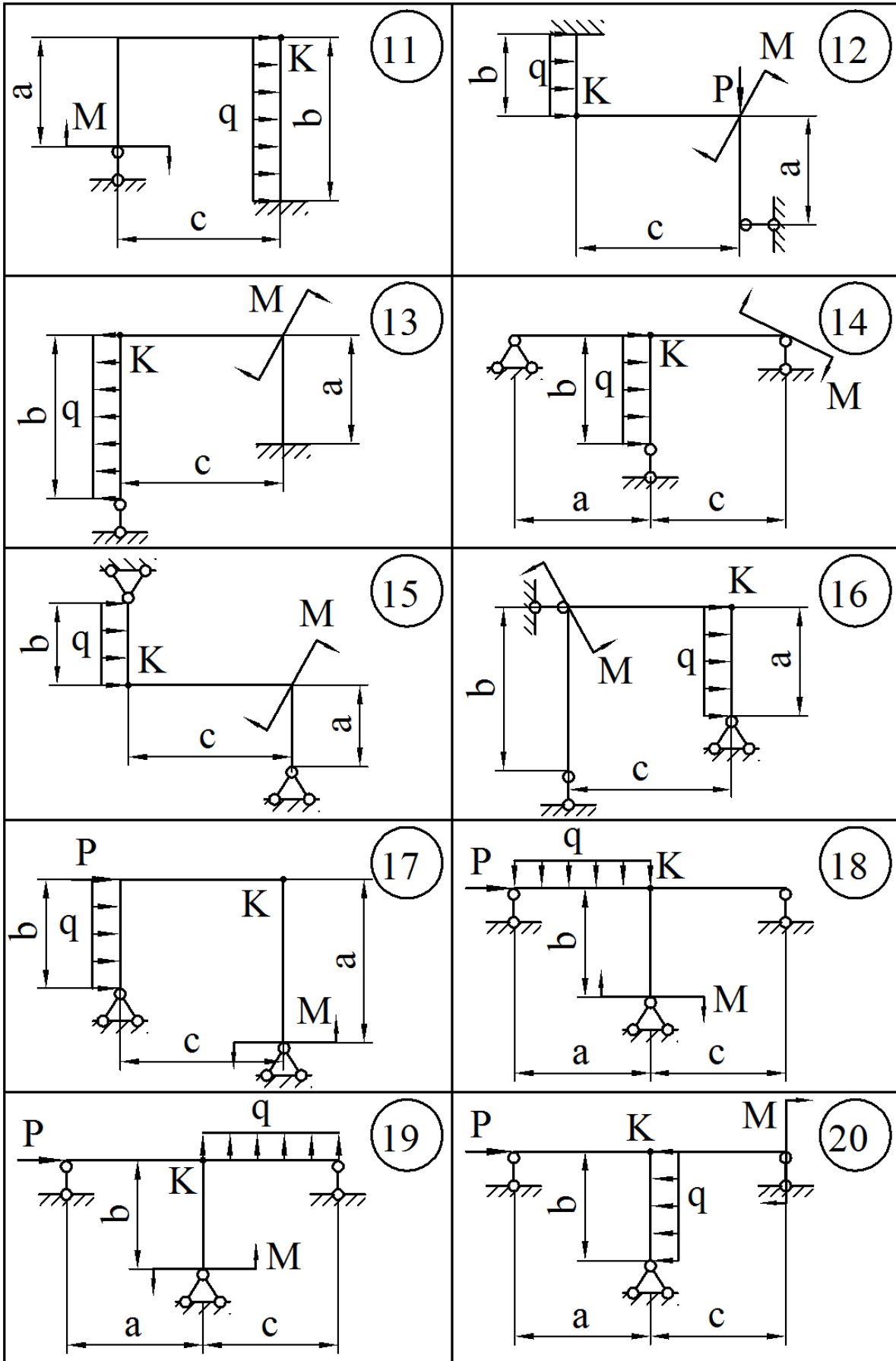


Рисунок 6.4, аркуш 2

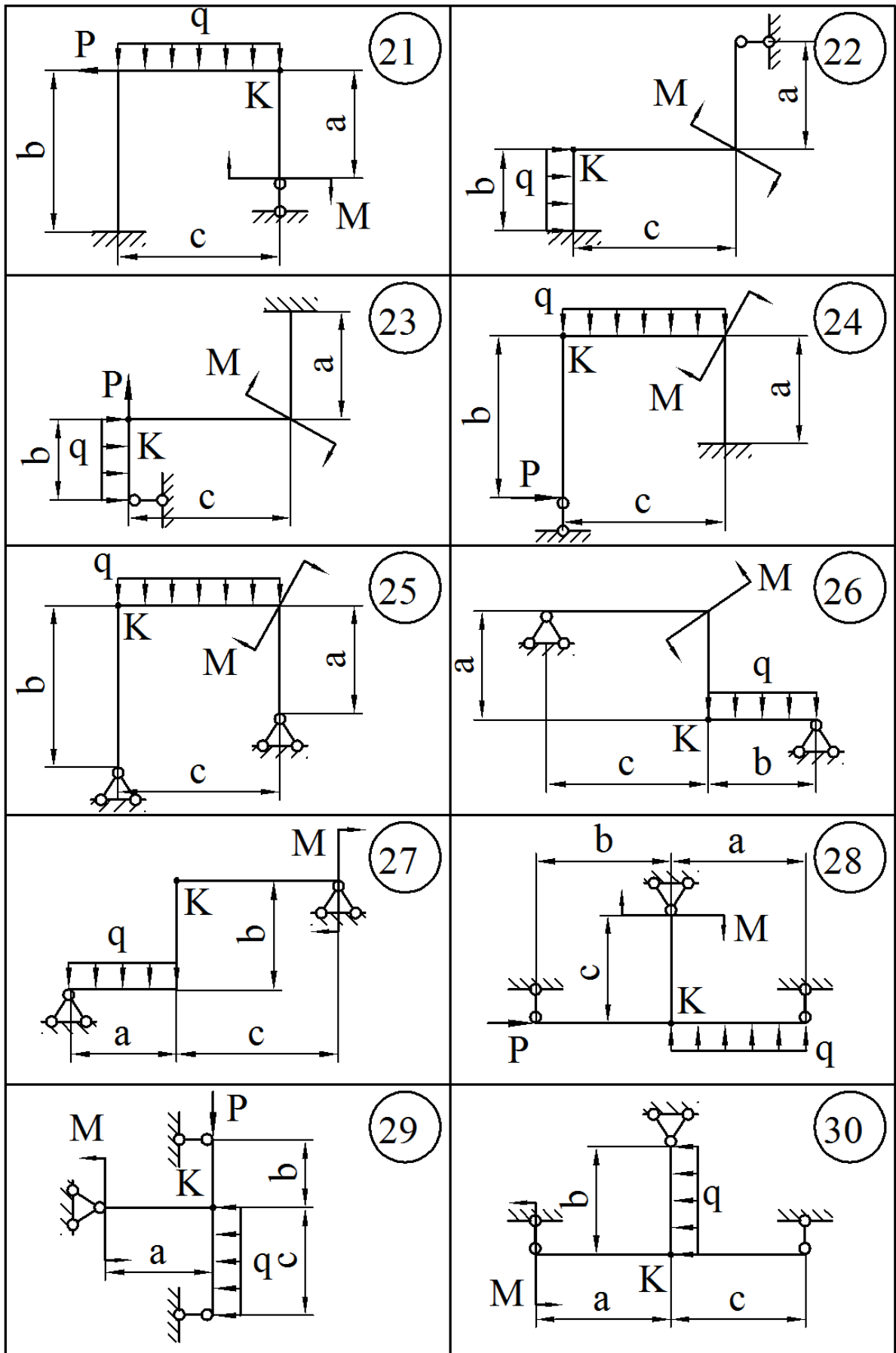


Рисунок 6.4, аркуш 3

6.2.2 Приклад розв'язання задачі 6.2

1 Аналізуємо задану систему (рис. 6.5, а). Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи. Дана система один раз статично невизначувана.

2 Вибираємо основну систему, видаляючи «зайві зв'язки» і заміняючи вихідну систему статично визначеною (рис 6.5, б).

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням та «зайвими невідомими зусиллями», що заміняють дію вилучених зв'язків (рис. 6.5, в).

4 Для того, щоб визначити «зайве невідоме зусилля» X_1 , скористаємося канонічним рівнянням

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням. Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження (рис. 6.5, г) та будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p по характерних перерізах (рис. 6.5, д).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_1 . Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили (рис. 6.5, е) та будуємо епюру згинальних моментів від одиничної сили по характерних перерізах \overline{M}_1 (див. рис. 6.5, е).

7 Визначаємо коефіцієнти канонічного рівняння, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат (див. додаток Б):

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1,5}{6EJ_x}(2 \cdot 1,5 \cdot 1,5) + \frac{5}{6EJ_x}(2 \cdot 1,5 \cdot 1,5 + 2 \cdot 2,5 \cdot 2,5 - 1,5 \cdot 2,5 - 2,5 \cdot 1,5) + \\ &+ \frac{2,5}{6EJ_x}(2 \cdot 2,5 \cdot 2,5) = \frac{1,125 + 7,917 + 5,208}{EJ_x} = \frac{14,25}{EJ_x}, \\ \Delta_{1p} &= \frac{2}{6EJ_x}(-2 \cdot 24 \cdot 0,1 + 24 \cdot 1,5) + \\ &+ \frac{3}{6EJ_x}(-2 \cdot 24 \cdot 0,1 - 2 \cdot 15 \cdot 2,5 - 24 \cdot 2,5 - 0,1 \cdot 15) + \\ &+ \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x}(-0,1 - 2,5) + \frac{2,5}{6EJ_x}(-2 \cdot 15 \cdot 2,5 - 15 \cdot 2,5) = -\frac{136,38}{EJ_x}.\end{aligned}$$

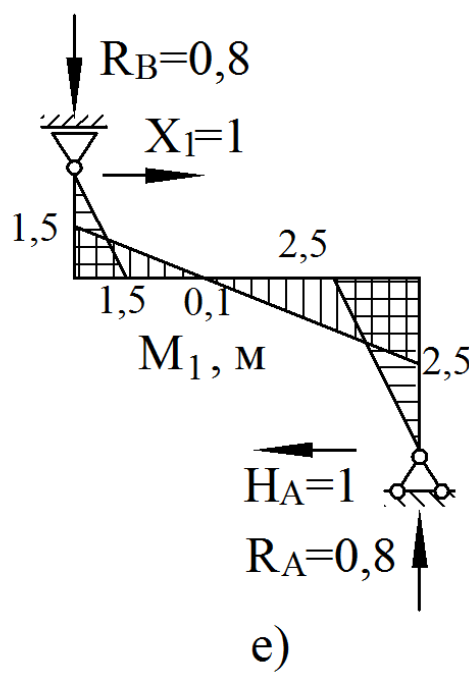
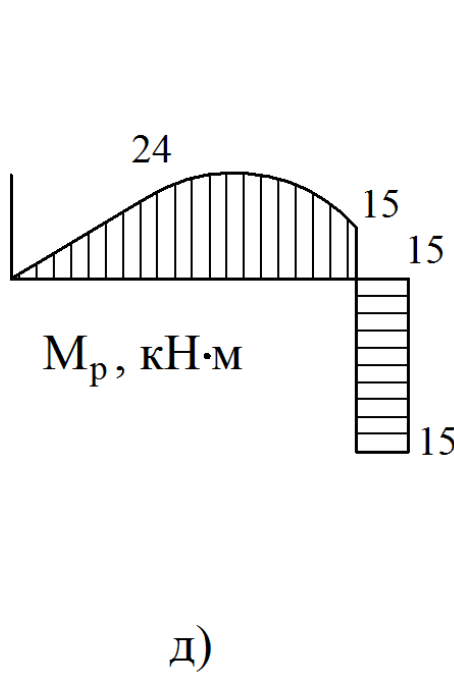
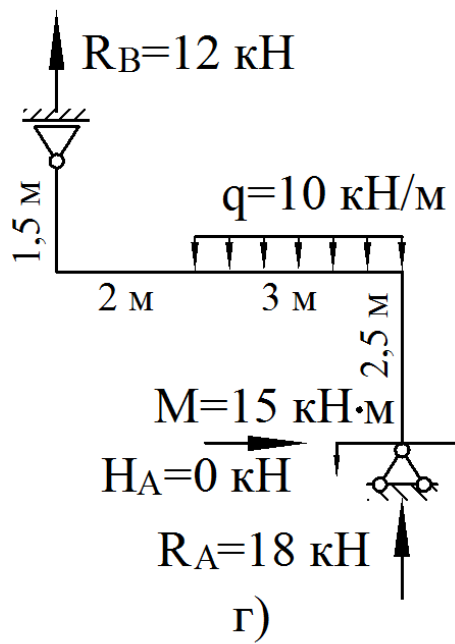
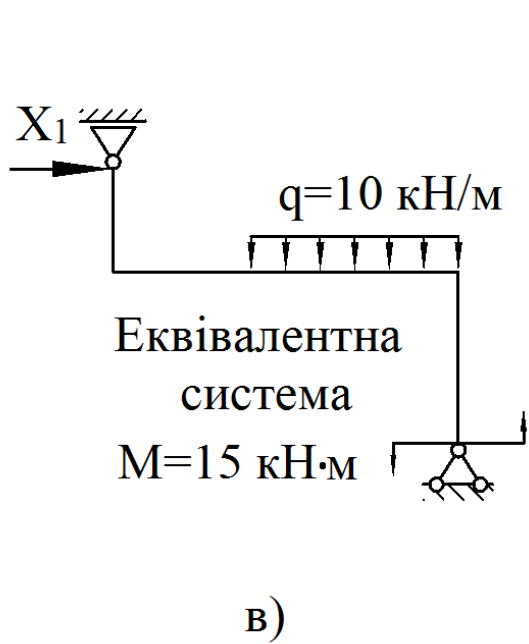
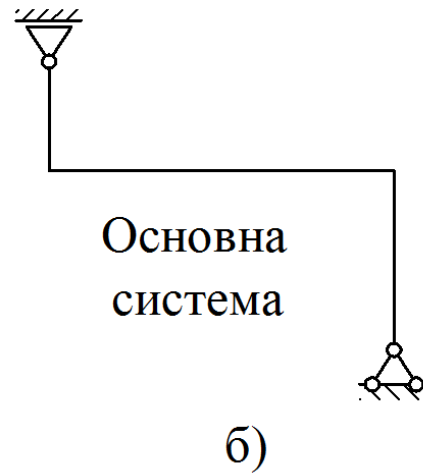
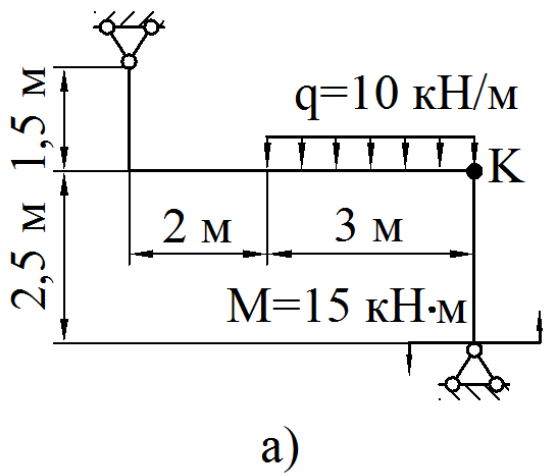


Рисунок 6.5

8 Розв'язуємо канонічне рівняння.

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \frac{14,25}{EJ_x} X_1 - \frac{136,38}{EJ_x} &= 0, \\ 14,25X_1 - 136,38 &= 0, \\ X_1 &= \frac{136,38}{14,25} = 9,57 \text{ кН}.\end{aligned}$$

9 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайденої сили $X_1 = 9,57$ кН (рис. 6.6, а).

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та сили $X_1 = 9,57$ кН (див. рис. 6.6, а).

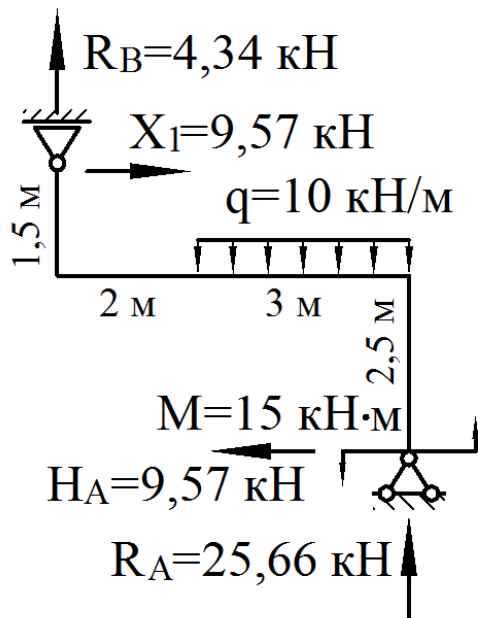
Будуємо епюри поздовжніх сил N (рис. 6.6, б), поперечних сил Q (рис. 6.6, в), а також згинальних моментів M_S (рис. 6.6, г) по характерних перерізах.

10 Виконуємо деформаційну перевірку. Так як в заданій статично невизначуваній системі переміщення по напрямку X_1 дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_S на епюру \overline{M}_1 повинен рівнятися нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$.

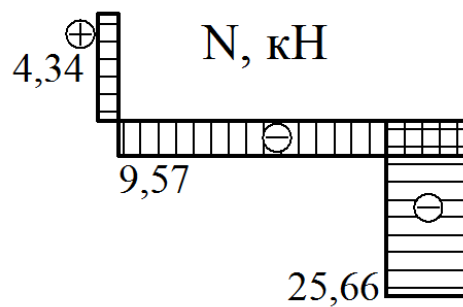
$$\begin{aligned}\Delta_{1s} &= \frac{1,5}{6EJ_x} (2 \cdot 14,36 \cdot 1,5) + \\ &+ \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 14,36 \cdot 1,5 - 2 \cdot 23,04 \cdot 0,1 - 14,36 \cdot 0,1 + 23,04 \cdot 1,5) + \\ &+ \frac{3}{6EJ_x} (-2 \cdot 23,04 \cdot 0,1 + 2 \cdot 8,93 \cdot 2,5 - 23,04 \cdot 2,5 + 8,93 \cdot 0,1) + \\ &+ \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x} (-0,1 - 2,5) + \frac{2,5}{6EJ_x} (2 \cdot 8,93 \cdot 2,5 - 15 \cdot 2,5) = \\ &= \frac{10,77 + 23,87 - 8,33 - 29,25 + 2,98}{EJ_x} = \frac{37,62 - 37,58}{EJ_x}.\end{aligned}$$

Похибка становить:

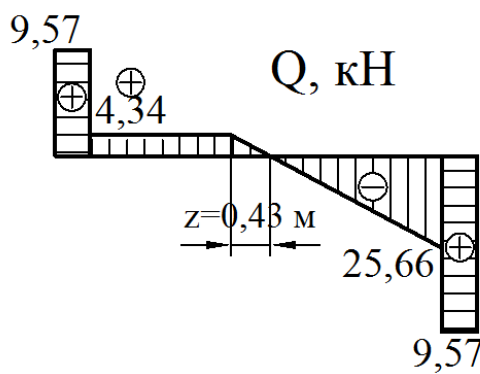
$$\left| \frac{37,62 - 37,58}{37,58} \right| \cdot 100\% = 0,11\%$$



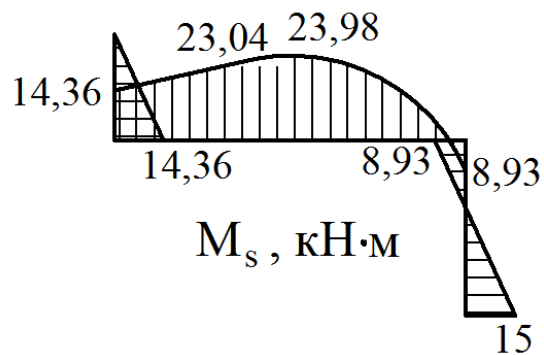
а)



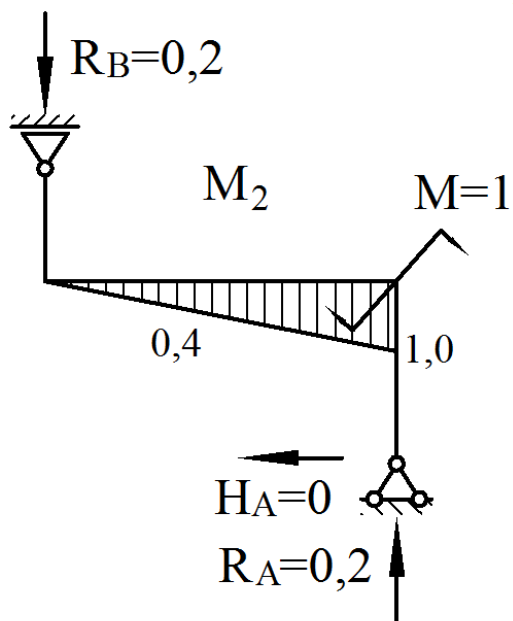
б)



в)



г)



д)

Рисунок 6.6

11 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

За епюрою M_s (див. рис. 6.6, г) знаходимо найбільший згинаючий момент $M_{\max} = 23,98 \text{ кНм}$.

Так як осьова сила незначна, то розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$
$$W_x \geq \frac{23,98 \cdot 10^{-3}}{180} \cdot 10^6 = 133,2 \text{ см}^3.$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 133,2 \text{ см}^3$. По таблиці сортаменту (див. додаток А) вибираємо двотавр № 18, для якого $W_x = 143 \text{ см}^3$, $J_x = 1290 \text{ см}^4$.

12 Визначаємо кут повороту перерізу К. Для цього до основної системи в перерізі К прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$. Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту (рис. 6.6, д) та будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту по характерних перерізах M_2 (див. рис 6.6, д).

$$\theta_K = \Delta_{2s} = \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 23,04 \cdot 0,4 - 14,36 \cdot 0,4) +$$
$$+ \frac{3}{6EJ_x} (-2 \cdot 23,04 \cdot 0,4 + 2 \cdot 8,93 \cdot 1,0 - 23,04 \cdot 1,0 + 8,93 \cdot 0,4) +$$
$$+ \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x} (-0,4 - 1,0) = \frac{-33,83}{EJ_x}.$$

Остаточню маємо:

$$\theta_K = \frac{-33,83 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,0131 \text{ рад}.$$

Кут одержали з «мінусом», це означає що переріз K повертається у бік протилежний одиничному моменту, тобто проти годинникової стрілки.

6.3 Двічі статично невизначувана рама

Розкрити статичну невизначуваність рами, побудувати епюри повздовжніх, поперечних сил і згинальних моментів. Підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначити кут повороту вузла K . Виконати деформаційну перевірку. Відносна похибка не повинна бути більшою за 2%.

Вихідні дані вибрати із таблиць 6.3 та 6.4 і рисунку 6.7.

Таблиця 6.3 – Вихідні дані до задачі 6.3

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	1,0	1,2	0,8	2,0	2,2	1,2	1,6	1,0	1,8	1,4
$b, \text{ м}$	2,0	1,6	1,4	2,4	1,4	1,8	2,0	1,4	1,2	2,2
$c, \text{ м}$	2,5	2,0	1,8	0,8	0,8	2,2	2,4	2,2	2,4	0,8
$d, \text{ м}$	2,2	0,8	1,0	1,2	1,8	0,8	1,0	0,8	0,8	1,8

Таблиця 6.4 – Вихідні дані до задачі 6.3

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M, \text{ кН}\cdot\text{м}$	16	8	10	12	10	8	8	10	12	8
$P, \text{ кН}$	10	14	18	20	16	22	20	22	14	18
$q, \text{ кН/м}$	8	10	6	8	6	10	10	6	10	10

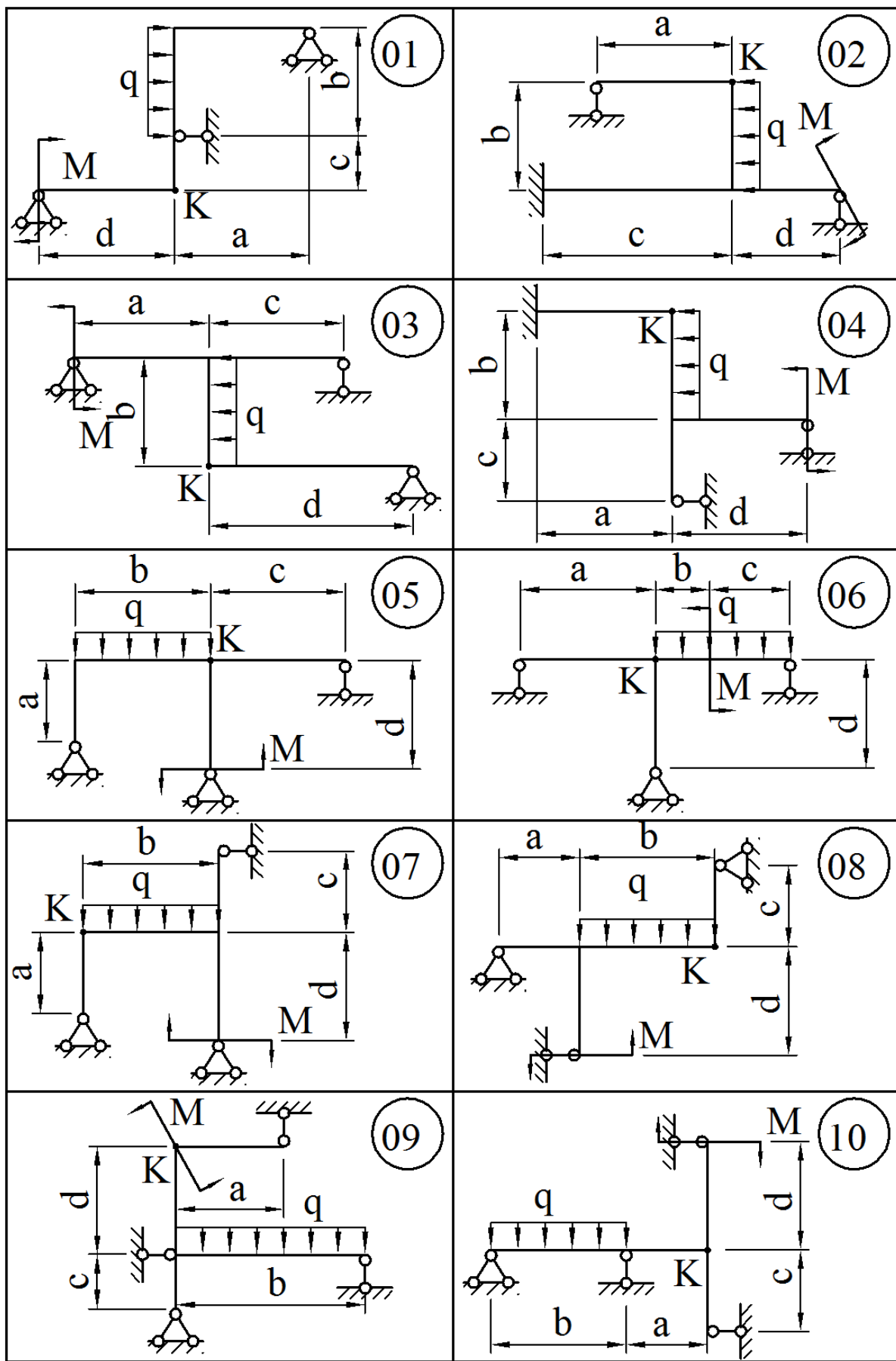


Рисунок 6.7

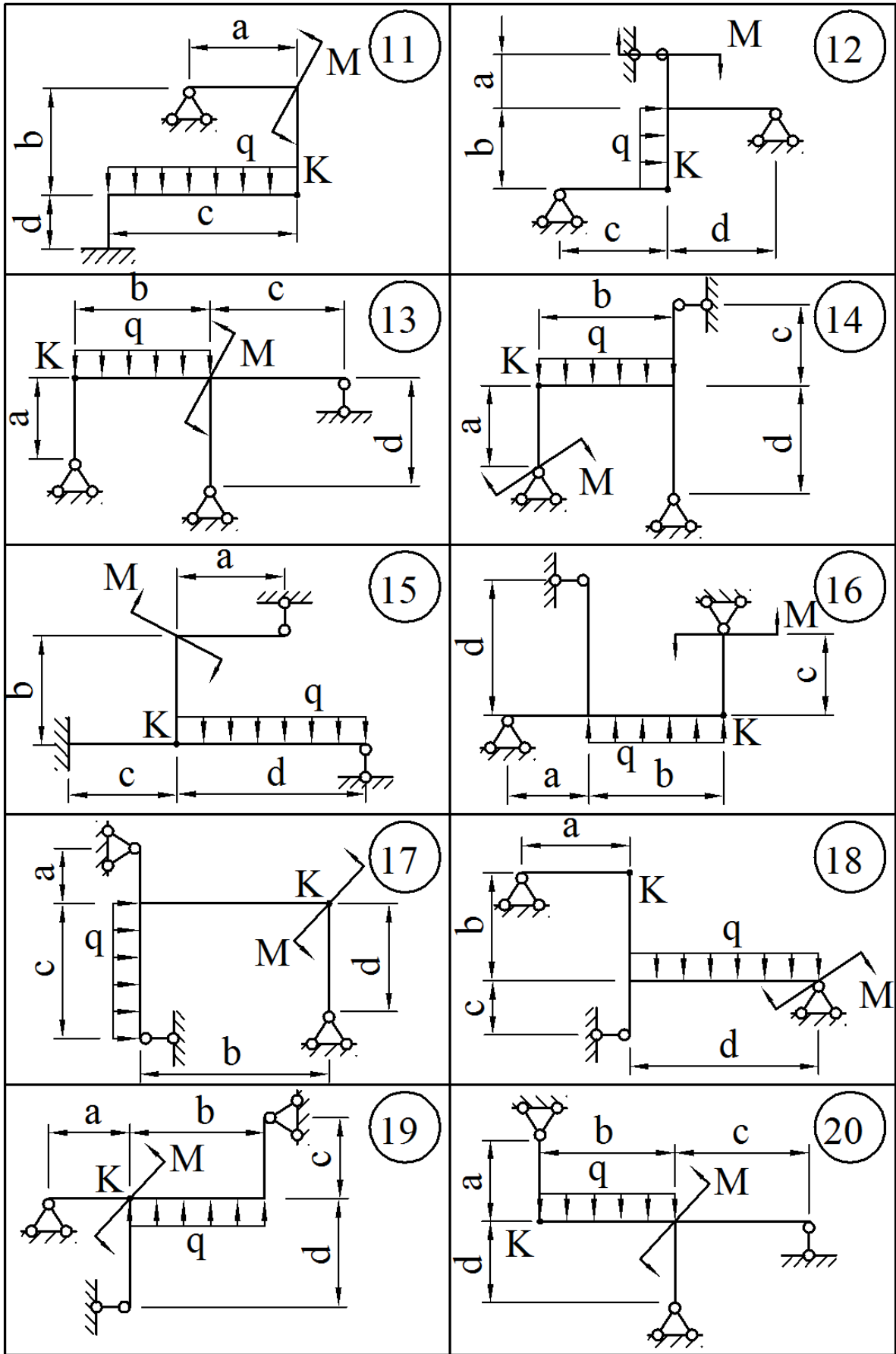


Рисунок 6.7, аркуш 2

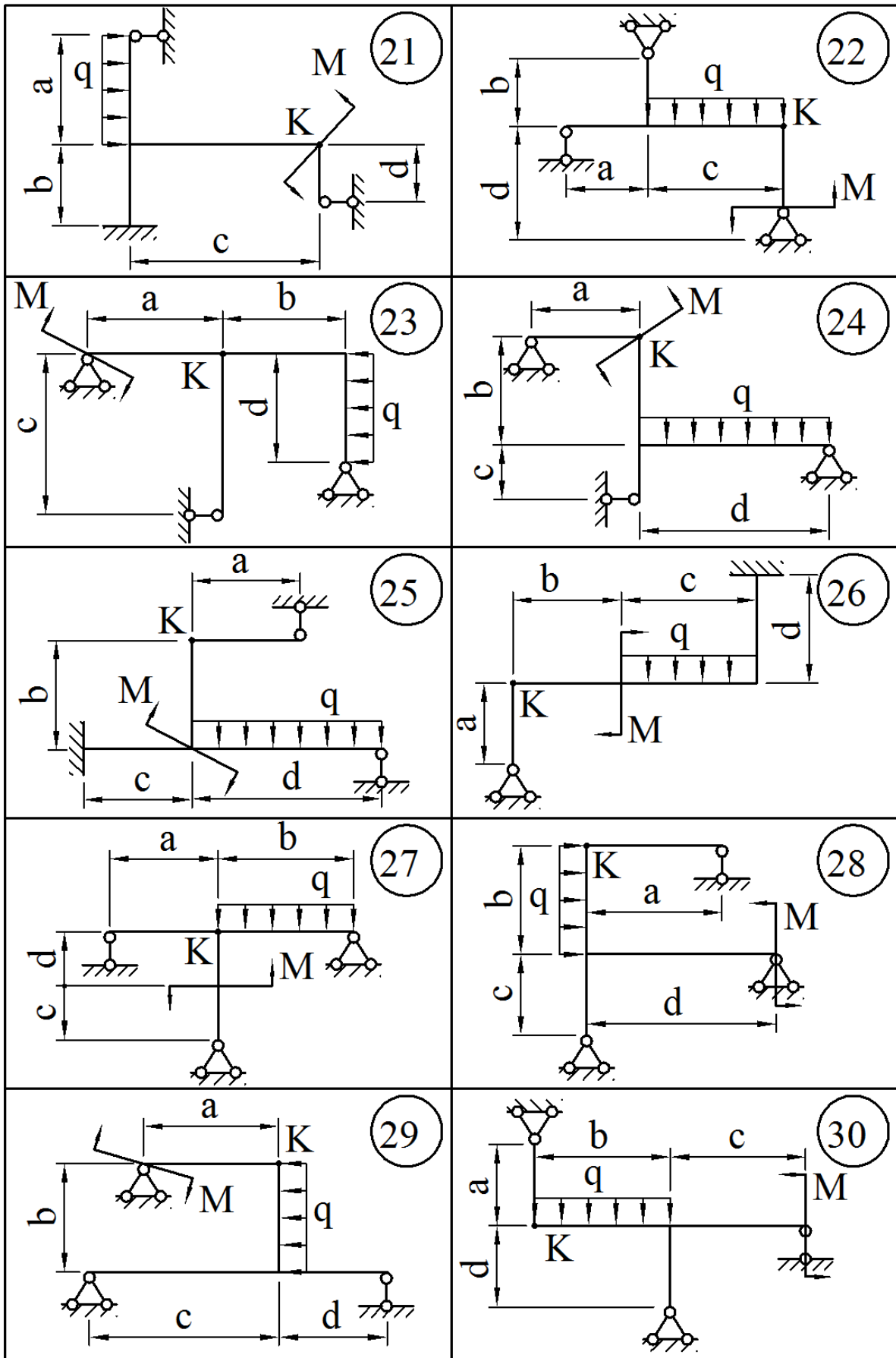


Рисунок 6.7, аркуш 3

6.3.1 Методичні вказівки до виконання задач 6.3...6.5

Статично невизначуваними системами називаються системи, у яких кількість зв'язків перевищує кількість рівнянь рівноваги.

Для розв'язання статично невизначуваних систем методом сил, у яких в якості невідомих виступають зусилля, необхідно:

- 1 Звільнити балку або раму від зв'язків, замінивши їх реакціями.
- 2 Визначити ступінь статичної невизначуваності системи

$$S = n_R - n_y,$$

де S – ступінь статичної невизначуваності;

n_R – кількість невідомих зв'язків;

n_y – кількість можливих рівнянь рівноваги.

- 3 Вибрати основну систему шляхом відкидання «зайвих» зв'язків.

Рекомендується основну систему вибрати якнайближче до вихідного, тобто відкидати ті зв'язки, без яких жорсткість системи зменшується не занадто сильно. Основна система повинна бути статично визначна і не повинна бути механізмом, тобто кількість зв'язків повинна дорівнювати кількості рівнянь рівноваги. При виборі основної системи необхідно тільки відкидати зв'язки і нічого не додавати або змінювати. Це єдине місце, де є можливість обирати, однак від вибору основної системи залежить кількість і якість обчислень.

- 4 Утворити еквівалентну систему, приклавши до основної системи усі відомі навантаження і реакції відкинутих зв'язків.

