

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

ОПР МАТЕРІАЛІВ

**Збірник
розрахунково-графічних завдань**

Частина 1

**для студентів усіх механічних спеціальностей
денної форми навчання**

Затверджено
на засіданні методичної ради
Протокол №7 від 22.04.2021р.

Краматорськ
ДДМА
2021

УДК 539.3/.6

Опір матеріалів: *збірник розрахунково-графічних завдань [для студентів усіх механічних спеціальностей денної форми навчання]* / [уклад. : Ю. С. Холодняк, С. В. Капорович]. – Краматорськ : ДДМА, 2021. Ч. 1. – 175 с.

Містить умови завдань, стислі теоретичні відомості до них, методичні вказівки і приклади розв'язання цих завдань.

Укладачі: Ю. С. Холодняк, доц. (вступ, розділ 4, додатки);
С. В. Капорович, ст. викл. (розділи 1...3).

Відп. за випуск С. В. Подлесний, доц.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 Розрахунок стрижневих систем, які працюють на розтягання та стискання	6
1.1 Статично визначувана стрижнева система	6
1.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.1	10
1.1.2 Приклад розв'язання задачі 1.1	11
1.1.3 Приклад розв'язання задачі 1.1 в системі Mathcad	15
1.2 Ступінчастий статично невизначуваний стрижень	17
1.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.2	17
1.2.2 Приклад розв'язання задачі 1.2	23
1.2.3 Приклад розв'язання задачі 1.2 в системі Mathcad	25
1.3 Статично невизначувана стрижнева система	28
1.3.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.3	28
1.3.2 Приклад розв'язання задачі 1.3	33
1.3.3 Приклад розв'язання задачі 1.3 в системі Mathcad	38
2 Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок та рам	40
2.1 Консольна балка (задача 2.1) та двоопорна балка (задача 2.2)	40
2.1.1 Методичні вказівки до виконання задач 2.1 та 2.2	40
2.1.2 Правила побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів	47
2.1.3 Приклад розв'язання задачі 2.1 (схема без екстремуму)	49
2.1.4 Приклад розв'язання задачі 2.1 в системі Mathcad (схема без екстремуму)	52
2.1.5 Приклад розв'язання задачі 2.1 (схема з екстремумом)	54
2.1.6 Приклад розв'язання задачі 2.1 в системі Mathcad (схема з екстремумом)	57
2.1.7 Приклад розв'язання задачі 2.2 (схема без екстремуму)	60
2.1.8 Приклад розв'язання задачі 2.2 в системі Mathcad (схема без екстремуму)	63
2.1.9 Приклад розв'язання задачі 2.2 (схема з екстремумом)	66
2.1.10 Приклад розв'язання задачі 2.2 в системі Mathcad (схема з екстремумом)	69
2.2 Консольна рама (задача 2.3) та двоопорна рама (задача 2.4)	72
2.2.1 Методичні вказівки до виконання задач 2.3 та 2.4	72
2.2.2 Приклад розв'язання задачі 2.3	84
2.2.3 Приклад розв'язання задачі 2.3 в системі Mathcad	88
2.2.4 Приклад розв'язання задачі 2.4	90
2.2.5 Приклад розв'язання задачі 2.4 в системі Mathcad	95
3 Розрахунок геометричних характеристик плоских перерізів	99
3.1 Симетричний складний переріз	99
3.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 3.1	99
3.1.2 Приклад розв'язання задачі 3.1	104
3.1.3 Приклад розв'язання задачі 3.1 в системі Mathcad	106

3.2 Несиметричний складний переріз	107
3.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 3.2	107
3.2.2 Приклад розв'язання задачі 3.2	112
3.2.3 Приклад розв'язання задачі 3.2 в системі Mathcad	117
4 Плоске згинання	119
4.1 Повна перевірка міцності балки	119
4.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.1	119
4.1.2 Приклад розв'язання задачі 4.1	126
4.2 Переміщення в балках	130
4.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.2	134
4.2.2 Приклад розв'язання задачі 4.2	134
4.3 Переміщення в плоских рамах	139
4.3.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.3	139
4.3.2 Приклад 1 розв'язання задачі 4.3	143
4.3.3 Приклад 2 розв'язання задачі 4.3	149
Література	155
Додаток А. Основні параметри катаних профілів	156
Додаток Б. Параметри безпечного факторного простору двотаврів	162
Додаток В. Креслення безпечного факторного простору двотаврів	163
Додаток Г. Формула крайніх ординат і особливості її застосування	174
Додаток Д. Зразок титульного аркуша Розрахунково-графічного завдання	175

ВСТУП

Опір матеріалів закладає основи інженерних розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість деталей машин і елементів споруд. Розрахунково – графічні завдання з цього курсу призначені для розвитку у студентів навичок самостійного виконання зазначених розрахунків і допомагають кращому засвоєнню теоретичного матеріалу.

Даний збірник є модернізованою версією раніше виданого кафедрою технічної механіки Донбаської державної машинобудівної академії збірника розрахунково – графічних завдань з курсу опору матеріалів /1/, який базувався виключно на традиційних методичних підходах /2 – 4 та ін./ і не містив прогресивних розрахункових технологій з залученням комп'ютерної техніки. При його підготовці були виправлені редакційні помилки, замінено ряд невдалих конструктивних схем і числових даних до них, широко застосовано систему Mathcad /5/, істотно змінено постановку ряду задач по результатам новітніх наукових досліджень кафедри /6 та ін. /, добавлені сортаменти катаних профілів та інші довідкові матеріали.

Кожне завдання видається після вивчення відповідного теоретичного матеріалу. До складу завдання входять постановка задачі, 30 конструктивних схем, дві таблиці числових даних, методичні вказівки і приклад (або приклади) розв'язання поставленої задачі.

Кожен студент одержує свій індивідуальний варіант для виконання усіх завдань, передбачених навчальним планом. Номер варіанту визначається викладачем і складається з чотирьох цифр. Перша та друга цифри вказують номери стовпчиків відповідно в першій та другій таблицях числових даних, третя і четверта – номер конструктивної схеми відповідно до номера прізвища студента у списку академічної групи.

Основні вимоги до оформлення завдань:

1 Титульний аркуш і наступні сторінки повинні бути виконаними на білому цупкому папері формату А4 і скріплені між собою будь – яким способом.

2 Титульний аркуш повинен мати вигляд згідно зі зразком, наведеним у додатку Д.

3 Наступні сторінки за погодженням з викладачем оформляються в рукописному або друкованому варіанті на одній стороні аркуша. На них наводяться умови завдання з вихідними даними відповідно до номера варіанту, розрахункова схема з усіма необхідними позначеннями, результати розрахунку разом з їх поясненнями.

4 Усі графічні побудови виконуються в певному масштабі з дотриманням існуючих стандартів і правил оформлення конструкторської документації.

5 Усі розміри, навантаження і результати обчислень повинні мати розмірності в міжнародній системі одиниць (СИ).

1 РОЗРАХУНОК СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ, ЯКІ ПРАЦЮЮТЬ НА РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ

1.1 Статично визначувана стрижнева система

Із розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів, якщо стрижень 1 – круглого поперечного перерізу; стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків; стрижень 3 – двотаврового поперечного перерізу.

Знайти абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Вихідні дані вибрати із таблиць 1.1 та 1.2 і рисунку 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до задачі 1.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, \text{ м}$	0,8	0,6	1,0	1,2	1,4	1,5	2,0	2,5	1,8	1,6
$b, \text{ м}$	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,3	0,8	2,2	2,4
$c, \text{ м}$	1,2	1,4	0,8	0,6	2,0	2,2	1,1	1,8	1,7	1,6

Таблиця 1.2 – Вихідні дані до задачі 1.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M, \text{ кНм}$	100	120	200	80	300	100	220	160	140	250
$P, \text{ кН}$	400	300	450	200	350	240	250	280	340	320
$q, \text{ кН/м}$	200	150	250	300	350	400	280	350	380	320

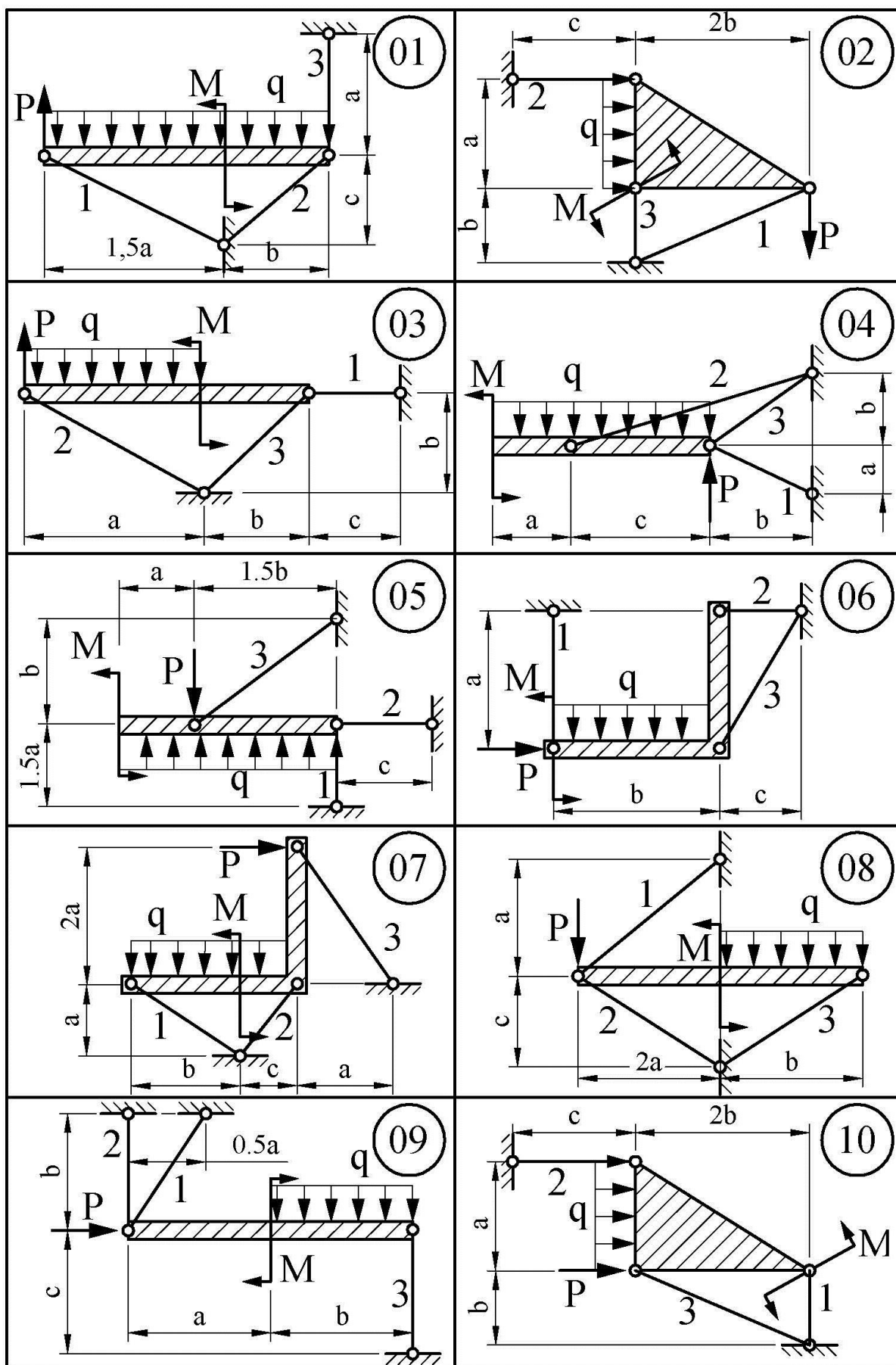


Рисунок 1.1

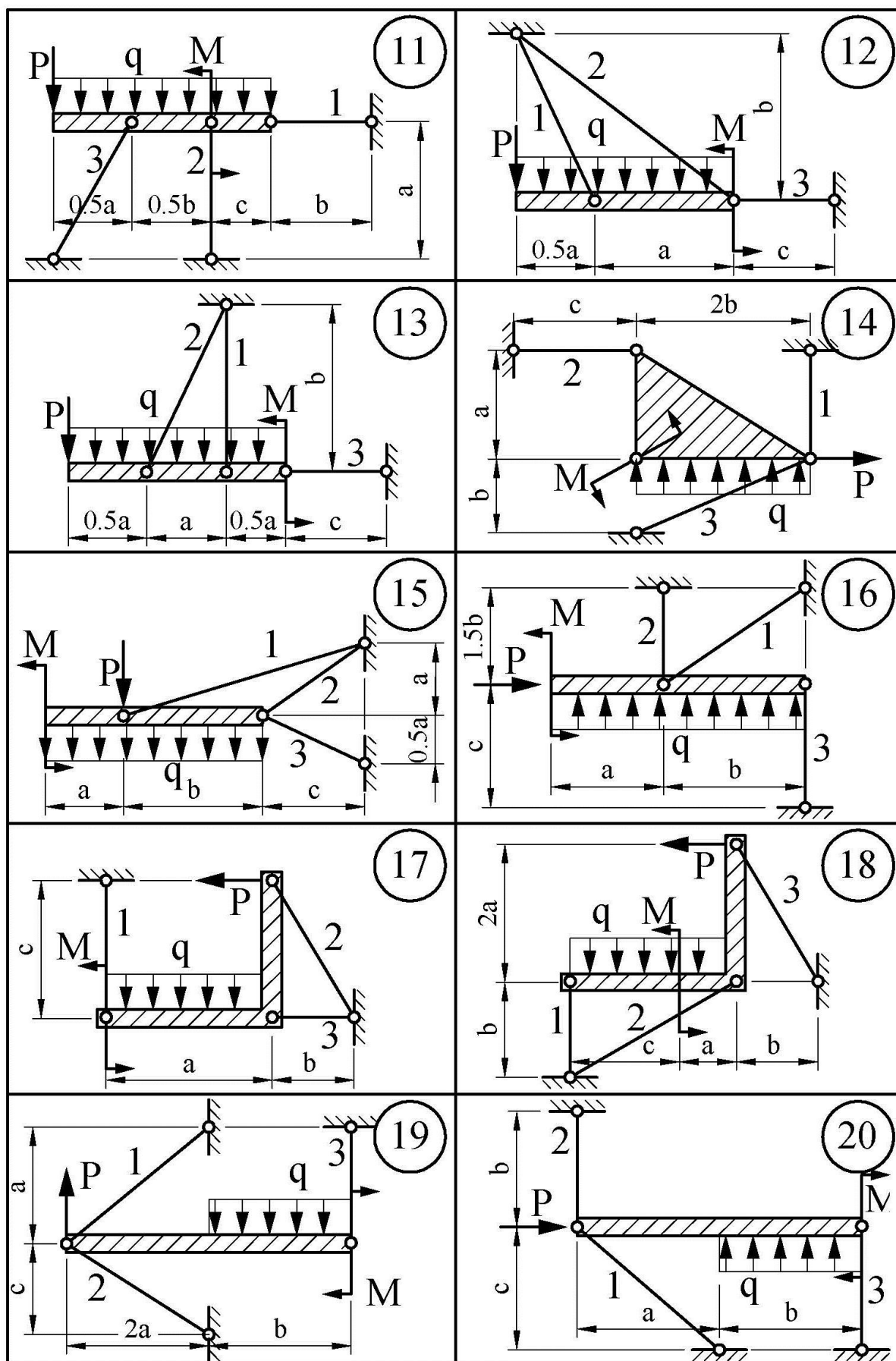


Рисунок 1.1, аркуш 2

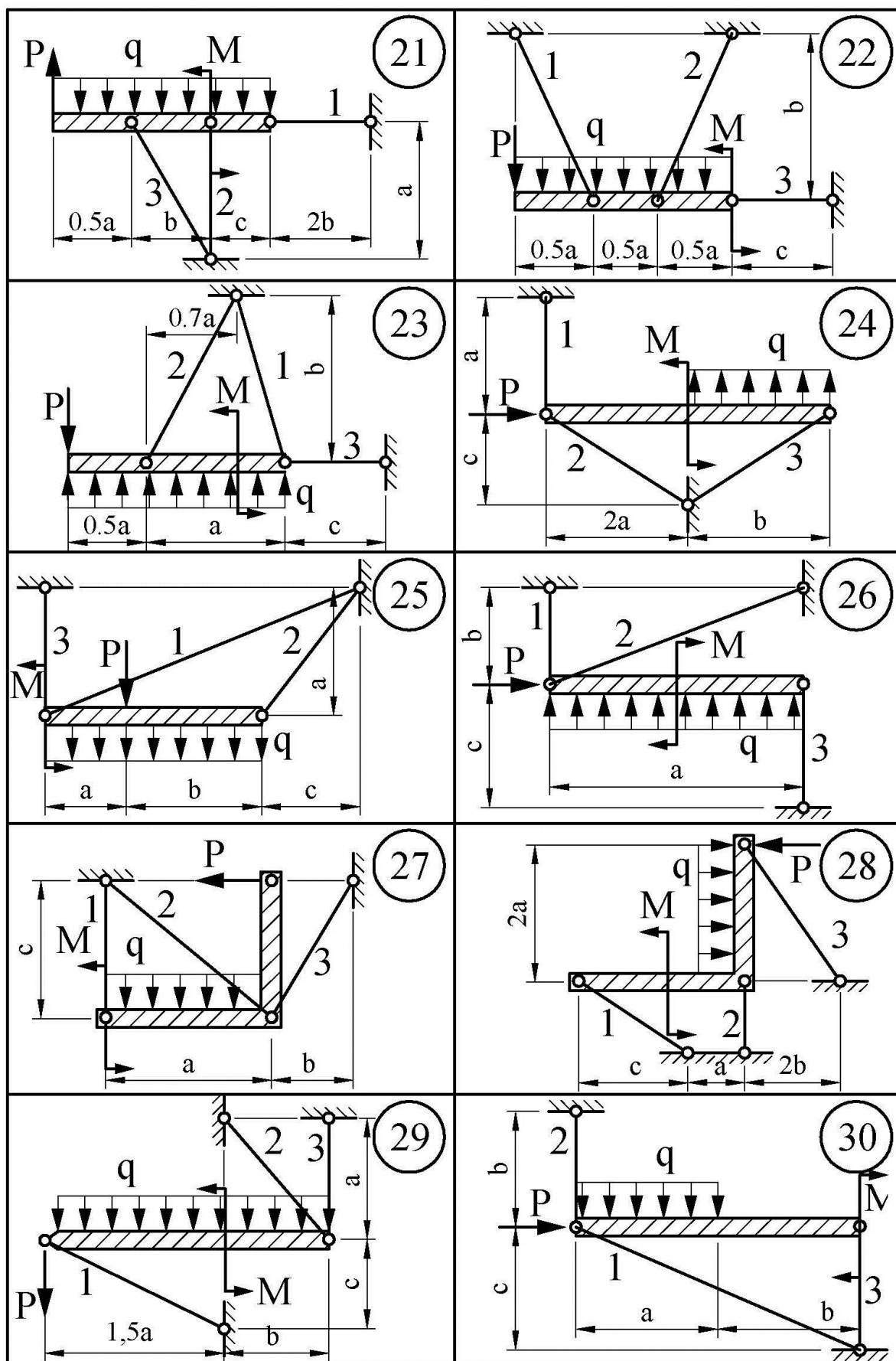


Рисунок 1.1, аркуш 3

1.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.1

Необхідні розміри поперечних перерізів стрижнів можна знайти з умови міцності. Для даних стрижневих систем, які працюють на розтягання і стискання, умова міцності має вигляд:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (1.1)$$

де N – подовжня (осьова) сила в стрижні;
 F – площа поперечного перерізу стрижня;
 $[\sigma]$ – допустиме напруження.

Для виконання проектувальних розрахунків необхідно визначити площу поперечних перерізів стрижнів:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (1.2)$$

У цій нерівності невідоме зусилля N .

Системи, які розглядаються, статично визначувані і зусилля в них можуть бути знайдені тільки з рівнянь рівноваги статки. Задачу слід розв'язувати за таким планом:

1 Скласти рівняння рівноваги, використовуючи тільки ті з них, до яких не входять реакції опор, котрі знаходити немає потреби, і розрахувати зусилля в стрижнях 1, 2, 3.

2 Знайти площі поперечних перерізів стрижнів за формулою (1.2):

а) поперечний переріз стрижня 1 – круг. Для круглого поперечного перерізу

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ звідки } d \geq \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4N}{\pi[\sigma]}}, \quad (1.3)$$

після чого прийняти діаметр з рекомендованих розмірів згідно з Державним стандартом;

б) поперечний переріз стрижня 2 – два рівнобічних кутика.

За площею кутика

$$F_{\text{кут}} = \frac{F_2}{2} = \frac{N_2}{2[\sigma]}.$$

Із таблиці знаходимо номер кутика, площа якого повинна бути не меншою за $F_{\text{кут}}$;

в) поперечний переріз стрижня 3 – двотавр. За площею $F_3 = \frac{N_3}{[\sigma]}$.

Із таблиці сортаменту знаходимо відповідний номер двотавра.

Якщо знайдені площі рівнобічного кутика і двотавра менші від площі найменшого профілю, то необхідно прийняти найменший профіль.

3 Визначити подовження (укорочення) стрижнів за законом Гука. Якщо стрижень розтягується, то $\Delta \ell$ вважається додатним, а якщо стискається – від’ємним:

$$\Delta \ell_i = \frac{N_i \ell_i}{EF_i}, \quad (1.4)$$

де N_i – зусилля в i -му стрижні;

ℓ_i – довжина i -го стрижня;

E – модуль пружності матеріалу;

F_i – площа поперечного перерізу підібраного профілю.

1.1.2 Приклад розв’язання задачі 1.1

Для стрижневої системи, показаної на рисунку 1.2, із розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів, якщо стрижень 1 – круглого поперечного перерізу, стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків, стрижень 3 – двотаврового поперечного перерізу. Знайти абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Розв’язання. Відкидаємо зв’язки, їх вплив замінюємо зусиллями N_1 , N_2 та N_3 (рис. 1.3). У заданій стрижневій системі (рис. 1.2) невідомими є зусилля в трьох стрижнях, які не перетинаються в одній точці й не паралельні між собою.

Для такої системи можна скласти три незалежних рівняння статки, тобто вона є статично визначуваною стрижневою системою. Для визначення зусиль у стрижнях складаємо рівняння рівноваги. Необхідно намагатися складати тільки такі рівняння, до яких входило б тільки по одному невідомому зусиллю.

Беремо суму моментів відносно точки A (див. рис. 1.3), тому що в ній перетинаються два невідомі зусилля – N_2 і N_3 :

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0, \\ N_1 \cdot 5 - P \cdot (5 - 3) + q \cdot 4 \cdot 2 - M &= 0, \end{aligned}$$

$$N_1 = \frac{P \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5} = \frac{250 \cdot 2 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{5} = -160 \text{ (кН)}.$$

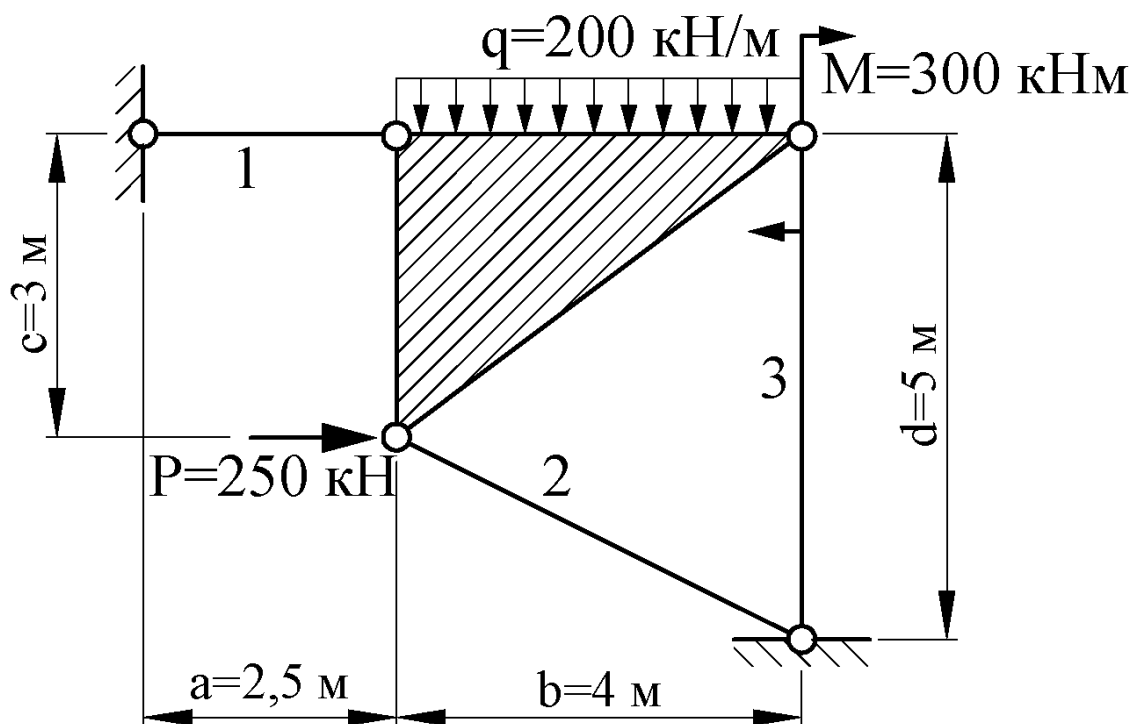


Рисунок 1.2 – Стрижнева система

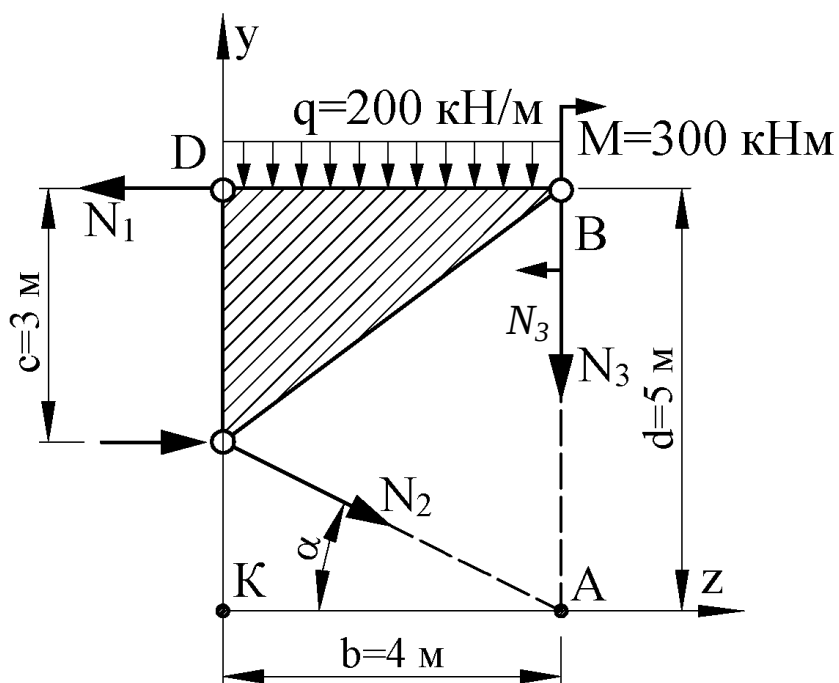


Рисунок 1.3 – Стрижнева система з відкинутими зв'язками

Тепер беремо суму моментів відносно точки B (у ній перетинаються зусилля N_1 та N_3):

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, \\ P \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 - M + N_2 \cdot 5 \cdot \cos \alpha &= 0, \\ N_2 &= \frac{-P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5 \cdot \cos \alpha} = \frac{-250 \cdot 3 - 200 \cdot 4 \cdot 2 + 300}{5 \cdot 0,894} = -458,6 \text{ (кН)}.\end{aligned}$$

Косинус та синус кута α знаходимо з трикутника АКС (рис. 1.3).

$$\begin{aligned}\ell_3 = AC &= \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{4^2 + (5-3)^2} = 4,47 \text{ (м)}, \\ \cos \alpha &= \frac{AK}{AC} = \frac{4}{4,47} = 0,894, \\ \sin \alpha &= \frac{KC}{AC} = \frac{2}{4,47} = 0,447.\end{aligned}$$

Зусилля N_3 знаходимо із суми проекцій на вертикальну вісь

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0, \\ -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 &= 0, \\ N_3 &= -q \cdot 4 - N_2 \cdot \sin \alpha = -200 \cdot 4 - (-458,6) \cdot 0,447 = -595 \text{ (кН)}.\end{aligned}$$

Усі зусилля одержали зі знаком мінус. Значить, напрямок усіх зусиль зворотний заданому, тобто усі стрижні стиснуті.

Тепер виконаємо перевірку. Для перевірки необхідно брати тільки ті рівняння, які ми не використовували при знаходженні зусиль.

$$\begin{aligned}\sum P_z &= 0, \\ P - N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha &= 0, \\ 250 - (-160) - 458,6 \cdot 0,894 &= 0, \\ 410 - 410 &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0, \\ N_1 \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 - M - N_3 \cdot 4 &= 0, \\ -160 \cdot 3 - 200 \cdot 4 \cdot 2 - 300 - (-595) \cdot 4 &= 0, \\ 2380 - 2380 &= 0.\end{aligned}$$

Тепер за допомогою формули (1.2) підбираємо розміри поперечних перерізів стрижнів.

Стрижень 1 за умовою задачі – круглого поперечного перерізу:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{160 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 10 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Його діаметр:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{3,14}} = 3,57 \text{ (см)}.$$

З рекомендованого ряду чисел (за ГОСТом 6636-69) приймаємо діаметр стрижня $d = 36 \text{ мм}$.

Стрижень 2 за умовою задачі складається з двох рівнобічних кутиків:

$$F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{458,6 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 28,66 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Звідси площа одного кутика:

$$F_{\text{кут}} = \frac{F_2}{2} = \frac{28,66}{2} = 14,33 \text{ (см}^2\text{)}.$$

З таблиці сортаменту приймаємо кутик 90х90х9 (ДСТУ 2251-93), площа якого $F_{\text{кут}} = 15,6 \text{ см}^2$.

Стрижень 3 за умовою задачі – двотаврового поперечного перерізу:

$$F_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{595 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 37,2 \text{ (см}^2\text{)}.$$

З таблиці сортаменту приймаємо двотавр 24а (ГОСТ 8239-89), площа якого $F_3 = 37,5 \text{ см}^2$.

Підібравши площі поперечних перерізів, знаходимо абсолютні подовження стрижнів за формулою (1.4):

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EF_1} = \frac{-160 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5}{2 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 3,6^2}{4} \cdot 10^{-4}} = -19,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = (-1,97 \text{ мм}),$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EF_2} = \frac{-458,6 \cdot 10^{-3} \cdot 4,47}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4}} = -32,9 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -3,29 \text{ (мм)},$$

$$\Delta \ell_3 = \frac{N_3 \ell_3}{EF_3} = \frac{-595 \cdot 10^{-3} \cdot 5}{2 \cdot 10^5 \cdot 37,5 \cdot 10^{-4}} = -39,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -3,97 \text{ (мм)}.$$

Остаточно можемо зробити висновок, що всі три стрижні зменшують свою довжину.

1.1.3 Приклад розв'язання задачі 1.1 в системі Mathcad

Для визначення невідомих зусиль N_1 , N_2 та N_3 складаємо три незалежних рівняння статки:

$$\sum M_A = 0, \quad -M - P \cdot (d - c) + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + N_1 \cdot d = 0,$$

$$\sum M_B = 0, \quad -M + P \cdot c + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + N_2 \cdot \cos \alpha \cdot d = 0,$$

$$\sum P_y = 0, \quad -q \cdot b - N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 = 0.$$

Розрахунок проведемо за допомогою блока GIVEN...FIND.

Для перевірки використовуємо наступні рівняння:

$$\sum P_z = P - N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum M_C = -M - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + N_1 \cdot c - N_3 \cdot b.$$

Вхідні дані:

$$a := 2.5 \quad b := 4 \quad c := 3 \quad d := 5$$

$$q := 200 \quad P := 250 \quad M := 300$$

$$\sigma_{\text{доп}} := 160 \quad E := 2 \cdot 10^5$$

Довжина стрижней та кут нахилу стрижня 2

$$l_1 := a = 2.5$$

$$l_2 := \sqrt{(d - c)^2 + b^2} = 4.47$$

$$l_3 := d = 5$$

$$\cos \alpha := \frac{b}{l_2} = 0.894$$

$$\sin \alpha := \frac{d - c}{l_2} = 0.447$$

Поздовжні зусилля

$$N_1 := 0$$

$$N_2 := 0$$

$$N_3 := 0$$

Given

$$\sum M_A := 0 \quad -M - P \cdot (d - c) + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + N_1 \cdot d = 0$$

$$\Sigma M_B := 0 \quad -M + P \cdot c + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + N_2 \cdot \cos \alpha \cdot d = 0$$

$$\Sigma P_y := 0 \quad -q \cdot b - N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(N_1, N_2, N_3)$$

$$N_1 = -160$$

$$N_2 = -458.39$$

$$N_3 = -595$$

Перевірка

$$\Sigma P_z := P - N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha = -1.37 \times 10^{-11}$$

$$\Sigma M_C := -M - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + N_1 \cdot c - N_3 \cdot b = -8.37 \times 10^{-11}$$

Розміри поперечних перерізів

Стрижень 1

$$F_1 := \frac{|N_1| \cdot 10^{-3}}{\sigma_{dop}} \cdot 10^4 = 10$$

$$d := \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\pi}} = 3.57$$

$$\text{Приймаємо } d := 3.6$$

$$F_1 := \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 10.18$$

Стрижень 2

$$F_2 := \frac{|N_2| \cdot 10^{-3}}{\sigma_{dop}} \cdot 10^4 = 28.65$$

$$F_{\text{кут}} := \frac{F_2}{2} = 14.32$$

$$\text{Приймаємо кутик } 90 \times 90 \times 9 \quad F_{\text{кут}} := 15.6$$

$$F_2 := F_{\text{кут}} \cdot 2 = 31.2$$

Стрижень 3

$$F_3 := \frac{|N_3| \cdot 10^{-3}}{\sigma_{dop}} \cdot 10^4 = 37.19$$

Приймаємо двотавр №24а $F3 := 37.5$

Абсолютні подовження стрижнів

$$\Delta l_1 := \frac{N_1 \cdot 10^{-3} \cdot l_1}{E \cdot F_1 \cdot 10^{-4}} = -1.96 \times 10^{-3}$$

$$\Delta l_2 := \frac{N_2 \cdot 10^{-3} \cdot l_2}{E \cdot F_2 \cdot 10^{-4}} = -3.29 \times 10^{-3}$$

$$\Delta l_3 := \frac{N_3 \cdot 10^{-3} \cdot l_3}{E \cdot F_3 \cdot 10^{-4}} = -3.97 \times 10^{-3}$$

1.2 Ступінчастий статично невизначуваний стрижень

Для сталевго стрижня побудувати епюри поздовжніх зусиль N і нормальних напружень σ , якщо між стрижнем та стіною до зміни температури і прикладення зусиль був зазор δ . Вихідні дані вибрати із таблиць 1.3, 1.4 і рисунку 1.4.

Таблиця 1.3 – Вихідні дані до задачі 1.2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	0,8	0,6	1,0	1,2	1,4	1,5	2,0	2,5	1,8	1,6
b , м	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,3	0,8	2,2	2,4
c , м	1,2	1,4	0,8	0,6	2,0	2,2	1,1	1,8	1,7	1,6
t , °C	30	35	50	45	25	55	60	20	40	65

1.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.2

Якщо при нагріванні стрижня і дії на нього зусиль P зазор закрийється, то в обох жорстких опорах з'являться реакції, які будуть діяти вздовж осі. При осьовій дії усіх зусиль можна записати лише одне

рівняння рівноваги – суму проекцій усіх зусиль на вісь стрижня, у якому будуть обидві реакції. Очевидно, що знайти дві реакції з одного рівняння неможливо.

Система, в якій кількість невідомих зусиль перевищує кількість рівнянь статки, називається статично невизначуваною. Нагадаємо, що для

Таблиця 1.4 – Вихідні дані до задачі 1.2

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F, \text{см}^2$	10	8	11	13	16	18	20	15	14	17
$P, \text{кН}$	100	150	180	230	200	140	130	170	280	250
$\delta, \text{мм}$	0,01	0,02	0,04	0,03	0,07	0,08	0,04	0,03	0,04	0,05

плоскої довільної системи сил можна скласти три рівняння рівноваги, для плоско-паралельної і плоско-збіжної – два.

Статистично невизначувані системи розв'язуються за таким планом:

1 Визначається ступінь статичної невизначуваності конструкції, тобто кількість зайвих невідомих, яка дорівнює різниці між кількістю невідомих і кількістю рівнянь статки. У цій задачі $S = 2 - 1 = 1$.

2 Для розв'язання статично невизначуваної системи необхідно розглянути три аспекти задачі:

Статичний аспект задачі. Складаємо рівняння рівноваги відокремлених елементів конструкції, що мають невідомі зусилля:

$$\sum P_z = 0. \quad (1.5)$$

Геометричний аспект задачі. Розглядаємо систему в деформованому стані, що дає змогу встановити зв'язки між деформаціями або переміщеннями окремих елементів конструкції. Здобуті рівняння називають рівняннями сумісності (нерозривності) деформацій. У цій задачі до прикладення зусиль і зміни температури між одним кінцем і опорою був зазор δ . Після нагрівання і дії заданих зусиль він закривається. Таким чином, стрижень зможе змінити свою довжину на δ і рівняння сумісності буде мати вигляд:

$$\Delta \ell = \Delta \ell_N + \Delta \ell_t = \Delta, \quad (1.6)$$

де $\Delta \ell_N$ – деформація від зусиль;

$\Delta \ell_t$ – деформація від температури.

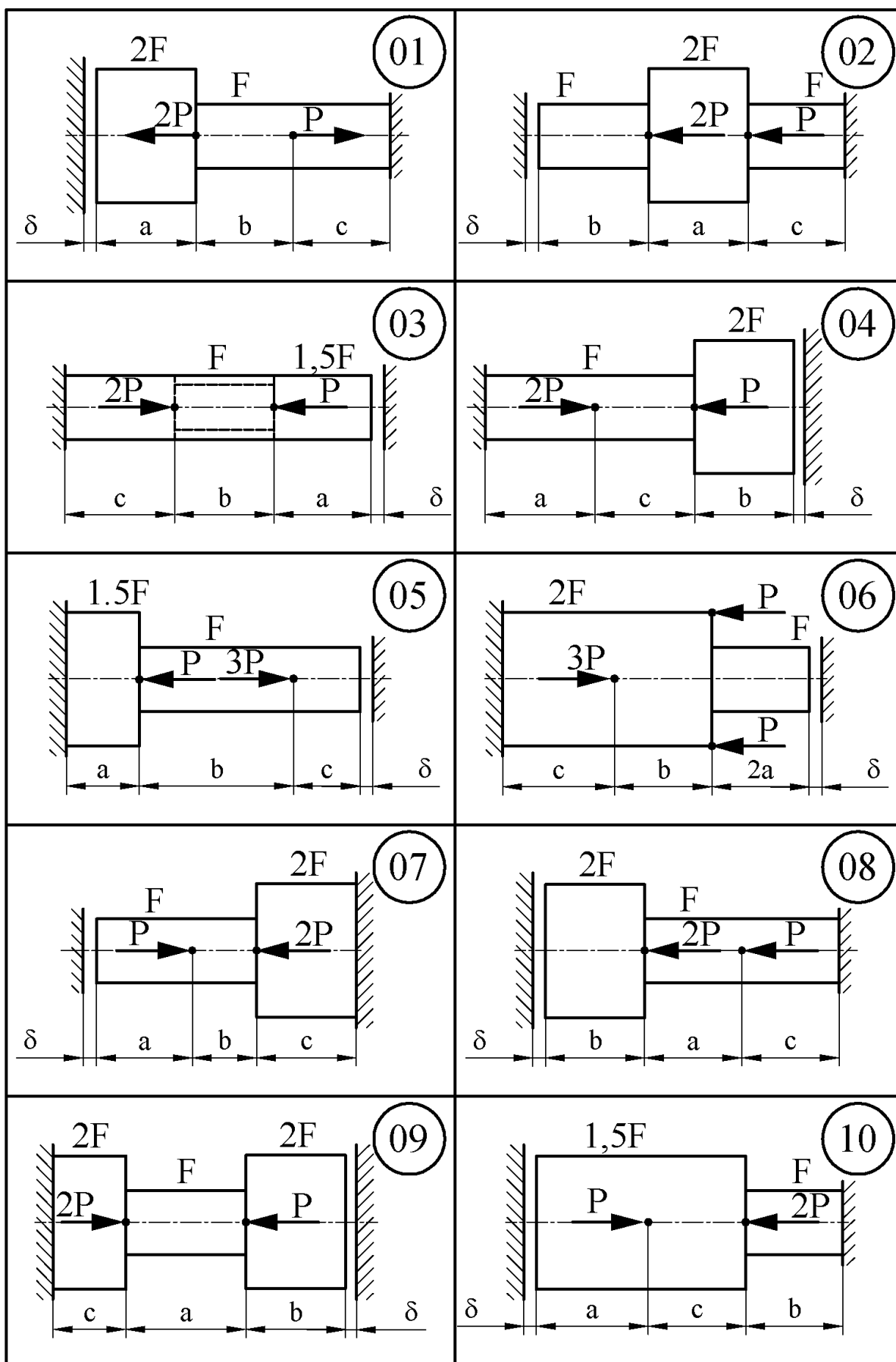


Рисунок 1.4

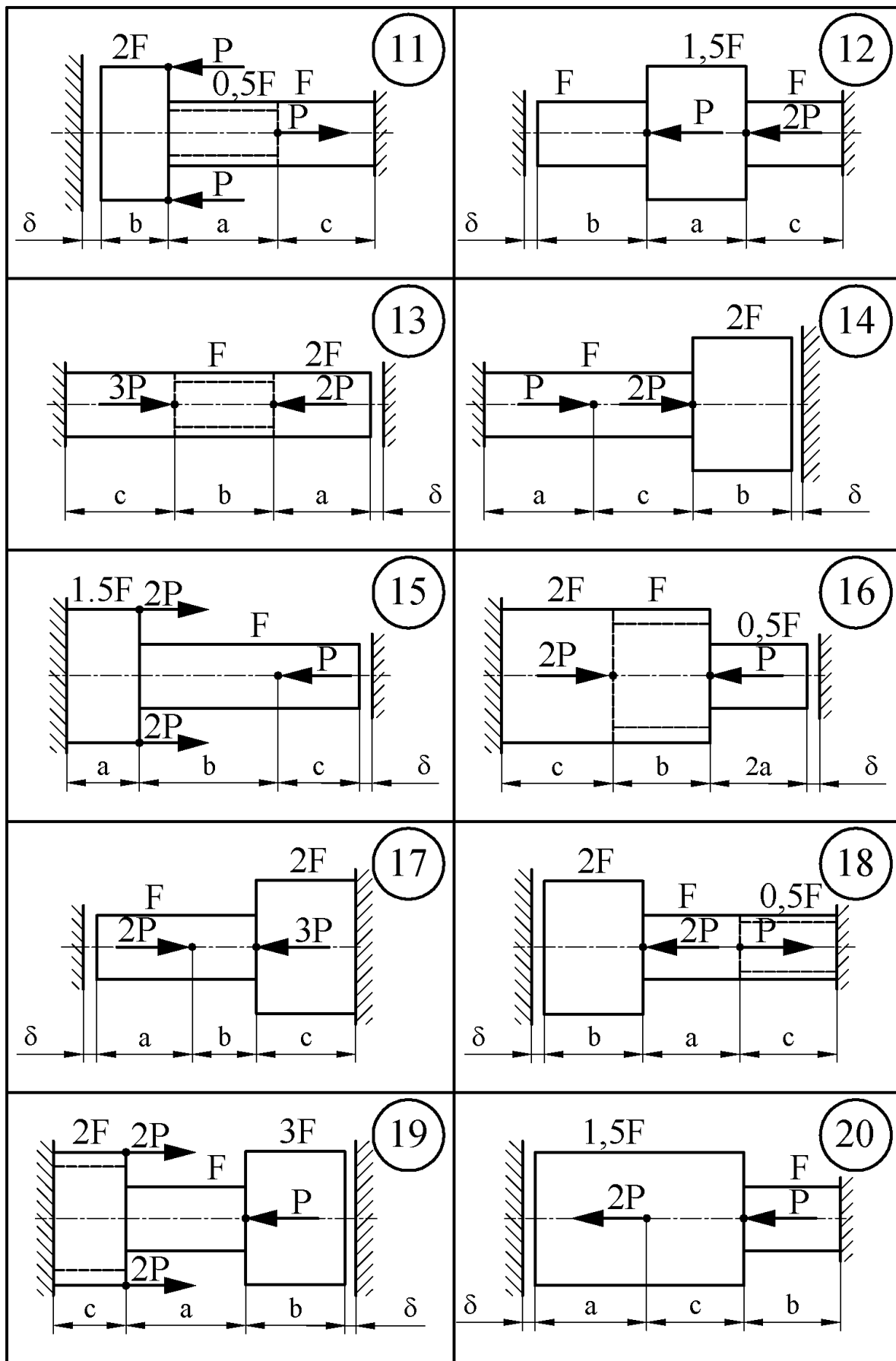


Рисунок 1.4, аркуш 2

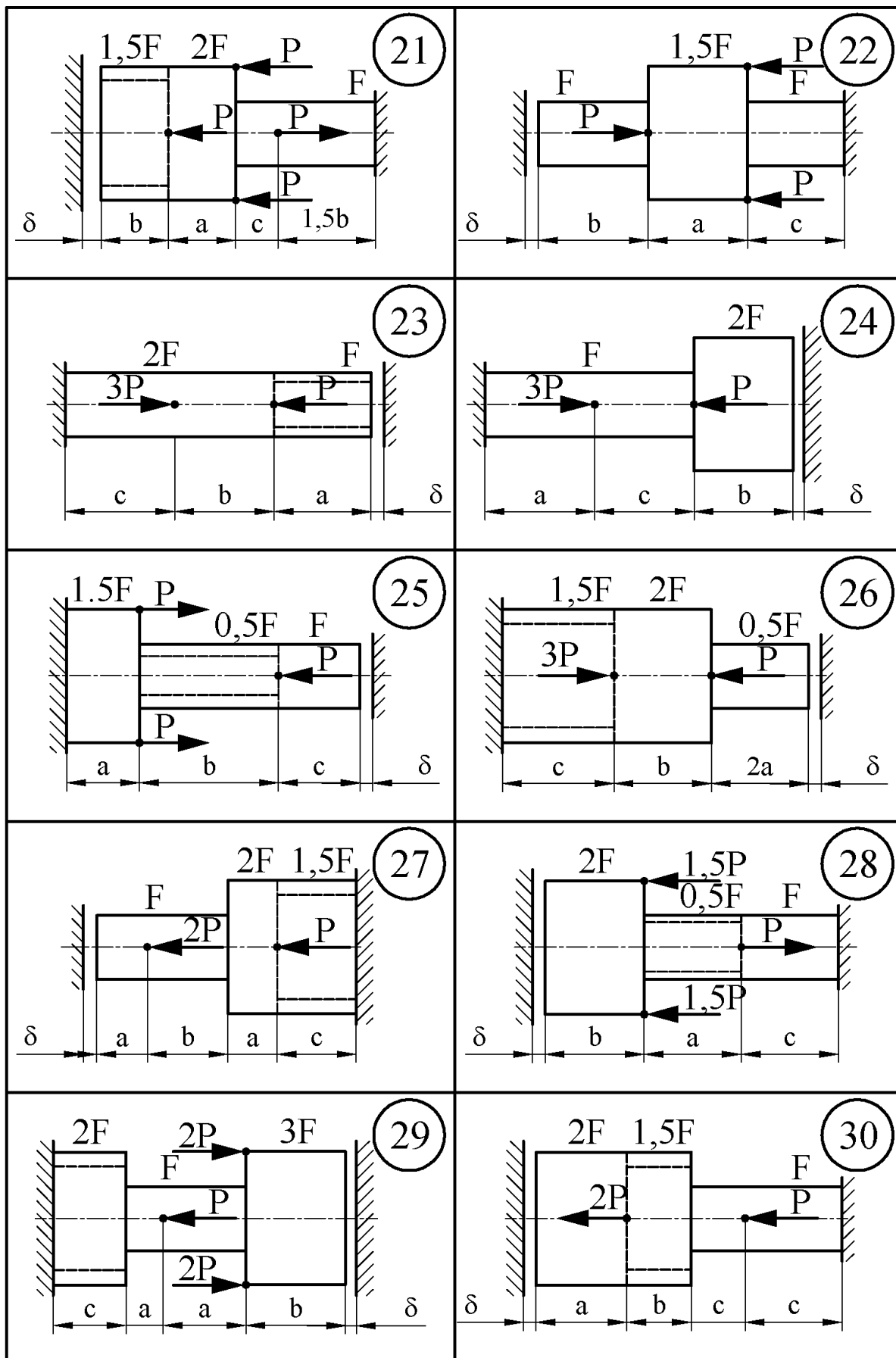


Рисунок 1.4, аркуш 3

Фізичний аспект задачі. Оскільки зусилля N змінюються за довжиною стрижня, то для наочності рекомендується зобразити епюру N у загальному вигляді (через задані зусилля і реакції опор), використовуючи для цього метод перерізів.

Поздовжня сила дорівнює сумі проекцій на вісь стрижня всіх зовнішніх сил, які діють з одного боку від перерізу. Якщо сила діє від перерізу, вважати зусилля в ньому додатним. Підставити зусилля на кожній ділянці стрижня з епюри N з урахуванням знака, довжини відповідних ділянок, площі їх поперечних перерізів. Знайти деформації стрижнів $\Delta\ell_N$ від зусиль за формулою (1.4). Зусилля N_i підставити з урахуванням знака.

Оскільки матеріал усіх ділянок однаковий, то деформацію стрижня від нагрівання можна знайти із залежності:

$$\Delta\ell_t = \alpha\ell\Delta t,$$

де ℓ – довжина всього стрижня;

α – температурний коефіцієнт осьового подовження, для сталі $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$;

Δt – температура нагрівання.

Таким чином, умова сумісності деформацій (1.6) матиме вигляд:

$$\Delta\ell = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \ell_i}{EF_i} + \alpha\ell\Delta t = \delta. \quad (1.7)$$

Синтез. Розв'язуючи сумісно статичні, геометричні та фізичні рівняння, знаходимо невідомі зусилля.

З Одержаний розв'язок необхідно аналізувати. Реакція з боку зазору не може бути спрямована від стрижня (заздалегідь напрямок реакцій довільний), оскільки сили P задані таким чином, що їх рівнодіюча R спрямована на опору з зазором (рис. 1.5)

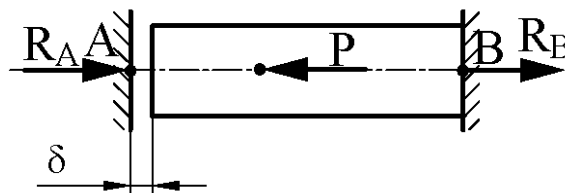


Рисунок 1.5 – Статично не визначуваний стрижень

Отже, реакція від сили в опорі A спрямована на стрижень (див. рис. 1.5, опора A), а в опорі B – від нього (див. рис. 1.5).

Після того, як знайшли реакції опор, необхідно побудувати епюру подовжніх сил N .

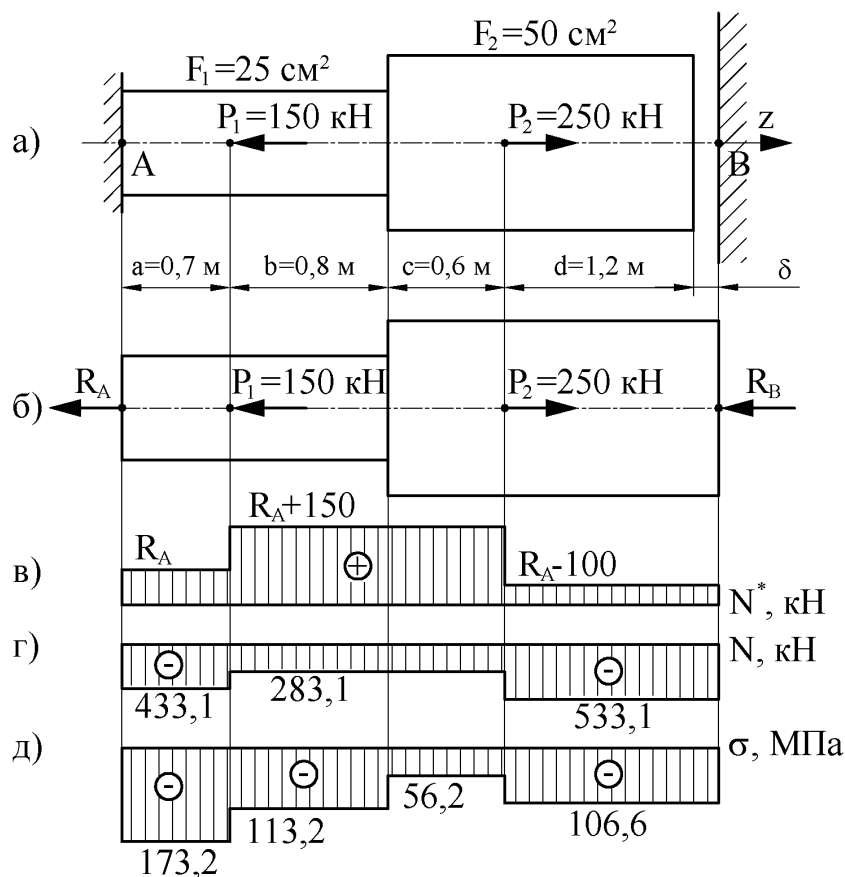
4 Знайти напруження на кожній ділянці:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}. \quad (1.8)$$

5 Побудувати епюру напружень. При оформленні задачі рекомендується рисунок стрижня, попередню і остаточну епюру N та епюру напружень малювати на одному аркуші одну під другою.

1.2.2 Приклад розв'язання задачі 1.2

Для сталевого стрижня (рис. 1.6) побудувати епюри поздовжніх зусиль N і нормальних напружень σ , якщо зазор $\delta = 0,4$ см був до зміни температури $\Delta t = 55^\circ\text{C}$ і прикладення зусиль.



a – задана схема; b – схема сил, які діють на стрижень; $в$ – епюра поздовжніх сил у загальному вигляді; $г$ – епюра поздовжніх сил в числовому значенні; $д$ – епюра нормальних напружень

Рисунок 1.6 – Ступінчатий статично невизначуваний стрижень

Розв’язання. На стрижень AB діють сили вздовж осі. Реакції в жорстких закріпленнях після закриття зазору (тобто реакції R_A і R_B) теж виникають вздовж цієї ж осі.

Таким чином, маємо систему сил з двома невідомими реакціями в закріпленнях R_A і R_B , які діють вздовж однієї лінії і для яких можливо скласти тільки одне рівняння – суму проекцій сил на цю вісь.

Тобто задача є один раз статично невизначуваною. Її розв’язання можливе із застосуванням трьох аспектів задачі – статичного, геометричного і фізичного.

Статичний аспект задачі. Відкидаємо зв’язки (див. рис. 1.6, б), їх вплив заміняємо реакціями R_A і R_B і складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum P_z &= 0, \\ -R_A - P_1 + P_2 - R_B &= 0, \\ -R_A - 150 + 250 - R_B &= 0, \\ R_A + R_B &= 100.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Геометричний аспект задачі. У результаті дії сил та температури зазор закрийється і повне подовження стрижня буде дорівнювати δ , тобто

$$\Delta\ell = \delta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}.\tag{1.10}$$

Фізичний аспект задачі. За допомогою закону Гука (1.4) деформації виражаємо через зусилля (див. рис. 1.6, в):

$$\begin{aligned}\Delta\ell &= \frac{R_A \cdot 10^{-3} \cdot 0,7}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \\ &+ \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150 - 250) \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} + \\ &+ 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 55 \cdot (0,7 + 0,8 + 0,6 + 1,2).\end{aligned}\tag{1.11}$$

Тепер сумісно розв’язуємо рівняння (1.9)-(1.11), які одержані з розгляду трьох аспектів задачі.

Прирівнюємо вирази (1.10) і (1.11):

$$\begin{aligned}\Delta\ell &= \frac{R_A \cdot 10^{-3} \cdot 0,7}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \\ &+ \frac{(R_A + 150) \cdot 10^{-3} \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} + \frac{(R_A + 150 - 250) \cdot 10^{-3} \cdot 1,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} + \\ &+ 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 55 \cdot (0,7 + 0,8 + 0,6 + 1,2) = 0,4 \cdot 10^{-3}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

звідки $R_A = -433,1 \text{ кН}$.

З рівняння (1.9) випливає:

$$R_B = 100 - R_A = 100 + 433,1 = 533,1 \text{ (кН)}.$$

Реакцію R_B одержали додатною, тобто, як і передбачали, зазор закриється і запрацює праве жорстке закріплення.

Знайшовши реакції в закріпленнях, будуємо епюру поздовжніх сил в числових значеннях (див. рис. 1.6, г):

$$\begin{aligned} N_1 &= -R_A = -433,1 \text{ (кН)}, \\ N_2 &= N_3 = -R_A + P_1 = -433,1 + 150 = -283,1 \text{ (кН)}, \\ N_4 &= -R_A + P_1 - P_2 = -433,1 + 150 - 250 = -533,1 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

Напруження на кожній ділянці знаходимо за формулою (1.8):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N_1}{F_1} = \frac{-433,1 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = -173,2 \text{ (МПа)}, \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{F_2} = \frac{-283,1 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = -113,2 \text{ (МПа)}, \\ \sigma_3 &= \frac{N_3}{F_3} = \frac{-283,1 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-4}} = -56,6 \text{ (МПа)}, \\ \sigma_4 &= \frac{N_4}{F_4} = \frac{-533,1 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-4}} = -106,6 \text{ (МПа)}. \end{aligned}$$

За знайденими значеннями будуємо (див. рис. 6, д) епюру нормальних напружень σ .

1.2.3 Приклад розв'язання задачі 1.2 в системі Mathcad

Для визначення невідомих зусиль R_A та R_B використовуємо рівняння, одержані зі статичного, геометричного та фізичного аспектів задачі:

$$\begin{aligned} -R_A - P_1 + P_2 - R_B &= 0, \\ \frac{R_A \cdot a}{E \cdot F_1} + \frac{(R_A + P_1) \cdot b}{E \cdot F_1} + \frac{(R_A + P_1) \cdot c}{E \cdot F_2} + \frac{(R_A + P_1 - P_2) \cdot d}{E \cdot F_2} + \alpha \ell \Delta t - \delta &= 0. \end{aligned}$$

Розрахунок проведемо за допомогою блока GIVEN...FIND.

Вхідні дані:

$$\begin{aligned} a &:= 0.7 & b &:= 0.8 & c &:= 0.6 & d &:= 1.2 \\ P1 &:= 150 & P2 &:= 250 & F1 &:= 25 & F2 &:= 50 \\ \delta &:= 0.4 & \Delta t &:= 55 & \alpha &:= 1.25 \cdot 10^{-5} & E &:= 2 \cdot 10^5 \\ l &:= a + b + c + d = 3.3 \end{aligned}$$

Статичний аспект задачі: $\Sigma P_z := -Ra - P1 + P2 - Rb = 0$

Геометричний аспект задачі: $\Delta l := \delta \cdot 10^{-3}$

Фізичний аспект задачі:

$$\Delta l := \left[\frac{Ra \cdot 10^{-3} \cdot a}{E \cdot F1 \cdot 10^{-4}} + \frac{(Ra + P1) \cdot 10^{-3} \cdot b}{E \cdot F1 \cdot 10^{-4}} + \frac{(Ra + P1) \cdot 10^{-3} \cdot c}{E \cdot F2 \cdot 10^{-4}} + \frac{(Ra + P1 - P2) \cdot 10^{-3} \cdot d}{E \cdot F2 \cdot 10^{-4}} + \alpha \cdot \Delta t \cdot (a + b + c + d) \right] \dots$$

Розв'язання рівнянь, одержаних з розгляду трьох аспектів задачі:

$$Ra := 0 \quad Rb := 0$$

Given

$$-Ra - P1 + P2 - Rb = 0$$

$$\left[\frac{Ra \cdot 10^{-3} \cdot a}{E \cdot F1 \cdot 10^{-4}} + \frac{(Ra + P1) \cdot 10^{-3} \cdot b}{E \cdot F1 \cdot 10^{-4}} + \frac{(Ra + P1) \cdot 10^{-3} \cdot c}{E \cdot F2 \cdot 10^{-4}} + \frac{(Ra + P1 - P2) \cdot 10^{-3} \cdot d}{E \cdot F2 \cdot 10^{-4}} + \alpha \cdot \Delta t \cdot (a + b + c + d) + \delta \cdot 10^{-3} \right] \dots = 0$$

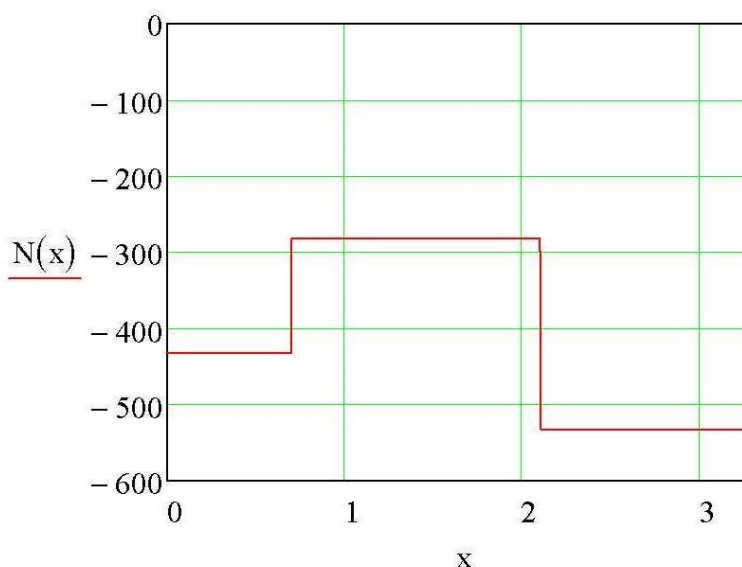
$$\begin{pmatrix} Ra \\ Rb \end{pmatrix} := \text{Find}(Ra, Rb) \quad Ra = -433.07 \quad Rb = 533.07$$

Рівняння поздовжніх сил на кожній ділянці:

$$N(x) := \begin{cases} (Ra) & \text{if } 0 \leq x < a \\ (Ra + P1) & \text{if } a \leq x < (a + b + c) \\ (Ra + P1 - P2) & \text{if } (a + b + c) \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Епюра поздовжніх сил:

$$x := 0, 0.005 \dots 1$$



Значення поздовжніх сил у характерних перерізах:

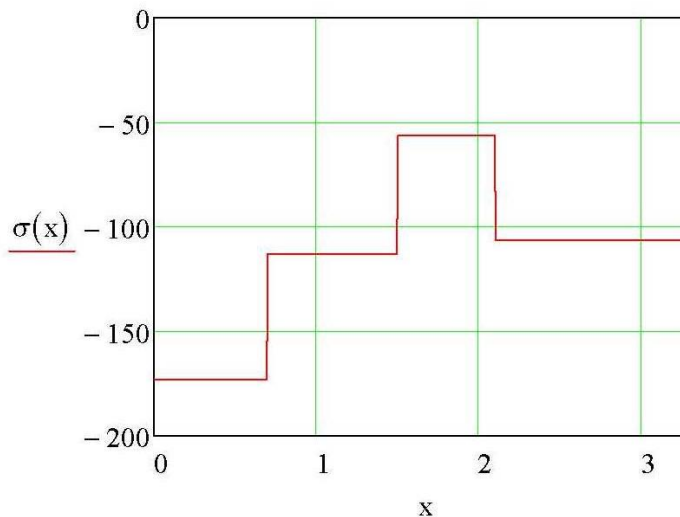
$$N(0) = -433.07 \quad N(a + b) = -283.07 \quad N(1) = -533.07$$

$$N(a) = -283.07 \quad N(a + b + c) = -533.07$$

Рівняння нормальних напружень на кожній ділянці:

$$\sigma(x) := \begin{cases} \left[\frac{Ra \cdot 10^{-3}}{F1 \cdot 10^{-4}} \right] & \text{if } 0 \leq x < a \\ \left[\frac{(Ra + P1) \cdot 10^{-3}}{F1 \cdot 10^{-4}} \right] & \text{if } a \leq x < (a + b) \\ \left[\frac{(Ra + P1) \cdot 10^{-3}}{F2 \cdot 10^{-4}} \right] & \text{if } (a + b) \leq x < (a + b + c) \\ \left[\frac{(Ra + P1 - P2) \cdot 10^{-3}}{F2 \cdot 10^{-4}} \right] & \text{if } (a + b + c) \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Епюра поздовжних сил:



Значення нормальних напружень у характерних перерізах:

$$\sigma(0) = -173.23 \quad \sigma(a+b) = -56.61 \quad \sigma(1) = -106.61$$

$$\sigma(a) = -113.23 \quad \sigma(a+b+c) = -106.61$$

1.3 Статично невизначувана стрижнева система

Абсолютно жорстке тіло закріплено за допомогою системи сталевих стрижнів однакового поперечного перерізу. Приймаючи $[\sigma] = 160$ МПа, визначити діаметр поперечного перерізу стрижнів.

