

В.А. Овчаренко

РАСЧЕТ ЗАДАЧ МАШИНОСТРОЕНИЯ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Учебное пособие

Краматорск 2004

Министерство образования и науки Украины
*ДОНБАССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНАЯ
АКАДЕМИЯ*

В.А. Овчаренко

РАСЧЕТ ЗАДАЧ МАШИНОСТРОЕНИЯ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Учебное пособие

Рекомендовано Министерством образования и науки
Украины

Краматорск 2004

УДК 621.539.4

ББК 34.4

О-35

Рецензенты:

Г.И. Львов, д.т.н., проф., зав. кафедрой динамики и прочности машин (Харьковский национальный политехнический университет – ХПИ);

П.А.Фомичев, д.т.н., проф., зав. кафедрой прочности летательных аппаратов (Харьковский национальный аэрокосмический университет им. Д.И.Жуковского);

А.Ф.Тарасов, д.т.н., проф., зав. кафедрой компьютерных информационных технологий (Донбасская государственная машиностроительная академия).

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(письмо № от)

Овчаренко В.А.

О-35 Расчет задач машиностроения методом конечных элементов: Учеб. пособие. – Краматорск: ДГМА, 2004. – 128 с.

ISBN 966-7851-28-1

Учебное пособие содержит основы метода конечных элементов, решение разнообразных задач машиностроения и предназначено для студентов специальности «Информационные технологии проектирования». Может быть полезным для аспирантов, соискателей и инженеров, интересующихся методом конечных элементов.

ISBN 966-7851-28-1

2004

© **Овчаренко В.А.,**

© **ДГМА, 2004**

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 6 |
| 1 ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ | 6 |
| 1.1 Понятие о методе конечных элементов | 6 |
| 1.2 Описание свойств конечного элемента | 7 |
| 1.2.1 Функция перемещений | 7 |
| 1.2.2 Функция деформаций | 8 |
| 1.2.3 Функция напряжений | 8 |
| 1.3 Система уравнений МКЭ для конструкции в целом | 8 |
| 2 РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ, РАБОТАЮЩЕГО НА РАСТЯЖЕНИЕ | 10 |
| 2.1 Основные зависимости сопротивления материалов при растяжении – сжатии | 10 |
| 2.2 Функция перемещений | 11 |
| 2.3 Векторы деформации, напряжений и усилий | 11 |
| 2.4 Матрица жесткости для конечного элемента | 12 |
| 2.5 Пример | 12 |
| 3 РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ НА РАСТЯЖЕНИЕ | 15 |
| 3.1 Расчет плоских ферм | 15 |
| 3.2 Расчет пространственных ферм | 17 |
| 3.3 Пример | 18 |
| 4 РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ КРУГЛЫХ ВАЛОВ | 23 |
| 4.1 Основные зависимости сопротивления материалов при кручении | 23 |
| 4.2 Функция перемещений для конечного элемента | 24 |
| 4.3 Векторы деформаций, напряжений и усилий | 25 |
| 4.4 Матрица жесткости конечного элемента | 26 |
| 4.5 Пример | 27 |
| 5 РАСЧЕТ БАЛОК | 30 |
| 5.1 Понятие об изгибе. Основные зависимости при изгибе | 30 |
| 5.2 Функция перемещений при изгибе | 32 |
| 5.3 Векторы деформаций, напряжений и усилий | 35 |
| 5.4 Матрица жесткости конечного элемента | 37 |
| 5.5 Учет влияния распределенной нагрузки на величину нагрузок в узлах | 37 |
| 5.6 Пример | 38 |
| 6 РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМ | 43 |
| 6.1 Изгиб с растяжением плоского стержня | 43 |
| 6.2 Матрица жесткости в локальных координатах для конечного элемента при изгибе с растяжением | 43 |
| 6.3 Матрица жесткости для стержней плоской рамы | 45 |
| 6.4 Пример | 47 |