- 5 Скласти систему канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0. \end{cases}$$

Кількість рівнянь у системі повинна відповідати ступеню статичної невизначуваності задачі, а кількість додатків на одиницю більше. Кожен з додатків у рівнянні є переміщенням від відомих або невідомих навантажень у напрямку відкинутого зв'язку, при цьому переміщення від невідомих навантажень представлено як добуток переміщення від одиничного навантаження і невідомого навантаження.

- 6 Завантажити основну систему тільки зовнішніми навантаженнями, визначити опорні реакції і побудувати епюру згинальних моментів M_p («вантажну епюру»).

7 Завантажити основну систему тільки одним одиничним навантаженням у перерізі і напрямку першого відкинутого зв'язку, визначити опорні реакції і побудувати епюру згинальних моментів \overline{M}_1 («одиначну епюру»).

Пункт 7 повторити стільки разів, скільки невідомих реакцій.

8 Шляхом «перемножування» епюр визначити коефіцієнти канонічних рівнянь і вільні члени. При цьому зручно користуватися загальною формулою крайніх ординат (додаток *B*), одержаною при «перемножуванні» параболічної і прямолінійної трапецій.

9 Підставити обчислені значення в систему канонічних рівнянь і, розв'язуючи її, визначити реакції відкинутих зв'язків. На епюрі згинальних моментів максимальні значення моментів, як правило, зменшуються, а мінімальні збільшуються в порівнянні зі згинальними моментами на основній системі, навантаженій тільки відомими навантаженнями, тобто моменти по довжині стрижневої системи перерозподіляються більш рівномірно.

10 Виконати деформаційну перевірку, тобто визначити переміщення еквівалентної системи в напрямку відкинутого зв'язку. Для цього треба епюри згинальних моментів еквівалентної системи «помножити» по черзі на епюри згинальних моментів від одиничного навантаження. Визначити абсолютну похибку як різницю позитивних та від'ємних складових частин, визначити відносну похибку, поділивши абсолютну похибку на меншу складову частину, і порівняти її з допустимою.

11 З основної умови міцності при плоскому згинанні визначити необхідний момент опору перерізу, за яким визначити необхідні розміри перерізу.

12 Для визначення лінійного або кутового переміщення довільного перерізу треба в цьому перерізі прикласти до основної системи одиничну силу для визначення лінійного і одиничного моменту для визначення кутового переміщення, визначити опорні реакції, побудувати епюри згинальних моментів від одиничного фактору та «помножити» їх на епюру згинальних моментів для еквівалентної системи.

6.3.2 Приклад виконання задачі 6.3

Розкрити статичну невизначуваність рами (рис. 6.8, а), побудувати епюри повздовжніх, поперечних сил і згинальних моментів. Підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначити кут повороту вузла *K*. Виконати деформаційну перевірку. Відносна похибка не повинна бути більшою за 2%.

Розв'язання

- 1 Відкидаємо зв'язки, замінивши їх реакціями (рис. 6.8, б).
- 2 Визначаємо ступінь статичної невизначуваності задачі:

$$S = 5 - 3 = 2.$$

Таким чином, задача двічі статично невизначувана.

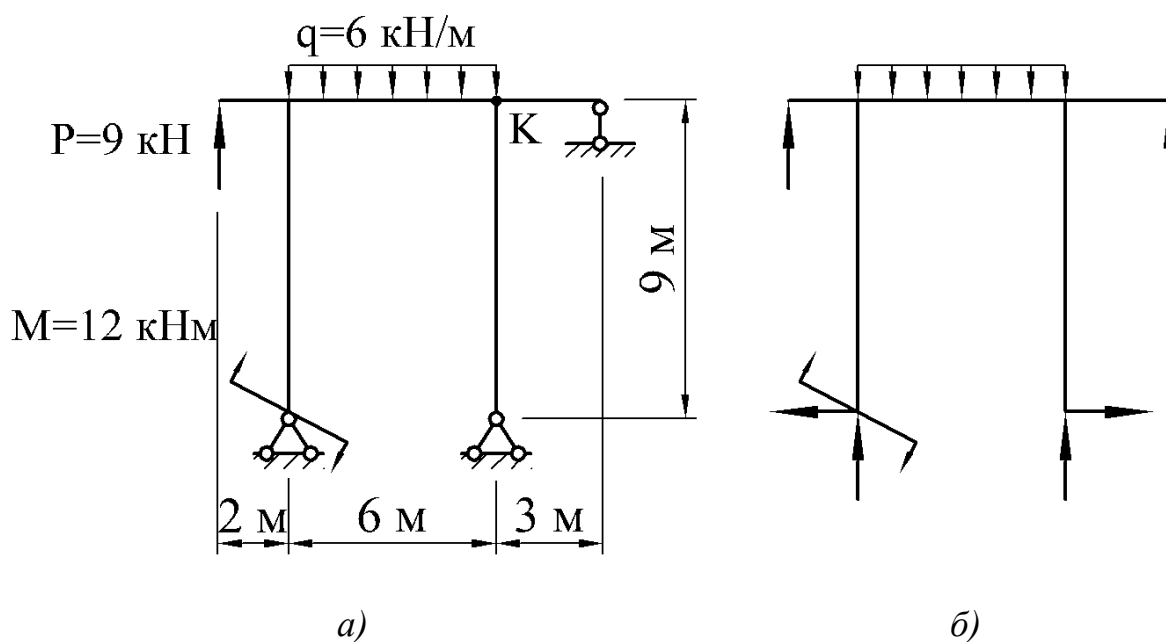


Рисунок 6.8

3 Вибираємо основну систему, виконавши вимоги до основної системи, тобто основна система повинна бути статично визначувана і не повинна бути механізмом (рис. 6.9, а).

Схеми, які представлені на рис. 6.9, б та 6.9, в не можна приймати як основні системи, тому що у першій системі всі реакції паралельні до вертикальної осі і будь-яке навантаження в горизонтальному напрямку буде переміщати систему в цьому напрямку, а у другій системі всі реакції перерізаються в одній точці і будь-яке навантаження, що не проходить через цю точку, буде обернути систему навколо цієї точки.

4 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням та «зайвими невідомими зусиллями», що замінюють дію вилучених зв'язків (рис. 6.9, г).

5 Складемо систему канонічних рівнянь методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням (рис. 6.10, а).

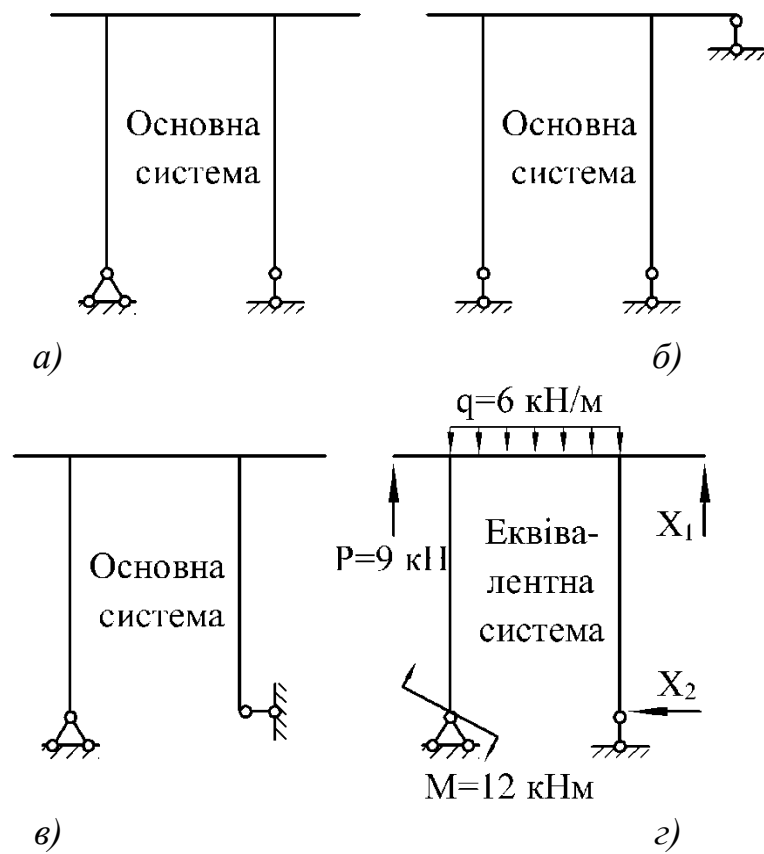


Рисунок 6.9

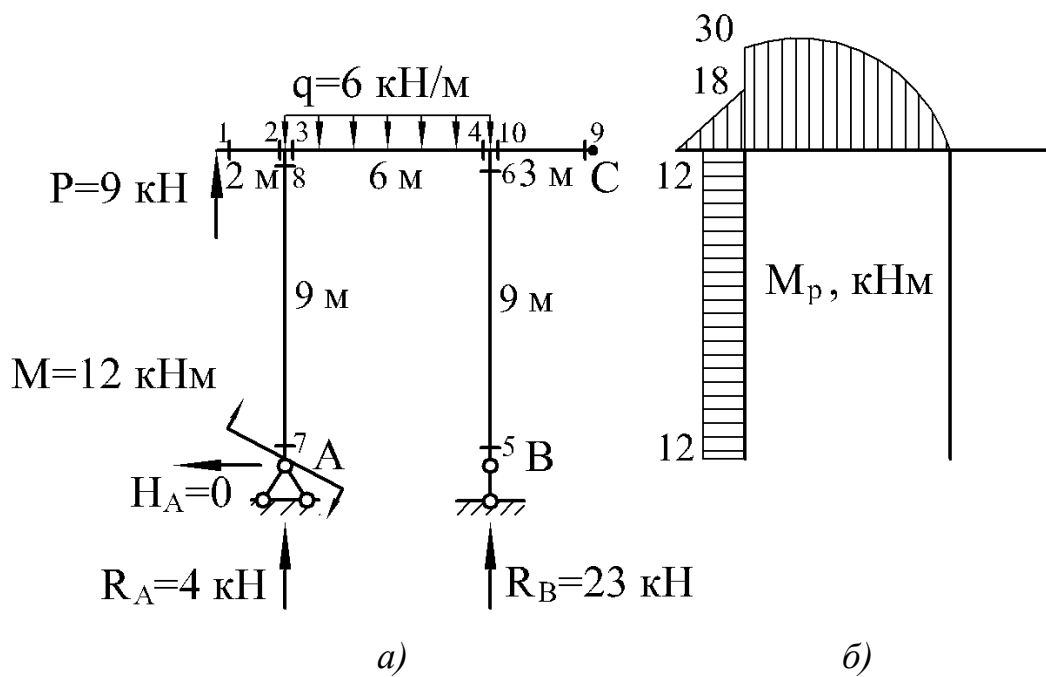


Рисунок 6.10

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження (див. рис 6.10, а).

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M - P \cdot 2 - q \cdot 6 \cdot 3 + R_B \cdot 6 &= 0, \\ R_B &= \frac{M + P \cdot 2 + q \cdot 6 \cdot 3}{6} = \frac{12 + 9 \cdot 2 + 6 \cdot 6 \cdot 3}{6} = 23 \text{ кН.} \\ \sum P_z &= 0, \\ -H_A &= 0, \\ \sum P_y &= 0, \\ R_A + R_B + P - q \cdot 4 &= 0, \\ R_A &= -R_B - P + q \cdot 6 = -23 - 9 + 6 \cdot 6 = 4 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0. \\ -M - P \cdot 11 + q \cdot 6 \cdot 6 - R_A \cdot 9 - H_A \cdot 9 - R_B \cdot 3 &= 0, \\ -12 - 9 \cdot 11 + 6 \cdot 6 \cdot 6 - 4 \cdot 9 - 0 \cdot 9 - 23 \cdot 3 &= 0, \\ 216 - 216 &= 0.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p , обчислюючи значення згинальних моментів у характерних перерізах (див. рис 6.10, а):

$$\begin{aligned}M_1 &= 0 \text{ кНм}, \\ M_2 &= P \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ кНм}, \\ M_3 &= P \cdot 2 + M = 9 \cdot 2 + 12 = 30 \text{ кНм}, \\ M_4 &= 0 \text{ кНм}, \\ M_5 &= M_6 = 0 \text{ кНм}, \\ M_7 &= M = 12 \text{ кНм}, \\ M_8 &= M + H_A \cdot 9 = 12 + 0 \cdot 9 = 12 \text{ кНм}, \\ M_9 &= M_{10} = 0 \text{ кНм}.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження по характерних перерізах (рис. 6.10, б).

7 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_1 (рис. 6.11, а).

Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили X_1 (рис. 6.11, а):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ X_1 \cdot 9 - R_B \cdot 6 &= 0, \\ R_B &= \frac{X_1 \cdot 9}{6} = \frac{1 \cdot 9}{6} = 1,5, \\ \sum P_z &= 0, \\ H_A &= 0, \\ \sum P_y &= 0, \\ X_1 + R_A - R_B &= 0, \\ R_A &= R_B - X_1 = 1,5 - 1 = 0,5.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0, \\ -R_A \cdot 9 - H_A \cdot 9 + R_B \cdot 3 &= 0, \\ -0,5 \cdot 9 - 0 \cdot 9 + 1,5 \cdot 3 &= 0 \\ 4,5 - 4,5 &= 0.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили X_1 по характерних перерізах (див. рис. 6.11, а).

$$\begin{aligned}M_1 = M_2 = M_3 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = M_9 &= 0 \text{ м}, \\ M_4 = M_{10} = X_1 \cdot 3 = 1 \cdot 3 &= 3 \text{ м}.\end{aligned}$$

8 Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничною силою X_2 .

Визначаємо опорні реакції від дії одиничної сили (рис. 6.11, б):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ R_B &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_z &=, \\ -X_2 + H_A &= 0, \\ H_A &= X_2 = 1. \\ \sum P_y &= 0, \\ R_A + R_B &= 0, \\ R_A &= -R_B = 0. \end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння

$$\begin{aligned} \sum M_C &= 0. \\ -R_A \cdot 9 + H_A \cdot 9 + R_B \cdot 3 - X_2 \cdot 9 &= 0, \\ -0 \cdot 9 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 3 - 1 \cdot 9 &= 0, \\ 9 - 9 &= 0. \end{aligned}$$

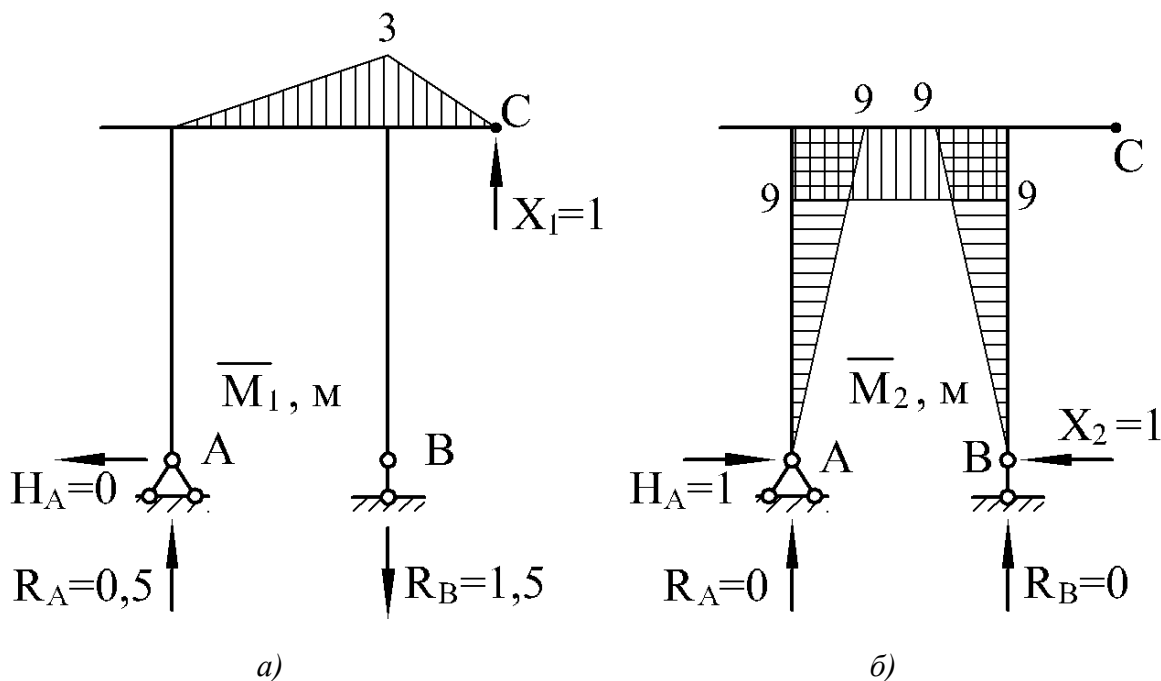


Рисунок 6.11

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничної сили X_2 по характерних перерізах (рис. 6.11, б).

$$M_1 = M_2 = M_5 = M_7 = M_9 = M_{10} = 0 \text{ м},$$

$$M_3 = M_8 = H_A \cdot 9 = 1 \cdot 9 = 9 \text{ м},$$

$$M_4 = M_6 = X_2 \cdot 9 = 1 \cdot 9 = 9 \text{ м}.$$

9 Визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат (див. додаток Б):

$$\delta_{11} = \frac{6}{6EJ_x}(2 \cdot 3 \cdot 3) + \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 3 \cdot 3) = \frac{27}{EJ_x},$$

$$\delta_{22} = \frac{9}{6EJ_x}(2 \cdot 9 \cdot 9) + \frac{6}{6EJ_x}(2 \cdot 9 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9) + \\ + \frac{9}{6EJ_x}(2 \cdot 9 \cdot 9) = \frac{972}{EJ_x},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{6}{6EJ_x}(-2 \cdot 3 \cdot 9 - 3 \cdot 9) = \frac{-81}{EJ_x},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{6}{6EJ_x}(30 \cdot 3) + \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_x}(0 + 3) = \frac{252}{EJ_x},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{9}{6EJ_x}(-2 \cdot 12 \cdot 9 - 12 \cdot 9) + \frac{6}{6EJ_x}(-2 \cdot 30 \cdot 9 - 30 \cdot 9) + \\ + \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_x}(-9 - 9) = \frac{-2268}{EJ_x}.$$

10 Перевіряємо правильність визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь. Розглянемо основну систему, навантажену тільки одиничними силами X_1 та X_2 (рис. 6.12).

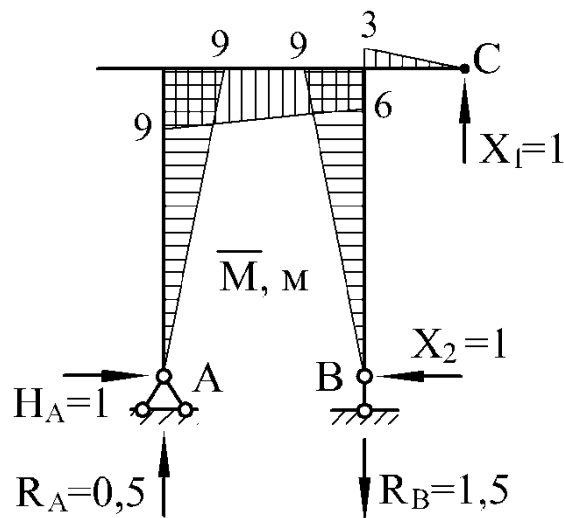


Рисунок 6.12

Визначаємо опорні реакції від дії одиничних сил X_1 та X_2 (див. рис. 6.12):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; \\ X_1 \cdot 9 - R_B \cdot 6 &= 0, \\ R_B &= \frac{X_1 \cdot 9}{6} = \frac{1 \cdot 9}{6} = 1,5. \\ \sum P_z &= 0, \\ H_A - X_2 &= 0, \\ H_A &= X_2 = 1. \\ \sum P_y &= 0, \\ X_1 + R_A - R_B &= 0, \\ R_A &= R_B - X_1 = 1,5 - 1 = 0,5.\end{aligned}$$

Для перевірки використаємо рівняння

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0. \\ -R_A \cdot 9 - H_A \cdot 9 + R_B \cdot 3 - X_2 \cdot 9 &= 0, \\ -0,5 \cdot 9 - 1 \cdot 9 + 1,5 \cdot 3 - 1 \cdot 9 &= 0, \\ 13,5 - 13,5 &= 0.\end{aligned}$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничних сил X_1 і X_2 по характерних перерізах (див. рис. 6.12).

$$\begin{aligned}M_1 &= M_2 = M_5 = M_7 = M_9 = 0 \text{ м}, \\ M_3 &= M_8 = -H_A \cdot 9 = -1 \cdot 9 = -9 \text{ м}, \\ M_4 &= -X_2 \cdot 9 + X_1 \cdot 3 = -1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 = -6 \text{ м}, \\ M_6 &= X_2 \cdot 9 = 1 \cdot 9 = 9 \text{ м} \\ M_{10} &= X_1 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3 \text{ м}.\end{aligned}$$

Виконуємо перевірку правильності визначення коефіцієнтів δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} і δ_{22} :

$$\delta_{(1+2)(1+2)} = \frac{9}{6EJ_x}(2 \cdot 9 \cdot 9) + \frac{6}{6EJ_x}(2 \cdot 9 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 9 \cdot 6 + 6 \cdot 9) +$$

$$+ \frac{9}{6EJ_x}(2 \cdot 9 \cdot 9) + \frac{3}{6EJ_x}(2 \cdot 3 \cdot 3) = \frac{837}{EJ_x},$$

$$\delta_{(1+2)(1+2)} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{27}{EJ_x} - \frac{81}{EJ_x} - \frac{81}{EJ_x} + \frac{972}{EJ_x} = \frac{837}{EJ_x}.$$

Виходить, коефіцієнти δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} і δ_{22} визначені вірно.

Виконуємо перевірку правильності визначення коефіцієнтів Δ_{1p} та Δ_{2p} :

$$\Delta_{(1+2)p} = \frac{9}{6EJ_x}(-2 \cdot 12 \cdot 9 - 12 \cdot 9) + \frac{6}{6EJ_x}(-2 \cdot 30 \cdot 9 - 30 \cdot 6) +$$

$$+ \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_x}(-9 - 6) = \frac{-2016}{EJ_x},$$

$$\Delta_{(1+2)p} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = \frac{252}{EJ_x} - \frac{2268}{EJ_x} = \frac{-2016}{EJ_x}.$$

Отже, коефіцієнти Δ_{1p} та Δ_{2p} визначені вірно.

11 Підставляємо знайдені значення вантажних та одиничних коефіцієнтів в систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} 27X_1 - 81X_2 + 252 = 0, \\ -81X_1 + 972X_2 - 2268 = 0. \end{cases}$$

Вирішуючи систему, знаходимо реакції відкинутих зв'язків:

$$X_1 = -3,11 \text{ кН}; \quad X_2 = 2,07 \text{ кН}.$$

12 Розглянемо еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему, під дією заданого навантаження та знайдених сил $X_1 = 3,11 \text{ кН}$ та $X_2 = 2,07 \text{ кН}$ (рис. 6.13, а).

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та сил $X_1 = 3,11 \text{ кН}$ та $X_2 = 2,07 \text{ кН}$ (див. рис. 6.13, а):

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 2 - q \cdot 6 \cdot 3 - X_1 \cdot 9 + R_B \cdot 6 = 0,$$

$$R_B = \frac{M + P \cdot 2 + q \cdot 6 \cdot 3 + X_1 \cdot 9}{6} = \frac{12 + 9 \cdot 2 + 6 \cdot 6 \cdot 3 + 3,11 \cdot 9}{6} = 27,67 \text{ кН.}$$

$$\sum P_z = 0,$$

$$H_A - X_2 = 0,$$

$$H_A = X_2 = 2,07 \text{ кН.}$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$R_A + R_B + P - q \cdot 4 - X_1 = 0,$$

$$R_A = -R_B - P + q \cdot 6 + X_1 = -27,67 - 9 + 6 \cdot 6 + 3,11 = 2,44 \text{ кН.}$$

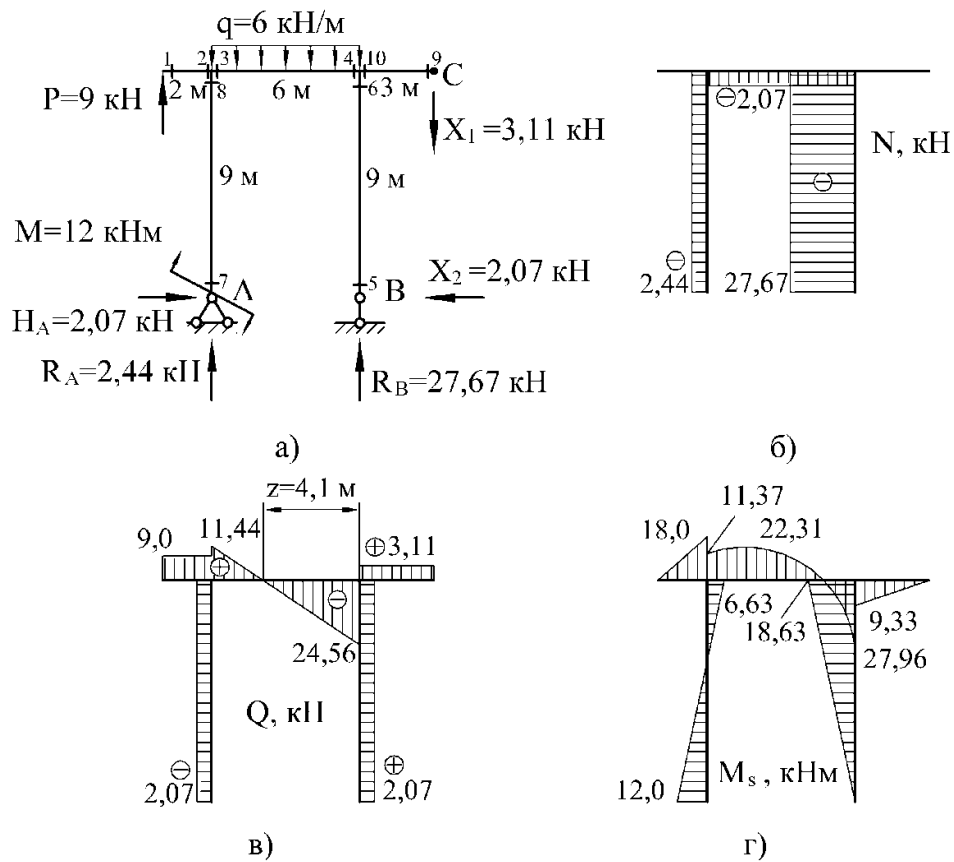


Рисунок 6.13

Для перевірки використаємо рівняння

$$\sum M_C = 0.$$

$$-M - P \cdot 11 + q \cdot 6 \cdot 6 - R_A \cdot 9 + H_A \cdot 9 - R_B \cdot 3 - X_2 \cdot 9 = 0,$$

$$-12 - 9 \cdot 11 + 6 \cdot 6 \cdot 6 - 2,44 \cdot 9 + 2,07 \cdot 9 - 27,67 \cdot 3 - 2,07 \cdot 9 = 0,$$

$$234,6 - 234,6 = 0.$$

13 Будуємо остаточні епюри внутрішніх силових факторів.
Обчислюємо значення поздовжніх сил у характерних перерізах:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_2 = N_9 = N_{10} = 0 \text{ кН}, \\ N_3 &= N_4 = -H_A = -2,07 \text{ кН}, \\ N_5 &= N_6 = -R_B = -27,67 \text{ кН}, \\ N_7 &= N_8 = -R_A = -2,44 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Обчислюємо значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 = P = 9 \text{ кН}, \\ Q_3 &= P + R_A = 9 + 2,44 = 11,44 \text{ кН}, \\ Q_4 &= P + R_A - q \cdot 6 = 9 + 2,44 - 6 \cdot 6 = -24,56 \text{ кН}, \\ Q_5 &= Q_6 = X_2 = 2,07 \text{ кН}, \\ Q_7 &= Q_8 = -H_A = -2,07 \text{ кН}, \\ Q_9 &= Q_{10} = X_1 = 3,11 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$\begin{aligned} M_1 &= 0 \text{ кНм}, \\ M_2 &= P \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ кНм}, \\ M_3 &= P \cdot 2 + M - H_A \cdot 9 = 9 \cdot 2 + 12 - 2,07 \cdot 9 = 11,37 \text{ кНм}, \\ M_4 &= -X_1 \cdot 3 - X_2 \cdot 9 = -3,11 \cdot 3 - 2,07 \cdot 9 = -27,96 \text{ кНм}, \\ M_5 &= 0 \text{ кНм}, \\ M_6 &= -X_2 \cdot 9 = -2,07 \cdot 9 = -18,63 \text{ кНм}, \\ M_7 &= M = 12 \text{ кНм}, \\ M_8 &= M - H_A \cdot 9 = 12 - 2,07 \cdot 9 = -6,63 \text{ кНм}, \\ M_9 &= 0 \text{ кНм}, \\ M_{10} &= -X_1 \cdot 3 = -3,11 \cdot 3 = -9,33 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Будуємо епюри поздовжніх сил N (рис. 6.13, б), поперечних сил Q (рис. 6.13, в), а також згинальних моментів M_s (рис. 6.13, г) по характерних перерізах.

Так як епюра поперечних сил пересікає базову лінію та міняє знак з «+» на «-», те в цій точці перебуває максимальне значення згинального моменту. Знаходимо положення цього перерізу.

$$z = \frac{24,56}{6} = 4,1 \text{ м,}$$

$$\begin{aligned} M_z &= -X_1 \cdot 7,1 - X_2 \cdot 9 + R_B \cdot 4,1 - q \cdot 4,1 \cdot \frac{4,1}{2} = \\ &= -3,11 \cdot 7,1 - 2,07 \cdot 9 + 27,67 \cdot 4,1 - 6 \cdot 4,1 \cdot \frac{4,1}{2} = 22,31 \text{ кНм.} \end{aligned}$$

14 Виконуємо деформаційну перевірку.

Так як в заданій статично невизначуваній системі переміщення по напрямку X_1 дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюру \overline{M}_1 повинен рівнятися нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} &= \frac{6}{6EJ_x} (-2 \cdot 27,96 \cdot 3 + 11,37 \cdot 3) + \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_x} (0 + 3) + \frac{3}{6EJ_x} (-2 \cdot 9,33 \cdot 3) = \\ &= \frac{-133,65 + 162 - 27,99}{EJ_x} = \frac{162,0 - 161,6}{EJ_x}. \end{aligned}$$

При цьому похибка склала:

$$\frac{162,0 - 161,6}{161,6} \cdot 100\% = 0,2 \%$$

Так як в заданій статично невизначуваній системі переміщення по напрямку X_2 дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюру \overline{M}_2 повинен рівнятися нулю, тобто $\Delta_{2s} = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta_{2s} &= \frac{9}{6EJ_x} (2 \cdot 6,63 \cdot 9 - 12 \cdot 9) + \\ &+ \frac{6}{6EJ_x} (-2 \cdot 11,37 \cdot 9 + 2 \cdot 27,96 \cdot 9 - 11,37 \cdot 9 + 27,96 \cdot 9) + \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_x} (-9 - 9) + \\ &+ \frac{9}{6EJ_x} (2 \cdot 18,63 \cdot 9) = \frac{17,0 + 447,9 - 972,0 + 503,0}{EJ_x} = \frac{967,9 - 972,0}{EJ_x}. \end{aligned}$$

При цьому похибка склала:

$$\frac{972,0 - 967,9}{967,9} \cdot 100\% = 0,4\% .$$

15 Підбираємо поперечний переріз у вигляді двотавра.

При зазначеному навантаженні небезпечним перерізом є переріз 4, для якого $M_{\max} = M_4 = 27,96 \text{ кНм}$.

Так як осьова сила незначна, то розміри перерізу підбираємо з умови міцності на згинання:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Визначимо необхідний момент опору перерізу:

$$W_x \geq \frac{27,96 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 174,8 \text{ см}^3 .$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 174,8 \text{ см}^3$. По таблиці сортаменту (див. додаток А) вибираємо двотавр № 20, для якого $W_x = 184 \text{ см}^3$, $J_x = 1840 \text{ см}^4$.

16 Визначаємо кут повороту вузла К.

Для цього до основної системи в перерізі К прикладаємо одиничний момент, тобто $M = 1$ (рис. 6.14).

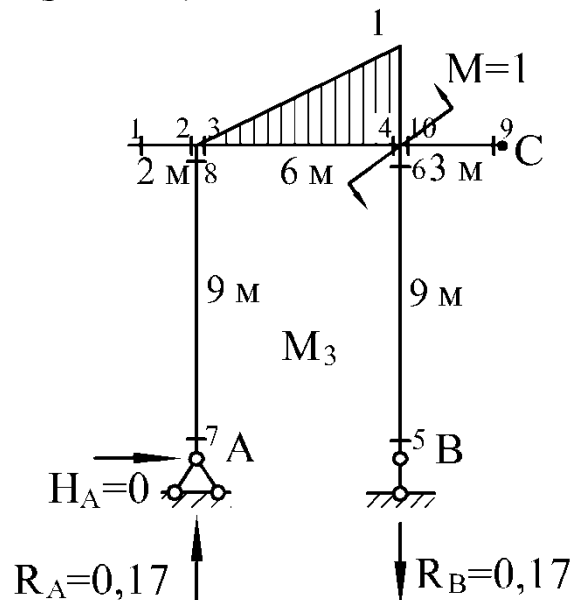


Рисунок 6.14

Визначаємо опорні реакції від дії одиничного моменту:

$$H_A = 0,$$

$$R_A = R_B = \frac{M}{6} = \frac{1}{6} = 0,17.$$

Обчислюємо значення згинальних моментів у характерних перерізах від дії одиничного моменту (див. рис. 6.14):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = M_9 = M_{10} = 0,$$

$$M_4 = M = 1$$

Будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту по характерних перерізах (див. рис. 6.14).

З використанням формули крайніх ординат (див. додаток Б) «перемножуємо між собою» на кожній ділянці остаточну епюру згинальних моментів M_s та епюру від дії одиничного моменту \bar{M}_3 :

$$\theta_K = \Delta_{3s} = \frac{6}{6EJ_x}(-2 \cdot 27,96 \cdot 1 + 11,37 \cdot 1) + \frac{6 \cdot 6^3}{24EJ_x}(0 + 1) = \frac{9,45}{EJ_x}.$$

Кут повороту вузла K дорівнює:

$$\theta_K = \frac{9,45 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,0026 \text{ рад.}$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад.}$$

Так як кут повороту вузла K менше, ніж допустимий кут повороту, то жорсткість рами забезпечена.

6.4 Двічі статично невизначувана балка

Для нерозрізної балки розкрити статичну невизначеність, побудувати епюри внутрішніх зусиль, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, підібрати двотавровий переріз і визначити прогин у точці K і кут повороту перерізу A . Вихідні дані вибрати із таблиць 6.3 та 6.4 і рисунку 6.15.

6.4.1 Приклад розв'язання задачі 6.4

Для нерозрізної балки (рис. 6.16, а) розкрити статичну невизначеність, побудувати епюри внутрішніх зусиль, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, підібрати двотавровий переріз і визначити прогин у точці K і кут повороту перерізу A . Виконати деформаційну перевірку. Відносна похибка не повинна бути більшою за 2%.

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи (рис. 6.16, а). Дана система два рази статично невизначувана.

2 Вибираємо основну систему. Проміжні опори заміняємо врізаними шарнірами (рис. 6.16, б).

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 та X_2 (рис. 6.16, в). Таким чином, еквівалентна система являє собою три прості шарнірно обперті балки, навантажені заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 та X_2 , що заміняють відкинуті зв'язки між сусідніми прольотами.

4 Для того, щоб визначити невідомі згинальні моменти X_1 та X_2 , скористаємося системою канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням (рис. 6.16, г).

Визначаємо опорні реакції від дії заданого навантаження та будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження по характерних перерізах (рис. 6.16, д).

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки моментом $X_1 = 1$ (рис. 6.16, е) та будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту $X_1 = 1$ по характерних перерізах (див. рис. 6.16, е). Аналогічним чином отримаємо епюру від згинальних моментів $X_2 = 1$ (рис. 6.16, є).