Вихідні дані вибрати з таблиць 1.5, 1.6 і рисунку 1.7.

1.3.1 Методичні вказівки до виконання задачі 1.3

Діаметр поперечного перерізу стрижнів 1 та 2 можна знайти з умови міцності. Стрижні системи, які прикріплені до жорсткого тіла шарнірно, працюють на розтягання або на стискання, для яких умова міцності записується згідно з виразом (1.1). Діаметр стрижнів визначається за формулою (1.3).

Для розкриття статичної невизначуваності необхідно розглянути три аспекти задачі: статичний, геометричний та фізичний.

Статичний аспект задачі. Складаємо рівняння рівноваги, використовуючи ті з них, які не включають реакції опор, в розрахунку яких немає необхідності. Невідомі зусилля бажано спрямовувати заздалегідь від вузлів прикріплення стрижнів, вважаючи їх спочатку розтягненими.

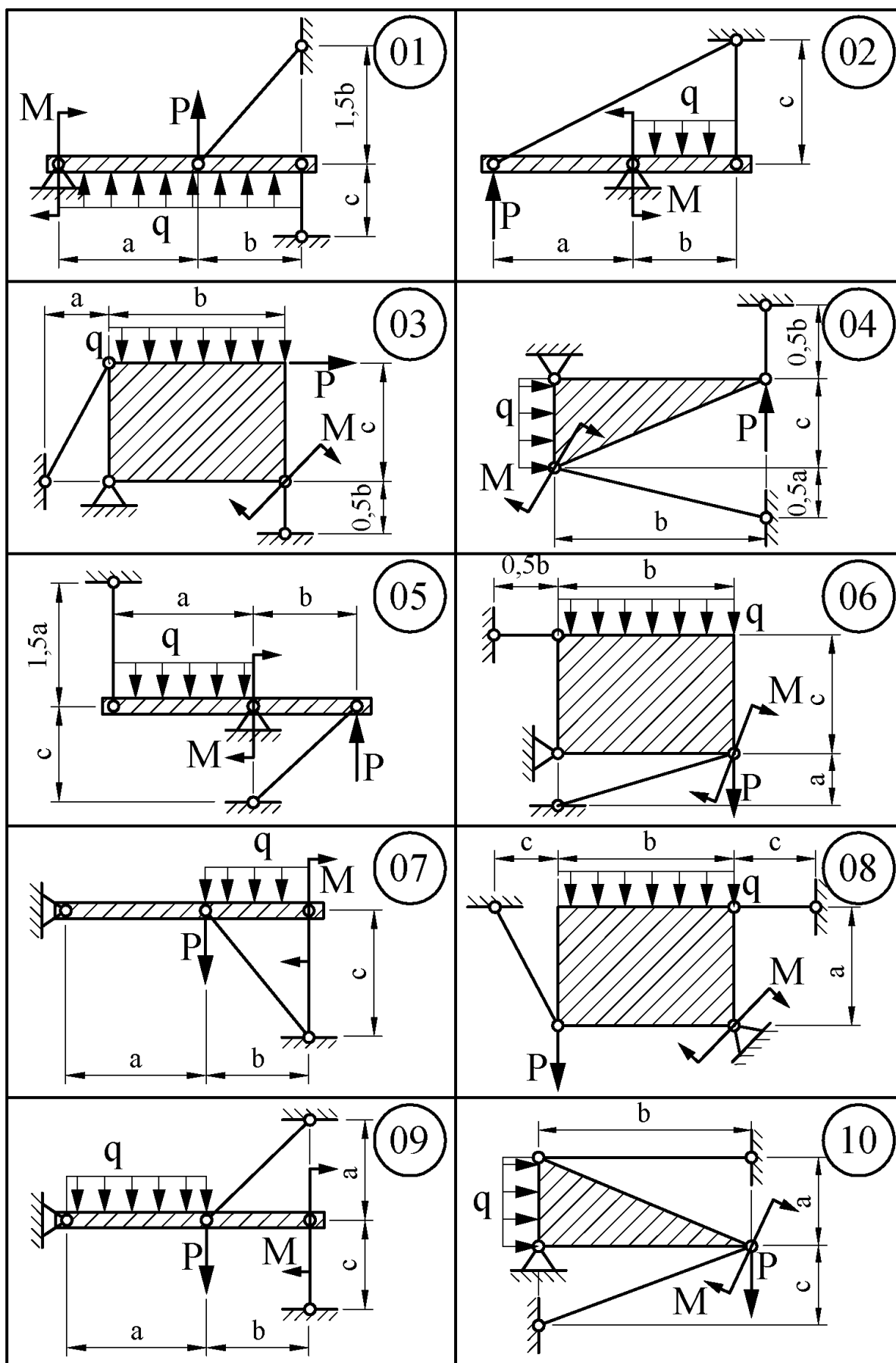


Рисунок 1.7

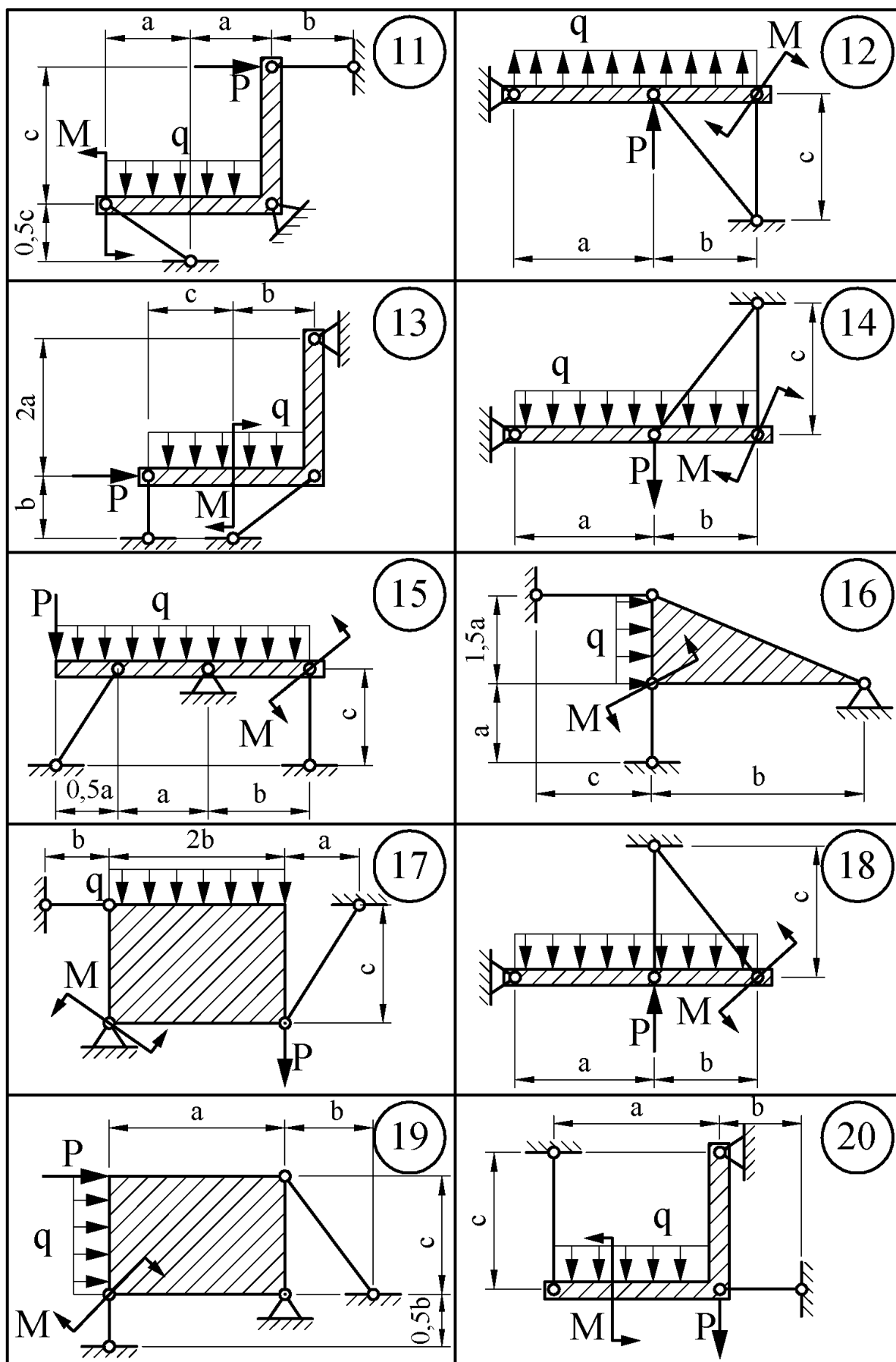


Рисунок 1.7, аркуш 2

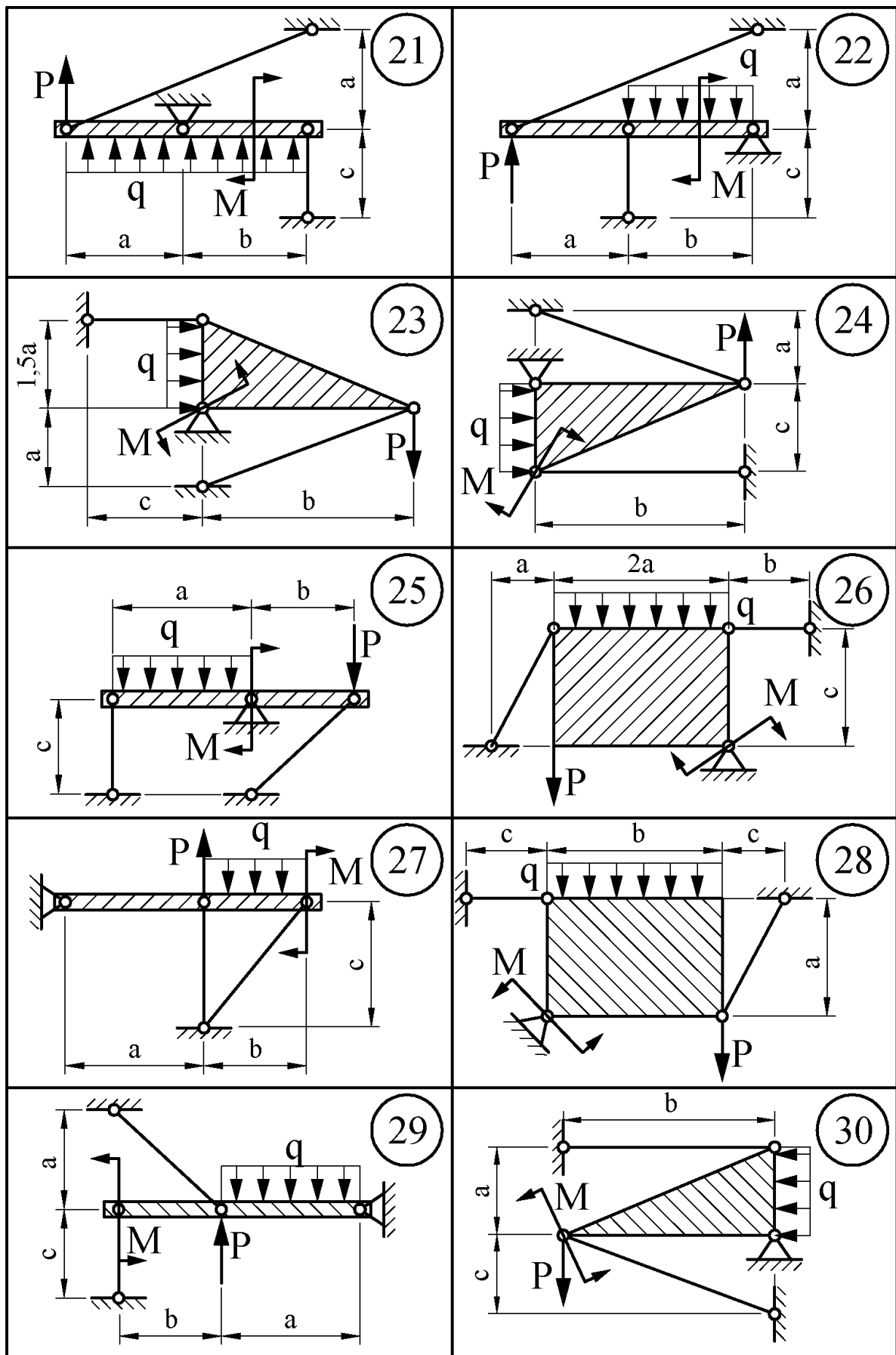


Рисунок 1.7, аркуш 3

Таблиця 1.5 – Вихідні дані до задачі 1.3

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M , кНм	400	200	300	100	400	300	300	100	300	400
P , кН	100	300	150	250	200	100	250	150	200	150
q , кН/м	300	150	100	200	150	250	100	200	250	150

Таблиця 1.6 – Вихідні дані до задачі 1.3

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	0,6	0,5	0,7	0,9	0,8	1,0	0,4	0,7	0,8	0,6
b , м	1,0	0,8	0,5	0,7	0,4	1,3	0,8	0,9	0,7	0,8
c , м	0,5	0,6	0,9	0,8	0,7	1,0	0,5	0,4	0,4	1,2

Геометричний аспект задачі. Встановити взаємозв'язок між деформаціями окремих елементів заданої системи.

Для цього необхідно зобразити положення системи до і після навантаження, задаючи їй можливі переміщення, тобто ті переміщення, які дозволяють мати системі зв'язки.

Якщо система має шарнірно-нерухому опору, то під дією будь-яких факторів система буде повертатися, а точки прикріплення стрижнів при цьому будуть переміщуватися (при умові малих деформацій) перпендикулярно до їх радіусів повороту (рис. 1.8).

Очевидно, переміщення Δ_i при цьому співвідносяться як радіуси повороту, тобто:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{r_1}{r_2}; \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{r_2}{r_3} \quad (1.13)$$

Фізичний аспект задачі. За законом Гука необхідно замінити деформацію через зусилля згідно з формулою (1.4). Спрямовуємо заздалегідь зусилля від вузлів прикріплення. При цьому в усіх стрижнях зусилля N_i будуть розтягуючі, тобто додатні. Додатнім зусиллям повинно відповідати подовження стрижнів. Якщо якийсь стрижень при навантаженні укорочується, то його деформація буде від'ємною, тобто входить в рівняння сумісності з мінусом.

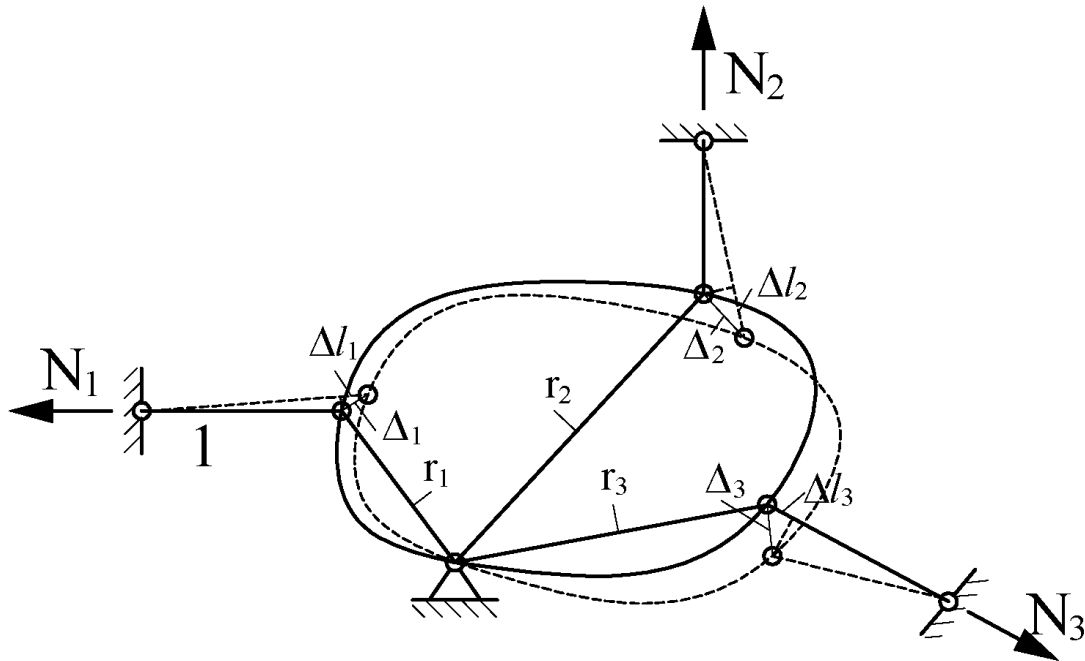


Рисунок 1.8 – Поворот тіла навколо шарнірно-нерухомої опори

Синтез. Розв'язати сумісно рівняння рівноваги і рівняння сумісності деформацій, внаслідок чого знайти невідомі зусилля в стрижнях.

Знаючи зусилля і матеріал (допустимі напруження) з умови міцності при розтяганні-стисканні, знайти площі поперечних перерізів стрижнів за виразом (1.2).

Згідно з умовою стрижні мають круглий поперечний переріз. Отже, з виразу (1.3) знаходимо діаметри стрижнів.

1.3.2 Приклад розв'язання задачі 1.3

Абсолютно жорстке тіло закріплено за допомогою системи сталевих стрижнів однакового поперечного перерізу (рис. 1.9). Приймаючи $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, визначити діаметр поперечного перерізу стрижнів.

Розв'язання. Визначаємо ступінь статичної невизначуваності задачі, для чого звільняємо балку від зв'язків та заміняємо їх реакціями (рис. 1.10).

Реакції в нерухомому шарнірі A – R_A, H_A , зусилля в стрижнях – N_1, N_2 . При рішенні задачі припускаємо, що стрижні розтягнуті, тобто зусилля в стрижнях спрямовані до точок їх підвісу.

Ступінь статичної невизначуваності визначається як різниця між числом невідомих і числом рівнянь рівноваги системи сил, що діють на конструкцію.

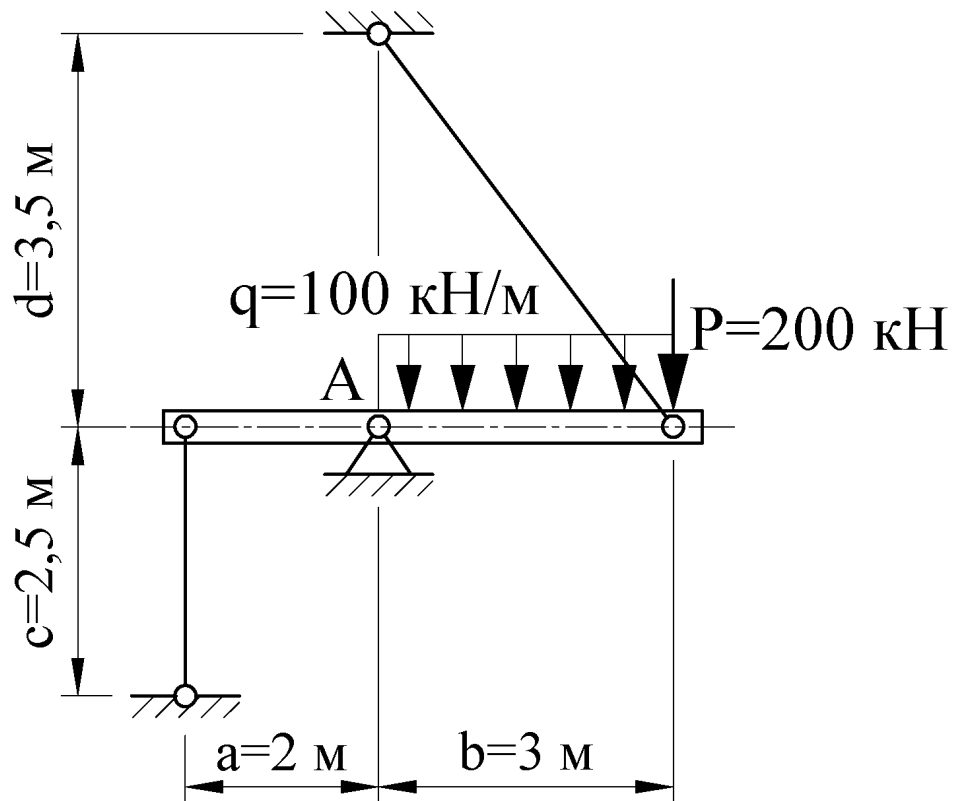


Рисунок 1.9 – Статично невизначувана стрижнева система

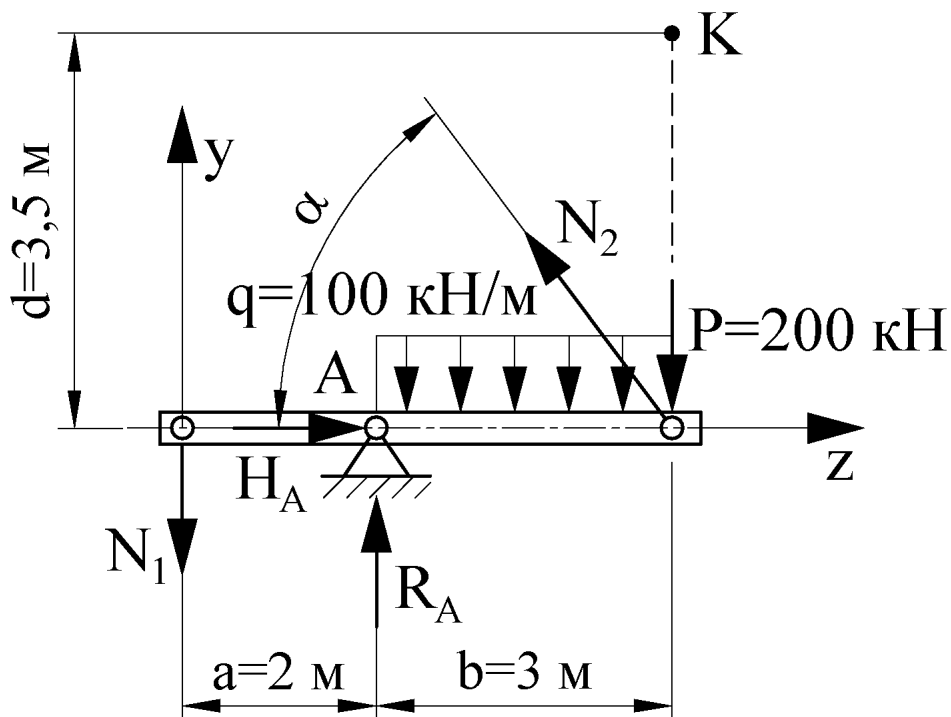


Рисунок 1.10 – Статично невизначувана стрижнева система з реакціями замість зв'язків

Невідомими в завданні є R_A, H_A, N_1, N_2 , а система прикладених до балки сил – плоска довільна, котра має три умови рівноваги. Таким чином, задача є один раз статично невизначуваною.

Довжина другого стрижня дорівнює:

$$\ell_2 = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 3,5^2} = 4,61 \text{ (м)}.$$

Визначимо синус і косинус кута α :

$$\sin \alpha = \frac{3,5}{\ell_2} = \frac{3,5}{4,61} = 0,759, \quad \cos \alpha = \frac{3}{\ell_2} = \frac{3}{4,61} = 0,651.$$

Статичний аспект задачі. Складаємо таке рівняння статички, куди входять лише зусилля N_1 і N_2 . Таким рівнянням є сума моментів усіх сил відносно точки А.

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0, \\ -P \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + N_1 \cdot 2 + N_2 \sin \alpha \cdot 3 &= 0, \\ -200 \cdot 3 - 100 \cdot 3 \cdot 1,5 + N_1 \cdot 2 + N_2 \sin \alpha \cdot 3 &= 0, \\ 2N_1 + 2,277N_2 &= 1050. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Геометричний аспект задачі. Показуємо систему в деформованому стані (рис. 1.11). Балка ВС абсолютно жорстка, вона не деформується, а тільки повертається навколо нерухомої точки А. Показуємо подовження стрижнів.

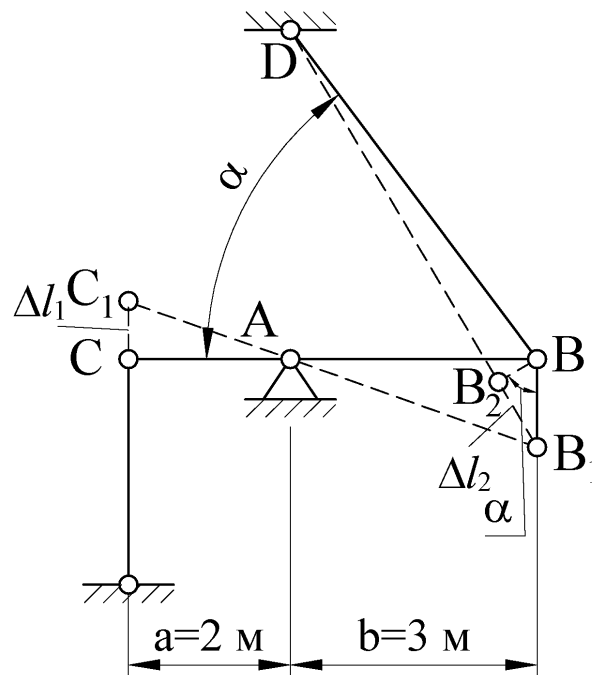


Рисунок 1.11 – Деформована схема стрижневої системи

Подовження першого стрижня $\Delta\ell_1$ є відрізок CC_1 , подовження другого стрижня $\Delta\ell_2$ є відрізок B_1B_2 . Точка B_2 знаходиться на перетині прямої DB_1 і перпендикуляра з точки B до прямої DB_1 . Встановлюємо зв'язок між $\Delta\ell_1$ і $\Delta\ell_2$. Трикутники ACC_1 та ABB_1 подібні, звідки витікає

$$\begin{aligned}\frac{CC_1}{AC} &= \frac{BB_1}{AB}, \quad CC_1 = \Delta\ell_1, \quad BB_1 = \frac{B_1B_2}{\sin \alpha} = \frac{\Delta\ell_2}{\sin \alpha}, \\ \frac{\Delta\ell_1}{2} &= \frac{\Delta\ell_2}{3\sin \alpha}, \quad \frac{\Delta\ell_1}{2} = \frac{\Delta\ell_2}{3 \cdot 0,759}, \\ \Delta\ell_1 &= 0,878\Delta\ell_2.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Фізичний аспект задачі. За допомогою закону Гука (1.4) деформації виражаємо через зусилля:

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell_1}{EF_1} = \frac{N_1 \cdot 2,5}{EF_1}; \quad \Delta\ell_2 = \frac{N_2\ell_2}{EF_2} = \frac{N_2 \cdot 4,61}{EF_2}.\tag{1.16}$$

При цьому необхідно мати на увазі, що при записі закону Гука необхідно брати знак «плюс», якщо напрямок деформації співпадає з напрямком зусилля, і «мінус», якщо не співпадає.

Тепер сумісно розв'язуємо рівняння, які одержані з розгляду трьох аспектів задачі. У вираз (1.14) підставляємо $\Delta\ell_1$ і $\Delta\ell_2$ із залежностей (1.16):

$$\frac{N_1 \cdot 2,5}{EF_1} = 0,878 \cdot \frac{N_2 \cdot 4,61}{EF_2}.$$

За умовою задачі $F_1 = F_2 = F$, звідки

$$\begin{aligned}\frac{N_1 \cdot 2,5}{EF} &= 0,878 \cdot \frac{N_2 \cdot 4,61}{EF}, \\ N_1 &= \frac{0,878 \cdot 4,61}{2,5} \cdot N_2, \\ N_1 &= 1,619N_2.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Завдяки розгляду геометричного і фізичного аспектів задачі одержали залежність між зусиллями N_1 і N_2 (1.17), яку підставляємо в рівняння (1.13).

$$\begin{aligned}2 \cdot 1,619N_2 + 2,277N_2 &= 1050; \\ N_2 &= 190,4 \text{ (кН)}\end{aligned}$$

Знайдене зусилля N_2 підставляємо в залежність (1.16) і знаходимо N_1 :

$$N_1 = 1,619 \cdot 190,4 = 308,2 \text{ (кН)}.$$

Знаходимо реакції у точці A .

Зусилля H_A знаходимо із суми проекцій на горизонтальну вісь:

$$\begin{aligned}\sum P_z &= 0, \\ H_A - N_2 \cos \alpha &= 0, \\ H_A = N_2 \cos \alpha &= 190,4 \cdot 0,651 = 124,0 \text{ (кН)}.\end{aligned}$$

Зусилля R_A знаходимо із суми проекцій на вертикальну вісь:

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0, \\ -P - q \cdot 3 - N_1 + N_2 \cdot \sin \alpha + R_A &= 0, \\ R_A = P + q \cdot 3 + N_1 - N_2 \cdot \sin \alpha &= 200 + 100 \cdot 3 + 308,2 - 190,4 \cdot 0,759 = 663,7 \text{ (кН)}.\end{aligned}$$

Тепер виконаємо перевірку, чи вірно ми знайшли зусилля N_1 , N_2 , H_A і R_A . Для перевірки необхідно брати тільки ті рівняння, які ми не використовували при знаходженні зусиль.

$$\begin{aligned}\sum M_K &= 0, \\ q \cdot 3 \cdot 1,5 + N_1 \cdot 5 - N_2 \cos \alpha \cdot 3,5 - R_A \cdot 3 + H_A \cdot 3,5 &= 0, \\ 100 \cdot 3 \cdot 1,5 + 308,2 \cdot 5 - 190,4 \cdot 0,651 \cdot 3,5 - 663,7 \cdot 3 + 124,0 \cdot 3,5 &= 0, \\ 2425 - 2424,9 &\approx 0.\end{aligned}$$

Похибка складає $\frac{2425 - 2424,9}{2424,9} \cdot 100\% = 0,004\%$, що є допустимим.

Тепер за допомогою формули (1.2) визначаємо площу поперечного перерізу стрижнів. Розрахунок ведемо по більш навантаженому стрижню.

$$\begin{aligned}F &\geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{308,2 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 19,26 \text{ (см}^2\text{)}, \\ d &= \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 19,26}{3,14}} = 4,95 \text{ (см)}.\end{aligned}$$

Приймаємо остаточно з рекомендованого ряду $d = 50$ мм.

1.3.3 Приклад розв'язання задачі 1.3 в системі Mathcad

Для визначення невідомих зусиль N_1 та N_2 використовуємо рівняння, одержані зі статичного, геометричного та фізичного аспектів задачі:

$$-P \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + N_1 \cdot a + N_2 \sin \alpha \cdot b = 0,$$

$$N_1 \ell_1 - \frac{a}{b \cdot \sin \alpha} \cdot N_2 \ell_2 = 0.$$

Розрахунок проведемо за допомогою блока GIVEN...FIND.

Для визначення опорних реакцій R_A та H_A складаємо два рівняння статики:

$$\sum P_z = 0, \quad H_A - N_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum P_y = 0, \quad -P - q \cdot b - N_1 + N_2 \cdot \sin \alpha + R_A = 0.$$

Розрахунок проведемо за допомогою блока GIVEN...FIND.

Для перевірки використовуємо наступне рівняння:

$$\sum M_K = q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + N_1 \cdot (a + b) - N_2 \cos \alpha \cdot d - R_A \cdot b + H_A \cdot d = 0.$$

Розрахунок проведемо за допомогою блока GIVEN...FIND.

Вхідні дані:

$$\begin{aligned} a &:= 2 & b &:= 3 & c &:= 2.5 & d &:= 3.5 \\ P &:= 200 & q &:= 100 \\ \sigma_{\text{доп}} &:= 160 \end{aligned}$$

Довжина стрижней та кут нахилу стрижня 2

$$\begin{aligned} l_1 &:= c = 2.5 \\ l_2 &:= \sqrt{b^2 + d^2} = 4.61 \\ \cos \alpha &:= \frac{b}{l_2} = 0.651 & \sin \alpha &:= \frac{d}{l_2} = 0.759 \end{aligned}$$

Статичний аспект задачі

$$\Sigma M_A := 0 \quad -P \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + N_1 \cdot a + N_2 \cdot \sin \alpha \cdot b = 0$$

Геометричний аспект задачі

$$\Delta l_1 := \frac{a}{b \cdot \sin \alpha} \cdot \Delta l_2$$

Фізичний аспект задачі

$$\Delta l_1 := \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} \quad \Delta l_2 := \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2}$$

$$N_1 \cdot l_1 \equiv \frac{a}{b \cdot \sin \alpha} \cdot N_2 \cdot l_2$$

Розв'язання рівнянь, одержаних з розгляду трьох аспектів задачі

$$N_1 := 0 \quad N_2 := 0$$

Given

$$-P \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + N_1 \cdot a + N_2 \cdot \sin \alpha \cdot b = 0$$

$$N_1 \cdot l_1 - \frac{a}{b \cdot \sin \alpha} \cdot N_2 \cdot l_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(N_1, N_2) \quad N_1 = 308.2 \quad N_2 = 190.36$$

Опорні реакції в точці А

$$R_A := 0 \quad H_A := 0$$

Given

$$H_A - N_2 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$-P - q \cdot b - N_1 + N_2 \cdot \sin \alpha + R_A = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_A \\ H_A \end{pmatrix} := \text{Find}(R_A, H_A) \quad R_A = 663.67 \quad H_A = 123.88$$

Перевірка

$$\Sigma M_K := q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + N_1 \cdot (a + b) - N_2 \cdot \cos \alpha \cdot d - R_A \cdot b + H_A \cdot d$$

$$\Sigma M_K = 4.32 \times 10^{-12}$$

Визначаємо більш навантажений стрижень

$$N_{\max} := \max(|N_1|, |N_2|) = 308.2$$

Розміри поперечних перерізів

$$F := \frac{|N_{\max}| \cdot 10^{-3}}{\sigma_{\text{доп}}} \cdot 10^4 = 19.26$$

$$d := \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi}} = 4.95$$

Приймаємо $d := 50$

2 ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ ДЛЯ БАЛОК ТА РАМ

2.1 Консольна балка (задача 2.1) та двоопорна балка (задача 2.2)

Для заданих балок (рис. 2.1 та 2.2) побудувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M .

Вихідні дані вибрати з таблиць 2.1 та 2.2 і рисунків 2.1 та 2.2.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані для задач 2.1–2.4

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M , кНм	12	14	16	18	20	18	16	14	12	16
P , кН	5	6	7	8	5	6	7	8	7	6
q , кН/м	3	2	4	5	4	3	2	5	3	4

Таблиця 2.2 – Вихідні дані для задач 2.1–2.4

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a , м	2,0	3,0	2,4	2,8	1,6	1,8	2,4	1,8	1,6	1,4
b , м	1,6	1,8	1,2	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2,6	2,4
c , м	1,2	1,4	1,6	1,8	1,5	2,2	2,4	2,6	2,5	2,7
d , м	1,5	1,3	1,4	2,0	2,4	2,8	3,0	1,5	3,4	4,0

2.1.1 Методичні вказівки до виконання задач 2.1 та 2.2

Балка – це стрижень, який працює на згинання.

Зовнішні навантаження, що діють на балку, зводяться до зосереджених сил P (кН або МН), пар сил M (кНм або МНм) і рівномірно чи нерівномірно розподілених по довжині балки навантажень з інтенсивністю q (кН/м або МН/м).

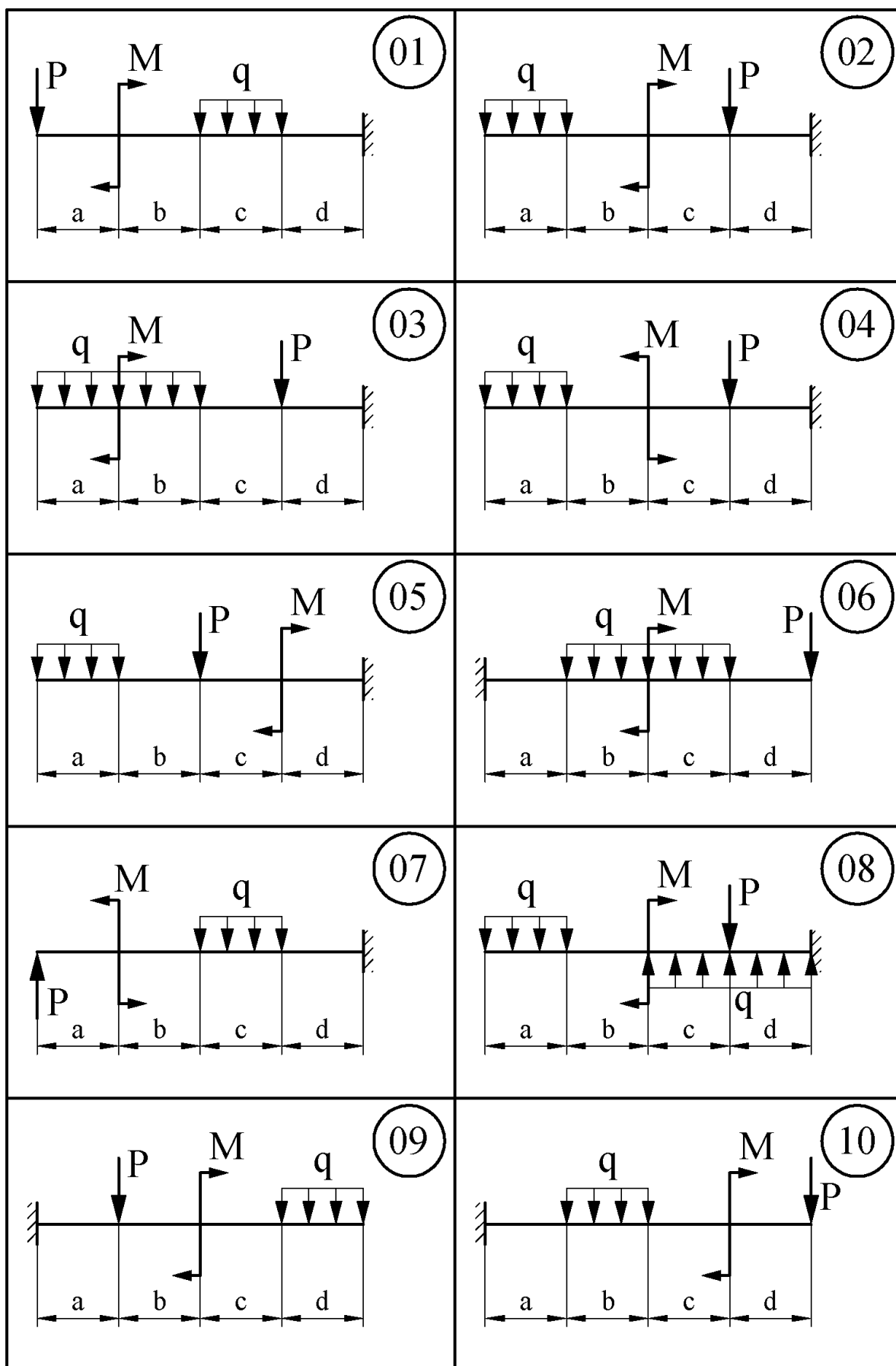


Рисунок 2.1

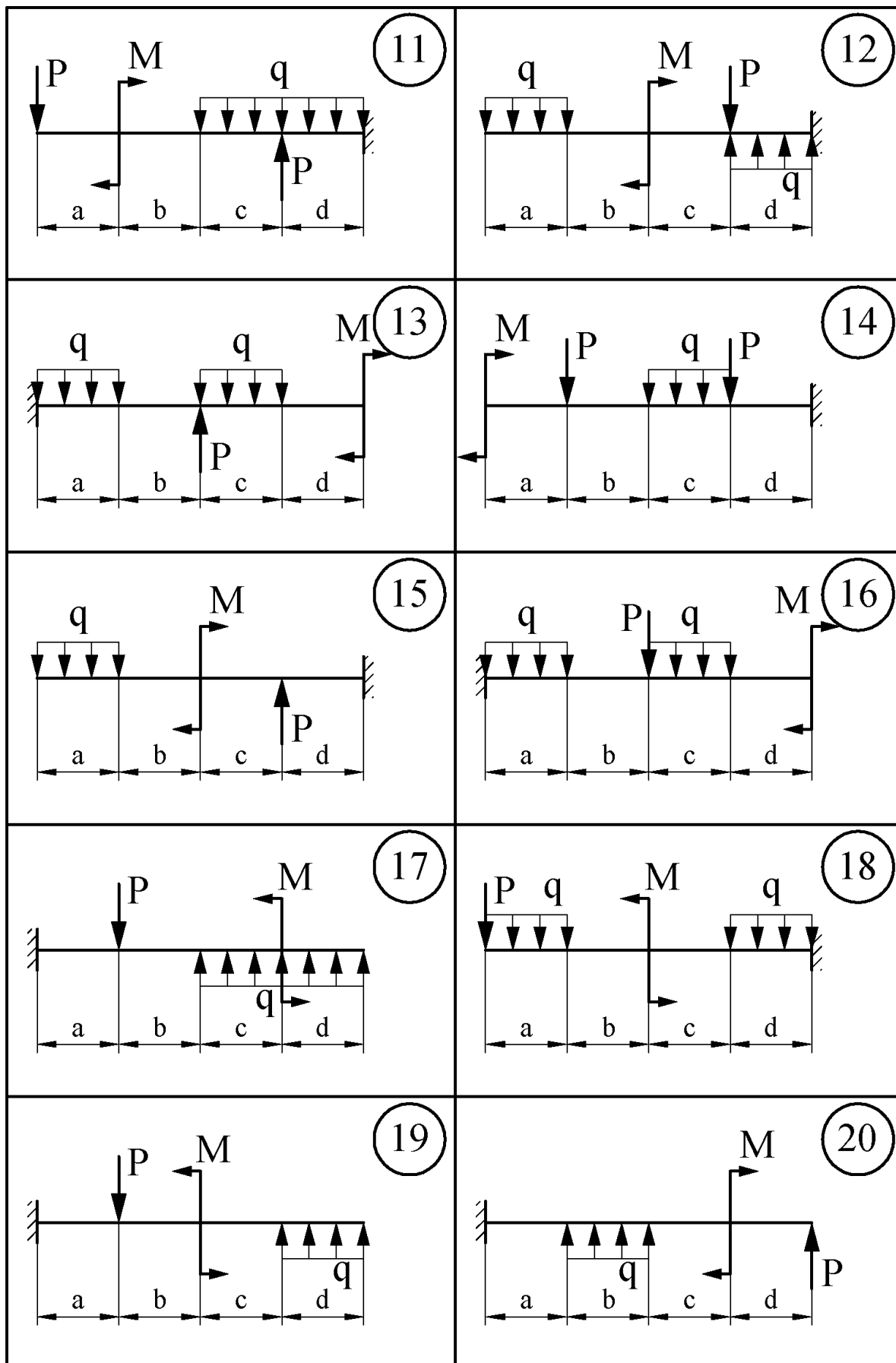


Рисунок 2.1, аркуш 2

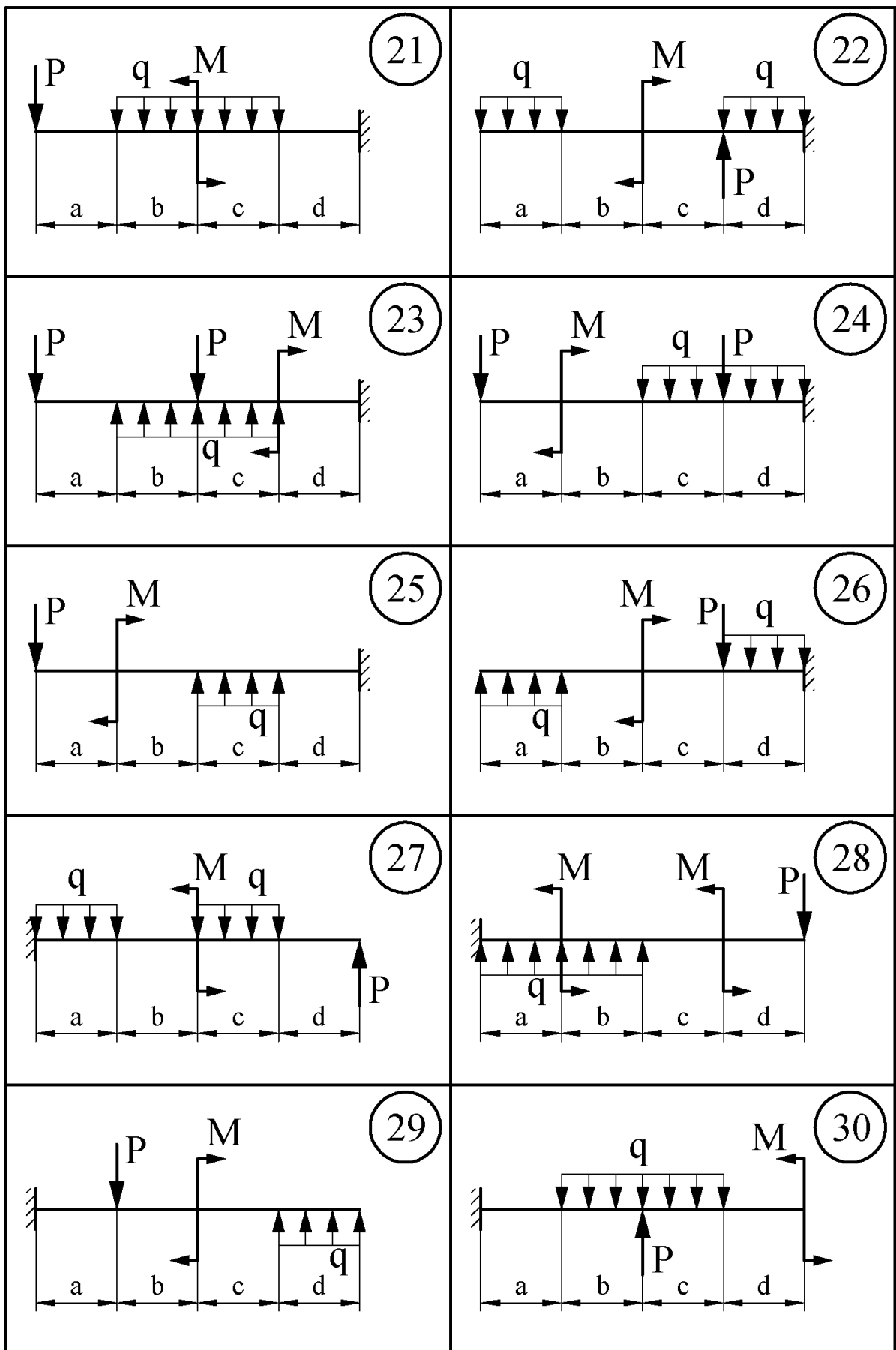


Рисунок 2.1, аркуш 3

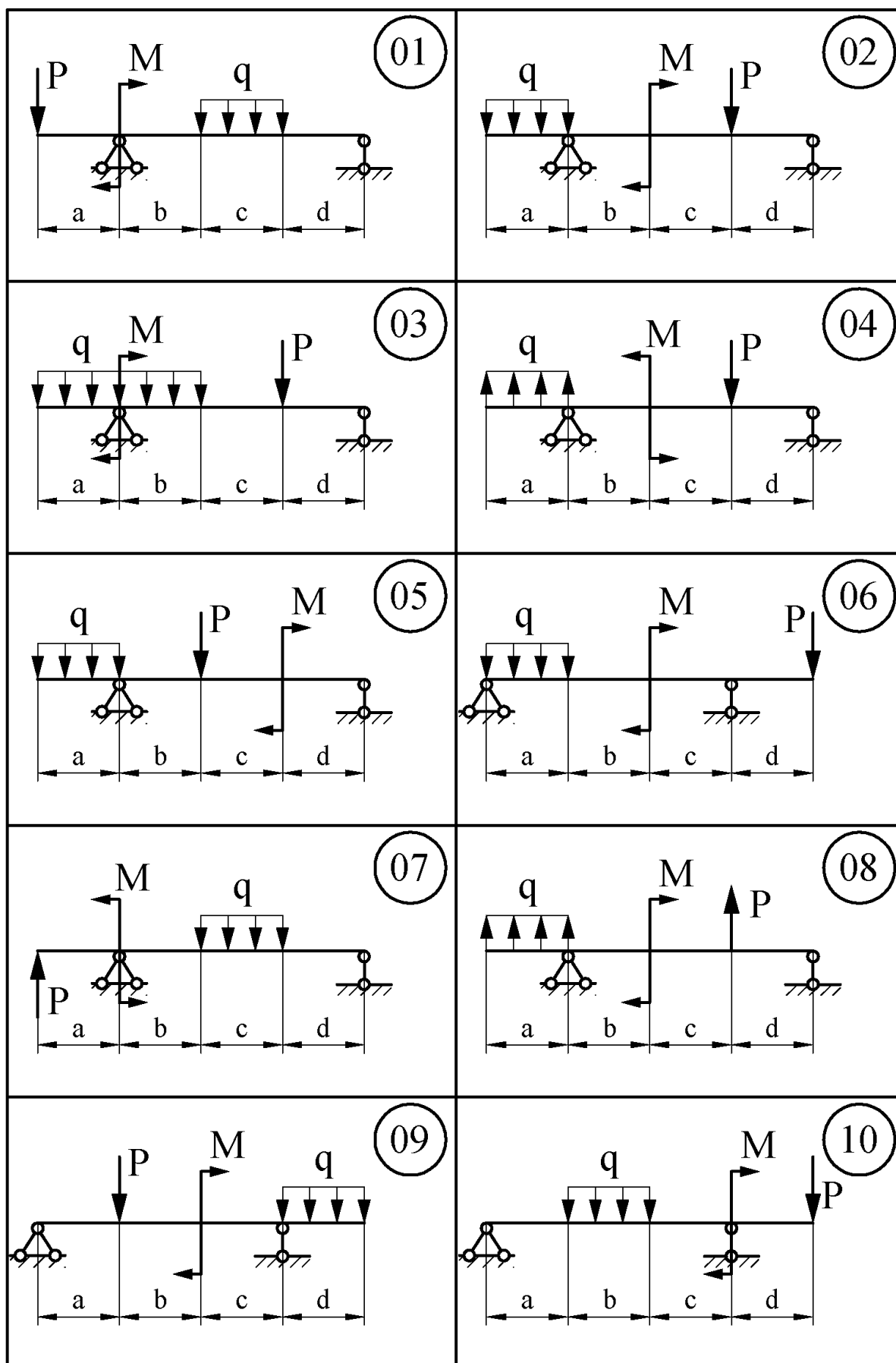


Рисунок 2.2

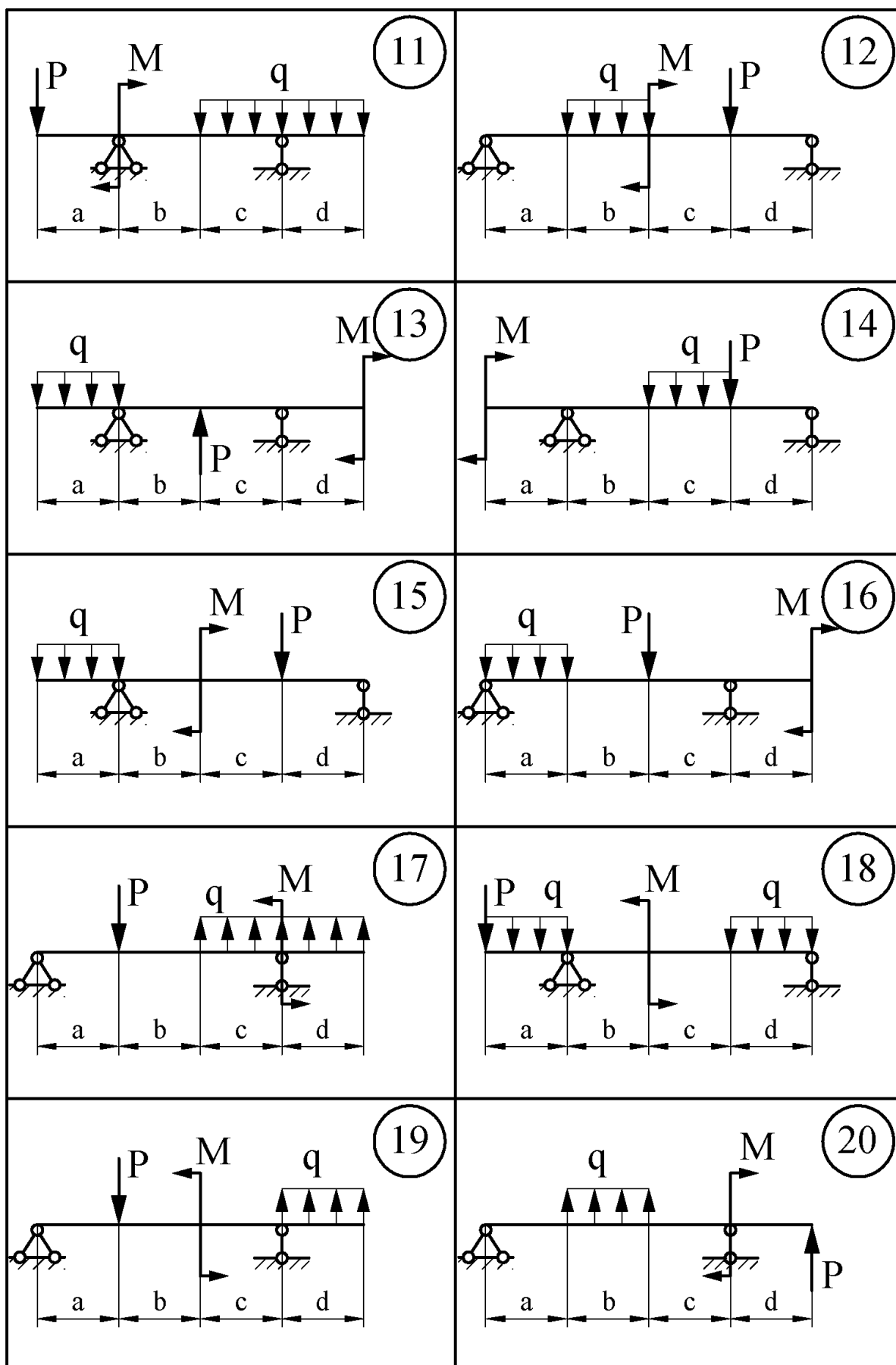


Рисунок 2.2, аркуш 2

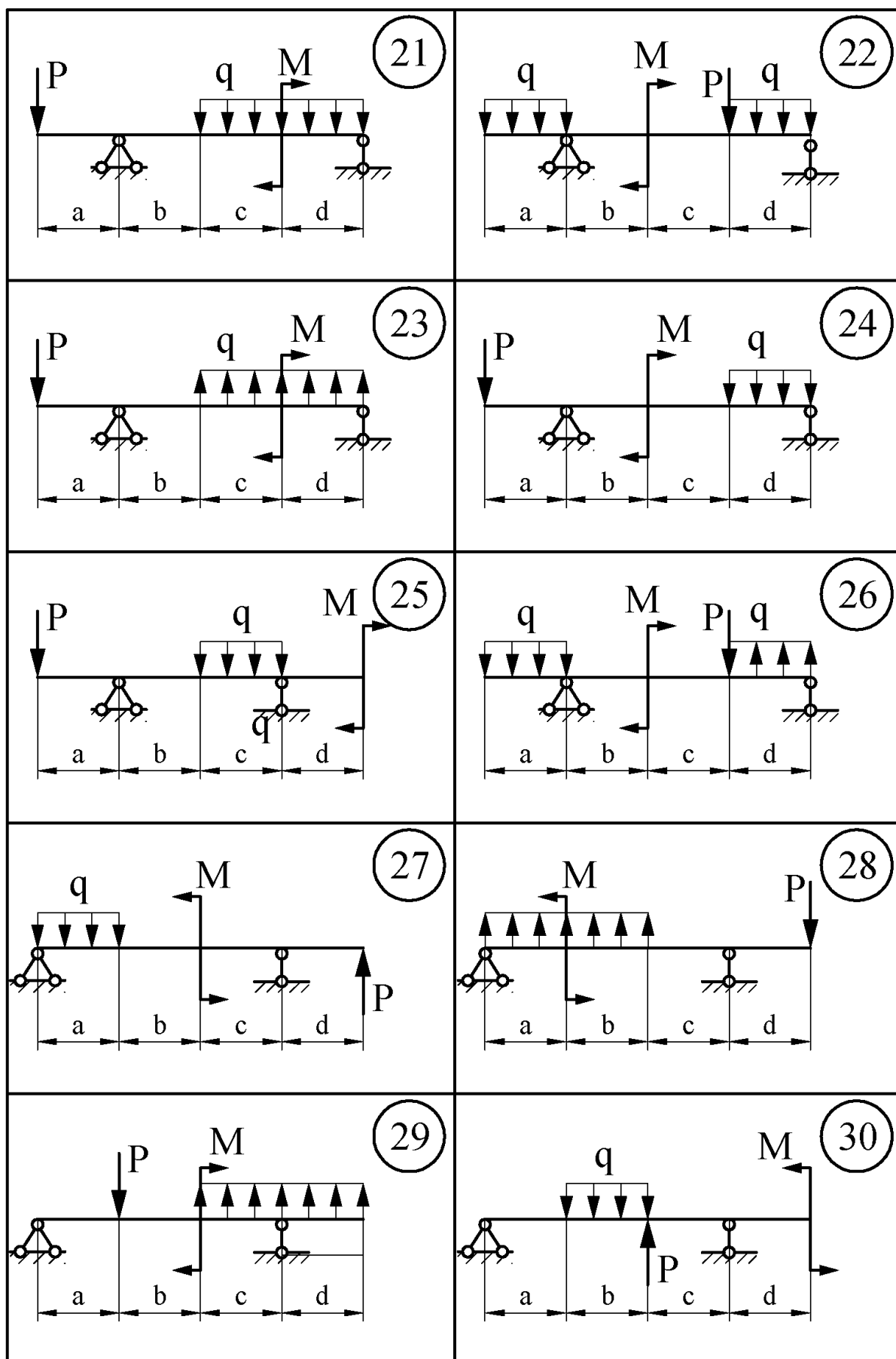


Рисунок 2.2, аркуш 3

При впливі зовнішніх навантажень у будь-якому перерізі балки можуть виникнути два внутрішні зусилля: поперечна сила Q і згинальний момент M .

Поперечна сила Q дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на перпендикуляр до осі стрижня усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

Поперечна сила Q у перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила діє відносно перерізу за напрямком руху годинникової стрілки (рис. 2.3).

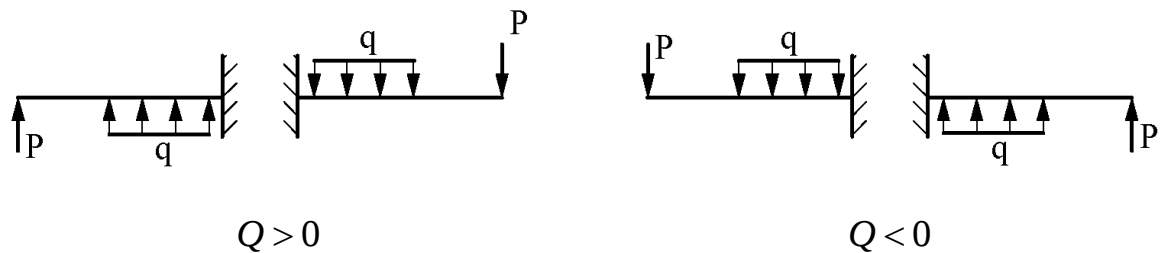


Рисунок 2.3

Згинальний момент M дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від перерізу, який розглядаємо, щодо центра ваги цього перерізу.

Згинальний момент M у перерізі вважається додатним, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки (рис. 2.4).

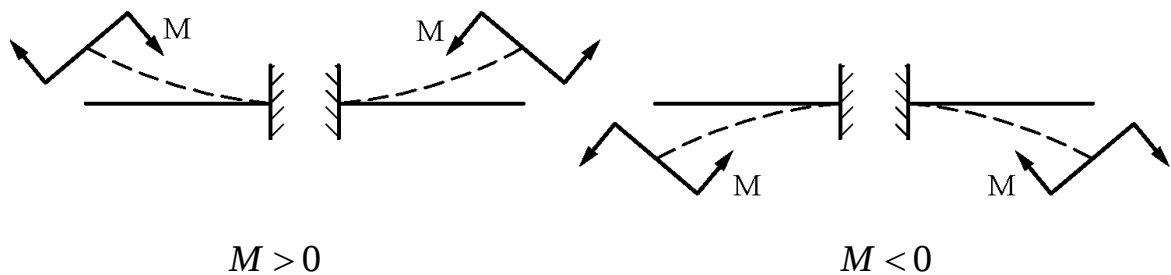


Рисунок 2.4

З огляду на правила знаків для M варто підкреслити, що *епюру згинальних моментів будують на стиснутих волокнах*.