| | |
|--|-----|
| 7 РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ, ИСПЫТЫВАЮЩИХ СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ | 54 |
| 7.1 Основные зависимости сопротивления материалов при сложном изгибе | 54 |
| 7.2 Матрица жесткости конечного элемента при сложном изгибе | 56 |
| 7.3 Пример | 57 |
| 8 РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ, ИСПЫТЫВАЮЩИХ СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ | 65 |
| 8.1 Основные зависимости при изгибе с кручением | 65 |
| 8.2 Матрица жесткости конечного элемента при изгибе с кручением | 66 |
| 8.3 Пример | 68 |
| 9 РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ | 75 |
| 9.1 Понятие о плоской задаче теории упругости | 75 |
| 9.2 Обобщенный закон Гука | 76 |
| 9.3 Плоское напряженное состояние | 76 |
| 9.4 Плоское деформированное состояние | 77 |
| 9.5 Связь между деформациями и перемещениями | 79 |
| 9.6 Связь между напряжениями и перемещениями | 81 |
| 9.7 Функция перемещений для конечного треугольного элемента | 82 |
| 9.8 Матрица жесткости для треугольного конечного элемента | 84 |
| 9.9 Функция перемещения для прямоугольного конечного элемента | 84 |
| 9.10 Пример | 86 |
| 10 РЕАЛИЗАЦИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН | 90 |
| 10.1 Ввод исходных данных | 90 |
| 10.2 Вывод исходных данных на экран и в файл | 92 |
| 10.3 Определение коэффициентов матрицы жесткости элемента | 92 |
| 10.4 Формирование матрицы жесткости конструкции | 92 |
| 10.5 Решение системы уравнений | 92 |
| 10.6 Определение усилий и напряжений | 93 |
| 10.7 Вывод результатов расчетов на экран и в файл | 93 |
| 11 РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ | 93 |
| 11.1 Особенности осесимметричной задачи теории упругости | 93 |
| 11.2 Функция перемещения | 95 |
| 11.3 Векторы деформаций и напряжений | 96 |
| 11.4 Матрица жесткости конечного элемента | 97 |
| 11.5 Пример | 98 |
| 12 РАСЧЕТ ОБЪЕМНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ | 102 |
| 12.1 Понятие об объемной задаче теории упругости | 102 |
| 12.2 Функция перемещения для тетраэдра | 104 |
| 12.3 Векторы деформаций и напряжений | 106 |
| 12.4 Матрица жесткости для тетраэдра | 107 |
| 12.5 Функция перемещений и матрица жесткости для параллелепипеда | 108 |

| | |
|---|-----|
| 13 РАСЧЕТ ПЛАСТИН | 109 |
| 13.1 Понятие о пластинах. Гипотеза Кирхгофа | 109 |
| 13.2 Связь между перемещениями, деформациями и усилиями | 111 |
| 13.3 Функция перемещений для прямоугольного элемента | 113 |
| 14 РАСЧЕТ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА | 115 |
| 14.1 Общие понятия и определения | 115 |
| 14.2 Уравнения МКЭ для задачи переноса тепла | 116 |
| 14.3 Расчет распределения температуры вдоль стержня | 117 |
| 14.4 Пример | 120 |
| ЛИТЕРАТУРА | 124 |

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Расчет задач машиностроения методом конечных элементов» предназначено для студентов пятого курса специальности «Информационные технологии проектирования». Отдельные разделы пособия читались для магистров специальности «Подъемно-транспортные машины». Это пособие может быть рекомендовано аспирантам и соискателям.

1 ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1.1 Понятие о методе конечных элементов

МКЭ представляет собой эффективный численный метод решения инженерных и физических задач. Область его применения простирается от анализа напряжений в конструкциях самолётов или автомобилей до расчёта таких сложных систем, как атомная электростанция. С его помощью рассматривается движение жидкости по трубам, через плотины, в пористых средах, исследуется течение сжимаемого газа, решаются задачи электростатики и смазки, анализируются колебания систем.

МКЭ является численным методом решения дифференциальных уравнений, встречающихся в физике и технике.

Возникновение этого метода связано с решением космических задач (1950 г.). Область применения МКЭ существенно расширилась, когда было показано, что уравнения, описывающие элементы в задачах строительной механики, распространения тепла и гидромеханики, аналогичны. МКЭ из численной процедуры решения задач строительной механики превратился в общий метод численного решения дифференциальных уравнений.

Основная идея МКЭ состоит в том, что любую непрерывную величину, такую как температура, давление и перемещение, можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций.

В общем случае непрерывная величина заранее известна, и нужно определить значение этой величины в некоторых внутренних точках области. Дискретную модель очень легко построить, если сначала предположить, что числовые значения этой величины в каждой внутренней области известны. После этого можно перейти к общему случаю. Итак, при построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом:

- 1 В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми точками или узлами.