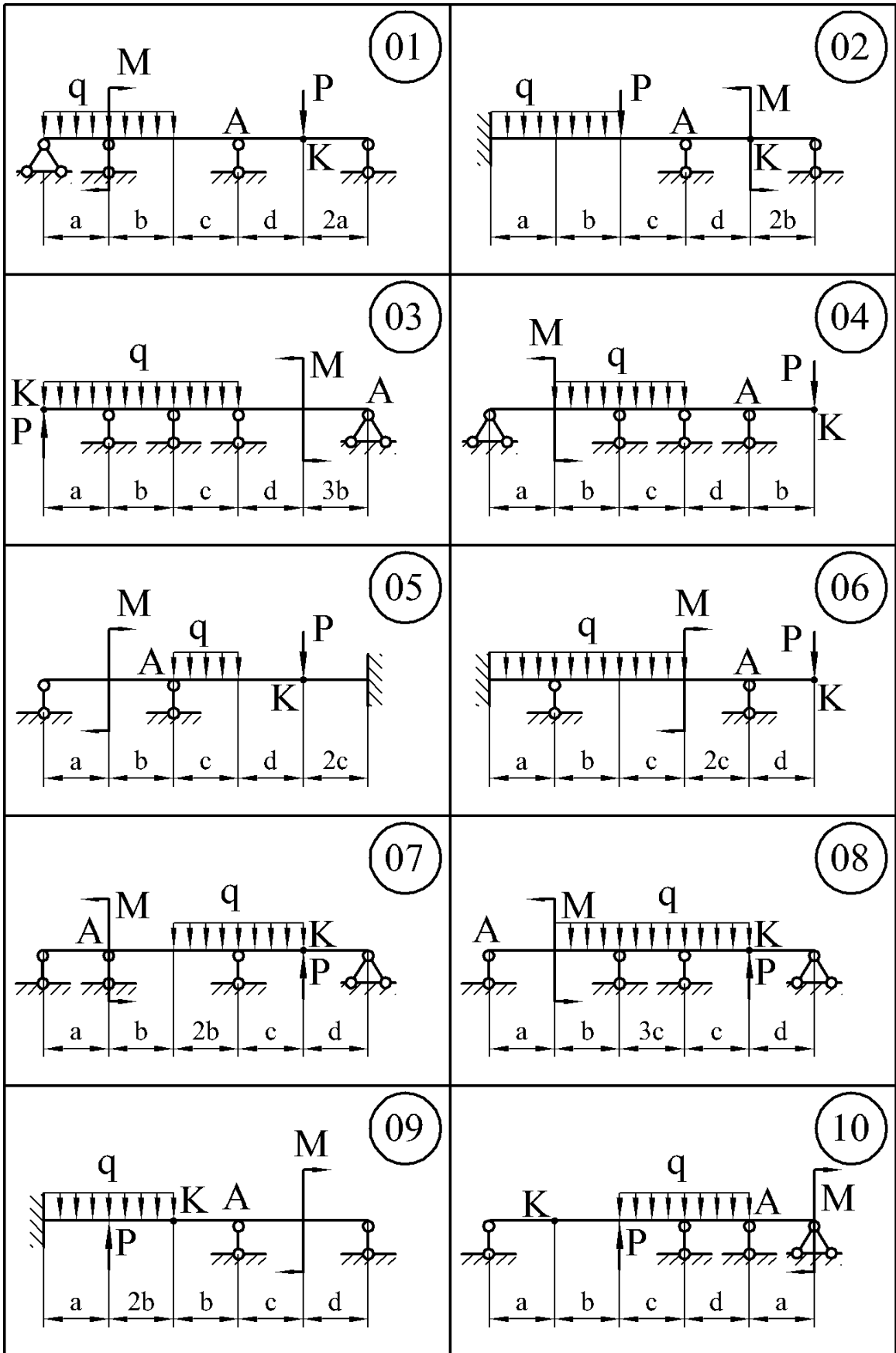


Рисунок 6.15

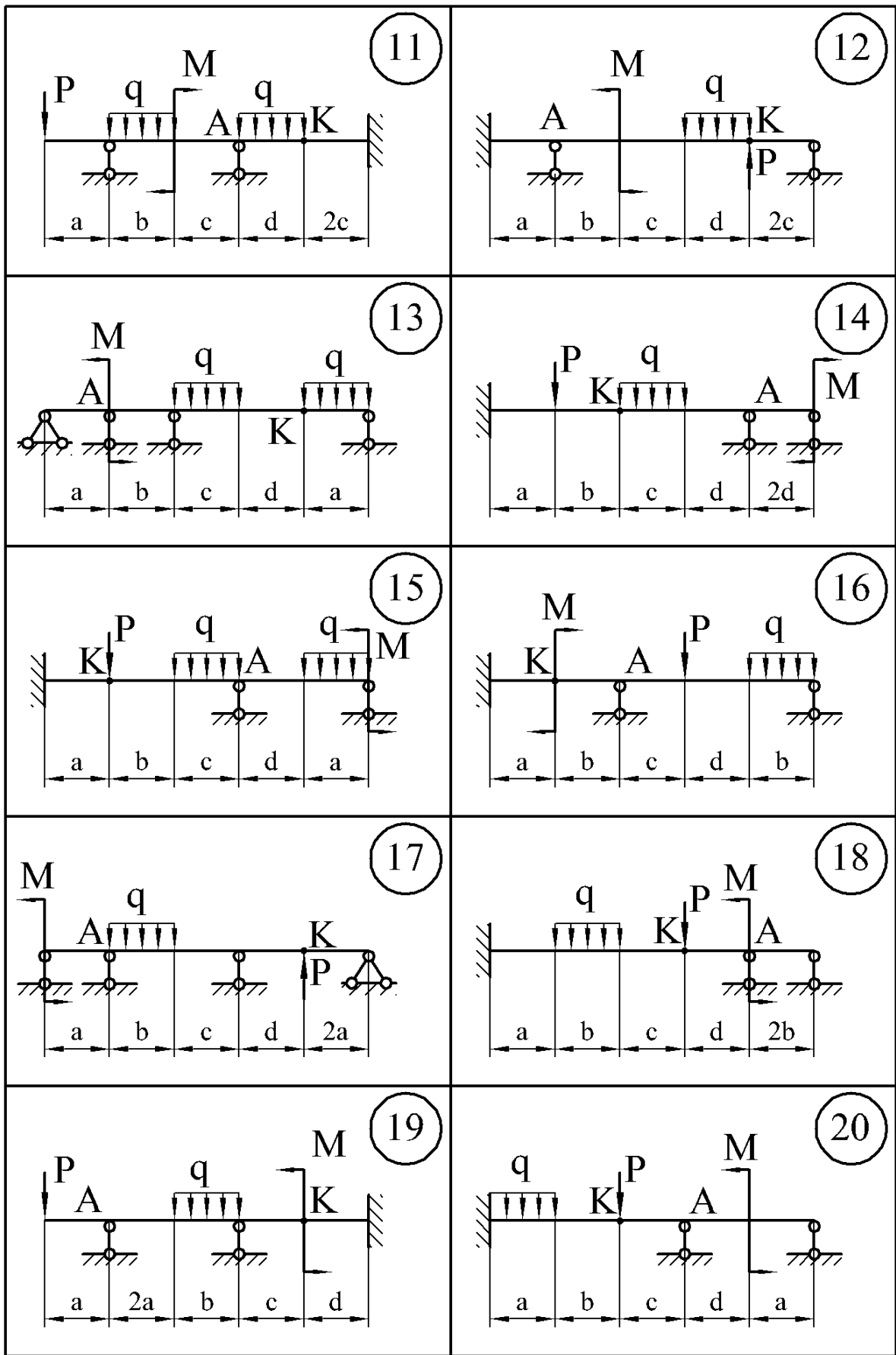


Рисунок 6.15, аркуш 2

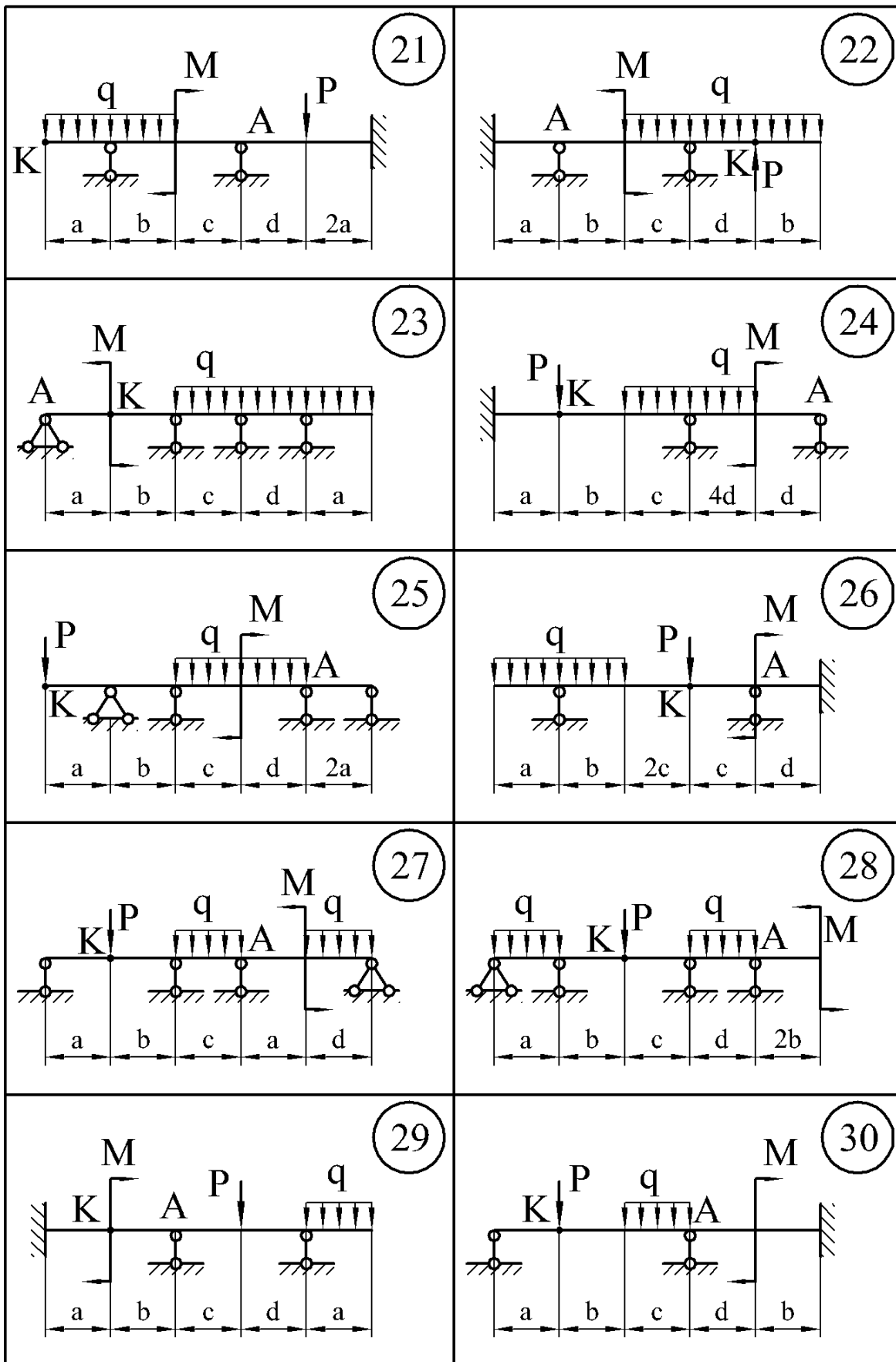


Рисунок 6.15, аркуш 3

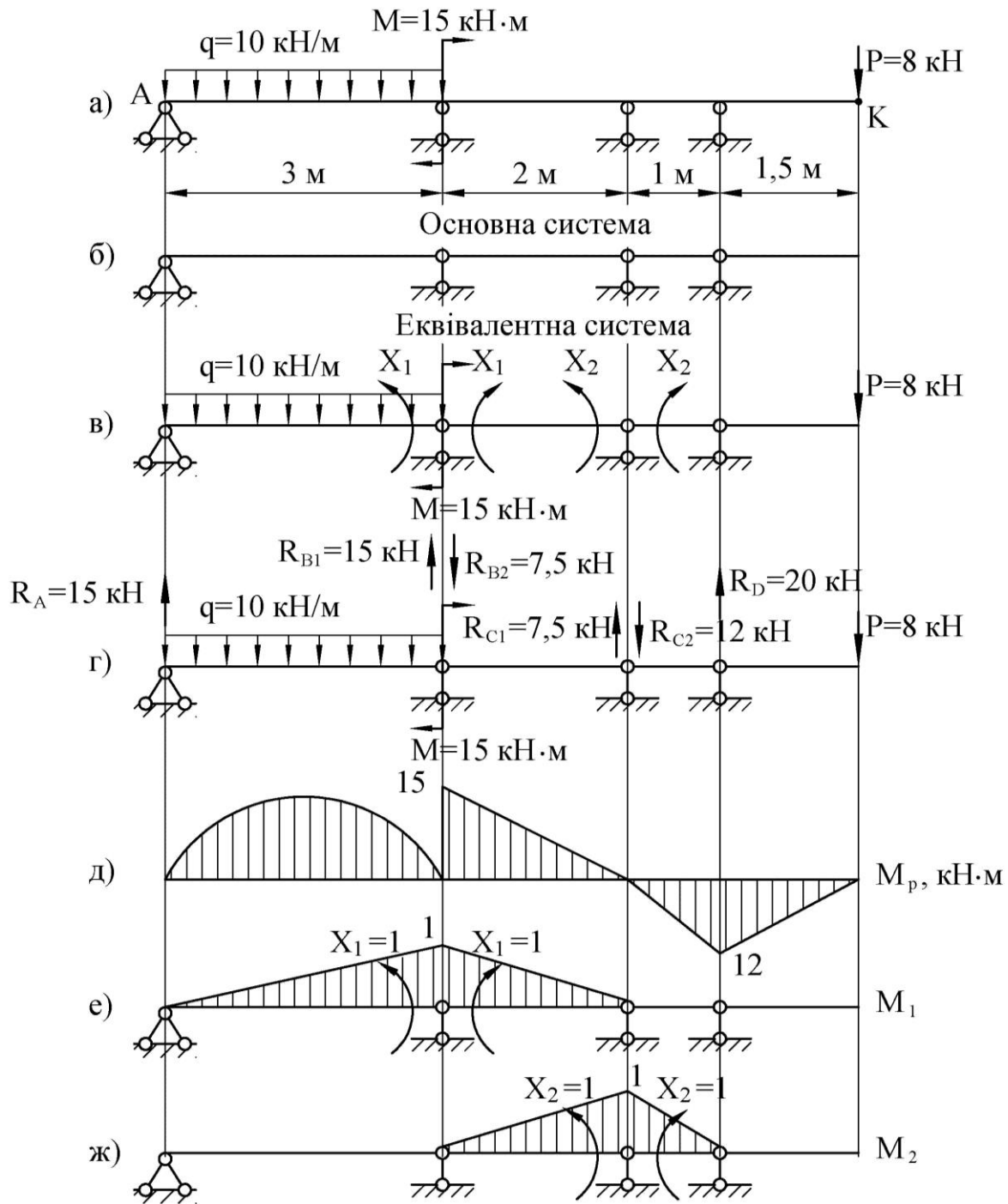


Рисунок 6.16

7 Визначаємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат (див. додаток Б):

$$\delta_{11} = \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,67}{EJ_x},$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{1}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,00}{EJ_x},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2}{6EJ_x}(1 \cdot 1) = \frac{0,33}{EJ_x},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x}(0+1) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 15 \cdot 1) = \frac{21,25}{EJ_x},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{2}{6EJ_x}(15 \cdot 1) + \frac{1}{6EJ_x}(-12 \cdot 1) = \frac{3}{EJ_x}.$$

8 Підставляємо коефіцієнти в канонічні рівняння, з рішення яких знаходимо X_1 та X_2 :

$$\begin{cases} 1,67X_1 + 0,33X_2 + 21,25 = 0, \\ 0,33X_1 + X_2 + 3 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = -12,99 \text{ кНм}, \\ X_2 = 1,29 \text{ кНм}. \end{cases}$$

9 До кожної з балок прикладаємо задане навантаження і знайдений момент (рис. 6.17, а). Від них визначаємо реакції опор і будуємо епюри поперечних сил (рис. 6.17, б) і згинальних моментів (рис. 6.17, в).

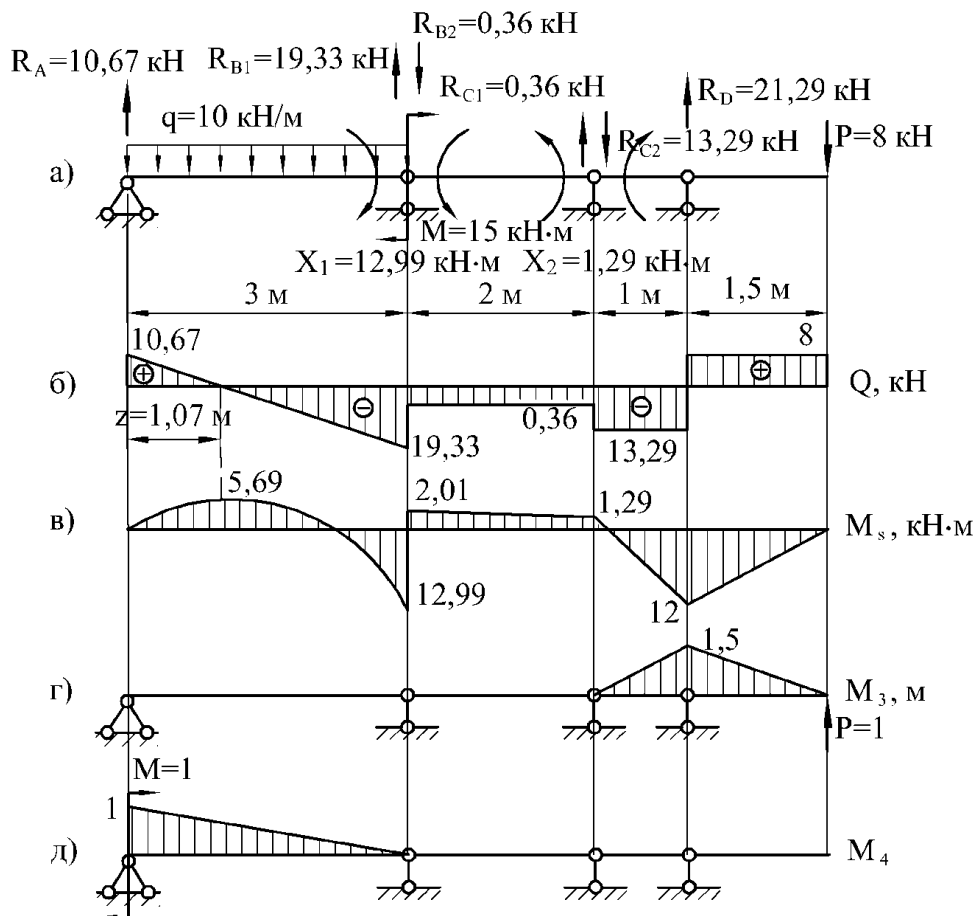


Рисунок 6.17

10 Виконуємо деформаційну перевірку.

Так як в заданій статично невизначуваній системі взаємний кут повороту на проміжних опорах дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюри M_1 та M_2 повинен рівнятися нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$ та $\Delta_{2s} = 0$.

$$\begin{aligned}\Delta_{1s} &= \frac{3}{6EJ_x}(-2 \cdot 12,99 \cdot 1) + \frac{10 \cdot 3^3}{24EJ_x}(0+1) + \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 2,01 \cdot 1 + 1,29 \cdot 1) = \\ &= \frac{-12,99 + 11,25 + 1,78}{EJ_x} = \frac{-12,99 + 13,03}{EJ_x}.\end{aligned}$$

При цьому похибка склала:

$$\frac{13,03 - 12,99}{12,99} \cdot 100\% = 0,3\%.$$

$$\Delta_{2s} = \frac{2}{6EJ_x}(2 \cdot 1,29 \cdot 1 + 2,01 \cdot 1) + \frac{1}{6EJ_x}(2 \cdot 1,29 \cdot 1 - 12 \cdot 1) = \frac{1,54 - 1,56}{EJ_x}.$$

При цьому похибка склала:

$$\frac{1,54 - 1,56}{1,54} \cdot 100\% = 1,2\%.$$

11 З епюри згинальних моментів (див. рис. 5.17, в) знаходимо небезпечний переріз, для якого $M_{\max} = 12,99$ кНм.

З умови міцності:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]; \\ W_x &\geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{12,99 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 81,2 \text{ см}^3.\end{aligned}$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 81,2 \text{ см}^3$. По таблиці сортаменту (див. додаток А) вибираємо двотавр № 14, для якого $W_x = 81,7 \text{ см}^3$, $J_x = 572 \text{ см}^4$.

12 Визначаємо прогин в точці K . Для цього до основної системи в точці

K прикладаємо одиничну силу і будуємо епюру згинальних моментів (рис. 6.17, г), яку помножуємо на епюру M_s (рис. 6.17, в).

$$\begin{aligned} y_K &= \frac{1}{6EJ_x} (-2 \cdot 12 \cdot 1,5 + 1,29 \cdot 1,5) + \frac{1,5}{6EJ_x} (-2 \cdot 12 \cdot 1,5) = \frac{-14,68}{EJ_x} = \\ &= \frac{-14,68 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,013 \text{ м}. \end{aligned}$$

Допустимий прогин балки довжиною $\ell = 7,5 \text{ м}$ дорівнює:

$$[y] = \frac{\ell}{200} = \frac{7,5}{200} = 0,036 \text{ м}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що точка K переміщається по напрямку, який протилежний напрямку одиничної сили, тобто вниз.

13 Визначення кута повороту. У перерізі A прикладаємо одиничний момент, від нього будуємо епюру згинальних моментів (рис. 6.17, д), яку помножуємо на епюру M_s (рис. 6.17, в).

$$\theta_A = \frac{3}{6EJ_x} (-12,99 \cdot 1) = \frac{-6,50}{EJ_x} = \frac{-6,50 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0056 \text{ рад}.$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що переріз A повертається у напрямі, який протилежний напрямку одиничного моменту.

6.5 Тричі статично невизначувана балка

Для нерозрізної балки розкрити статичну невизначуваність, побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати двотавровий переріз, якщо

$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначити прогин у точці K та кут повороту перерізу A . Вихідні дані вибрати із таблиць 6.5 та 6.6 і рисунку 6.18.

Таблиця 6.5 – Вихідні дані до задачі 6.5

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	1,5	1,7	1,9	2,1	2,2	2,4	2,6	1,3	1,1	2,8
$b, \text{ м}$	2,9	2,7	2,5	2,1	1,9	1,7	1,6	1,2	1,2	1,2
$c, \text{ м}$	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,6	2,8	1,4
$d, \text{ м}$	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	2,0	1,4	2,2

Таблиця 6.6 – Вихідні дані до задачі 6.5

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M, \text{ кН}\cdot\text{м}$	8	6	10	4	6	6	9	10	8	12
$P, \text{ кН}$	6	8	4	6	8	4	6	8	4	6
$q, \text{ кН/м}$	10	12	14	12	14	10	12	10	14	10

6.5.1 Приклад розв'язання задачі 6.5

Для нерозрізної балки розкрити статичну невизначуваність (рис. 6.19, а), побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати двотавровий переріз, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначити прогин у точці K та кут повороту перерізу A . Виконати деформаційну перевірку. Відносна похибка не повинна бути більшою за 2%.

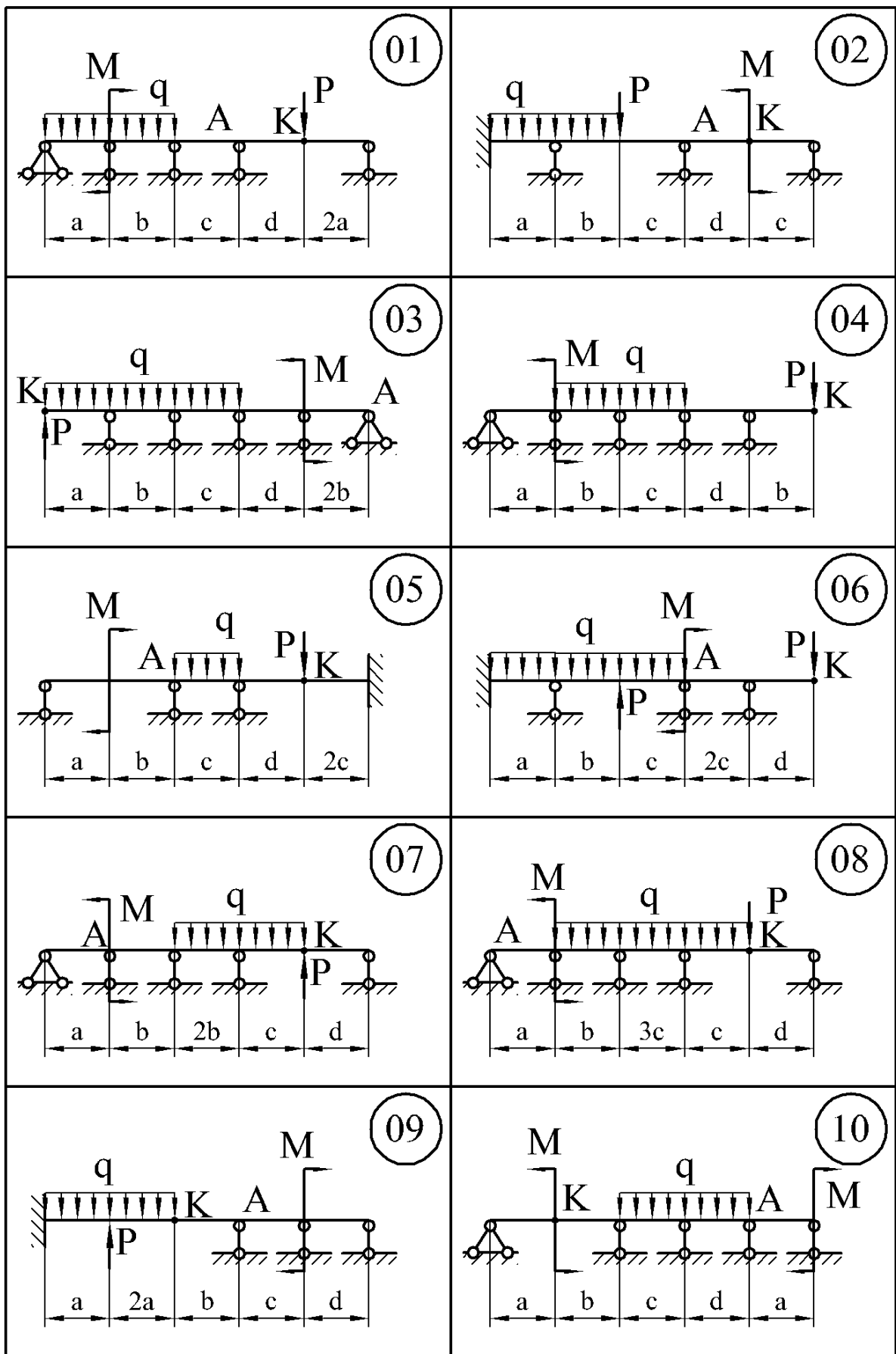


Рисунок 6.18

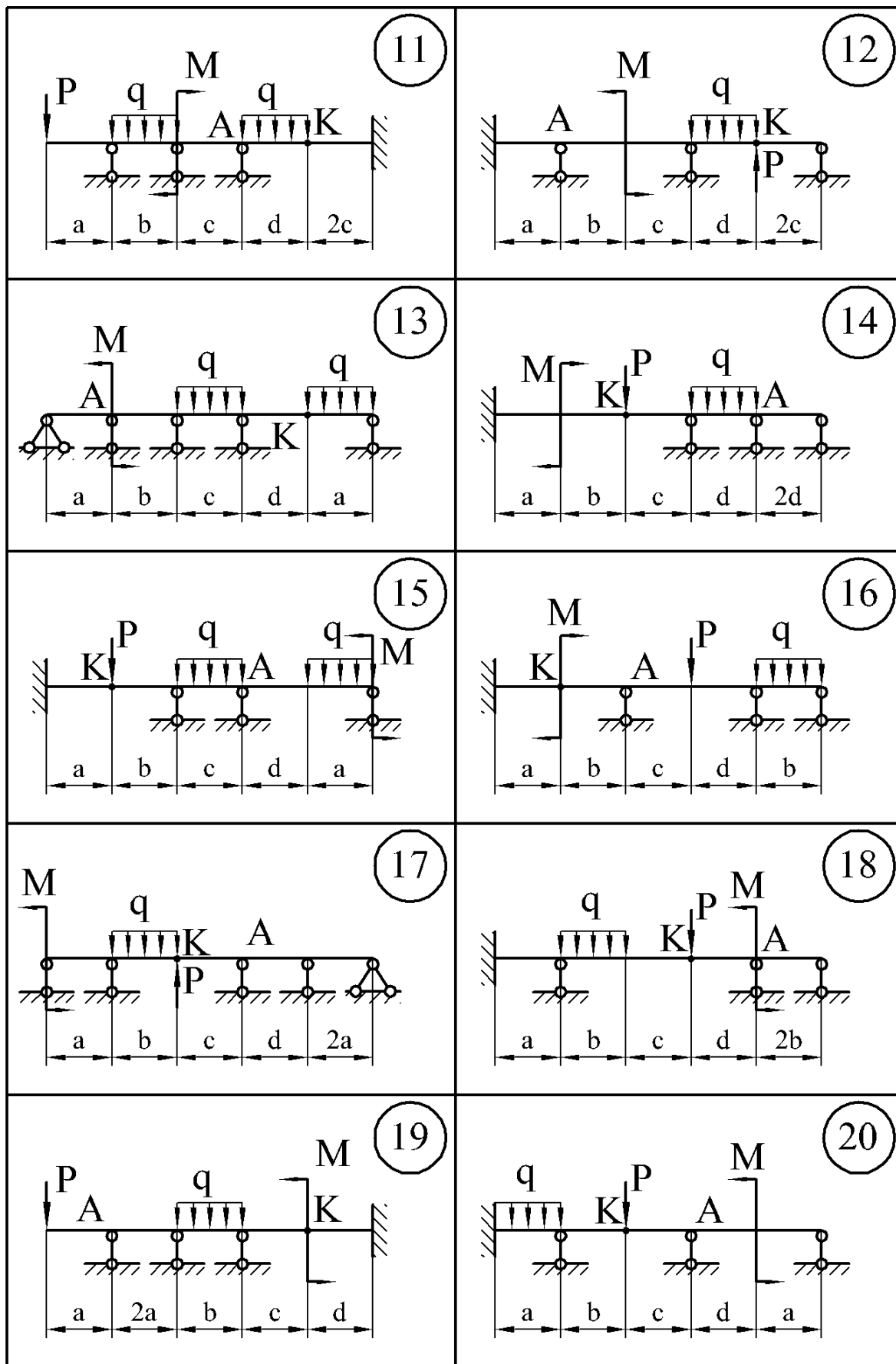


Рисунок 6.18, аркуш 2

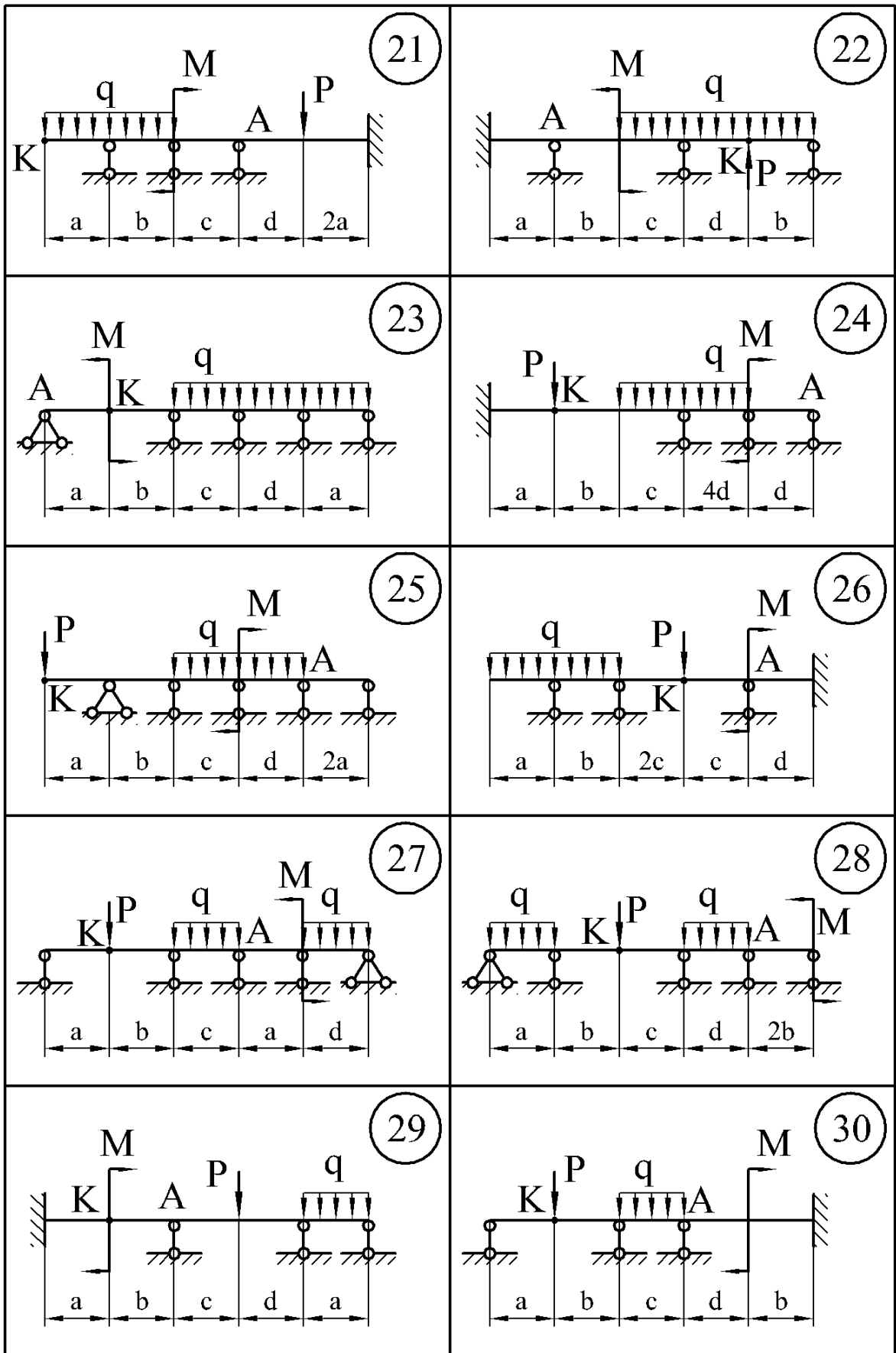


Рисунок 6.18, аркуш 3

Розв'язання

1 Встановлюємо ступінь статичної невизначуваності системи (рис. 6.19, а). Дана система три рази статично невизначувана.