2.1.2 Правила побудови еюр поперечних сил та згинальних моментів

1 На ділянках, де немає розподіленого навантаження, еюри Q окреслюються прямими, паралельними базі, а еюри M в загальному випадку – похилими прямими.

2 На ділянках, де до балок прикладене рівномірно розподілене навантаження q , епюра Q обмежується похилою прямою, а епюра M – квадратичною параболою. Оскільки епюру M будуємо на стиснутих волокнах, то випуклість параболи звернена в бік, протилежний напрямку дії розподіленого навантаження q .

3 У перерізі, де $Q = 0$, дотична до епюри M паралельна базі епюри, тобто епюра M досягає екстремального значення.

Якщо, «рухаючись» зліва направо, Q переходить через нуль, змінюючи знак з «+» на «-», то $M = M_{max}$, а при зміні знака з «-» на «+» – $M = M_{min}$.

Координату z перерізу, де $Q = 0$, зручно обчислювати за формулою:

$$z_l = \frac{Q_l}{q}; \quad z_{np} = \frac{Q_{np}}{q},$$

де z_l – відрізок ділянки від лівого краю ділянки до перерізу, де $Q = 0$;

z_{np} – відрізок ділянки від правого краю ділянки до перерізу, де $Q = 0$;

Q_l та Q_{np} – значення поперечної сили відповідно з лівого та з правого краю.

4 На ділянках, де $Q > 0$, момент зростає, де $Q < 0$, момент зменшується.

5 У перерізі, де до балки прикладені зосереджені сили:

а) на епюрі Q будуть «стрибки» на значення прикладених сил з урахуванням їх знаків (якщо будувати епюру, «рухаючись» зліва направо, то напрямок «стрибка» буде співпадати з напрямком вектора сили);

б) на епюрі M будуть злами, причому вістря зламу спрямоване проти дії сили.

6 У перерізі, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі M будуть «стрибки» на значення цих моментів. Напрямок стрибка залежить від напрямку зовнішнього моменту. Лінії епюри до стрибка і за ним – паралельні. В той же час на епюрі Q змін не буде. Зазначимо, що це не стосується випадку, коли в одній точці прикладені сила і момент. В цьому випадку сила спричиняє злам і порушує паралельність на епюрі M , а епюрі Q – стрибок згідно з правилом 5.

7 Якщо на кінці консолі або в кінцевій опорі до балки прикладений зосереджений момент, то в цьому перерізі згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту. Якщо ж у кінцевій шарнірній опорі або на кінці консолі балка не навантажена зовнішнім моментом, то в них $M = 0$, що має місце найчастіше.

8 Епюра Q є діаграмою, похідною від епюри моментів. Отже, ординати епюри Q пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної до епюри M .

Епюра будується на базовій лінії (або на базі), яка співпадає з віссю стрижня і на якій значення всіх внутрішніх зусиль дорівнюють нулю.

Додатні ординати будемо відкладати уверх від базової лінії, а від'ємні – униз.

Найзручніше будувати епюри Q і M за характерними перерізами.

Характерними перерізами вважаються перерізи, у яких прикладені зосереджені сили чи зосереджені моменти, починається чи закінчується розподілене навантаження, перерізи, у яких Q дорівнює нулю, а також у місцях зміни напрямку осі стрижня чи величини його поперечного перерізу.

Характерні перерізи проводять як зліва, так і справа на нескінченно малій відстані від точок, де прикладають сили, моменти, тощо, і позначаються, як правило, цифрами.

Можна рекомендувати такий порядок побудови епюр:

1 Знайти опорні реакції (для консолі реакції можна не знаходити і будувати епюру від «вільного» кінця балки).

2 Визначити характерні перерізи .

3 Обчислити значення Q у характерних перерізах, потім, «рухаючись» уздовж балки (бажано зліва направо), побудувати епюру Q , використовуючи вищеописані правила.

4 Обчислити значення M в характерних перерізах. Побудувати епюру M за цими значеннями, використовуючи одночасно вищеописані правила.

Перевірка вірності побудови епюри Q і M для двохопорних балок зводиться до побудови епюри при «русі» у напрямку протилежному первісному (наприклад, справа наліво).

2.1.3 Приклад розв'язання задачі 2.1 (схема без екстремуму)

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консольної балки (рис. 2.5, а).

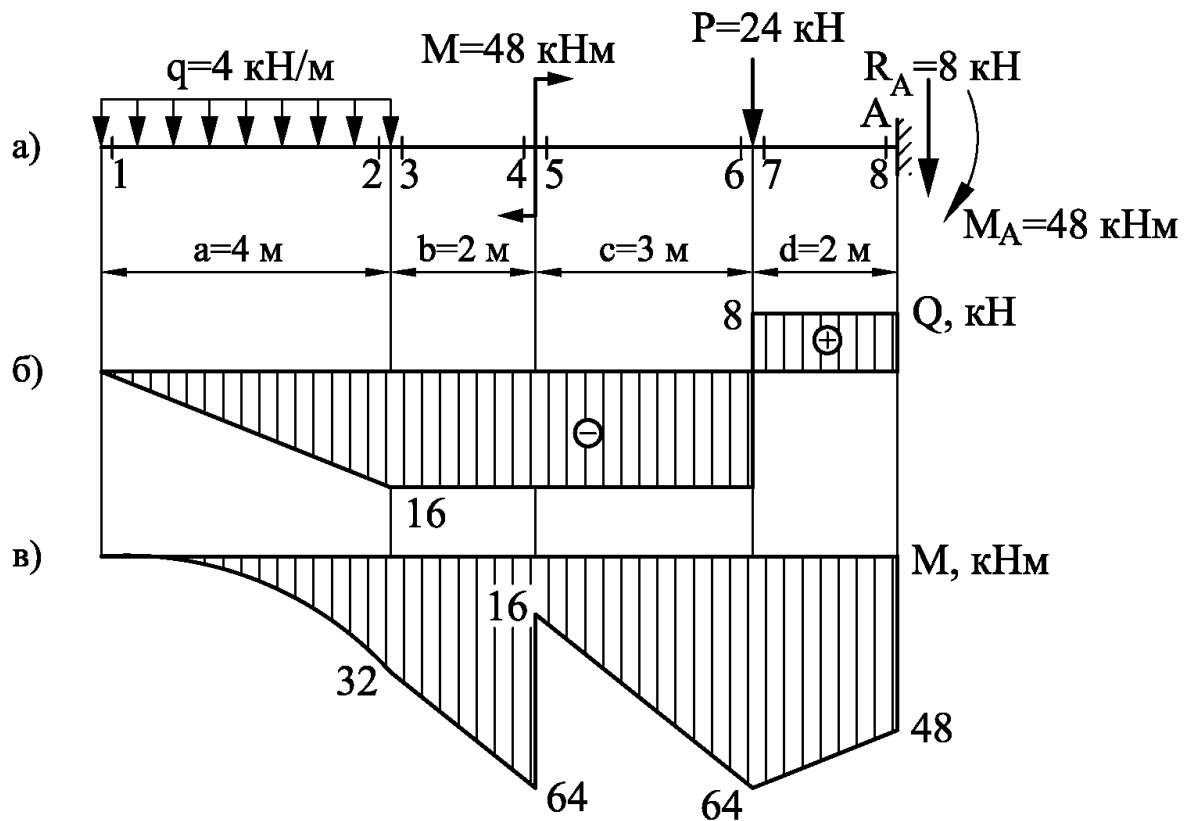
Розв'язання. У цьому прикладі балка закріплена тільки одним кінцем, тому будують епюри з «вільного» кінця. Реакції в затисненні можна не знаходити. Будемо будувати епюру «рухаючи» зліва направо. Позначаємо на балці характерні перерізи (див. рис. 2.5, а) за правилами, які зазначені вище.

Визначаємо поперечні сили в характерних перерізах:

$$Q_1 = 0 \text{ (кН)},$$

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = -q \cdot 4 = -4 \cdot 4 = -16 \text{ (кН)},$$

$$Q_7 = Q_8 = -q \cdot 4 + P = -4 \cdot 4 + 24 = 8 \text{ (кН)}.$$



*а – задана схема; б – епюра поперечних сил;
в – епюра згинальних моментів
Рисунок 2.5 – Консольна балка*

Побудуємо епюру поперечних сил Q , для чого відкладаємо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової лінії (див. рис. 2.5, б). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи правила, які наведені вище.

Оскільки на ділянках 3...4, 5...6 та 7...8 розподільного навантаження немає, то (див. правило 1) епюра Q окреслюються прямими, паралельними базі. На ділянці 1...2, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2).

Визначаємо згинальні моменти в характерних перерізах:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 0 \text{ (кНм)}, \\
 M_2 = M_3 &= -q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -4 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -32 \text{ (кНм)}, \\
 M_4 &= -q \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 2 \right) = -4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 2 \right) = -64 \text{ (кНм)}, \\
 M_5 &= M_4 + M = -64 + 48 = -16 \text{ (кНм)}, \\
 M_6 = M_7 &= -q \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 2 + 3 \right) + M = -4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 2 + 3 \right) + 48 = -64 \text{ (кНм)},
 \end{aligned}$$

$$M_8 = -q \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 2 + 3 + 2 \right) + M + P \cdot 2 =$$

$$= -4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 2 + 3 + 2 \right) + 48 + 24 \cdot 2 = -48 \text{ (кНм)}.$$

Побудуємо епюру згинальних моментів M , для чого відкладаємо результати розрахунків у вигляді окремих точок (з урахуванням масштабів) від базової лінії (див. рис. 2.5, в). Згідно з правилом 1, на ділянках 3...4, 5...6 та 7...8, де розподільного навантаження немає, епюри M окреслюються похилими прямими. На ділянці 1...2, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра M обмежується квадратичною параболою, випуклість якої звернена в бік, протилежний напрямку дії розподіленого навантаження q , тобто уверх.

Для перевірки вірності побудови епюр внутрішніх зусиль визначаємо опорні реакції в защемленні A :

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 9 - M_A = 0,$$

$$M_A = -M - P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 9 = -48 - 24 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 9 = 48 \text{ (кНм)},$$

$$\sum P_y = 0,$$

$$P - q \cdot 4 - R_A = 0,$$

$$R_A = P - q \cdot 4 = 24 - 4 \cdot 4 = 8 \text{ (кН)}.$$

Визначаємо поперечні сили, «рухаючись» справа наліво:

$$Q_8 = Q_7 = R_A = 8 \text{ (кН)},$$

$$Q_6 = Q_5 = Q_4 = Q_3 = Q_2 = R_A - P = 8 - 24 = -16 \text{ (кН)},$$

$$Q_1 = R_A - P + q \cdot 4 = 8 - 24 + 4 \cdot 4 = 0 \text{ (кН)}.$$

Епюра поперечних сил побудована вірно.

Визначаємо згинальні моменти, «рухаючись» справа наліво:

$$M_8 = -M_A = -48 \text{ (кНм)},$$

$$M_7 = M_6 = -M_A - R_A \cdot 2 = -48 - 8 \cdot 2 = -64 \text{ (кНм)},$$

$$M_5 = -M_A - R_A \cdot 5 + P \cdot 3 = -48 - 8 \cdot 5 + 24 \cdot 3 = -16 \text{ (кНм)},$$

$$M_4 = M_5 - M = -16 - 48 = -64 \text{ (кНм)},$$

$$M_3 = M_2 = -M_A - R_A \cdot 7 + P \cdot 5 - M = -48 - 8 \cdot 7 + 24 \cdot 5 - 48 = -32 \text{ (кНм)},$$

$$M_1 = -M_A - R_A \cdot 11 - P \cdot 9 - M - q \cdot 4 \cdot 2 =$$

$$= -48 - 8 \cdot 11 + 24 \cdot 9 - 48 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \text{ (кНм)}.$$

Епюра згинальних моментів побудована вірно.

2.1.4 Приклад розв'язання задачі 2.1 в системі Mathcad (схема без екстремуму)

Для побудови епюр внутрішніх зусиль необхідно скласти аналітичні вирази $Q(z)$ і $M(z)$ для кожної ділянки балки.

Ділянка 1 ($0 \leq z < a$):

$$Q(z) = -q \cdot z, \quad M(z) = -q \cdot \frac{z^2}{2}.$$

Ділянка 2 ($a \leq z \leq (a+b)$):

$$Q(z) = -q \cdot a, \quad M(z) = -q \cdot a \cdot \left(z - \frac{a}{2} \right).$$

Ділянка 3 ($(a+b) < z \leq (a+b+c)$):

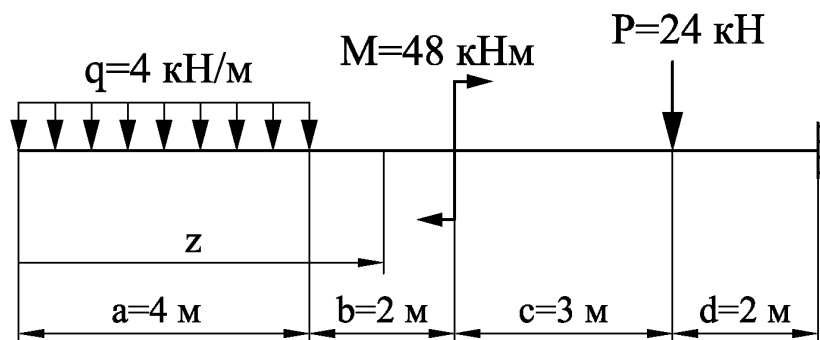
$$Q(z) = -q \cdot a, \quad M(z) = -q \cdot a \cdot \left(z - \frac{a}{2} \right) + M.$$

Ділянка 4 ($(a+b+c) < z \leq \ell$):

$$Q(z) = -q \cdot a + P, \quad M(z) = -q \cdot a \cdot \left(z - \frac{a}{2} \right) + M + P \cdot (z - a - b - c).$$

Вхідні дані:

$a := 4$	$b := 2$	$c := 3$	$d := 2$
$M := 48$	$P := 24$	$q := 4$	
$\ell := a + b + c + d = 11$			

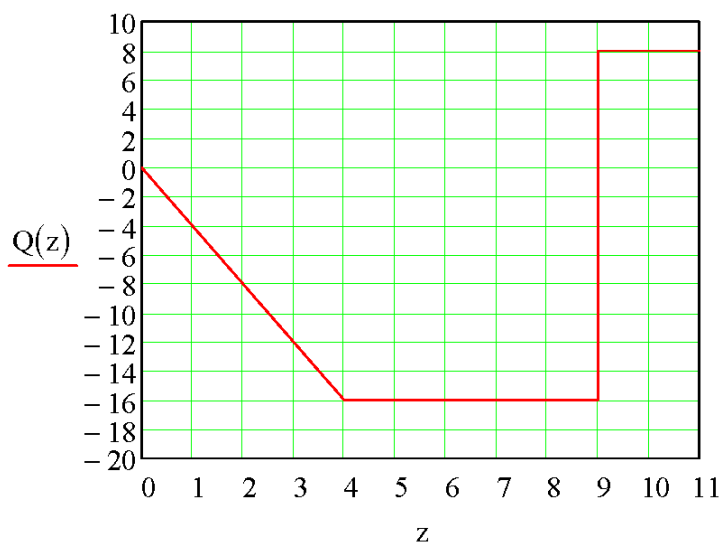


Рівняння поперечних сил на кожній ділянці:

$$Q(z) := \begin{cases} (-q \cdot z) & \text{if } 0 \leq z \leq a \\ (-q \cdot a) & \text{if } a \leq z \leq a + b + c \\ (-q \cdot a + P) & \text{if } a + b + c < z \leq l \end{cases}$$

Епюра поперечних сил:

$z := 0, 0.005 \dots 1$



Значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q(0) = 0$$

$$Q(a + b + c) = -16$$

$$Q(a) = -16$$

$$Q(a + b + c + 0.0005) = 8$$

$$Q(a + 0.00005) = -16$$

$$Q(l) = 8$$

$$Q(a + b) = -16$$

$$Q(a + b + 0.00005) = -16$$

Рівняння згинальних моментів на кожній ділянці:

$$M(z) := \begin{cases} \left(-q \cdot \frac{z^2}{2} \right) & \text{if } 0 \leq z < a \\ \left[-q \cdot a \cdot \left(z - \frac{a}{2} \right) \right] & \text{if } a \leq z \leq a + b \\ \left[-q \cdot a \cdot \left(z - \frac{a}{2} \right) + M \right] & \text{if } a + b < z \leq a + b + c \\ \left[-q \cdot a \cdot \left(z - \frac{a}{2} \right) + M + P \cdot (z - a - b - c) \right] & \text{if } a + b + c < z \leq 1 \end{cases}$$

Епюра згинальних моментів:

$$z := 0, 0.005 \dots 1$$



Значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M(0) = 0$$

$$M(a + b + c) = -64$$

$$M(a) = -32$$

$$M(a + b + c + 0.0005) = -64$$

$$M(a + 0.00005) = -32$$

$$M(1) = -48$$

$$M(a + b) = -64$$

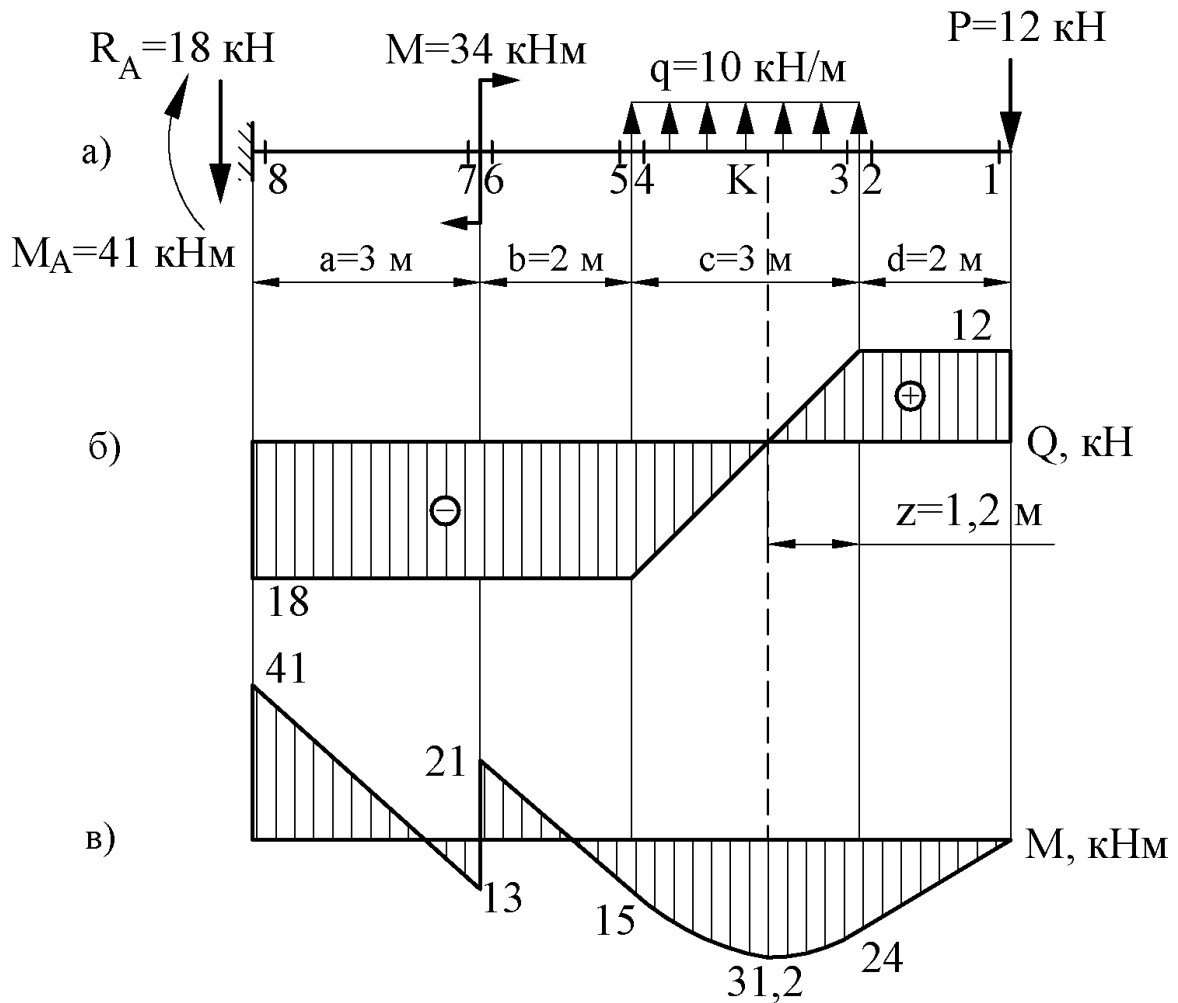
$$M(a + b + 0.00005) = -16$$

2.1.5 Приклад розв'язання задачі 2.1 (схема з екстремумом)

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консольної балки (рис. 2.6, а).

Розв'язання. У цьому прикладі, як і в попередньому, балка закріплена тільки одним кінцем, тому будувати епюру краще з «вільного» кінця.

Означимо на балці характерні перерізи.



а – задана схема; б – епюра поперечних сил; в – епюра згинальних моментів

Рисунок 2.6 – Консольна балка

Для побудови епюри Q визначаємо поперечні сили в характерних перерізах, «рухаючись» справа наліво.

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = P = 12 \text{ (кН)},$$

$$Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_8 = P - q \cdot 3 = 12 - 10 \cdot 3 = -18 \text{ (кН)}.$$

Побудуємо епюру поперечних сил Q (див. рис. 2.6, б).

Для цього відкладаємо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової лінії. З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи правила, які наведені вище.

Оскільки на ділянках 1...2, 5...6 та 7...8 розподільного навантаження немає, то (див. правило 1) епюра Q окреслюється прямими, паралельними базі.

На ділянці 3...4, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2), при чому ця пряма перетинає базову лінію. А оскільки, згідно з правилом 3, Q переходить через нуль, змінюючи знак з «-» на «+», то $M_{extr} = M_{min}$. Знаходимо положення точки K , для чого визначимо довжину відрізка z :

$$z = \frac{Q_{np}}{q} = \frac{12}{10} = 1,2 \text{ (м)}.$$

Визначаємо згинальні моменти в характерних перерізах.

$$\begin{aligned} M_1 &= 0 \text{ (кНм)}, \\ M_2 &= M_3 = -P \cdot 2 = -12 \cdot 2 = -24 \text{ (кНм)}, \\ M_4 &= M_5 = -P \cdot 5 + q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -12 \cdot 5 + 10 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -15 \text{ (кНм)}, \\ M_6 &= -P \cdot 7 + q \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\right) = -12 \cdot 7 + 10 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\right) = -21 \text{ (кНм)}, \\ M_7 &= M_6 - M = 21 - 34 = -13 \text{ (кНм)}, \\ M_8 &= -P \cdot 10 + q \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2 + 3\right) - M = -12 \cdot 10 + 10 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2 + 3\right) - 34 = 41 \text{ (кНм)}. \end{aligned}$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (див. рис. 2.6, в). При цьому треба мати на увазі, що на ділянках 1...2, 5...6 та 7...8 добуті точки треба з'єднувати прямими лініями, а на ділянці 3...4 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто униз.

Як ми зазначали раніше, у перерізі K момент має найменше значення:

$$M_{extr} = M_{min} = -P \cdot (2 + z) + q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = -12 \cdot (2 + 1,2) + 10 \cdot 1,2 \cdot \frac{1,2}{2} = -31,2 \text{ (кНм)}.$$

Зробимо перевірку побудови епюр, «рухаючи» зліва направо:

Для перевірки вірності побудови епюр внутрішніх зусиль визначаємо опорні реакції в защемленні A :

$$\sum M_A = 0,$$

$$\begin{aligned}
 -P \cdot 10 + q \cdot 3 \cdot 6,5 - M - M_A &= 0, \\
 M_A &= -P \cdot 10 + q \cdot 3 \cdot 6,5 - M = -12 \cdot 10 + 10 \cdot 3 \cdot 6,5 - 34 = 41 \text{ (кНм)}, \\
 \sum P_y &= 0, \\
 -P + q \cdot 3 - R_A &= 0, \\
 R_A &= -P + q \cdot 3 = -12 + 10 \cdot 3 = 18 \text{ (кН)}.
 \end{aligned}$$

Перевіряємо побудову епюри поперечних сил.

$$\begin{aligned}
 Q_8 = Q_7 = Q_6 = Q_5 = Q_4 &= -R_A = -18 \text{ (кН)}, \\
 Q_3 = Q_2 = Q_1 &= -R_A + q \cdot 3 = -18 + 10 \cdot 3 = 12 \text{ (кН)}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, ми бачимо, що епюра поперечних сил побудована вірно.

Перевіряємо побудову епюри згинальних моментів.

$$\begin{aligned}
 M_8 &= M_A = 41 \text{ (кНм)}, \\
 M_7 &= M_A - R_A \cdot 3 = 41 - 18 \cdot 3 = -13 \text{ (кНм)}, \\
 M_6 &= M_7 + M = -13 + 34 = 21 \text{ (кНм)}, \\
 M_5 &= M_4 = M_A - R_A \cdot 5 + M = 41 - 18 \cdot 5 + 34 = -15 \text{ (кНм)}, \\
 M_3 = M_2 &= M_A - R_A \cdot 8 + M + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 41 - 18 \cdot 8 + 34 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5 = -24 \text{ (кНм)}, \\
 M_1 &= M_A - R_A \cdot 10 + M + q \cdot 3 \cdot 3,5 = 41 - 18 \cdot 10 + 34 + 10 \cdot 3 \cdot 3,5 = 0 \text{ (кНм)}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, ми бачимо, що епюра згинальних моментів також побудована вірно.

2.1.6 Приклад розв'язання задачі 2.1 в системі Mathcad (схема з екстремумом)

Для визначення опорних реакцій R_A та M_A складаємо два рівняння статички:

$$\begin{aligned}
 \sum P_y &= 0, \quad -P + q \cdot c - R_A = 0, \\
 \sum M_A &= 0, \quad -M + q \cdot c \cdot \left(a + b + \frac{c}{2} \right) - P \cdot (a + b + c + d) - M_A = 0.
 \end{aligned}$$

Розрахунок проведемо за допомогою блока GIVEN...FIND.

Для побудови епюр внутрішніх зусиль необхідно скласти аналітичні вирази $Q(z)$ і $M(z)$ для кожної ділянки балки.

Ділянка 1 ($0 \leq z < a$):

$$Q(z) = -R_A, \quad M(z) = M_A - R_A \cdot z.$$

Ділянка 2 ($a \leq z \leq (a+b)$):

$$Q(z) = -R_A, \quad M(z) = M_A - R_A \cdot z + M.$$

Ділянка 3 ($(a+b) < z \leq (a+b+c)$):

$$Q(z) = -R_A - q \cdot (z - a - b), \quad M(z) = M_A - R_A \cdot z + M + q \cdot \frac{(z - a - b)^2}{2}.$$

Ділянка 4 ($(a+b+c) < z \leq \ell$):

$$Q(z) = -R_A - q \cdot c, \quad M(z) = M_A - R_A \cdot z + M + q \cdot c \cdot \left(z - a - b - \frac{c}{2} \right).$$

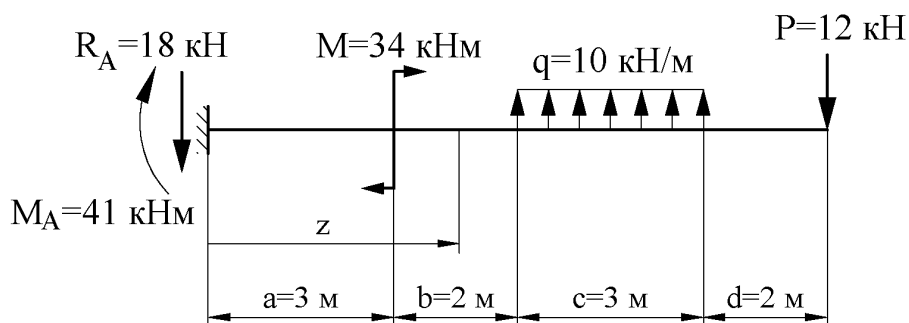
Значення мінімального моменту знаходимо з умови, що функція поперечної сили є похідною від функції згинального моменту, тобто функція згинальних моментів матиме екстремум в точці, де поперечна сила дорівнює нулю. Початкове наближення z приймаємо близько до розшукуваного перерізу, тобто $z = 6$.

Вхідні дані:

$$a := 3 \quad b := 2 \quad c := 3 \quad d := 2$$

$$M := 34 \quad P := 12 \quad q := 10$$

$$l := a + b + c + d = 10$$



Реакції в защемленні:

$$R_A := 0 \quad M_A := 0$$

Given

$$-P + q \cdot c - RA = 0$$

$$-M + q \cdot c \cdot \left(a + b + \frac{c}{2} \right) - P \cdot (a + b + c + d) - MA = 0$$

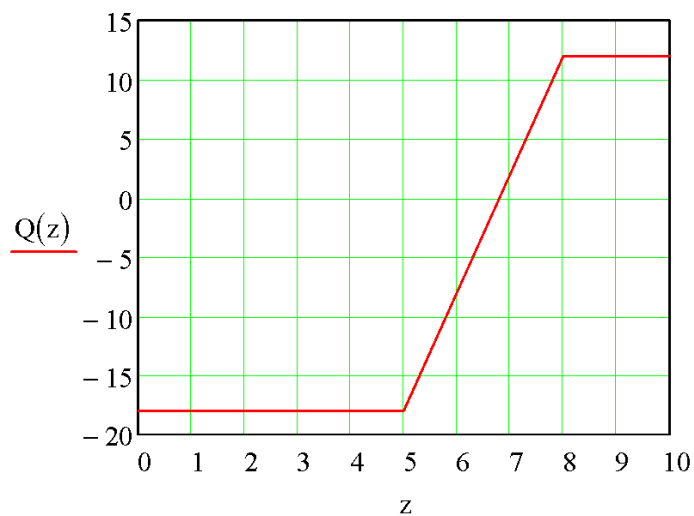
$$\begin{pmatrix} RA \\ MA \end{pmatrix} := \text{Find}(RA, MA) \quad RA = 18 \quad MA = 41$$

Рівняння поперечних сил на кожній ділянці:

$$Q(z) := \begin{cases} (-RA) & \text{if } 0 \leq z \leq (a + b) \\ [-RA + q \cdot (z - a - b)] & \text{if } (a + b) \leq z \leq (a + b + c) \\ (-RA + q \cdot c) & \text{if } (a + b + c) \leq z \leq l \end{cases}$$

Епюра поперечних сил:

$$z := 0, 0.005 \dots 1$$



Значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q(0) = -18$$

$$Q(a + b + c) = 12$$

$$Q(a) = -18$$

$$Q(a + b + c + 0.0005) = 12$$

$$Q(a + 0.0005) = -18$$

$$Q(l) = 12$$

$$Q(a + b) = -18$$

$$Q(a + b + 0.0005) = -18$$

Рівняння згинальних моментів на кожній ділянці:

$$M(z) := \begin{cases} (MA - RA \cdot z) & \text{if } 0 \leq z \leq a \\ (MA - RA \cdot z + M) & \text{if } a < z < (a + b) \\ \left[MA - RA \cdot z + M + q \cdot \frac{(z - a - b)^2}{2} \right] & \text{if } a + b \leq z \leq a + b + c \\ \left[MA - RA \cdot z + M + q \cdot c \cdot \left(z - a - b - \frac{c}{2} \right) \right] & \text{if } a + b + c < z \leq l \end{cases}$$

Епюра згинальних моментів:

$z := 0, 0.005 \dots 1$



Значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M(0) = 41$$

$$M(a + b + c) = -24$$

$$M(a) = -13$$

$$M(a + b + c + 0.00005) = -24$$

$$M(a + 0.00005) = 21$$

$$M(1) = 0$$

$$M(a + b) = -15$$

$$M(a + b + 0.00005) = -15$$

Мінімальний згинальний момент:

$z := 6$

Given

$$Q(z) = 0 \quad z := \text{Find}(z)$$

$$z = 6.8 \quad M(z) = -31.2$$

2.1.7 Приклад розв'язання задачі 2.2 (схема без екстремуму)

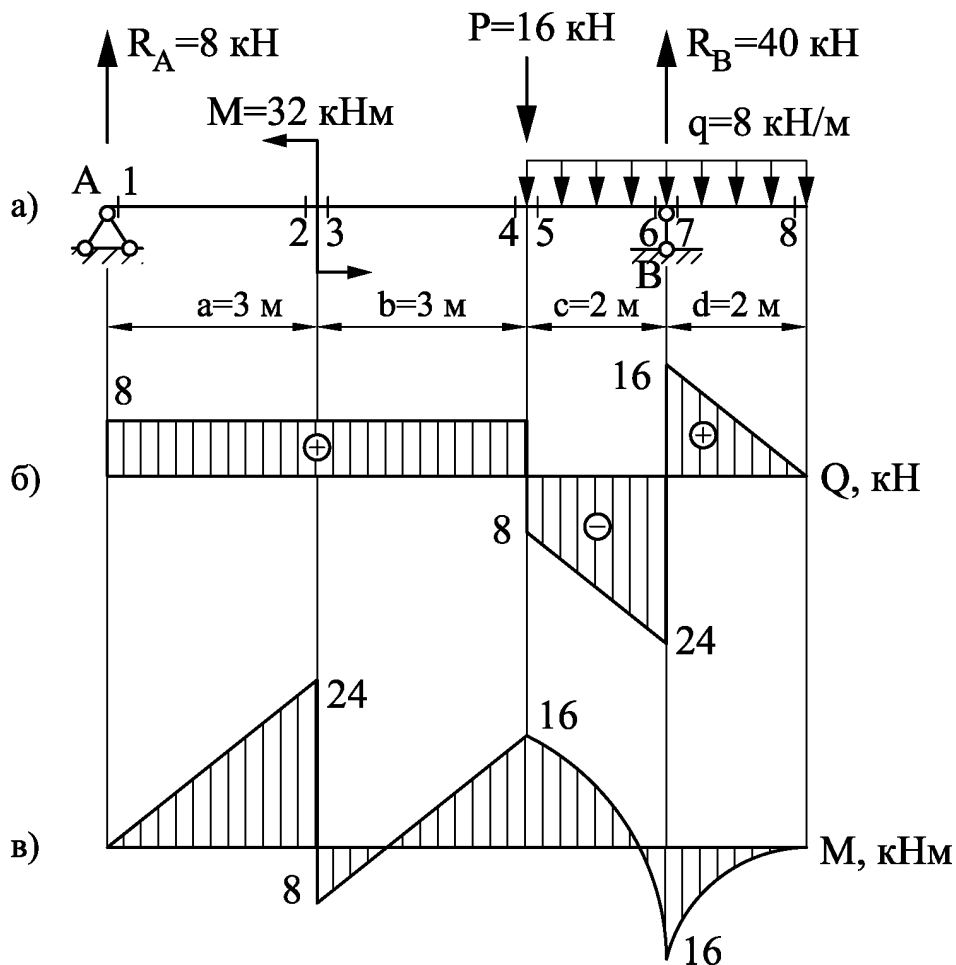
Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двохопорної балки (рис. 2.7, а).

Розв'язання. Перш за все, знайдемо опорні реакції, для чого складемо для балки рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0, \\ M - P \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 8 + R_B \cdot 8 &= 0, \\ R_B &= \frac{-M + P \cdot 6 + q \cdot 4 \cdot 8}{8} = \frac{-32 + 16 \cdot 6 + 8 \cdot 4 \cdot 8}{8} = 40 \text{ (кН)}, \\ \sum M_B &= 0, \end{aligned}$$

$$M + P \cdot 2 - R_A \cdot 8 = 0,$$

$$R_A = \frac{M + P \cdot 2}{8} = \frac{32 + 16 \cdot 2}{8} = 8 \text{ (кН)}.$$



а – задана схема; б – епюра поперечних сил; в – епюра згинальних моментів

Рисунок 2.7 – Двохопорна балка до задачі 2.2

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_y = 0,$$

$$-P - q \cdot 4 + R_A + R_B = 0,$$

$$-16 - 8 \cdot 4 + 8 + 40 = 0,$$

$$-48 + 48 = 0.$$

Визначаємо значення Q у характерних перерізах балки «рухаючись» зліва направо:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = R_A = 8 \text{ (кН)},$$

$$Q_5 = R_A - P = 8 - 16 = -8 \text{ (кН)},$$

$$Q_6 = R_A - P - q \cdot 2 = 8 - 16 - 8 \cdot 2 = -24 \text{ (кН)},$$

$$Q_7 = R_A - P - q \cdot 2 + R_B = 8 - 16 - 8 \cdot 2 + 40 = 16 \text{ (кН)},$$

$$Q_8 = R_A - P - q \cdot 4 + R_B = 8 - 16 - 8 \cdot 4 + 40 = 0 \text{ (кН)}.$$

За цими даними побудуємо епюру поперечних сил (див. рис. 2.7, б), з'єднуючи знайдені ординати прямими лініями.

Оскільки на ділянках 1...2 та 3...4 розподільного навантаження немає, то епюра Q окреслюється прямими, паралельними базі. На ділянках 5...6 та 7...8, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою.

Зробимо перевірку побудови епюри Q , для чого будемо «рухатись» з правого боку на лівий:

$$Q_8 = 0 \text{ (кН)},$$

$$Q_7 = q \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ (кН)},$$

$$Q_6 = q \cdot 2 - R_B = 8 \cdot 2 - 40 = -24 \text{ (кН)},$$

$$Q_5 = q \cdot 4 - R_B = 8 \cdot 4 - 40 = -8 \text{ (кН)},$$

$$Q_4 = Q_3 = Q_2 = Q_1 = q \cdot 4 - R_B + P = 8 \cdot 4 - 40 + 16 = 8 \text{ (кН)}.$$

Оскільки значення поперечних сил в перерізах 1...8 співпадають, то можна вважати, що епюра Q побудована вірно.

Визначаємо значення M в характерних перерізах балки:

$$M_1 = 0 \text{ (кНм)},$$

$$M_2 = R_A \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ (кНм)},$$

$$M_3 = M_2 - M = 24 - 32 = -8 \text{ (кНм)},$$

$$M_4 = M_5 = R_A \cdot 6 - M = 8 \cdot 6 - 32 = 16 \text{ (кНм)},$$

$$M_6 = M_7 = R_A \cdot 8 - M - P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 8 - 32 - 16 \cdot 2 - 8 \cdot 2 \cdot 1 = -16 \text{ (кНм)},$$

$$M_8 = R_A \cdot 10 - M - P \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 8 \cdot 10 - 32 - 16 \cdot 4 - 8 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \text{ (кНм)}.$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (див. рис. 2.7, в). При цьому треба мати на увазі, що на ділянках 1...2 та 3...4 добуті точки треба з'єднувати прямими лініями, а на ділянках 5...6 та 7...8 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто уверх.

Зробимо перевірку побудови епюри M , для чого будемо «рухатись» з правого боку на лівий:

$$M_8 = 0 \text{ (кНм)},$$

$$\begin{aligned}
M_7 &= M_6 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -8 \cdot 2 \cdot 1 = -16 \text{ (кНм)}, \\
M_5 &= M_4 = -q \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 2 = -8 \cdot 4 \cdot 2 + 40 \cdot 2 = 16 \text{ (кНм)}, \\
M_3 &= -q \cdot 4 \cdot 5 + R_B \cdot 5 - P \cdot 3 = -8 \cdot 4 \cdot 5 + 40 \cdot 5 - 16 \cdot 3 = -8 \text{ (кНм)}, \\
M_2 &= M_3 + M = -8 + 32 = 24 \text{ (кНм)}, \\
M_1 &= -q \cdot 4 \cdot 8 + R_B \cdot 8 - P \cdot 6 + M = -8 \cdot 4 \cdot 8 + 40 \cdot 8 - 16 \cdot 6 + 32 = 0 \text{ (кНм)}.
\end{aligned}$$

Оскільки значення згинальних моментів в перерізах 1...8 співпадають, то можна вважати, що епюра M побудована вірно.

Часто при побудові епюр поперечних сил і згинальних моментів для двохопорної балки значення Q та M для лівої половини балки розраховують «рухаючись» зліва направо, а для правої – «рухаючись» справа наліво. Один переріз (в середині балки) розраховують і з лівого, і з правого боків, якщо отримані значення збігаються, то вважають, що епюри побудовані вірно.

Для нашої балки це виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= Q_2 = Q_3 = Q_4 = R_A = 8 \text{ (кН)}, \\
Q_5 &= R_A - P = 8 - 16 = -8 \text{ (кН)}, \\
Q_8 &= 0 \text{ (кН)}, \\
Q_7 &= q \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ (кН)}, \\
Q_6 &= q \cdot 2 - R_B = 8 \cdot 2 - 40 = -24 \text{ (кН)}, \\
Q_5 &= q \cdot 4 - R_B = 8 \cdot 4 - 40 = -8 \text{ (кН)}, \\
M_1 &= M_8 = 0 \text{ (кНм)}, \\
M_2 &= R_A \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ (кНм)}, \\
M_3 &= M_2 - M = 24 - 32 = -8 \text{ (кНм)}, \\
M_4 &= M_5 = R_A \cdot 6 - M = 8 \cdot 6 - 32 = 16 \text{ (кНм)}, \\
M_7 &= M_6 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -8 \cdot 2 \cdot 1 = -16 \text{ (кНм)}, \\
M_5 &= M_4 = -q \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 2 = -8 \cdot 4 \cdot 2 + 40 \cdot 2 = 16 \text{ (кНм)}.
\end{aligned}$$

Переріз 5 розраховали і з лівого, і з правого боків. Для цього перерізу значення Q_5 та M_5 збігаються, тому вважаємо, що епюри побудовані вірно.

2.1.8 Приклад розв'язання задачі 2.2 в системі Mathcad (схема без екстремуму)

Для визначення опорних реакцій R_A та R_B складаємо два рівняння статички:

$$\sum M_A = 0, \quad M - P \cdot (a+b) - q \cdot (c+d) \cdot \left(a+b + \frac{c+d}{2} \right) + R_B \cdot (a+b+c) = 0,$$

$$\sum M_B = 0, \quad M + P \cdot c - R_A \cdot (a+b+c) = 0.$$

Розрахунок проведемо за допомогою блока GIVEN...FIND.

Для побудови епюр внутрішніх зусиль необхідно скласти аналітичні вирази $Q(z)$ і $M(z)$ для кожної ділянки балки.

Ділянка 1 ($0 \leq z < a$):

$$Q(z) = R_A, \quad M(z) = R_A \cdot z.$$

Ділянка 2 ($a < z \leq (a+b)$):

$$Q(z) = R_A, \quad M(z) = R_A \cdot z - M.$$

Ділянка 3 ($(a+b) < z \leq (a+b+c)$):

$$Q(z) = R_A - P - q \cdot (z - a - b),$$

$$M(z) = R_A \cdot z - M - P \cdot (z - a - b) - q \cdot \frac{(z - a - b)^2}{2}.$$

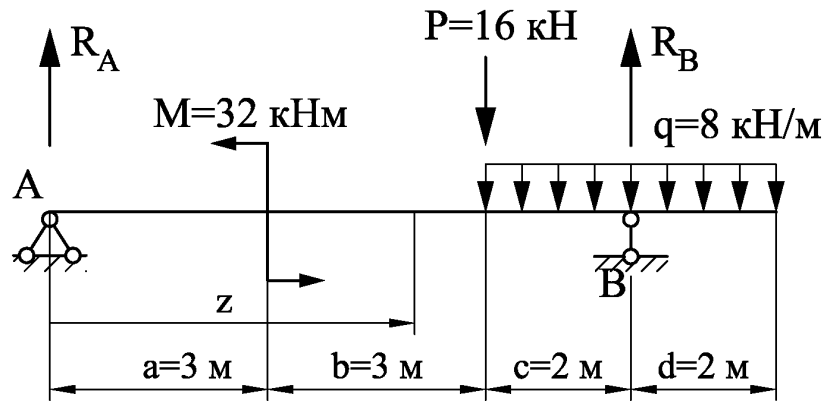
Ділянка 4 ($(a+b+c) < z \leq \ell$):

$$Q(z) = R_A - P - q \cdot (z - a - b) + R_B,$$

$$M(z) = R_A \cdot z - M - P \cdot (z - a - b) - q \cdot \frac{(z - a - b)^2}{2} + R_B \cdot (z - a - b - c).$$

Вхідні дані:

$a := 3$	$b := 3$	$c := 2$	$d := 2$
$M := 32$	$P := 16$	$q := 8$	
$l := a + b + c + d = 10$			



Реакції в опорах:

$$R_A := 0 \quad R_B := 0$$

Given

$$M - P \cdot (a + b) - q \cdot (c + d) \cdot \left(a + b + \frac{c + d}{2} \right) + R_B(a + b + c) = 0$$

$$M + P \cdot c - R_A \cdot (a + b + c) = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} := \text{Find}(R_A, R_B) \quad R_A = 8 \quad R_B = 40$$

Рівняння поперечних сил на кожній ділянці:

$$Q(z) := \begin{cases} (R_A) & \text{if } 0 \leq z \leq (a + b) \\ [R_A - P - q \cdot (z - a - b)] & \text{if } a + b < z \leq (a + b + c) \\ [R_A - P - q \cdot (z - a - b) + R_B] & \text{if } a + b + c < z \leq 1 \end{cases}$$

Епюра поперечних сил:

$$z := 0, 0.005 \dots 1$$



Значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q(0) = 8$$

$$Q(a + b + c) = -24$$

$$Q(a) = 8$$

$$Q(a + b + c + 0.0005) = 16$$

$$Q(a + 0.0005) = 8$$

$$Q(l) = 0$$

$$Q(a + b) = 8$$

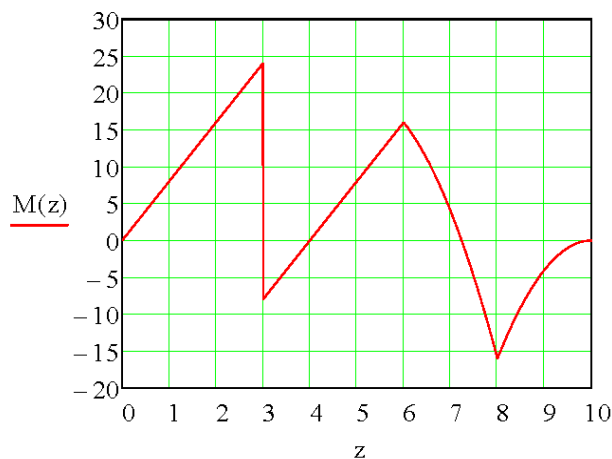
$$Q(a + b + 0.0005) = -8$$

Рівняння згинальних моментів на кожній ділянці:

$$M(z) := \begin{cases} (RA \cdot z) & \text{if } 0 \leq z \leq a \\ (RA \cdot z - M) & \text{if } a < z < (a + b) \\ \left[RA \cdot z - M - P \cdot (z - a - b) - q \cdot \frac{(z - a - b)^2}{2} \right] & \text{if } a + b \leq z \leq a + b + c \\ \left[RA \cdot z - M - P \cdot (z - a - b) - q \cdot \frac{(z - a - b)^2}{2} + RB \cdot (z - a - b - c) \right] & \text{if } a + b + c < z \leq l \end{cases}$$

Епюра згинальних моментів:

$$z := 0, 0.005 \dots 1$$



Значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M(0) = 0$$

$$M(a + b + c) = -16$$

$$M(a) = 24$$

$$M(a + b + c + 0.00005) = -16$$

$$M(a + 0.00005) = -8$$

$$M(l) = 0$$

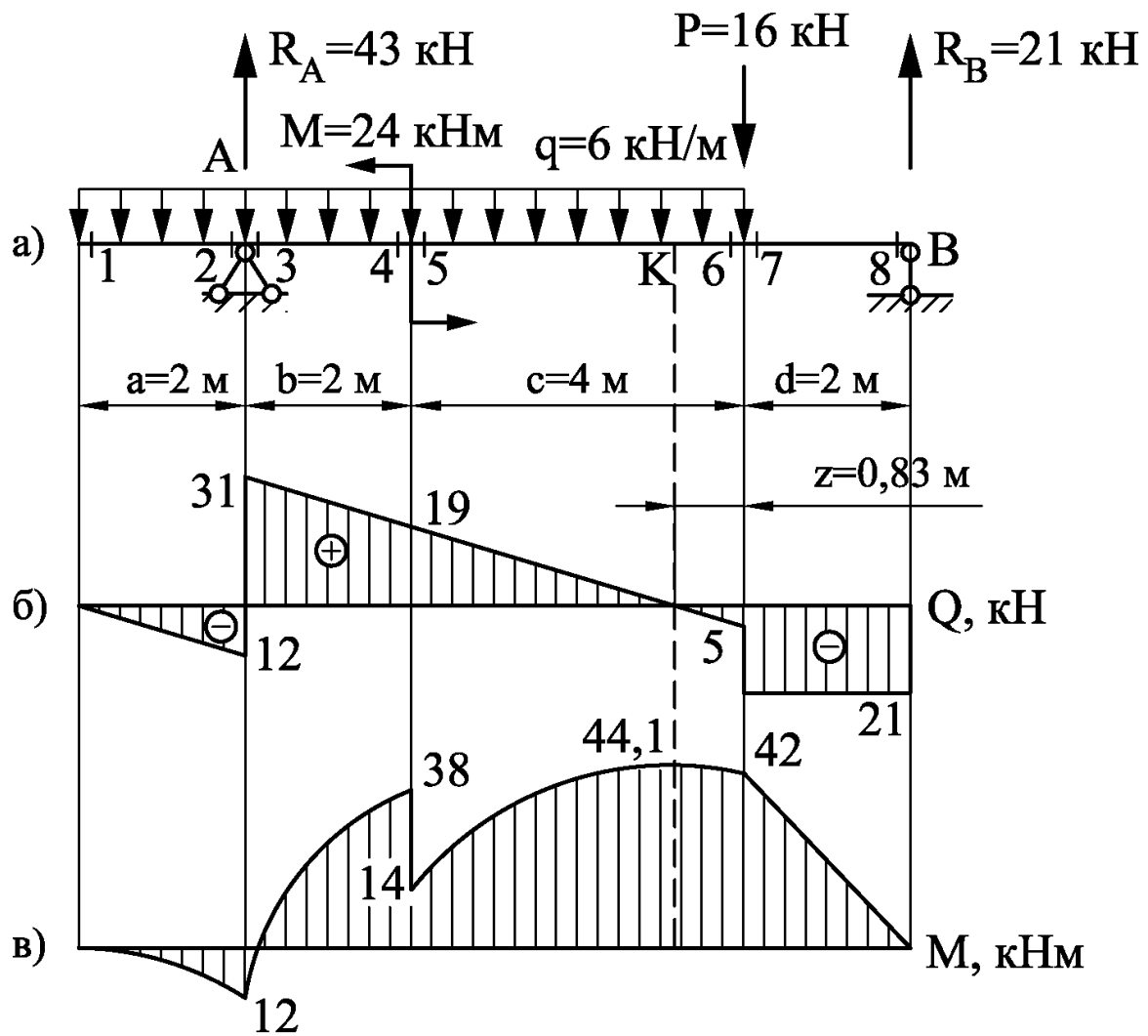
$$M(a + b) = 16$$

$$M(a + b + 0.00005) = 16$$

2.1.9 Приклад розв'язання задачі 2.2 (схема з екстремумом)

Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двохопорної балки (рис. 2.8, а).

Розв'язання. Перш за все, знайдемо опорні реакції, для чого складемо для балки рівняння рівноваги:



*а – задана схема; б – епюра поперечних сил;
в – епюра згинальних моментів
Рисунок 2.8 – Двохопорна балка до задачі 2.2*

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0, \\ M - P \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 6 \cdot 3 + R_B \cdot 8 &= 0, \\ R_B &= \frac{-M + P \cdot 6 - q \cdot 2 \cdot 1 + q \cdot 6 \cdot 3}{8} = \frac{-24 + 16 \cdot 6 - 6 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 6 \cdot 3}{8} = 21 (\text{кН}), \\ \sum M_B &= 0, \\ M + P \cdot 2 + q \cdot 8 \cdot 6 - R_A \cdot 8 &= 0, \\ R_A &= \frac{M + P \cdot 2 + q \cdot 8 \cdot 6}{8} = \frac{24 + 16 \cdot 2 + 6 \cdot 8 \cdot 6}{8} = 43 (\text{кН}). \end{aligned}$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_y = 0,$$

$$\begin{aligned}-P - q \cdot 8 + R_A + R_B &= 0, \\ -16 - 6 \cdot 8 + 43 + 21 &= 0, \\ -64 + 64 &= 0.\end{aligned}$$

Визначаємо значення поперечних сил і згинальних моментів у характерних перерізах балки. При цьому значення Q і M для лівої половини балки розраховуємо «рухаючись» зліва направо, а для правої – «рухаючись» справа наліво. Один переріз (переріз 5) розраховуємо і з лівого, і з правого боків, якщо отримані значення збігаються, то вважаємо, що значення Q і M визначені вірно.

Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах балки.

$$\begin{aligned}Q_1 &= 0 \text{ (кН)}, \\ Q_2 &= -q \cdot 2 = -6 \cdot 2 = -12 \text{ (кН)}, \\ Q_3 &= -q \cdot 2 + R_A = -6 \cdot 2 + 43 = 31 \text{ (кН)}, \\ Q_4 = Q_5 &= -q \cdot 4 + R_A = -6 \cdot 4 + 43 = 19 \text{ (кН)}, \\ Q_8 = Q_7 &= -R_B = -21 \text{ (кН)}, \\ Q_6 &= -R_B + P = -21 + 16 = -5 \text{ (кН)}, \\ Q_5 &= -R_B + P + q \cdot 4 = -21 + 16 + 6 \cdot 4 = 19 \text{ (кН)}.\end{aligned}$$

Оскільки значення поперечних сил в перерізі 5 співпадають, то можна вважати, що значення поперечних сил визначені вірно.

За цими даними побудуємо епюру поперечних сил (див. рис. 2.8, б), з'єднуючи знайдені ординати прямими лініями.

Оскільки на ділянці 7...8 розподільного навантаження немає, то епюра Q окреслюється прямими, паралельними базі. На ділянці 1...6, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою, при чому ця пряма перетинає базову лінію. А оскільки, згідно з правилом 3, Q переходить через нуль, змінюючи знак з «+» на «-», то $M_{extr} = M_{max}$. Знаходимо положення точки K , для чого визначаємо довжину відрізка z :

$$z = \frac{Q_{np}}{q} = \frac{5}{6} = 0,83 \text{ (м)}.$$

Визначаємо значення згинальних моментів в характерних перерізах балки:

$$\begin{aligned}M_1 &= M_8 = 0 \text{ (кНм)}, \\ M_2 &= M_3 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -6 \cdot 2 \cdot 1 = -12 \text{ (кНм)}, \\ M_4 &= -q \cdot 4 \cdot 2 + R_A \cdot 2 = -6 \cdot 4 \cdot 2 + 43 \cdot 2 = 38 \text{ (кНм)}, \\ M_5 &= M_4 - M = 38 - 24 = 14 \text{ (кНм)}, \\ M_7 &= M_6 = R_B \cdot 2 = 21 \cdot 2 = 42 \text{ (кНм)},\end{aligned}$$

$$M_5 = R_B \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 2 = 21 \cdot 6 - 6 \cdot 4 \cdot 2 = 14 \text{ (кНм)}.$$

Оскільки значення згинальних моментів в перерізі 5 співпадають, то можна вважати, що значення поперечних сил визначені вірно.

Як ми зазначали раніше, у перерізі K момент має найбільше значення:

$$\begin{aligned} M_{extr} = M_{max} &= R_B \cdot (2 + z) - P \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = \\ &= 21 \cdot (2 + 0,83) - 12 \cdot 0,83 - 10 \cdot 0,83 \cdot \frac{0,83}{2} = 44,08 \text{ (кНм)}. \end{aligned}$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (див. рис. 2.7, в). При цьому треба мати на увазі, що на ділянці 7...8 добути точки треба з'єднувати прямими лініями, а на ділянці 1...6 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто вверх.

2.1.10 Приклад розв'язання задачі 2.2 в системі Mathcad (схема з екстремумом)

Для визначення опорних реакцій R_A та R_B складаємо два рівняння статички:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, \quad M - P \cdot (b + c) + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q \cdot \frac{(b + c)^2}{2} + R_B \cdot (b + c + d) &= 0, \\ \sum M_B = 0, \quad M + P \cdot d + q \cdot (a + b + c) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} + d \right) - R_A \cdot (b + c + d) &= 0. \end{aligned}$$

Розрахунок проведемо за допомогою блока GIVEN...FIND.

Для побудови епюр внутрішніх зусиль необхідно скласти аналітичні вирази $Q(z)$ і $M(z)$ для кожної ділянки балки.

Ділянка 1 ($0 \leq z \leq a$):

$$Q(z) = -q \cdot z, \quad M(z) = -q \cdot \frac{z^2}{2}.$$

Ділянка 2 ($a < z \leq (a + b)$):

$$Q(z) = -q \cdot z + R_A, \quad M(z) = -q \cdot \frac{z^2}{2} + R_A \cdot (z - a).$$

Ділянка 3 $((a + b) < z \leq (a + b + c))$:

$$Q(z) = -q \cdot z + R_A, \quad M(z) = -q \cdot \frac{z^2}{2} + R_A \cdot (z - a) - M.$$

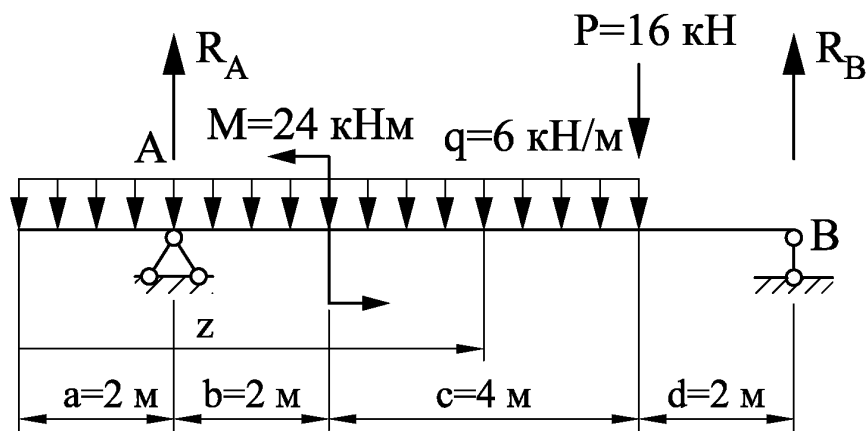
Ділянка 4 $((a + b + c) < z \leq \ell)$:

$$Q(z) = -q \cdot (a + b + c) + R_A - P,$$

$$M(z) = -q \cdot (a + b + c) \cdot \left(z - \frac{a + b + c}{2} \right) + R_A \cdot (z - a) - M - P \cdot (z - a - b - c).$$

Вхідні дані:

$$\begin{aligned} a &:= 2 & b &:= 2 & c &:= 4 & d &:= 2 \\ M &:= 24 & P &:= 16 & q &:= 6 \\ l &:= a + b + c + d = 10 \end{aligned}$$



Реакції в опорах:

$$R_A := 0 \quad R_B := 0$$

Given

$$M - P \cdot (b + c) + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q \cdot \frac{(b + c)^2}{2} + R_B \cdot (b + c + d) = 0$$

$$M + P \cdot d + q \cdot (a + b + c) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} + d \right) - R_A \cdot (b + c + d) = 0$$

$$\begin{pmatrix} RA \\ RB \end{pmatrix} := \text{Find}(RA, RB) \quad RA = 43 \quad RB = 21$$

Рівняння поперечних сил на кожній ділянці:

$$Q(z) := \begin{cases} (-q \cdot z) & \text{if } 0 \leq z \leq (a) \\ (-q \cdot z + RA) & \text{if } a < z \leq (a + b + c) \\ [-q \cdot (a + b + c) + RA - P] & \text{if } a + b + c < z \leq 1 \end{cases}$$

Епюра поперечних сил:

$$z := 0, 0.005 \dots 1$$



Значення поперечних сил у характерних перерізах:

$$Q(0) = 0$$

$$Q(a + b + c) = -5$$

$$Q(a) = -12$$

$$Q(a + b + c + 0.0005) = -21$$

$$Q(a + 0.0005) = 31$$

$$Q(1) = -21$$

$$Q(a + b) = 19$$

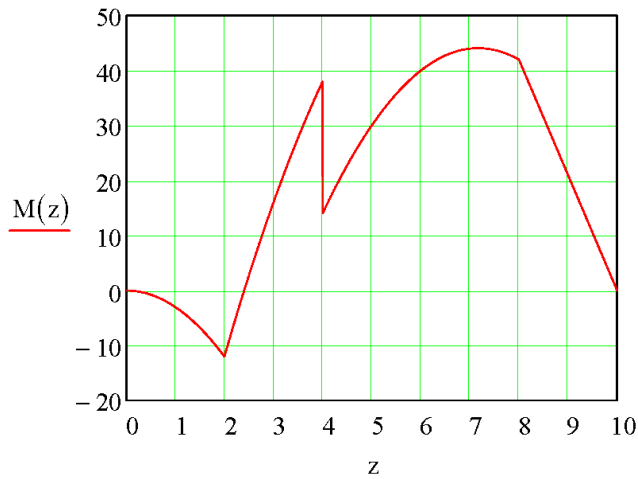
$$Q(a + b + 0.0005) = 19$$

Рівняння згинальних моментів на кожній ділянці:

$$M(z) := \begin{cases} \left(-q \cdot \frac{z^2}{2} \right) & \text{if } 0 \leq z \leq a \\ \left[-q \cdot \frac{z^2}{2} + RA \cdot (z - a) \right] & \text{if } a < z \leq a + b \\ \left[-q \cdot \frac{z^2}{2} + RA \cdot (z - a) - M \right] & \text{if } a + b < z \leq a + b + c \\ \left[-q \cdot (a + b + c) \cdot \left(z - \frac{a + b + c}{2} \right) \dots \right. \\ \left. + RA \cdot (z - a) - M - P \cdot (z - a - b - c) \right] & \text{if } a + b + c < z \leq 1 \end{cases}$$

Епюра згинальних моментів:

$$z := 0, 0.005 \dots 1$$



Значення згинальних моментів у характерних перерізах:

$$M(0) = 0$$

$$M(a + b + c) = 42$$

$$M(a) = -12$$

$$M(a + b + c + 0.00005) = 42$$

$$M(a + 0.00005) = -12$$

$$M(1) = 0$$

$$M(a + b) = 38$$

$$M(a + b + 0.00005) = 14$$

Максимальний згинальний момент:

$$z := 4$$

Given

$$Q(z) = 0 \quad z := \text{Find}(z)$$

$$z = 7.17 \quad M(z) = 44.08$$

2.2 Консольна рама (задача 2.3) та двоопорна рама (задача 2.4)

Для заданої рами побудувати епюри поздовжніх, поперечних сил та згинальних моментів.

Вихідні дані вибрати із таблиць 2.1 та 2.2 і рисунків 2.9 та 2.10.