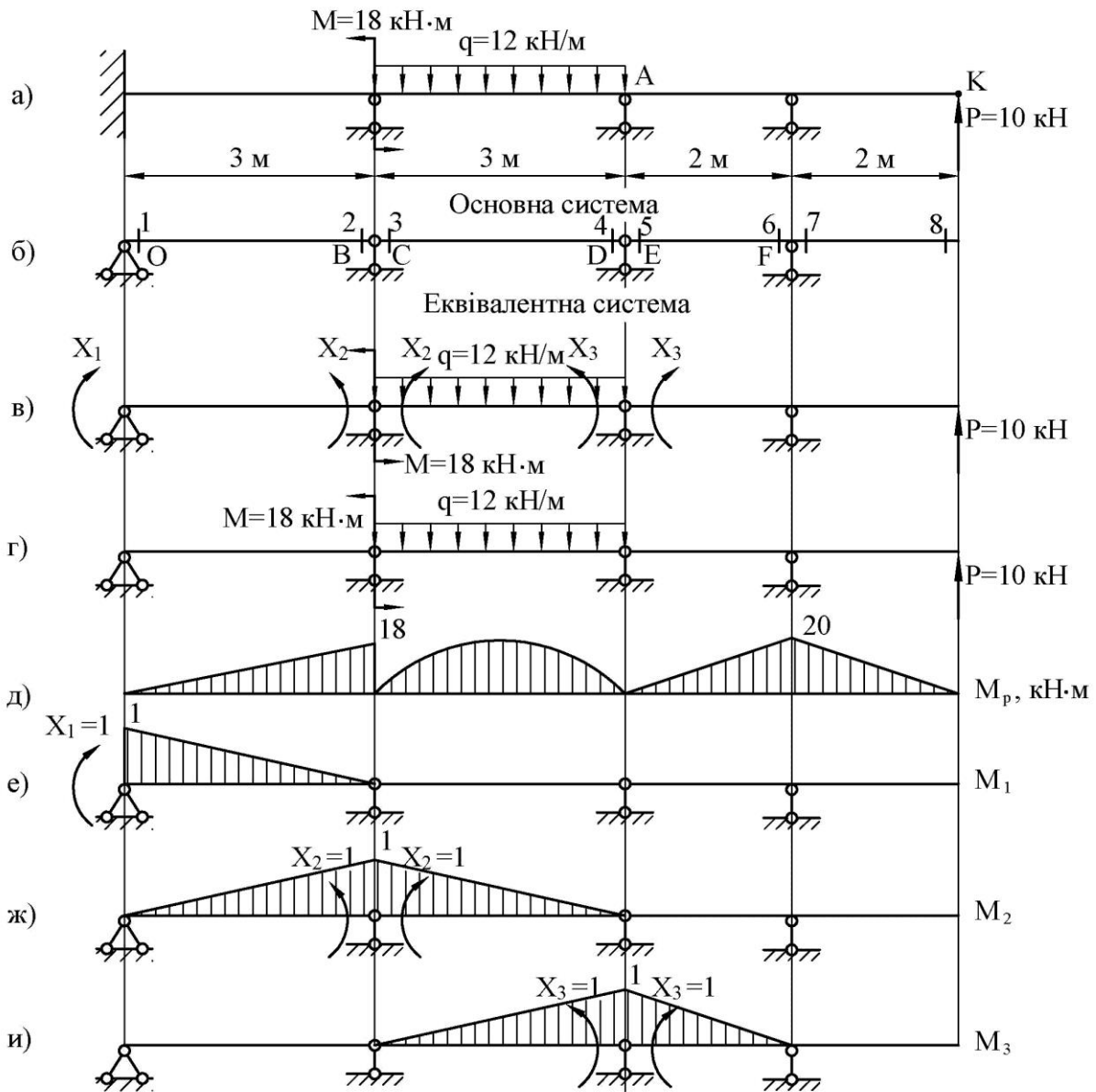


Рисунок 6.19

2 Вибираємо основну систему. Жорстке закріплення (затиснення) заміняємо нерухомим шарніром, а проміжні опори заміняємо врізаним (див. рис. 6.19, б). Врізання шарніру між перерізами 8 і 9 буде помилкою, бо це крайня опора. Обрана таким чином основна система розіб'є складну балку на ряд простих балок, спростить побудову епюр згинальних моментів і скоротить обсяг обчислень, тому що в кожному рівнянні залишається не більше трьох невідомих. Для заданої задачі складна балка поділиться на три простих OB , CD , EF . Щоб не дуже навантажувати рисунки характерні перерізи показано на основній системі.

3 Одержуємо еквівалентну систему, завантажуючи основну систему заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 , X_2 та X_3 (рис. 6.19, в). Таким чином, еквівалентна система являє собою три прості шарнірно обперті балки, навантажені заданим навантаженням і невідомими згинальними моментами X_1 , X_2 та X_3 , що замінюють відкинуті зв'язки між сусідніми прольотами.

4 Для того, щоб визначити невідомі згинальні моменти X_1 , X_2 та X_3 , скористаємося системою канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{cases}$$

5 Розглянемо основну систему, навантажену тільки заданим навантаженням (рис. 6.19, г). Будуємо епюру згинальних моментів від дії заданого навантаження по характерних перерізах (рис. 6.19, д).

$$M_1 = M_3 = M_4 = M_5 = M_8 = 0 \text{ кНм};$$

$$M_2 = M = 18 \text{ кНм};$$

$$M_6 = M_7 = P \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кНм}.$$

6 Розглянемо основну систему, навантажену тільки моментом $X_1 = 1$ (рис. 6.19, е) та будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту $X_1 = 1$ по характерних перерізах (див. рис. 6.19, е).

$$M_1 = X_1 = 1;$$

$$M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = 0.$$

7 Розглянемо основну систему, навантажену тільки моментом $X_2 = 1$ (рис. 6.19, ж) та будуємо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту $X_2 = 1$ по характерних перерізах (див. рис. 6.19, ж).

$$M_1 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = 0;$$

$$M_2 = M_3 = X_2 = 1.$$

8 Розглянемо основну систему, навантажену тільки моментом $X_3 = 1$ (рис. 6.19, и) та будуюмо епюру згинальних моментів від дії одиничного моменту $X_3 = 1$ по характерних перерізах (див. рис. 6.19, и).

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_6 = M_7 = M_8 = 0;$$

$$M_4 = M_5 = X_3 = 1.$$

9 Визначаємо коефіцієнти системи канонічних рівнянь, перемножуючи відповідні епюри, використовуючи формулу крайніх ординат (див. додаток Б):

$$\delta_{11} = \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,00}{EJ_x},$$

$$\delta_{22} = \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{2,00}{EJ_x},$$

$$\delta_{33} = \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,67}{EJ_x},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{3}{6EJ_x} (1 \cdot 1) = \frac{0,50}{EJ_x},$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0,$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{3}{6EJ_x} (1 \cdot 1) = \frac{0,50}{EJ_x},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{3}{6EJ_x} (18 \cdot 1) = \frac{9,00}{EJ_x},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 18 \cdot 1) + \frac{12 \cdot 3^3}{24EJ_x} (1 + 0) = \frac{31,50}{EJ_x},$$

$$\Delta_{3p} = \frac{12 \cdot 3^3}{24EJ_x} (0 + 1) + \frac{2}{6EJ_x} (20 \cdot 1) = \frac{20,17}{EJ_x}.$$

10 Підставляємо коефіцієнти в канонічні рівняння, з рішення яких знаходимо X_1 , X_2 та X_3 :

$$\begin{cases} X_1 + 0,5X_2 + 9 = 0, \\ 0,5X_1 + 2X_2 + 0,5X_3 + 31,5 = 0, \\ 0,5X_2 + 1,67X_3 + 20,17 = 0. \end{cases} \begin{cases} X_1 = -2,45 \text{ кНм}, \\ X_2 = -13,1 \text{ кНм}, \\ X_3 = -8,16 \text{ кНм}. \end{cases}$$

11 До кожної з балок прикладаємо задане навантаження і знайдений момент (рис. 6.20, а). Від них визначаємо реакції опор і будуємо епюри поперечних сил (рис. 6.20, б) і згинальних моментів (рис. 6.20, в).

$$Q_1 = Q_2 = R_1 = 2,45 \text{ кН},$$

$$Q_3 = R_3 = 19,6 \text{ кН},$$

$$Q_4 = -R_4 = -16,4 \text{ кН},$$

$$Q_5 = Q_6 = R_5 = 14,1 \text{ кН},$$

$$Q_5 = Q_6 = -P = -10 \text{ кН},$$

$$M_1 = -X_1 = -2,45 \text{ кНм},$$

$$M_2 = M - X_2 = 18 - 13,1 = 4,9 \text{ кНм},$$

$$M_3 = -X_2 = -13,1 = -13,1 \text{ кНм},$$

$$M_4 = M_5 = -X_3 = -8,16 \text{ кНм},$$

$$M_6 = M_7 = P \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кНм},$$

$$M_8 = 0 \text{ кНм},$$

$$z = \frac{19,6}{12} = 1,63 \text{ м},$$

$$M_{extr} = -X_2 + R_3 \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = -13,1 + 19,6 \cdot 1,63 - 12 \cdot 1,63 \cdot \frac{1,63}{2} = 2,91 \text{ кНм}$$

12 Виконуємо деформаційну перевірку. Так як в заданій статично невизначуваній системі взаємний кут повороту на проміжних опорах дорівнює нулю, то добуток остаточної епюри згинальних моментів M_s на епюри M_1 , M_2 та M_3 повинен рівнятися нулю, тобто $\Delta_{1s} = 0$, $\Delta_{2s} = 0$ та $\Delta_{3s} = 0$.

$$\Delta_{1s} = \frac{3}{6EJ_x} (-2 \cdot 2,45 \cdot 1 + 4,9 \cdot 1) = \frac{0}{EJ_x},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2s} &= \frac{3}{6EJ_x} (2 \cdot 4,9 \cdot 1 - 2,45 \cdot 1) + \frac{3}{6EJ_x} (-2 \cdot 13,1 \cdot 1 - 8,16 \cdot 1) + \frac{12 \cdot 3^3}{24EJ_x} (1 + 0) = \\ &= \frac{3,68 - 17,18 + 13,5}{EJ_x} = \frac{17,18 - 17,18}{EJ_x} = \frac{0}{EJ_x}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{3s} = \frac{3}{6EJ_x} (-2 \cdot 8,16 \cdot 1 - 13,1 \cdot 1) + \frac{12 \cdot 3^3}{24EJ_x} (0 + 1) + \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 8,16 \cdot 1 + 20 \cdot 1) =$$

$$= \frac{-14,71 + 13,5 + 1,23}{EJ_x} = \frac{-14,71 + 14,73}{EJ_x}.$$

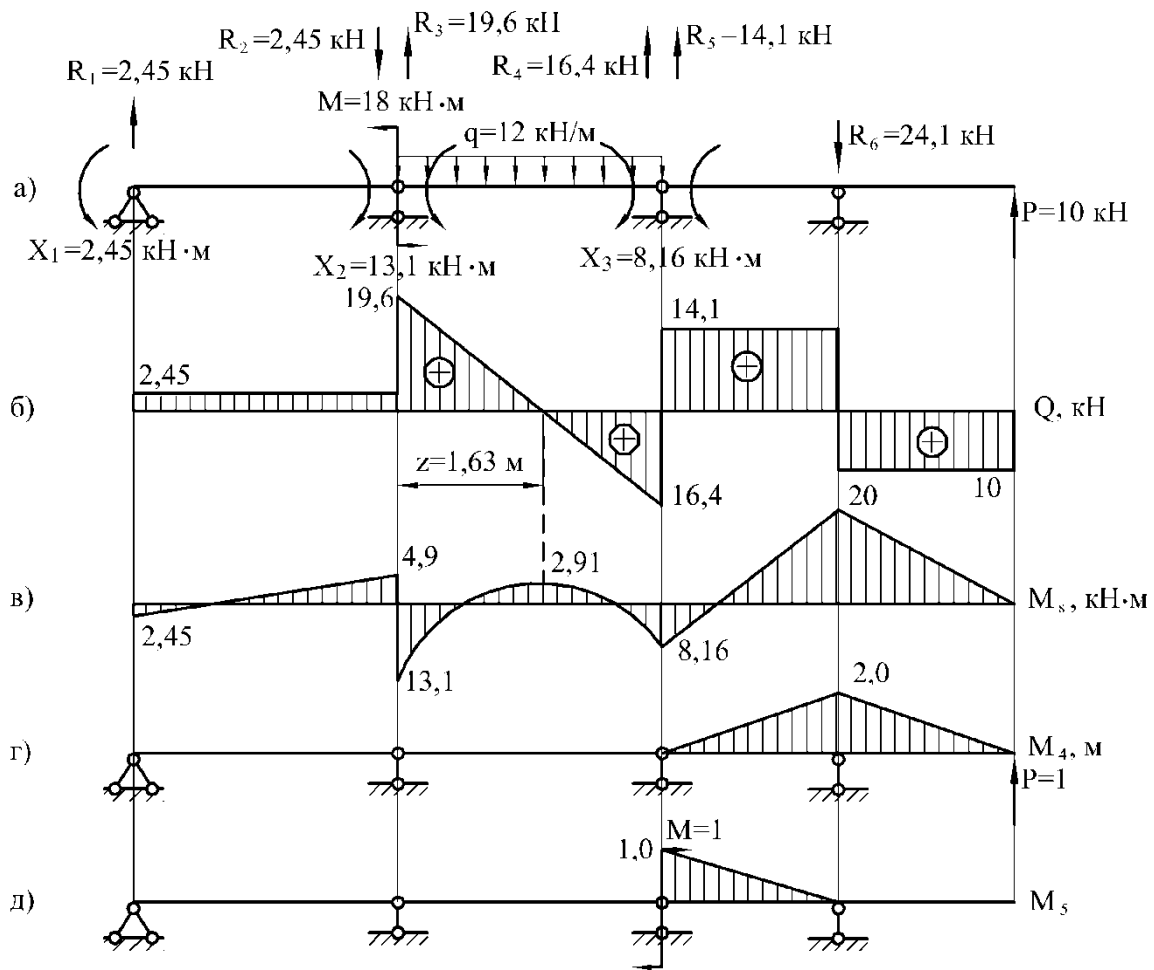


Рисунок 6.20

При цьому похибка склала:

$$\frac{14,73 - 14,71}{14,71} \cdot 100\% = 0,1\%.$$

12 З епюри згинальних моментів (див. рис. 6.20, в) знаходимо небезпечний переріз, для якого $M_{\max} = 20 \text{ кНм}$.

З умови міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma];$$

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 125 \text{ см}^3,$$

Номер двотавра знаходимо за розрахунковим значенням моменту опору $W_x \geq 125 \text{ см}^3$. По таблиці сортаменту (див. додаток А) вибираємо двотавр № 18, для якого $W_x = 143 \text{ см}^3$, $J_x = 1290 \text{ см}^4$.

13 Визначаємо прогин в точці К. Для цього до основної системи в точці К прикладаємо одиничну силу і будуємо епюру згинальних моментів (рис. 6.20, г), яку помножуємо на епюру M_s (рис. 6.20, в).

$$\begin{aligned} y_E &= \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 2 - 8,16 \cdot 2) + \frac{2}{6EJ_x} (2 \cdot 20 \cdot 2) = \frac{47,89}{EJ_x} = \\ &= \frac{47,89 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,019 \text{ м} \end{aligned}$$

Допустимий прогин балки довжиною $\ell = 10 \text{ м}$ дорівнює:

$$[y] = \frac{\ell}{200} = \frac{10}{200} = 0,05 \text{ м}.$$

14 Визначення кута повороту. У перерізі А прикладаємо одиничний момент, від нього будуємо епюру згинальних моментів (рис. 5.20, д), яку помножуємо на епюру M_s (рис. 5.20, в).

$$\theta_A = \frac{2}{6EJ_x} (-2 \cdot 8,16 \cdot 1 + 20 \cdot 1) = \frac{1,23}{EJ_x} = \frac{1,23 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,0005 \text{ рад}.$$

Допустимий кут повороту перерізу дорівнює:

$$[\theta] = 2^\circ = 0,0349 \text{ рад}.$$

7 СТІЙКІСТЬ І ДИНАМІЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ

7.1 Підбір перерізу стиснутого стояка

Для заданого стояка довжиною ℓ , що стискається центрально прикладеною силою P , підібрати з умови стійкості розміри поперечного перерізу, якщо матеріал стояка – сталь Ст.3, $[\sigma] = 160$ МПа, недовантаження – мінімальне.

Вихідні дані вибрати із таблиць 7.1 та 7.2 і рисунка 7.1.

Таблиця 7.1 – Вихідні дані до задачі 7.1

Перша цифра номера варіанта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значення P , кН	300	350	400	450	500	300	350	400	450	500

Таблиця 7.2 – Вихідні дані до задачі 7.1

Друга цифра номера варіанта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Значення ℓ , м	2	2,5	3	3,5	4	2,5	3	3,5	4	2

7.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 7.1

1 Підбір перерізу стояка здійснюється з умови стійкості:

$$\sigma \leq [\sigma_{cm}], \quad (7.1)$$

де $\sigma = \frac{P}{F}$ – діюче напруження в стояку; (7.2)

F – площа поперечного перерізу стояка;

$[\sigma_{cm}]$ – допустиме напруження на стійкість:

$$[\sigma_{cm}] = \varphi \cdot [\sigma], \quad (7.3)$$

$[\sigma]$ – основне допустиме напруження для матеріалу стояка (при стисканні);

φ – коефіцієнт зниження основного допустимого напруження:

$$0 \leq \varphi \leq 1.$$

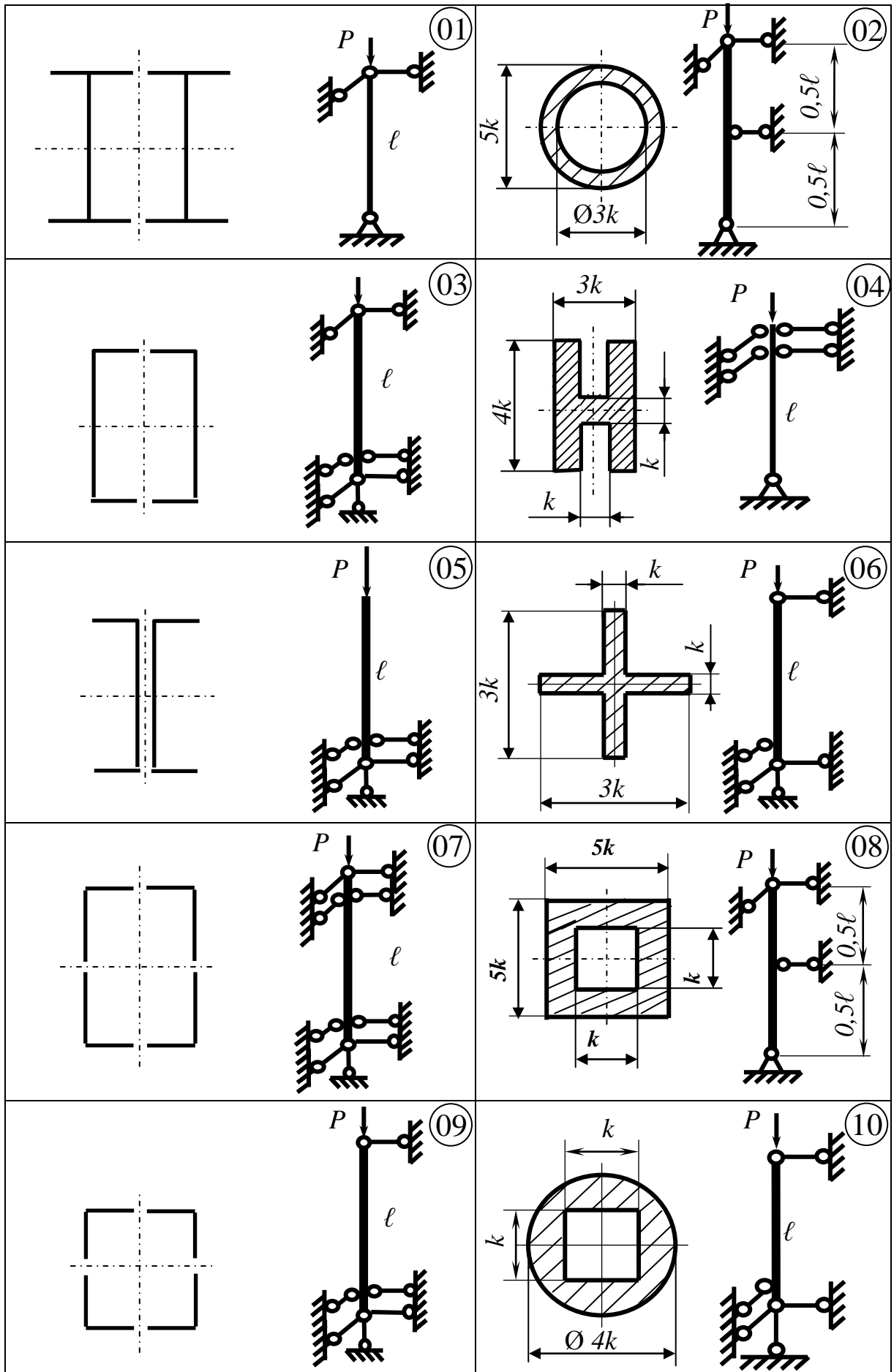


Рисунок 7.1 – Схеми стояків до задачі 7.1

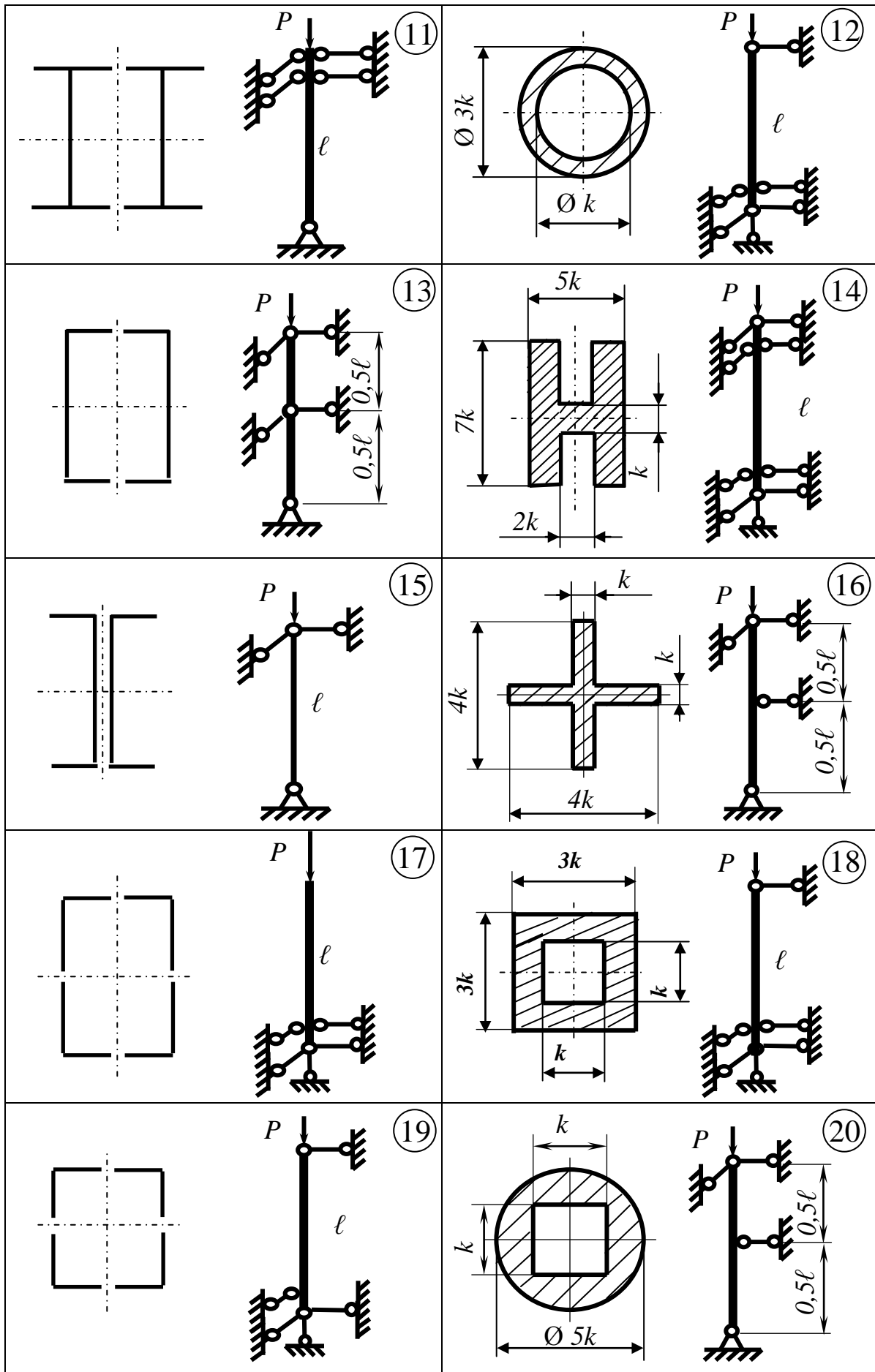


Рисунок 7.1, аркуш 2

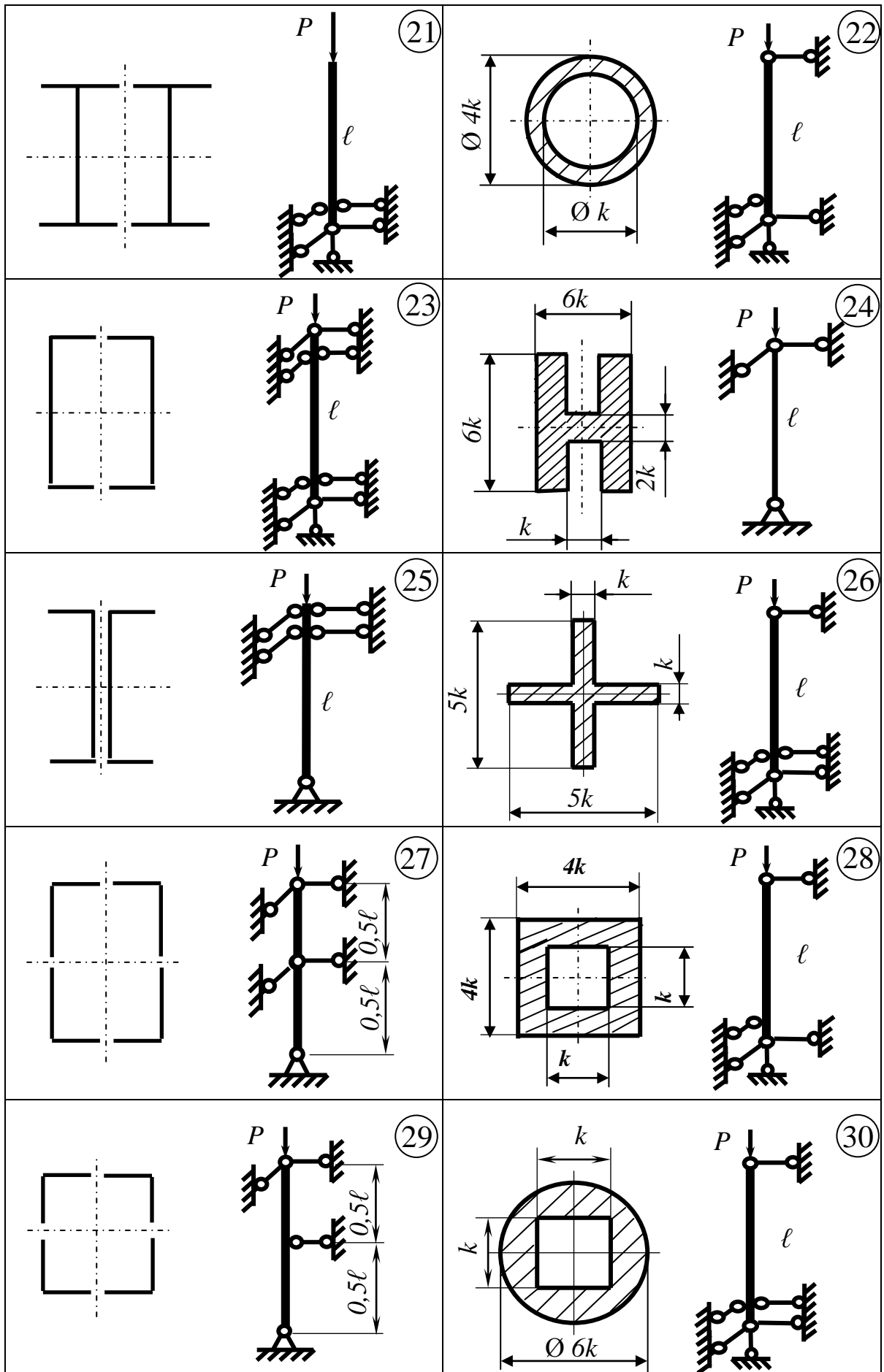


Рисунок 7.1, аркуш 3

2 Оскільки в умову стійкості входять дві взаємозалежні невідомі величини – F і φ , то задачу слід розв'язувати шляхом послідовних наближень, роблячи крок за кроком.

На **першому кроці** задається деяке початкове значення коефіцієнта φ (найбільш доцільно обирати $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,6$) і визначається відповідна площа перерізу стояка – F_1 :

$$F_1 \geq \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]}. \quad (7.4)$$

Орієнтуючись на значення F_1 , за допомогою таблиць сортаменту (див. додаток А) визначаються конкретні розміри перерізу і його головні моменти інерції – J_x та J_y , а також відповідні радіуси інерції:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F_1}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F_1}}. \quad (7.5)$$

Далі визначаються величини гнучкості стояка у головних площинах xz і yz (x і y – головні центральні осі перерізу, z – подовжня вісь стояка):

$$\lambda_{xz} = \frac{\mu_{xz} \cdot \ell}{i_y}, \quad \lambda_{yz} = \frac{\mu_{yz} \cdot \ell}{i_x}, \quad (7.6)$$

де μ_{xz} і μ_{yz} – коефіцієнти приведення довжини стояка (див. додаток Д).

Для більшого із значень гнучкості і заданого матеріалу стояка визначається величина коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження в кінці першого кроку – φ_1' (див. додаток Д).

Після цього виконується перевірка умови стійкості (7.1) з урахуванням знайдених величин F_1 і φ_1' .

При негативному результаті перевірки треба безпосередньо переходити до наступного кроку. При позитивному ж результаті треба спочатку підрахувати величину недовантаження стояка:

$$\varepsilon = \frac{[\sigma_{cm}] - \sigma}{[\sigma_{cm}]} \cdot 100\%. \quad (7.7)$$

Перехід до наступного кроку і в цьому разі є необхідним: він потрібен для визначення мінімально можливої величини недовантаження.

На **другому кроці** початкове значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження визначається як середньозважене його величин на початку і в кінці попереднього кроку:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}. \quad (7.8)$$

Розрахунок на цьому і подальших кроках – аналогічні попередньому.

3 Розрахунок закінчується при виконанні обох вимог завдання, а саме в разі виконання умови стійкості і досягненні мінімально можливого недовантаження стояка.

7.1.2 Приклад 1 розв'язання задачі 7.1

Схема стояка з чотирьох стандартних нерівнополичних кутиків, зображена на рисунку 7.2. Розрахунок виконаємо при таких вихідних даних: матеріал стояка – сталь Ст.3, $[\sigma] = 160$ МПа, $P = 420$ кН, $\ell = 3,2$ м.

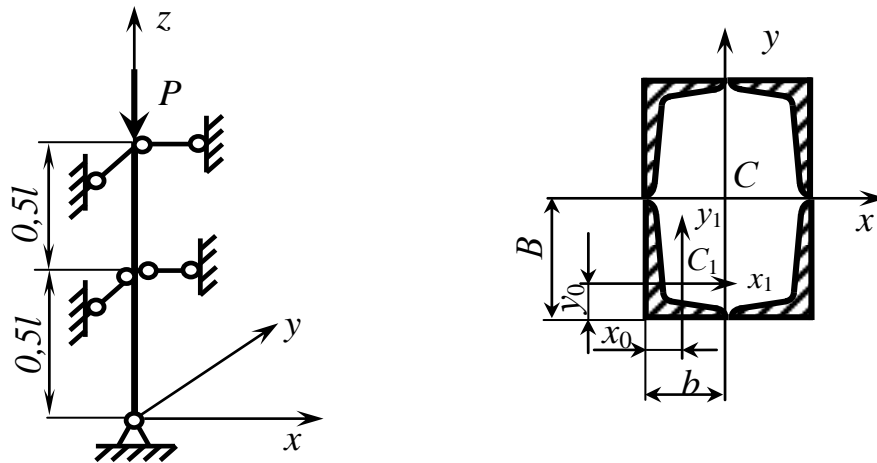


Рисунок 7.2 –Схема стояка до прикладу 1 задачі 7.1

Розв'язання

1 Перший крок

Приймаємо на його початку середнє значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження (див. додаток В) : $\varphi_1 = 0,5$.

Тоді:

$$F_1 \geq \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{420 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 5250 \text{ мм}^2 = 52,50 \text{ см}^2.$$

Відповідна площа кожного з чотирьох кутиків, що створюють переріз:

$$F_{кут} \geq \frac{52,50}{4} = 13,125 \text{ см}^2.$$

З відповідної таблиці сортаменту (див. додаток А) вибираємо найближчий за площею кутик $110 \times 70 \times 8$, у якого $F_{кут} = 13,9 \text{ см}^2$; $J_{x_1} = 172 \text{ см}^4$; $J_{y_1} = 54,6 \text{ см}^4$; $B = 11 \text{ см}$; $b = 7 \text{ см}$; $x_0 = 1,64 \text{ см}$; $y_0 = 3,61 \text{ см}$.

Визначаємо головні моменти інерції перерізу стояка:

$$J_x = 4 \cdot [J_{x_1} + F_{кут} \cdot (B - y_0)^2] = 4 \cdot [172 + 13,9 \cdot (11 - 3,61)^2] = 3724 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 4 \cdot [J_{y_1} + F_{кут} \cdot (b - x_0)^2] = 4 \cdot [54,6 + 13,9 \cdot (7 - 1,64)^2] = 1815 \text{ см}^4.$$

Підраховуємо відповідні радіуси інерції перерізу:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{4 \cdot F_{кут}}} = \sqrt{\frac{3724}{4 \cdot 13,9}} = 8,18 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{4 \cdot F_{кут}}} = \sqrt{\frac{1815}{4 \cdot 13,9}} = 5,71 \text{ см}.$$

Для заданої схеми стійки (див. додаток В):

$$\mu_{xz} = \mu_{yz} = 0,5.$$

Величини гнучкості стійки в її головних площинах:

$$\lambda_{xz} = \frac{\mu_{xz} \cdot \ell}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{5,71} = 28,0;$$

$$\lambda_{yz} = \frac{\mu_{yz} \cdot \ell}{i_x} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{8,18} = 19,6.$$

Порівнюючи значення λ_{xz} і λ_{yz} , бачимо, що $\lambda_{\max} = \lambda_{xz}$. Саме для цього значення λ і ведемо подальший розрахунок.

Зважаючи на те, що у відповідній таблиці (див. додаток В) значення

$\lambda = 28,0$ нема, величину коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження на кінці першого кроку – φ_1' визначимо методом лінійної інтерполяції (рис. 7.3):

$$\varphi'_1 = 0,94 + (30 - 28,0) \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,94 + (30 - 28,0) \cdot \frac{(0,96 - 0,94)}{(30 - 20)} = 0,944.$$

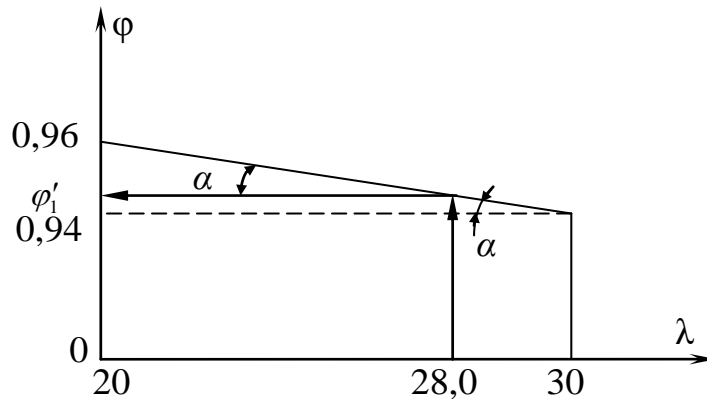


Рисунок 7.3 – Схема до визначення φ'_1

Виконаємо перевірку на стійкість:

$$\sigma = \frac{P}{4 \cdot F_{\text{кут}}} = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 13,9 \cdot 10^2} = 75,5 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{\text{ст}}] = \varphi'_1 \cdot [\sigma] = 0,944 \cdot 160 = 151 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості виконується: $\sigma < [\sigma_{\text{ст}}]$.

Величина недовантаження на першому кроці:

$$\varepsilon = \frac{[\sigma_{\text{ст}}] - \sigma}{[\sigma_{\text{ст}}]} \cdot 100 = \frac{(151 - 75,5)}{151} \cdot 100 = 50 \text{ \%}.$$

2 Другий крок

Приймаємо:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,944}{2} = 0,722.$$

Тоді:

$$F_2 \geq \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{420 \cdot 10^3}{0,722 \cdot 160} = 3636 \text{ мм}^2 = 36,36 \text{ см}^2;$$

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{36,36}{4} = 9,09 \text{ см}^2.$$

Із сортаменту (див. додаток А) підбираємо найближчий за розмірами кутик $80 \times 60 \times 7$, у якого $F_{кут} = 9,42 \text{ см}^2$; $J_{y_1} = 28,74 \text{ см}^4$; $b = 6 \text{ см}$; $x_0 = 1,53 \text{ см}$ (інші параметри кутика для визначення λ_{\max} не потрібні).

Підраховуємо:

$$J_y = 4 \cdot [28,74 + 9,42 \cdot (6 - 1,53)^2] = 868 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{868}{4 \cdot 9,42}} = 4,80 \text{ см};$$

$$\lambda_{\max} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{4,80} = 33,3.$$

Величину φ'_2 і в цьому разі визначимо методом лінійної інтерполяції, беручи необхідні дані з додатку В :

$$\varphi'_2 = 0,92 + (40 - 33,30) \cdot \frac{(0,94 - 0,92)}{(40 - 30)} = 0,933.$$

Перевіряємо умову стійкості:

$$\sigma = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 9,42 \cdot 10^2} = 111,5 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{cm}] = 0,933 \cdot 160 = 149,3 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості на другому кроці також виконується: $\sigma < [\sigma_{cm}]$.

Недовантаження стійки в цьому разі становить:

$$\varepsilon = \frac{(149,3 - 111,5)}{149,3} \cdot 100 = 25,3 \text{ \%}.$$

3 Третій крок

Приймаємо:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,722 + 0,933}{2} = 0,828.$$

Тоді:

$$F_3 \geq \frac{420 \cdot 10^3}{0,828 \cdot 160} = 3170 \text{ мм}^2 = 31,70 \text{ см}^2;$$

$$F_{кут} \geq \frac{31,70}{4} = 7,925 \text{ см}^2.$$

Приймаємо кутик $80 \times 60 \times 6$, у якого $F_{кут} = 8,15 \text{ см}^2$; $J_{y_1} = 25,18 \text{ см}^4$;
 $b = 6 \text{ см}$; $x_0 = 1,49 \text{ см}$. Підраховуємо:

$$J_y = 4 \cdot [25,18 + 8,15 \cdot (6 - 1,49)^2] = 764 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{764}{4 \cdot 8,15}} = 4,84 \text{ см};$$

$$\lambda_{\max} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{4,84} = 33,1.$$

Визначимо методом лінійної інтерполяції:

$$\varphi'_3 = 0,92 + (40 - 33,1) \cdot \frac{(0,94 - 0,92)}{(40 - 30)} = 0,934.$$

Перевіряємо умову стійкості:

$$\sigma = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 8,15 \cdot 10^2} = 128,8 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{cm}] = 0,934 \cdot 160 = 149,4 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості на третьому кроці також виконується: $\sigma < [\sigma_{cm}]$.
 Недовантаження в цьому разі становить:

$$\varepsilon = \frac{(149,4 - 128,8)}{149,4} \cdot 100 = 13,8 \text{ \%}.$$

4 Четвертий крок

Приймаємо:

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,828 + 0,934}{2} = 0,881.$$

Тоді

$$F_4 \geq \frac{420 \cdot 10^3}{0,881 \cdot 160} = 2980 \text{ мм}^2 = 29,80 \text{ см}^2;$$

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{29,80}{4} = 7,45 \text{ см}^2.$$

Приймаємо кутик $80 \times 50 \times 6$, у якого $F_{\text{кут}} = 7,55 \text{ см}^2$; $J_{y_1} = 14,85 \text{ см}^4$;
 $b = 5 \text{ см}$; $x_0 = 1,17 \text{ см}$.

Підраховуємо:

$$J_y = 4 \cdot [14,85 + 7,55 \cdot (5 - 1,17)^2] = 502 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{502}{4 \cdot 7,55}} = 4,08 \text{ см};$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{4,08} = 39,2.$$

Знаходимо методом лінійної інтерполяції:

$$\varphi'_4 = 0,92 + (40 - 39,2) \cdot \frac{(0,94 - 0,92)}{(40 - 30)} = 0,922.$$

Перевіряємо умову стійкості:

$$\sigma = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 7,55 \cdot 10^2} = 139,1 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{\text{см}}] = 0,922 \cdot 160 = 147,5 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості на четвертому кроці також виконується: $\sigma < [\sigma_{\text{см}}]$.

Недовантаження в цьому разі становить:

$$\varepsilon = \frac{(147,52 - 139,1)}{147,52} \cdot 100 = 5,7 \text{ \%}.$$

5 П'ятий крок

Приймаємо:

$$\varphi_5 = \frac{\varphi_4 + \varphi_4'}{2} = \frac{0,881 + 0,922}{2} = 0,902.$$

Тоді:

$$F_5 \geq \frac{420 \cdot 10^3}{0,902 \cdot 160} = 2910 \text{ мм}^2 = 29,1 \text{ см}^2;$$

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{29,1}{4} = 7,275 \text{ см}^2.$$

Приймаємо кутик $80 \times 50 \times 6$, у якого $F_{\text{кут}} = 7,55 \text{ см}^2$.

Зважаючи на те, що він вже був на четвертому кроці, розрахунок припиняємо. Вказані розміри кутика – остаточні, а недовантаження $\varepsilon = 5,7\%$ – мінімально можливе.

7.1.3 Приклад 2 розв'язання задачі 7.1

Схема стояка зображена на рисунку 7.4. Розрахунок виконаємо при таких вихідних даних: матеріал стояка – сталь Ст.3, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $P = 320 \text{ кН}$, $\ell = 2,2 \text{ м}$.

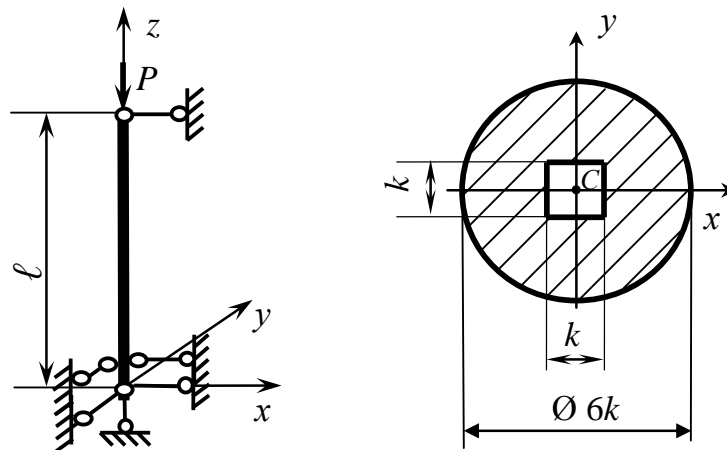


Рисунок 7.4 – Схема стояка до прикладу 2 задачі 7.1

Розв'язання

Особливістю даної схеми є те, що в ній усі розміри перерізу стояка визначає параметр k . Тому весь розрахунок спрямовується на визначення величини цього параметра.

Врахуємо, що площа перерізу стояка – F пов'язана з параметром k такою залежністю:

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot (6k)^2 - k^2 = 27,26 \cdot k^2.$$

1 Перший крок

Приймаємо на його початку $\varphi_1 = 0,5$. Тоді відповідна площа перерізу стояка становитиме:

$$F_1 \geq \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 4000 \text{ мм}^2.$$

Визначаємо величину параметра k на цьому кроці:

$$k_1 \geq \sqrt{\frac{F_1}{27,26}} = \sqrt{\frac{4000}{27,26}} = 12,1 \text{ мм}.$$

Округлюємо величину k_1 до найближчого цілого числа: $k_1 = 13$ мм.

Визначаємо головні моменти інерції перерізу стояка і відповідні радіуси інерції:

$$J_x = J_y = \frac{\pi}{64} \cdot (6k_1)^4 - \frac{1}{12} \cdot k_1 \cdot k_1^3 = 63,502 \cdot k_1^4 = 63,502 \cdot 13^4 = 1,814 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{J_x}{27,26 \cdot k_1^2}} = \sqrt{\frac{1,814 \cdot 10^6}{27,26 \cdot 13^2}} = 19,84 \text{ мм}.$$

Коефіцієнти приведенної довжини стійки для заданої схеми кріплення (рис. 7.5) становлять: $\mu_{xz} = 0,7$; $\mu_{yz} = \mu_{\max} = 2$ (див. додаток В).

З урахуванням цього визначимо величини гнучкості стояка у його головних площинах xz і yz :

$$\lambda_{xz} = \frac{\mu_{xz} \cdot \ell}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^3}{19,84} = 77,6;$$

$$\lambda_{yz} = \frac{\mu_{yz} \cdot \ell}{i_x} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^3}{19,84} = 221,8.$$

Порівнюючи ці величини, бачимо, що $\lambda_{\max} = \lambda_{yz}$. Саме це значення гнучкості візьмемо для подальшого розрахунку.

Враховуючи те, що значення $\lambda = 221,8$ переважає максимальне в додатку B ($\lambda_{\max} = 200$), приймаємо в кінці першого кроку: $\varphi'_1 = \varphi_{\min} = 0$.

В цьому разі допустиме напруження:

$$[\sigma_{cm}] = \varphi'_1 \cdot [\sigma] = 0$$

і перевірка на стійкість не має сенсу. Тому переходимо до наступного кроку.

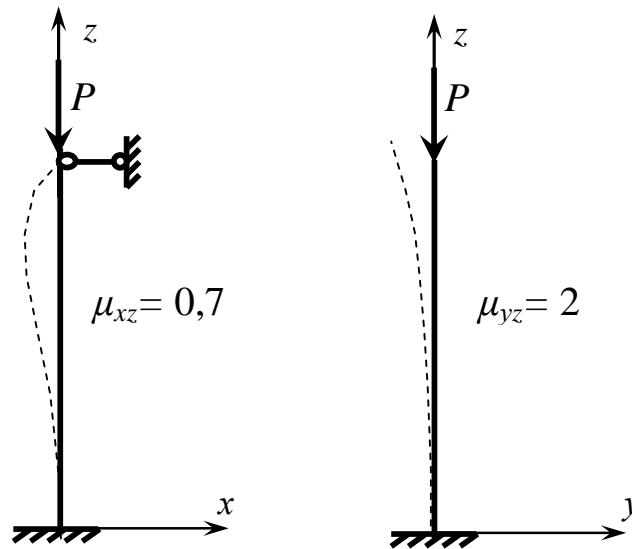


Рисунок 7.5 – Варіанти кріплення стояка і коефіцієнти приведеної довжини у головних площинах xz і yz

2 Другий крок

Приймаємо:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0}{2} = 0,25.$$

Тоді

$$F_2 \geq \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,25 \cdot 160} = 8000 \text{ мм}^2.$$

$$k_2 \geq \sqrt{\frac{F_2}{27,26}} = \sqrt{\frac{8000}{27,26}} = 17,1 \text{ мм}.$$

Приймаємо: $k_2 = 18 \text{ мм}$.

Підрозрахуємо:

$$J_x = 63,502 \cdot 18^4 = 6,666 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$i_x = \sqrt{\frac{6,666 \cdot 10^6}{27,26 \cdot 18^2}} = 27,47 \text{ мм};$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{yz} = \frac{2,0 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{27,47} = 160,2.$$

Зважаючи на те, що у додатку *B* такого значення нема, величину коефіцієнта φ на кінці другого кроку визначимо методом лінійної інтерполяції (рис. 7.6):

$$\varphi'_2 = 0,26 + (170 - 160,2) \cdot \text{tg } \alpha = 0,26 + (170 - 160,2) \cdot \frac{(0,29 - 0,26)}{(170 - 160)} = 0,289.$$

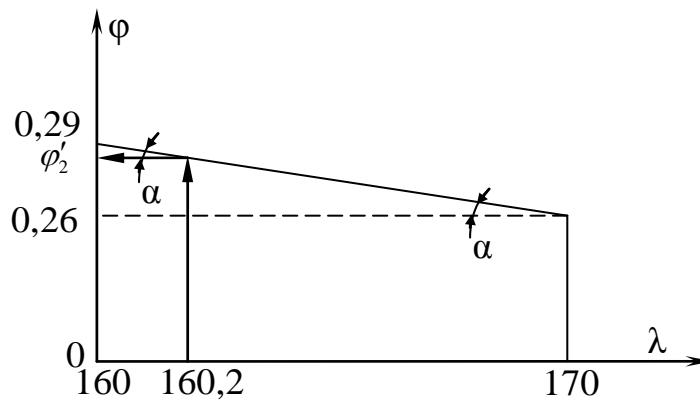


Рисунок 7.6 – Схема до визначення φ'_2

Перевіряємо умову стійкості:

$$\sigma = \frac{P}{F_2} = \frac{P}{27,26 \cdot k_2^2} = \frac{320 \cdot 10^3}{27,26 \cdot 18^2} = 36,2 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{ст}] = \varphi'_2 \cdot [\sigma] = 0,289 \cdot 160 = 46,2 \text{ МПа}.$$

Оскільки $\sigma < [\sigma_{ст}]$, умова стійкості виконується.

Величина недовантаження стійки:

$$\varepsilon = \frac{[\sigma_{ст}] - \sigma}{[\sigma_{ст}]} \cdot 100 = \frac{(46,2 - 36,2)}{46,2} \cdot 100 = 21,6 \text{ \%}.$$

3 Третій крок

Приймаємо:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,25 + 0,289}{2} = 0,270.$$

Тоді:

$$F_3 \geq \frac{P}{\varphi_3 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,270 \cdot 160} = 7407 \text{ мм}^2;$$

$$k_3 \geq \sqrt{\frac{F_3}{27,26}} = \sqrt{\frac{7407}{27,26}} = 16,5 \text{ мм}.$$

Приймаємо: $k_3 = 17$ мм. Підраховуємо:

$$J_x = 63,502 \cdot 17^4 = 5,304 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$i_x = \sqrt{\frac{5,304 \cdot 10^6}{27,26 \cdot 17^2}} = 25,95 \text{ мм};$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2,0 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{25,95} = 169,6.$$

Використовуючи метод лінійної інтерполяції, визначаємо:

$$\varphi_3' = 0,26 + (170 - 169,6) \cdot \frac{(0,29 - 0,26)}{(170 - 160)} = 0,261.$$

Перевірка стійкості:

$$\sigma = \frac{320 \cdot 10^3}{27,26 \cdot 17^2} = 40,6 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{cm}] = 0,261 \cdot 160 = 41,80 \text{ МПа}.$$

Оскільки $\sigma < [\sigma_{cm}]$, стійкість в цьому разі також забезпечена.

Величина недовантаження:

$$\varepsilon = \frac{(41,8 - 40,6)}{41,8} \cdot 100 = 2,9 \%$$

4 Четвертий крок

Приймаємо:

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,270 + 0,261}{2} = 0,266.$$

Тоді

$$F_4 \geq \frac{P}{\varphi_4 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,266 \cdot 160} = 7519 \text{ мм}^2;$$

$$k_4 \geq \sqrt{\frac{F_4}{27,26}} = \sqrt{\frac{7519}{27,26}} = 16,6 \text{ мм}.$$

Приймаємо: $k_4 = 17$ мм. Зважаючи на те, що цей результат вже був на третьому кроці, розрахунок припиняємо. Вказане значення параметра k – остаточне, а відповідне недовантаження $\sigma = 2,9\%$ – мінімально можливе.

7.2 Визначення напружень в рамі при ударі

На сталеву раму, яку виготовлено з двотаврового профілю, падає тіло масою m з висоти h . Визначити максимальні нормальні напруження в рамі, що виникають внаслідок удару.

Вихідні дані вибрати із таблиць 7.3 та 7.4 і рисунка 7.7.

Таблиця 7.3 – Вихідні дані до задачі 7.2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	1	1,5	2	2,5	3	1	1,5	2	2,5	3
b , м	1,5	2,5	1	3	2	2,5	3	1,5	2	1
c , м	3	1	1,5	2	2,5	2	2,5	1	3	1,5
d , м	2,5	2	3	1	1,5	1,5	2	3	1	2,5

Таблиця 7.4 – Вихідні дані до задачі 7.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m , кг	60	70	80	90	100	60	70	80	90	100
h , мм	300	250	200	150	100	350	300	250	200	150
Номер двотавра	20	22	24	27	30	22	24	27	30	20

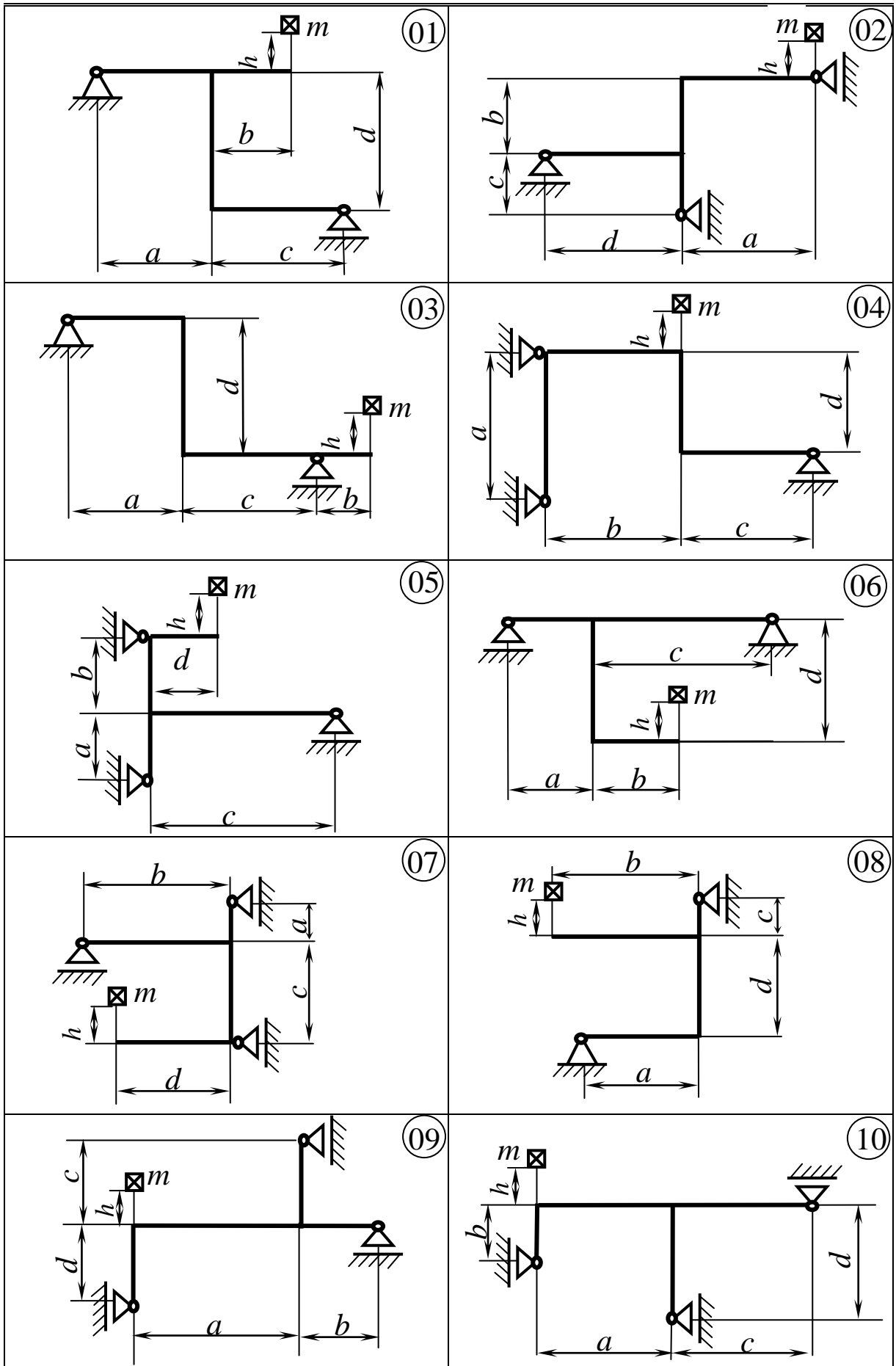


Рисунок 7.7 – Схеми рам до задачі 7.2

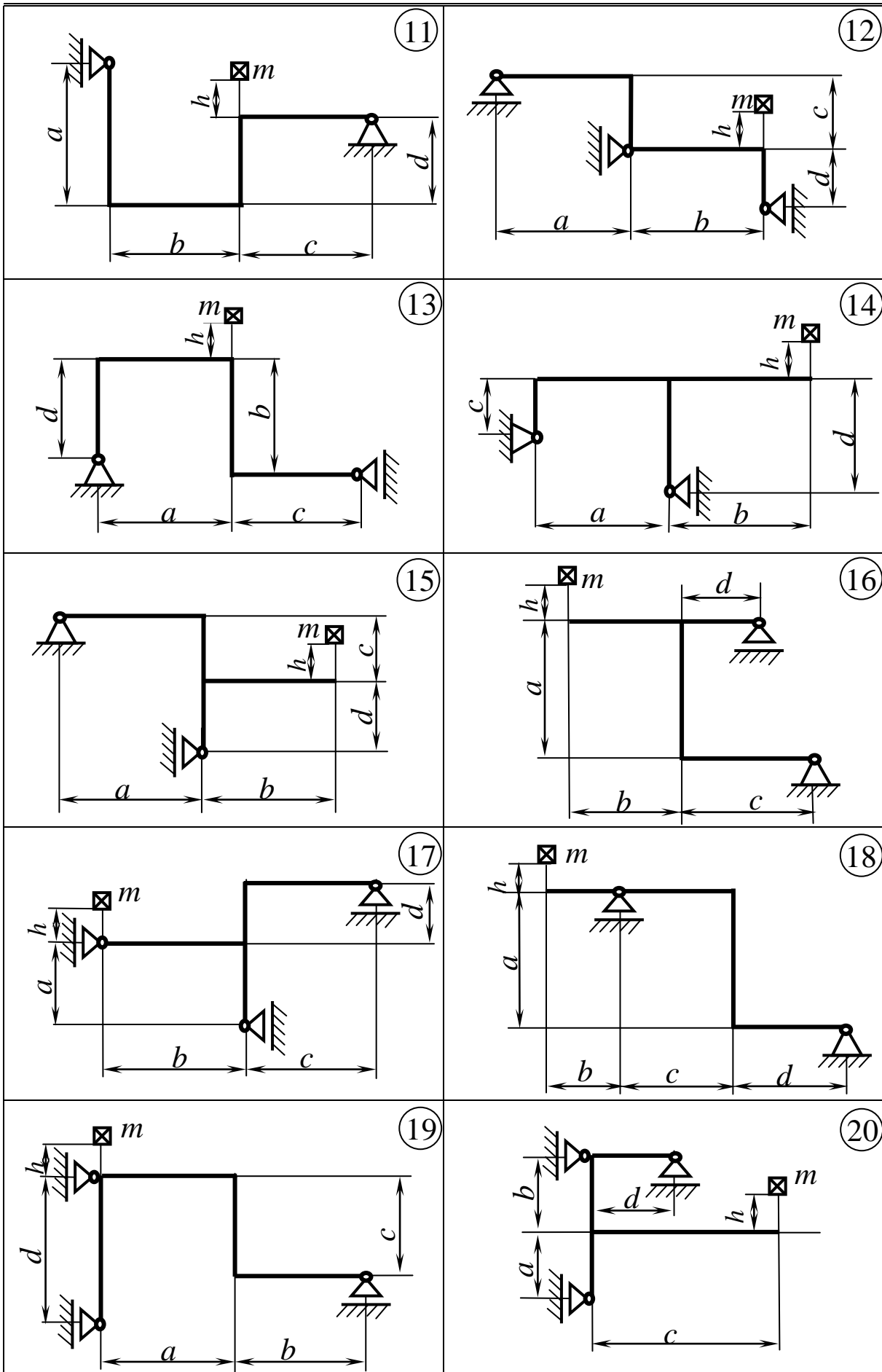


Рисунок 7.7, аркуш 2

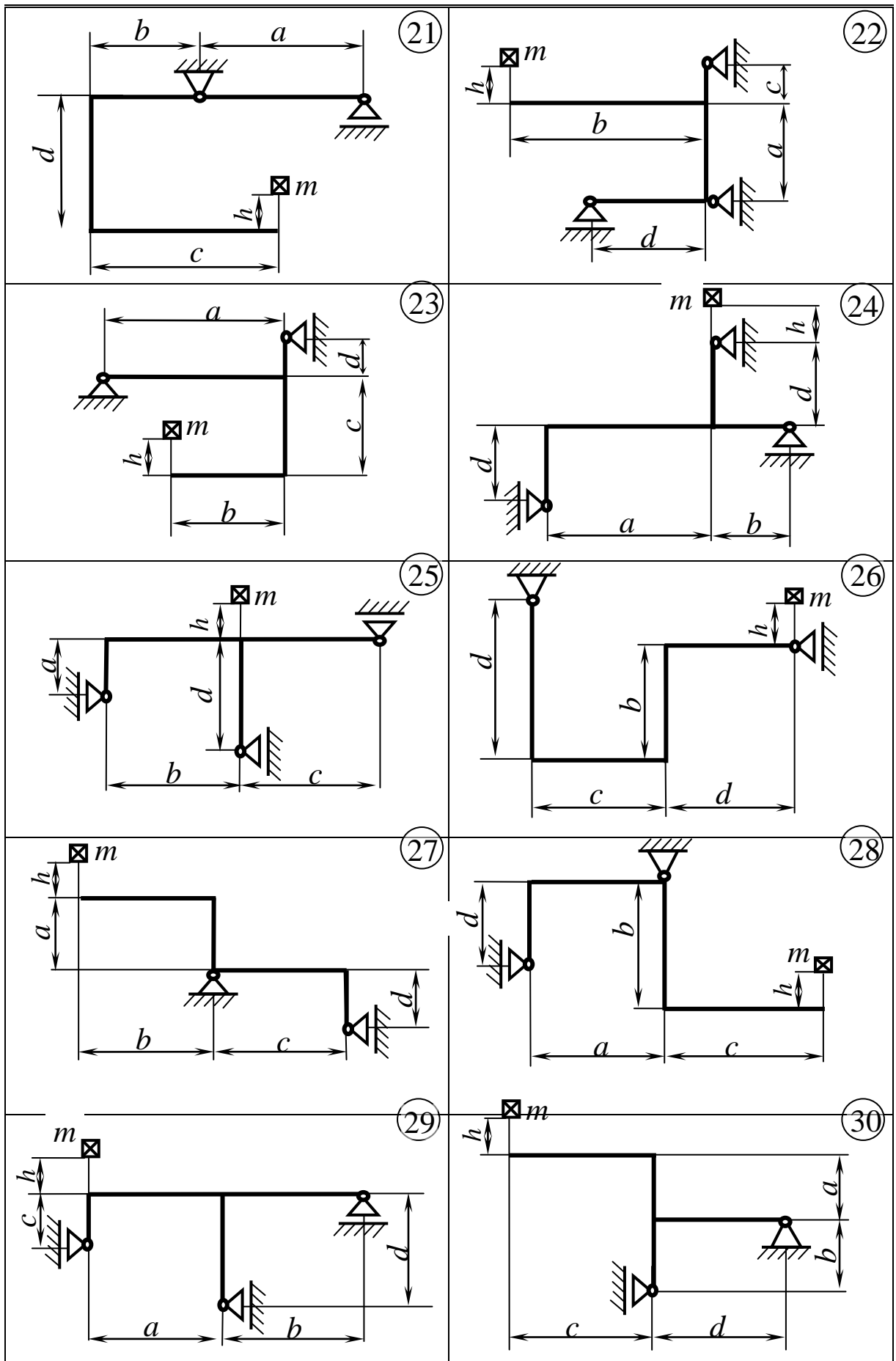


Рисунок 7.7, аркуш 3

7.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 7.2

Тіло, яке падає з певної висоти на пружну конструкцію, спричиняє удар і появу в конструкції відповідних динамічних напружень. Величини цих напружень визначаються шляхом помноження на динамічний коефіцієнт удару k_δ напружень від статично прикладеної в місці удару ваги падаючого тіла $m \cdot g$ ($g = 9,81 \text{ м / с}^2$ – прискорення земного тяжіння). При цьому величина k_δ визначається за формулою:

$$k_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{cm}}}, \quad (7.9)$$

де δ_{cm} – вертикальне переміщення точки удару під дією статично прикладеної сили $m \cdot g$.

Задача розв'язується у такій послідовності:

1 До рами в точці удару прикладається вертикальна одинична сила $P=1$ і визначаються опорні реакції рами від дії цієї сили.

2 Будується еюра згинальних моментів від дії на раму одиничної сили $-\bar{M}$.

3 Визначається за формулою крайніх ординат (див. додаток Д) вертикальне переміщення точки прикладення одиничної сили $-\delta_{11}$:

$$\delta_{11} = \bar{M} \times \bar{M}. \quad (7.10)$$

4 Розраховується величина δ_{cm} :

$$\delta_{cm} = m \cdot g \cdot \delta_{11}. \quad (7.11)$$

5 Обчислюється динамічний коефіцієнт удару (див. формулу 7.9).

6 Визначаються максимальні нормальні напруження в рамі, що виникають внаслідок удару:

$$\sigma_{\max} = \frac{\bar{M}_{\max}}{W_x} \cdot m \cdot g \cdot k_\delta, \quad (7.12)$$

де \bar{M}_{\max} – максимальне значення згинального моменту на епюрі \bar{M} ;

W_x – осьовий момент опору двотавра, з якого виготовлено раму.

7.2.2 Приклад розв'язання задачі 7.2

Схема рами зображена на рисунку 7.8. Розрахунок виконаємо при таких вихідних даних: $a = 2,8$ м; $b = 1,2$ м; $c = 2,4$ м; $d = 1,8$ м; $m = 75$ кг; $h = 180$ мм; номер двотавра – 24 ($W_x = 289$ см³; $J_x = 3460$ см⁴).

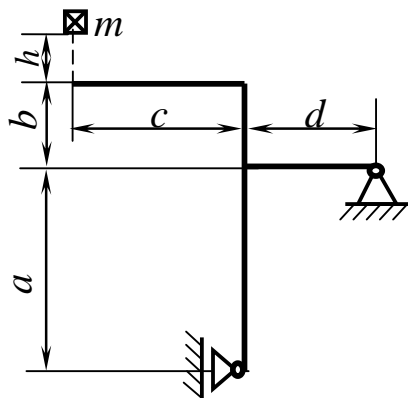


Рисунок 7.8 Схема рами до прикладу задачі 7.2

Розв'язання

1 Прикладаємо до рами в точці удару вертикальну одиничну силу $P = 1$ (рис. 7.9) і визначаємо від неї опорні реакції рами :

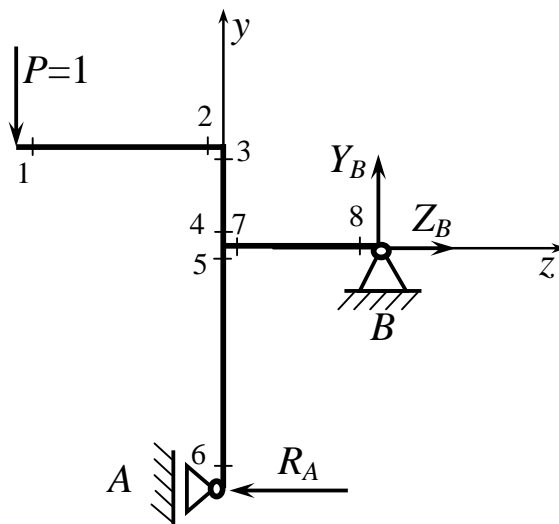


Рисунок 7.9 – Силова схема рами

$$\sum m_B = P \cdot (c + d) - R_A \cdot a = 0;$$

$$R_A = P \cdot \frac{(c + d)}{a} = 1 \cdot \frac{4,2}{2,8} = 1,5.$$

$$\sum P_y = Y_B - P = 0; \quad Y_B = P = 1.$$

$$\sum P_z = Z_B - R_A = 0; \quad Z_B = R_A = 1,5.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sum m_A &= P \cdot c + Y_B \cdot d - Z_B \cdot a = 1 \cdot 2,4 + 1 \cdot 1,8 - 1,5 \cdot 2,8 = \\ &= 2,4 + 1,8 - 4,2 = 4,2 - 4,2 = 0. \end{aligned}$$

2 Визначаємо величини згинальних моментів у характерних перерізах рами (див. рис. 7.9) і будуємо епюру – \bar{M} (рис. 7.10):

$$\begin{aligned} M_1 = M_6 = M_8 = 0; \quad M_2 = P \cdot c = 1 \cdot 2,4 = 2,4 \text{ м}; \quad M_3 = M_2 = 2,4 \text{ м}; \\ M_5 = R_A \cdot a = 1,5 \cdot 2,8 = 4,2 \text{ м}; \quad M_7 = Y_B \cdot d = 1 \cdot 1,8 = 1,8 \text{ м}. \end{aligned}$$

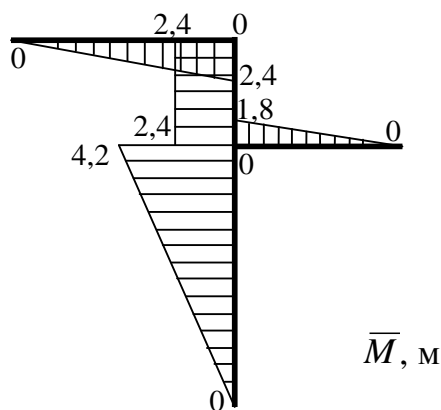


Рисунок 7.10 – Епюра згинальних моментів від дії одиничної сили

3 Застосовуючи формулу крайніх ординат (див. додаток Д), визначаємо вертикальне переміщення точки прикладення одиничної сили:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \bar{M} \times \bar{M} = \frac{2,4}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 2,4 \cdot 2,4) + \\ &+ \frac{1,2}{6E \cdot J_x} (2 \cdot 2,4 \cdot 2,4 + 2 \cdot 2,4 \cdot 2,4 + 2,4 \cdot 2,4 + 2,4 \cdot 2,4) + \\ &+ \frac{1,8}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 1,8 \cdot 1,8) + \frac{2,8}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 4,2 \cdot 4,2) = \\ &= \frac{27,648}{6E \cdot J_x} + \frac{41,472}{6E \cdot J_x} + \frac{11,664}{6E \cdot J_x} + \frac{98,784}{6E \cdot J_x} = \\ &= \frac{179,568}{6E \cdot J_x} = \frac{179,568 \cdot 10^9}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = 4,325 \cdot 10^{-3} \text{ м/Н}. \end{aligned}$$

4 Визначаємо вертикальне переміщення точки удару під дією статично прикладеної ваги падаючого тіла:

$$\delta_{cm} = m \cdot g \cdot \delta_{11} = 75 \cdot 9,81 \cdot 4,325 \cdot 10^{-3} = 3,2 \text{ мм.}$$

5 Розраховуємо динамічний коефіцієнт удару:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 180}{3,2}} = 11,7.$$

6 Визначаємо максимальні нормальні напруження, що виникають в рамі внаслідок удару:

$$\sigma_{\max} = \frac{\bar{M}_{\max}}{W_x} \cdot m \cdot g \cdot k_d = \frac{4,2 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^3} \cdot 75 \cdot 9,81 \cdot 11,7 = 125,1 \text{ МПа.}$$

7.3 Розрахунок рами в умовах вимушених коливань

На плоскій рамі із стандартного двотаврового профілю встановлено електродвигун масою m і частотою обертання n обертів за хвилину зі статично незбалансованим ротором. Від дисбалансу під час роботи двигуна виникає відцентрова сила інерції H , яка збуджує коливання конструкції і залежить від ваги двигуна $m \cdot g$ ($g = 9,81 \text{ м / с}^2$ – прискорення земного тяжіння). Нехтуючи масою рами і опором середовища, підібрати з умови міцності за нормальними напруженнями потрібний номер двотавра, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Визначити також резонансні частоти збуджуючої сили.

Вихідні дані задачі вибрати з таблиць 7.5 та 7.6 і рисунка 7.11.