2.2.1 Методичні вказівки до виконання задач 2.3 та 2.4

Рамами називають системи, які складаються з прямолінійних стрижнів, з'єднаних жорсткими вузлами. Вертикально розміщені стрижні рам називають *стояками*, горизонтальні – *ригелями*. Жорсткість вузлів виключає взаємний поворот скріплених стрижнів, тобто у вузлових точках кути між осями з'єднаних стрижнів залишаються незмінними.

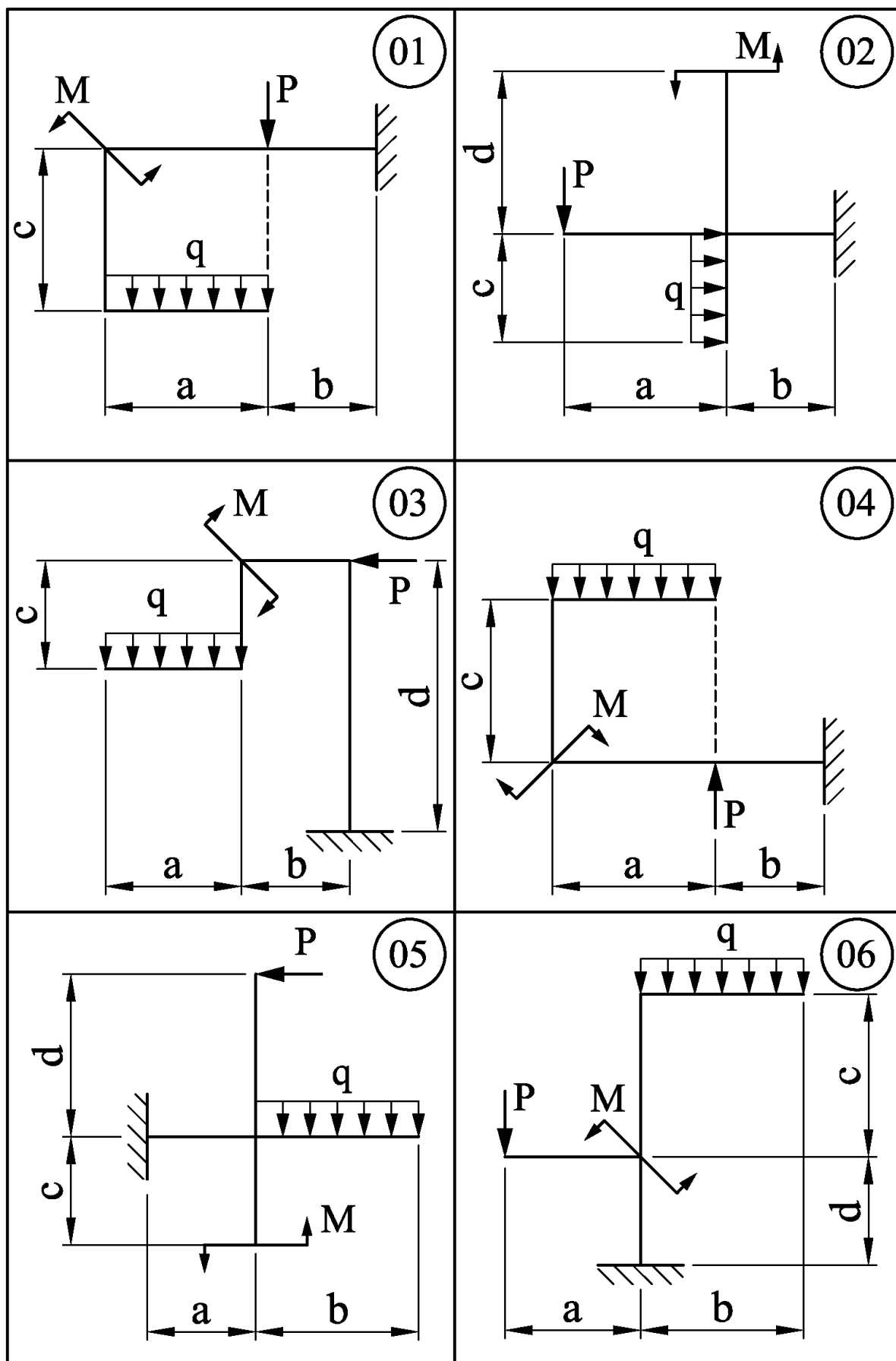


Рисунок 2.9

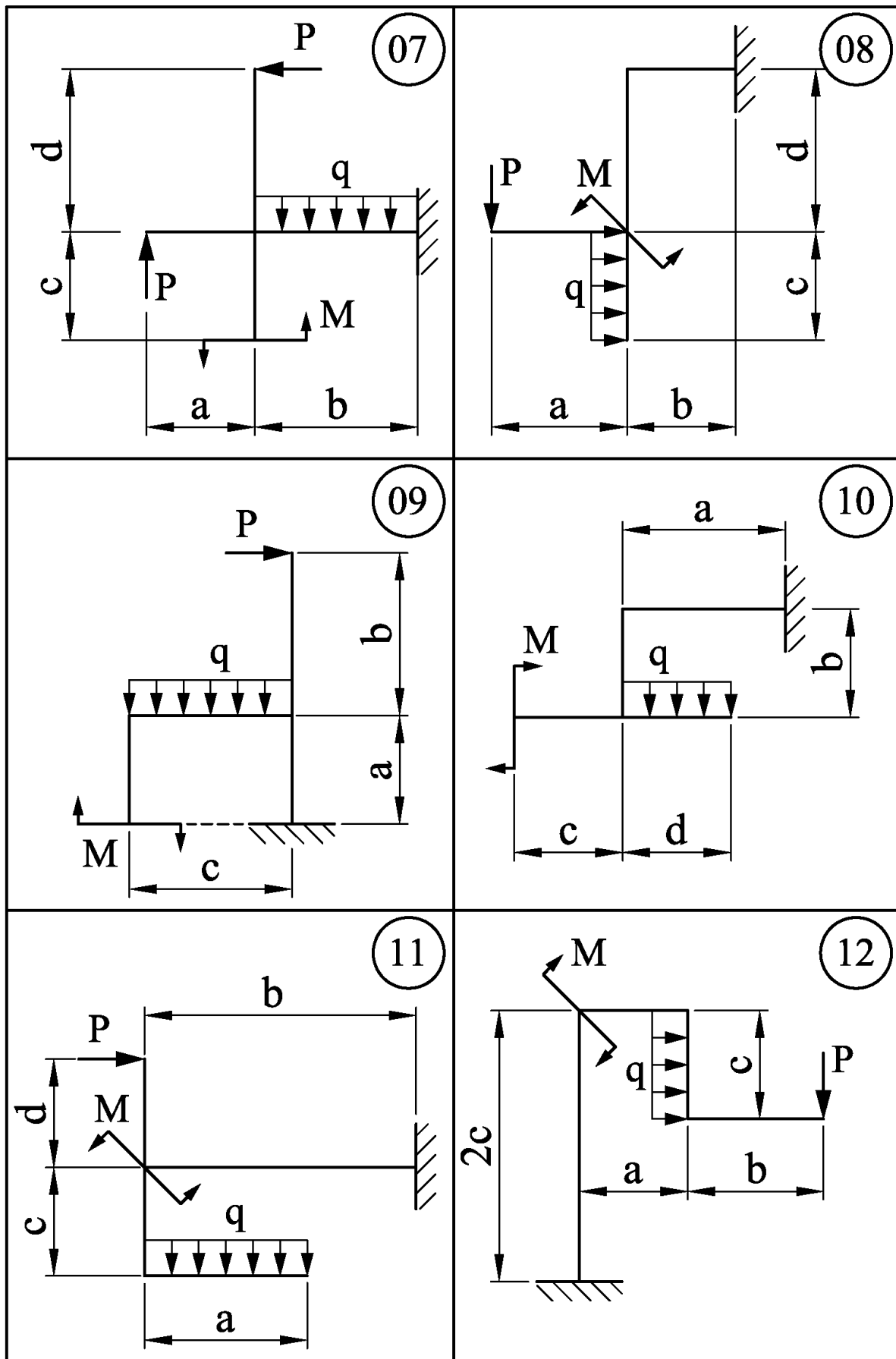


Рисунок 2.9, аркуш 2

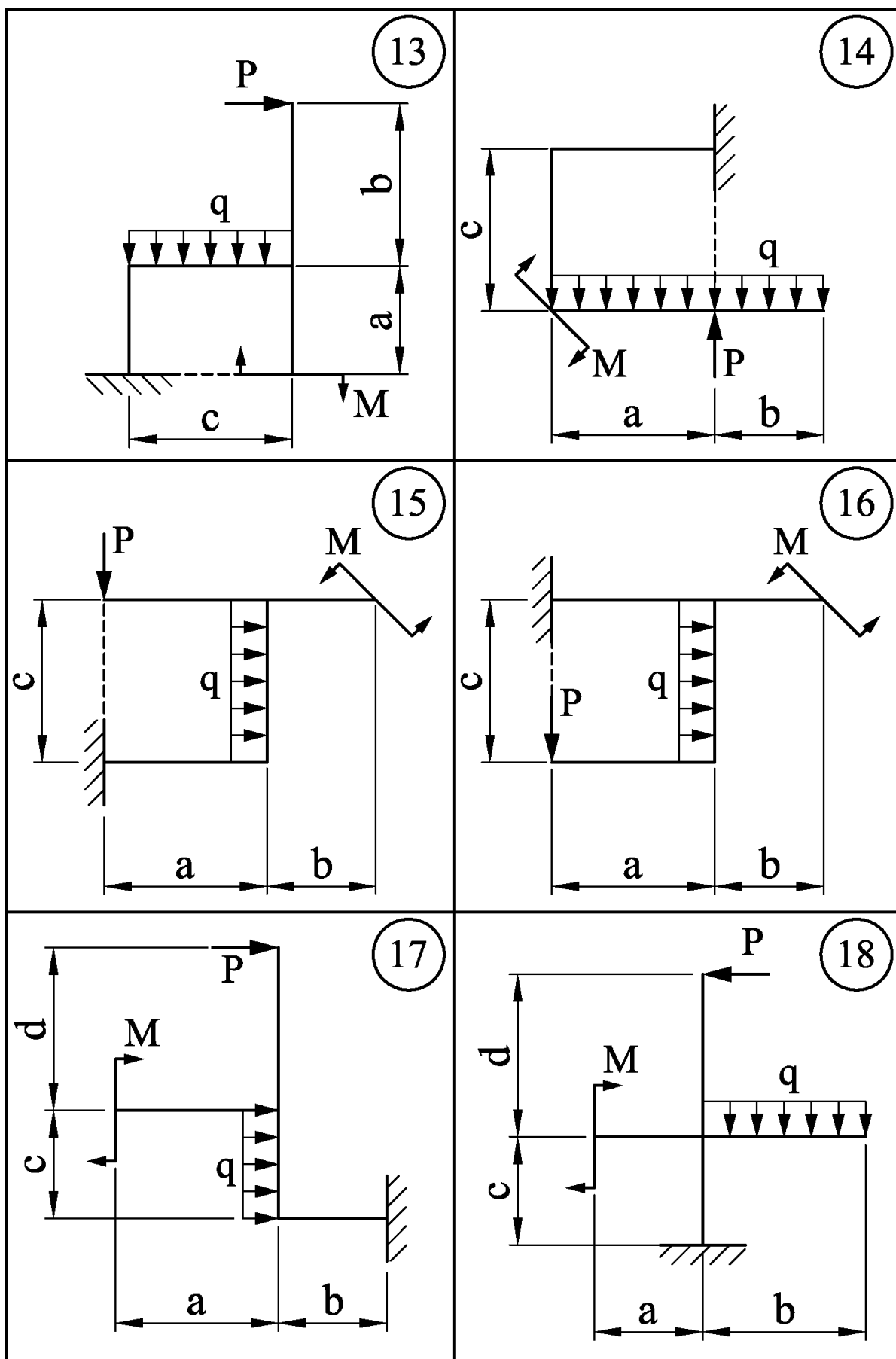


Рисунок 2.9, аркуш 3

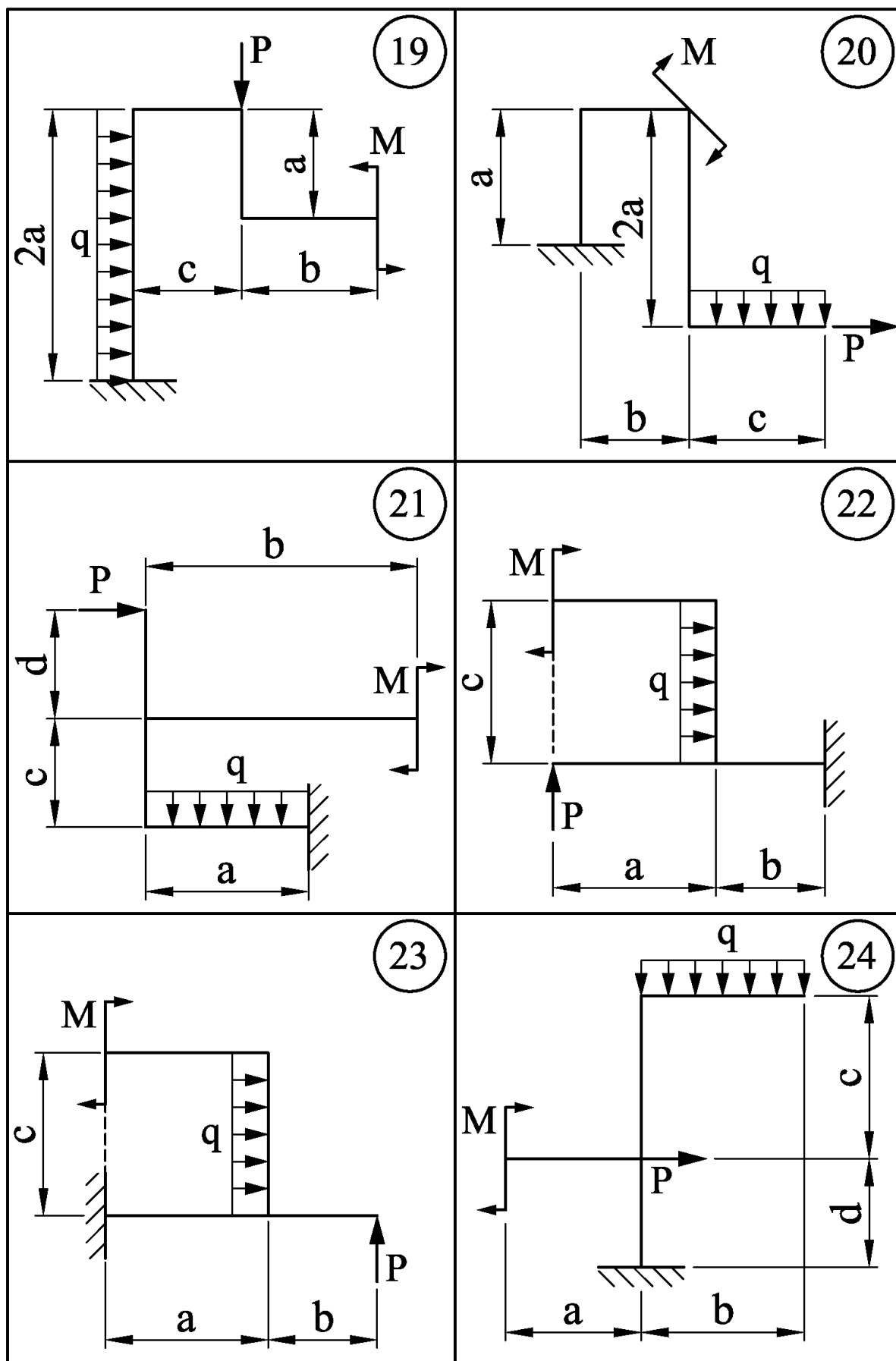


Рисунок 2.9, аркуш 4

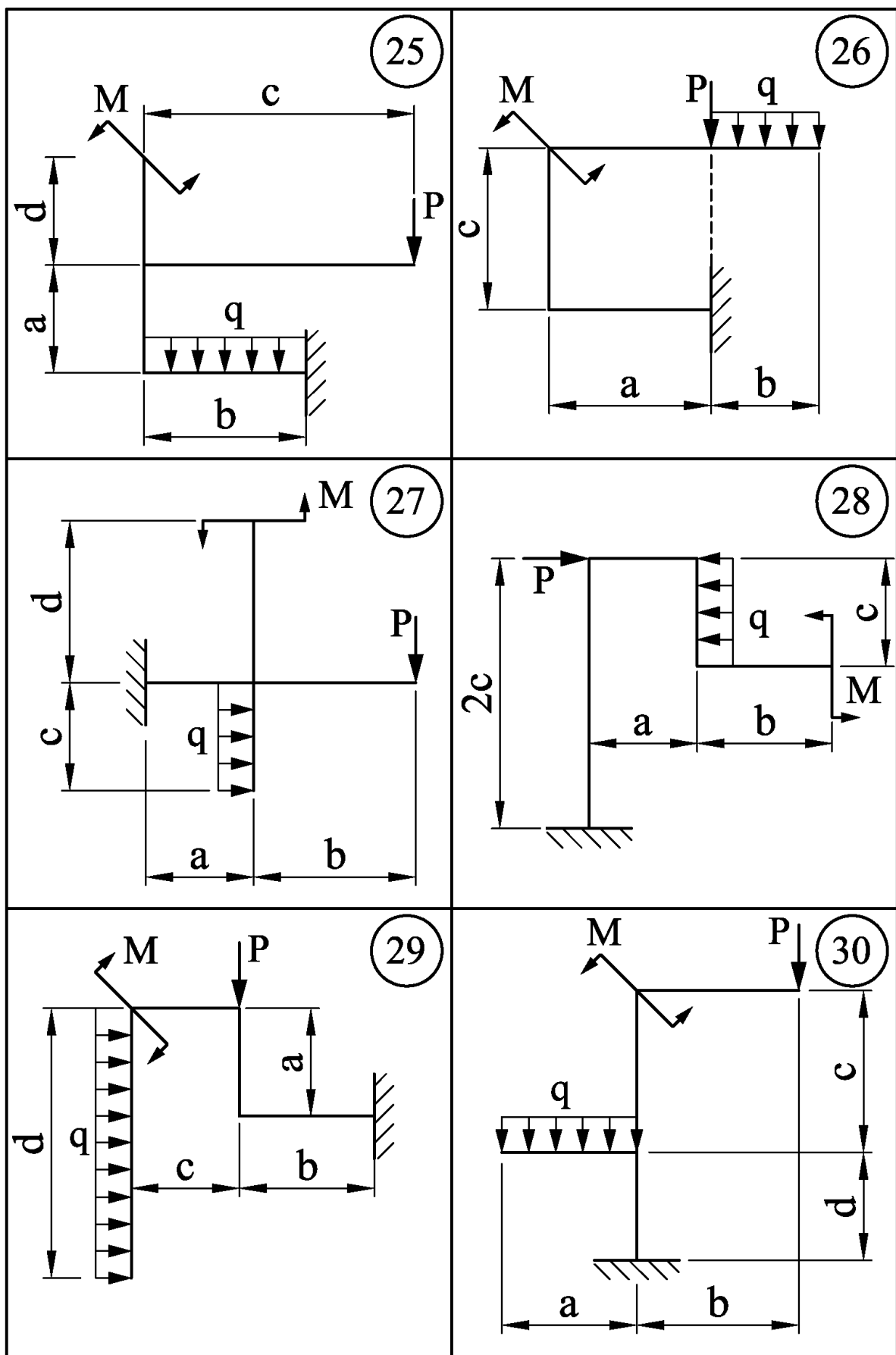


Рисунок 2.9, аркуш 5

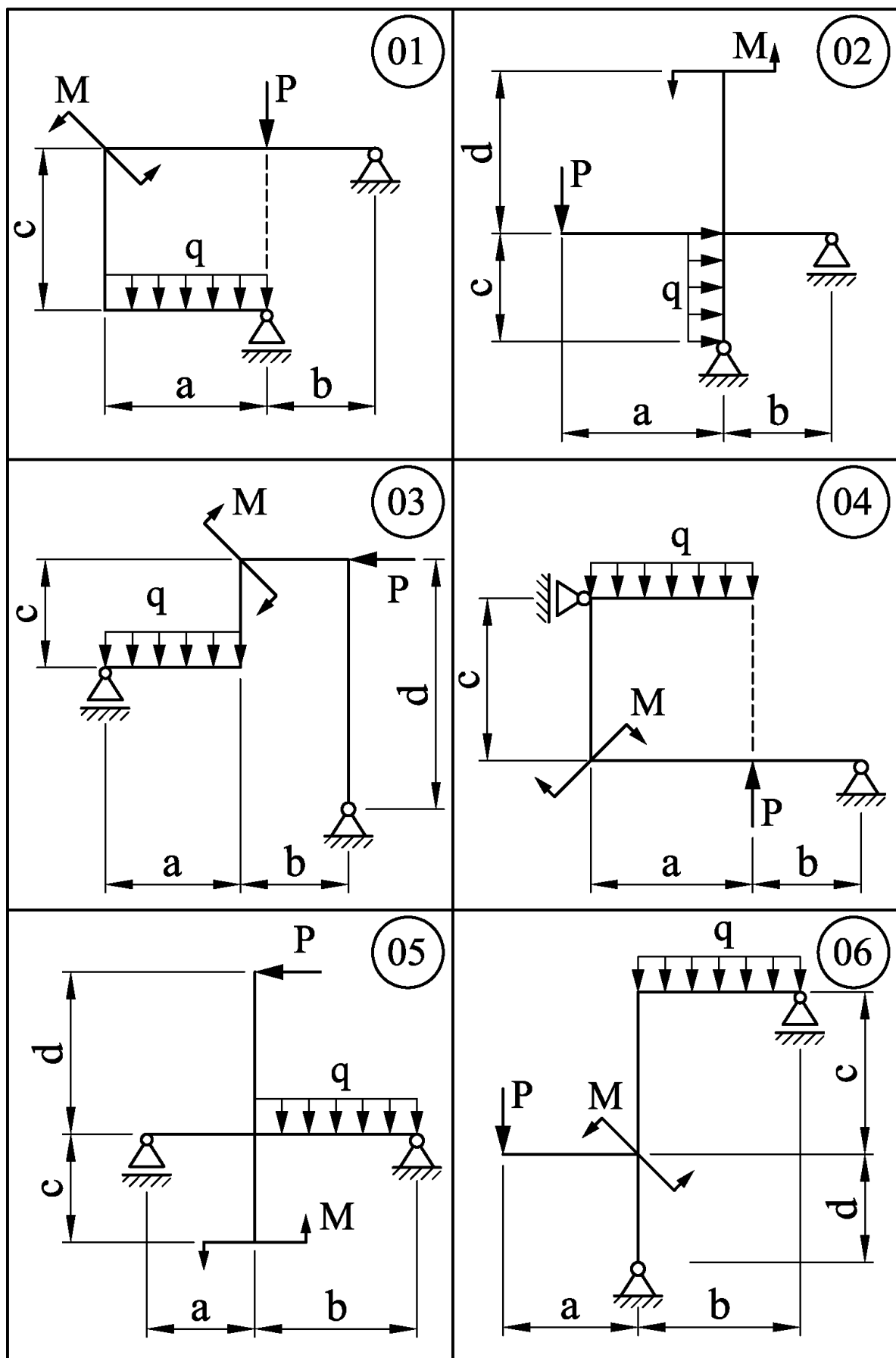


Рисунок 2.10

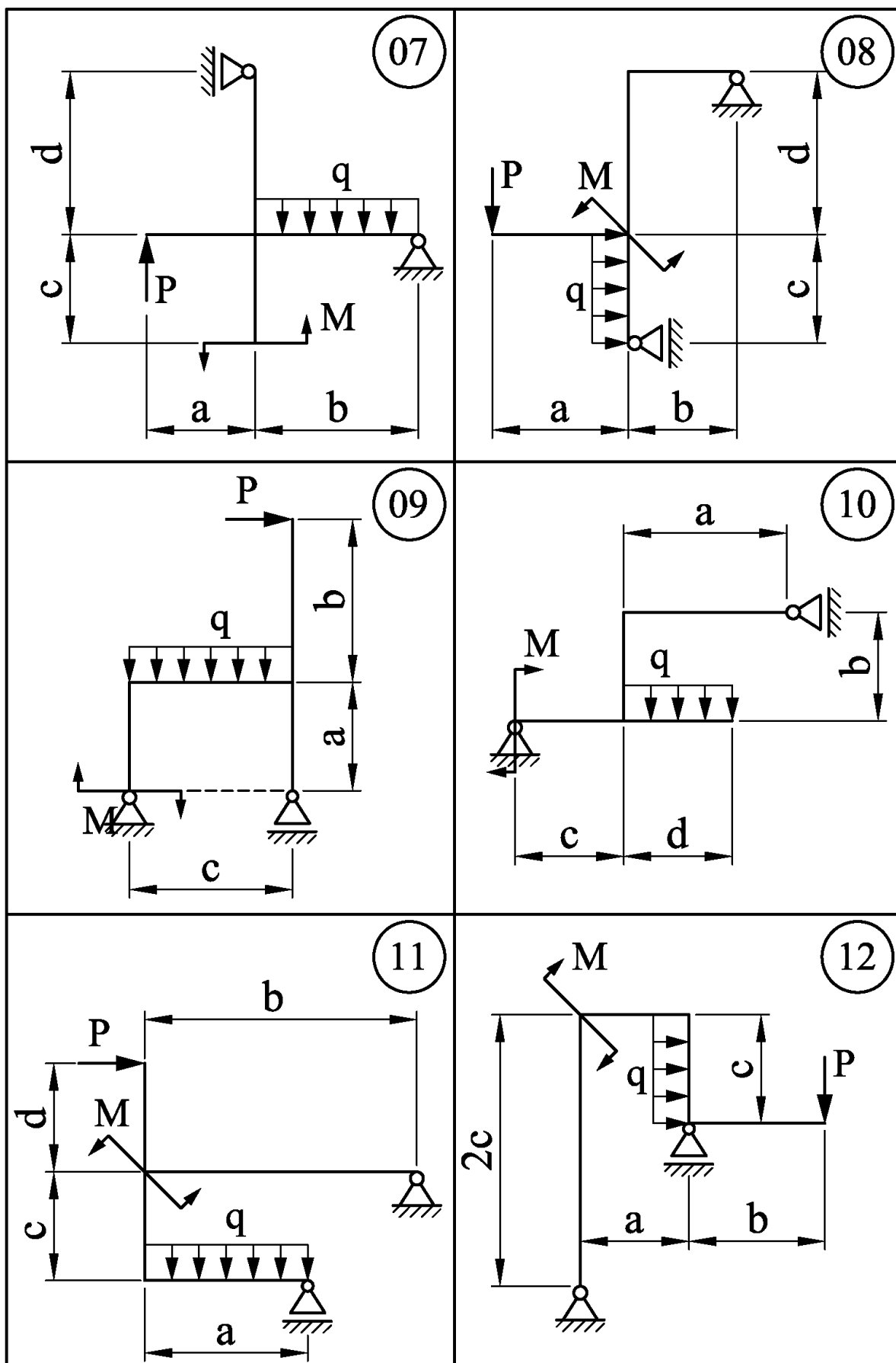


Рисунок 2.10, аркуш 2

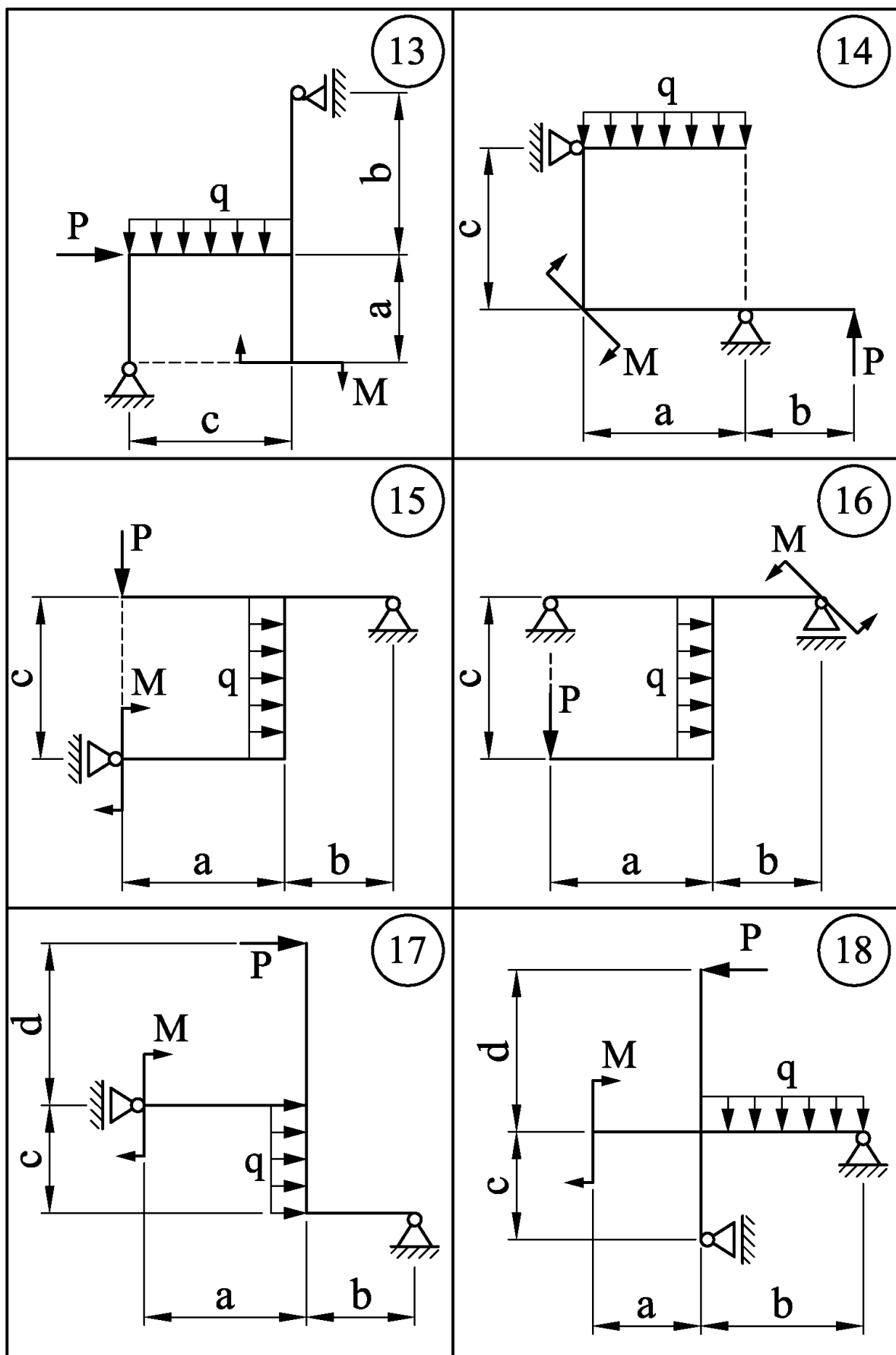


Рисунок 2.10, аркуш 3

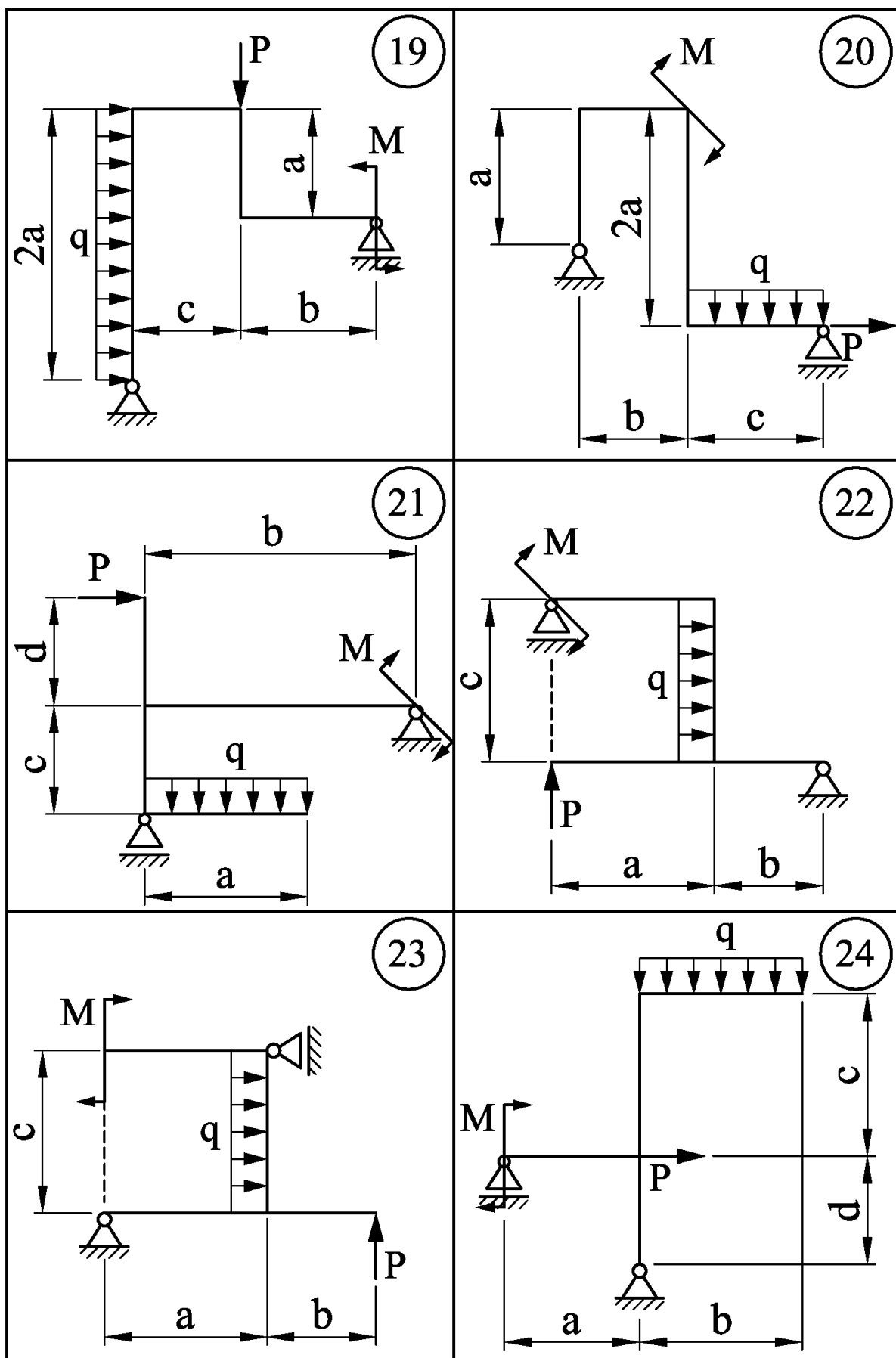


Рисунок 2.10, аркуш 4

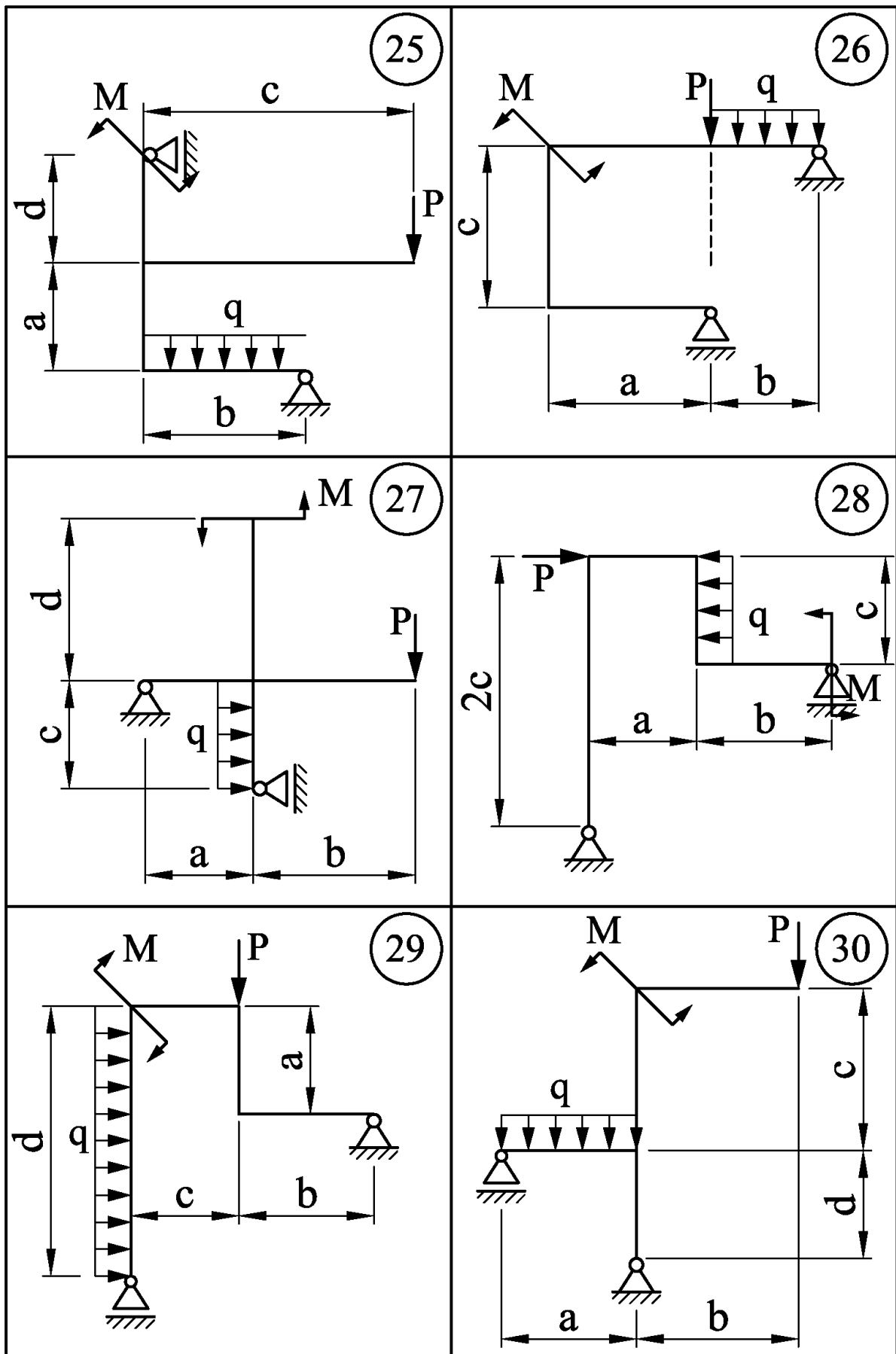


Рисунок 2.10, аркуш 5

Вісь рами є ломаною лінією, а кожний прямолінійний елемент рами можна розглянути як балку. Тому, щоб побудувати яку-небудь епюру для рами, треба побудувати її для кожної окремої балки, що входить до складу рами.

На відміну від звичайних балок у перерізі стрижнів рами, крім згинальних моментів M і поперечних сил Q , як правило, виникають ще поздовжні зусилля N . Отже для рам доводиться будувати епюри N , Q та M , значення яких можна знайти за наступними правилами.

Поздовжня сила N дорівнює сумі проекцій на вісь стрижня усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

Поперечна сила Q дорівнює сумі проекцій на перпендикуляр до осі усіх зовнішніх сил, які розташовані з одного боку від перерізу.

Згинальний момент M дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил з одного боку від перерізу, який розглядаємо, відносно центра ваги цього перерізу.

Будемо використовувати такі *правила знаків* для N , Q й M , які є однаковими для балок та рам.

Поздовжня сила N вважається додатною, якщо вона викликає розтягання стрижня.

Поперечна сила Q в перерізі вважається додатною, якщо зовнішня сила намагається повернути переріз, який розглядаємо, за напрямком руху годинникової стрілки.

При побудові епюр на балках прийняте таке правило знаків щодо згинального моменту: «згинальний момент M у перерізі вважається додатним, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки».

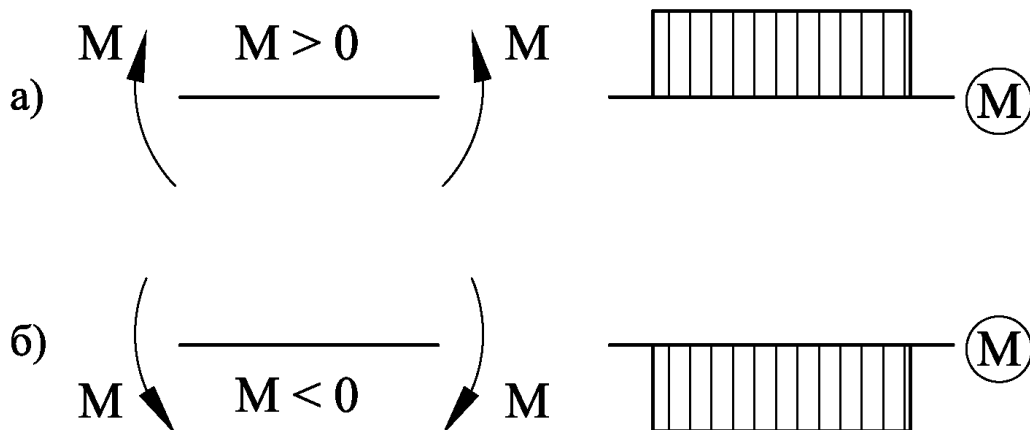


Рисунок 2.11

За цим правилом епюра згинальних моментів будується на верхніх волокнах, якщо згинальний момент додатний (рис. 2.11, а), або на нижніх – якщо згинальний момент від’ємний (рис. 2.11, б).

Таким чином, загальне правило побудови епюри згинальних моментів M для балок та рам буде виглядати так: *епюру згинальних моментів будують на стиснутих волокнах*. Це правило може бути записано інакше: *епюра згинальних моментів будується у тому напрямку, куди зовнішні сила чи момент загинають ділянку стрижня, яку розглядаємо*.

Вирази для $M(z)$, $Q(z)$ записують дуже рідко – здебільшого для тих ділянок, де діють розподілені навантаження. Найчастіше просто обчислюють значення N , Q та M у характерних перерізах (на межах ділянок та в екстремальних точках), а потім проводять лінії епюр, зважаючи на їхні властивості, про які йшлося в методичних вказівках для виконання задач 1 та 2.

Ординати епюр, як і завжди, будемо відкладати *перпендикулярно* до осей стрижнів рами, що утворюють базу, контур якої збігається з контуром рами. Якщо рама має жорстке закріплення, то епюри N , Q та M можна будувати, не визначаючи реакції опор і «йдучи» з вільного кінця рами.

2.2.2 Приклад розв'язання задачі 2.3

Для заданої рами (рис. 2.12, а) побудувати епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q та згинальних моментів M .

Розв'язання. Будемо будувати епюри, «рухаючись» з вільного кінця рами. Означимо на балці характерні перерізи (див. рис. 2.12, а) за правилами, записаними вище.

Визначимо поздовжні сили N у характерних перерізах.

Ділянка 1...2 розташована горизонтально, тому поздовжні сили повинні діяти також горизонтально. Таких сил у перерізі 1 та 2 немає, отже,

$$N_1 = N_2 = 0.$$

Ділянка 3...4 розташована вертикально, тому сила розподіленого навантаження q проектується на вісь цієї ділянки і викликає поздовжню силу, яка розтягає ділянку

$$N_3 = N_4 = q \cdot a = 4 \cdot 2 = 8 \text{ (кН)}.$$

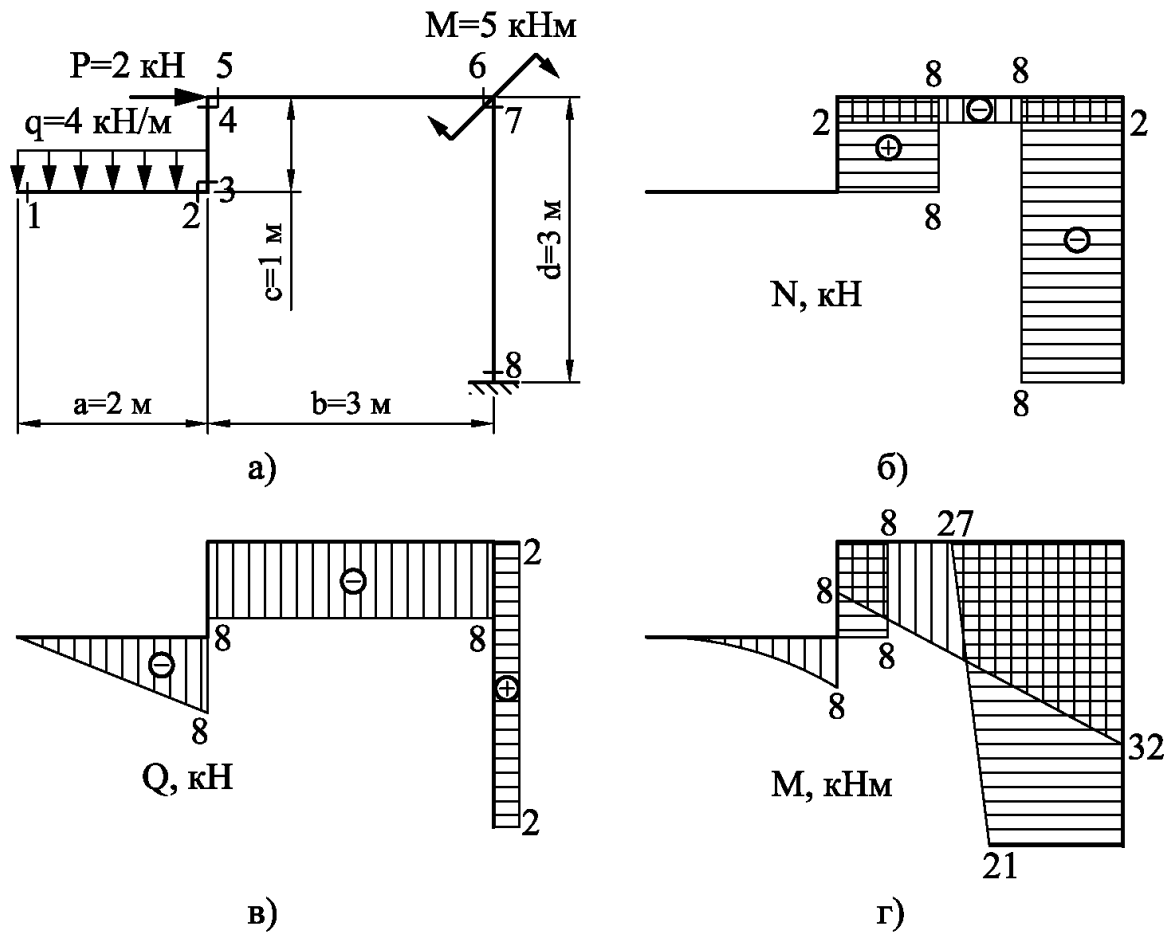
На перерізи 5 та 6 діє сила $P = 2 \text{ кН}$, яка розміщена горизонтально і стискає ділянку 5...6, тому

$$N_5 = N_6 = -P = -2 \text{ (кН)}.$$

Ділянка 7...8 також розташована вертикально і на неї, стискаючи, діє сила розподіленого навантаження

$$N_7 = N_8 = -q \cdot a = -4 \cdot 2 = -8 \text{ (кН)}.$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил N , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової осі епюри, яка має контур рами (рис. 2.12, б). З'єднаємо знайдені точки прямими лініями, враховуючи правила, наведені вище.



*а – задана схема, б – епюра поздовжніх сил,
 в – епюра поперечних сил, г – епюра згинальних моментів
 Рисунок 2.12 – Консольна рама до задачі 2.3*

Визначимо поперечні сили Q в характерних перерізі.

У перерізі 1 поперечною силою є розподілене навантаження, яке діє на нескінченно малому відрізку, тому

$$Q_1 = q \cdot 0 = 0.$$

У перерізі 2 розподілене навантаження намагається повернути ділянку 1...2 проти ходу годинникової стрілки і поперечна сила досягає величини

$$Q_2 = -qa = -4 \cdot 2 = -8 \text{ (кН)}.$$

На ділянці 3...4, яка розташована вертикально, немає жодної сили, яка б проектувалась на перпендикуляр до осі цієї ділянки стрижня, тому

$$Q_3 = Q_4 = 0.$$

У перерізах 5 та 6 поперечною є сила розподіленого навантаження, яка намагається повернути ділянку 5...6 проти ходу годинникової стрілки:

$$Q_5 = Q_6 = Q_2 = -qa = -8 \text{ (кН)}.$$

У перерізах 7 та 8 поперечною є сила $P = 2 \text{ кН}$, яка намагається повернути ділянку 7...8 за ходом годинникової стрілки, тому

$$Q_7 = Q_8 = P = 2 \text{ (кН)}.$$

Побудуємо епюру поперечних сил Q , для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 2.12, в). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи наведені вище правила.

На ділянці 1...2, де діє розподільне навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2). На ділянках 5...6 та 7...8 розподільного навантаження немає, тому (див. правило 1) епюра Q окреслюється прямими, паралельними базі.

Визначимо згинальні моменти M у характерних перерізах.

У перерізі 1 згинальний момент M дорівнює нулю, оскільки розподілене навантаження діє на нескінченно малому відрізку

$$M_1 = 0.$$

На 2 переріз діє розподілене навантаження інтенсивністю q , яке загинає балку униз, тому момент, як і в балках, позначимо знаком «мінус»:

$$M_2 = -q \cdot 2 \cdot 1 = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 \text{ (кНм)}.$$

У перерізі 3 діє той же момент, що і у перерізі 2, але він загинає ділянку 3...4 вправо, тому з умови рівноваги нижнього жорсткого вузла

момент M_2 стискає нижні волокна ригеля, а рівний йому за модулем момент M_3 стискає праві волокна стійки:

$$M_3 = |M_2| = 8 \text{ (кНм)}.$$

На ділянці 3 ... 4 немає ніяких зовнішніх зусиль, тому

$$M_4 = M_3 = -8 \text{ (кНм)}.$$

У перерізі 5 діє той же момент, що і у перерізі 2, 3 та 4, який також загинає балку униз, тому з умови рівноваги верхнього жорсткого вузла зліва: момент M_4 стискає праві волокна стійки, а рівний йому за модулем момент M_5 стискає нижні волокна верхнього ригеля:

$$M_5 = M_4 = -8 \text{ (кНм)}.$$

У перерізі 6 згинальний момент дорівнює:

$$M_6 = -q \cdot 2 \cdot 4 = -4 \cdot 2 \cdot 4 = -32 \text{ (кНм)}.$$

У перерізі 7 крім згинального моменту M_6 , який загинає вертикальну ділянку вліво, з'являються також зовнішній зосереджений момент M , але він діє в протилежному напрямку, тому з умови рівноваги верхнього жорсткого вузла праворуч момент M_7 стискає ліві волокна стійки, що закріплюється в жорсткому защемленні

$$M_7 = M_6 + M = -32 + 5 = -27 \text{ (кНм)}.$$

На 8 переріз діють момент M , сила P та розподілене навантаження інтенсивністю q , тому з урахуванням їх плечей маємо:

$$M = -q \cdot 2 \cdot 4 + M + P \cdot 3 = -4 \cdot 2 \cdot 4 + 5 + 2 \cdot 3 = -21 \text{ (кНм)}.$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (рис. 2.12, г). При цьому треба мати на увазі, що на ділянці 1...2 епюра згинальних моментів повинна бути окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження, тобто уверх. А на всіх інших ділянках добуті ординати треба з'єднувати прямими лініями.

Епюри згинальних моментів на всіх ділянках будемо будувати на стиснутих волокнах, або у тому напрямку, куди сили та момент загинають стрижні. Так на ділянках 1...2 та 5...6 стрижні загинаються униз, на ділянці

3...4 розподілене навантаження загинає вертикальний стрижень праворуч, а на ділянці 7...8 сумісна дія зовнішніх факторів (q , P , M) загинає вертикальний стрижень ліворуч (див. рис. 2.12, г).

2.2.3 Приклад розв'язання задачі 2.3 в системі Mathcad

Для визначення опорних реакцій R_A , H_A та M_A складаємо три рівняння статки:

$$\sum M_A = 0, \quad -M - P \cdot d + q \cdot a \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right) - M_A = 0,$$

$$\sum P_x = 0, \quad P - H_A = 0,$$

$$\sum P_y = 0, \quad -q \cdot a + R_A = 0.$$

Розрахунок проведемо за допомогою блока GIVEN...FIND.

Для побудови епюр внутрішніх зусиль необхідно скласти аналітичні вирази $N(x)$, $N(y)$, $Q(x)$, $Q(y)$, $M(x)$ і $M(y)$ для кожної ділянки рами.

Ділянка 1 ($0 \leq x_1 \leq a$):

$$N(x_1) = 0, \quad Q(x_1) = -q \cdot x_1, \quad M(x_1) = -q \cdot \frac{x_1^2}{2}.$$

Ділянка 2 ($0 \leq y_1 \leq c$):

$$N(y_1) = q \cdot a, \quad Q(y_1) = 0, \quad M(y_1) = q \cdot \frac{a^2}{2}.$$

Ділянка 3 ($0 \leq x_2 \leq b$):

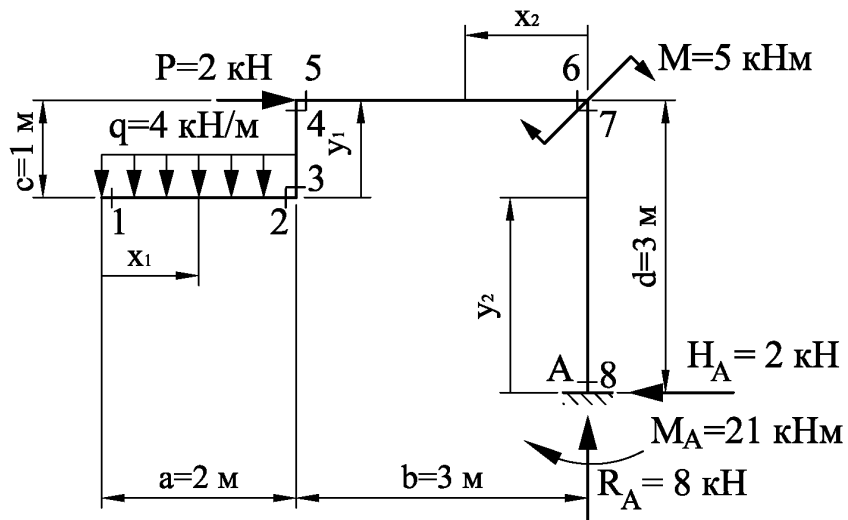
$$N(x_2) = -H_A, \quad Q(x_2) = -R_A, \quad M(x_2) = -M_A - M - H_A \cdot d + R_A \cdot x_2.$$

Ділянка 4 ($0 \leq y_2 \leq d$):

$$N(y_2) = -R_A, \quad Q(y_2) = H_A, \quad M(y_2) = M_A + H_A \cdot y_2.$$

Вхідні дані:

$$\begin{aligned} a &:= 2 & b &:= 3 & c &:= 1 & d &:= 3 \\ M &:= 5 & P &:= 2 & q &:= 4 \end{aligned}$$



Реакції в защемленні:

$$R_A := 0 \quad H_A := 0 \quad M_A := 0$$

Given

$$-M - P \cdot d + q \cdot a \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right) - M_A = 0$$

$$P - H_A = 0$$

$$-q \cdot 2 + R_A = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_A \\ H_A \\ M_A \end{pmatrix} := \text{Find}(R_A, H_A, M_A)$$

$$R_A = 8 \quad H_A = 2 \quad M_A = 21$$

Рівняння і значення поздовжніх сил на кожній ділянці:

$$x1 := 0, 0.005 \dots a \quad x2 := 0, 0.005 \dots b$$

$$y1 := 0, 0.005 \dots c \quad y2 := 0, 0.005 \dots d$$

$$N(x1) := 0 \quad N1 := N(0) = 0$$

$$N2 := N(a) = 0$$

$$N(y1) := q \cdot a \quad N3 := N(0) = 8$$

$$N4 := N(c) = 8$$

$$N(x2) := -H_A \quad N5 := N(0) = -2$$

$$N6 := N(b) = -2$$

$$N(y2) := -R_A \quad N7 := N(0) = -8$$

$$N8 := N(d) = -8$$

Рівняння і значення поперечних сил на кожній ділянці:

$$x1 := 0, 0.005 \dots a$$

$$x2 := 0, 0.005 \dots b$$

$$y1 := 0, 0.005 \dots c$$

$$y2 := 0, 0.005 \dots d$$

$$Q(x1) := -q \cdot x1$$

$$Q1 := Q(0) = 0$$

$$Q2 := Q(a) = -8$$

$$Q(y1) := 0$$

$$Q3 := Q(0) = 0$$

$$Q4 := Q(c) = 0$$

$$Q(x2) := -RA$$

$$Q5 := Q(0) = -8$$

$$Q6 := Q(b) = -8$$

$$Q(y2) := HA$$

$$Q7 := Q(0) = 2$$

$$Q8 := Q(d) = 2$$

Рівняння і значення згинальних моментів на кожній ділянці:

$$x1 := 0, 0.005 \dots a$$

$$x2 := 0, 0.005 \dots b$$

$$y1 := 0, 0.005 \dots c$$

$$y2 := 0, 0.005 \dots d$$

$$M(x1) := -q \cdot \frac{x1^2}{2}$$

$$M1 := M(0) = 0$$

$$M2 := M(a) = -8$$

$$M(y1) := q \cdot \frac{a^2}{2}$$

$$M3 := M(0) = 8$$

$$M4 := M(c) = 8$$

$$M(x2) := -MA - M - HA \cdot d + RA \cdot x2$$

$$M5 := M(0) = -8$$

$$M6 := M(b) = -32$$

$$M(y2) := MA + HA \cdot y2$$

$$M7 := M(0) = 21$$

$$M8 := M(d) = 27$$

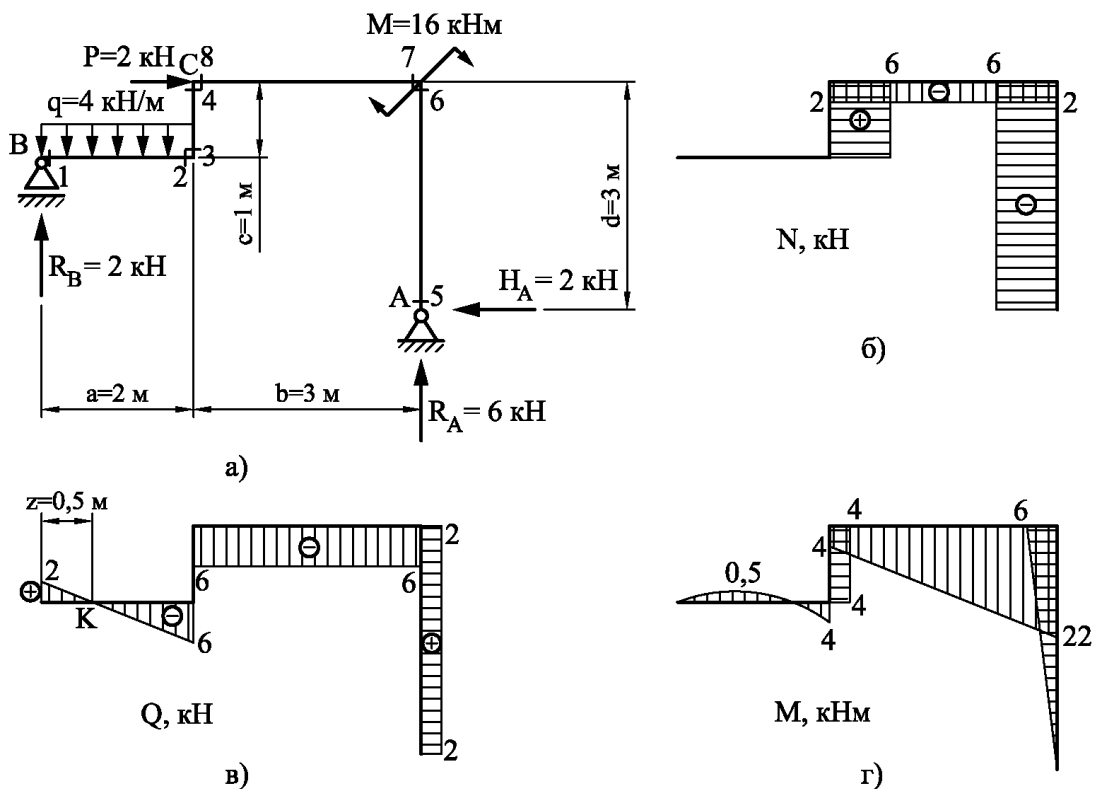
2.2.4 Приклад розв'язання задачі 2.4

Для заданої рами (рис. 2.13, а) побудувати епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q та згинальних моментів M .

Розв'язання. Задана рама опирається на дві опори (шарнірно-нерухома і шарнірно-рухома).

Знайдемо опорні реакції, для чого складемо для балки рівняння рівноваги. При складанні рівнянь зручно, щоб у кожному рівнянні було лише по одній невідомій реакції.

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, \\ -M - P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 4 - R_B \cdot 5 &= 0, \\ R_B &= \frac{-M - P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 4}{5} = \frac{-16 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 4}{5} = 2 \text{ (кН)}, \\ \sum P_y &= 0, \\ R_B - q \cdot 2 + R_A &= 0, \\ R_A &= -R_B + q \cdot 2 = -2 + 4 \cdot 2 = 6 \text{ (кН)}, \\ \sum P_x &= 0, \\ P - H_A &= 0, \\ H_A &= P = 2 \text{ (кН)}.\end{aligned}$$



*а – задана схема, б – епюра поздовжніх сил,
в – епюра поперечних сил, г – епюра згинальних моментів*
Рисунок 2.13 – Двоопорна рама

Зробимо перевірку:

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0, \\ -M + q \cdot 2 \cdot 1 - H_A \cdot 3 + R_A \cdot 3 - R_B \cdot 2 &= 0, \\ -16 + 4 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 - 2 \cdot 2 &= 0, \\ -26 + 26 &= 0.\end{aligned}$$

Таким чином, реакції знайдені вірно.

Після звільнення від зв'язків опор рама має два «вільних» кінця. Тому побудову епюр необхідно проводити на кожному з них, рухаючись від «вільного» кінця до вузла *C*. Відповідно з цим означимо на балці характерні перерізи (див. рис. 2.13,а).

Визначимо поздовжні сили *N* в характерних перерізах.

Ділянка 1...2 розташована горизонтально, тому поздовжні сили повинні діяти також горизонтально. Зовнішні сили: реакція *R_B* та рівнодіюча розподіленого навантаження на цій ділянці мають нульові проекції на вісь стрижня, тому поздовжніх сил в перерізах 1, 2 немає, отже:

$$N_1 = N_2 = 0.$$

Ділянка 3...4 розташована вертикально, тому поздовжні сили повинні діяти також вертикально. Уздовж цього стрижня діють реакція *R_B* та рівнодіюча розподіленого навантаження. Реакція *R_B* стискає стрижень, тому має знак «-», а рівнодіюча розподіленого навантаження розтягує стрижень, тому має знак «+» :

$$N_3 = N_4 = -R_B + q \cdot 2 = -2 + 4 \cdot 2 = 6 \text{ (кН)}.$$

Для перерізів 5-8 будемо рухатись з другого «вільного» кінця.