Таблиця 7.5 – Вихідні дані до задачі 7.3

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	1	1,5	2	2,5	3	1	1,5	2	2,5	3
$b, \text{ м}$	3	2	2,5	1,5	1	2	2,5	3	1	1,5
$c, \text{ м}$	2,5	30	1	2	1,5	1,5	2	3	2,5	1
$d, \text{ м}$	1,5	2,5	3	1	2	1	3	1,5	2	2,5

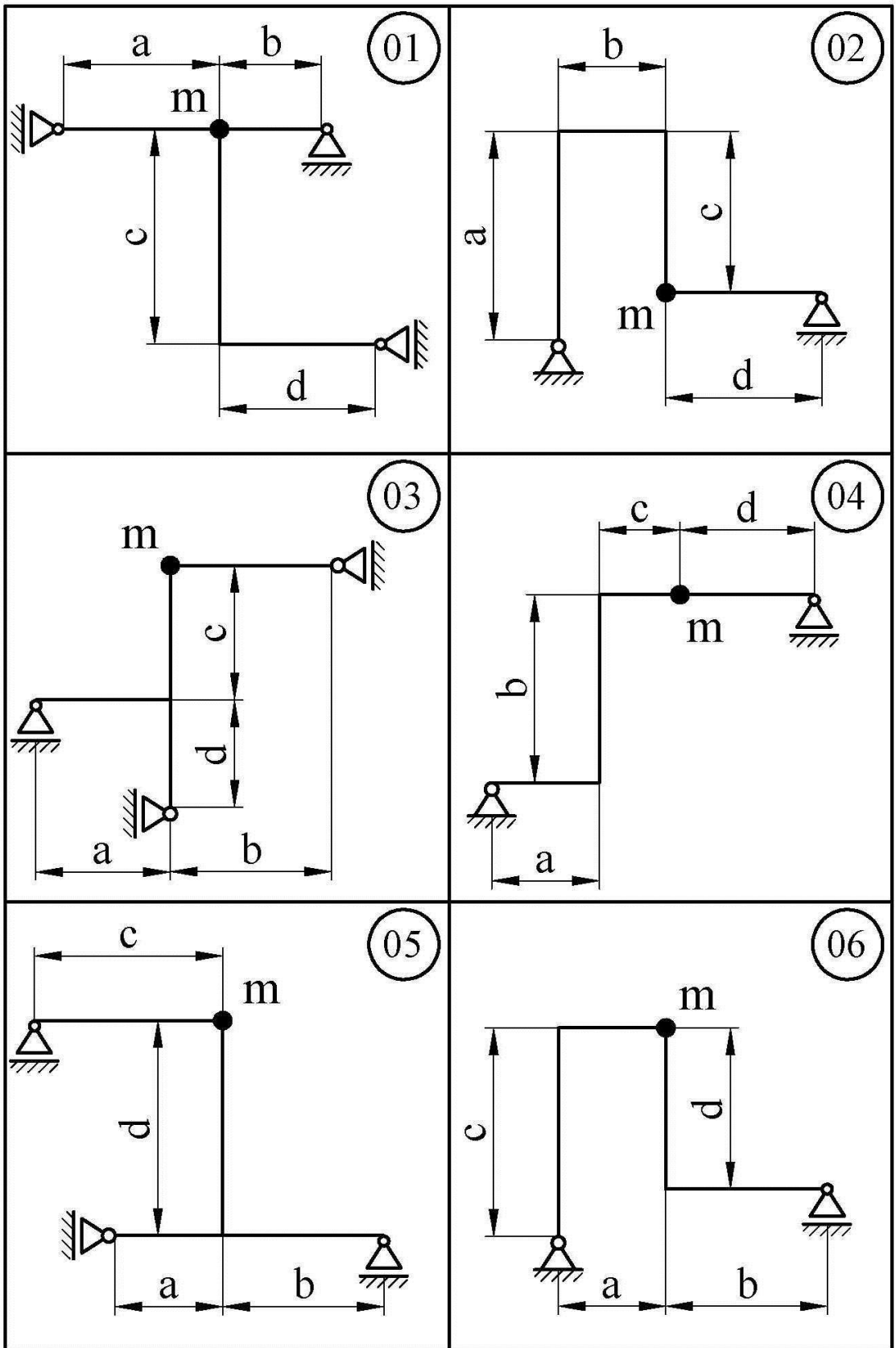


Рисунок 7.11 – Схеми рам до задачі 7.3

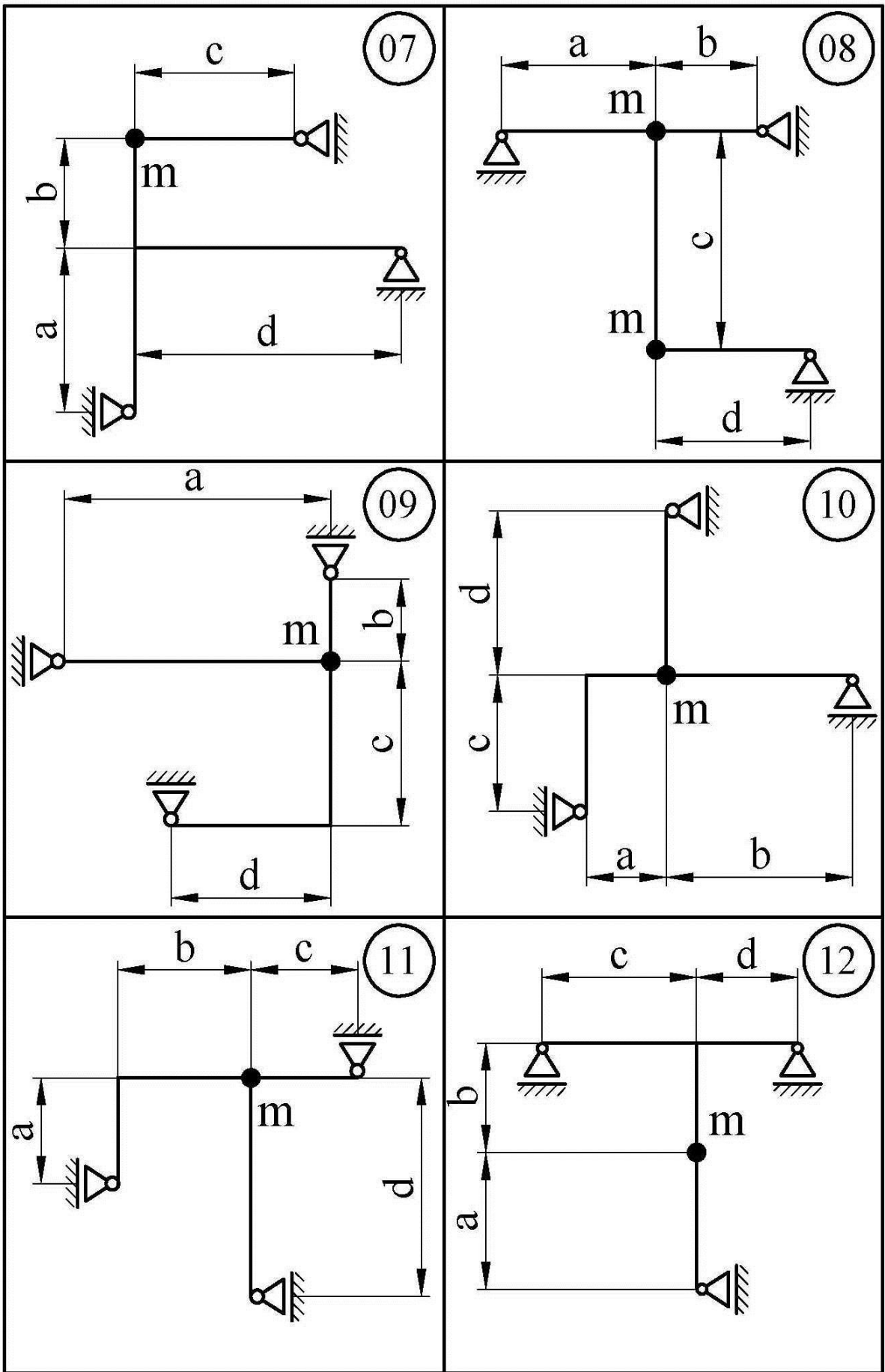


Рисунок 7.11, аркуш 2

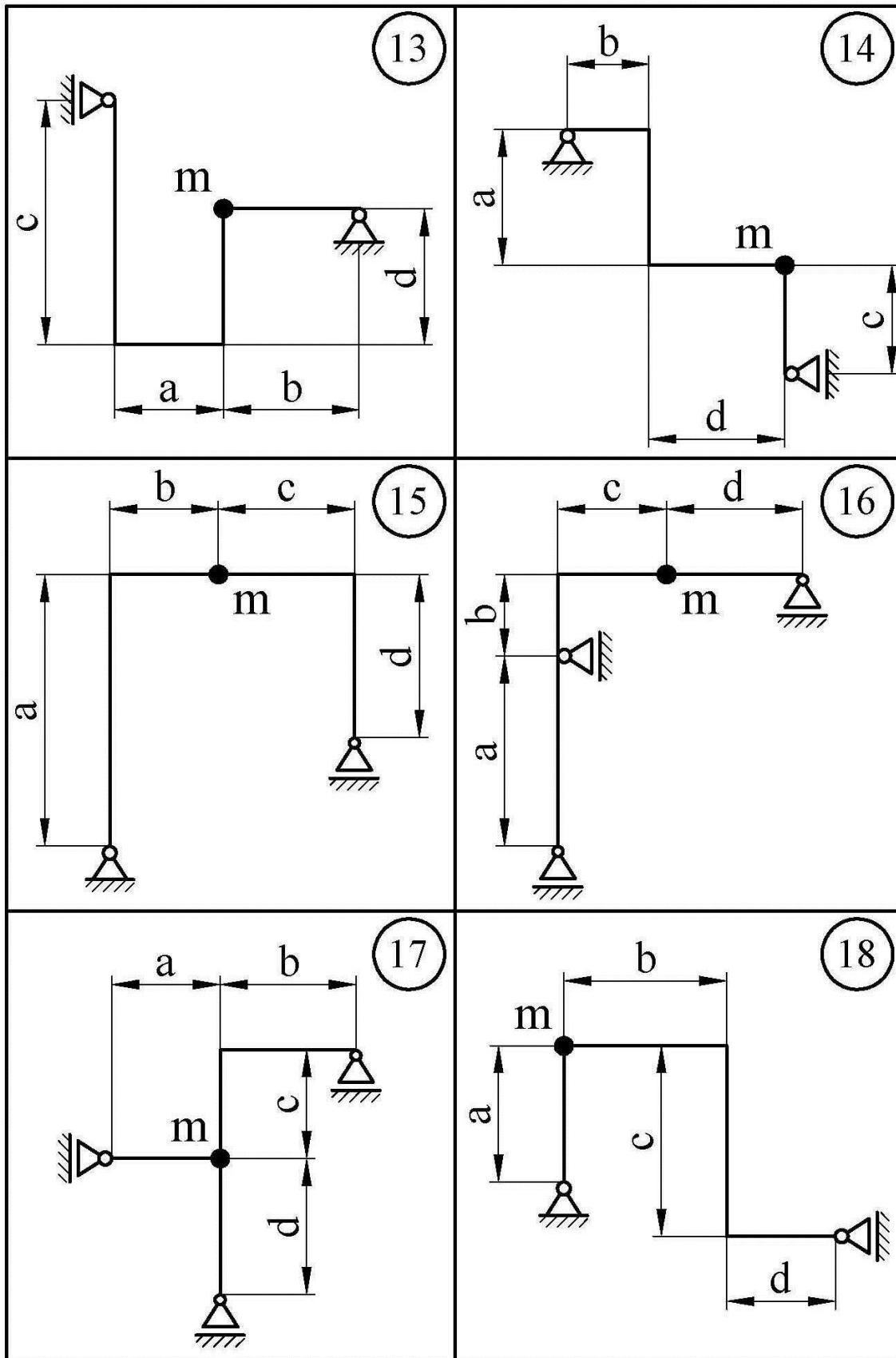


Рисунок 7.11, аркуш 3

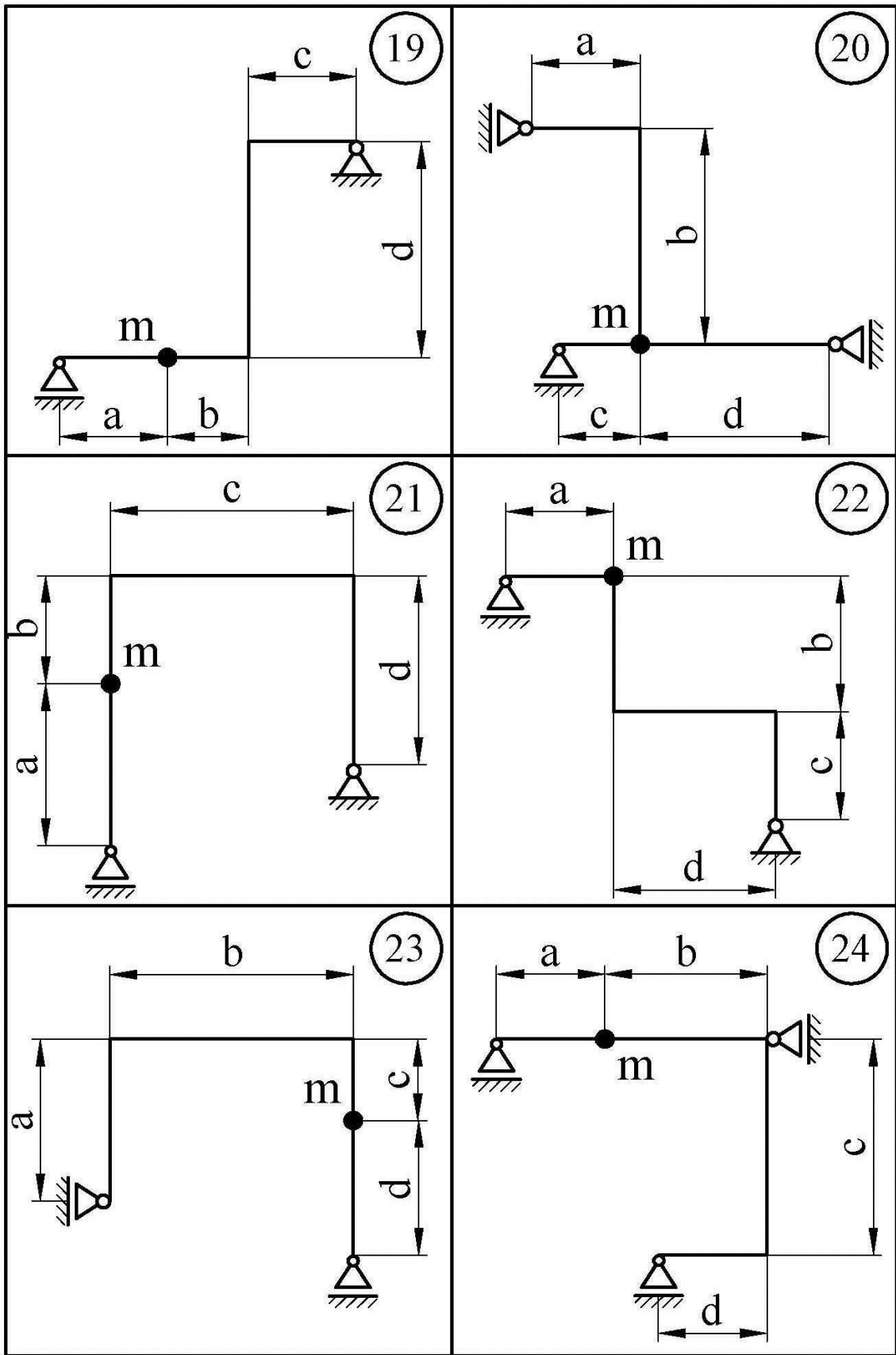


Рисунок 7.11, аркуш 4

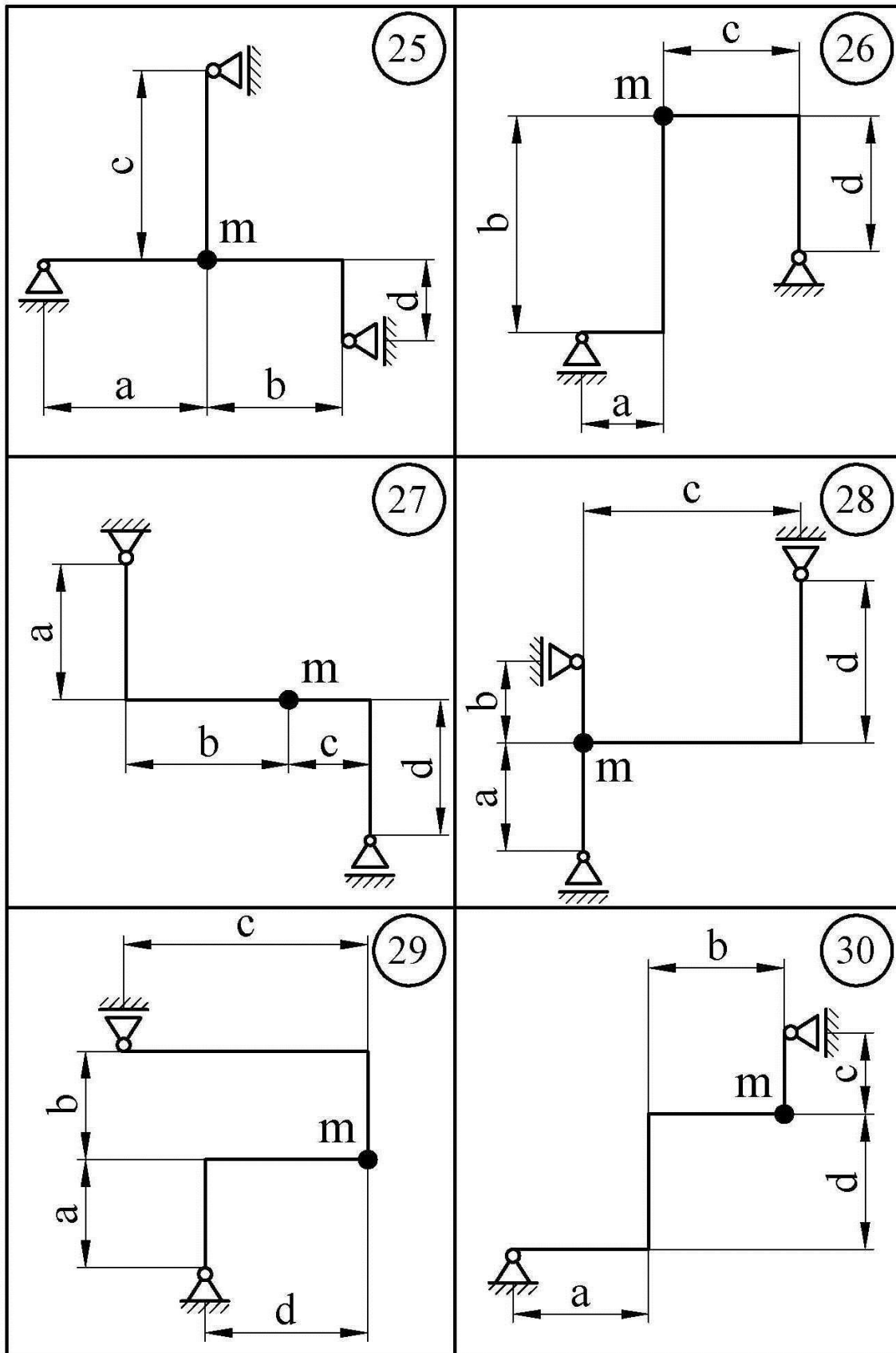


Рисунок 7.11, аркуш 5

Таблиця 7.6 – Вихідні дані до задачі 7.3

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m , кг	800	1000	1200	1400	1600	800	1000	1200	1400	1600
n , об./хв.	500	600	750	1000	1500	1500	750	1000	600	500
$H/m \cdot g$	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,35	0,4	0,3	0,2	0,25

7.3.1 Методичні вказівки до виконання задачі 7.3

Розв'язання задачі відбувається в такій послідовності.

1 До рами в місці розташування коливної маси m послідовно прикладаються одиничні сили: вертикальна – $P_1=1$ та горизонтальна – $P_2=1$. Від цих сил визначаються опорні реакції рами і будуються відповідні епюри згинальних моментів – \bar{M}_1 та \bar{M}_2 . При цьому сила $P_1=1$ спрямовується завжди за напрямком ваги коливної маси, тобто вниз, а сила $P_2=1$ – в бік вірогідного горизонтального переміщення коливної маси під дією сили $P_1=1$. Відповідно до вказаних напрямків спрямовуються додатні напрямки осей координат: вертикальної – y і горизонтальної – z .

2 З використанням епюр \bar{M}_1 та \bar{M}_2 і формули крайніх ординат (див. додаток Б) визначаються показники жорсткості конструкції:

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1; \quad (7.13)$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2; \quad (7.14)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2. \quad (7.15)$$

Оскільки момент інерції перерізу стрижнів рами J_x на даному етапі ще невідомий, означені величини визначаються в загальному вигляді.

Якщо величини δ_{12} і δ_{21} виявилися від'ємними, вибір напрямків сили $P_2=1$ і осі z є невірним. В цьому разі треба змінити ці напрямки на протилежні, скорегувати епюру \bar{M}_2 і розрахунок повторити.

3 За допомогою епюри \bar{M}_1 визначається максимальне значення згинального моменту в рамі від дії статично прикладеної до неї ваги двигуна, тобто сили $m \cdot g$:

$$M_{cm}^{\max} = \bar{M}_1^{\max} \cdot m \cdot g, \quad (7.16)$$

4 Визначається осьовий момент опору стрижнів рами при відсутності коливань (тобто при невиключеному двигуні):

$$W_x \geq \frac{M_{cm}^{\max}}{[\sigma]}. \quad (7.17)$$

5 По сортаменту (див. додаток А) визначається відповідний номер двотавра та його момент інерції J_x .

6 Для визначеного номера двотавра обчислюються конкретні значення величин δ_{11} , δ_{22} , δ_{12} і δ_{21} , після чого виконується розрахунок параметрів коливань рами з працюючим двигуном.

7 Рух коливної маси m (двигуна) відносно положення її статичної рівноваги описується системою диференціальних рівнянь / 7 /:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{y} + \mu \cdot \dot{y} + P_1(y, z) = H \cdot \cos(\omega \cdot t) + m \cdot g, \\ m \cdot \ddot{z} + \mu \cdot \dot{z} + P_2(y, z) = H \cdot \sin(\omega \cdot t), \end{cases} \quad (7.18)$$

де y і z – поточні координати коливної маси;

\dot{y} і \dot{z} – поточні проекції швидкості коливної маси на відповідні осі координат;

\ddot{y} і \ddot{z} – поточні проекції прискорення коливної маси на відповідні осі координат;

μ – коефіцієнт опору середовища;

$P_1(y, z)$ і $P_2(y, z)$ – поточні значення вертикальної і горизонтальної сил дії рами на коливну масу;

H – модуль збурюючої сили (відцентрової сили інерції незбалансованого ротора двигуна);

$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$ – колова частота збурюючої сили;

n – частота обертання двигуна (кількість обертів за хвилину);

t – час від початку коливань.

Закони зміни сил $P_1(y, z)$ і $P_2(y, z)$ наступні / 7 /:

$$P_1(y, z) = m \cdot g + \frac{z}{\delta_{21}} - \frac{y \cdot \delta_{21} - z \cdot \delta_{11}}{\delta_{12} \cdot \delta_{21} - \delta_{11} \cdot \delta_{22}} \cdot \frac{\delta_{22}}{\delta_{21}}, \quad (7.19)$$

$$P_2(y, z) = \frac{y \cdot \delta_{21} - z \cdot \delta_{11}}{\delta_{12} \cdot \delta_{21} - \delta_{11} \cdot \delta_{22}}. \quad (7.20)$$

Диференціальні рівняння (7.18) підлягають розв'язанню чисельними методами з використанням якоїсь з існуючих обчислювальних систем. Найбільш простою і прийнятою для даної задачі є система **Mathcad**, яка дозволяє виконувати увесь комплекс необхідних обчислень.

Для інтегрування вказаних рівнянь треба задати початкові умови, тобто значення y , \dot{y} , z і \dot{z} в момент початку коливань ($t=0$). Найбільш простим і прийнятним для даної задачі є варіант нульових початкових умов, коли усі зазначені величини при $t=0$ дорівнюють нулю. Для простоти розв'язання задачі слід прийняти також умову $\omega_0 = \omega$, тобто вважати період розгону електродвигуна дуже коротким, що не позначиться суттєво на кінцевих результатах розрахунку. Згідно з умовами задачі опором середовища можна знехтувати, тому слід прийняти також $\mu = 0$.

При чисельному інтегруванні рівнянь (7.18) визначаються в неявній формі закони руху коливної маси $y = y(t)$ і $z = z(t)$, а через них і закони зміни сил $P_1 = P_1(t)$ і $P_2 = P_2(t)$.

8 На основі сумісного аналізу епюр \bar{M}_1 і \bar{M}_2 виявляється найбільш навантажений (небезпечний) переріз рами в процесі коливань і встановлюється формула зв'язку згинального моменту в цьому перерізі з силами $P_1 = P_1(t)$ і $P_2 = P_2(t)$:

$$M(t) = f[P_1(t), P_2(t)]. \quad (7.21)$$

9 У процесі обчислень система визначає найбільше за модулем значення згинального моменту в небезпечному перерізі рами – M_{\max} як максимум функції (7.21), а також відповідне найбільше напруження в цьому перерізі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}, \quad (7.22)$$

де W_x – осьовий момент опору двотавра, взятого до розрахунку.

10 Якщо величина σ_{\max} на першому кроці динамічного розрахунку не перевищує $[\sigma]$, пошук потрібного номера двотавра слід припинити, остаточно прийнявши результати статичного розрахунку (див. пункти 4 і 5). В іншому випадку слід перейти до наступного (більшого) номера двотавра і динамічний розрахунок повторити. Таких циклів може бути декілька, поки не настане виконання умови міцності:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (7.23)$$

11 В умові задачі під резонансними частотами збурюючої сили (їх – дві) розуміються такі колові швидкості обертання двигуна, які

дорівнюють коловим частотам власних коливань конструкції і викликають появу в ній руйнуючих напружень. Ці частоти визначаються обчислюваною системою на кожному кроці динамічного розрахунку за формулами / 7 /:

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta_{11} + \delta_{22}) \pm m \cdot \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}}. \quad (7.24)$$

7.3.2 Приклад розв'язання задачі 7.3

Схема рами зображена на рисунку 7.12. Інші вихідні дані: $m = 1200$ кг ; $H = 0,3m \cdot g = 3532$ Н; $n = 750$ обертів за хвилину ($\omega = 78,54$ с⁻¹); $\mu = 0$.

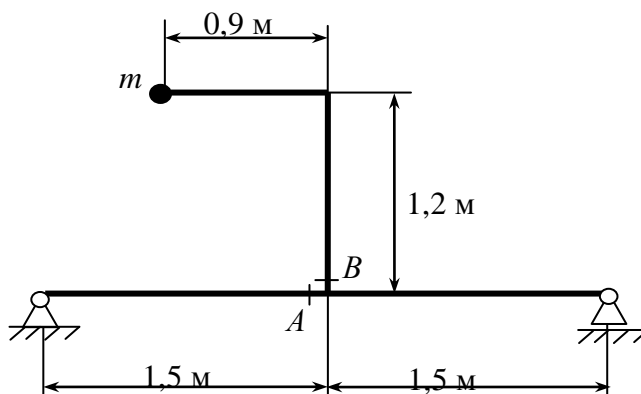


Рисунок 7.12 – Схема рами до прикладу задачі 7.3

Розв'язання

1 Визначаємо реакції рами від дії одиничних сил $P_1 = 1$ і $P_2 = 1$, будуємо відповідні епюри згинальних моментів \bar{M}_1 і \bar{M}_2 (рис. 7.13, 7.14).

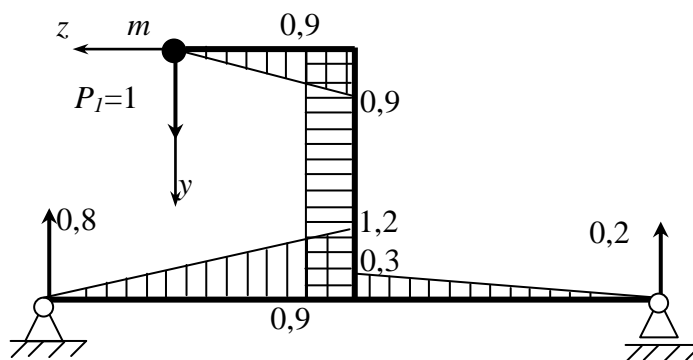


Рисунок 7.13 – Епюра \bar{M}_1 , м

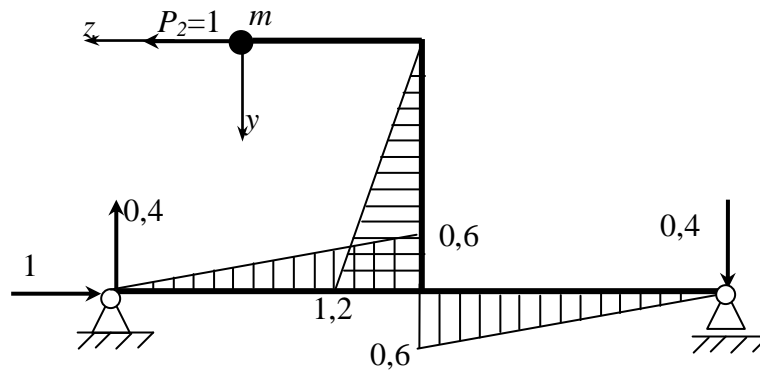


Рисунок 7.14– Епюра \bar{M}_2 , м

2. Визначаємо в загальному вигляді показники жорсткості рами, використовуючи формулу крайніх ординат (див. додаток Б):

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1 = \frac{1,5}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 1,2 \cdot 1,2) + \frac{1,5}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0,3 \cdot 0,3) + \frac{0,9}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0,9 \cdot 0,9) + \frac{1,2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0,9 \cdot 0,9 + 2 \cdot 0,9 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,9) = \frac{11,880}{6E \cdot J_x};$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2 = \frac{1,5}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0,6 \cdot 0,6) + \frac{1,5}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0,6 \cdot 0,6) + \frac{1,2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 1,2 \cdot 1,2) = \frac{5,616}{6E \cdot J_x};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = \frac{1,5}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 1,2 \cdot 0,6) + \frac{1,5}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0,3 \cdot (-0,6)] + \frac{1,2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0,9 \cdot 1,2 + 0,9 \cdot 1,2) = \frac{5,508}{6E \cdot J_x}.$$

Оскільки величини δ_{12} і δ_{21} є додатними, напрямки сили $P_2 = 1$ і осі z (див. рис. 7.14) вибрано вірно.

3 Максимальний згинальний момент у рамі від статично прикладеної ваги двигуна:

$$M_{cm}^{\max} = \bar{M}_1^{\max} \cdot m \cdot g = 1,2 \cdot 1200 \cdot 9,81 = 14126,4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

4 Потрібний з умови міцності при статичному навантаженні осьовий момент опору двотавра:

$$W_x \geq \frac{M_{cm}^{\max}}{[\sigma]} = \frac{14126,4 \cdot 10^3}{160} = 88290 \text{ мм}^3 = 88,29 \text{ см}^3.$$

5 З відповідної таблиці сортаменту (див. додаток А) приймаємо двотавр 16, у якого $W_x = 109 \text{ см}^3$ і $J_x = 873 \text{ см}^4$.

6 Для цього номера двотавра показники жорсткості складають:

$$\delta_{11} = \frac{11,880}{6E \cdot J_x} = \frac{11,880}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 1,134 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{Н}};$$

$$\delta_{22} = \frac{5,616}{6E \cdot J_x} = \frac{5,616}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 5,361 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}}{\text{Н}};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{5,508}{6E \cdot J_x} = \frac{5,508}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 5,258 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}}{\text{Н}}.$$

7 Аналізуючи епюри \bar{M}_1 і \bar{M}_2 (див. рис. 7.13, 7.14), бачимо, що при роботі двигуна, коли одночасно діють сили $P_1(t)$ і $P_2(t)$, потенційно небезпечними можуть стати перерізи рами А і В (див. рис. 7.12), згинальні моменти в яких є сумами згинальних моментів від дії кожної з означених сил.

В перерізі А:

$$M(t) = P_1(t) \cdot 1,2 + P_2(t) \cdot 0,6, \quad (7.25)$$

в перерізі В:

$$M(t) = P_1(t) \cdot 0,9 + P_2(t) \cdot 1,2. \quad (7.26)$$

Оскільки зв'язок величин $P_1(t)$ і $P_2(t)$ на даному етапі невідомий, небезпечним може стати будь – який з названих перерізів, причому у різних за розмірами двотаврів можуть бути і різні небезпечні перерізи. Тому на всіх кроках динамічного розрахунку беремо до уваги обох означених перерізів.

8 Результати першого кроку динамічного розрахунку, який виконано з використанням комп'ютерної системи **Mathcad 15**, представлені на рисунках 7.15 і 7.16. Вони свідчать про те, що використання для виготовлення рами двотавра 16 не забезпечує умову її міцності (7.23), бо максимальні напруження в перерізі В більші за допустимі, тоді як у перерізі А вони знаходяться в допустимих межах. Тому переходимо до наступного в розмірному ряду (див. додаток А) двотавру 18 і розрахунок повторюємо.

9 Подальші розрахунки показують, що двотаври 18, 18а і 20 також не забезпечують умову міцності рами в перерізі В і тільки у двотавра 20а ця умова виконується одночасно в перерізах А і В (табл. 7.7, 7.8).

На цьому цикл розрахунків закінчуємо і остаточно приймаємо двотавр 20а.

Таблиця 7.7 – Результати динамічного розрахунку рами (переріз А)

Номер двотавра	J_x , см ⁴	W_x , см ³	M_{\max} , Н·м	σ_{\max} , МПа	ω_1 , с ⁻¹	ω_2 , с ⁻¹
16	873	109	16150	148.126	24.057	60.164
18	1290	143	19470	136.179	24.057	73.135
18а	1430	159	30290	190.517	30.790	77.001
20	1840	184	19070	103.663	34.926	87.345
20а	2030	203	18640	91.846	36.685	91.744

Таблиця 7.8 – Результати динамічного розрахунку рами (переріз В)

Номер двотавра	J_x , см ⁴	W_x , см ³	M_{\max} , Н·м	σ_{\max} , МПа	ω_1 , с ⁻¹	ω_2 , с ⁻¹
16	873	109	17710	162,512	24,057	60,164
18	1290	143	39460	275,945	24,057	73,135
18а	1430	159	114800	722,166	30,790	77,001
20	1840	184	31810	172,858	34,926	87,345
20а	2030	203	26770	131,851	36,685	91,744

$$\begin{aligned}
& \underline{g}_x := 9.81 \quad \underline{m} := 1200 \quad \underline{H}_x := 0.3 \text{ m} \cdot g \quad \omega := 78.5 \quad I_x := 873 \quad W_x := 109 \quad E := 2 \cdot 10^{11} \\
& \delta 11 := \frac{11.88}{(6 \cdot E \cdot I_x \cdot 10^{-8})} \quad \delta 22 := \frac{5.616}{(6 \cdot E \cdot I_x \cdot 10^{-8})} \quad \delta 12 := \frac{5.508}{(6 \cdot E \cdot I_x \cdot 10^{-8})} \quad \delta 21 := \delta 12 \\
& \delta 11 = 1.134 \times 10^{-6} \quad \delta 22 = 5.361 \times 10^{-7} \quad \delta 21 = 5.258 \times 10^{-7} \quad \delta 12 = 5.258 \times 10^{-7} \\
& a := \frac{\delta 22}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22) \cdot m} \quad b := \frac{\delta 12}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22) \cdot m} \quad d := g \cdot \left[1 + \frac{\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22)} \right] \\
& k := \frac{\delta 21}{(\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21) \cdot m} \quad n := \frac{\delta 11}{(\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21) \cdot m} \\
& \text{Given} \quad y''(t) - a \cdot y(t) + b \cdot z(t) = \frac{H}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t) + d \quad z''(t) - k \cdot y(t) + n \cdot z(t) = \frac{H}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\
& y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad z(0) = 0 \quad z'(0) = 0 \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, t, 4 \right] \quad t := 0, 0.002, 4 \\
& P1(t) := m \cdot g + \frac{z(t)}{\delta 21} - \frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \cdot \frac{\delta 22}{\delta 21} \quad P2(t) := \frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \\
& M(t) := P1(t) \cdot 1.2 + P2(t) \cdot 0.6 \\
& \text{ORIGIN} := 1 \quad i := 1..400 \quad t_i := 0 + \frac{i}{1000} \quad Y_i := y(t_i) \quad Z_i := z(t_i) \\
& PP1_i := P1(t_i) \quad PP2_i := P2(t_i) \quad MM_i := M(t_i) \\
& M_{\max} := \max(MM) \quad M_{\max} = 1.615 \times 10^4 \quad \sigma_{\max} := \frac{M_{\max}}{W_x} \quad \sigma_{\max} = 148.126 \\
& \omega_{R1} := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) + m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}} \quad \omega_{R1} = 24.057 \\
& \omega_{R2} := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) - m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}} \quad \omega_{R2} = 60.164
\end{aligned}$$

Рисунок 7.15 – Динамічний розрахунок рами
(двотавр 1б, переріз А)

$$\begin{aligned}
& \underline{g}_x := 9.81 \quad \underline{m} := 1200 \quad \underline{H}_x := 0.3 \text{ m} \cdot g \quad \omega := 78.5 \quad I_x := 873 \quad W_x := 109 \quad E := 2 \cdot 10^{11} \\
& \delta 11 := \frac{11.88}{(6 \cdot E \cdot I_x \cdot 10^{-8})} \quad \delta 22 := \frac{5.616}{(6 \cdot E \cdot I_x \cdot 10^{-8})} \quad \delta 12 := \frac{5.508}{(6 \cdot E \cdot I_x \cdot 10^{-8})} \quad \delta 21 := \delta 12 \\
& \delta 11 = 1.134 \times 10^{-6} \quad \delta 22 = 5.361 \times 10^{-7} \quad \delta 21 = 5.258 \times 10^{-7} \quad \delta 12 = 5.258 \times 10^{-7} \\
& a := \frac{\delta 22}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22) \cdot m} \quad b := \frac{\delta 12}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22) \cdot m} \quad d := g \cdot \left[1 + \frac{\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22)} \right] \\
& k := \frac{\delta 21}{(\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21) \cdot m} \quad n := \frac{\delta 11}{(\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21) \cdot m} \\
& \text{Given} \quad y''(t) - a \cdot y(t) + b \cdot z(t) = \frac{H}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t) + d \quad z''(t) - k \cdot y(t) + n \cdot z(t) = \frac{H}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y(0) = 0 \quad y'(0) = C \quad z(0) = C \quad z'(0) = 0 \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, t, 4 \right] \quad t := 0, 0.002..4 \\
& P1(t) := m \cdot g + \frac{z(t)}{\delta 21} - \frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \cdot \frac{\delta 22}{\delta 21} \quad P2(t) := \frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \\
& M(t) := P1(t) \cdot 0.9 + P2(t) \cdot 1.2 \\
& \text{ORIGIN} := 1 \quad i := 1..4000 \quad t_i := 0 + \frac{i}{1000} \quad Y_i := y(t_i) \quad Z_i := z(t_i) \\
& PP1_i := P1(t_i) \quad PP2_i := P2(t_i) \quad MM_i := M(t_i) \\
& Mmax := \max(MM) \quad Mmax = 1.771 \times 10^4 \quad \sigma_{max} := \frac{Mmax}{W_x} \quad \sigma_{max} = 162.512 \\
& \omega R1 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) + m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}} \quad \omega R1 = 24.057 \\
& \omega R2 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) - m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}} \quad \omega R2 = 60.164
\end{aligned}$$

*Рисунок 7.16 – Динамічний розрахунок рами
(двотавр 16, переріз В)*

7.4 Розрахунок ферми в умовах вимушених коливань

На сталевій фермі, виготовленої із труб зовнішнім діаметром d і товщиною стінки s , встановлено електродвигун масою m і частотою обертання n обертів за хвилину зі статично незбалансованим ротором. Від дисбалансу під час роботи двигуна виникає відцентрова сила інерції H , яка збурює коливання конструкції і залежить від ваги двигуна $m \cdot g$ ($g = 9,81 \text{ м / с}^2$ – прискорення земного тяжіння). Нехтуючи масою рами і опором середовища, підібрати з умови міцності й стійкості розміри перерізу стрижнів ферми, якщо їхній матеріал – сталь Ст.3, допустиме напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Перевірити конструкцію на резонанс.

Вихідні дані задачі вибрати з таблиць 7.9 та 7.10 і рисунка 7.17.

Таблиця 7.9 – Вихідні дані до задачі 7.4

Параметри ферми	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	1,6	1,8	2	1,7	1,9	1,8	1,9	1,6	1,7	2
α , град	40	45	50	55	60	40	55	45	50	60
β , град	60	55	45	50	40	50	45	60	40	55
$\eta = s/d$	0,2	0,25	0,3	0,15	0,1	0,3	0,2	0,15	0,1	0,25

Таблиця 7.10 – Вихідні дані до задачі 7.4

Параметри двигуна	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m , кг	800	1200	1600	1400	1000	1200	1000	1600	1400	800
n , об./хв.	500	600	750	1000	1500	1000	750	600	500	1500
$H/m \cdot g$	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,2	0,35	0,4	0,25	0,3

7.4.1 Методичні вказівки до виконання задачі 7.4

Згідно з завданням міцність і стійкість стрижнів ферми повинні бути забезпеченими як при статичному навантаженні, коли на ферму діє тільки вага ще не включеного двигуна – mg , так і при динамічному, коли до неї приєднується сила інерції – H , що виникає при роботі двигуна. У зв'язку з цим увесь розрахунок складається з двох відповідних етапів, які передбачають ряд послідовних дій.

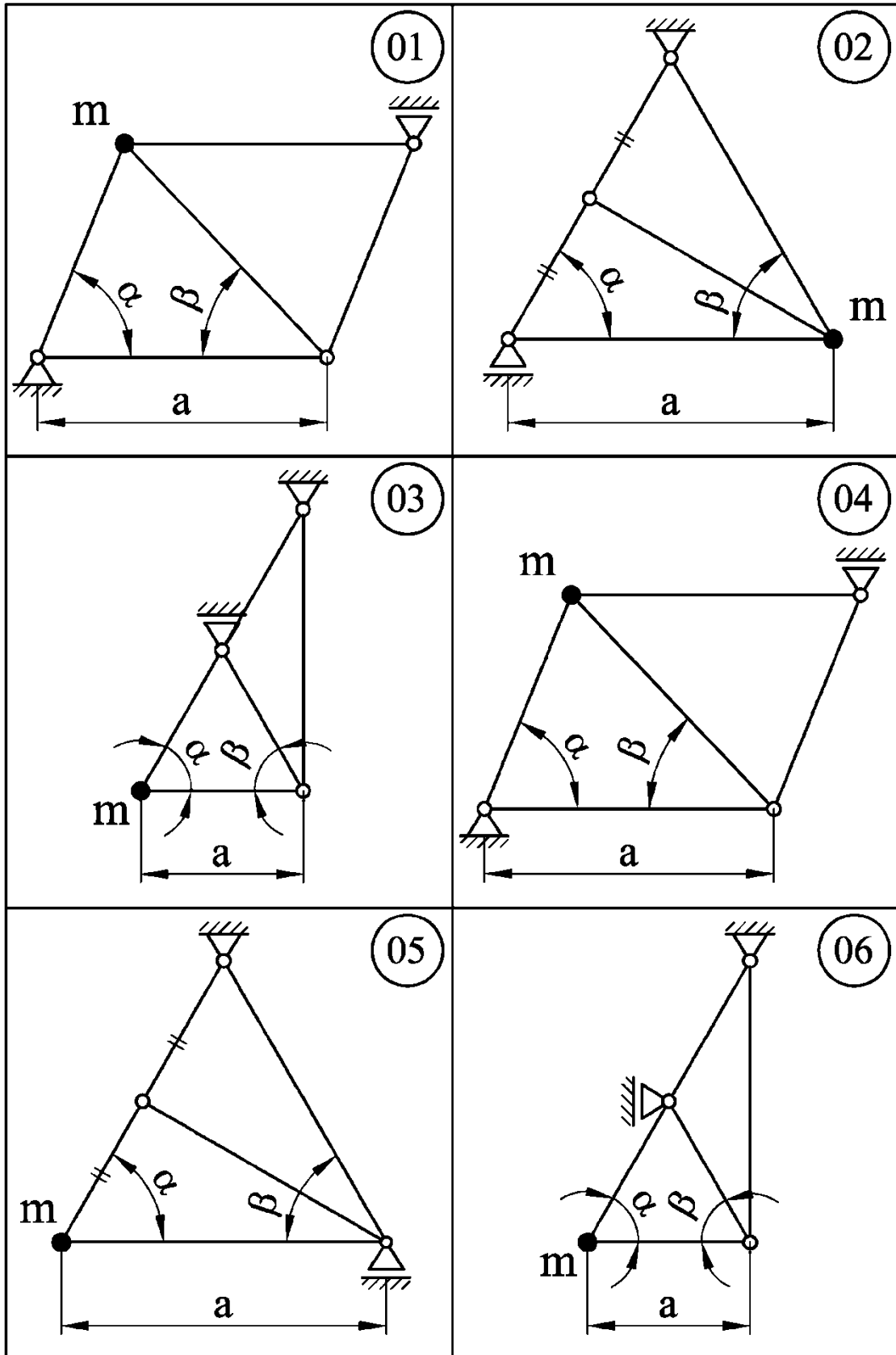


Рисунок 7.17– Схеми ферм до задачі 7.4

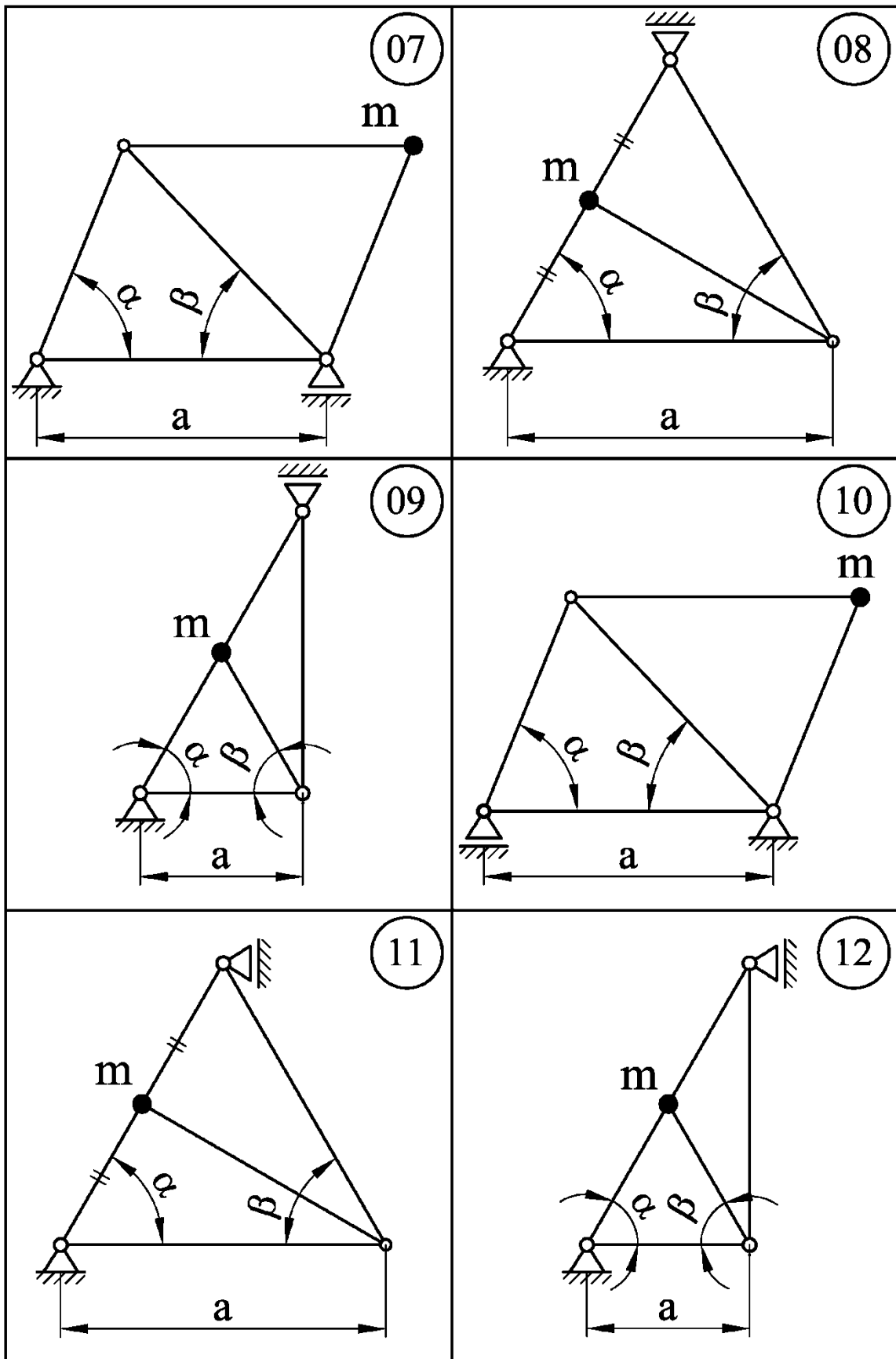


Рисунок 7.17, аркуш 2

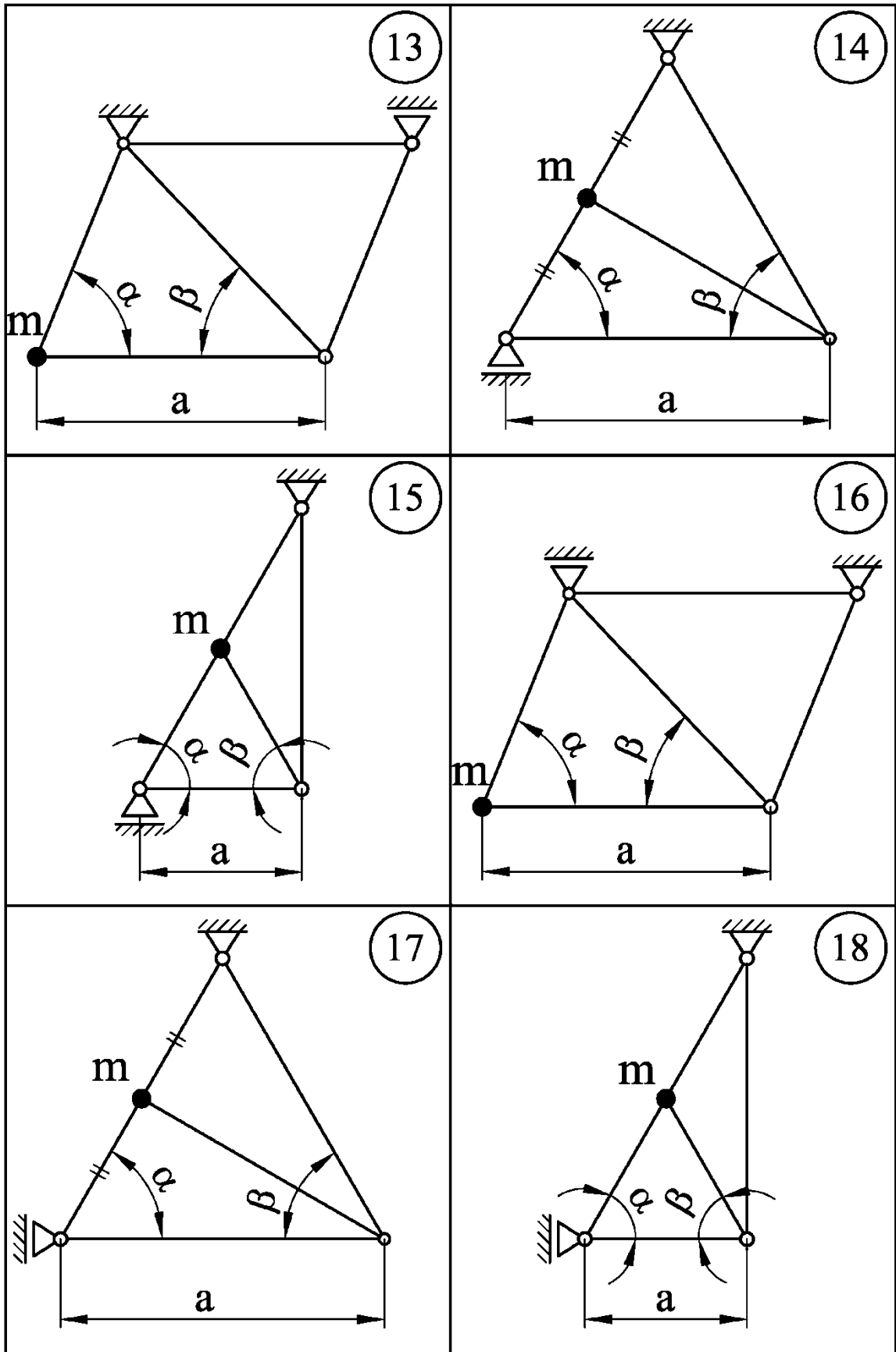


Рисунок 7.17, аркуш 3

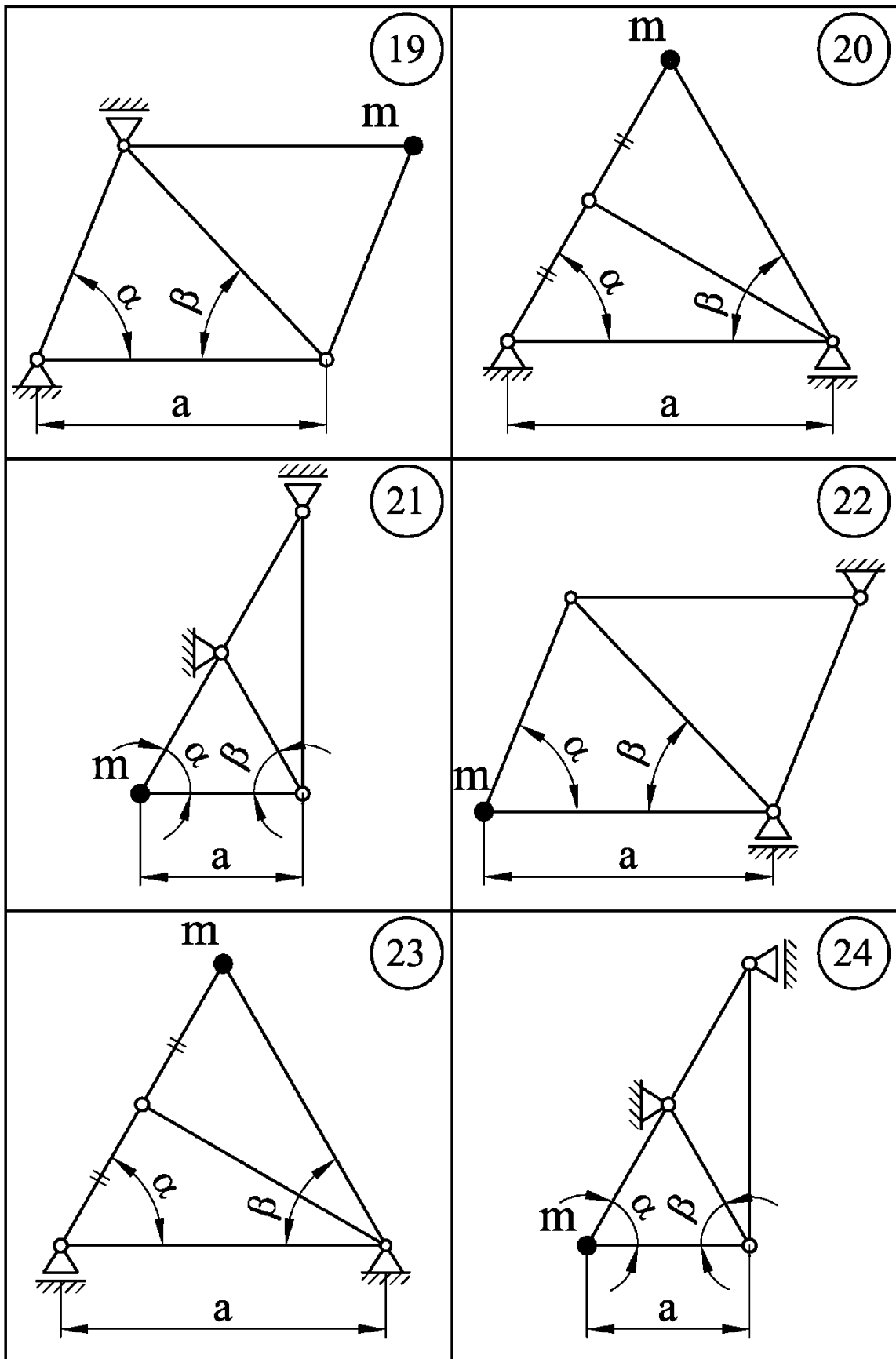


Рисунок 7.17, аркуш 4

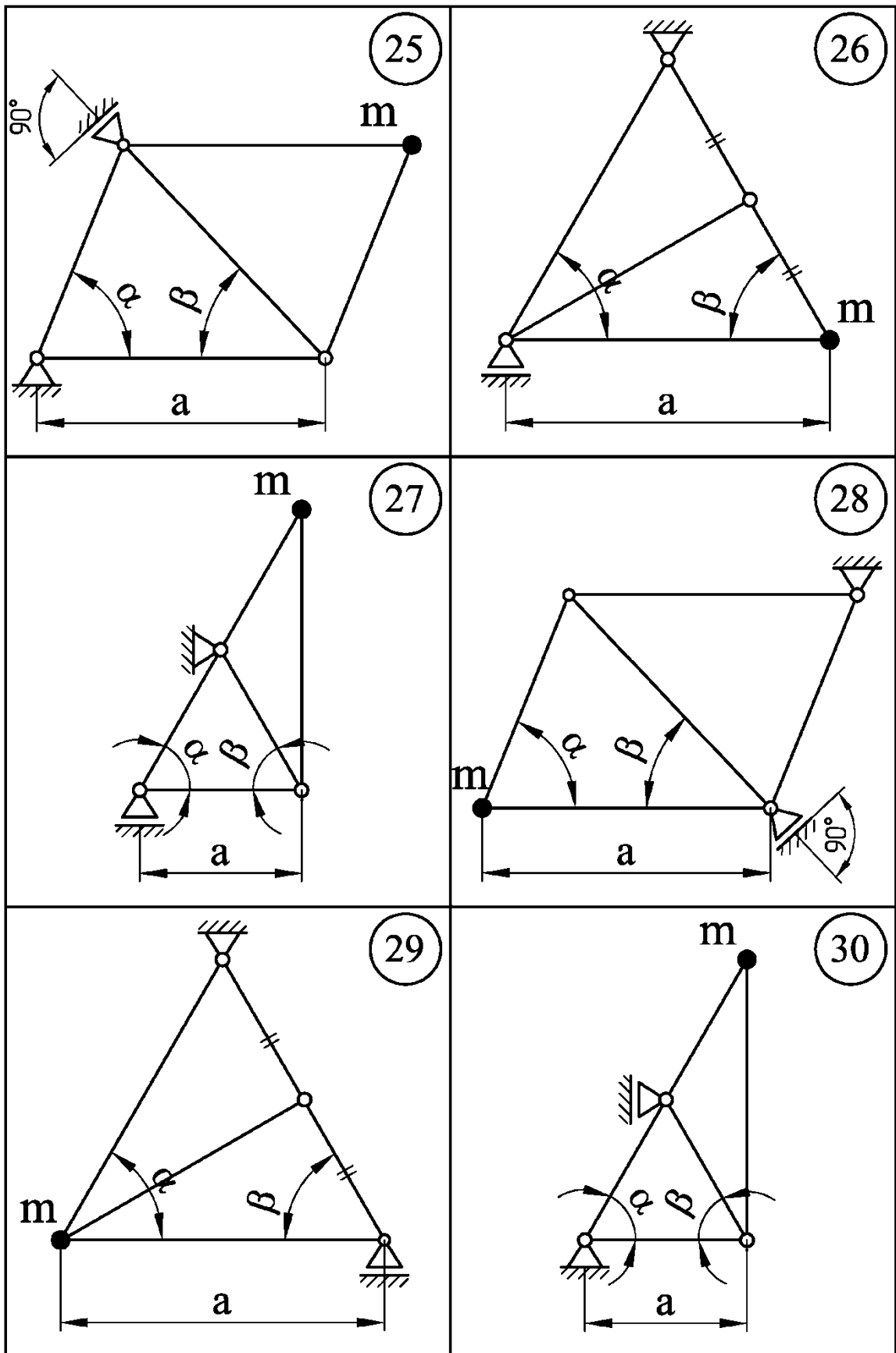


Рисунок 7.17, аркуш 5

1 Визначаються довжини усіх стрижнів ферми (ℓ_i) і кути трикутників, створених цими стрижнями. Для цього застосовуються загальновідомі залежності геометрії, зокрема теореми синусів і косинусів.

2 На схемі ферми позначаються номери стрижнів і місця їх з'єднання, що зветься вузлами.

3 До ферми в місці розташування двигуна послідовно прикладаються вертикальна і горизонтальна одиничні сили $P_1 = 1$ та $P_2 = 1$. Перша з них, а разом з нею і вісь y , спрямовуються за напрямком ваги двигуна, тобто униз, друга разом з віссю z – у напрямку вірогідного горизонтального переміщення двигуна під дією його ваги.

4 Від дії кожної з одиничних сил визначаються опорні реакції ферми і зусилля в її стрижнях: \bar{N}_i від дії $P_1 = 1$, \bar{N}'_i від дії $P_2 = 1$. Для визначення цих зусиль застосовуються методи перерізів або вирізання вузлів, відомі з курсу теоретичної механіки.

5 Визначаються показники жорсткості ферми:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot F} \cdot \sum_{i=1}^n (\bar{N}_i)^2 \cdot \ell_i, \quad (7.27)$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot F} \cdot \sum_{i=1}^n (\bar{N}'_i)^2 \cdot \ell_i, \quad (7.28)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \cdot F} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{N}_i \cdot \bar{N}'_i \cdot \ell_i, \quad (7.29)$$

де E – модуль пружності першого роду для матеріалу стрижнів,
 F – площа поперечного перерізу стрижнів,
 $i = 1, 2, \dots, n$ – номери стрижнів.

Слід звернути увагу на знаки δ_{12} і δ_{21} : при правильному виборі напрямків сили P_2 і осі z вони повинні бути додатними. В разі, коли ці показники є від'ємними, вказані напрямки слід змінити на протилежні і розрахунки повторити.

6 Визначається найбільше за модулем зусилля в стрижнях ферми від дії вертикальної одиничної сили $|\bar{N}|_{\max}$.

7 З умови міцності при статичному навантаженні визначаються початкові параметри труб для виготовлення ферми:

$$F \geq \frac{|\bar{N}|_{\max} \cdot m \cdot g}{[\sigma]}, \quad (7.30)$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi \cdot [1 - (1 - 2\eta)^2]}}, \quad (7.31)$$

де η – відносна товщина стінки труби (див. табл. 7.9).

Обчислене значення зовнішнього діаметра труби d округляється до найближчого із нормального ряду (див. додаток А).

8 Стрижень з найбільшим стискаючим зусиллям, спричиненим статичним навантаженням ферми вагою двигуна, – $|N|_{\max}^{cm}$, перевіряється на виконання умови стійкості:

$$|\sigma|_{\max}^{cm} = \frac{|N|_{\max}^{cm}}{F} = \frac{|\bar{N}|_{\max}^{cm} \cdot m \cdot g}{F} \leq \varphi \cdot [\sigma], \quad (7.32)$$

де $|\sigma|_{\max}^{cm}$ – напруження в стрижні, який сприймає найбільше стискує зусилля від статично прикладеної до ферми ваги двигуна;

$|\bar{N}|_{\max}^{cm}$ – модуль найбільшого стискаючого зусилля в стрижнях ферми від дії одиничної сили $P_1 = 1$;

F – площа поперечного перерізу стрижня:

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot [1 - (1 - 2\eta)^2], \quad (7.33)$$

φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження $[\sigma]$, який залежить від марки матеріалу стрижня і його гнучкості λ (див. додаток В):

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{oc}}, \quad (7.34)$$

μ – коефіцієнт приведеної довжини стрижня (див. додаток В);

i_{oc} – осьовий радіус інерції перерізу стрижня:

$$i_{oc} = \frac{d}{4} \cdot \sqrt{1 + (1 - 2\eta)^2}, \quad (7.35)$$

η – відносна товщина стінки труби (див. умову задачі).

Якщо значення d , яке визначене з умови міцності (7.31), не задовольняє умову стійкості (7.32) хоча б у одного із стиснутих стрижнів, слід перейти до наступного у розмірному ряду значення d і перевірку на стійкість повторити.

Статичний розрахунок ферми закінчується тоді, коли умова стійкості (7.32) буде виконуватись усіма стиснутими стрижнями. Відповідне (кінцеве для статичного розрахунку) значення d стає першим у подальшому динамічному розрахунку.

9 Динамічний розрахунок виконується з залученням тієї ж математичної моделі /7/, що використовувалась для описання коливань рами (див. розділ 7.3.1).

При коливаннях коливна маса m (двигун) діє на ферму перемінними силами вертикального і горизонтального напрямків – P_1 і P_2 , які є функціями поточних координат цієї маси – y, z відносно їх положення статичної рівноваги.

Зазначена модель коливального процесу дозволяє встановити в неявному виді закони зміни координат коливної маси – $y = y(t)$ і $z = z(t)$, а разом з ними і закони зміни в часі сил P_1 і P_2 : $P_1 = P_1(t)$ і $P_2 = P_2(t)$.

Маючи ці закони, обчислювальна система може встановити закон зміни зусилля в будь – якому стрижні ферми і визначити на його основі максимальне значення цього зусилля $|N_i|_{\max}$. З цією метою треба задати означений закон у загальному вигляді:

$$N_i(t) = \bar{N}_i \cdot P_1(t) + \bar{N}'_i \cdot P_2(t), \quad (7.36)$$

де \bar{N}_i і \bar{N}'_i – зусилля в i -тому стрижні (з урахуванням їх знаків) від дії одиничних сил $P_1 = 1$ і $P_2 = 1$ (див. пункт 4).

10 В динамічному розрахунку на міцність небезпечним буде стрижень з найбільшим значенням – $|N_i|_{\max}$. Для його вибору слід проаналізувати існуючі в фермі комбінації величин \bar{N}_i і \bar{N}'_i . При неоднозначності вибору слід взяти до уваги всі потенційно небезпечні стрижні. Умова міцності для кожного з них є:

$$|\sigma_i|_{\max} = \frac{|N_i|_{\max}}{F}, \quad (7.37)$$

де $|\sigma_i|_{\max}$ – максимальне за модулем напруження в i -тому стрижні.

Для забезпечення міцності ферми в цілому потрібно виконання умови (6.37) усіма її стрижнями. У випадку, якщо діаметр труби (d), визначений в ході динамічного розрахунку, для цього є недостатнім, слід підвищити його значення до наступного в розмірному ряду (див. додаток А) і динамічний розрахунок повторити.

Розрахунок ферми на стійкість в умовах коливань проводиться паралельно з відповідним розрахунком на міцність, бо максимальні значення зусиль і напружень присутні в обох розрахунках.

Розрахунку на стійкість підлягають потенційно небезпечні стрижні, в яких величини \bar{N}_i і \bar{N}'_i є від'ємними. Умова стійкості цього разу подібна тій, що мала місце в статичному розрахунку (див. формулу 7.32):

$$|\sigma_i|_{\max} = \frac{|N_i|_{\max}}{F} \leq \varphi \cdot [\sigma]. \quad (7.38)$$

Процедура визначення величини φ в динамічному розрахунку така ж, як і при статичному (див формули 7.34, 7.35).

Підбір діаметра труби для виготовлення ферми закінчується при одночасному виконанні умов міцності і стійкості всіма стрижнями, які були взяті до динамічного розрахунку.

Резонансом називають негативне явище, при якому в пружній системі під час вимушених коливань виникають дуже великі, руйнуючі зусилля і напруження. Резонанс виникає в разі збігу колових частот власних коливань системи ω_1, ω_2 (так званих резонансних частот) з коловою частотою збурюючої сили ω (в даному разі – з кутовою швидкістю електродвигуна). Тому перевірка на резонанс має за мету пересвідчитись у відсутності цього збігу:

$$\begin{cases} \omega_1 \neq \omega, \\ \omega_2 \neq \omega. \end{cases} \quad (7.39)$$

У нашому випадку:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}, \quad (7.40)$$

де n – частота обертання двигуна (кількість обертів за хвилину).

Величини ω_1, ω_2 визначаються за формулою (7.24) з попередньої задачі. Вони обчислюються системою на кожному кроці динамічного розрахунку.

7.4.2 Приклад розв'язання задачі 7.4

Схема ферми до прикладу зображена на рисунку 7.18. Інші вихідні дані: $m = 1400$ кг; $H = 0,3m \cdot g = 4120$ Н;
 $n = 1000$ об./хв. ($104,667$ с⁻¹); $\eta = 0,2$; $\mu = 0$.

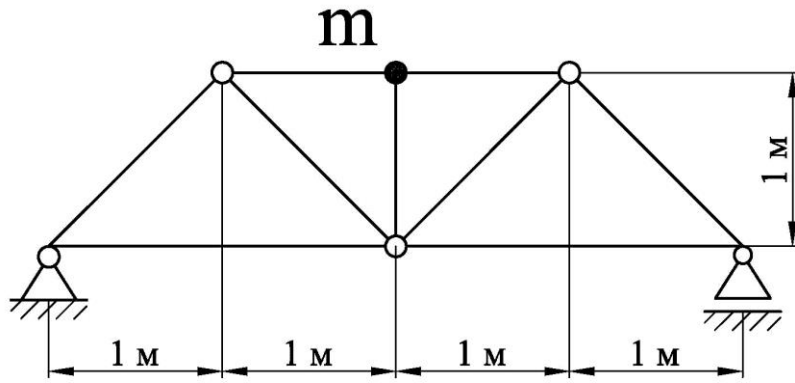


Рисунок 7.18 – Схема ферми до прикладу задачі 7.4

Розв'язання

1 Позначаємо на схемі ферми номери стрижнів і вузлові точки, визначаємо довжини стрижнів:

$$l_1 = l_6 = 2\text{ м}; l_2 = l_3 = l_7 = l_8 = 1,41\text{ м}; l_4 = l_5 = l_9 = 1\text{ м} \text{ (рис. 7.19)}.$$

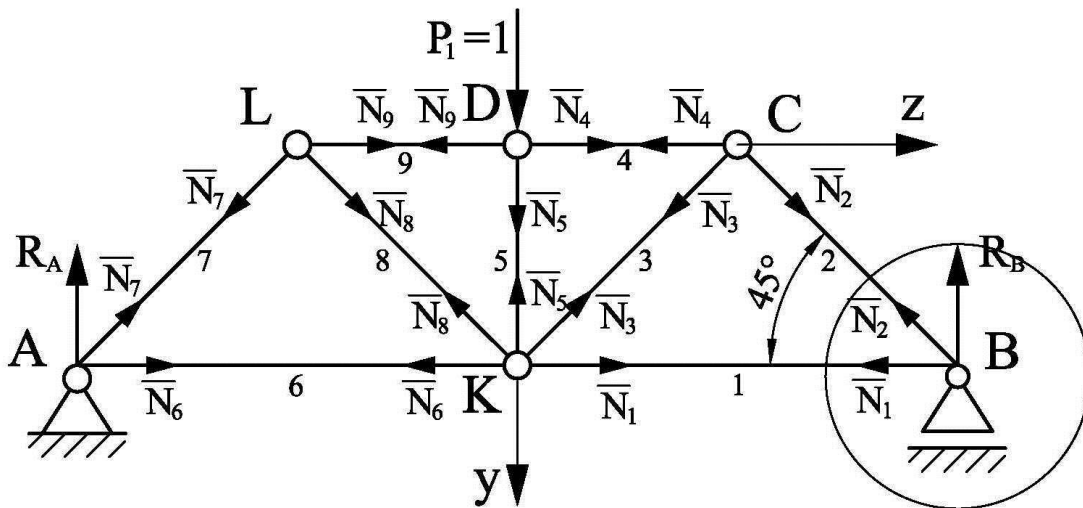


Рисунок 7.19 – Схема до визначення реакції ферми і зусиль у її стрижнях від дії одиничної сили $P_1 = 1$

2 Прикладаємо до ферми в місці розташування двигуна (вузол D) вертикальну одиничну силу $P_1 = 1$ і визначаємо від неї реакції ферми R_A і R_B (див.рис.7.19):

$$\sum m_A = 0: -P_1 \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0, \quad R_B = \frac{P_1 \cdot 2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{4} = 0,5;$$

$$\sum m_B = 0: P_1 \cdot 2 - R_A \cdot 4 = 0, \quad R_A = \frac{P_1 \cdot 2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{4} = 0,5.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = P_1 - R_A - R_B = 1 - 0,5 - 0,5 = 0.$$

3 Для визначення зусиль у стрижнях ферми використовуємо метод вирізання вузлів. Починаємо з вузла B , у якому збігаються два невідомих зусилля \bar{N}_1 і \bar{N}_2 :

$$\sum P_y = -R_B - \bar{N}_2 \cdot \sin 45^\circ = 0, \quad \bar{N}_2 = -\frac{R_B}{\sin 45^\circ} = -\frac{0,5}{0,71} = -0,71;$$

$$\sum P_z = -\bar{N}_1 - \bar{N}_2 \cdot \cos 45^\circ = 0, \quad \bar{N}_1 = -\bar{N}_2 \cdot \cos 45^\circ = 0,71 \cdot 0,71 = 0,5.$$

Послідовно переходимо до вузлів C, D, L, A і аналогічно визначаємо усі інші зусилля:

$$\bar{N}_3 = 0,71; \bar{N}_4 = -1; \bar{N}_5 = 1; \bar{N}_9 = -1; \bar{N}_8 = 0,71; \bar{N}_7 = -0,71; \bar{N}_6 = 0,5.$$

Для перевірки розглянемо вузол K :

$$\begin{aligned} \sum P_y &= \bar{N}_5 - \bar{N}_3 \cdot \sin 45^\circ - \bar{N}_8 \cdot \sin 45^\circ = \\ &= 1 - 0,71 \cdot 0,71 - 0,71 \cdot 0,71 = 1 - 0,5 - 0,5 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_z &= \bar{N}_1 - \bar{N}_6 + \bar{N}_3 \cdot \cos 45^\circ - \bar{N}_8 \cdot \cos 45^\circ = \\ &= 0,5 - 0,5 + 0,71 \cdot 0,71 - 0,71 \cdot 0,71 = 0,5 - 0,5 + 0,5 - 0,5 = 0. \end{aligned}$$

4 Прикладаємо до ферми в місці розташування двигуна (вузол D) горизонтальну одиничну силу $P_2 = 1$ і, застосовуючи аналогічні процедури, визначаємо від її дії реакції ферми і зусилля в кожному із стрижнів (рис. 7.20):

$$\begin{aligned} Y_A &= 0,25; Z_A = 1; R'_B = 0,25; \\ \bar{N}'_1 &= 0,25; \bar{N}'_2 = -0,35; \bar{N}'_3 = 0,35; \bar{N}'_4 = -0,5; \bar{N}'_5 = 0; \\ \bar{N}'_6 &= 0,75; \bar{N}'_7 = 0,35; \bar{N}'_8 = -0,35; \bar{N}'_9 = 0,5. \end{aligned}$$

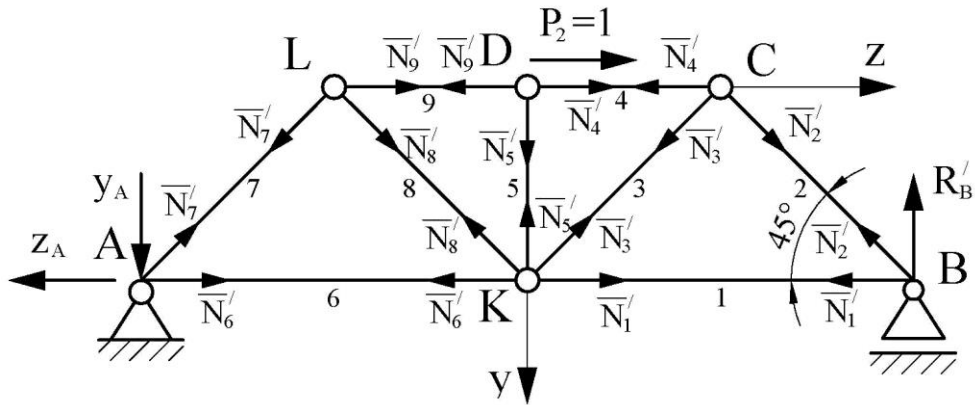


Рисунок 7.20 – Схема до визначення реакції ферми і зусиль у її стрижнях від дії одиничної сили $P_2 = 1$

5 Отримані значення зусиль у стрижнях ферми вносимо в таблицю 7.11 і визначаємо в загальному вигляді показники жорсткості ферми.