На ділянку 5...6 діють два силових фактора: *R_A* = 6 кН та *H_A* = 2 кН, з них тільки сила *R_A* має ненульову проекцію на вісь стрижня цієї ділянки, яку ця сила стискає.

Тому

$$N_5 = N_6 = -R_A = -6 \text{ (кН)}.$$

На горизонтальну ділянку 7...8 діють вже три силових фактора: *R_A* = 6 кН, *H_A* = 2 кН та *M* = 16 кНм, але тільки *H_A* спроможна відтворити поздовжню силу в цій ділянці, яку вона теж стискає:

$$N_7 = N_8 = -H_A = -2 \text{ (кН)}.$$

Побудуємо епюру поздовжніх сил *N*, для чого відкладемо результати розрахунків у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової рами (рис. 2.13, б). З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи наведені вище правила.

Визначимо поперечні сили *Q* в характерних перерізах.

Для перерізу 1 залишкова частина стрижня має безкінечно малу довжину, тому на неї діє реакція *R_B* = 2 кН. Реакція *R_B* намагається повернути залишкову частину за ходом годинникової стрілки, тому:

$$Q_1 = R_B = 2 \text{ (кН)}.$$

У перерізі 2 завдяки розподіленому навантаженню поперечна сила зменшується. Реакція R_B намагається повернути залишкову частину за ходом годинникової стрілки, а рівнодіюча – проти, тому:

$$Q_2 = R_B - q \cdot 2 = 2 - 4 \cdot 2 = -6 \text{ (кН)}.$$

На ділянці 3...4 поперечних сил немає, тому:

$$Q_3 = Q_4 = 0 \text{ (кН)}.$$

Якщо рухатись з другого «вільного кінця», то стрижень ділянки 5...6 має вертикальну вісь, тому з двох зовнішніх сил R_A та H_A тільки H_A викликає додатну поперечну силу

$$Q_5 = Q_6 = H_A = 2 \text{ (кН)}.$$

На ділянці 7...8 вісь стрижня горизонтальна, тому вже сила R_A відтворює у перерізах 7 та 8 від'ємну поперечну силу:

$$Q_7 = Q_8 = -R_A = -6 \text{ (кН)}.$$

Побудуємо епюру поперечних сил Q (рис. 2.13, в), для чого відкладемо знайдені результати у вигляді окремих ординат (з урахуванням масштабів) від базової лінії кожної ділянки рами. З'єднаємо добуті точки прямими лініями, враховуючи наведені вище правила. На ділянці 1...2, де діє розподілене навантаження інтенсивністю q , епюра Q обмежується похилою прямою (див. правило 2). А оскільки, згідно з правилом 3, Q переходить через нуль, змінюючи знак з «+» на «-», то $M_{extr} = M_{max}$. Знаходимо положення точці K , для чого визначаємо довжину відрізка z :

$$z = \frac{Q_{лів}}{q} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ (м)}.$$

На інших ділянках розподіленого навантаження немає, тому (див. правило 1) епюра Q окреслюється прямими, паралельними базі.

Визначимо згинальні моменти M в характерних перерізах.

У перерізі 1 згинальний момент M дорівнює нулю, оскільки реакція R_B та розподілене навантаження діють на нескінченно малому відрізку:

$$M_1 = 0.$$

На ділянці 1...2 R_B стискає верхні волокна, тому відповідний згинальний момент згідно з правилами є додатним, рівнодіюча розподіленого навантаження навпаки стискає нижні, тому створює від'ємний згинальний момент.

У перерізі 2 маємо

$$M_2 = R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \text{ (кНм)}.$$

На вертикальній ділянці 3...4, у перерізах 3 та 4 згинальний момент створюють два силових фактори: реакція R_B та розподілене навантаження q . Причому реакція R_B стискає ліві волокна, а розподілене навантаження q стискає праві волокна, тому згинальні моменти від R_B та q мають різні знаки.

$$M_3 = M_4 = R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \text{ (кНм)}.$$

Так як ми отримали значення M_3 та M_4 від'ємними, то робимо висновок, що стиснуті праві волокна, тому значення M_3 та M_4 відкладаємо у праву сторону від базової лінії.

Рухаючись з другого «вільного» кінця, у перерізі 5 згинальний момент дорівнює нулю, оскільки плече реакції H_A є довжиною нескінченно малого відрізка

$$M_5 = 0 \text{ (кНм)}.$$

У перерізі 6 плече реакції H_A вже 3 м, тому

$$M_6 = H_A \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (кНм)},$$

де згинальний момент від H_A стискає ліві волокна, тому значення M_6 відкладаємо у ліву сторону від базової лінії.

На горизонтальній ділянці 7...8, у перерізі 7 згинальний момент створюють два силових фактори: $H_A = 2$ кН та зосереджений момент $M = 16$ кНм. На ділянці 7...8 реакція H_A та зосереджений момент стискають ніжні волокна, тому відповідний згинальний момент згідно з правилами є від'ємним, тому

$$M_7 = -M - H_A \cdot 3 = -16 - 2 \cdot 3 = -22 \text{ (кНм)}.$$

Так як ми отримали значення M_7 від'ємним, то робимо висновок, що стиснуті ніжні волокна, тому значення M_7 відкладаємо донизу від базової лінії.

перерізі 8 згинальний момент створюють три силових фактора: $R_A = 6 \text{ кН}$, $H_A = 2 \text{ кН}$ та зосереджений момент $M = 16 \text{ кНм}$. На ділянці 7...8 реакція H_A та зосереджений момент стискають ніжні волокна, тому відповідний згинальний момент згідно з правилами є від'ємним, а реакція R_A стискає верхні волокна, тому відповідний згинальний момент згідно з правилами є додатнім, тому

$$M_8 = -M - H_A \cdot 3 + R_A \cdot 3 = -16 - 2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = -4 \text{ (кНм)}.$$

Так як ми отримали значення M_8 від'ємним, то робимо висновок, що стиснуті ніжні волокна, тому значення M_8 відкладаємо донизу від базової лінії.

Як ми зазначали раніше, у перерізі K момент має найбільше значення:

$$M_{extr} = M_{max} = R_B \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = 2 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,5}{2} = 0,5 \text{ (кНм)}.$$

За визначеними даними побудуємо (з урахуванням масштабів) епюру згинальних моментів (рис. 2.13, г).

При цьому, як вже говорилося у попередньому розділі, епюру згинальних моментів треба будувати на стиснутих волокнах. Так на ділянці 1...2, де є реакція R_B та розподілене навантаження, епюра згинальних моментів повинна бути відкладена уверх і окреслена параболою, випуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження (див. рис. 2.13).

На ділянці 3...4 ординату епюри відкладають вліво від лінії стрижня, як від бази, і вона має вигляд прямої.

На ділянці 5...6, де є реакція H_A , ординату епюри відкладають уліво у вигляді похилої прямої.

На ділянці 7...8 лінія епюри згинальних моментів похила.

2.2.5 Приклад розв'язання задачі 2.4 в системі Mathcad

Для визначення опорних реакцій R_A , H_A та R_B складаємо три рівняння статки:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, \quad -M - P \cdot d + q \cdot a \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right) - R_B \cdot (a + b) &= 0, \\ \sum P_x = 0, \quad P - H_A &= 0, \end{aligned}$$

$$\sum P_y = 0, \quad -q \cdot a + R_B + R_A = 0.$$

Розрахунок проведемо за допомогою блока GIVEN...FIND.

Для побудови епюр внутрішніх зусиль необхідно скласти аналітичні вирази $N(x)$, $N(y)$, $Q(x)$, $Q(y)$, $M(x)$ і $M(y)$ для кожної ділянки рами.

Ділянка 1 ($0 \leq x_1 \leq a$):

$$N(x_1) = 0, \quad Q(x_1) = R_B - q \cdot x_1, \quad M(x_1) = R_B \cdot x_1 - q \cdot \frac{x_1^2}{2}.$$

Ділянка 2 ($0 \leq y_1 \leq c$):

$$N(y_1) = -R_B + q \cdot a, \quad Q(y_1) = 0, \quad M(y_1) = R_B \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2}.$$

Ділянка 3 ($0 \leq x_2 \leq b$):

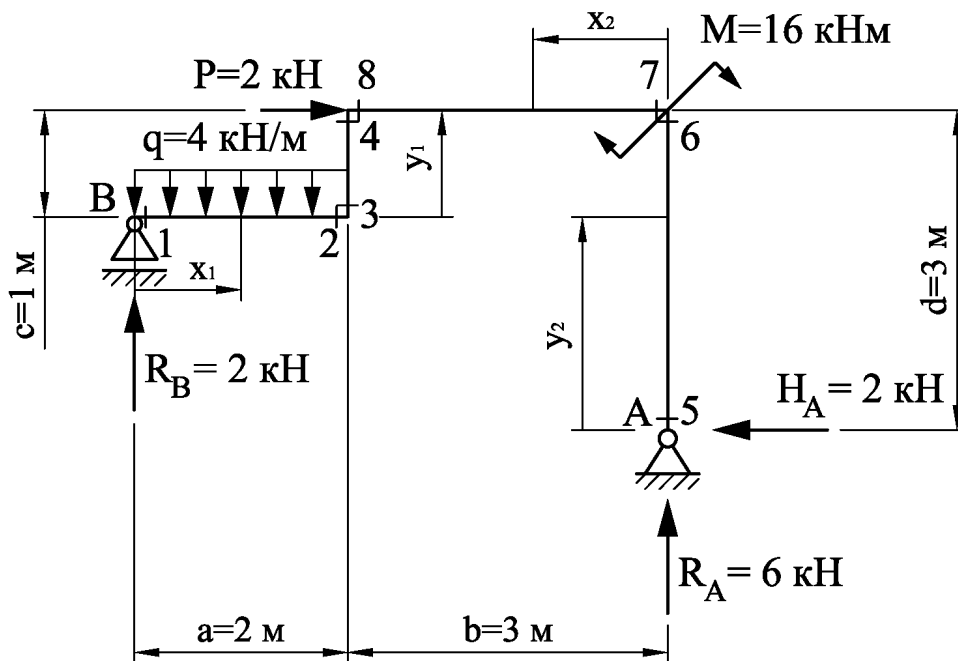
$$N(x_2) = -H_A, \quad Q(x_2) = -R_A, \quad M(x_2) = -M - H_A \cdot d + R_A \cdot x_2.$$

Ділянка 4 ($0 \leq y_2 \leq d$):

$$N(y_2) = -R_A, \quad Q(y_2) = H_A, \quad M(y_2) = H_A \cdot y_2.$$

Значення максимального моменту знаходимо з умови, що функція поперечної сили є похідною від функції згинального моменту, тобто функція згинальних моментів матиме екстремум в точці, де поперечна сила дорівнює нулю. Початкове наближення x_1 приймаємо близько до розшукуваного перерізу, тобто $x_1 = 0$.

Вхідні дані:			
a := 2	b := 3	c := 1	d := 3
M := 16	P := 2	q := 4	
Реакції в заземленні:			
RA := 0	HA := 0	RB := 0	



Given

$$-M - P \cdot d + q \cdot a \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right) - R_B \cdot (a + b) = 0$$

$$P - H_A = 0$$

$$-q \cdot 2 + R_B + R_A = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_A \\ H_A \\ R_B \end{pmatrix} := \text{Find}(R_A, H_A, R_B)$$

$$R_A = 6$$

$$H_A = 2$$

$$R_B = 2$$

Рівняння і значення поздовжних сил на кожній ділянці:

$$x1 := 0, 0.005 \dots a$$

$$x2 := 0, 0.005 \dots b$$

$$y1 := 0, 0.005 \dots c$$

$$y2 := 0, 0.005 \dots d$$

$$N(x1) := 0$$

$$N1 := N(0) = 0$$

$$N2 := N(a) = 0$$

$$N(y1) := q \cdot a - R_B$$

$$N3 := N(0) = 6$$

$$N4 := N(c) = 6$$

$$N(x2) := -H_A$$

$$N5 := N(0) = -2$$

$$N6 := N(b) = -2$$

$$N(y2) := -R_A$$

$$N7 := N(0) = -6$$

$$N8 := N(d) = -6$$

Рівняння і значення поперечних сил на кожній ділянці:

$$x1 := 0, 0.005 \dots a$$

$$x2 := 0, 0.005 \dots b$$

$$y1 := 0, 0.005 \dots c$$

$$y2 := 0, 0.005 \dots d$$

$$Q(x1) := RB - q \cdot x1$$

$$Q1 := Q(0) = 2$$

$$Q2 := Q(a) = -6$$

Положення точки К:

$$x1 := 0.01$$

Given

$$Q(x1) = 0 \quad x1 := \text{Find}(x1)$$

$$x1 = 0.5$$

$$Q(y1) := 0$$

$$Q3 := Q(0) = 0$$

$$Q4 := Q(c) = 0$$

$$Q(x2) := -RA$$

$$Q5 := Q(0) = -6$$

$$Q6 := Q(b) = -6$$

$$Q(y2) := HA$$

$$Q7 := Q(0) = 2$$

$$Q8 := Q(d) = 2$$

Рівняння і значення згинальних моментів на кожній ділянці:

$$x1 := 0, 0.005 \dots a$$

$$x2 := 0, 0.005 \dots b$$

$$y1 := 0, 0.005 \dots c$$

$$y2 := 0, 0.005 \dots d$$

$$M(x1) := RB \cdot x1 - q \cdot \frac{x1^2}{2}$$

$$M1 := M(0) = 0$$

$$M2 := M(a) = -4$$

Максимальний згинальний момент:

$$M(0.5) = 0.5$$

$$M(y1) := RB \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2}$$

$$M3 := M(0) = -4$$

$$M4 := M(c) = -4$$

$$M(x2) := -HA \cdot d - M + RA \cdot x2$$

$$M5 := M(0) = -22$$

$$M6 := M(b) = -4$$

$$M(y2) := HA \cdot y2$$

$$M7 := M(0) = 0$$

$$M8 := M(d) = 6$$

3 РОЗРАХУНОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

3.1 Симетричний складний переріз

Для складного перерізу визначити положення центра ваги, величини головних центральних моментів інерції.

Вихідні дані вибрати із таблиць 3.1 і 3.2, і рисунку 3.1.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до задачі 3.1

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номеру варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Швелер	18	20	22	24	27	30	33	36	40	33
Двотавр	18	20	22	24	27	30	33	36	40	33

Таблиця 3.2 – Вихідні дані до задачі 3.1

Величини	Значення величин відповідно до другої цифри номеру варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кутик	80x50x5	90x56x8	100x63x10	140x90x10	160x100x12	180x110x12	100x63x7	140x90x8	160x100x14	180x110x12
Смуга, $h \times b, \text{ см}^2$	24x1,2	26x1,2	30x1,5	28x1,4	32x1,2	34x1,5	36x1,2	40x0,8	34x1,2	28x1,4

3.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 3.1

Для заданого перерізу вибрати систему осей, відносно яких визначити координати центрів ваги фігур, які до нього входять.

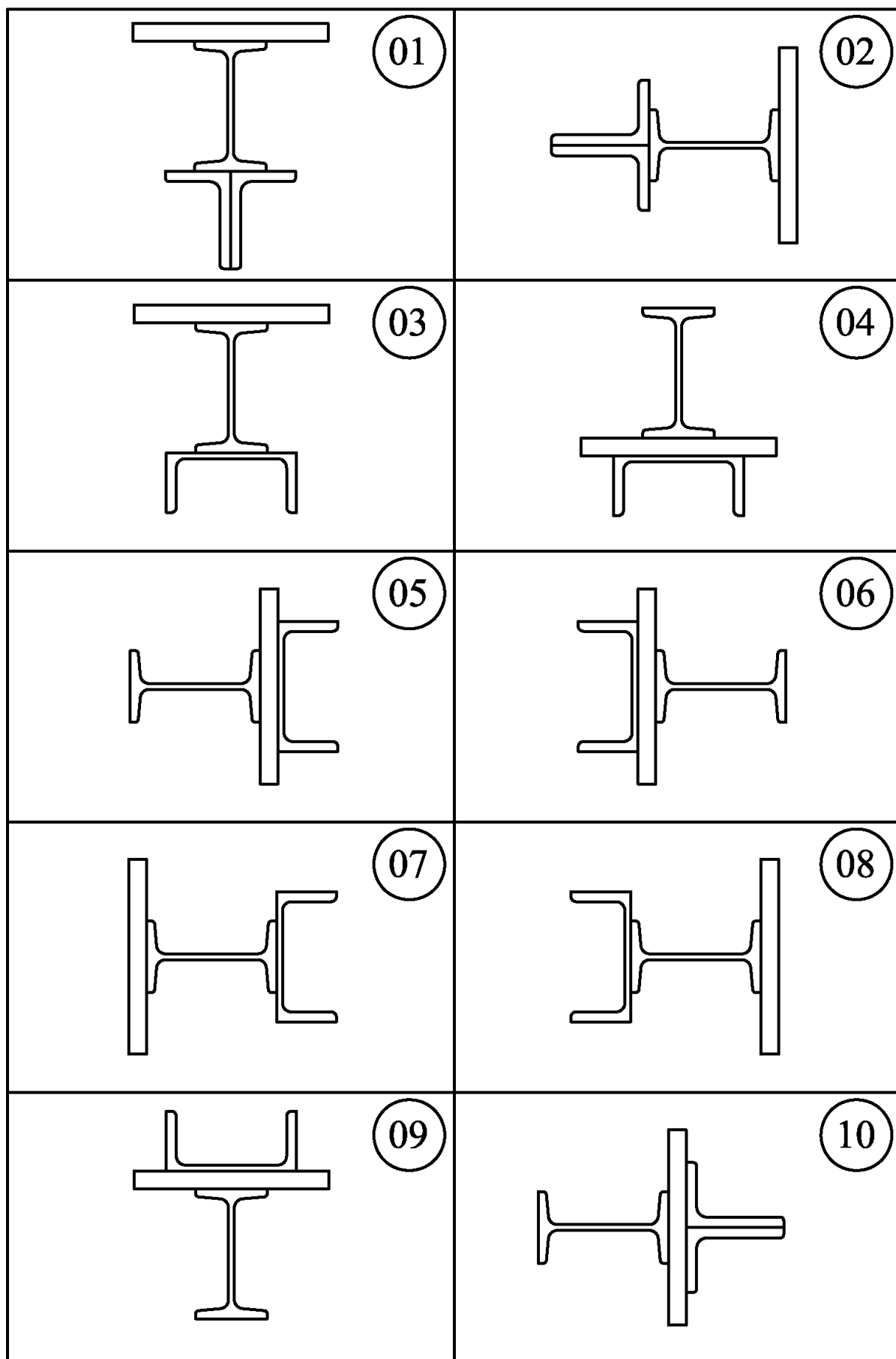


Рисунок 3.1

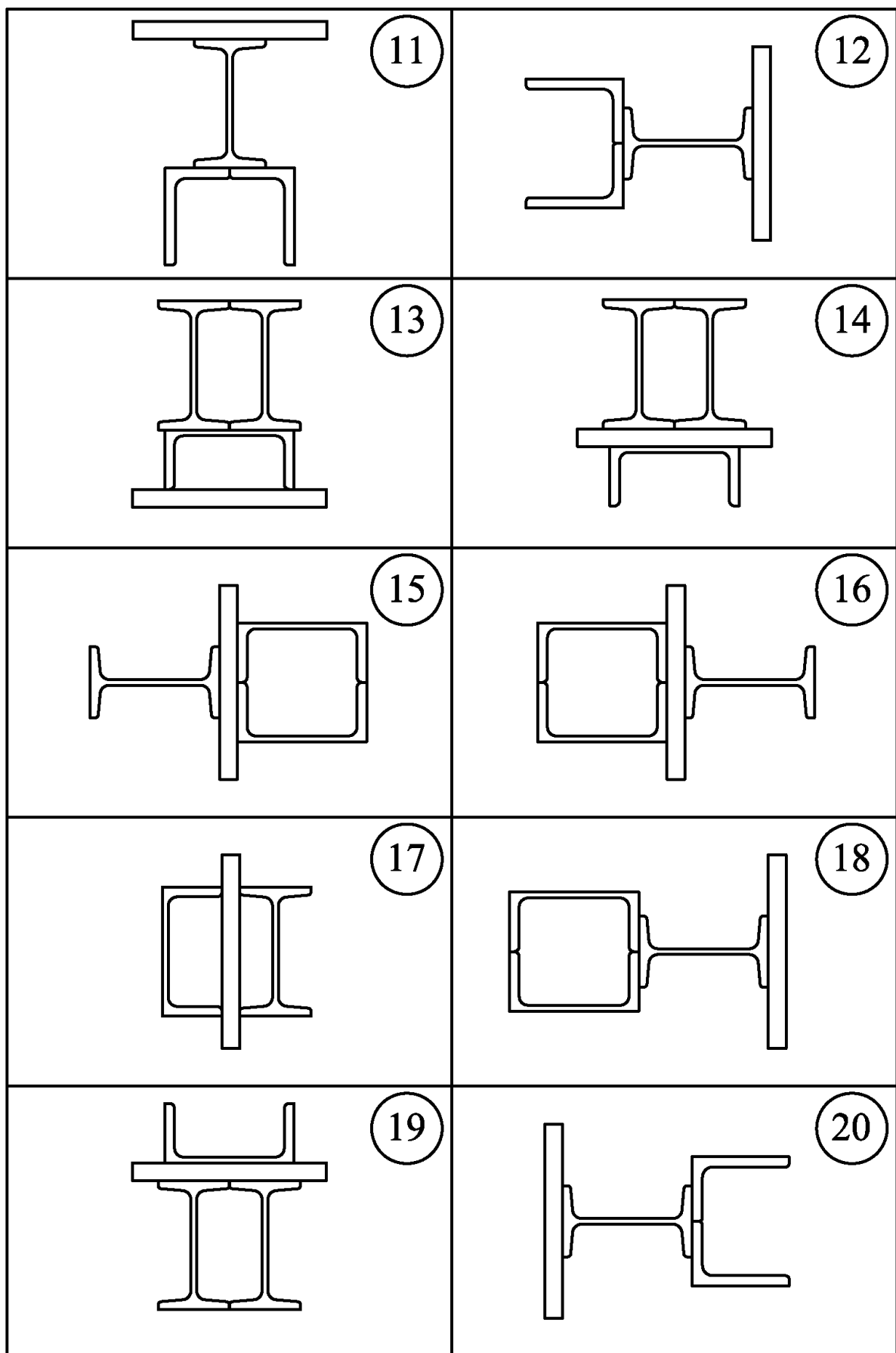


Рисунок 3.1, аркуш 2

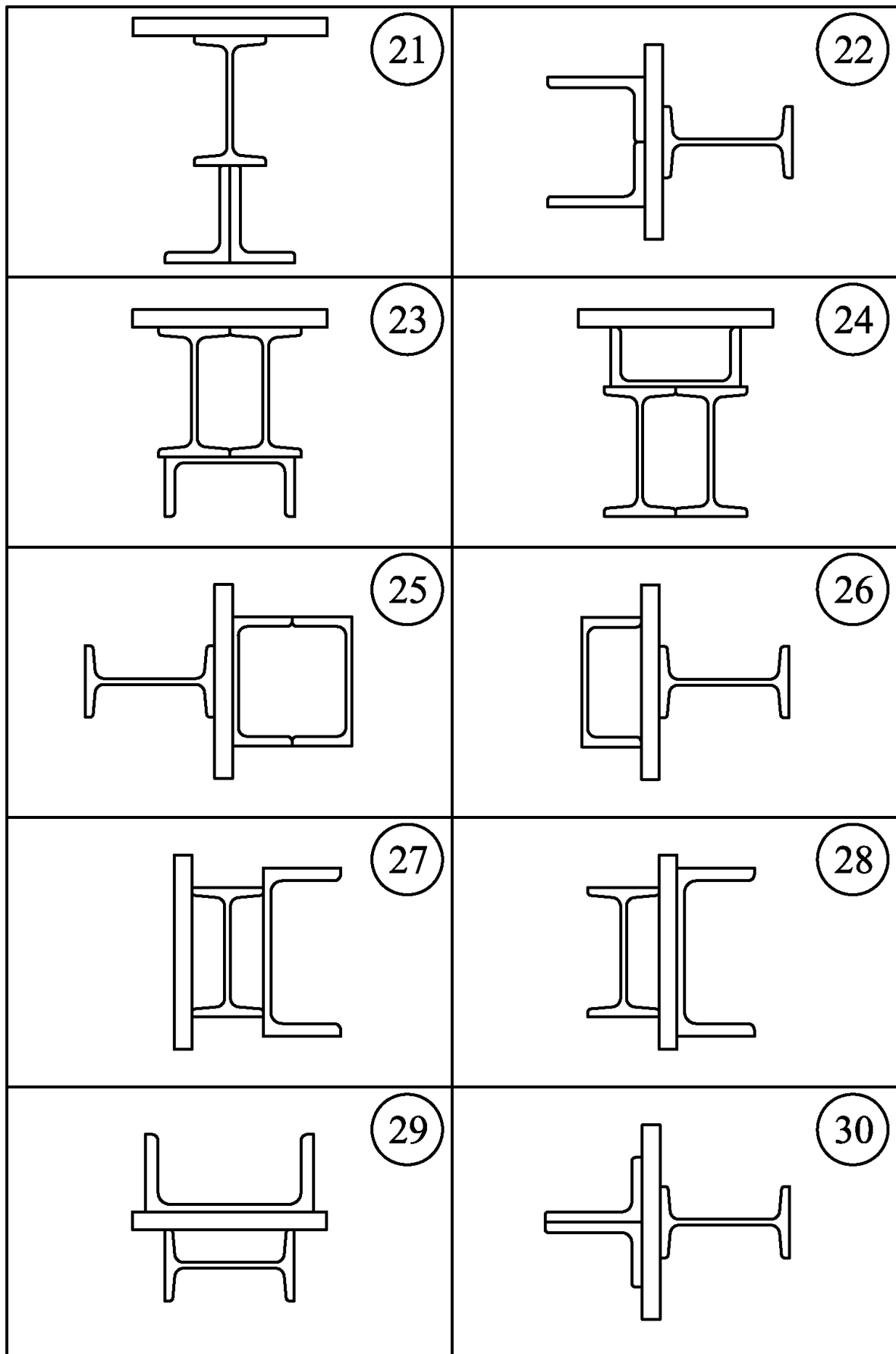


Рисунок 3.1, аркуш 3

1 За формулами визначити положення центра ваги складного перерізу:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad (3.1)$$

де x_c, y_c – координати центра ваги складного перерізу;

x_i, y_i – координати центрів ваги i -тої фігури у початковій системі осей;

F_i – площа поперечного перерізу i -ої фігури;

n – число фігур.

2 За знайденими координатами x_c, y_c нанести положення центра ваги складної фігури.

3 Через центр ваги складної фігури провести центральні осі всього перерізу, направляючи їх паралельно центральним осям фігур.

4 Визначаються осьові моменти інерції всієї фігури щодо центральних осей фігури за формулами:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i); \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i), \quad (3.2)$$

де J_{x_c}, J_{y_c} – осьові моменти інерції фігур, щодо власних центральних осей;

a_i – відстань між центральною віссю x_c складного перерізу і власною центральною віссю x_i i -ої фігури;

b_i – відстань між центральною віссю y_c складного перерізу і власною центральною віссю y_i i -ої фігури.

Для стандартних профілів типу швелера, двотавра, кутика осьові моменти інерції слід брати з таблиць сортаменту, для смуги - визначати за формулами:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12},$$

де b – сторона прямокутника, яка паралельна осі x ;

h – його висота.

Оскільки фігура має вісь симетрії y_c , то відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$. Отже, центральні осі x_c та y_c будуть і головними.

Моменти інерції відносно головних центральних осей перерізу означаються $J_U = J_{x_c}$, $J_V = J_{y_c}$.

3.1.2 Приклад розв'язання задачі 3.1

Для перерізу, показаного на рисунку 3.2, необхідно визначити положення головних центральних осей і моменти інерції відносно них.

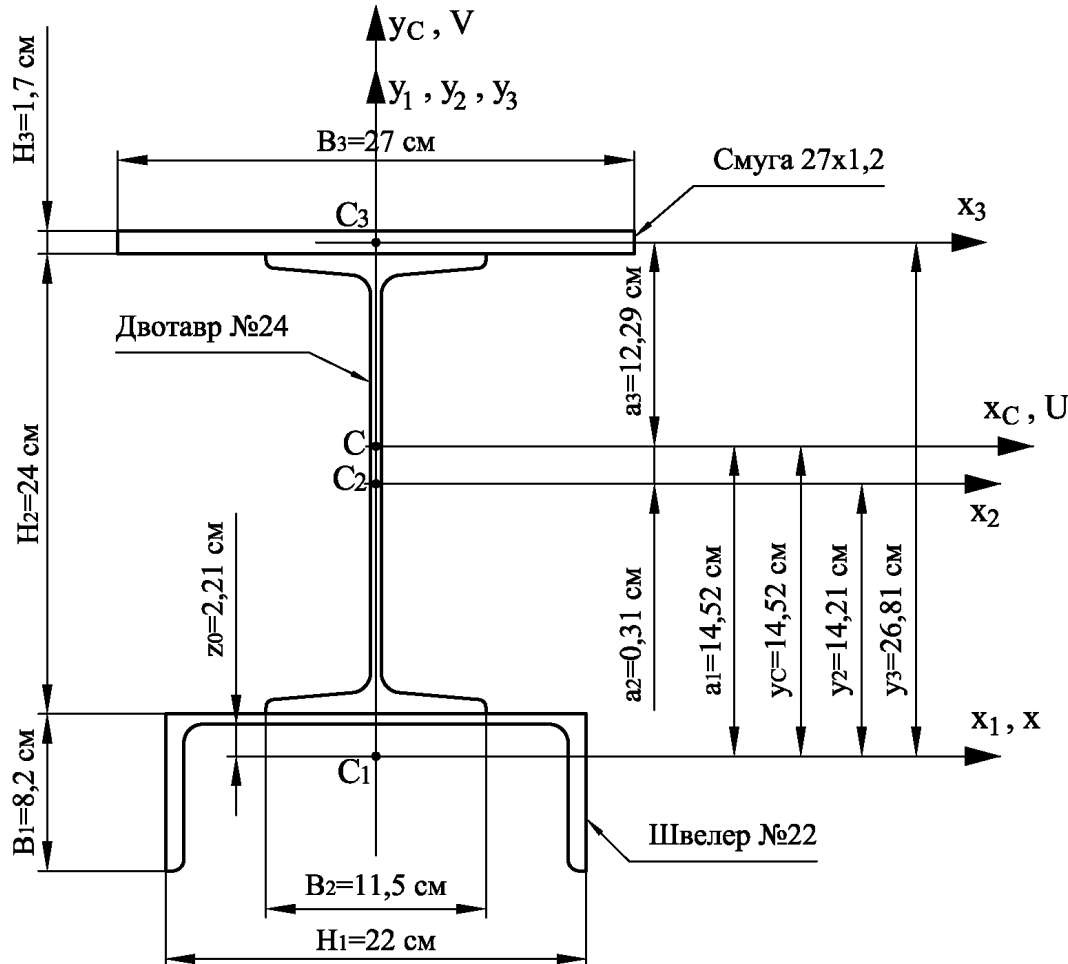


Рисунок 3.2 – Вид симетричного поперечного перерізу

Розв'язання. Перш за все, виписуємо геометричні характеристики прокатних профілів, які приводяться у додатку А або в підручниках і збірках з опору матеріалів (наприклад, [4]).

Швелер №22: $H_1 = 22$ см, $B_1 = 8,2$ см, $z_0 = 2,21$ см, $F_1 = 26,7$ см², $J_{x1} = 151$ см⁴, $J_{y1} = 2110$ см⁴.

Тут моменти J_{x1} і J_{y1} поміняли місцями, оскільки швелер розташований горизонтально, а не вертикально, як у довіднику.

Двотавр №24: $H_2 = 24$ см, $B_2 = 11,5$ см, $F_2 = 34,8$ см², $J_{x2} = 3460$ см⁴, $J_{y2} = 198$ см⁴.

Для смуги геометричні характеристики обчислюємо як для прямокутника:

$$F_3 = H_3 \cdot B_3 = 1,2 \cdot 27 = 32,4 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$J_{x3} = \frac{B_3 \cdot H_3^3}{12} = \frac{27 \cdot 1,2^3}{12} = 3,9 \text{ (см}^4\text{)}, \quad J_{y3} = \frac{H_3 \cdot B_3^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 27^3}{12} = 1968,3 \text{ (см}^4\text{)}.$$

Переріз виконуємо в масштабі (див. рис. 3.2).

Вибираємо систему координат. За початкові осі координат можна прийняти будь-яку систему, наприклад, систему осей координат, яка зв'язана з центрами ваги двотавра або швелера. За початкові приймемо осі x_1 і y_1 , тобто в центрі ваги швелера.

Визначимо координати центрів ваги всіх фігур в вибраній початковій системі осей координат:

$$y_1 = 0 \text{ (см)},$$

$$y_2 = z_0 + \frac{H_2}{2} = 2,21 + \frac{24}{2} = 12,6 \text{ (см)},$$

$$y_3 = z_0 + H_2 + \frac{H_3}{2} = 2,21 + 24 + \frac{1,2}{2} = 26,81 \text{ (см)}.$$

Оскільки переріз симетричний щодо осі y_1 , то центр ваги шукаємо тільки по висоті перерізу, тобто координату y_c , яку визначаємо за формулою:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} =$$

$$= \frac{0 \cdot 26,7 + 14,21 \cdot 34,8 + 26,81 \cdot 32,4}{26,7 + 34,8 + 32,4} = 14,52 \text{ (см)}.$$

На відстані $y_c = 14,52$ см від осі x_1 проводимо головну центральну вісь x_c .

Визначимо відстань між центральною віссю x_c перерізу і власними центральними осями x_i фігур:

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 14,52 = -14,52 \text{ (см)},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 14,21 - 14,52 = -0,31 \text{ (см)},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 26,81 - 14,52 = 12,29 \text{ (см)}.$$

Тепер визначаємо моменти інерції J_{x_c}, J_{y_c} :

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i) = 151 + 14,52^2 \cdot 26,7 + 3460 + 0,31^2 \cdot 34,8 + \\ + 3,9 + 12,29^2 \cdot 32,4 = 14141,2 \text{ (см}^4\text{)}.$$

Оскільки центри ваги всіх трьох фігур знаходяться на осі y_c , то $b_1=b_2=b_3=0$, тому

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i) = 2110 + 198 + 1968,3 = 4276,3 \text{ (см}^4\text{)}.$$

Оскільки фігура має вісь симетрії y_c , то відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$. Отже, центральні осі x_c та y_c будуть і головними.

Моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$J_U = J_{x_c} = 14141,2 \text{ (см}^4\text{)}, \quad J_V = J_{y_c} = 4276,3 \text{ (см}^4\text{)}.$$

3.1.3 Приклад розв'язання задачі 3.1 в системі Mathcad

Вхідні дані:

Швелер №22
Двотавр №24
Смуга 27х1,2 см

Геометричні характеристики складових перерізу:

Швелер №22	Двотавр №24
H1 := 22	H2 := 24
B1 := 8.2	B2 := 11.5
z0 := 2.21	F2 := 34.8
F1 := 26.7	Jx2 := 3460
Jx1 := 151	Jy2 := 198
Jy1 := 2110	
Смуга 27х1,2 см	H3 := 1.2 B3 := 27
	F3 := H3·B3 = 32.4

$$J_{x3} := \frac{B3 \cdot H3^3}{12} = 3.9 \quad J_{y3} := \frac{H3 \cdot B3^3}{12} = 1968.3$$

Координати центрів ваги в обраній початковій системі координат:

$$y1 := 0$$

$$y2 := z0 + \frac{H2}{2} = 14.21$$

$$y3 := z0 + H2 + \frac{H3}{2} = 26.81$$

$$y_c := \frac{y1 \cdot F1 + y2 \cdot F2 + y3 \cdot F3}{F1 + F2 + F3} = 14.52$$

Відстані між центральною віссю X_c перерізу і власними центральними осями x_i :

$$a1 := y1 - y_c = -14.52$$

$$a2 := y2 - y_c = -0.31$$

$$a3 := y3 - y_c = 12.29$$

Моменти інерції:

$$J_{xc} := J_{x1} + a1^2 \cdot F1 + J_{x2} + a2^2 \cdot F2 + J_{x3} + a3^2 \cdot F3 = 14141.2$$

$$J_{yc} := J_{y1} + J_{y2} + J_{y3} = 4276.3$$

3.2 Несиметричний складний переріз

Для складного перерізу, використовуючи таблиці сортаменту, аналітичним способом знайти положення головних центральних осей та величини головних центральних моментів інерції.

Вхідні дані вибрати із таблиць 3.1, 3.2 і рисунку 3.3.

3.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 3.2

Можна рекомендувати такий порядок визначення положення головних центральних осей та значень головних центральних моментів інерції складного поперечного перерізу, що складається з простих фігур, характеристики яких легко одержати.

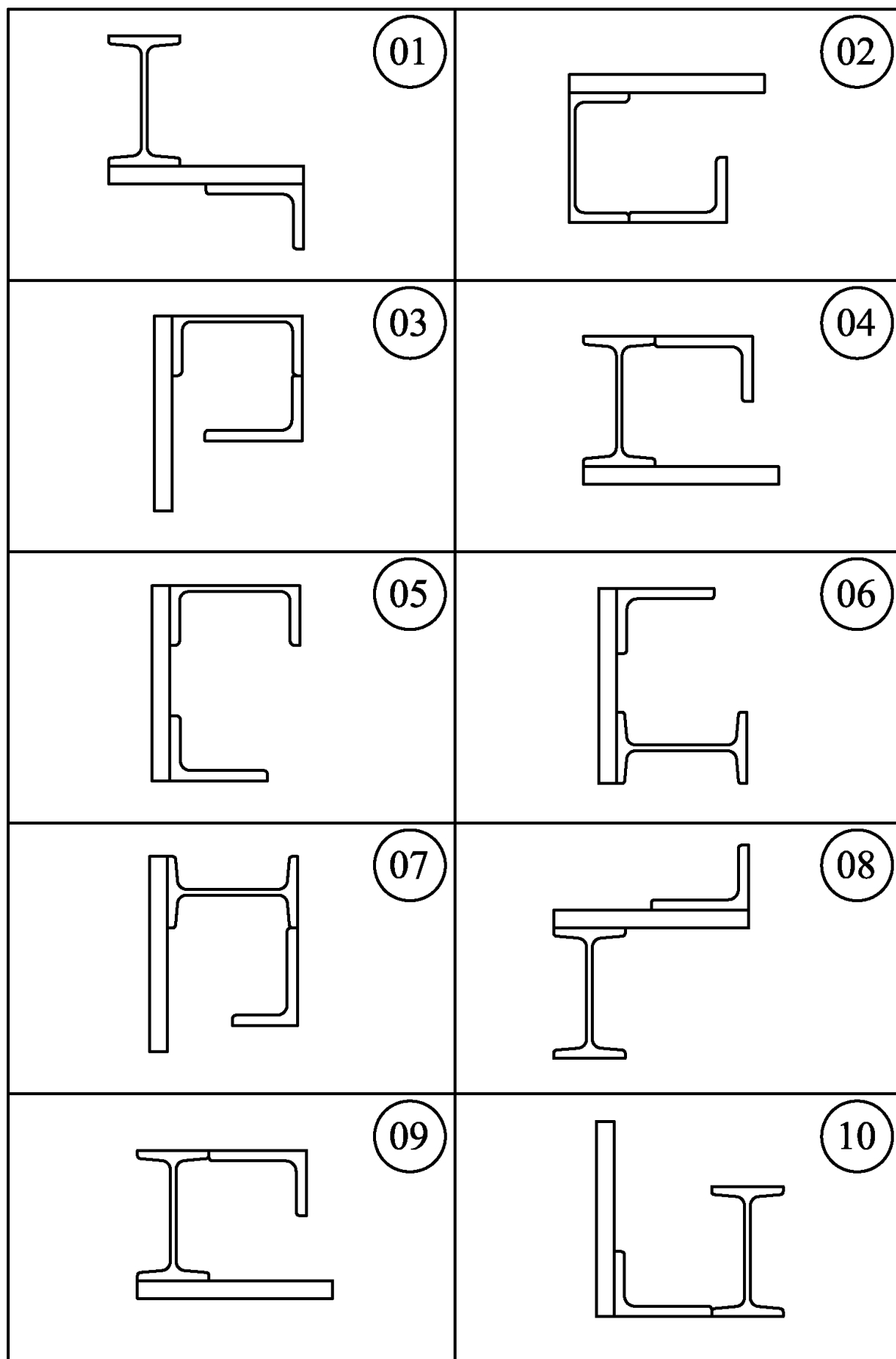


Рисунок 3.3

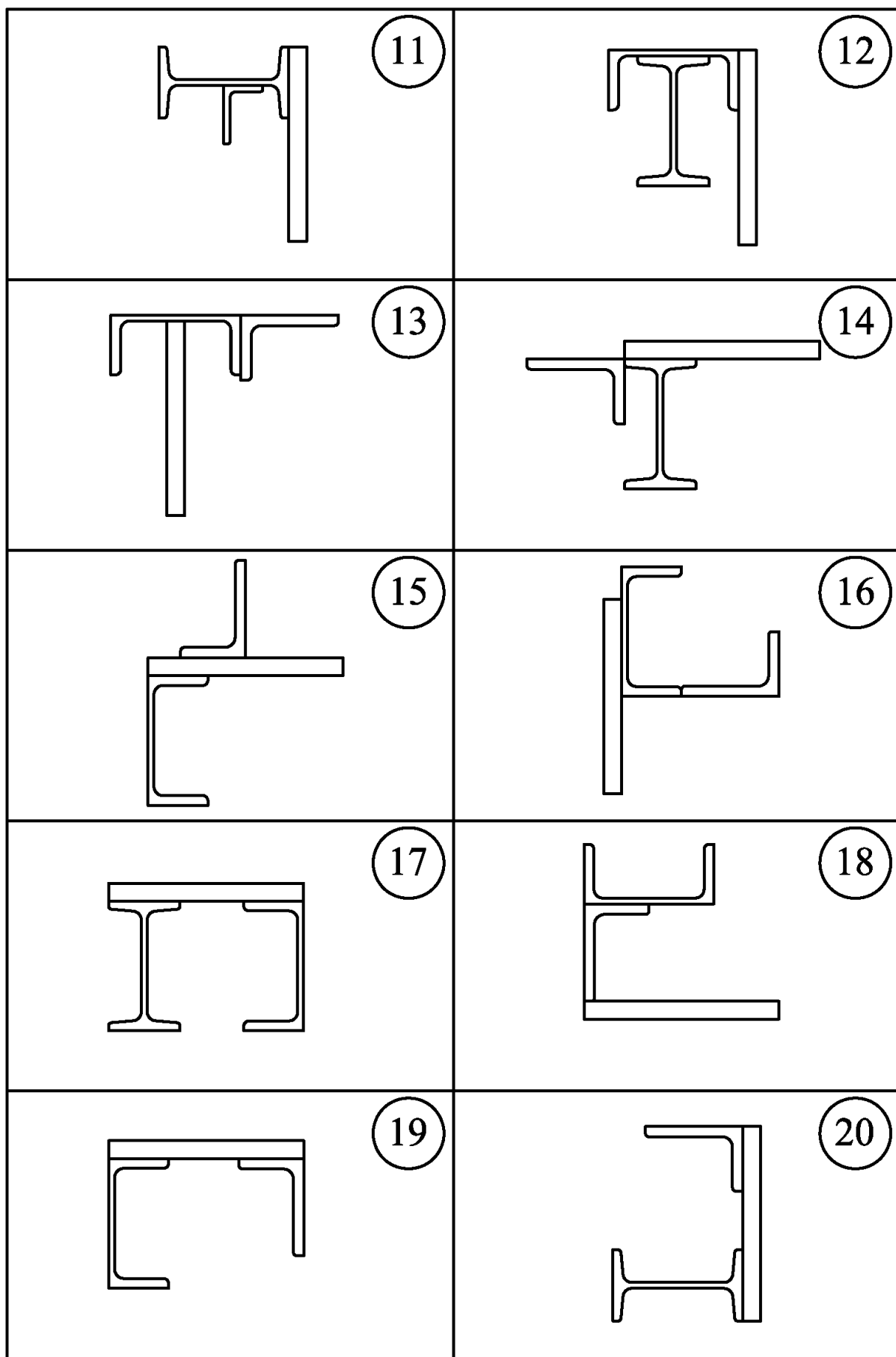


Рисунок 3.3, аркуш 2

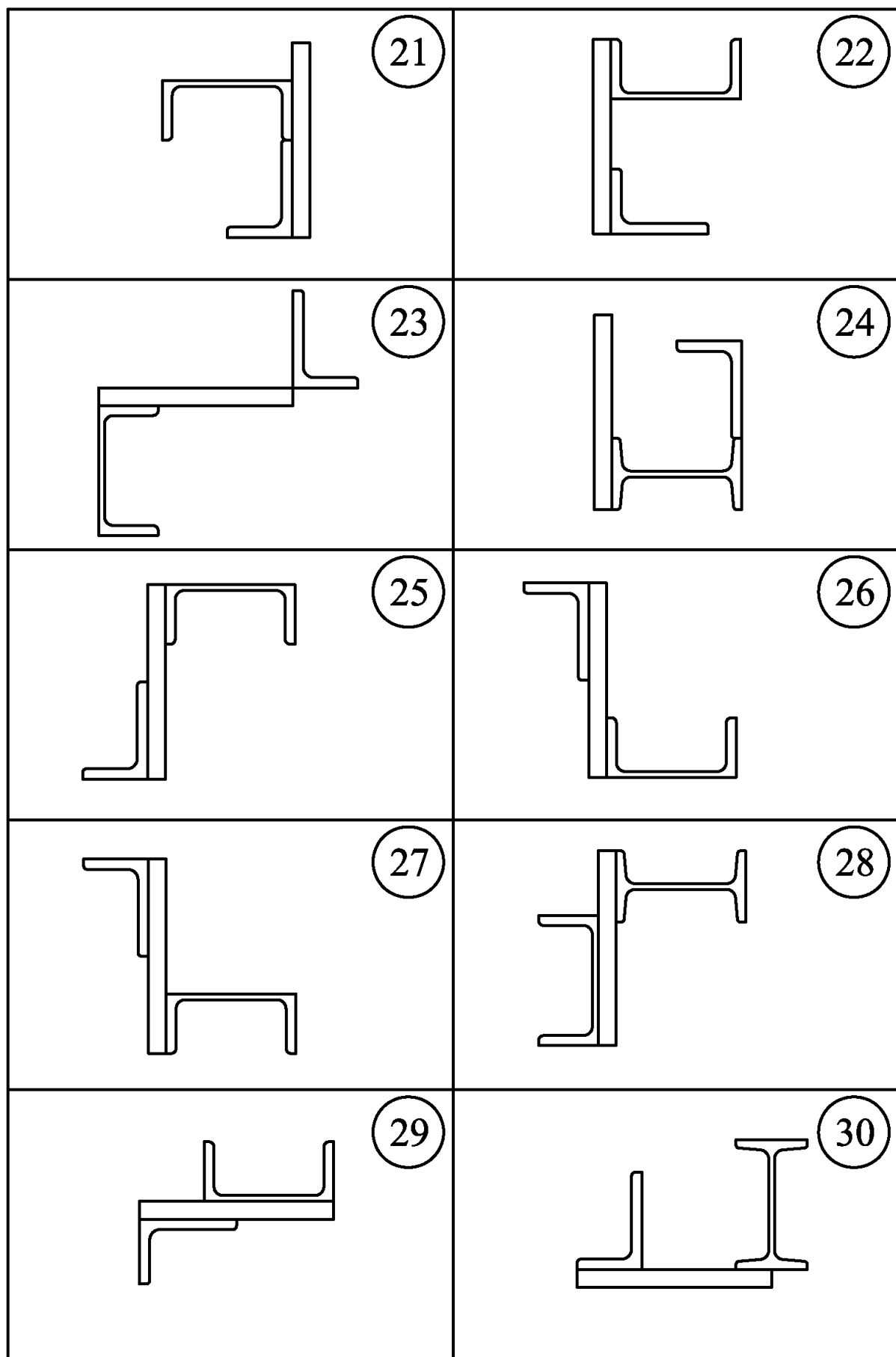


Рисунок 3.3, аркуш 3

1 Зобразити переріз у масштабі з вказівками основних розмірів фігур. Розміри прокатних профілів, положення їх центрів ваги взяти із сортаменту. Кожну фігуру позначити своїм номером.

2 Нанести на рисунок центральні осі кожної фігури за номерами, відповідними номерам фігур.

3 Вибрати початкові осі, відносно яких знайти координати центру ваги складної фігури за формулами (3.1). За початкові осі можна вибрати центральні осі однієї з фігур. Тоді координати її центра ваги будуть дорівнювати нулю. Координати x_i, y_i підставляти до формул (3.1), зважаючи на їх знаки відносно початкових осей.

4 Провести через центр ваги перерізу осі x_c, y_c , які паралельні тим центральним осям окремих фігур, відносно яких моменти інерції відомі (власні осі), відносно них взяти моменти інерції.

5 Визначити осьові (за формулами 3.2) і відцентровий момент інерції відносно центральних осей x_c, y_c складного перерізу, користуючись правилом переходу до паралельних осей.

Відцентровий момент визначаємо за формулою:

$$J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n \left(J_{x_{ci} y_{ci}} + a_i b_i F_i \right), \quad (3.3)$$

де $J_{x_{ci} y_{ci}}$ – відцентровий момент інерції i -тої фігури відносно власних осей, паралельних центральним x_c, y_c перерізу.

При визначенні відцентрового моменту інерції $J_{x_c y_c}$ значення a_i та b_i підставляють, зважаючи на їх знаки за відношенням до осей x_c, y_c . Для фігур, у яких є хоч одна вісь симетрії (наприклад, прямокутник, круг, двотавр, швелер), відцентровий момент інерції $J_{x_c y_c} = 0$.

6 Визначити положення головних центральних осей U, V :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}}. \quad (3.4)$$

7 Відкласти кут α_0 від осі x_c проти ходу годинникової стрілки, якщо він додатний, і за ходом годинникової стрілки, якщо від'ємний.

8 Визначити моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей:

$$J_U = J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0; \quad (3.5)$$

$$J_V = J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0. \quad (3.6)$$

Початкові дані та результати розрахунку можна занести до таблиці 3.3

Таблиця 3.3

Переріз профілю	Номер і вид профілю	Координати центра ваги складових фігур		Площа складових фігур	Моменти інерції складових фігур, см ⁴			a_i , см	b_i , см	α , град
		x_i	y_i		J_{xi}	J_{yi}	$J_{x_i y_i}$			
I										
II										
III										

9 Можна виконати перевірки, які контролюють правильність арифметичних обчислень:

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_U + J_V; \quad (3.7)$$

$$J_{UV} = J_{xy} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha_0 = 0; \quad (3.8)$$

$$J_{u/v} = \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right]. \quad (3.9)$$

причому, верхні знаки у формулі (3.9) беремо при $J_x > J_y$, а нижні – при $J_x < J_y$.
Результати розрахунку бажано занести до таблиці 3.3.

3.2.2 Приклад розв'язання задачі 3.2

Для перерізу, який складається зі швелера 30, нерівнобічного кутика 160x100x10 і смуги 36x2 см² (див. рис. 3.4), використовуючи таблиці сортаменту, аналітичним способом знайти положення головних центральних осей та величини головних центральних моментів інерції.

Розв'язання. Для смуги 36x2 обчислюємо геометричні характеристики за формулами для прямокутника:

$$F_1 = bh = 36 \cdot 2 = 72 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$J_{x1} = \frac{B_1 \cdot H_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 36^3}{12} = 7776 \text{ (см}^4\text{)}, \quad J_{y1} = \frac{H_1 \cdot B_1^3}{12} = \frac{36 \cdot 2^3}{12} = 24 \text{ (см}^4\text{)}.$$

Із сортаменту виписуємо необхідні геометричні характеристики прокатних профілів:

Швелер №30: $H_2 = 30$ см, $B_2 = 10$ см, $z_0 = 2,52$ см, $F_2 = 40,5$ см², $J_{x2} = 327$ см⁴, $J_{y2} = 5810$ см⁴.

Тут моменти J_{x2} і J_{y2} поміняли місцями, оскільки швелер розташований горизонтально, а не вертикально, як у довіднику.

Кутик 160х100х10: $H_3 = 16$ см, $B_3 = 10$ см, $x_0 = 2,28$ см, $y_0 = 5,23$ см, $F_3 = 25,3$ см², $J_{x3} = 667$ см⁴, $J_{y3} = 204$ см⁴, $\tan \alpha = 0,390$, $J_{\min} = 121$ см⁴.

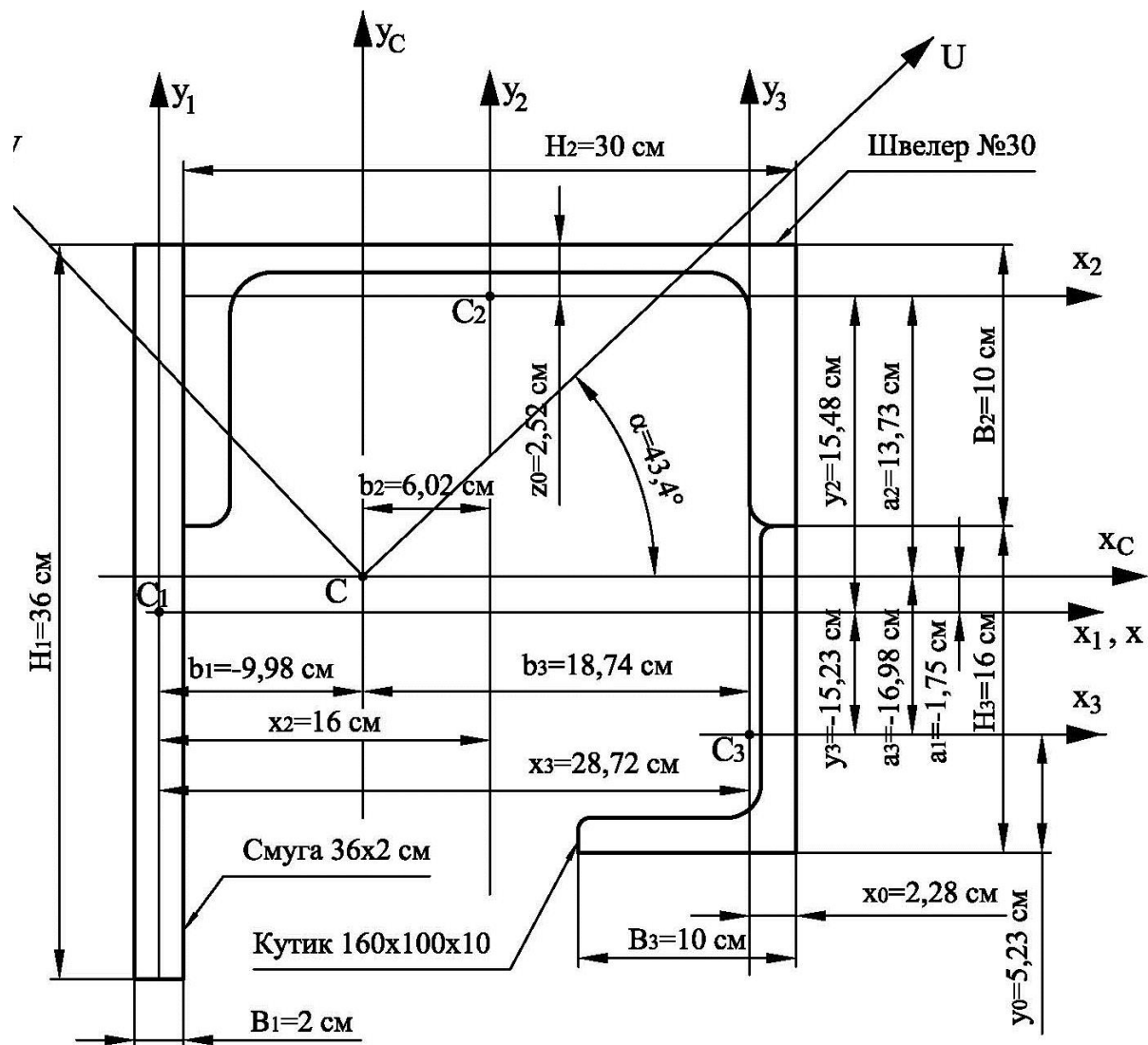


Рисунок 3.4 – Вид несиметричного складного поперечного перерізу

Вибираємо початок координат у центрі ваги смуги C_1 . Визначаємо координати центрів ваги кожної фігури у вибраній системі координат:

$$x_1 = 0 \text{ (см)}, \quad y_1 = 0 \text{ (см)},$$

$$x_2 = \frac{B_1}{2} + \frac{H_2}{2} = \frac{2}{2} + \frac{30}{2} = 16 \text{ (см)}, \quad y_2 = \frac{H_1}{2} - z_0 = \frac{36}{2} - 2,52 = 15,48 \text{ (см)},$$

$$x_3 = \frac{B_1}{2} + H_2 - x_0 = \frac{2}{2} + 30 - 2,28 = 28,72 \text{ (см)},$$

$$y_3 = -(H_1 - B_2 - H_3 + y_0) = -(36 - 10 - 16 + 5,23) = -15,23 \text{ (см)}.$$

Підставляємо знайдені координати в формули (3.1) і визначаємо центр ваги всієї фігури:

$$x_c = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{16 \cdot 40,5 + 28,72 \cdot 25,3}{72 + 40,5 + 25,3} = 9,98 \text{ (см)},$$

$$y_c = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{15,48 \cdot 40,5 - 15,23 \cdot 25,3}{72 + 40,5 + 25,3} = 1,75 \text{ (см)}.$$

У системі координат XU відкладаємо відрізки $x_c = 9,98$ см та $y_c = 1,75$ см. Точка перетину осей x_c і y_c є центром ваги перерізу.

Визначимо відстань між центральною віссю x_c перерізу і власними центральними осями x_i фігур:

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 - 1,75 = -1,75 \text{ (см)},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 15,48 - 1,75 = 13,73 \text{ (см)},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = -15,23 - 1,75 = -16,98 \text{ (см)}.$$

Визначимо відстань між центральною віссю y_c перерізу і власними центральними осями y_i фігур:

$$b_1 = x_1 - x_c = 0 - 9,98 = -9,98 \text{ (см)},$$

$$b_2 = x_2 - x_c = 16 - 9,98 = 6,02 \text{ (см)},$$

$$b_3 = x_3 - x_c = 28,72 - 9,98 = 18,74 \text{ (см)}.$$

Визначаємо осьові (3.2) моменти інерції відносно центральних осей x_c і y_c :

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i) = 7776 + 1,75^2 \cdot 72 + 327 + 13,73^2 \cdot 40,5 +$$

$$+ 667 + 16,98^2 \cdot 25,3 = 23919,8 \text{ (см}^4\text{)},$$

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i) = 24 + 9,98^2 \cdot 72 + 5810 + 6,02^2 \cdot 40,5 +$$

$$+ 204 + 18,74^2 \cdot 25,3 = 23562,0 \text{ (см}^4\text{)}.$$

Визначаємо відцентровий момент інерції кутика (за модулем) за формулою:

$$J_{x_3 y_3} = (J_{x_3} - J_{\min}) \sin \alpha = (667 - 121) \cdot 0,390 = 212,94 \text{ см}^4.$$

Визначаємо відцентровий (3.3) момент інерції відносно центральних осей x_c і y_c :

$$J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_{ci} y_{ci}} + a_i b_i F_i) = -1,75 \cdot (-9,98) \cdot 72 + 13,73 \cdot 6,02 \cdot 40,5 + \\ + 212,94 + (-16,98) \cdot 18,74 \cdot 25,3 = -3232,7 \text{ (см}^4\text{)}.$$

Визначаємо положення головних центральних осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-3232,7)}{23919,8 - 23562,0} = 18,07.$$

Звідки $2\alpha_0 = 86,8^\circ$, а $\alpha_0 = 43,4^\circ$.

На рисунку 3.5 під цим кутом проводимо вісь U (оскільки кут α_0 додатний, то по відношенню до осі x_c його відкладаємо проти хода годинникової стрілки).