6 Визначаємо найбільше за модулем зусилля в стрижнях ферми від дії вертикальної одиничної сили (див. табл. 7.11): $|\bar{N}|_{max} = 1$.

7 З умови міцності при статичному навантаженні визначаємо початкові параметри труб для виготовлення ферми:

$$F \geq \frac{|\bar{N}|_{max} \cdot m \cdot g}{[\sigma]} = \frac{1 \cdot 1400 \cdot 9,81}{160} = 85,838 \text{ мм}^2,$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi \cdot [1 - (1 - 2\eta)^2]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 85,838}{3,14 \cdot [1 - (1 - 2 \cdot 0,2)^2]}} = 13,1 \text{ мм}.$$

Приймаємо з нормального ряду (див. додаток А) $d = 14 \text{ мм}$.

Таблиця 7.11 – Визначення показників жорсткості ферми

Номер стрижня	\bar{N}_i	\bar{N}'_i	$\ell_i, \text{м}$	$(\bar{N}_i)^2 \cdot \ell_i, \text{м}$	$(\bar{N}'_i)^2 \cdot \ell_i, \text{м}$	$\bar{N}_i \cdot \bar{N}'_i \cdot \ell_i, \text{м}$
1	0,5	0,25	2	0,5	0,125	0,25
2	- 0,71	- 0,35	1,41	0,711	0,173	0,35
3	0,71	0,35	1,41	0,711	0,173	0,35
4	- 1	- 0,5	1	1	0,25	0,5
5	1	0	1	1	0	0
6	0,5	0,75	2	0,5	1,25	0,75
7	- 0,71	0,35	1,41	0,711	0,173	- 0,35
8	0,71	- 0,35	1,41	0,711	0,173	- 0,35
9	- 1	0,5	1	1	0,25	- 0,5
				$\Sigma = 6,844$	$\Sigma = 2,442$	$\Sigma = 1$
				$\delta_{11} = \frac{6,844}{E \cdot F}$	$\delta_{22} = \frac{2,442}{E \cdot F}$	$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \cdot F}$

З таблиці 7.11 видно, що показники δ_{12} і δ_{21} є додатними. Це говорить про те, що напрямки сили P_2 і осі z вибрані вірно.

8 Перевіряємо стиснуті стрижні на стійкість.

Тут небезпечними можуть бути або стрижні 4, 5 і 9, у яких довжина $\ell = 1\text{ м}$ і стискаюче зусилля $|N| = 1 \cdot 1400 \cdot 9.81 = 13734\text{ Н}$, або стрижні 2 і 7, у яких $\ell = 1,41\text{ м}$ $|N| = 0,71 \cdot 1400 \cdot 9.81 = 9751\text{ (НФ (див. табл. 7.11))}$.

У стрижнів 4, 5 і 9 згідно з формулами (7.32)...(7.35):

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot [1 - (1 - 2\eta)^2] = \frac{3,14 \cdot 14^2}{4} \cdot [1 - (1 - 2 \cdot 0,2)^2] = 98,5 (\text{мм}^2);$$

$$|\sigma| = \frac{|N|}{F} = \frac{13734}{98,5} = 139,4 (\text{ММПа});$$

$$i_{oc} = \frac{d}{4} \cdot \sqrt{1 + (1 - 2 \cdot 0,2)^2} = \frac{14}{4} \cdot \sqrt{1 + (1 - 2 \cdot 0,2)^2} = 4,082 \text{ мм}.$$

Зважаючи на те, що у всіх стрижнів ферми обидва кріплення шарнірні, коефіцієнт приведеної довжини для них $\mu = 1$ (див. додаток В). Тому у стрижнів 4, 5, 9

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{oc}} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 10^3}{4,082} = 245 \geq \lambda_{\max} = 200.$$

Оскільки значенню $\lambda = 200$ відповідає $\varphi = 0,19$ (див. додаток В), у зазначених стрижнів маємо:

$$\varphi < 0,19, \quad \varphi \cdot [\sigma] < 0,19 \cdot 160 = 30,4 \text{ МПа}, \quad |\sigma| > \varphi \cdot [\sigma].$$

Умова стійкості (7.32) стрижнями 4, 5, 9 не виконується.

У стрижнів 2 і 7 результати аналогічні:

$$\lambda = 335; \quad \varphi < 0,19; \quad \varphi \cdot [\sigma] < 0,19 \cdot 160 = 30,4 \text{ МПа}; \quad |\sigma| > \varphi \cdot [\sigma].$$

Таким чином, діаметр $d = 14\text{ мм}$ є недостатнім для забезпечення стійкості стрижнів ферми при статичному її навантаженні вагою двигуна. Як показують аналогічні розрахунки, негативні результати мають місце також при $d = 16, 18, 20, 22\text{ мм}$ і тільки $d = 25\text{ мм}$ забезпечує стійкість усіх стрижнів.

9 Динамічний розрахунок починаємо з $d = 25$ мм. Враховуючи сумісну дію на цьому етапі сил P_1 і P_2 , небезпечним з точки зору міцності вважаємо стрижень 4, у якого $\bar{N}_4 = -1$ і $\bar{N}'_4 = -0,5$ (див. табл. 7.11). Що ж стосується стійкості, то тут складно однозначно визначитись з номером небезпечного стрижня: ним, окрім стрижня 4, може виявитись стрижень 2, у якого $\bar{N}_2 = -0,71$ і $\bar{N}'_2 = -0,35$, а довжина значно більша, ніж у стрижня 4. Тому до динамічного розрахунку беремо і стрижень 4, і стрижень 2. Для них згідно з (7.36) маємо:

$$\begin{cases} N_4(t) = -1 \cdot P_1(t) - 0,5 \cdot P_2(t), \\ N_2(t) = -0,71 \cdot P_1(t) - 0,35 \cdot P_2(t). \end{cases} \quad (7.41)$$

Результати динамічного розрахунку, виконаного у системі **Mathcad 15**, представлені в таблицях 7.12 і 7.13 та на рисунках 7.21 і 7.22.

Таблиця 7.12 – Результати динамічного розрахунку стрижня 4

d , мм	F , мм ²	$N_4(t) = -1 \cdot P_1(t) - 0,5 \cdot P_2(t)$					ω_1 , с ⁻¹	ω_2 , с ⁻¹
		$ N _{\max}$, Н	$ \sigma _{\max}$, МПа	λ	φ	$\varphi \cdot [\sigma]$, МПа		
25	313,8	27750	88,5	137	0,372	59,5	79,675	141,916
28	393,6	38760	98,5	122	0,440	70,4	89,237	158,946
32	514,0	181600	353,3	107	0,544	87,0	101,985	181,652
36	650,6	67570	103,9	95	0,645	103,2	114,733	204,359
40	803,2	41400	51,5	86	0,714	114,2	127,481	227,065

Таблиця 7.13 – Результати динамічного розрахунку стрижня 2

d , мм	F , мм ²	$N_2(t) = -0,71 \cdot P_1(t) - 0,35 \cdot P_2(t)$					ω_1 , с ⁻¹	ω_2 , с ⁻¹
		$ N _{\max}$, Н	$ \sigma _{\max}$, МПа	λ	φ	$\varphi \cdot [\sigma]$, МПа		
25	313,8	19660	62,7	193	0,204	32,6	79,675	141,916
28	393,6	27470	69,8	172	0,254	40,6	89,237	158,946
32	514,0	128800	250,6	151	0,317	50,7	101,985	181,652
36	650,6	47910	73,6	134	0,384	61,4	114,733	204,359
40	803,2	29360	36,6	121	0,445	71,2	127,481	227,065

З наведених таблиць видно, що міцність і стійкість обох стрижнів забезпечуються при $d = 40\text{мм}$. Таким чином, остаточно приймаємо трубу $40 \times 8\text{ мм}$.

При таких розмірах труби коливальна система далека від резонансу: її резонансні частоти $\omega_1 = 127,481\text{с}^{-1}$ і $\omega_2 = 227,065\text{с}^{-1}$ значно відрізняються від колової частоти збуджуючої сили $\omega = 104,667\text{с}^{-1}$. Найближчою до резонансу є труба з $d = 32\text{мм}$, у якій $\omega_1 = 101,985\text{с}^{-1}$.

$$\begin{aligned}
 &g := 9.81 \quad m := 1400 \quad H := 0.3mg \quad \omega := 104.66 \quad E := 2 \cdot 10^{11} \\
 &d := 25 \cdot 10^{-3} \quad F := 0.502d^2 \quad F = 3.138 \times 10^{-4} \\
 &\delta 11 := \frac{6.844}{E \cdot F} \quad \delta 22 := \frac{2.442}{E \cdot F} \quad \delta 12 := \frac{1.0}{E \cdot F} \quad \delta 21 := \delta 12 \\
 &\delta 11 = 1.091 \times 10^{-7} \quad \delta 22 = 3.892 \times 10^{-8} \quad \delta 21 = 1.594 \times 10^{-8} \quad \delta 12 = 1.594 \times 10^{-8} \\
 &a := \frac{\delta 22}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22) \cdot m} \quad b := \frac{\delta 12}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22) \cdot m} \\
 &d := g \cdot \left[1 + \frac{\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22)} \right] \\
 &k := \frac{\delta 21}{(\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21) \cdot m} \quad n := \frac{\delta 11}{(\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21) \cdot m} \\
 &\text{Given} \quad y''(t) - a \cdot y(t) + b \cdot z(t) = \frac{H}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t) + d \\
 &z''(t) - k \cdot y(t) + n \cdot z(t) = \frac{H}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad z(0) = 0 \quad z'(0) = 0 \\
 &\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, t, 4 \right] \quad t := 0, 0.002, 4 \\
 &P1(t) := mg + \frac{z(t)}{\delta 21} - \frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \cdot \frac{\delta 22}{\delta 21} \quad P2(t) := \frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \\
 &N(t) := -P1(t) \cdot 1 - P2(t) \cdot 0.4 \\
 &\text{ORIGIN} := 1 \quad i := 1..4000 \quad t_i := 0 + \frac{i}{1000} \quad Y_i := y(t_i) \quad Z_i := z(t_i) \\
 &PP1_i := P1(t_i) \quad PP2_i := P2(t_i) \quad NN_i := N(t_i) \\
 &Nmin := \text{min}(NN) \quad Nmin = -2.775 \times 10^4 \quad \sigma_{min} := \frac{Nmin}{F} \quad \sigma_{min} = -8.846 \times 10^7 \\
 &\omega R1 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) + m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}} \quad \omega R1 = 79.675 \\
 &\omega R2 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) + m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}} \quad \omega R2 = 141.916
 \end{aligned}$$

Рисунок 7.21 – Динамічний розрахунок ферми (стрижень 4, $d = 25\text{ мм}$)

$$\begin{aligned}
g &:= 9.81 & m &:= 1400 & H &:= 0.3 \text{ mg} & \omega &:= 104.66 & E &:= 2 \cdot 10^{11} \\
d &:= 25 \cdot 10^{-3} & F &:= 0.502 d^2 & F &= 3.138 \times 10^{-4} \\
\delta 11 &:= \frac{6.844}{E \cdot F} & \delta 22 &:= \frac{2.442}{E \cdot F} & \delta 12 &:= \frac{1.0}{E \cdot F} & \delta 21 &:= \delta 12 \\
\delta 11 &= 1.091 \times 10^{-7} & \delta 22 &= 3.892 \times 10^{-8} & \delta 21 &= 1.594 \times 10^{-8} & \delta 12 &= 1.594 \times 10^{-8} \\
a &:= \frac{\delta 22}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22) \cdot m} & b &:= \frac{\delta 12}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22) \cdot m} & d &:= g \cdot \left[1 + \frac{\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21}{(\delta 12 \cdot \delta 21 - \delta 11 \cdot \delta 22)} \right] \\
k &:= \frac{\delta 21}{(\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21) \cdot m} & n &:= \frac{\delta 11}{(\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12 \cdot \delta 21) \cdot m} \\
\text{Given } y''(t) - a \cdot y(t) + b \cdot z(t) &= \frac{H}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t) + d & z''(t) - k \cdot y(t) + n \cdot z(t) &= \frac{H}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\
y(0) = 0 & y'(0) = 0 & z(0) = 0 & z'(0) = 0 & \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &:= \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, t, 4 \right] & t &:= 0, 0.002, 4 \\
P1(t) &:= m \cdot g + \frac{z(t)}{\delta 21} - \frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \cdot \frac{\delta 22}{\delta 21} & P2(t) &:= \frac{y(t) \cdot \delta 21 - z(t) \cdot \delta 11}{\delta 21^2 - \delta 22 \cdot \delta 11} \\
N(t) &:= -P1(t) \cdot 0.71 - P2(t) \cdot 0.3 \\
\text{ORIGIN} &:= 1 & i &:= 1..4000 & t_i &:= 0 + \frac{i}{1000} & Y_i &:= y(t_i) & Z_i &:= z(t_i) \\
PP1_i &:= P1(t_i) & PP2_i &:= P2(t_i) & NN_i &:= N(t_i) \\
N_{\min} &:= \min(NN) & N_{\min} &= -1.966 \times 10^4 & \sigma_{\min} &:= \frac{N_{\min}}{F} & \sigma_{\min} &= -6.267 \times 10^7 \\
\omega R1 &:= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) + m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}} & \omega R1 &= 79.675 \\
\omega R2 &:= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta 11 + \delta 22) - m \cdot \sqrt{(\delta 11 + \delta 22)^2 - 4 \cdot (\delta 11 \cdot \delta 22 - \delta 12^2)}}} & \omega R2 &= 141.916
\end{aligned}$$

Рисунок 7.22 – Динамічний розрахунок ферми (стрижень 2, $d = 25\text{мм}$)

ЛІТЕРАТУРА

1 Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів»: *навчальний посібник* / [Л. В. Кутувий та ін.]. – Краматорськ: ДДМА, 2007. – 220 с.

2 Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Є. С. Уманський. – К. : Вища шк., 2004. – 655 с.

3 Дарков А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 654 с.

4 Справочник по сопротивлению материалов / [Г. С. Писаренко и др.]. – К. : Наукова думка, 1988. – 704 с.

5 Макаров Е. Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad / Е. Г. Макаров. – С Пб. : БХВ – Петербург, 2004. – 512 с.

6 Холодняк Ю. С. Развитие методологии прочностных расчётов двутавровых балок / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, С. В. Капорович // Научный Вестник Донбасской государственной машиностроительной академии. – Краматорск : ДГМА, 2015. – № 2 (17Е). – С. 103–114.

7 Холодняк Ю. С. Розвиток методології силових розрахунків плоских рам в умовах вимушених коливань / Ю. С. Холодняк, С. В. Подлесний, С. В. Капорович // Науковий Вісник Донбаської державної машинобудівної академії. – Краматорськ : ДДМА, 2018. – № 1(25Е). – С.96–107.

8 Особливості застосування спрощеної двовимірної моделі вимушених коливань у силових розрахунках плоских ферм / [Ю. С. Холодняк та ін.] // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії: *зб. наук. праць*. – Краматорськ : ДДМА, 2019. – № 3 (47). – С. 61–71.

9 Опір матеріалів: *збірник розрахунково-графічних завдань [для студентів усіх механічних спеціальностей денної форми навчання]* / [уклад.: Ю.С. Холодняк, С.В.Капорович]. – Краматорськ : ДДМА, 2020. Ч. 1. – 180 с.

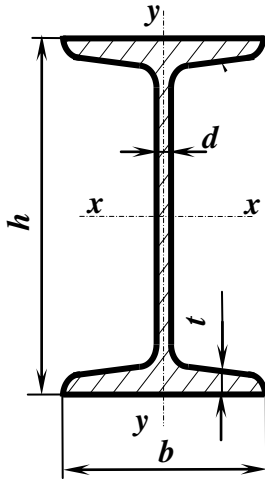
ДОДАТОК А

Основні параметри катаних профілів

1 Нормальні лінійні розміри, мм (за ГОСТ 6636-69, фрагмент ряду Ra20)

Таблиця А.1

1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6
4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0	10	11	12	14
16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56
63	71	80	90	100	110	125	140	160	180	200	220
250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900



2 Двутаври сталіні гарячекатані (за ГОСТ 8239-89)

Позначення:

h – висота профілю

b – ширина полки

d – товщина стінки

t – середня товщина полки

F – площа перерізу

J – момент інерції

W – момент опору

i – радіус інерції

S – статичний момент

половини перерізу

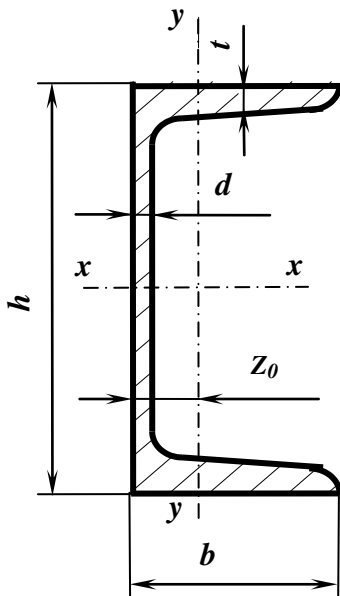
Приклад позначення профілю:

Двутавр 30 ГОСТ 8239-89

Таблиця А.2

Номер профілю	Основні розміри, мм				F см ²	J_x см ⁴	W_x см ³	i_x см	S_x см ³	J_y см ⁴	W_y см ³	i_y см
	h	b	d	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1 290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	1 430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1 840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	200	110	5,2	8,6	28,9	2 030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2 550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	220	120	5,4	8,9	32,8	2 790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3 460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	240	125	5,6	9,8	37,5	3 800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5 010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	270	135	6,0	10,2	43,2	5 500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7 080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	300	145	6,5	10,7	49,9	7 780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9 840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19 062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27 696	1 231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39 727	1 589	19,9	919	1 043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55 962	2 035	21,8	1 181	1 356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76 806	2 560	23,6	1 491	1 725	182	3,54

3 Швелери сталі гарячекатані (за ГОСТ 8240-89)



Позначення:

h – висота профілю
 b – ширина полки
 d – товщина стінки
 t – середня товщина полки
 F – площа перерізу
 J – момент інерції

W – момент опору
 i – радіус інерції
 S – статичний момент
 напівперерізу
 Z_0 – відстань від осі y
 до зовнішньої грані стінки

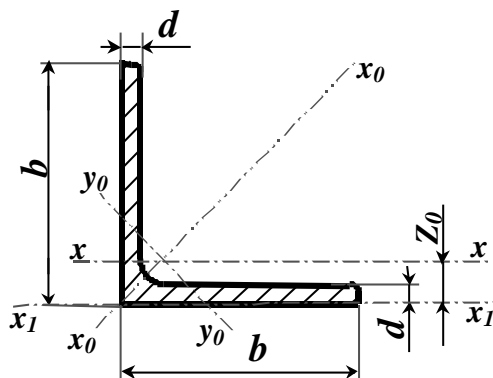
Приклад позначення профілю:

Швелер 30 ГОСТ 8240-89

Таблиця А.3

Номер профілю	Основні розміри, мм				F см ²	J_x см ⁴	W_x см ³	i_x см	S_x см ³	J_y см ⁴	W_y см ³	i_y см	Z_0 см
	h	b	d	t									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14а	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16а	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1 090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	22,2	1 190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1 520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20а	200	80	5,2	9,7	25,2	1 670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2 110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22а	220	87	5,4	10,2	28,8	2 330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2 900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24а	240	95	5,6	10,7	32,9	3 180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4 160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5 810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7 980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

4 Кутики сталеві гарячекатані рівнополічні (за ГОСТ 8509-93 або ДСТУ2251-93)



Позначення:

- | | |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------|
| b – ширина полки | d – товщина полки |
| F – площа перерізу | J – момент інерції |
| i – радіус інерції | Z_0 – відстань від центра ваги перерізу до зовнішньої грані полки |

Приклад позначення профілю:

Кутик 50x50x3 ГОСТ 8509-93

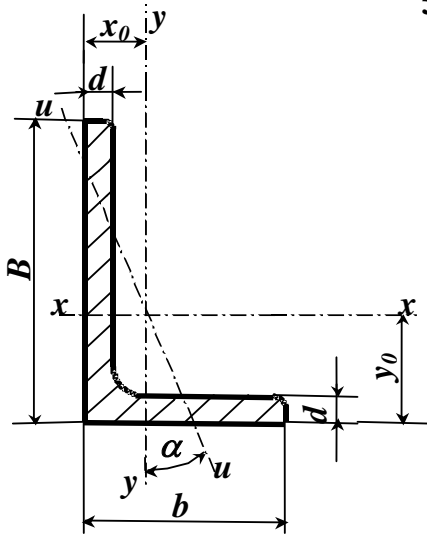
Таблиця А.4

Номер Кутика	Основні розміри мм		F см ²	J_x см ⁴	i_x см	J_{x_0} max см ⁴	i_{x_0} max см	J_{y_0} min см ⁴	i_{y_0} min см	Z_0 см
	b	d								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
		5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
		6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18

Продовження таблиці А.4

Номер Кутика	Основні розміри мм		F см ²	J_X см ⁴	i_X см	J_{X_0} max см ⁴	i_{x_0} max см	J_{y_0} min см ⁴	i_{y_0} min см	Z_0 см
	b	d								
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
16	160	12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
		10	31,4	774	4,96	1 229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	844	4,95	1 341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1 450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1 046	4,92	1 662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1 175	4,89	1 866	6,17	485	3,14	4,55
18	180	18	54,8	1 299	4,87	2 061	6,13	537	3,13	4,63
		20	60,4	1 419	4,85	2 248	6,10	589	3,12	4,70
20	200	11	38,8	1 216	5,60	1 933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	1 317	5,59	2 093	7,04	540	3,58	4,89
		12	47,1	1 823	6,22	2 896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1 961	6,21	3 116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2 097	6,20	3 333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2 363	6,17	3 755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2 871	6,12	4 560	7,72	1 182	3,93	5,70
22	220	25	94,3	3 466	6,06	5 494	7,63	1 438	3,91	5,89
		30	111,5	4 020	6,00	6 351	7,55	1 688	3,89	6,07
25	250	14	60,4	2 814	6,83	4 470	8,60	1 159	4,38	5,93
		16	68,6	3 175	6,81	5 045	8,58	1 306	4,36	6,02
		16	78,4	4 717	7,76	7 492	9,78	1 942	4,98	6,75
		18	87,7	5 247	7,73	8 337	9,75	2 158	4,96	6,83
		20	97,0	5 765	7,71	9 160	9,72	2 370	4,94	6,91
		22	106,1	6 270	7,69	9 961	9,69	2 579	4,93	7,00
		25	119,7	7 006	7,65	11 125	9,64	2 887	4,91	7,11
28	280	28	133,1	7 717	7,61	12 244	9,59	3 190	4,89	7,23
		30	142,0	8 117	7,59	12 965	9,56	3 389	4,89	7,31

5 Кутики сталеві гарячекатані нерівнополічні (за ГОСТ 8510-86)



Позначення:

<p>B – ширина більшої полки</p> <p>d – товщина полки</p> <p>I – момент інерції</p> <p>x_0, y_0 – відстані від центра ваги перерізу до зовнішніх граней поллок.</p>	<p>b – ширина меншої полки</p> <p>F – площа перерізу</p> <p>i – радіус інерції</p> <p>α – кут нахилу осі u</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Приклад позначення профілю:

Кутик 50x32x3 ГОСТ 8510-86

Таблиця А.5

Номер кутика	Основні розміри, мм			F см ²	J_x см ⁴	J_y см ⁴	J_u мин см ⁴	i_u см	x_0 см	y_0 см	tg α
	B	b	d								
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392
3/2	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	0,54	1,04	0,421
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382
			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385
			4	2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
			5	3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	0,66	1,41	0,374
4/3	40	39	4	2,67	4,18	2,01	1,09	0,64	0,78	1,28	0,544
			5	3,28	5,04	2,41	1,33	0,64	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382
			4	2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403
			4	3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
			5	4,41	13,8	4,48	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
			5	4,98	19,9	6,26	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6	5,90	23,3	7,28	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8	7,68	29,6	9,15	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	23,41	12,08	6,41	1,07	1,26	2,00	0,576
			6	6,60	27,46	14,12	7,52	1,07	1,30	2,04	0,575
			7	7,62	31,32	16,05	8,60	1,06	1,34	2,08	0,571
			8	8,62	35,00	18,88	9,65	1,06	1,37	2,12	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
			6	7,25	40,92	14,60	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			7	8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	1,25	2,48	0,435
			8	9,47	52,38	18,52	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430

Продовження таблиці А.5

Номер кутика	Основні розміри, мм			F см ²	J_X см ⁴	J_Y см ⁴	J_u мин см ⁴	i_u см	x_0 см	y_0 см	tg α
	B	b	d								
8/5	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	1,09	1,13	2,60	0,387
			6	7,55	48,98	14,85	8,88	1,08	1,17	2,65	0,386
8/6	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	1,29	1,49	2,47	0,547
			7	9,42	59,61	28,74	15,58	1,29	1,53	2,52	0,546
			8	10,6	66,88	32,15	17,49	1,28	1,57	2,56	0,544
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	19,7	11,8	1,22	1,26	2,92	0,384
			6	8,54	70,6	21,2	12,7	1,22	1,28	2,95	0,384
			8	11,2	90,9	27,1	16,3	1,21	1,36	3,04	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	30,6	18,20	1,38	1,42	3,23	0,393
			7	11,1	113,0	35,0	20,83	1,37	1,46	3,28	0,392
			8	12,6	127,0	39,2	23,38	1,36	1,50	3,32	0,391
			10	15,5	154,0	47,1	28,34	1,35	1,58	3,40	0,387
10/6,5	100	65	7	11,2	114,0	38,3	22,77	1,41	1,52	3,24	0,415
			8	12,7	138,3	43,0	25,24	1,41	1,56	3,28	0,414
			10	15,7	155,5	51,7	30,60	1,40	1,64	3,37	0,410
11/7	110	70	6,5	11,4	142	45,6	26,9	1,53	1,58	3,55	0,402
			8	13,9	172	54,6	32,3	1,52	1,64	3,61	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	227	73,7	43,4	1,76	1,80	4,01	0,407
			8	16,0	256	83,0	48,8	1,75	1,84	4,05	0,406
			10	19,7	312	100,0	59,3	1,74	1,92	4,14	0,404
			12	23,4	365	117,0	69,5	1,72	2,00	4,22	0,400
14/9	140	90	8	18,0	364	120	70,3	1,98	2,03	4,49	0,411
			10	22,2	444	146	85,5	1,96	2,12	4,58	0,409
16/10	160	100	9	22,9	606	186	110	2,20	2,23	5,19	0,391
			10	25,3	667	204	121	2,19	2,28	5,23	0,390
			12	30,0	784	239	142	2,18	2,36	5,32	0,388
			14	34,7	897	272	162	2,16	2,43	5,40	0,385
18/11	180	110	10	28,3	952	276	165	2,42	2,44	5,88	0,375
			12	33,7	1 123	324	194	2,40	2,52	5,97	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	1 449	446	264	2,75	2,79	6,50	0,392
			12	37,9	1 568	482	285	2,74	2,83	6,54	0,392
			14	43,9	1 801	551	327	2,73	2,91	6,62	0,390
			16	49,8	2 026	617	367	2,72	2,99	6,71	0,388
25/16	250	160	12	48,3	3 147	1 032	604	3,54	3,53	7,97	0,410
			16	63,6	4 091	1 333	781	3,50	3,69	8,14	0,408
			18	71,1	4 545	1 475	896	3,49	3,77	8,23	0,407
			20	78,5	4 987	1 613	949	3,48	3,85	8,31	0,405

ДОДАТОК Б
Формула крайніх ординат і особливості її застосування

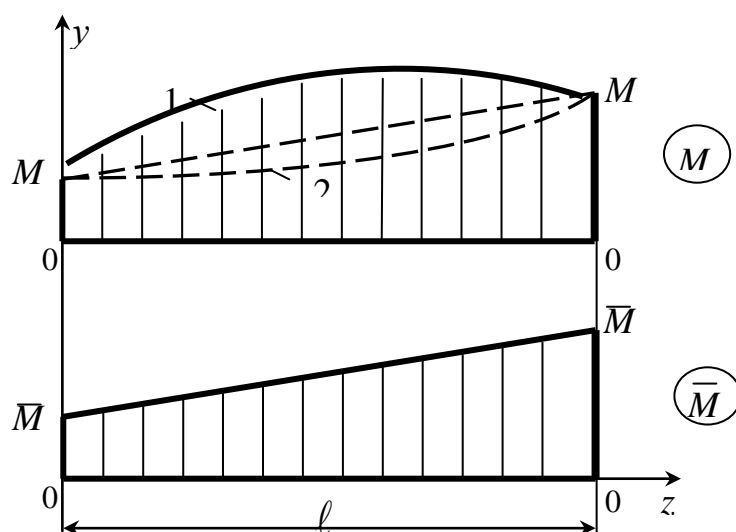


Рисунок Б.1

$$\Delta = M \times \bar{M} = \frac{\ell}{6E \cdot J_x} \cdot (2M_L \cdot \bar{M}_L + 2M_{II} \cdot \bar{M}_{II} + M_L \cdot \bar{M}_{II} + M_{II} \cdot \bar{M}_L) \pm \frac{q \cdot \ell^3}{24E \cdot J_x} (\bar{M}_L + \bar{M}_{II}).$$

Формула призначена для визначення (по Мору) переміщень в балках і рамах при плоскому згині. В ній позначено:

Δ – переміщення (лінійне – δ , кутове – θ) в заданому місці балки або рами;

M і \bar{M} – відповідно епюри згинальних моментів від заданого навантаження і одиничного силового фактору (сили або моменту)

ℓ - довжина ділянки балки або стрижня рами (тобто відрізка, на якому кожна з обох епюр зображується єдиною лінією);

yz – силова площа;

x і y – головні центральні осі перерізу балки або стрижня рами (вісь x на схемі не зображена);

J_x – момент інерції перерізу відносно осі x ;

E – модуль пружності першого роду для матеріалу балки або рами;

q – інтенсивність розподіленого навантаження;

M_L, M_{II} – крайні ординати епюри M ;

\bar{M}_L, \bar{M}_{II} – крайні ординати епюри \bar{M} .

Формула застосовується для кожної ділянки балки, де обидві епюри не є нульовими, після чого знайдені для всіх ділянок величини Δ складаються з урахуванням їхніх знаків. У рамах ці величини визначаються для всіх зазначених ділянок усіх стрижнів.

Величини крайніх ординат обох епюр підставляються у формулу зі своїми знаками; на схемі вони показані як додатні.

Знак “плюс” перед поправкою на кривизну (тобто другою складовою у формулі крайніх ординат) ставиться в разі, коли епюра M є опуклою (крива 1), а “мінус” – коли вона угнута (крива 2). Коли ж ця епюра прямолінійна, поправка на кривизну дорівнює нулю.

ДОДАТОК В

Основні параметри стиснутих стрижнів

1 Коефіцієнти μ приведеної довжини

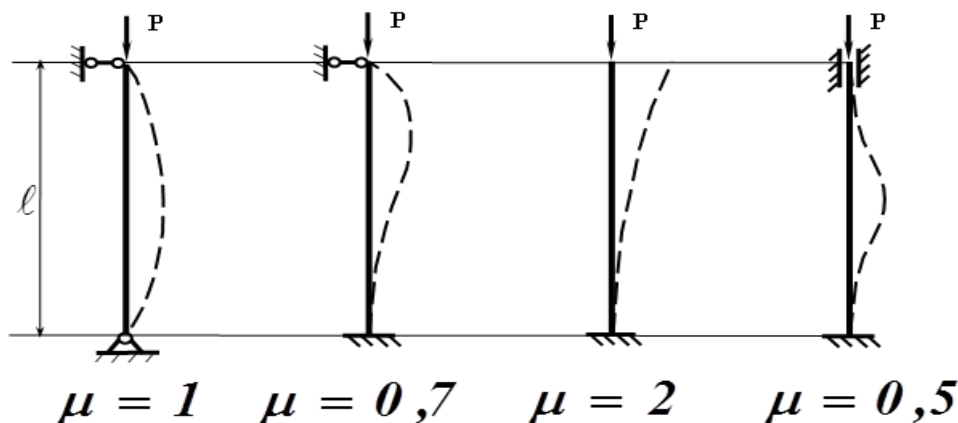


Рисунок В.1

2 Коефіцієнти φ зменшення основного допустимого напруження

Таблиця В.1

Гнучкість λ	сталь <i>Ст 4, 3, 2</i>	сталь <i>Ст5</i>	сталь <i>СПК</i>	чавун	дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

ДОДАТОК Г
Зразок титульного аркуша розрахунково-графічного завдання

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ
Кафедра технічної механіки

Розрахунково-графічне завдання № 1.1 з опору матеріалів
**Розрахунок стрижневих систем, які працюють
на розтягання та стискання**

Варіант № 7214

Виконав
Студент гр. ТМ- 19-1
Кузьменко М.О.

Перевірив
Кудря Д.М.

Краматорськ 2020

Для нотаток

Навчальне видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ

**Збірник
розрахунково-графічних завдань**

Частина 2

**для студентів усіх механічних спеціальностей
денної форми навчання**

Укладачі:

**ХОЛОДНЯК Юрій Сергійович,
КАПОРОВИЧ Світлана Володимирівна.**

За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання І. І. Дьякова

87/2020. Формат 60 x 84/16. Ум. друк. арк. 9,3.
Обл.- вид. арк. 2,54. Тираж 50 пр. Зам. №.....

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 1633 від 24.12.2003