Визначаємо головні центральні моменти інерції за формулами (3.5) і (3.6)

$$J_U = J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0 = \\ = 23919,8 \cdot \cos^2(43,4^\circ) + 23562,0 \cdot \sin^2(43,4^\circ) - (-3232,7) \cdot \sin(2 \cdot 43,4^\circ) = \\ = 26978,5 \text{ (см}^4\text{)},$$

$$J_V = J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0 = \\ = 23919,8 \cdot \sin^2(43,4^\circ) + 23562,0 \cdot \cos^2(43,4^\circ) - (-3232,7) \cdot \sin(2 \cdot 43,4^\circ) = \\ = 20503,3 \text{ (см}^4\text{)}.$$

Одержані значення заносимо до таблиці 3.4

Таблиця 3.4

Переріз профілю	Вид профілю	Номер профілю	Координати центра ваги складових фігур		Площа складових фігур	Моменти інерції складових фігур, см ⁴			a_i , см	b_i , см
			x_i	y_i		J_{xi}	J_{yi}	$J_{x_i y_i}$		
1		36x2	0	0	72	7776	24	0	-1,75	-9,98
2		30	16	15,48	40,5	327	5810	0	13,73	6,02
3		60x100x10	28,72	-15,23	25,3	667	204	212,9	16,98	18,74

Аналізуємо одержані результати:

- всі осьові моменти інерції ($J_{x_c}, J_{y_c}, J_u, J_v$) додатні;
- перевірка за формулою (3.7):

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_U + J_V,$$

$$23919,8 + 23562,0 = 26978,5 + 20503,3,$$

$$47481,8 = 47481,8;$$

- перевірка за формулою (3.8):

$$J_{UV} = J_{xy} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha_0 = 0,$$

$$J_{UV} = -3232,7 \cdot \cos(2 \cdot 43,4^\circ) + \frac{23919,8 - 23562,0}{2} \cdot \sin(2 \cdot 43,4^\circ) = 0,$$

$$J_{UV} = -178,63 + 178,63 = 0;$$

- перевіряємо значення отриманих моментів інерції:

$$J_U = \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) + \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(23919,8 + 23562,0) + \sqrt{(23919,8 - 23562,0)^2 + 4 \cdot (-3232,7)^2} \right] =$$

$$= 26978,5 \text{ (см}^4\text{)},$$

$$J_V = \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) - \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(23919,8 + 23562,0) - \sqrt{(23919,8 - 23562,0)^2 + 4 \cdot (-3232,7)^2} \right] =$$

$$= 20503,3 \text{ (см}^4\text{)}.$$

3.2.3 Приклад розв'язання задачі 3.2 в системі Mathcad

Вхідні дані:

Смуга 36х2 см
Швелер №30
Кутик 160х100х10

Геометричні характеристики складових перерізу:

Смуга 36х2 см	H1 := 36	B1 := 2
	F1 := H1 · B1 = 72	
	$J_{x1} := \frac{B1 \cdot H1^3}{12} = 7776$	$J_{y1} := \frac{H1 \cdot B1^3}{12} = 24$
Швелер	Кутик 160х100х10	
H2 := 30	H3 := 16	F3 := 25.3
B2 := 10	B3 := 10	Jx3 := 667
z0 := 2.52	x0 := 2.28	Jy3 := 204
F2 := 40.5	y0 := 5.23	Jmin := 121
Jx2 := 327		tgα := 0.390
Jy2 := 5810		

Координати центрів ваги в обраній початковій системі координат:

x1 := 0	y1 := 0
$x2 := \frac{B1}{2} + \frac{H2}{2} = 16$	$y2 := \frac{H1}{2} - z0 = 15.48$
$x3 := \frac{B1}{2} + H2 - x0 = 28.72$	$y3 := -(H1 - B2 - H3 + y0) = -15.23$
$x_c := \frac{x1 \cdot F1 + x2 \cdot F2 + x3 \cdot F3}{F1 + F2 + F3} = 9.98$	
$y_c := \frac{y1 \cdot F1 + y2 \cdot F2 + y3 \cdot F3}{F1 + F2 + F3} = 1.75$	

Відстані між центральною віссю X_c перерізу і власними центральними осями x_i :

$$a_1 := y_1 - y_c = -1.75$$

$$a_2 := y_2 - y_c = 13.73$$

$$a_3 := y_3 - y_c = -16.98$$

Відстані між центральною віссю Y_c перерізу і власними центральними осями y_i :

$$b_1 := x_1 - x_c = -9.98$$

$$b_2 := x_2 - x_c = 6.02$$

$$b_3 := x_3 - x_c = 18.74$$

Осьові моменти інерції відносно центральних осей X_c та Y_c :

$$J_{xc} := J_{x1} + a_1^2 \cdot F_1 + J_{x2} + a_2^2 \cdot F_2 + J_{x3} + a_3^2 \cdot F_3 = 23919.8$$

$$J_{yc} := J_{y1} + b_1^2 \cdot F_1 + J_{y2} + b_2^2 \cdot F_2 + J_{y3} + b_3^2 \cdot F_3 = 23562$$

Відцентрові моменти інерції складових фігур:

$$J_{x1y1} := 0$$

$$J_{x2y2} := 0$$

$$J_{x3y3} := (J_{x3} - J_{min}) \cdot \operatorname{tg} \alpha = 212.94$$

Відцентровий момент інерції відносно центральних осей X_c та Y_c :

$$J_{xcyc} := J_{x1y1} + a_1 \cdot b_1 \cdot F_1 + J_{x2y2} + a_2 \cdot b_2 \cdot F_2 + J_{x3y3} \dots = -3232.7 + a_3 \cdot b_3 \cdot F_3$$

Кут α_0 для визначення положення головних центральних осей:

$$\alpha_0 := \frac{1}{2} \cdot \operatorname{atan} \left(\frac{-2 \cdot J_{xcyc}}{J_{xc} - J_{yc}} \right) = 0.76 \text{ рад}$$

Головні центральні моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$J_u := J_{xc} \cdot \cos(\alpha_0)^2 + J_{yc} \cdot \sin(\alpha_0)^2 - J_{xcyc} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_0) = 26978.5$$

$$J_v := J_{xc} \cdot \sin(\alpha_0)^2 + J_{yc} \cdot \cos(\alpha_0)^2 + J_{xcyc} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_0) = 20503.3$$

Перевірка 1: $J_{xc} + J_{yc} = 47481.8$

$$J_u + J_v = 47481.8$$

4 ПЛОСКЕ ЗГИНАННЯ

4.1 Повна перевірка міцності балки

Для заданої балки побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати переріз (двотавр) і зробити повну її перевірку на міцність за III теорією міцності. Задачу розв'язати аналітичним та графічним / 6 / способами.

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.1 та 4.2 і рисунка 4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані до задачі 4.1

Величина	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[\sigma]$, МПа	150	160	170	180	190	150	160	170	180	190
M , кН·м	30	35	40	45	50	35	40	45	50	30
P , кН	40	45	50	55	60	50	55	60	45	40
q , кН/м	10	20	30	40	50	30	10	20	40	50

Таблиця 4.2 – Вихідні дані до задачі 4.1

Величина, м	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	1,5	2	2,5	3	1	1,5	2	2,5	3
b	2	2,5	3	1	1,5	2,5	3	1	1,5	2
c	3	2	2,5	1,5	1	2	2,5	3	1	1,5

4.1.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.1

При аналітичному способі розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

- 1 Визначаються опорні реакції балки.
- 2 Будуються епюри поперечних сил Q та згинальних моментів M .
- 3 З аналізу епюри згинальних моментів визначається максимальний згинальний момент – $M_{\max}$.
- 4 З умови міцності за нормальними напруженнями визначається потрібний осьовий момент опору перерізу – W_x :

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}. \quad (4.1)$$

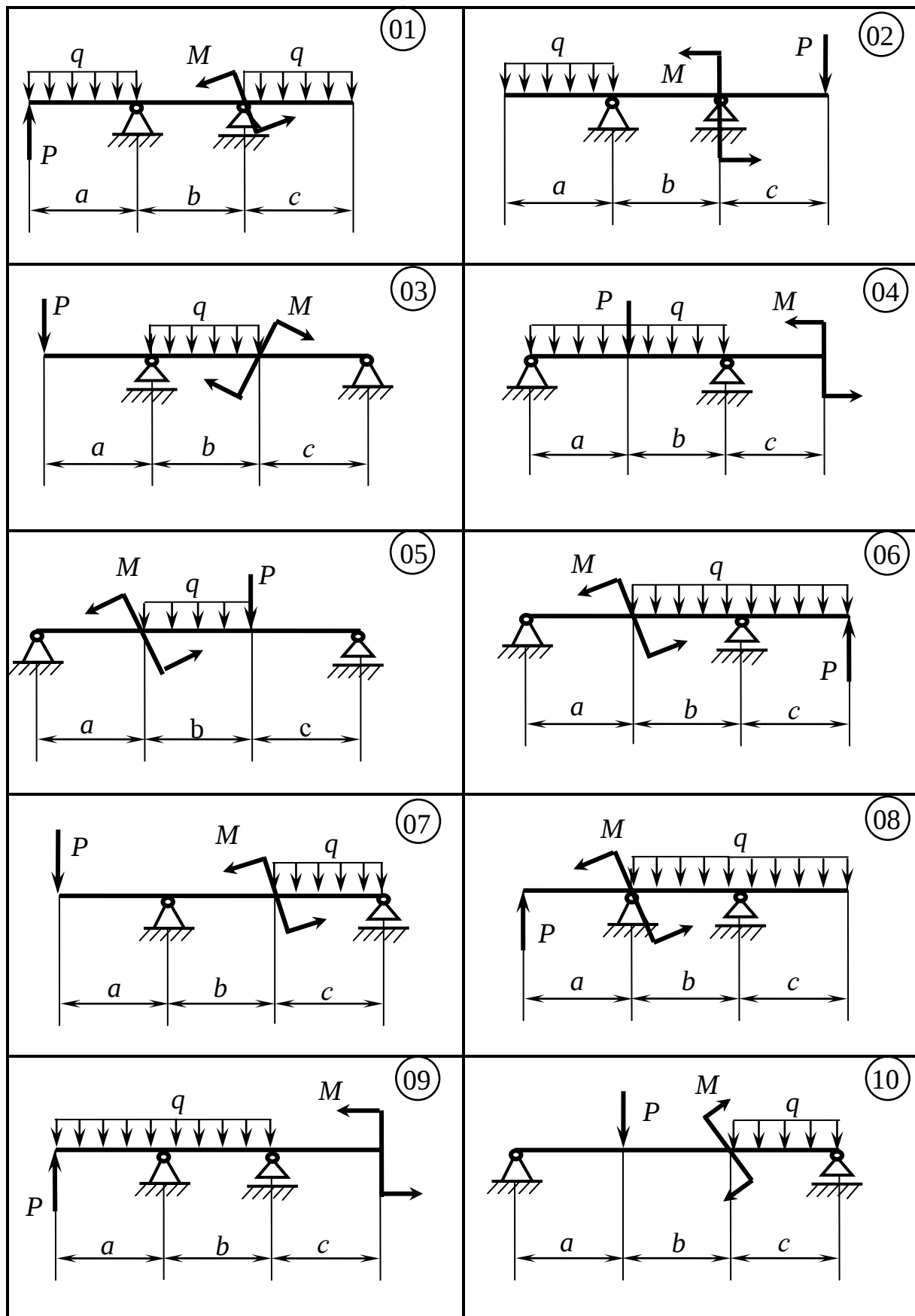


Рисунок 4.1 – Схеми балок до задачі 4.1

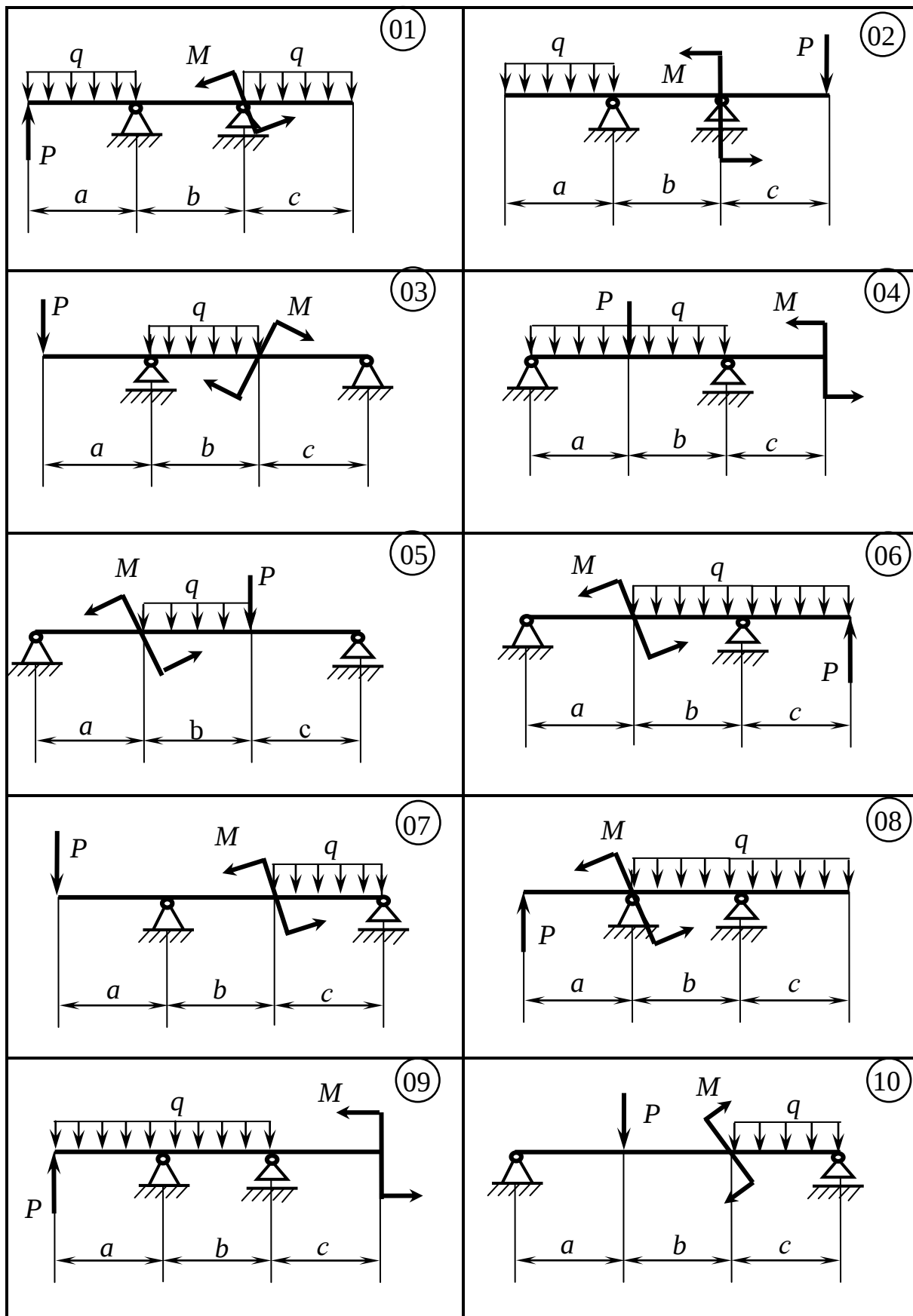


Рисунок 4.1, аркуш 2

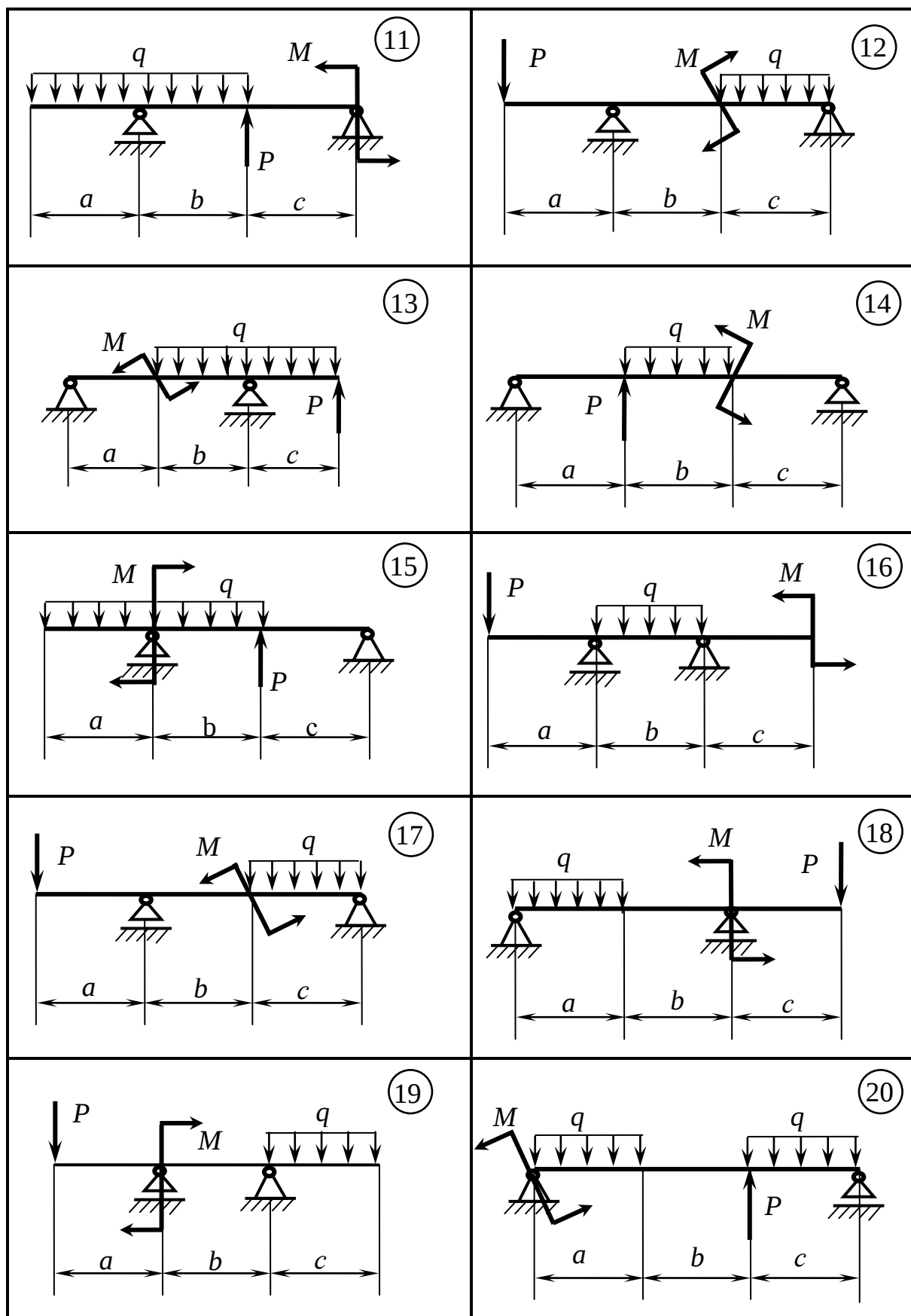


Рисунок 4.1, аркуш 3

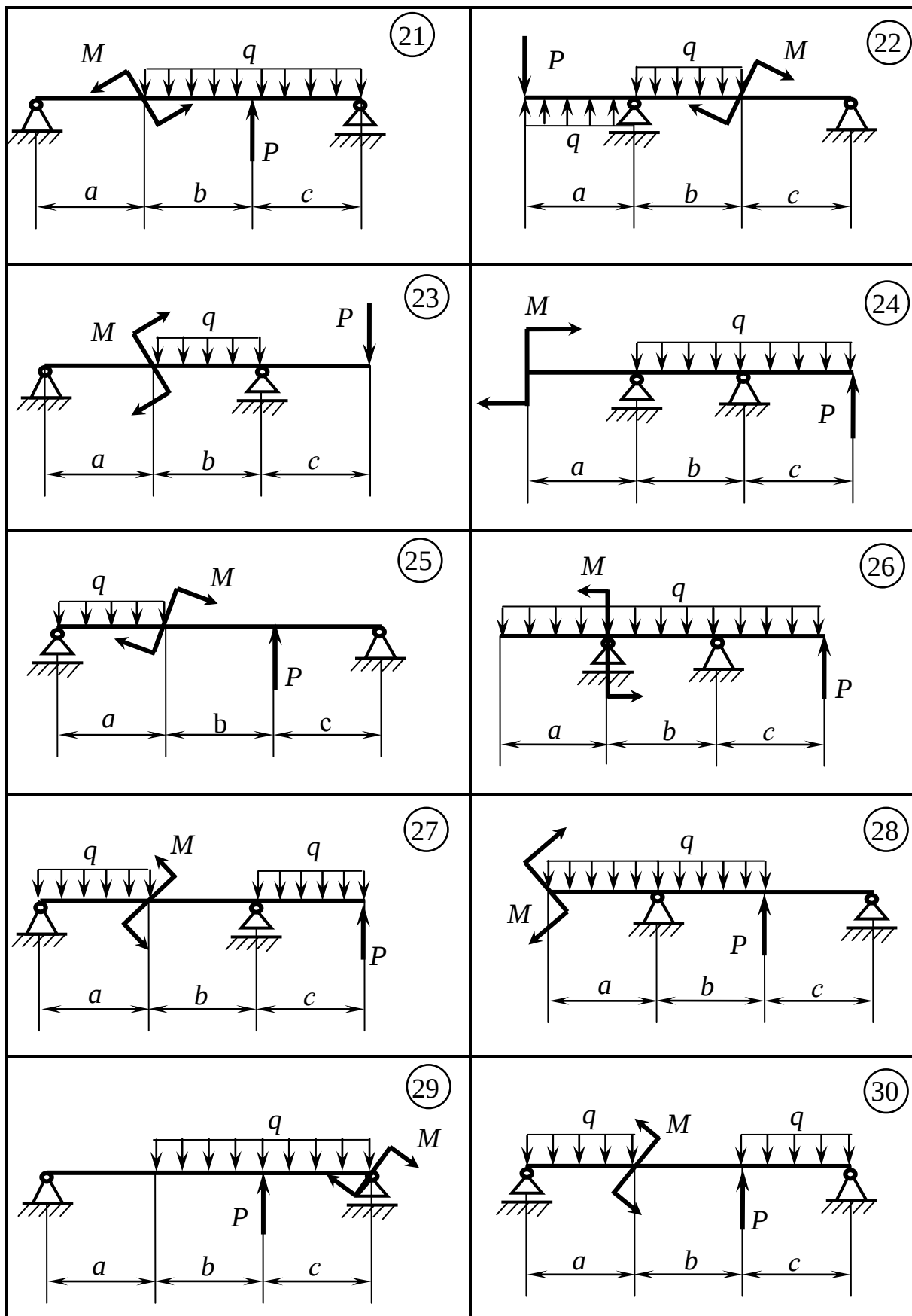


Рисунок 4.1, аркуш 4

/

5 Із сортаменту (див. додаток А) вибирається номер двотавра, який має найближчий до визначеного осьовий момент опору, також його основні характеристики.

6 Перевіряється міцність за нормальними напруженнями відповідно до умови:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (4.2)$$

7 З аналізу епюри поперечних сил визначається максимальна поперечна сила $Q_{\max}$.

8 Перевіряється міцність за дотичними напруженнями відповідно до умови:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} \leq [\tau], \quad (4.3)$$

де S_x – статичний момент половини перерізу двотавра відносно осі x (рис. 4.2);

d – ширина перерізу на осі x ;

J_x – момент інерції перерізу відносно осі x ;

$$[\tau] = 0,6 \cdot [\sigma]. \quad (4.4)$$

9 Перевіряється міцність за еквівалентними напруженнями відповідно до умови:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\max} \leq [\sigma], \quad (4.5)$$

де $\sigma_{\text{екв}}^{\max}$ – найбільше із значень еквівалентних напружень у точках K (див. рис. 4.2) усіх перерізів балки. Якщо в якомусь перерізі величини Q і M одночасно максимальні, то саме цей переріз і буде небезпечним з точки зору еквівалентних напружень. В інших, неочевидних випадках слід взяти до уваги перерізи, у яких: $M = M_{\max}$ і $Q = Q_{\max}$; $M = M_{\max}$ і $Q \neq Q_{\max}$; $Q = Q_{\max}$ і $M \neq M_{\max}$; M і Q хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

Підрахунки еквівалентних напружень в точках K зазначених перерізів виконуються із застосуванням формул:

$$\sigma_K^{\text{екв}} = \sqrt{\sigma_K^2 + 3 \cdot \tau_K^2}; \quad (4.6)$$

$$\sigma_K = \frac{M}{J_x} \cdot y_K; \quad (4.7)$$

$$\tau_K = \frac{Q \cdot S_x^*}{d \cdot J_x}, \quad (4.8)$$

де M і Q – відповідно згинальний момент і поперечна сила в кожному із зазначених перерізів;

y_K – відстань точки K до осі x (див. рис. 4.2):

$$y_K = \frac{h}{2} - t; \quad (4.9)$$

S_x^* – статичний момент відносно осі x частини перерізу, яка розташована вище точки K :

$$S_x^* = 0,5 \cdot b \cdot t \cdot (h - t). \quad (4.10)$$

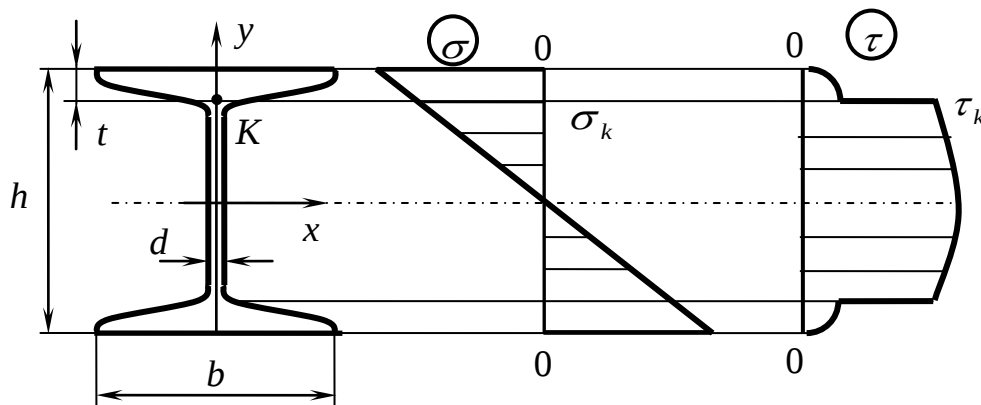


Рисунок 4.2 – Епюри нормальних (σ) та дотичних (τ) напружень у поперечних перерізах балки

При графічному способі розв’язання задачі / 6 / дії 1...3 – такі самі, як і при аналітичному.

З додатку Б, у якому наведені параметри безпечних факторних просторів двотаврів, визначається номер двотавра, у якого допустима величина згинального моменту $[M]$ максимально наближена до $M_{\max}$:

$$[M] \geq M_{\max}. \quad (4.11)$$

У додатку В вибирається відповідний безпечний факторний простір і позначаються в ньому точки з координатами Q і M , які є величинами поперечних сил і згинальних моментів у кожному з характерних перерізів балки (рис. 4.3).

Якщо всі відмічені точки не виходять за межі безпечного факторного простору, міцність балки є повністю забезпеченою. В разі ж, коли хоча б одна точка лежить поза його межами, якась умова міцності не

виконується і даний номер двотавра не є прийнятним. Так, наприклад, у перерізі 1 деякої балки (див. точку 1 на рис. 4.3) не виконується умова міцності за

нормальними напруженнями, в перерізі 2 – за дотичними, в перерізі 3 – за еквівалентними. В перерізах 4, 5 і 6 виконуються всі умови міцності.

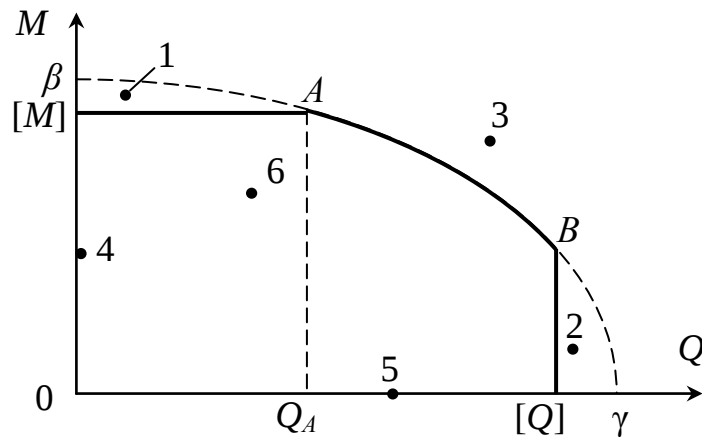


Рисунок 4.3 – Вигляд безпечного факторного простору двотаврів

У випадку невиконання умов міцності слід вибрати більший (наступний) номер двотавра і означену процедуру повторити.

4.1.2 Приклад розв'язання задачі 4.1

Схема балки зображена на рисунку 4.4. Розрахунки виконуємо відповідно до $q = 50 \text{ кН/м}$; $P = 55 \text{ кН}$; $M = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $a = 2 \text{ м}$; $b = 0,8 \text{ м}$; $c = 0,6 \text{ м}$.

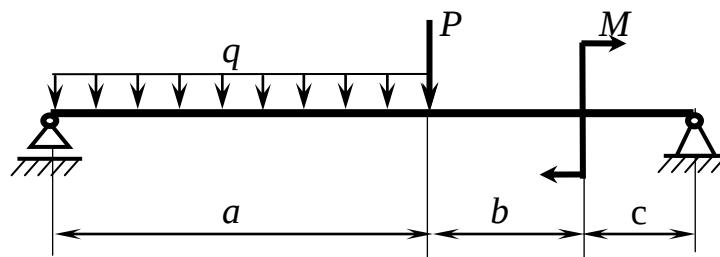


Рисунок 4.4 – Схема балки до прикладу задачі 4.2

Розв'язання

Аналітичний спосіб.

1 Визначаємо опорні реакції балки і позначаємо її характерні перерізи (рис. 4.5,а):

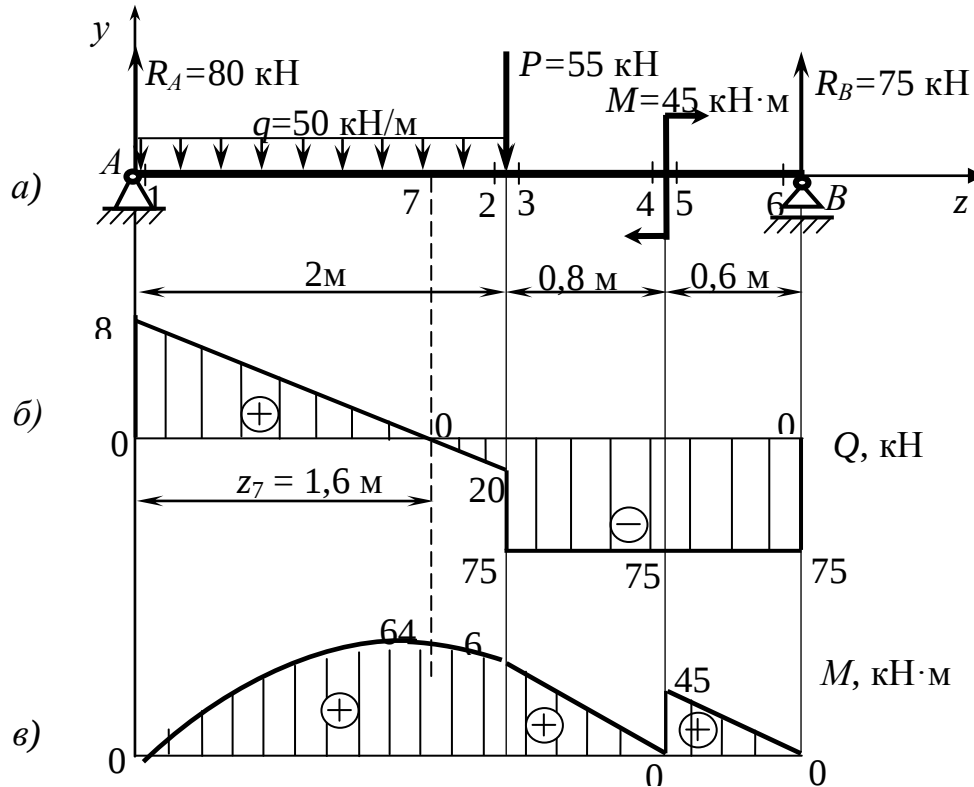
$$\sum m_A = -q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M + R_B \cdot 3,4 = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{3,4} \cdot (q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 2 + M) = \frac{1}{3,4} \cdot (100 + 110 + 45) = 75 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = -R_A \cdot 3,4 + q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M = 0,$$

$$R_A = \frac{1}{3,4} \cdot (q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M) = \frac{1}{3,4} \cdot (240 + 77 - 45) = 80 \text{ кН.}$$

Перевірка: $\sum P_y = R_A - q \cdot 2 - P + R_B = 80 - 100 - 55 + 75 = 0.$



*а – робоча схема балки; б – епюра поперечних сил;
в – епюра згинальних моментів*

Рисунок 4.5 – Графічні побудови до прикладу задачі 4.1

2 Будуємо епюру поперечних сил (рис. 4.5,б):

$$Q_1 = R_A = 80 \text{ кН}; Q_2 = Q_1 - q \cdot 2 = 80 - 100 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_2 - P = -20 - 55 = -75 \text{ кН}; Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_3 = -75 \text{ кН};$$

$$z_7 = Q_1 : q = 80 : 50 = 1,6 \text{ м.}$$

3 Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 4.5,в):

$$M_1 = 0; M_2 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 160 - 100 = 60 \text{ кН·м};$$

$$M_3 = M_2 = 60 \text{ кН·м}; M_4 = R_A \cdot 2,8 - q \cdot 2 \cdot 1,8 - P \cdot 0,8 =$$

$$= 224 - 180 - 44 = 0; M_5 = M_4 + M = 0 + 45 = 45 \text{ кН·м};$$

$$M_6 = \sum m_B = 0 \text{ (див. вище):}$$

$$M_7 = R_A \cdot z_7 - q \cdot z_7 \cdot \frac{z_7}{2} = 80 \cdot 1,6 - 50 \cdot 1,6 \cdot 0,8 = 128 - 64 = 64 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4 Перевіряємо побудовані епюри шляхом їх побудови у зворотному напрямі.

Епюра поперечних сил:

$$Q_6 = Q_5 = Q_4 = Q_3 = -R_B = -75 \text{ кН}; \quad Q_2 = Q_3 + P = -75 + 55 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_1 = Q_2 + q \cdot 2 = -20 + 50 \cdot 2 = 80 \text{ кН}.$$

Епюра згинальних моментів:

$$M_6 = R_B \cdot 0 = 0; \quad M_5 = R_B \cdot 0,6 = 75 \cdot 0,6 = 45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = M_5 - M = 45 - 45 = 0;$$

$$M_3 = R_B \cdot 1,4 - M = 75 \cdot 1,4 - 45 = 105 - 45 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = M_3 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_1 = \sum m_A = 0 \text{ (див. вище);}$$

$$M_7 = R_B \cdot (3,4 - z_7) - M - P \cdot (2 - z_7) - q \cdot (2 - z_7) \cdot \frac{(2 - z_7)}{2} =$$

$$= 75 \cdot 1,8 - 45 - 55 \cdot 0,4 - 50 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 135 - 45 - 22 - 4 = 64 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Як бачимо, обидві епюри побудовані правильно, бо значення Q і M у всіх характерних перерізах при прямому і зворотному варіантах побудови повністю збігаються.

5 З умови міцності за нормальними напруженнями визначаємо потрібний осьовий момент опору перерізу балки:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{64 \cdot 10^3}{160} = 400 \text{ см}^3.$$

6 З відповідної таблиці сортаменту (див. додаток А) визначаємо потрібний номер двотавра і його основні параметри.

Приймаємо двотавр 27а, у якого $W_x = 407 \text{ см}^3$; $J_x = 5500 \text{ см}^4$; $S_x = 229 \text{ см}^3$; $h = 270 \text{ мм}$; $b = 135 \text{ мм}$; $d = 6,0 \text{ мм}$; $t = 10,2 \text{ мм}$.

7 Перевіряємо міцність балки за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{64 \cdot 10^6}{407 \cdot 10^3} = 157,248 \text{ МПа} \leq [\sigma],$$

тож міцність за нормальними напруженнями забезпечена.

8 Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 229 \cdot 10^3}{6,0 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 55,515 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = [\tau]_{III} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma] = \frac{1}{2} \cdot 160 = 80 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} < [\tau],$$

тобто міцність балки і за дотичними напруженнями забезпечена.

9 Визначаємо місце дії в балці максимальних еквівалентних напружень.

Аналіз побудованих епюр дозволяє вважати небезпечним з точки зору еквівалентних напружень переріз 3, в якому величини Q і M мають хоча і не максимальні, але близькі до них значення: $Q = 75 \text{ кН}$, $M = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Найбільші еквівалентні напруження в цьому перерізі будуть діяти на рівні $y = y_K$, тобто $\sigma_{\max}^{екв} = \sigma_K^{екв}$.

Слід зауважити, що в менш очевидному випадку для визначення небезпечного перерізу слід взяти до уваги всі потенційно небезпечні перерізи балки.

10 З урахуванням місця дії максимальних еквівалентних напружень визначимо їх величину і перевіримо відповідну умову міцності:

$$\sigma_K = \frac{M}{J_x} \cdot y_K = \frac{60 \cdot 10^6}{5500 \cdot 10^4} \cdot 124,8 = 136,145 \text{ МПа};$$

$$\tau_K = \frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right) = \frac{75 \cdot 10^3}{6,0 \cdot 5500 \cdot 10^4} \cdot \left(229 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 6,0 \cdot 124,8^2 \right) =$$

$$= 41,426 \text{ МПа};$$

$$\sigma_K^{екв} = \sqrt{\sigma_K^2 + 4 \cdot \tau_K^2} = \sqrt{136,145^2 + 4 \cdot 41,426^2} = 159,374 \text{ МПа} < [\sigma],$$

тож і за еквівалентними напруженнями міцність балки є забезпеченою.

Слід зауважити, що при невиконанні хоча б однієї з умов міцності треба взяти наступний (більший) номер двотавра і перевірку повторити.

Графічний спосіб

При цьому способі розв'язання задачі перші три дії аналітичного способу (1 ... 3) повторюються.

Потім, з огляду на максимальне значення згинального моменту $M_{\max} = 64 \text{ кН}\cdot\text{м}$, у додатку Б знаходимо номер двотавра, у якого значення $[M]$ максимально наближене до $M_{\max}$. Таким є двотавр 27а, у якого $[M] = 65,110 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Зображення його безпечного факторного простору, взяте з додатку В, з нанесеними на нього точками 1...7, координати яких

дорівнюють значенням Q і M у відповідних перерізах балки, показано на рисунку 4.6.

Як видно з рисунку 4.6, ні одна з нанесених точок не виходить за межі безпечного факторного простору. Це означає, що у всіх позначених перерізах балки виконуються умови міцності за нормальними, дотичними і еквівалентними напруженнями і вибір двотавра 27а є правильним.

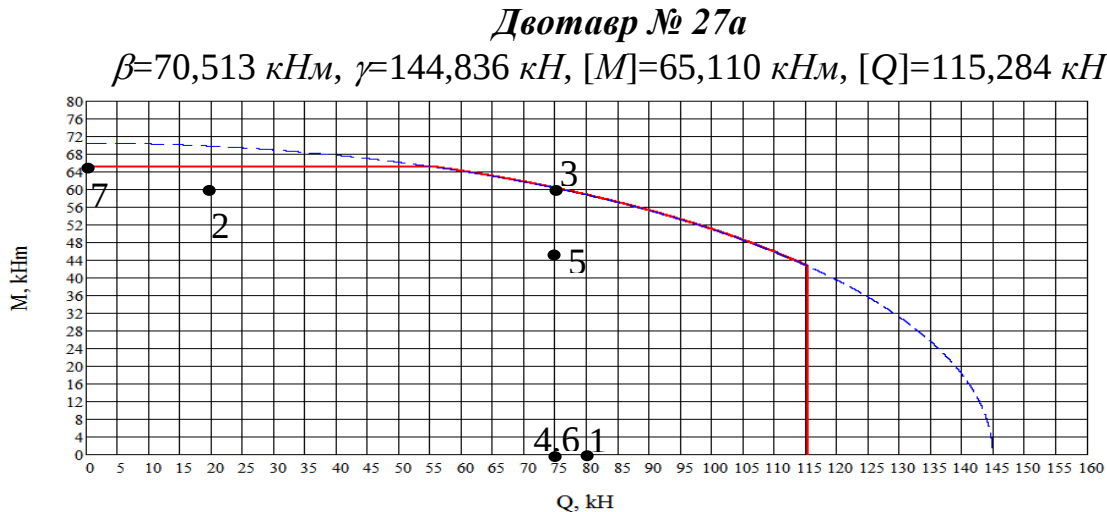


Рисунок 4.6 – Результати графічного розрахунку

4.2 Переміщення в балках

Для заданої сталевий балки побудувати епюри внутрішніх зусиль і підібрати переріз (двотавр), якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Визначити вертикальне і кутове переміщення перерізу K . Вихідні дані вибрати із таблиць 4.3 та 4.4 і рисунка 4.7.

Таблиця 4.3 – Вихідні дані до задачі 4.2

Величини	Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	8	10	12	14	16	8	10	12	14	16
$P, \text{кН}$	20	18	16	12	14	18	20	14	16	12
$q, \text{кН/м}$	14	12	10	8	6	12	14	8	6	10

Таблиця 4.4 – Вихідні дані до задачі 4.2

Величини, м	Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	1,5	2	2,5	3	1	1,5	2	2,5	3
b	3	2	2,5	1,5	1	2	3	1,5	1	2,5
c	2,5	1	1,5	3	2	3	2,5	1	1,5	2
d	2	2,5	3	1	1,5	2,5	1	3	2	1,5

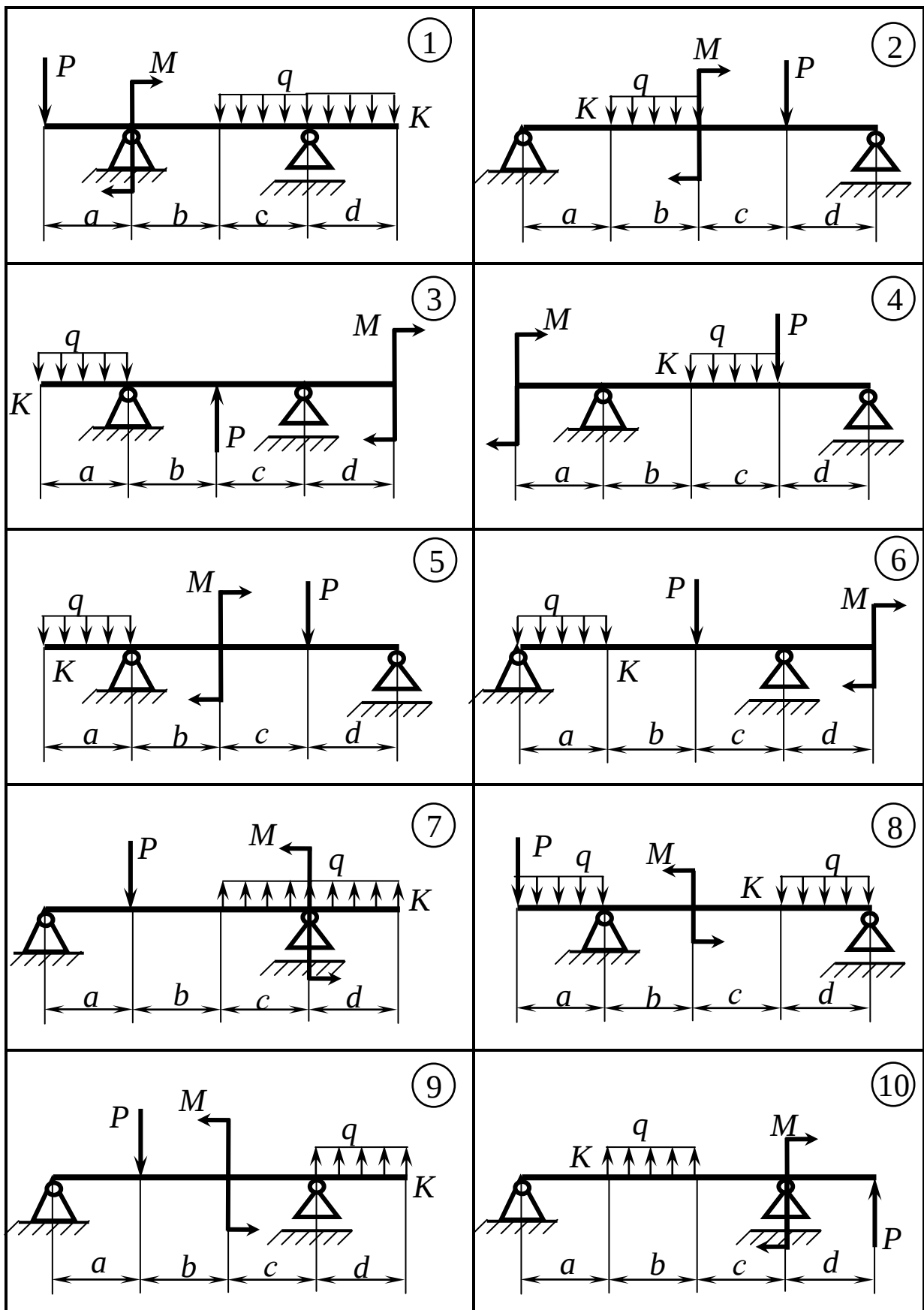


Рисунок 4.7 – Схеми балок до задачі 4.2

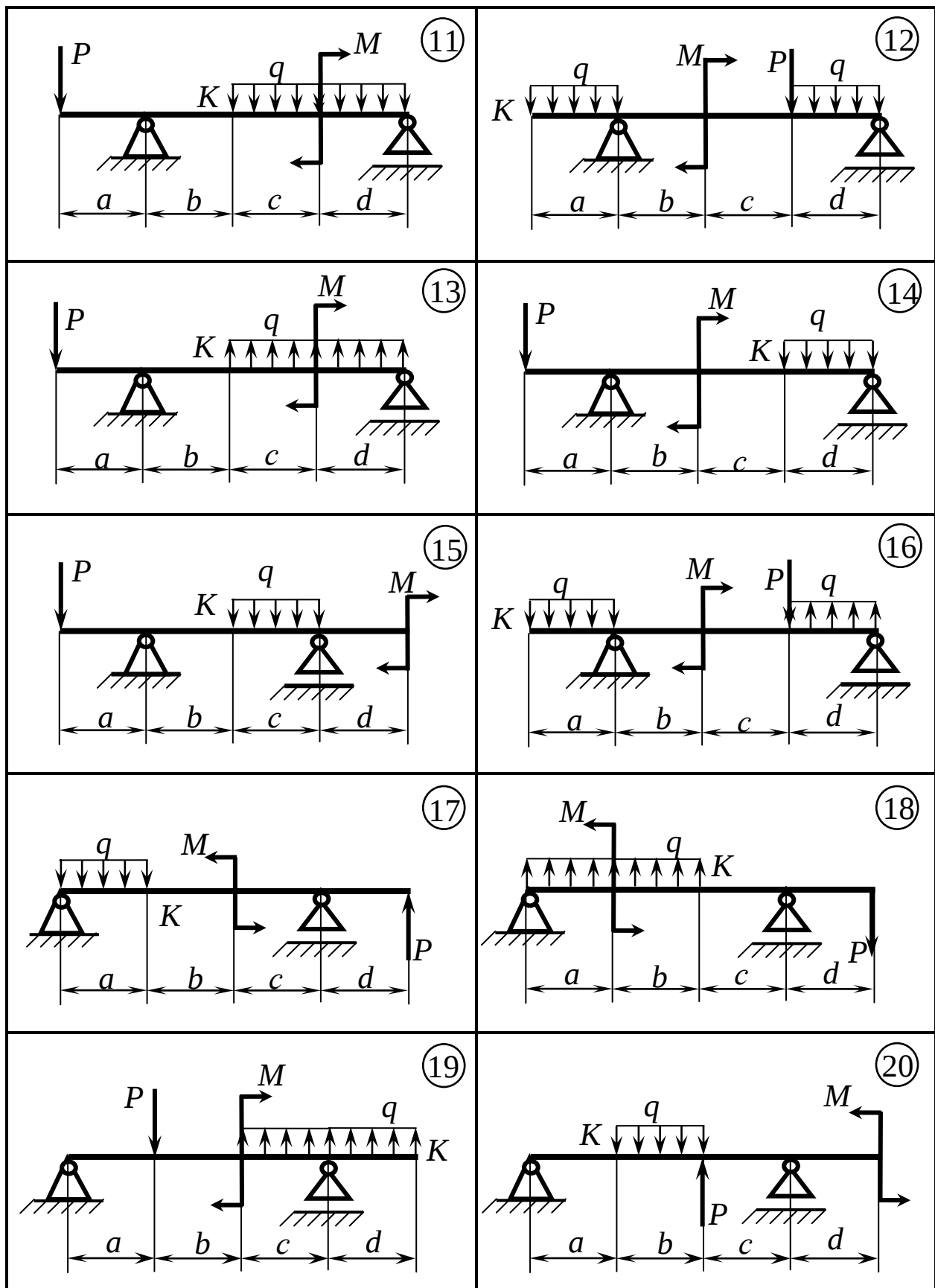


Рисунок 4.7, аркуш 2

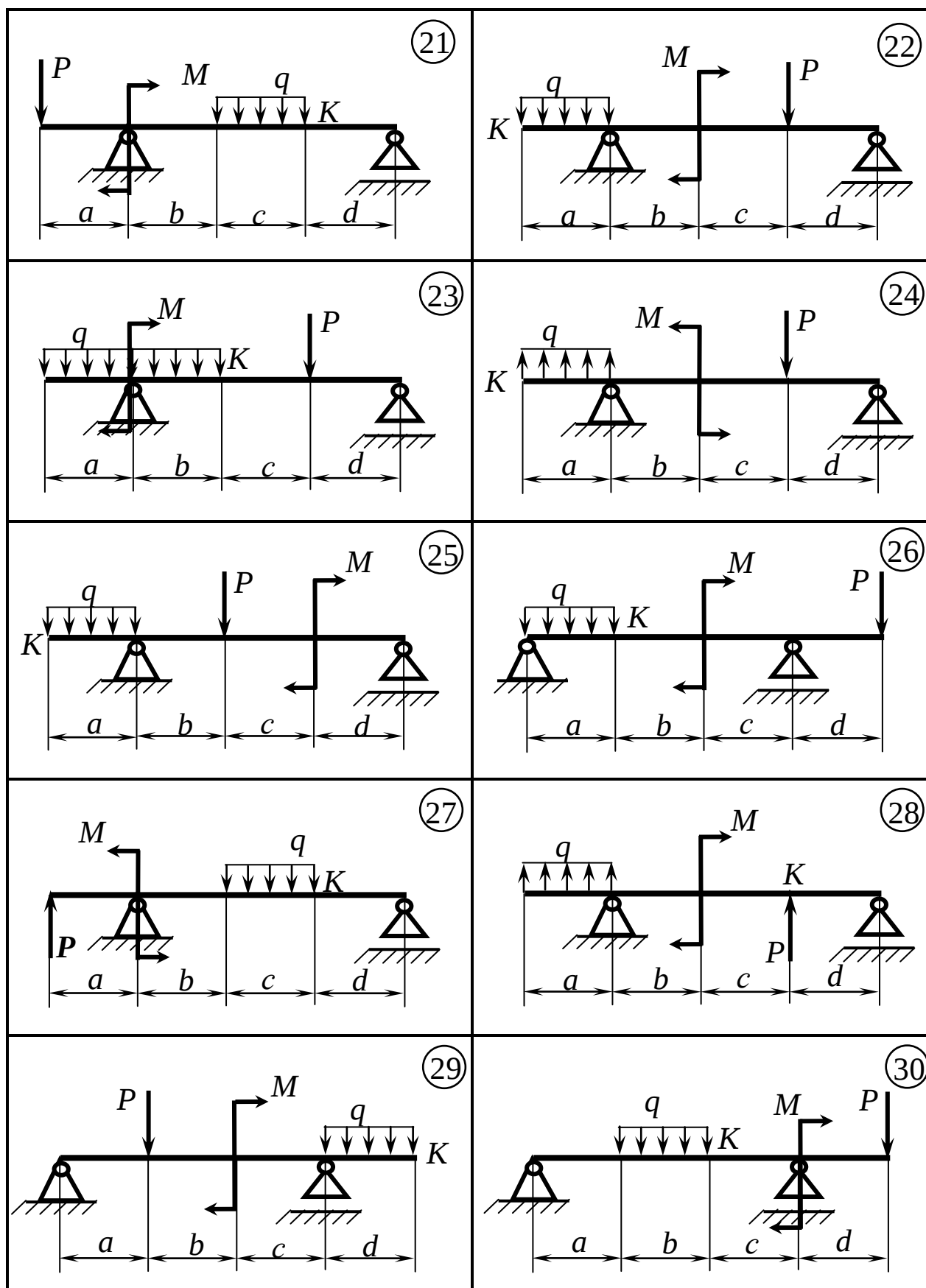


Рисунок 4.7, аркуш 3

4.2.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.2

Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

1 Визначаються опорні реакції балки від заданого навантаження і будуються епюри поперечних сил Q та згинальних моментів M .

2 З аналізу епюри M визначається максимальний за модулем згинальний момент у балці – $M_{\max}$.

3 З умови міцності за нормальними напруженнями визначається потрібний осьовий момент опору перерізу балки – W_x (див. формулу 4.1).

4 Із сортаменту (див. додаток А) вибирається номер двотавра, який має найближчий до визначеного осьовий момент опору.

5 Вертикальне і кутове переміщення перерізу K балки визначаються за методом Мора.

6 Для визначення шуканого вертикального переміщення (прогину δ_K) в місці розташування перерізу K до балки прикладається одинична сила $P = 1$, визначаються від її дії опорні реакції і будується відповідна епюра згинальних моментів $\bar{M}_1$. Величина δ_K визначається за формулою крайніх ординат (додаток Г) шляхом “перемноження” епюр згинальних моментів від заданого навантаження – M і одиничної сили – $\bar{M}_1$:

$$\delta_K = M \times \bar{M}_1. \quad (4.12)$$

7 Для визначення кутового переміщення (кута повороту Θ_K) в місці розташування перерізу K до балки прикладається одиничний момент $M = 1$, визначаються від його дії опорні реакції і будується відповідна епюра згинальних моментів $\bar{M}_2$. Величина Θ_K визначається за формулою крайніх ординат (додаток Г) шляхом “перемноження” епюр згинальних моментів від заданого навантаження – M і одиничного моменту – $\bar{M}_2$:

$$\Theta_K = M \times \bar{M}_2. \quad (4.13)$$

4.2.2 Приклад розв'язання задачі 4.2

Схема балки зображена на рисунку 4.8. Розрахунки виконуємо відповідно до $q = 10$ кН/м; $P = 15$ кН; $M = 20$ кН·м; $a = 2$ м; $b = 1$ м; $c = 2$ м; $d = 1$ м.

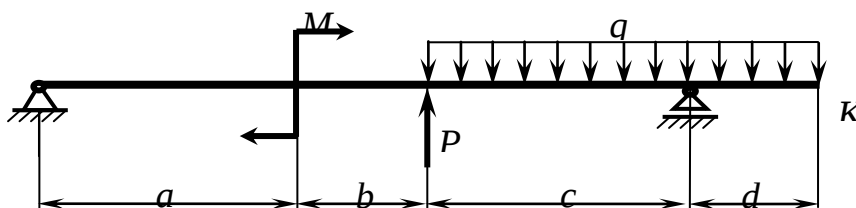


Рисунок 4.8 – Схема балки до прикладу задачі 4.2

Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції балки (рис. 4.9,а):

$$\sum m_A = -M + P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 4 + R_B \cdot 5 - q \cdot 1 \cdot 5,5 = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{5} \cdot (M - P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 4 + q \cdot 1 \cdot 5,5) = \frac{1}{5} \cdot (20 - 45 + 80 + 55) = 22 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = -M - P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 + R_A \cdot 5 = 0;$$

$$R_A = \frac{1}{5} \cdot (M + P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 + q \cdot 1 \cdot 0,5) = \frac{1}{5} \cdot (20 + 30 - 20 + 5) = 7 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = -R_A + P - q \cdot 2 + R_B - q \cdot 1 = -7 + 15 - 20 + 22 - 10 = -37 + 37 = 0.$$

2 Будуємо епюру поперечних сил (рис. 4.9,б):

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = -R_A = -7 \text{ кН}; \quad Q_5 = Q_4 + P = -7 + 15 = 8 \text{ кН};$$

$$Q_6 = Q_5 - q \cdot 2 = 8 - 20 = -12 \text{ кН}; \quad Q_7 = Q_6 + R_B = -12 + 22 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_8 = Q_7 - q \cdot 1 = 10 - 10 = 0; \quad \ell_9 = \frac{Q_5}{q} = \frac{8}{10} = 0,8 \text{ м}.$$

3 Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 4.9,в):

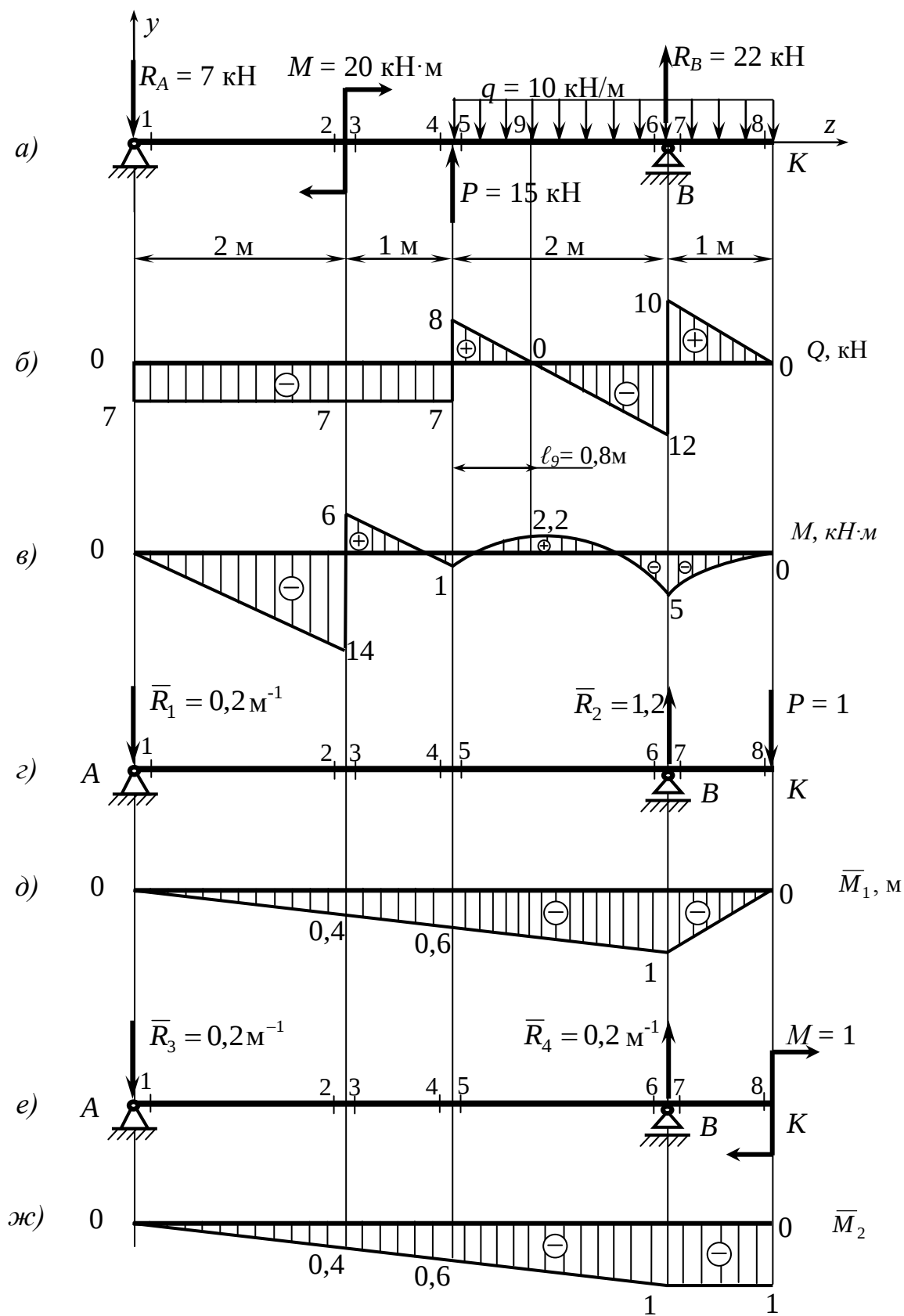
$$M_1 = 0; \quad M_2 = -R_A \cdot 2 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_2 + M = -14 + 20 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = M_5 = -R_A \cdot 3 + M = -21 + 20 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = M_7 = -R_A \cdot 5 + M + P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -7 \cdot 5 + 20 + 15 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = -35 + 20 + 30 - 20 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\begin{aligned} M_8 &= -R_A \cdot 6 + M + P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 + R_B \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 = \\ &= -7 \cdot 6 + 20 + 15 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 2 + 22 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 0,5 = \\ &= -42 + 20 + 45 - 40 + 22 - 5 = -87 + 87 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_9 &= -R_A \cdot (3 + \ell_9) + M + P \cdot \ell_9 - q \cdot \ell_9 \cdot \frac{\ell_9}{2} = \\ &= -7 \cdot 3,8 + 20 + 15 \cdot 0,8 - 10 \cdot 0,8 \cdot 0,4 = -26,6 + 20 + 12 - 3,2 = \\ &= -29,8 + 32 = 2,2 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$



а – робоча схема балки; б – епюра поперечних сил;
в – епюра згинальних моментів; г, д, е, ж – опорні реакції і згинальні
моменти балки від дії одиничних силових факторів
Рисунок 4.9 – Графічні побудови до прикладу задачі 4.2

4 Перевіряємо побудовані епюри шляхом їх побудови у зворотному напрямі.

Епюра поперечних сил:

$$Q_8 = 0; \quad Q_7 = q \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН}; \quad Q_6 = Q_7 - R_B = 10 - 22 = -12 \text{ кН}; \\ Q_5 = Q_6 + q \cdot 2 = -12 + 10 \cdot 2 = 8 \text{ кН}; \quad Q_4 = Q_3 = Q_2 = Q_1 = Q_5 - P = \\ = 8 - 15 = -7 \text{ кН}.$$

Епюра згинальних моментів:

$$M_8 = 0; \quad M_7 = M_6 = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -10 \cdot 1 \cdot 0,5 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_5 = M_4 = -q \cdot 1 \cdot 2,5 + R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -10 \cdot 1 \cdot 2,5 + 22 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = \\ = -25 + 44 - 20 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = -q \cdot 1 \cdot 3,5 + R_B \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 + P \cdot 1 = \\ = -10 \cdot 1 \cdot 3,5 + 22 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 2 + 15 \cdot 1 = -35 + 66 - 40 + 15 = -75 + 81 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_2 = M_3 - M = 6 - 20 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_1 = \sum m_A = 0 \text{ (див. вище);} \\ M_9 = -q \cdot 1 \cdot (0,5 + 2 - \ell_9) + R_B \cdot (2 - \ell_9) - q \cdot (2 - \ell_9) \cdot \frac{(2 - \ell_9)}{2} = \\ = -10 \cdot 1 \cdot 1,7 + 22 \cdot 1,2 - 10 \cdot 1,2 \cdot 0,6 = -17 + 26,4 - 7,2 = -24,2 + 26,4 = 2,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Як бачимо, обидві епюри побудовані правильно, бо значення Q і M у всіх характерних перерізах при прямому і зворотному варіантах побудови повністю збігаються.

5 Підбираємо потрібний номер двотавра:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{14 \cdot 10^3}{160} = 87,5 \text{ см}^3.$$

Найближче до визначеної величини осьового моменту опору має двотавр 16, у якого $W_x = 109 \text{ см}^3$, $J_x = 873 \text{ см}^4$ (див. додаток А). Його і приймаємо для подальших розрахунків.

6 Визначаємо опорні реакції балки від дії одиничної сили $P=1$, прикладеної в перерізі К (рис. 4.9,з):

$$\sum m_A = \bar{R}_2 \cdot 5 - P \cdot 6 = 0; \quad \bar{R}_2 = \frac{P \cdot 6}{5} = \frac{1 \cdot 6}{5} = 1,2; \\ \sum m_B = \bar{R}_1 \cdot 5 - P \cdot 1 = 0; \quad \bar{R}_1 = \frac{P \cdot 1}{5} = \frac{1 \cdot 1}{5} = 0,2.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = -\bar{R}_1 + \bar{R}_2 - P = -0,2 + 1,2 - 1 = 0.$$

7 Будуємо епюру згинальних моментів $\bar{M}_1$ від дії на балку одиничної сили (рис. 4.9,д):

$$\begin{aligned} M_1 = M_8 &= 0; \quad M_2 = M_3 = -\bar{R}_1 \cdot 2 = -0,2 \cdot 2 = -0,4\text{м}; \\ M_4 = M_5 &= -\bar{R}_1 \cdot 3 = -0,2 \cdot 3 = -0,6\text{м}; \\ M_6 = M_7 &= -\bar{R}_1 \cdot 5 = -0,2 \cdot 5 = -1\text{м}. \end{aligned}$$

8 Визначаємо опорні реакції балки від дії одиничного моменту, прикладеного в перерізі К (рис. 4.9,е):

$$\begin{aligned} \sum m_A &= \bar{R}_4 \cdot 5 - M = 0; \quad \bar{R}_4 = \frac{M}{5} = \frac{1}{5} = 0,2\text{м}^{-1}; \\ \sum m_B &= \bar{R}_3 \cdot 5 - M = 0; \quad \bar{R}_3 = \frac{M}{5} = \frac{1}{5} = 0,2\text{м}^{-1}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum P_y = -\bar{R}_3 + \bar{R}_4 = -0,2 + 0,2 = 0.$$

9 Будуємо епюру згинальних моментів $\bar{M}_2$ від дії на балку одиничного моменту (рис. 4.9,ж):

$$\begin{aligned} M_1 &= 0; \quad M_2 = M_3 = -\bar{R}_3 \cdot 2 = -0,2 \cdot 2 = -0,4; \\ M_4 = M_5 &= -\bar{R}_3 \cdot 3 = -0,2 \cdot 3 = -0,6; \quad M_6 = M_7 = M_8 = -M = -1. \end{aligned}$$

10 Визначаємо вертикальне переміщення перерізу К балки:

$$\begin{aligned} \delta_K &= M \times \bar{M}_1 = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-14) \cdot (-0,4) + 0 \cdot (-0,4) + (-14) \cdot 0] + \\ &+ \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 6 \cdot (-0,4) + 2 \cdot (-1) \cdot (-0,6) + 6 \cdot (-0,6) + (-1) \cdot (-0,4)] + \\ &+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-1) \cdot (-0,6) + 2 \cdot (-5) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (-5) \cdot (-0,6)] + \\ &+ \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-0,6 - 1) + \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-5) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot (-1)] + \\ &+ \frac{10 \cdot 1^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-1 + 0) = \frac{22,4}{6E \cdot J_l} - \frac{6,8}{6E \cdot J_x} + \frac{30,4}{6E \cdot J_x} - \frac{128}{24E \cdot J_x} + \frac{10}{6E \cdot J_x} - \frac{10}{24E \cdot J_x} = \\ &= \frac{3,583}{E \cdot J_x} = \frac{3,583 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 873 \cdot 10^4} = 2,05\text{мм}. \end{aligned}$$

Додатний результат вказує на те, що переріз K переміщується за напрямком одиничної сили, тобто вниз.

11 Визначаємо кутове переміщення (кут повороту) перерізу K балки:

$$\begin{aligned}\theta_K &= M \times \overline{M}_2 = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-14) \cdot (-0,4) + 0 \cdot (-0,4) + (-14) \cdot 0] + \\ &+ \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 6 \cdot (-0,4) + 2 \cdot (-1) \cdot (-0,6) + 6 \cdot (-0,6) + (-1) \cdot (-0,4)] + \\ &+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-1) \cdot (-0,6) + 2 \cdot (-5) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (-5) \cdot (-0,6)] + \\ &+ \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-0,6 - 1) + \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-5) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)] + \\ &+ \frac{10 \cdot 1^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-1 - 1) = \frac{22,4}{6E \cdot J_x} - \frac{6,8}{6E \cdot J_x} + \frac{30,4}{6E \cdot J_x} - \frac{128}{24E \cdot J_x} + \frac{15}{6E \cdot J_x} - \frac{20}{24E \cdot J_x} = \\ &= \frac{4}{E \cdot J_x} = \frac{4 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 873 \cdot 10^4} = 0,002 \text{ радіана} = 0,114 \text{ градуса.}\end{aligned}$$

Додатний результат вказує на те, що переріз K обертається за напрямком одиничного моменту, тобто за ходом стрілок годинника.

4.3 Переміщення в плоских рамах

Для заданої сталеві рами побудувати епюри внутрішніх зусиль і підібрати переріз (двотавр), якщо $[\sigma] = 160$ МПа. Визначити переміщення рухомої опори рами і кут повороту перерізу K .

Вихідні дані вибрати із таблиць 4.3 та 4.4 і рисунка 4.10.

4.3.1 Методичні вказівки до виконання задачі 4.3

Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

1 Визначаються опорні реакції рами від заданого навантаження і будуються епюри подовжніх сил N , поперечних сил Q та згинальних моментів M .

2 З аналізу епюри M визначається максимальний за модулем згинальний момент у стрижнях рами – $M_{\max}$.

3 За величиною $M_{\max}$ визначається потрібний осьовий момент опору перерізу стрижнів – W_x (див. формулу 4.1).

4 Із сортаменту (див. додаток А) вибирається номер двотавра, який має найближчий до визначеного осьовий момент опору.

5 Переміщення рухомої опори рами і кута повороту перерізу K визначаються за методом Мора.

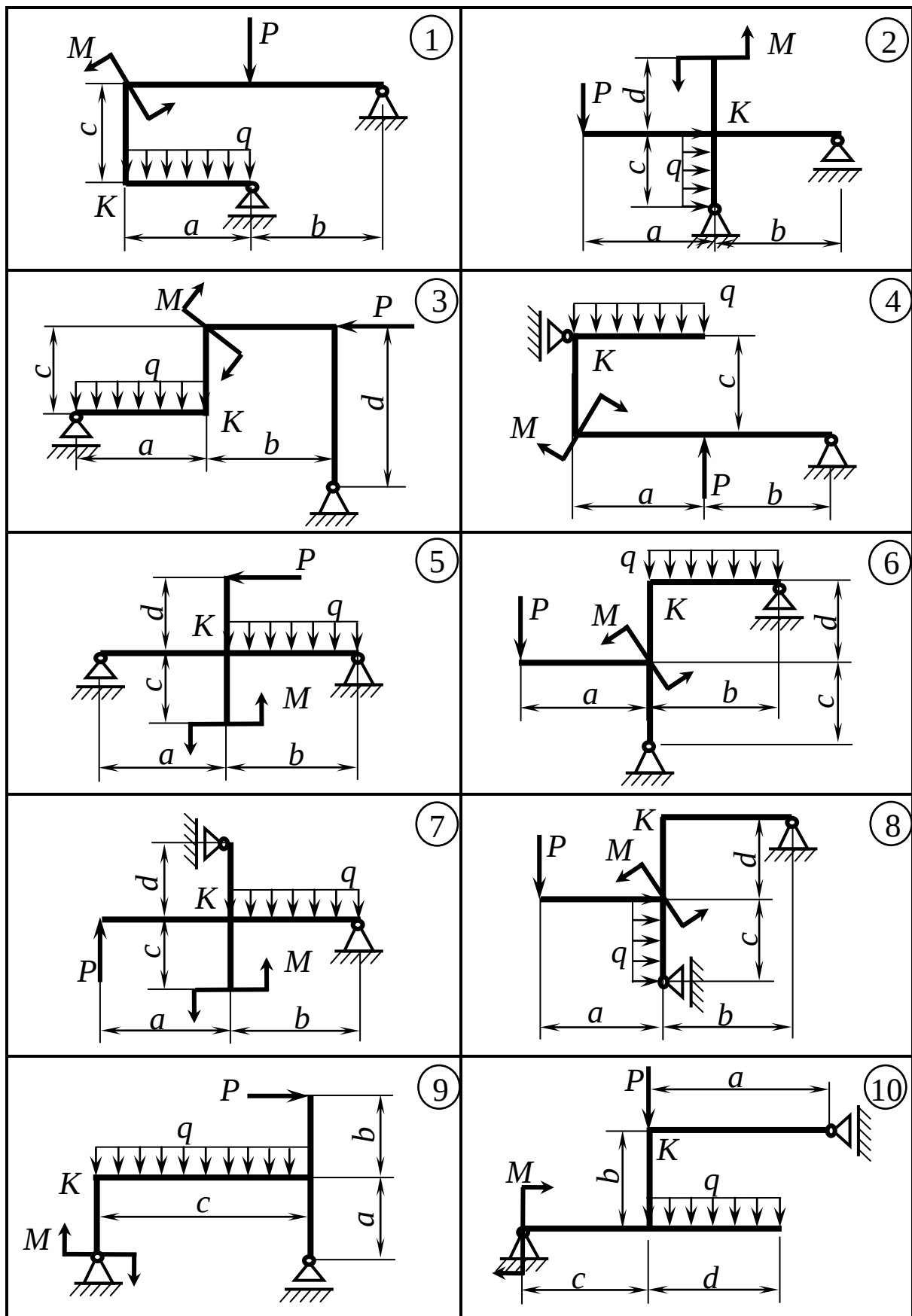


Рисунок 4.10 – Схеми рам до задачі 4.3

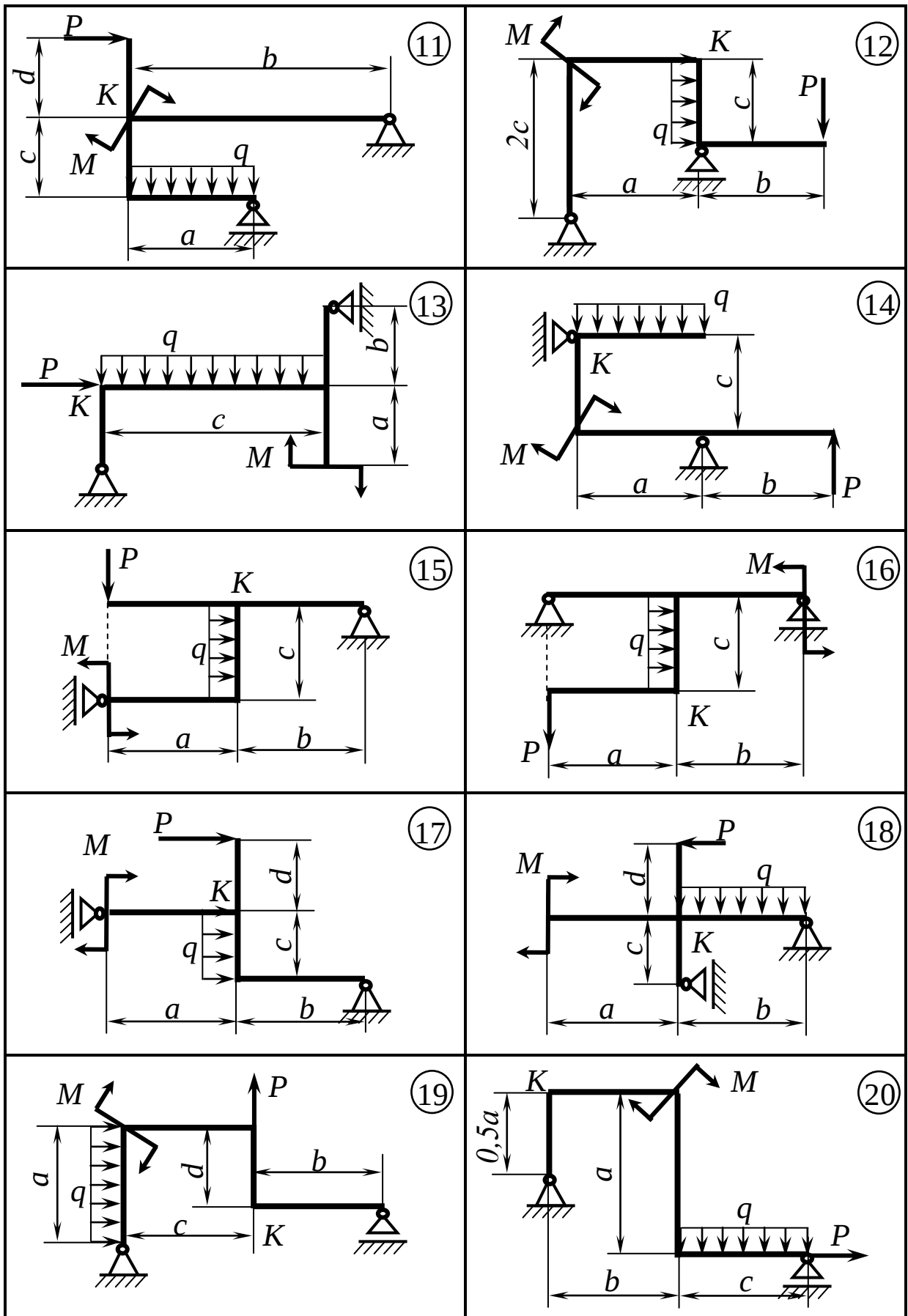


Рисунок 4.10, аркуш 2

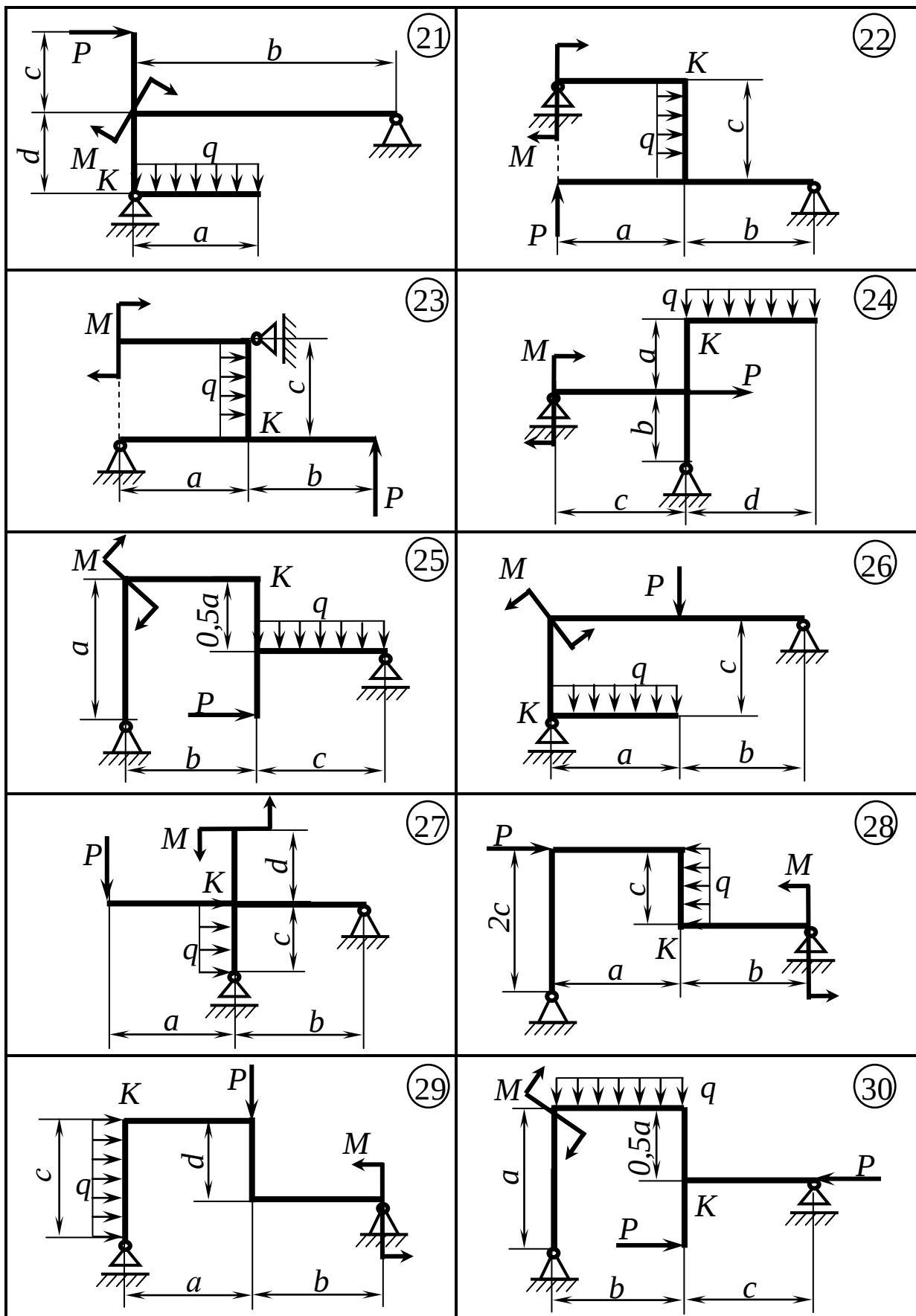


Рисунок 4.10, аркуш 3

6 Для визначення шуканого переміщення рухомої опори (δ) до неї прикладається в напрямку можливого руху одинична сила $P = 1$, визначаються опорні реакції рами від дії цієї сили і будується відповідна епюра згинальних моментів $\bar{M}_1$. Величина δ визначається за формулою крайніх ординат (див. додаток Г) шляхом “перемноження” епюри згинальних моментів від заданого навантаження – M і епюри $\bar{M}_1$ (див. формулу 4.12).

7 Для визначення шуканого кута повороту вузла K (θ_K) у цьому вузлі прикладається одиничний момент $M = 1$, визначаються від його дії опорні реакції рами і будується відповідна епюра згинальних моментів $\bar{M}_2$. Величина θ_K визначається за формулою крайніх ординат (див. додаток Г) шляхом “перемноження” епюри згинальних моментів від заданого навантаження – M і епюри $\bar{M}_2$ (див. формулу 4.13).

4.3.2 Приклад 1 розв’язання задачі 4.3

Схема рами зображена на рисунку 4.11. Розрахунки виконуємо відповідно до $q = 10$ кН/м; $P = 12$ кН; $M = 9$ кН·м; $a = 2$ м; $b = 3$ м; $c = 1$ м.

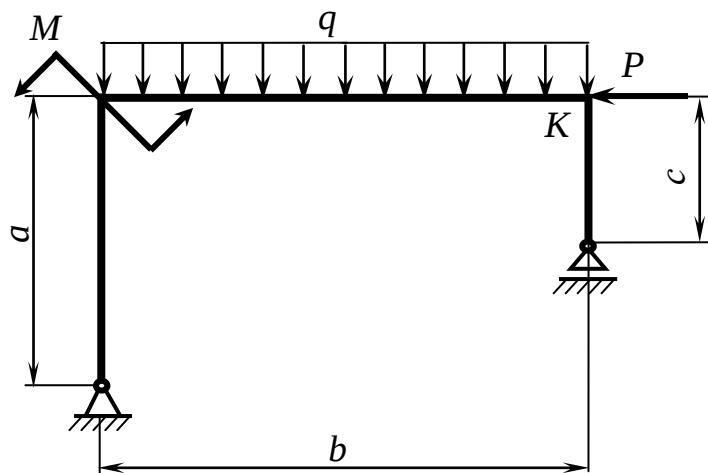


Рисунок 4.11 – Схема рами до прикладу 1 задачі 4.3

Розв’язання

1 Визначаємо опорні реакції рами (рис. 4.12):

$$\sum m_A = M - q \cdot 3 \cdot 1,5 + P \cdot 2 + R_B \cdot 3 = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{3} \cdot (-M + q \cdot 3 \cdot 1,5 - P \cdot 2) = \frac{1}{3} \cdot (-9 + 45 - 24) = 4 \text{ кН.}$$

$$\sum P_y = Y_A - q \cdot 3 + R_B = 0; \quad Y_A = q \cdot 3 - R_B = 30 - 4 = 26 \text{ кН.}$$

$$\sum P_z = Z_A - P = 0; \quad Z_A = P = 12 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum m_K = -Y_A \cdot 3 + Z_A \cdot 2 + M + q \cdot 3 \cdot 1,5 = -78 + 24 + 9 + 45 = -78 + 78 = 0.$$

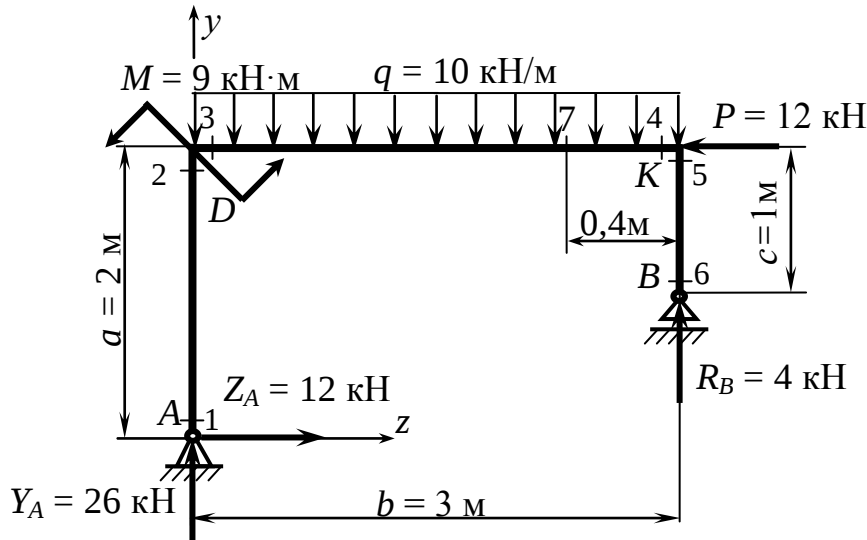


Рисунок 4.12 – Робоча схема рами

2 Будуємо епюру подовжніх сил (рис. 4.13, а):

$$N_1 = N_2 = -Y_A = -26 \text{ кН}; \quad N_3 = N_4 = -P = -12 \text{ кН};$$

$$N_5 = N_6 = -R_B = -4 \text{ кН.}$$

3 Будуємо епюру поперечних сил (рис. 4.13, б):

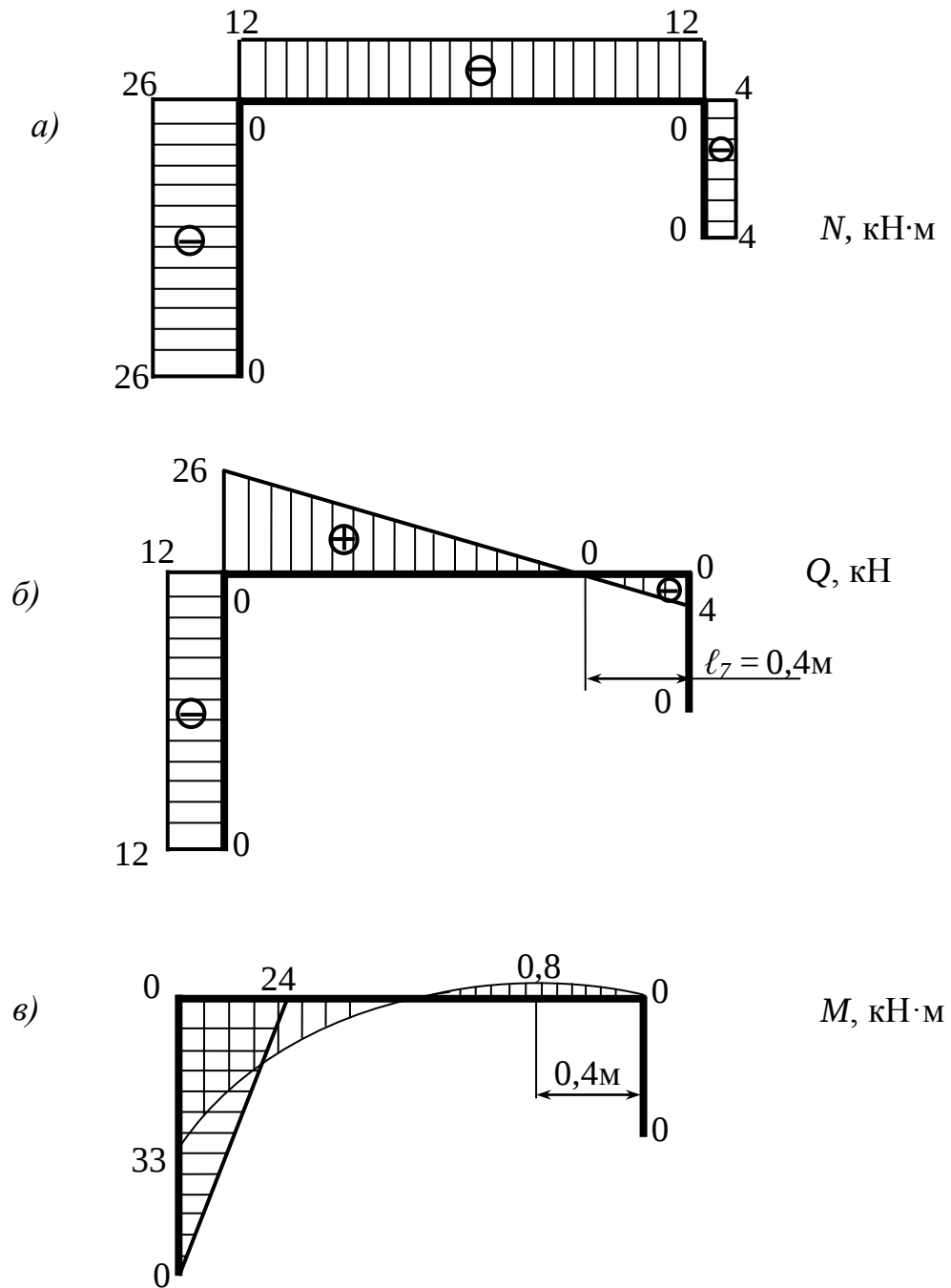
$$Q_1 = Q_2 = -Z_A = -12 \text{ кН}; \quad Q_3 = Y_A = 26 \text{ кН}; \quad Q_4 = -R_B = -4 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_6 = 0; \quad \ell_7 = R_B : q = 4 : 10 = 0,4 \text{ м.}$$

4 Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 4.13, в):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = Z_A \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_2 + M = 24 + 9 = 33 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

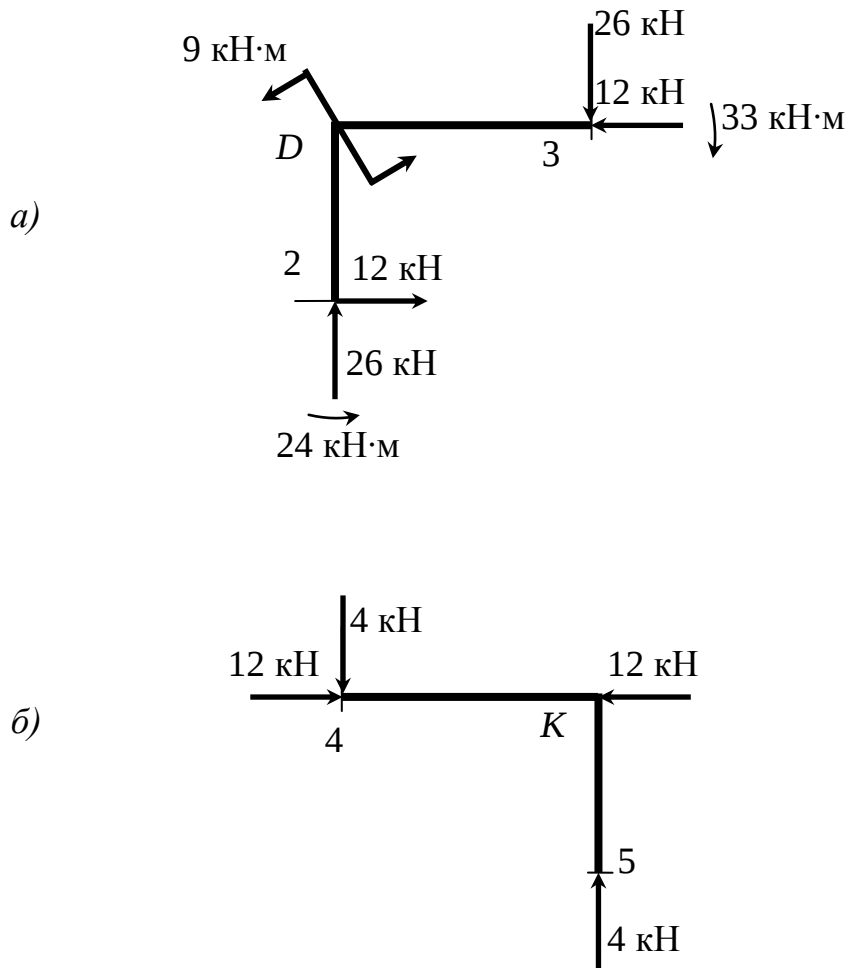
$$M_4 = M_5 = M_6 = R_B \cdot 0 = 0; \quad M_7 = R_B \cdot \ell_7 - q \cdot \ell_7 \cdot \frac{\ell_7}{2} = 4 \cdot 0,4 - 10 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 1,6 - 0,8 = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$



*a – епюра подовжніх сил; б – епюра поперечних сил;
в – епюра згинальних моментів*

Рисунок 4.13 – Епюри внутрішніх зусиль рами

5 Перевіряємо правильність побудованих епюр шляхом аналізу умов рівноваги безкінечно малих вузлів рами D і K (рис. 4.14,а; 4.14,б).



a – вузол D; б – вузол K

Рисунок 4.14 – Системи сил, що діють на вузли рами

З наведених рисунків бачимо, що системи сил, діючих на кожен з вузлів як на тверде тіло, перебувають у рівновазі, бо у них дорівнюють нулю як суми проекцій на вертикаль і горизонталь, так і суми моментів відносно вузлових точок *D* і *K*. Це вказує на правильність виконаних побудов.

6 Підбираємо потрібний номер двотавра для стрижнів рами:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{33 \cdot 10^3}{160} = 206,25 \text{ см}^3.$$

Найближче до визначеної величини осьового моменту опору має двотавр 22, у якого $W_x = 232 \text{ см}^3$, $J_x = 2550 \text{ см}^4$ (див. додаток А). Його і приймаємо для подальших розрахунків.

7 Прикладаємо до рухомої опори *B* горизонтальну одиничну силу $P = 1$ (саме по горизонталі може рухатись дана опора) і визначаємо опорні реакції рами від дії цієї сили (рис. 4.15,а):

$$\sum P_z = \bar{R}_1 - P = 0; \quad \bar{R}_1 = P = 1;$$

$$\sum m_B = \bar{R}_1 \cdot 1 - \bar{R}_2 \cdot 3 = 0; \quad \bar{R}_2 = \frac{\bar{R}_1 \cdot 1}{3} = \frac{1}{3};$$

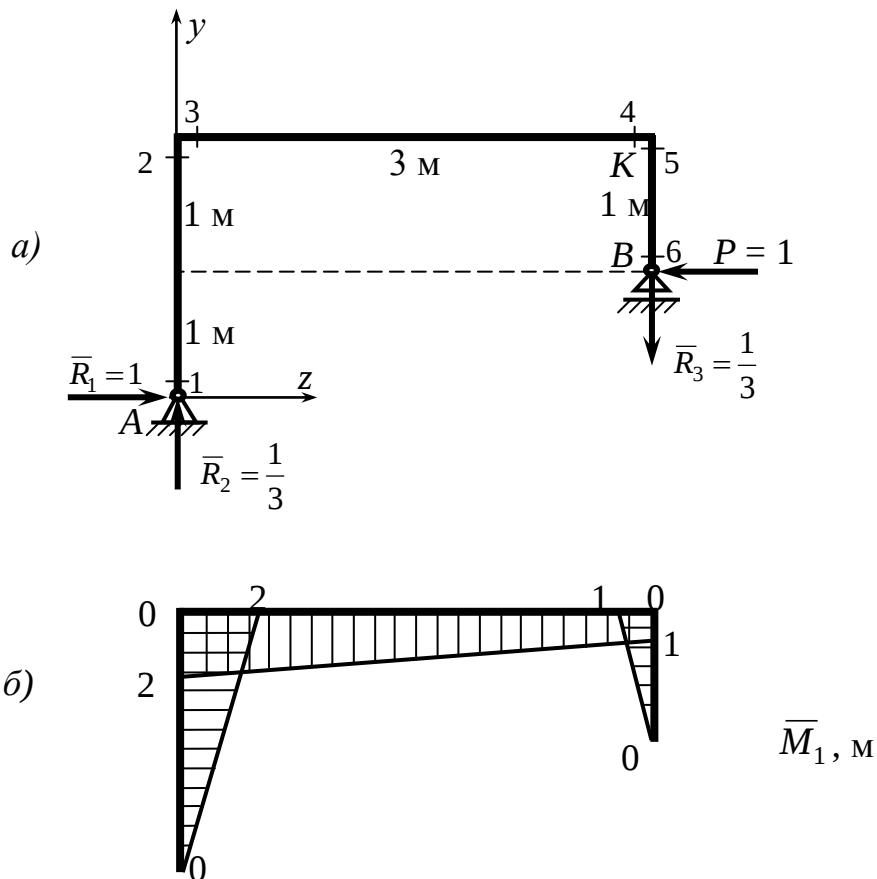
$$\sum P_y = \bar{R}_2 - \bar{R}_3 = 0; \quad \bar{R}_3 = \bar{R}_2 = \frac{1}{3}.$$

Перевірка:

$$\sum m_A = P \cdot 1 - \bar{R}_3 \cdot 3 = 1 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 - 1 = 0.$$

8 Будуємо епюру згинальних моментів $\bar{M}_1$ від дії одиничної сили (рис. 4.15,б):

$$M_1 = M_6 = 0; \quad M_2 = M_3 = \bar{R}_1 \cdot 2 = 2\text{ м}; \quad M_4 = M_5 = P \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1\text{ м}.$$



а – рама; б – епюра згинальних моментів
Рисунок 4.15 – Реакції рами і епюри згинальних моментів
від дії одиничної сили

9 Визначаємо переміщення рухомої опори рами:

$$\begin{aligned}
\delta_B &= M \times \bar{M}_1 = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-24) \cdot (-2) + 0 \cdot (-2) + (-24) \cdot 0] + \\
&+ \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-33) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-33) \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)] + \\
&+ \frac{10 \cdot 3^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-2 - 1) = \frac{192}{6E \cdot J_x} + \frac{495}{6E \cdot J_x} - \frac{810}{24E \cdot J_x} = \frac{80,75}{E \cdot J_x} = \\
&= \frac{80,75 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = 15,8 \text{ мм}.
\end{aligned}$$

Додатний результат означає, що опора B переміщується за напрямком одиничної сили, тобто вліво.

10 Прикладаємо до вузла K одиничний момент $M = 1$ і визначаємо опорні реакції рами від його дії (рис. 4.16,а):

$$\begin{aligned}
\sum m_A &= \bar{R}_6 \cdot 3 - M = 0; \quad \bar{R}_6 = \frac{M}{3} = \frac{1}{3} \text{ м}^{-1}; \\
\sum P_y &= -\bar{R}_5 + \bar{R}_6 = 0; \quad \bar{R}_5 = \bar{R}_6 = \frac{1}{3} \text{ м}^{-1}; \\
\sum P_z &= \bar{R}_4 = 0.
\end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum m_B = \bar{R}_5 \cdot 3 + \bar{R}_4 \cdot 1 - M = \frac{1}{3} \cdot 3 + 0 \cdot 1 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

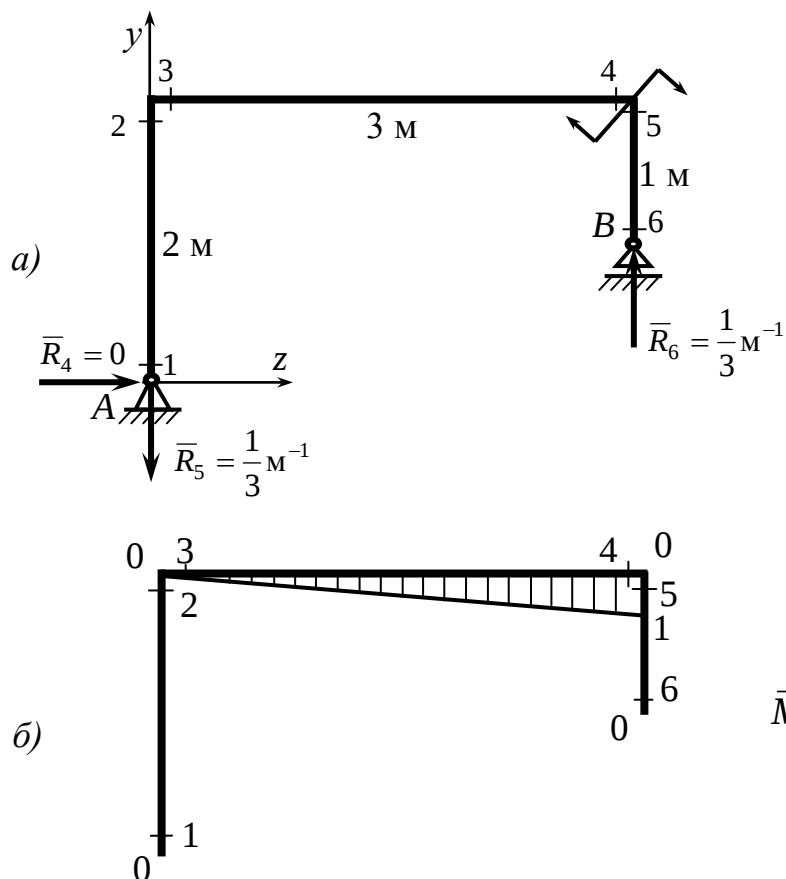
11 Будуємо епюру згинальних моментів $\bar{M}_2$ від дії одиничного моменту (рис. 4.16,б):

$$\begin{aligned}
M_1 &= 0; \quad M_2 = M_3 = \bar{R}_4 \cdot 2 = 0 \cdot 2 = 0; \quad M_4 = \bar{R}_4 \cdot 2 + \bar{R}_5 \cdot 3 = \\
&= 0 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 0 + 1 = 1; \quad M_6 = M_5 = 0.
\end{aligned}$$

12 Визначаємо кут повороту вузла K рами:

$$\begin{aligned}
\theta_K &= M \times \bar{M}_2 = \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-33) \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-33) \cdot (-1) + 0 \cdot 0] + \\
&+ \frac{10 \cdot 3^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 - 1) = \frac{99}{6E \cdot J_x} - \frac{270}{24E \cdot J_x} = \frac{5,25}{E \cdot J_x} = \frac{5,25 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = \\
&= 0,001 \text{ радіана} = 0,057 \text{ градуса}.
\end{aligned}$$

Додатний результат вказує на те, що переріз K обертається за напрямком одиничного моменту, тобто за ходом стрілок годинника.



а – рама; б – епюра згинальних моментів
Рисунок 4.16 – Реакції рами і епюри згинальних моментів від дії одиничного моменту

4.3.3 Приклад 2 розв'язання задачі 4.3

Схема рами зображена на рисунку 4.17. Розрахунки виконуємо відповідно до таких вихідних даних: $q = 10 \text{ кН/м}$; $P = 16 \text{ кН}$; $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $a = 3 \text{ м}$; $b = 2 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$; $d = 1 \text{ м}$.

Розв'язання

1 Визначаємо опорні реакції рами (рис. 4.18):

$$\begin{aligned} \sum m_A &= -q \cdot 3 \cdot 1,5 + P \cdot 1 + R_B \cdot 3 + M = 0, \\ R_B &= \frac{1}{3} \cdot (q \cdot 3 \cdot 1,5 - P \cdot 1 - M) = \frac{1}{3} \cdot (45 - 16 - 8) = 7 \text{ кН}; \\ \sum P_y &= Y_A - q \cdot 3 + R_B = 0, \quad Y_A = q \cdot 3 - R_B = 30 - 7 = 23 \text{ кН}; \\ \sum P_z &= Z_A - P = 0, \quad Z_A = P = 16 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum m_K = -Y_A \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + P \cdot 1 + M = -69 + 45 + 16 + 8 = -69 + 69 = 0.$$

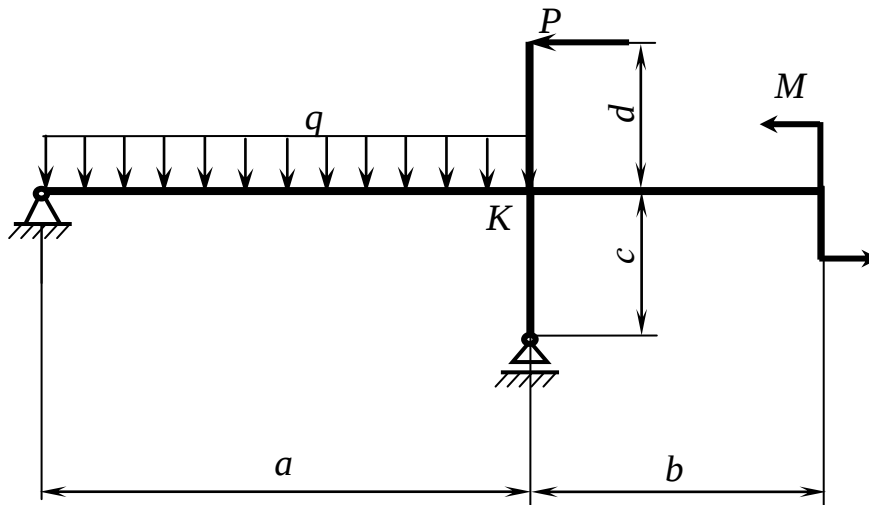


Рисунок 4.17 – Схема рами до прикладу 2 задачі 4.3

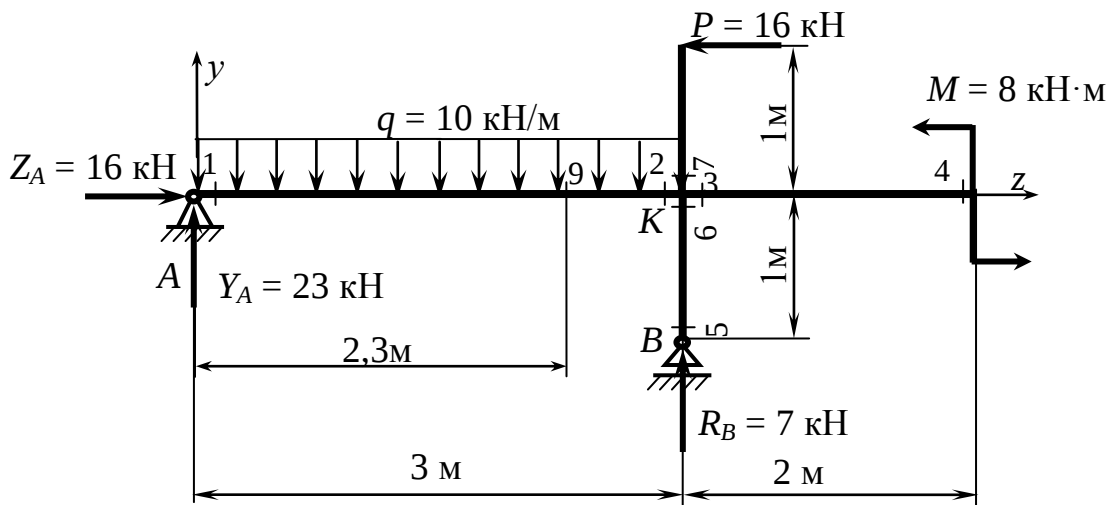


Рисунок 4.18 – Робоча схема рами

2 Будемо епюру подовжніх сил (рис. 4.19,*а*):

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 = -Z_A = -16 \text{ кН}; \quad N_3 = N_4 = 0; \\ N_5 = N_6 = -R_B = -7 \text{ кН}; \quad N_7 = N_8 = 0. \end{aligned}$$

3 Будемо епюру поперечних сил (рис. 4.19,*б*):

$$Q_1 = Y_A = 23 \text{ кН}; \quad Q_2 = Y_A - q \cdot 3 = 23 - 30 = -7 \text{ кН}; \quad Q_3 = Q_4 = 0;$$

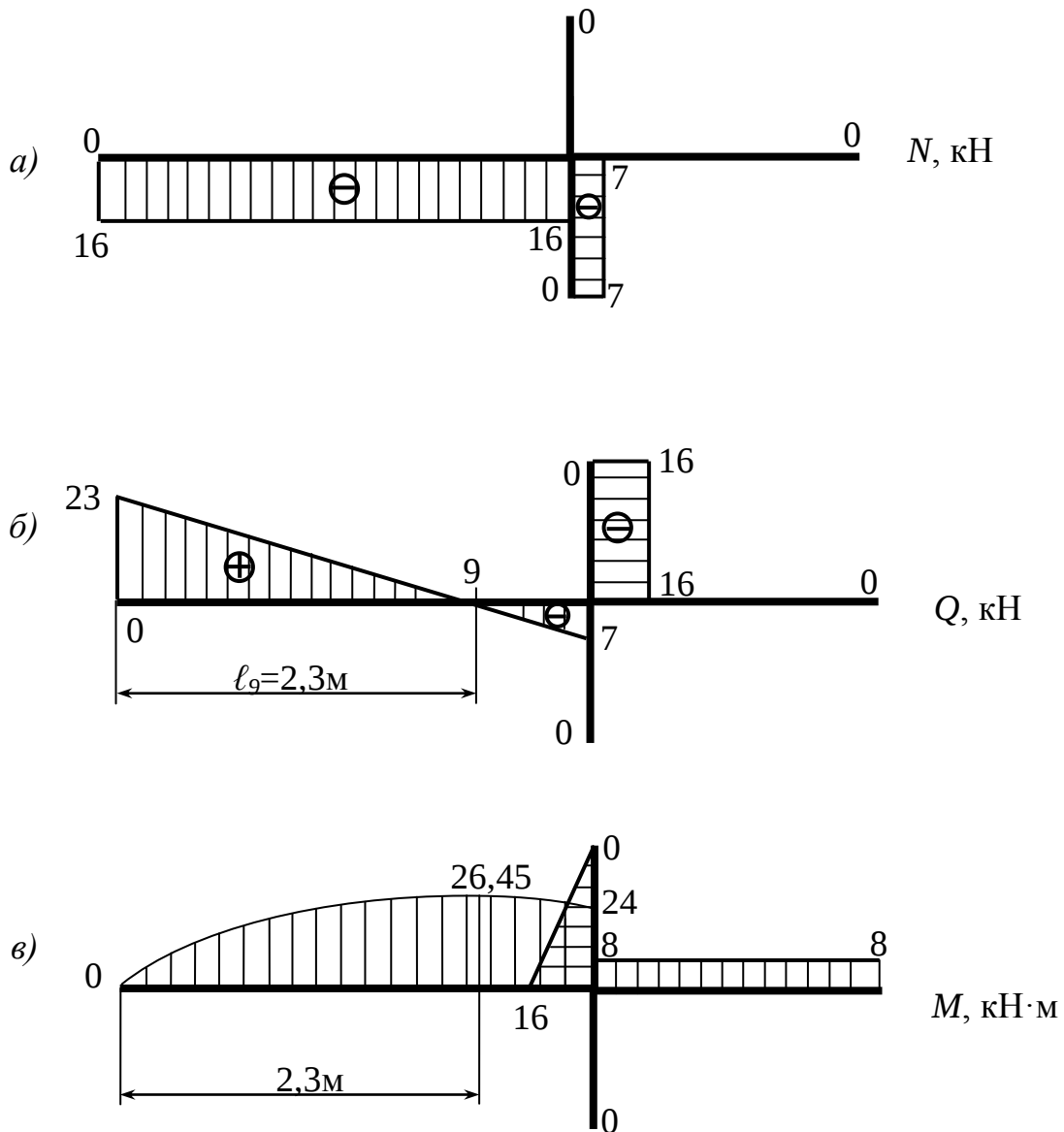
$$Q_5 = Q_6 = 0; \quad Q_7 = Q_8 = -P = -16 \text{ кН}; \quad \ell_9 = Y_A : q = 23 : 10 = 2,3 \text{ м}.$$

4 Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 4.19, в):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = Y_A \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 69 - 45 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_4 = M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_6 = 0; \quad M_7 = P \cdot 1 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_8 = 0; \quad M_9 = Y_A \cdot \ell_9 - q \cdot \ell_9 \cdot \frac{\ell_9}{2} =$$

$$= 23 \cdot 2,3 - 10 \cdot 2,3 \cdot 1,15 = 52,9 - 26,45 = 26,45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



а – епюра подовжніх сил; б – епюра поперечних сил;

в – епюра згинальних моментів

Рисунок 4.19 – Епюри внутрішніх зусиль рами

5 Перевіряємо правильність побудованих епюр шляхом аналізу умов рівноваги безкінечно малого вузла K (рис. 4.20).

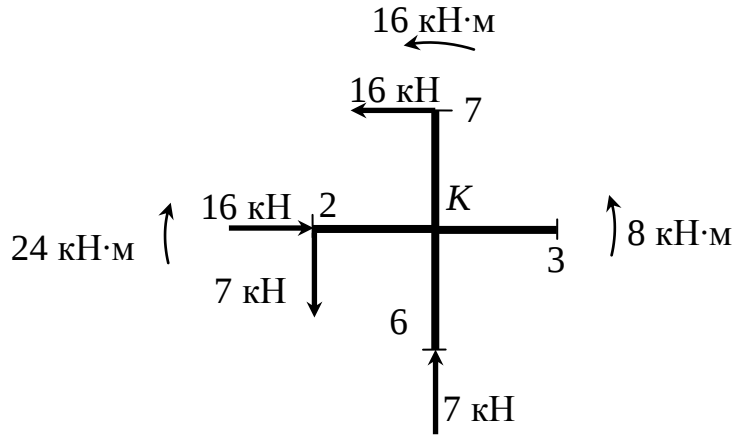


Рисунок 4.20 – Система сил, які діють на вузол K

З наведеного рисунка бачимо, що системи сил, діючих на вузол як на тверде тіло, перебуває в рівновазі, бо у неї дорівнюють нулю як суми проєкцій на вертикаль і горизонталь, так і сума моментів відносно вузлової точки K . Це вказує на правильність виконаних побудов.

6 Підбираємо потрібний номер двотавра для стрижнів рами:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{26,45 \cdot 10^3}{160} = 165,3125 \text{ см}^3.$$

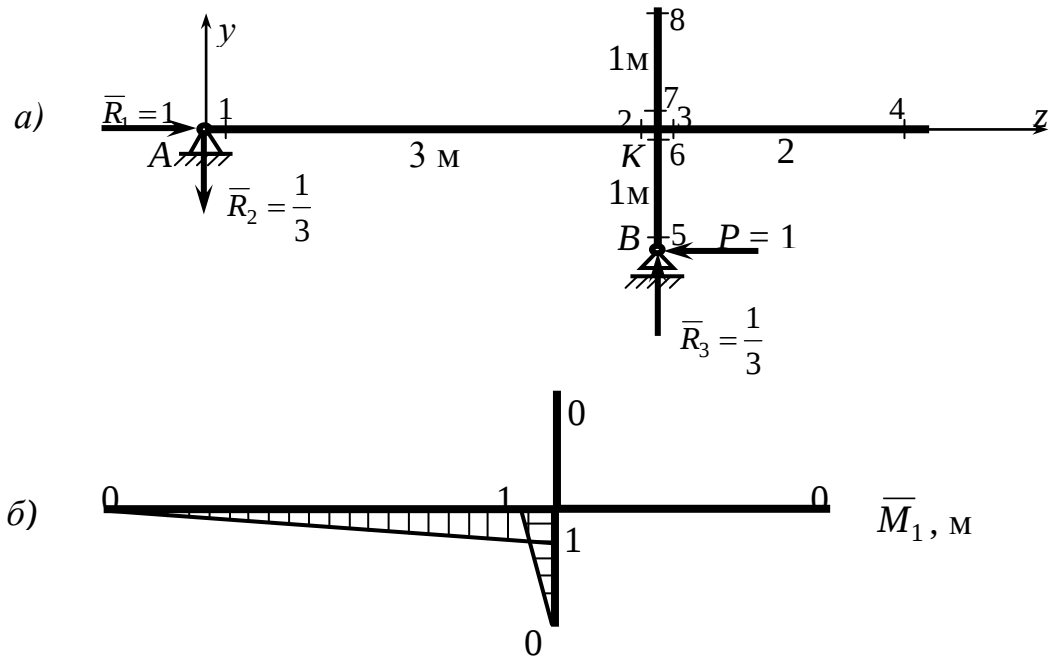
Найближче до визначеної величини осьового моменту опору має двотавр 20, у якого $W_x = 184 \text{ см}^3$, $J_x = 1840 \text{ см}^4$ (див. додаток А). Його і приймаємо для подальших розрахунків.

7 Прикладаємо до рухомої опори B горизонтальну одиничну силу $P = 1$ (саме по горизонталі може рухатись дана опора) і визначаємо опорні реакції рами від дії цієї сили (рис. 4.21,а):

$$\begin{aligned} \sum P_z &= \bar{R}_1 - P = 0; \quad \bar{R}_1 = P = 1; \\ \sum m_A &= \bar{R}_3 \cdot 3 - P \cdot 1 = 0; \quad \bar{R}_3 = \frac{P \cdot 1}{3} = \frac{1}{3}; \\ \sum P_y &= -\bar{R}_2 + \bar{R}_3 = 0; \quad \bar{R}_3 = \bar{R}_2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum m_K = \bar{R}_2 \cdot 3 - P \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 1 - 1 = 0.$$



а – рама; б – епюра згинальних моментів
Рисунок 4.21 – Реакції рами і епюри згинальних моментів
від дії одиничної сили

8 Будемо епюру згинальних моментів $\bar{M}_1$ від дії одиничної сили (рис. 4.21,б):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = \bar{R}_2 \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1\text{м}; \quad M_3 = M_4 = 0;$$

$$M_5 = 0; \quad M_6 = P \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1\text{м}; \quad M_7 = M_8 = 0.$$

9 Визначаємо переміщення рухомої опори рами:

$$\delta_B = M \times \bar{M}_1 = \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 24 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 24 \cdot 0] + \frac{10 \cdot 3^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 - 1) =$$

$$= -\frac{144}{6E \cdot J_x} - \frac{270}{24E \cdot J_x} = -\frac{35,25}{E \cdot J_x} = -\frac{35,25 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = -9,6\text{мм}.$$

Від'ємний результат означає, що опора B переміщується проти напрямку одиничної сили, тобто вправо.

10 Прикладаємо до вузла K одиничний момент $M = 1$ і визначаємо опорні реакції рами від його дії (рис. 4.22,а):

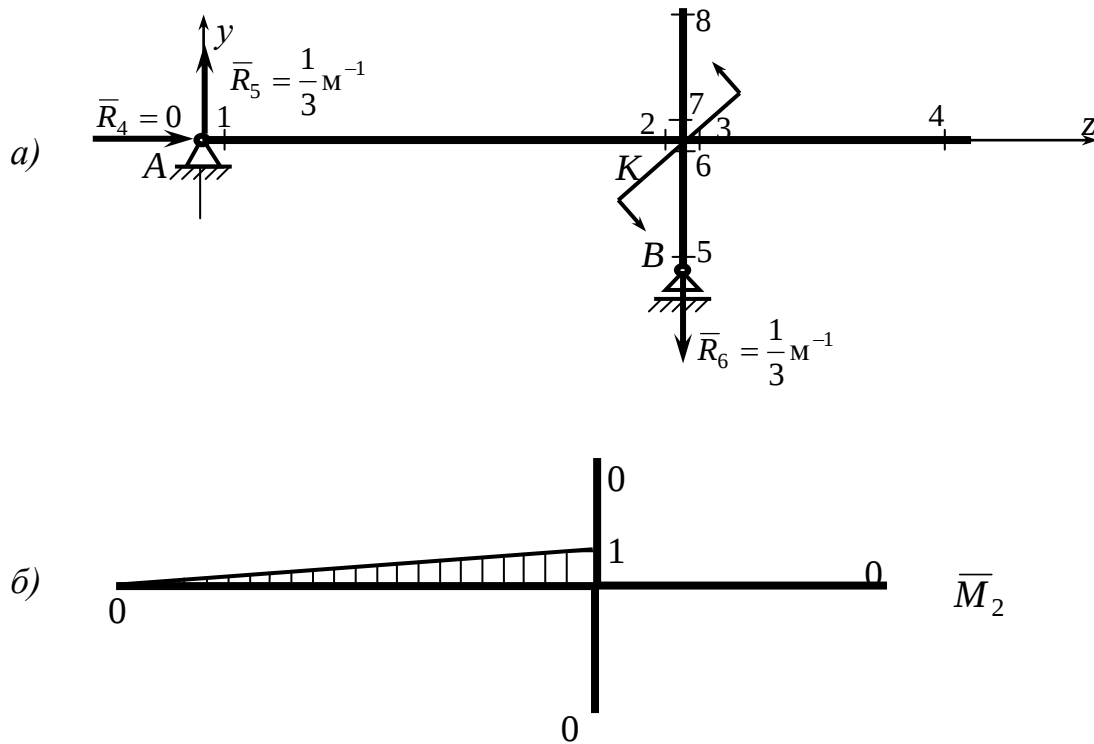
$$\sum m_A = -\bar{R}_6 \cdot 3 + M = 0; \quad \bar{R}_6 = \frac{M}{3} = \frac{1}{3}\text{м}^{-1};$$

$$\sum P_y = \bar{R}_5 - \bar{R}_6 = 0; \quad \bar{R}_5 = \bar{R}_6 = \frac{1}{3}\text{м}^{-1};$$

$$\sum P_z = \bar{R}_4 = 0.$$

Перевірка:

$$\sum m_K = -\bar{R}_5 \cdot 3 + M = -\frac{1}{3} \cdot 3 + 1 = -1 + 1 = 0.$$



a – рама; б – епюра згинальних моментів

Рисунок 4.22 – Реакції рами і епюри згинальних моментів від дії одиничного моменту

11 Будемо епюру згинальних моментів $\bar{M}_2$ від дії одиничного моменту (рис. 4.22,б):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = \bar{R}_5 \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1;$$

$$M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = M_8 = 0.$$

12 Визначаємо кут повороту вузла K рами:

$$\begin{aligned} \theta_K = M \times \bar{M}_2 &= \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 24 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 24 \cdot 0] + \\ &+ \frac{10 \cdot 3^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 + 1) = \frac{144}{6E \cdot J_x} + \frac{270}{24E \cdot J_x} = \frac{35,25}{E \cdot J_x} = \frac{35,25 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = \\ &= 0,010 \text{ радіана} = 0,57 \text{ градуса.} \end{aligned}$$

Додатний результат вказує на те, що переріз K обертається за напрямком одиничного моменту, тобто проти ходу стрілок годинника.

ЛІТЕРАТУРА

- 1 Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів»: *навчальний посібник* / [Л. В. Кутовий та ін.]. – Краматорськ : ДДМА, 2007. – 220 с.
- 2 Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Є. С. Уманський. – К. : Вища шк., 2004. – 655 с.
- 3 Дарков А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 654 с.
- 4 Справочник по сопротивлению материалов / [Г. С. Писаренко и др.]. – К. : Наукова думка, 1988. – 704 с.
- 5 Макаров Е. Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad / Е. Г. Макаров. – С Пб. : БХВ – Петербург, 2004. – 512 с.
- 6 Холодняк Ю. С. Развитие методологии прочностных расчётов двутавровых балок / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, С. В. Капорович // Научный Вестник Донбасской государственной машиностроительной академии. – Краматорск : ДГМА, 2015. – № 2 (17Е). – С. 103–114.

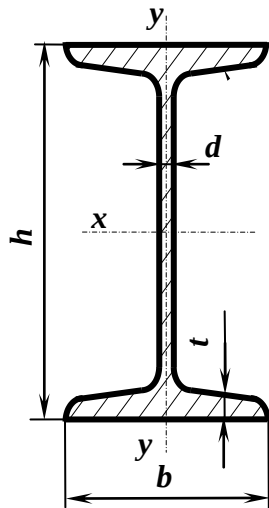
ДОДАТОК А

Основні параметри катаних профілів

1 Нормальні лінійні розміри, мм (за ГОСТ 6636-69, фрагмент ряду Ra20)

Таблиця А.1

1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6
4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0	10	11	12	14
16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56
63	71	80	90	100	110	125	140	160	180	200	220
250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900



2 Двутаври сталі гарячекатані (за ГОСТ 8239-89)

Позначення:

h – висота профілю

b – ширина полки

d – товщина стінки

t – середня товщина полки

F – площа перерізу

J – момент інерції

W – момент опору

i – радіус інерції

S – статичний момент

половини перерізу

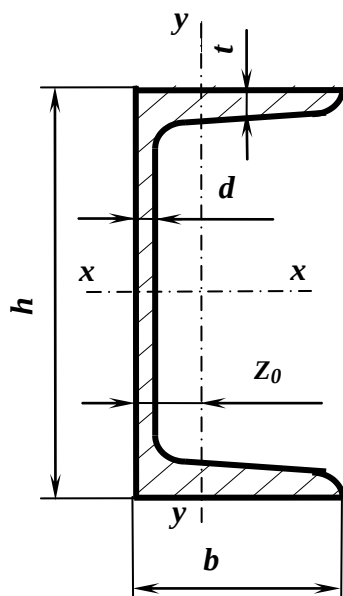
Приклад позначення профілю:

Двутавр 30 ГОСТ 8239-89

Таблиця А.2

Номер профілю	Основні розміри, мм				F см ²	J_X см ⁴	W_X см ³	i_X см	S_X см ³	J_Y см ⁴	W_Y см ³	i_Y см
	h	b	d	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1 290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1 430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1 840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2 030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2 550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2 790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3 460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3 800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5 010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5 500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7 080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7 780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9 840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19 062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27 696	1 231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39 727	1 589	19,9	919	1 043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55 962	2 035	21,8	1 181	1 356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76 806	2 560	23,6	1 491	1 725	182	3,54

3 Швелери сталіні гарячекатані (за ГОСТ 8240-89)



Позначення:

h – висота профілю
 b – ширина полки
 d – товщина стінки
 t – середня товщина полки
 F – площа перерізу
 J – момент інерції

W – момент опору
 i – радіус інерції
 S – статичний момент
 половини перерізу
 Z_0 – відстань від осі y
 до зовнішньої грані стінки

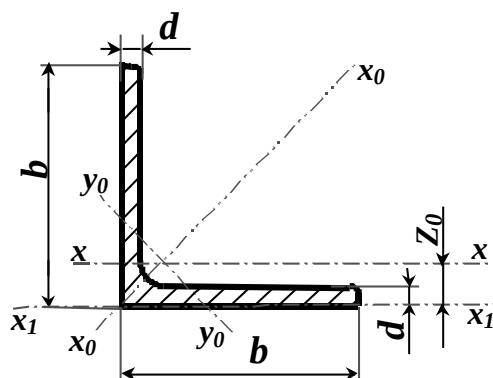
Приклад позначення профілю:

Швелер 30 ГОСТ 8240-89

Таблиця А.3

Номер профілю	Основні розміри, мм				F см ²	J_X см ⁴	W_X см ³	i_X см	S_X см ³	J_Y см ⁴	W_Y см ³	i_Y см	Z_0 см
	h	b	d	t									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1 090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1 190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1 520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1 670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2 110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2 330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2 900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3 180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4 160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5 810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7 980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

4 Кутики сталеві гарячекатані рівнополичні (за ГОСТ 8509-93 або ДСТУ2251-93)



Позначення:

b – ширина полки
 F – площа перерізу
 i – радіус інерції

d – товщина полки
 J – момент інерції
 Z_0 – відстань від центра ваги перерізу до зовнішньої грані полки

Приклад позначення профілю:

Кутик 50х50х3 ГОСТ 8509-93

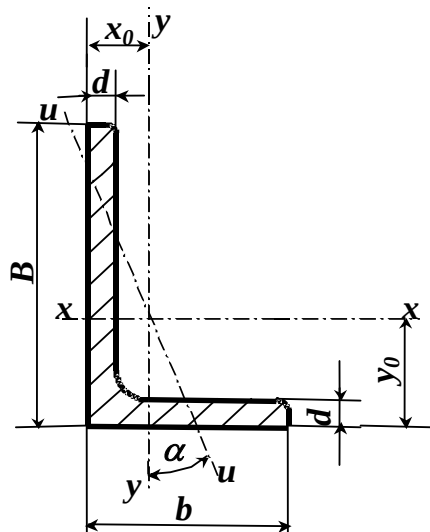
Таблиця А.4

Номер Кутика	Основні розміри мм		F см ²	J_X см ⁴	i_X см	J_{X_0} max см ⁴	i_{X_0} max см	J_{Y_0} min см ⁴	i_{Y_0} min см	Z_0 , см
	b	d								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
		5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
		6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18

Продовження таблиці А.4

Номер Кутика	Основні розміри мм		F см ²	J_X см ⁴	i_X см	J_{X_0} max см ⁴	i_{X_0} max см	J_{Y_0} min см ⁴	i_{Y_0} min см	Z_0 см
	b	d								
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
16	160	10	31,4	774	4,96	1 229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	844	4,95	1 341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1 450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1 046	4,92	1 662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1 175	4,89	1 866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	1 299	4,87	2 061	6,13	537	3,13	4,63
		20	60,4	1 419	4,85	2 248	6,10	589	3,12	4,70
18	180	11	38,8	1 216	5,60	1 933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	1 317	5,59	2 093	7,04	540	3,58	4,89
20	200	12	47,1	1 823	6,22	2 896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1 961	6,21	3 116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2 097	6,20	3 333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2 363	6,17	3 755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2 871	6,12	4 560	7,72	1 182	3,93	5,70
		25	94,3	3 466	6,06	5 494	7,63	1 438	3,91	5,89
		30	111,5	4 020	6,00	6 351	7,55	1 688	3,89	6,07
22	220	14	60,4	2 814	6,83	4 470	8,60	1 159	4,38	5,93
		16	68,6	3 175	6,81	5 045	8,58	1 306	4,36	6,02
25	250	16	78,4	4 717	7,76	7 492	9,78	1 942	4,98	6,75
		18	87,7	5 247	7,73	8 337	9,75	2 158	4,96	6,83
		20	97,0	5 765	7,71	9 160	9,72	2 370	4,94	6,91
		22	106,1	6 270	7,69	9 961	9,69	2 579	4,93	7,00
		25	119,7	7 006	7,65	11 125	9,64	2 887	4,91	7,11
		28	133,1	7 717	7,61	12 244	9,59	3 190	4,89	7,23
		30	142,0	8 117	7,59	12 965	9,56	3 389	4,89	7,31

5 Кутики сталеві гарячекатані нерівнополичні (за ГОСТ 8510-86)



Позначення:

B – ширина більшої полки

d – товщина полки

I – момент інерції

x_0, y_0 – відстані від центра ваги перерізу до зовнішніх граней полук,

b – ширина меншої полки

F – площа перерізу

i – радіус інерції

α – кут нахилу осі u

Приклад позначення профілю:

Кутик 50х32х3 ГОСТ 8510-86

Таблиця А.5

Номер кутика	Основні розміри, мм			F см ²	J_x см ⁴	J_y см ⁴	J_u min см ⁴	i_u см	x_0 см	y_0 см	tg α
	B	b	d								
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392
3/2	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	0,54	1,04	0,421
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382
			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385
			4	2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
			5	3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	0,66	1,41	0,374
4/3	40	39	4	2,67	4,18	2,01	1,09	0,64	0,78	1,28	0,544
			5	3,28	5,04	2,41	1,33	0,64	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382
			4	2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403
			4	3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
			5	4,41	13,8	4,48	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
			5	4,98	19,9	6,26	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6	5,90	23,3	7,28	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8	7,68	29,6	9,15	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	23,41	12,08	6,41	1,07	1,26	2,00	0,576
			6	6,60	27,46	14,12	7,52	1,07	1,30	2,04	0,575
			7	7,62	31,32	16,05	8,60	1,06	1,34	2,08	0,571
			8	8,62	35,00	18,88	9,65	1,06	1,37	2,12	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
			6	7,25	40,92	14,60	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			7	8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	1,25	2,48	0,435
			8	9,47	52,38	18,52	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430

Продовження таблиці А.5

Номер кутика	Основні розміри, мм			F см ²	J_X см ⁴	J_Y см ⁴	J_u min см ⁴	i_u см	x_0 см	y_0 см	tg α
	B	b	d								
8/5	80	50	5 6	6,36 7,55	41,64 48,98	12,68 14,85	7,57 8,88	1,09 1,08	1,13 1,17	2,60 2,65	0,387 0,386
8/6	80	60	6 7 8	8,15 9,42 10,6	52,06 59,61 66,88	25,18 28,74 32,15	13,61 15,58 17,49	1,29 1,29 1,28	1,49 1,53 1,57	2,47 2,52 2,56	0,547 0,546 0,544
9/5,6	90	56	5,5 6 8	7,86 8,54 11,2	65,3 70,6 90,9	19,7 21,2 27,1	11,8 12,7 16,3	1,22 1,22 1,21	1,26 1,28 1,36	2,92 2,95 3,04	0,384 0,384 0,380
10/6,3	100	63	6 7 8 10	9,59 11,1 12,6 15,5	98,3 113,0 127,0 154,0	30,6 35,0 39,2 47,1	18,20 20,83 23,38 28,34	1,38 1,37 1,36 1,35	1,42 1,46 1,50 1,58	3,23 3,28 3,32 3,40	0,393 0,392 0,391 0,387
10/6,5	100	65	7 8 10	11,2 12,7 15,7	114,0 138,3 155,5	38,3 43,0 51,7	22,77 25,24 30,60	1,41 1,41 1,40	1,52 1,56 1,64	3,24 3,28 3,37	0,415 0,414 0,410
11/7	110	70	6,5 8	11,4 13,9	142 172	45,6 54,6	26,9 32,3	1,53 1,52	1,58 1,64	3,55 3,61	0,402 0,400
12,5/8	125	80	7 8 10 12	14,1 16,0 19,7 23,4	227 256 312 365	73,7 83,0 100,0 117,0	43,4 48,8 59,3 69,5	1,76 1,75 1,74 1,72	1,80 1,84 1,92 2,00	4,01 4,05 4,14 4,22	0,407 0,406 0,404 0,400
14/9	140	90	8 10	18,0 22,2	364 444	120 146	70,3 85,5	1,98 1,96	2,03 2,12	4,49 4,58	0,411 0,409
16/10	160	100	9 10 12 14	22,9 25,3 30,0 34,7	606 667 784 897	186 204 239 272	110 121 142 162	2,20 2,19 2,18 2,16	2,23 2,28 2,36 2,43	5,19 5,23 5,32 5,40	0,391 0,390 0,388 0,385
18/11	180	110	10 12	28,3 33,7	952 1 123	276 324	165 194	2,42 2,40	2,44 2,52	5,88 5,97	0,375 0,374
20/12,5	200	125	11 12 14 16	34,9 37,9 43,9 49,8	1 449 1 568 1 801 2 026	446 482 551 617	264 285 327 367	2,75 2,74 2,73 2,72	2,79 2,83 2,91 2,99	6,50 6,54 6,62 6,71	0,392 0,392 0,390 0,388
25/16	250	160	12 16 18 20	48,3 63,6 71,1 78,5	3 147 4 091 4 545 4 987	1 032 1 333 1 475 1 613	604 781 896 949	3,54 3,50 3,49 3,48	3,53 3,69 3,77 3,85	7,97 8,14 8,23 8,31	0,410 0,408 0,407 0,405

ДОДАТОК Б

**Параметри безпечного факторного простору двотаврів
(сталь Ст.3, $[\sigma] = 160$ МПа, третя теорія міцності)**

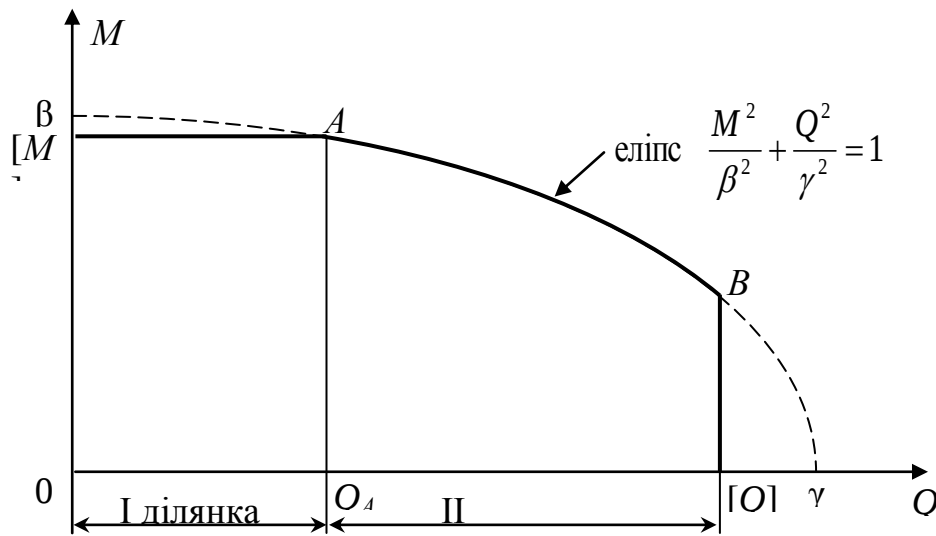


Рисунок Б.1

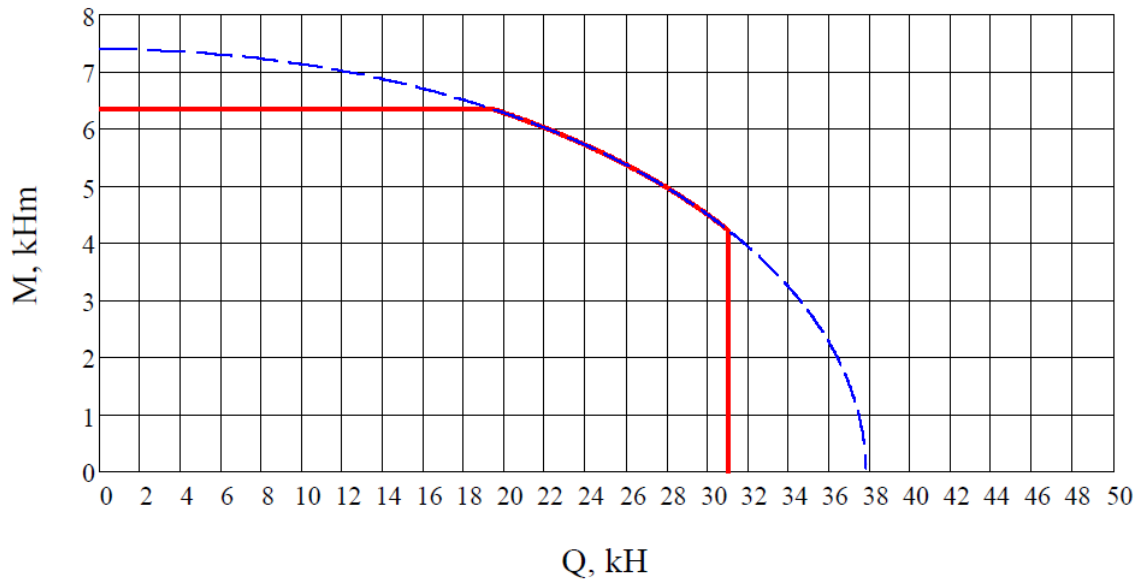
Таблиця Б.1

Номер двотавра	β , кН·м	γ , кН	$[M]$, кН·м	$[Q]$, кН	Q_A , кН
10	7,402	37,758	6,352	30,991	19,385
12	10,626	49,714	9,344	39,881	23,673
14	14,643	60,227	13,072	47,911	27,140
16	19,346	70,878	17,440	56,051	30,693
18	25,201	81,860	22,880	64,658	34,314
18a	28,005	80,166	25,440	64,971	33,516
20	32,140	93,137	29,440	73,600	37,366
20a	35,536	91,513	32,480	74,077	37,127
22	40,276	106,648	37,120	84,091	41,384
22a	44,154	104,441	40,640	84,285	40,831
24	50,100	120,338	46,240	95,097	46,319
24a	55,172	118,225	50,720	95,640	46,526
27	64,026	147,557	59,360	114,515	55,298
27a	70,513	144,836	65,110	115,284	55,602
30	81,030	180,046	75,520	137,373	65,259
30a	89,361	176,713	82,880	138,548	66,071
33	102,367	215,074	95,520	162,549	77,336
36	127,657	252,820	118,880	189,787	92,126
40	163,097	316,526	152,480	232,241	112,335
45	210,216	392,515	196,960	281,236	137,179
50	270,712	494,005	254,240	345,828	169,690
55	346,380	605,383	325,600	416,990	206,528
60	435,470	727,747	409,600	494,526	247,097

ДОДАТОК В
Креслення безпечного факторного простору двотаврів
(сталь Ст.3, $[\sigma] = 160$ МПа, третя теорія міцності)

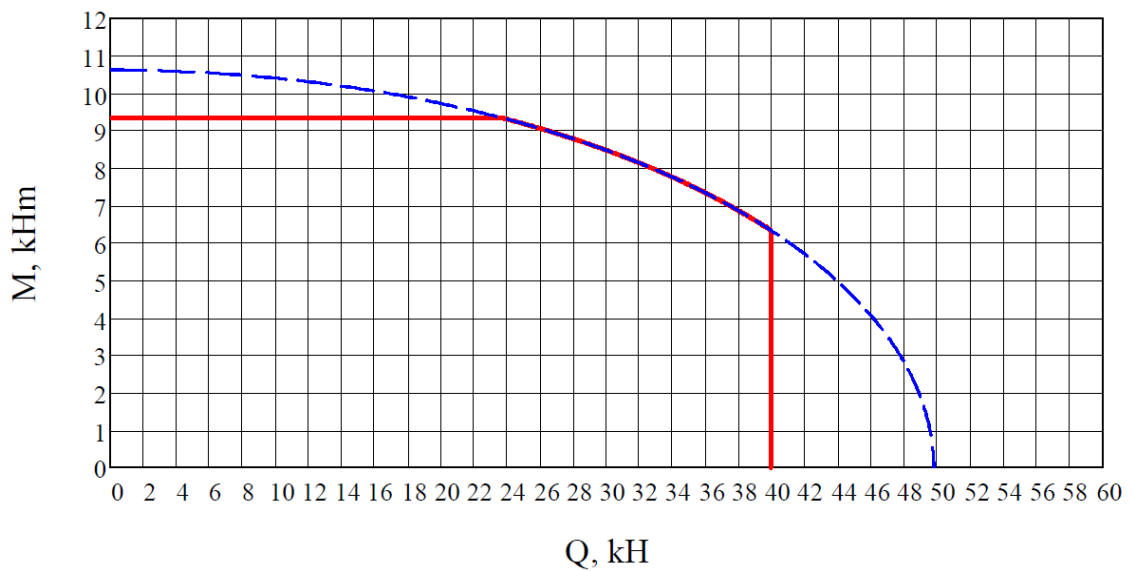
Двотавр № 10

$\beta = 7,402$ кН·м, $\gamma = 37,758$ кН, $[M] = 6,352$ кН·м, $[Q] = 30,991$ кН



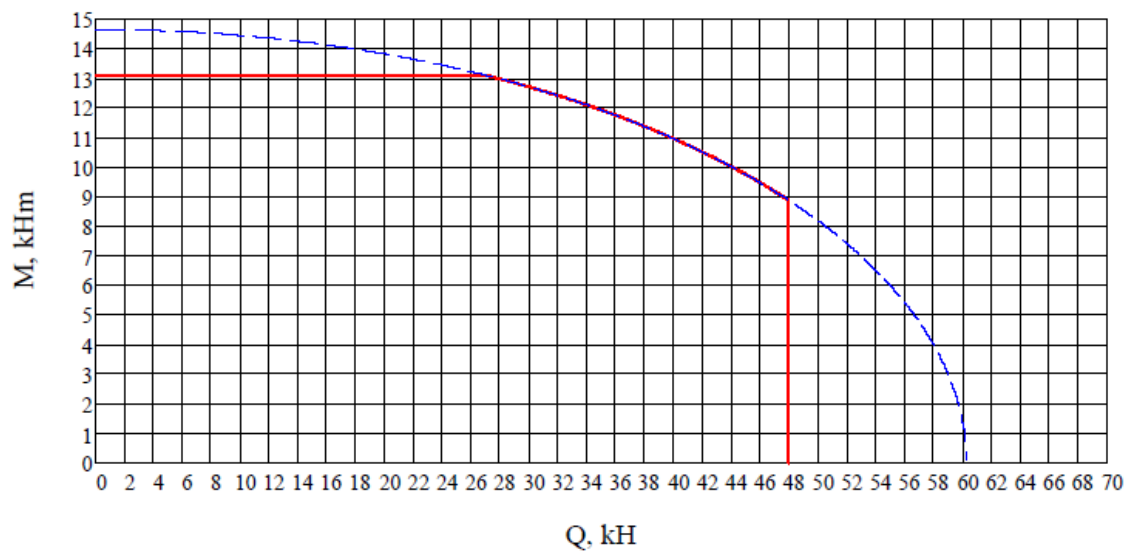
Двотавр № 12

$\beta = 10,626$ кН·м, $\gamma = 49,714$ кН, $[M] = 9,344$ кН·м, $[Q] = 39,881$ кН



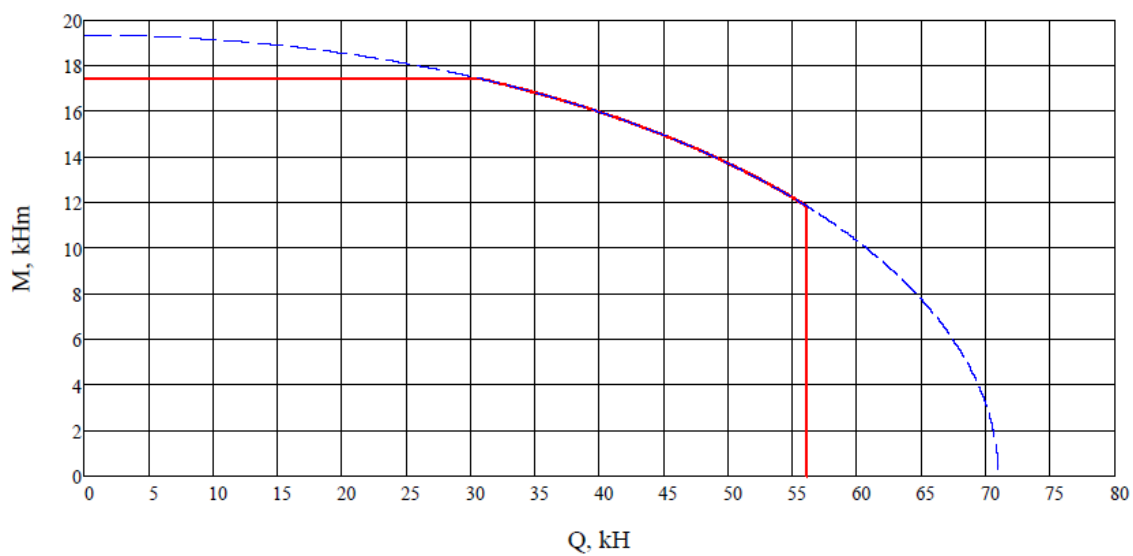
Двотавр № 14

$\beta=14,643$ кН·м, $\gamma=60,227$ кН, $[M]=13,072$ кН·м, $[Q]=47,911$ кН



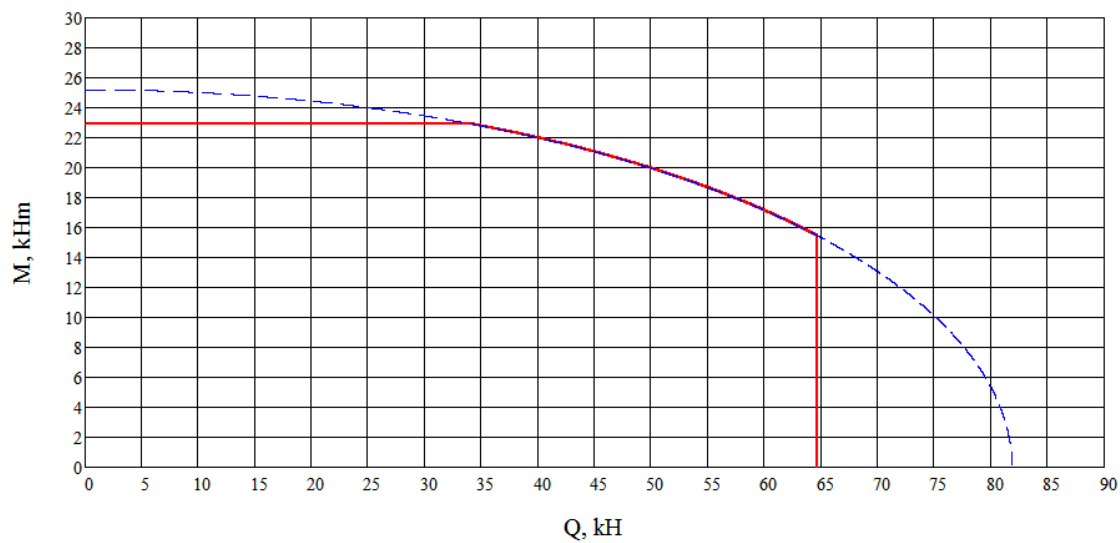
Двотавр № 16

$\beta=19,346$ кН·м, $\gamma=70,878$ кН, $[M]=17,440$ кН·м, $[Q]=56,051$ кН



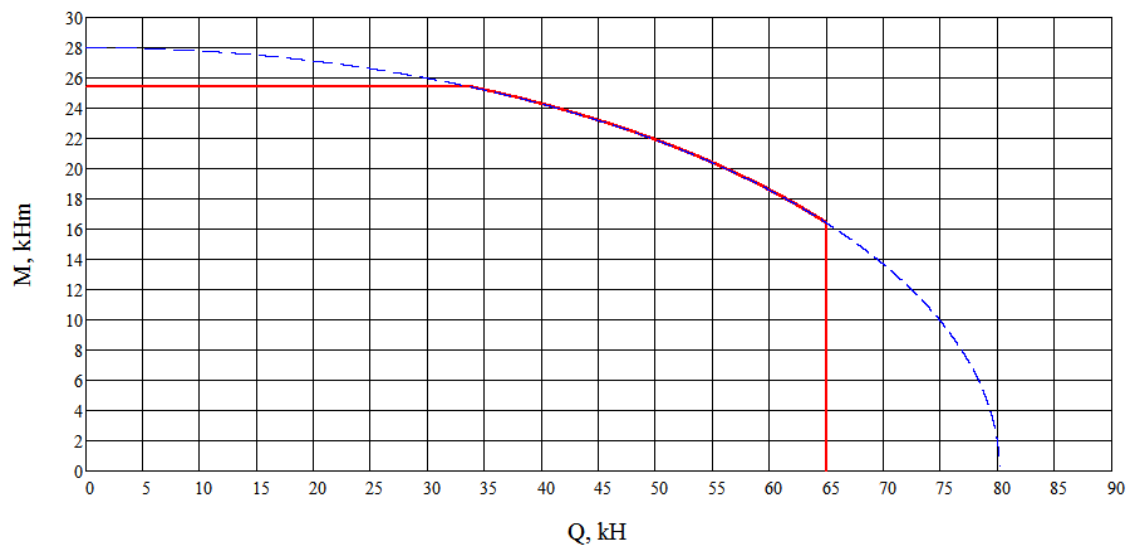
Двотавр № 18

$\beta=25,201$ кН·м, $\gamma=81,860$ кН, $[M]=22,880$ кН·м, $[Q]=64,658$ кН



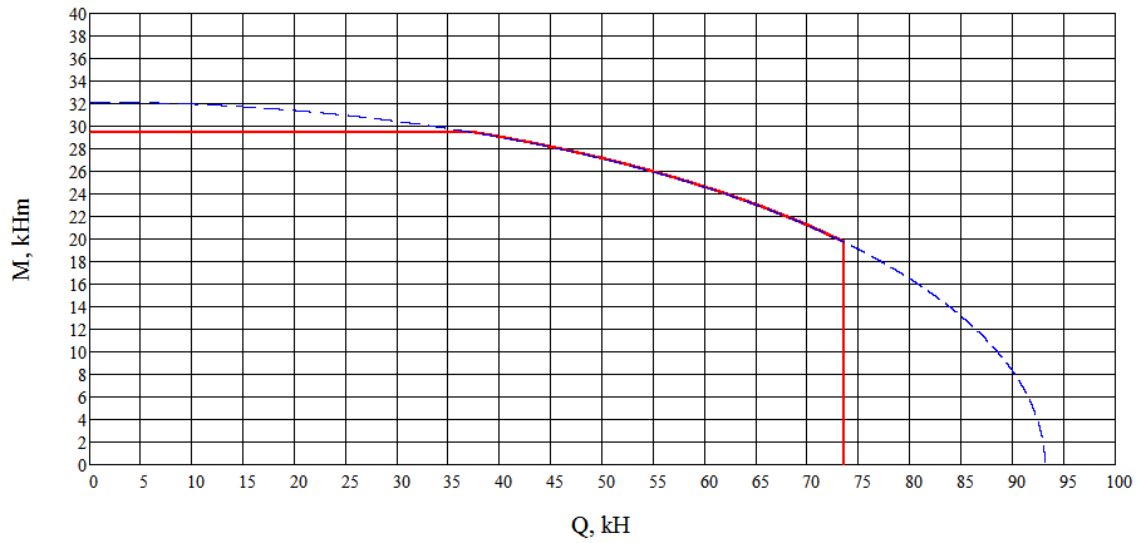
Двотавр № 18а

$\beta=28,005$ кН·м, $\gamma=80,166$ кН, $[M]=25,440$ кН·м, $[Q]=64,971$ кН



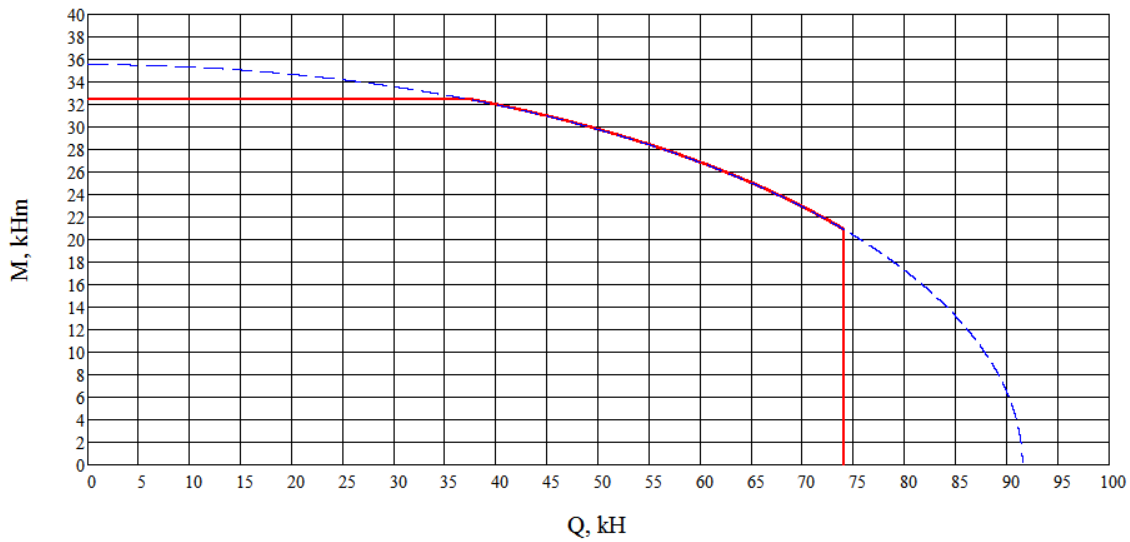
Двотавр № 20

$\beta=32,140 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\gamma=93,137 \text{ кН}$, $[M]=29,440 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $[Q]=73,600 \text{ кН}$



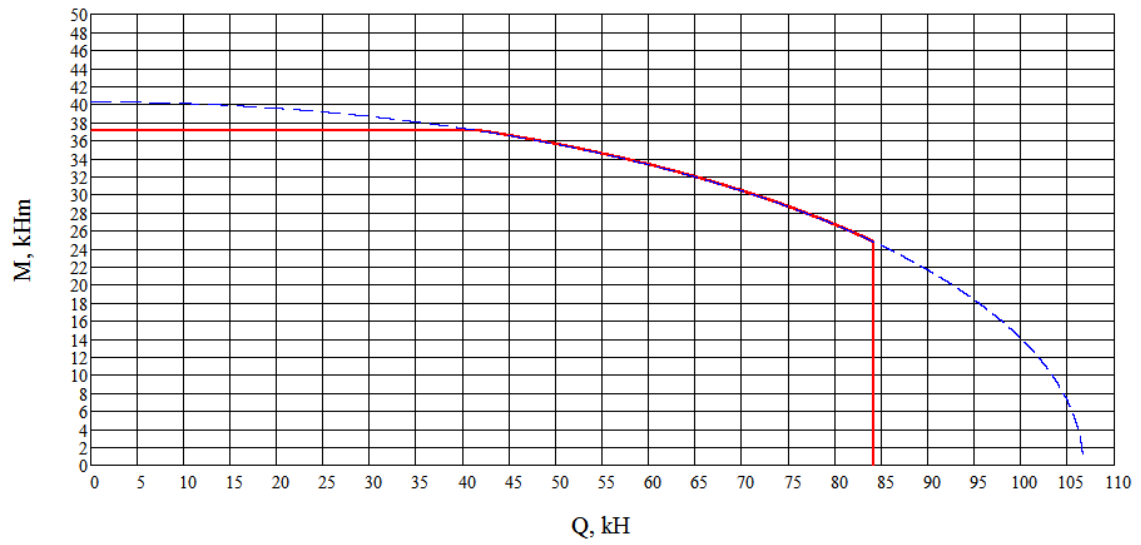
Двотавр № 20а

$\beta=35,536 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\gamma=91,513 \text{ кН}$, $[M]=32,480 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $[Q]=74,077 \text{ кН}$



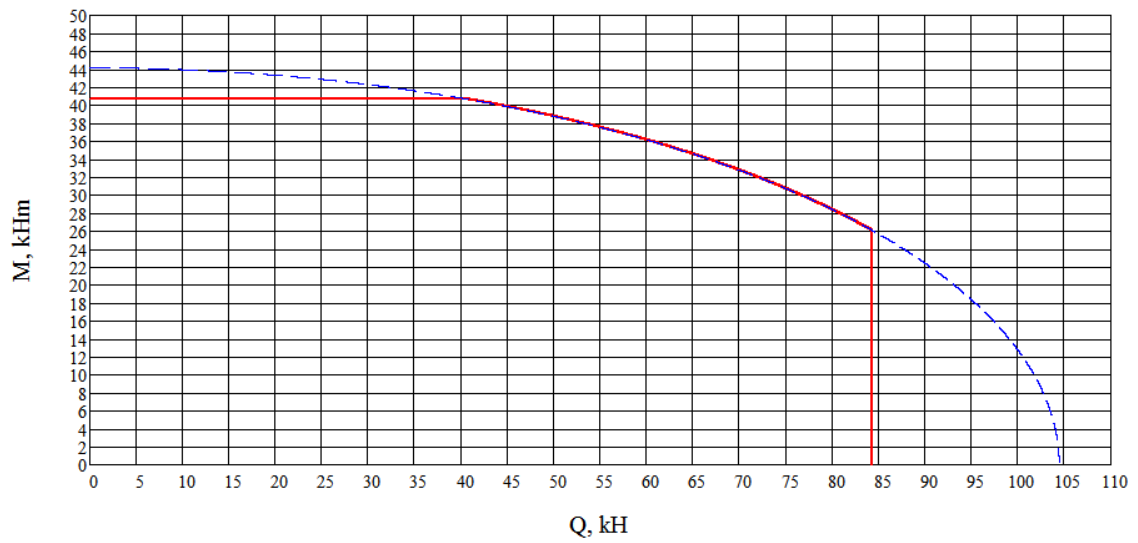
Двотавр № 22

$\beta=40,276$ кН·м, $\gamma=106,648$ кН, $[M]=37,120$ кН·м, $[Q]=84,091$ кН



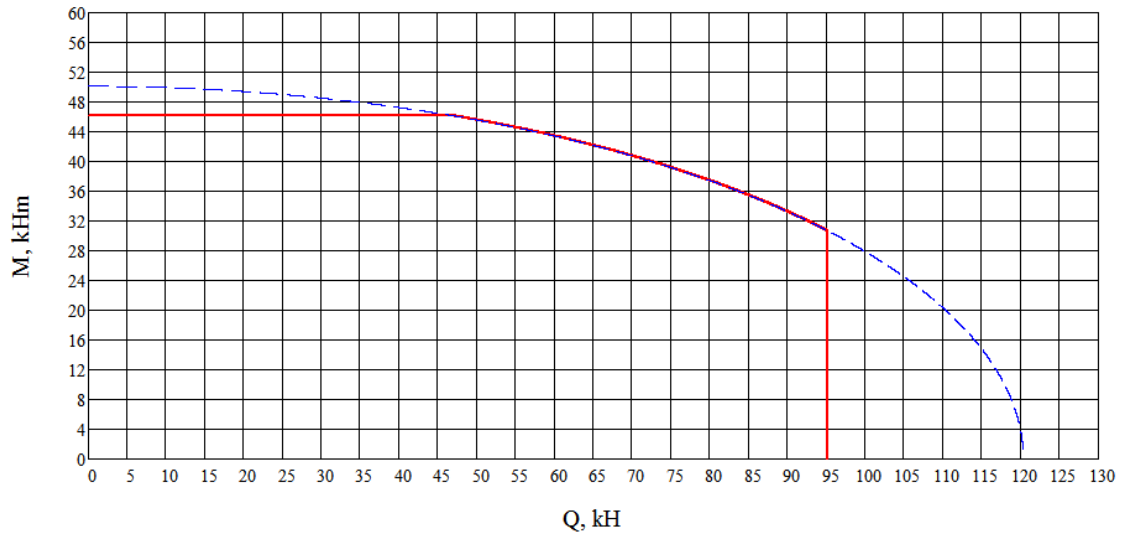
Двотавр № 22а

$\beta=44,154$ кН·м, $\gamma=104,441$ кН, $[M]=40,640$ кН·м, $[Q]=84,285$ кН



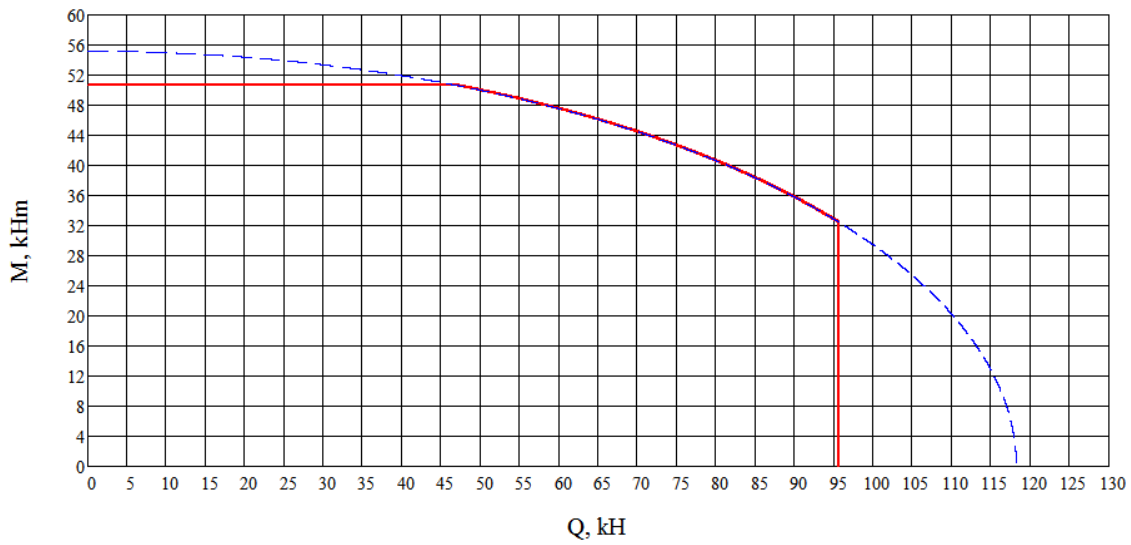
Двотавр № 24

$\beta=50,100$ кН·м, $\gamma=120,338$ кН, $[M]=46,240$ кН·м, $[Q]=95,097$ кН



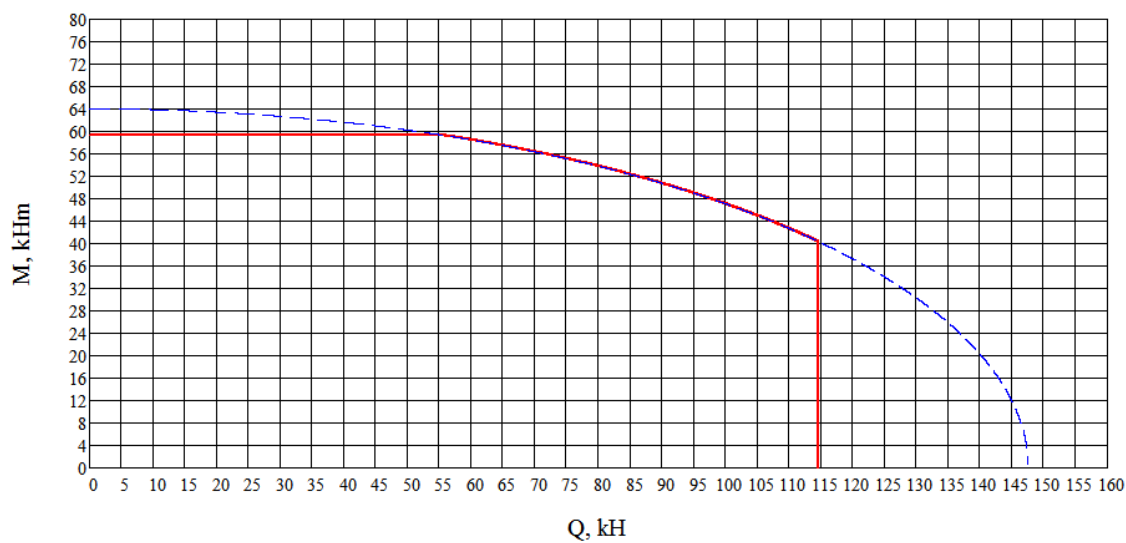
Двотавр №24а

$\beta=55,172$ кН·м, $\gamma=118,225$ кН, $[M]=50,720$ кН·м, $[Q]=95,640$ кН



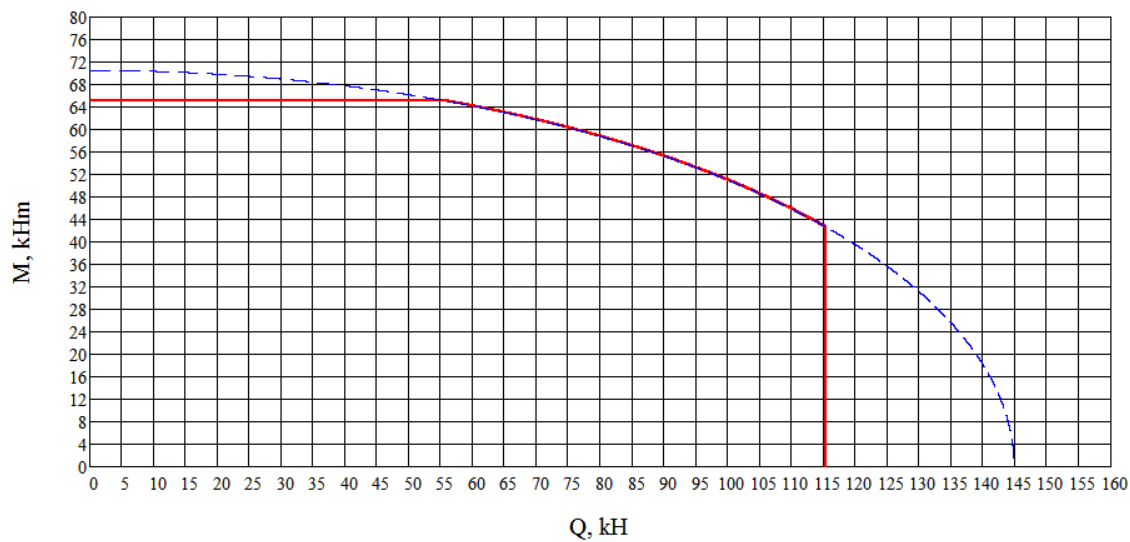
Двотавр № 27

$\beta=64,026$ кН·м, $\gamma=147,557$ кН, $[M]=59,360$ кН·м, $[Q]=114,515$ кН



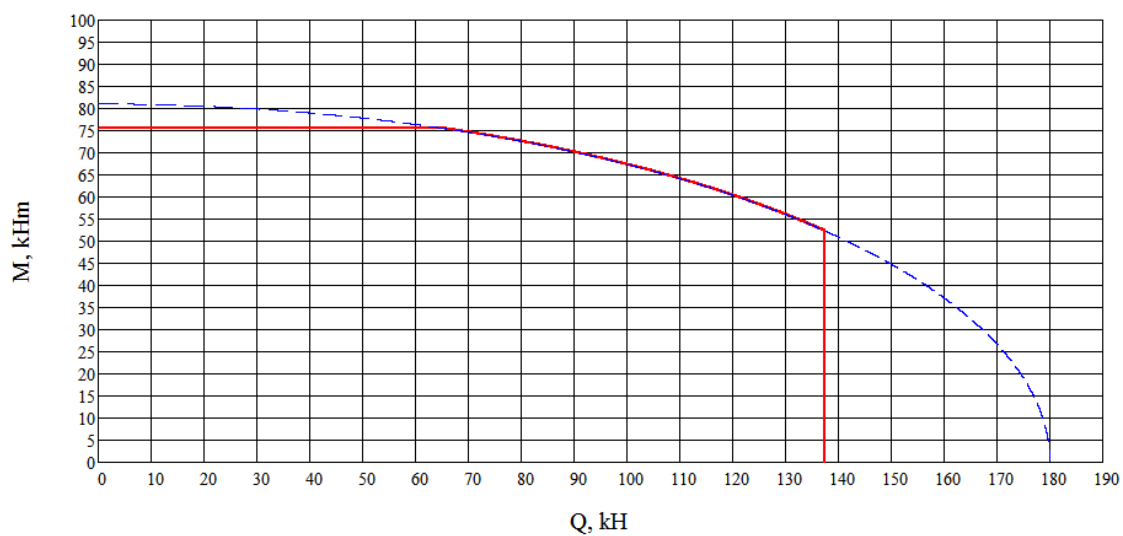
Двотавр № 27а

$\beta=70,513$ кН·м, $\gamma=144,836$ кН, $[M]=65,110$ кН·м, $[Q]=115,284$ кН



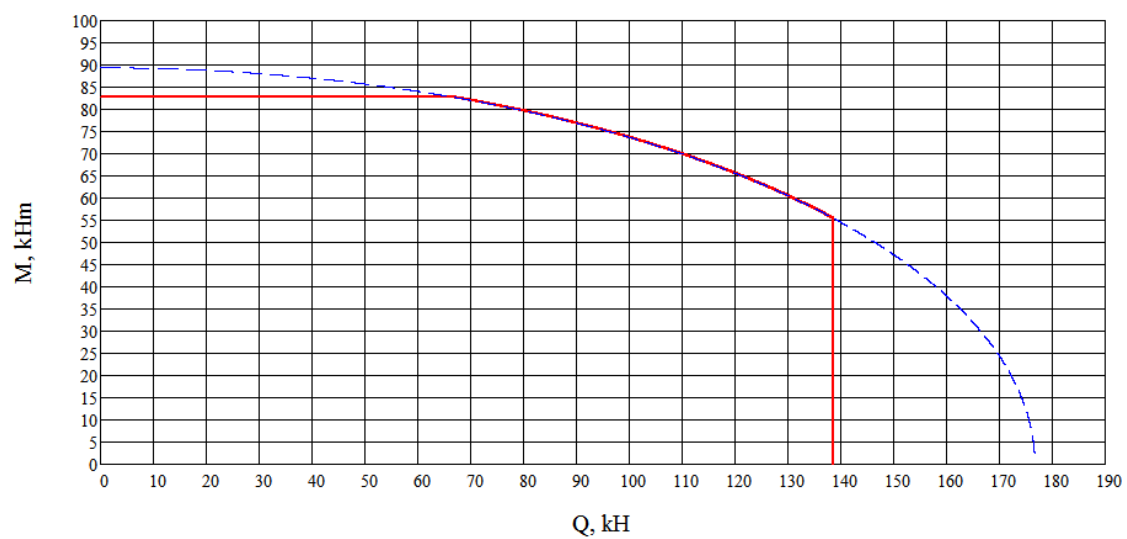
Двотавр № 30

$\beta=81,030$ кН·м, $\gamma=180,046$ кН, $[M]=75,520$ кН·м, $[Q]=137,373$ кН



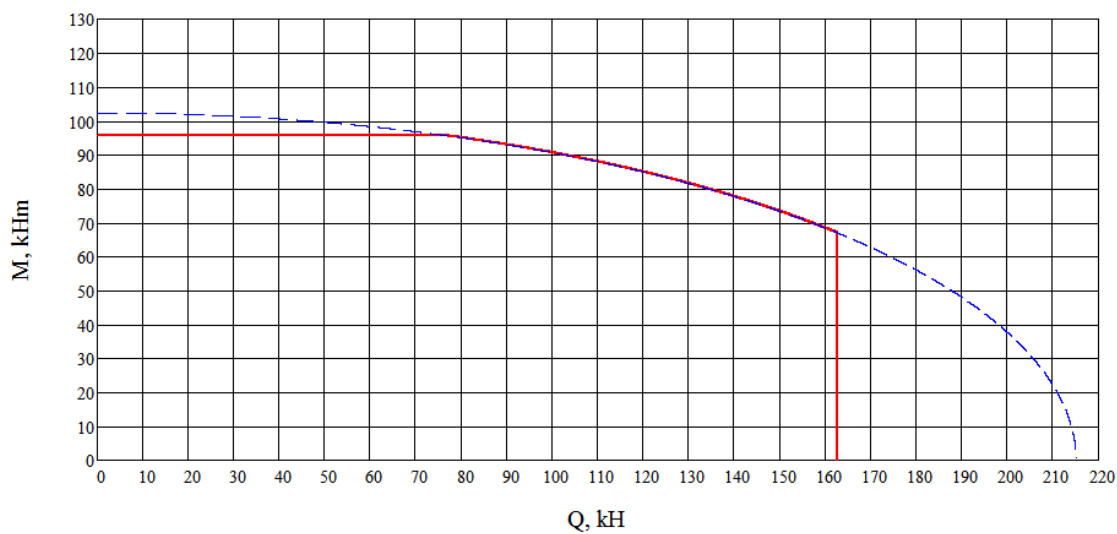
Двотавр № 30а

$\beta=89,361$ кН·м, $\gamma=176,713$ кН, $[M]=82,880$ кН·м, $[Q]=138,548$ кН



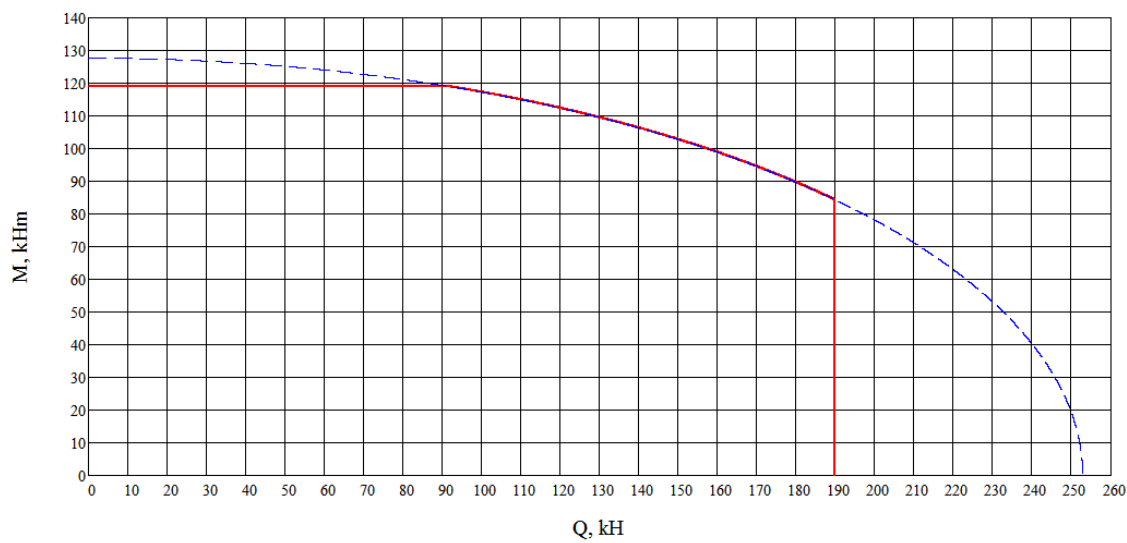
Двотавр № 33

$\beta=102,367 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\gamma=215,074 \text{ кН}$, $[M]=95,520 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $[Q]=162,549 \text{ кН}$



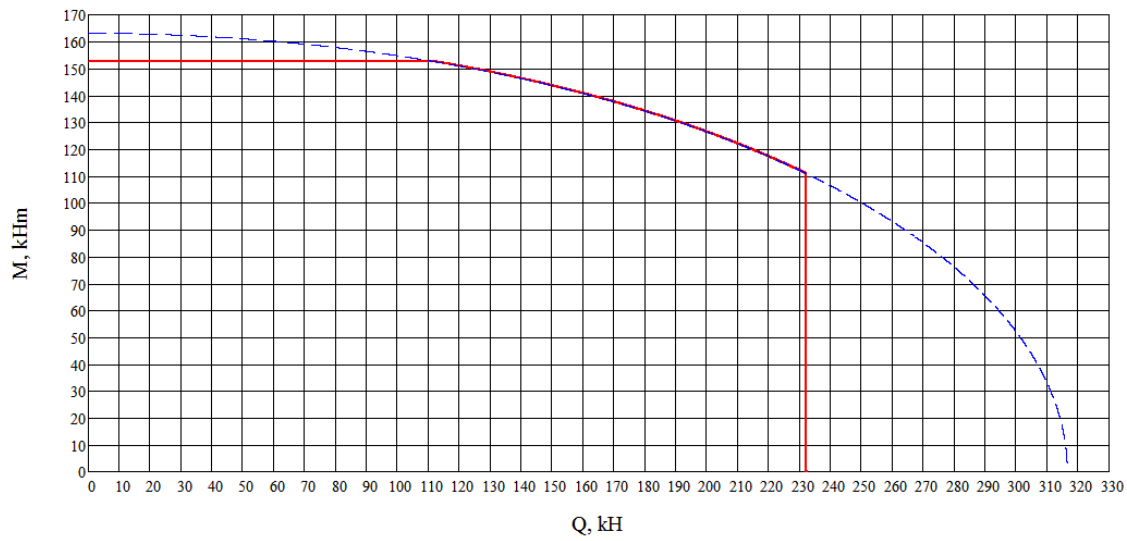
Двотавр № 36

$\beta=127,657 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\gamma=252,820 \text{ кН}$, $[M]=118,880 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $[Q]=189,787 \text{ кН}$



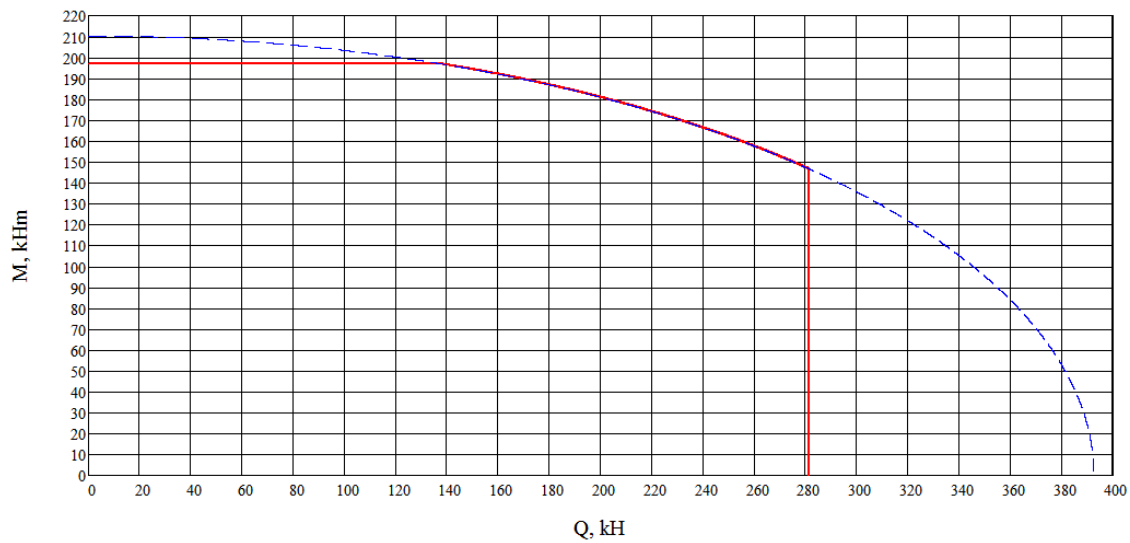
Двотавр № 40

$\beta=163,097$ кН·м, $\gamma=316,526$ кН, $[M]=152,480$ кН·м, $[Q]=232,241$ кН



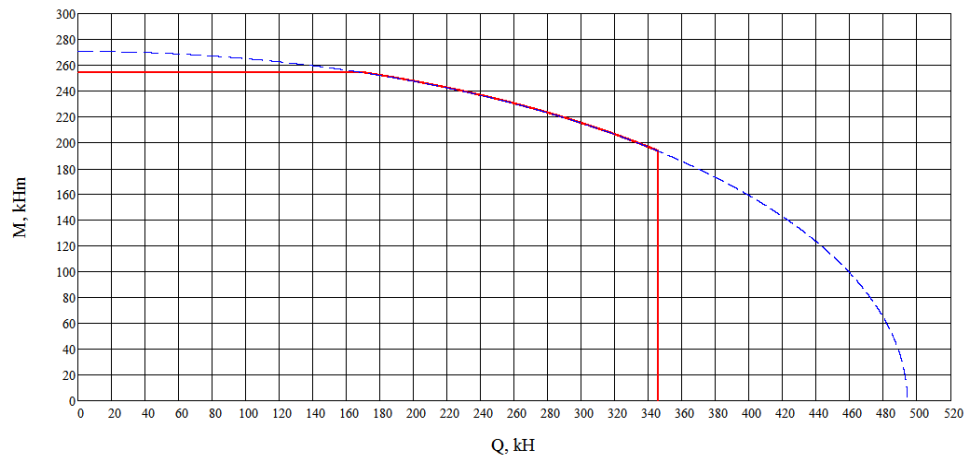
Двотавр № 45

$\beta=210,216$ кНм, $\gamma=392,515$ кН, $[M]=196,960$ кНм, $[Q]=281,236$ кН



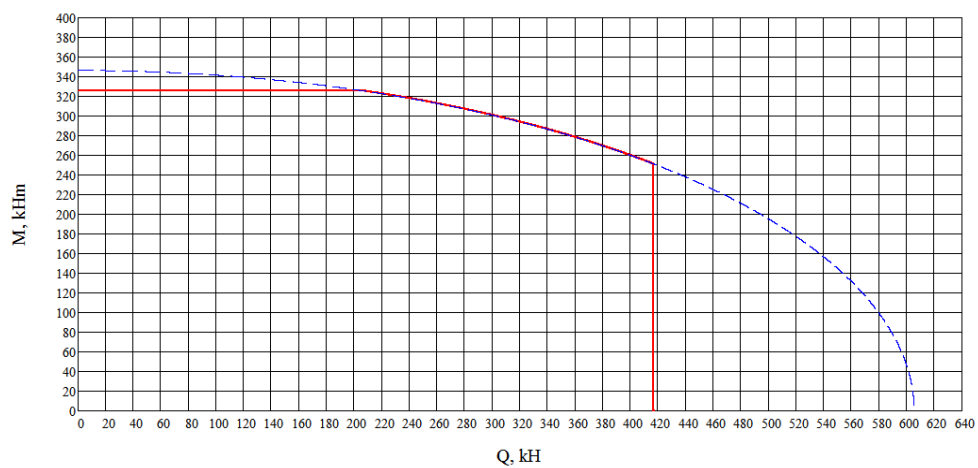
Двотавр № 50

$\beta=270,712$ кН·м, $\gamma=494,005$ кН, $[M]=254,240$ кН·м, $[Q]=345,828$ кН



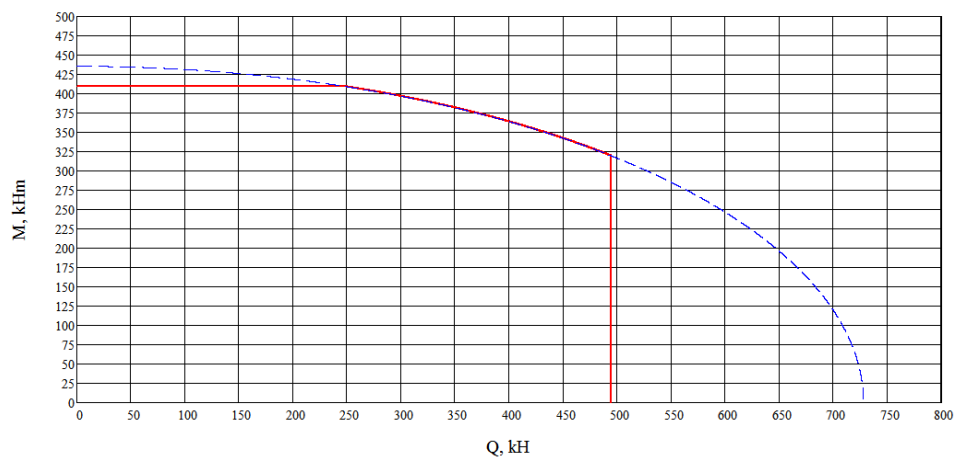
Двотавр № 55

$\beta=346,380$ кН·м, $\gamma=605,383$ кН, $[M]=325,600$ кН·м, $[Q]=416,990$ кН



Двотавр № 60

$\beta=435,470$ кН·м, $\gamma=727,747$ кН, $[M]=409,600$ кН·м, $[Q]=494,526$ кН



ДОДАТОК Г

Формула крайніх ординат і особливості її застосування

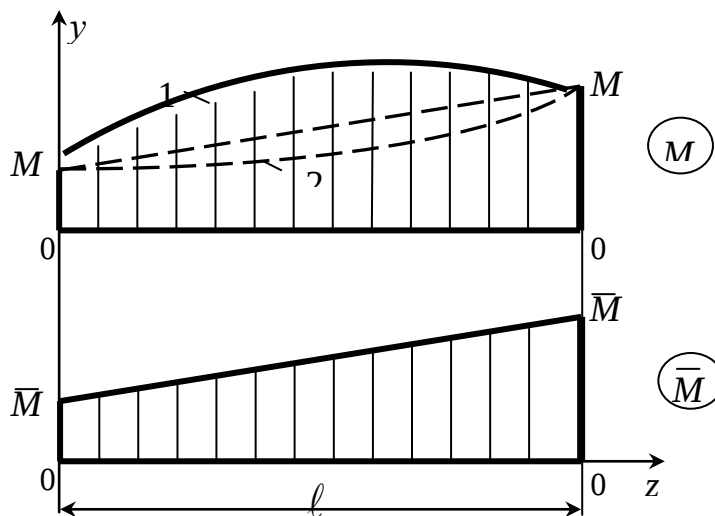


Рисунок Г.1

$$\Delta = M \times \bar{M} = \frac{\ell}{6E \cdot J_x} \cdot (2M_{\text{Л}} \cdot \bar{M}_{\text{Л}} + 2M_{\text{П}} \cdot \bar{M}_{\text{П}} + M_{\text{Л}} \cdot \bar{M}_{\text{П}} + M_{\text{П}} \cdot \bar{M}_{\text{Л}}) \pm \frac{q \cdot \ell^3}{24E \cdot J_x} (\bar{M}_{\text{Л}} + \bar{M}_{\text{П}}).$$

Формула призначена для визначення (по Мору) переміщень в балках і рамах при плоскому згині. В ній позначено:

Δ – переміщення (лінійне – δ , кутове – θ) в заданому місці балки або рами;

M і $\bar{M}$ – відповідно епюри згинальних моментів від заданого навантаження і одиничного силового фактору (сили або моменту)

ℓ – довжина ділянки балки або стрижня рами (тобто відрізка, на якому кожна з обох епюр зображується єдиною лінією);

yz – силова площа;

x і y – головні центральні осі перерізу балки або стрижня рами (вісь x на схемі не зображена);

J_x – момент інерції перерізу відносно осі x ;

E – модуль пружності першого роду для матеріалу балки або рами;

q – інтенсивність розподіленого навантаження;

$M_{\text{Л}}, M_{\text{П}}$ – крайні ординати епюри M ;

$\bar{M}_{\text{Л}}, \bar{M}_{\text{П}}$ – крайні ординати епюри $\bar{M}$.

Формула застосовується для кожної ділянки балки, де обидві епюри не є нульовими, після чого знайдені для всіх ділянок величини Δ складаються з урахуванням їхніх знаків. У рамках ці величини визначаються для всіх зазначених ділянок усіх стрижнів.

Величини крайніх ординат обох епюр підставляються у формулу зі своїми знаками; на схемі вони показані як додатні.

Знак “плюс” перед поправкою на кривизну (тобто другою складовою у формулі крайніх ординат) ставиться в разі, коли епюра M є опуклою (крива 1), а “мінус” – коли вона угнута (крива 2). Коли ж ця епюра прямолінійна, поправка на кривизну дорівнює нулю.

ДОДАТОК Д
Зразок титульного аркуша розрахунково-графічного завдання

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

Кафедра технічної механіки

Розрахунково-графічне завдання № 1.1 з опору матеріалів

**Розрахунок стрижневих систем, які працюють
на розтягання та стискання**

Варіант № 7214

Виконав
Студент гр. ТМ- 19-1
Петренко М. П.

Перевірив
Іванов М.П.

Краматорськ 2020

Навчальне видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ

Збірник розрахунково-графічних завдань

Частина 1

**для студентів усіх механічних спеціальностей
денної форми навчання**

Укладачі: **ХОЛОДНЯК Юрій Сергійович,
КАПОРОВИЧ Світлана Володимирівна.**

За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання **І. І. Дьякова**

102/2020. Формат 60 x 84/16. Ум. друк. арк. 10,23.
Обл.- вид. арк. 2,45. Тираж 50 пр. Зам. №.....

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 1633 від 24.12.2003