- 2 Значение непрерывной величины в каждой точке считается переменной, которая должна быть определена.

3 Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число областей, называемых элементами. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области.

4 Непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе полиномом, который определяется с помощью узловых значений этой величины. Для каждого элемента определяется свой полином, но полиномы подбираются таким образом, чтобы сохранилась непрерывность величины вдоль границ элемента (его называют функцией элемента). Выбор формы элемента и функций для конкретных задач зависит от изобретательности и мастерства инженера, и совершенно ясно, что этим определяется точность приближённого решения.

1.2 Описание свойств конечного элемента

1.2.1 Функция перемещений

Чтобы облегчить понимание общих соотношений, рассмотрим характеристики конечного элемента на примере ступенчатого стержня, испытывающего растяжение-сжатие (рис. 1.1).

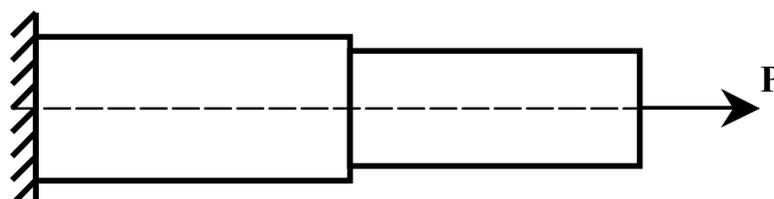


Рисунок 1.1 - Ступенчатый стержень

В этом случае в качестве конечного элемента принимается стержень (рис.1.2).

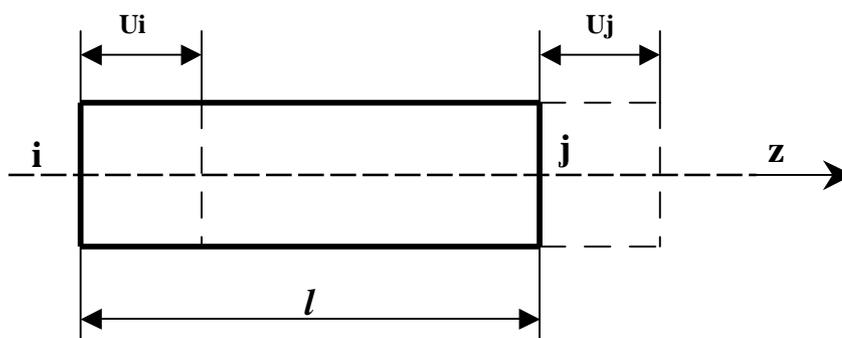


Рисунок 1.2 - Конечный элемент

Функция перемещения $\{f\}$ для этого случая имеет вид

$$\{f\} = \left[\frac{l-z}{l}; \frac{z}{l} \right] \cdot \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}, \quad (1.1)$$

где U_i и U_j – перемещения узлов i и j ;

$\frac{l-z}{l} = N_1$ и $\frac{z}{l} = N_2$ – функции формы; они меняются от 1 до 0.

Функция перемещений $\{f\}$ зависит от формы конечного элемента. Как она выбирается, будет показано ниже.

1.2.2 Функция деформаций

Функция деформаций или вектор деформаций выражается через функцию перемещений.

При растяжении относительное удлинение стержня

$$\{e\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = \frac{1}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

Выражение $\frac{1}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix}$ обозначается через матрицу $|B|$, тогда

$$\{e\} = |B| \{d\}^e, \quad (1.3)$$

где $\{d\}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$ – вектор перемещений узлов элемента.

1.2.3 Функция напряжений

Функция напряжений – вектор напряжений выражаются через вектор деформаций:

$$\{s\} = |D| \{e\} = |D| |B| \{d\}^e, \quad (1.4)$$

где $|D|$ – матрица упругости (связывает между собой напряжения и деформации), зависящая от рассматриваемой задачи.

1.3 Система уравнений МКЭ для конструкции в целом

Определим работу внешних и внутренних сил на возможных (виртуальных) перемещениях $d\{d\}^e$.

Работа внутренних сил в единице объёма на виртуальном перемещении равна $d(\{e\}^T)\{s\}$, где $\{e\}^T$ – вектор деформаций, транспонированный вектору $\{e\}$.

Работа внутренних сил по всему конечному элементу

$$\int_V d(\{e\}^T)\{s\}dV = \int_V d(\{d\}^e)^T |B|^T \cdot |D||B|dV.$$

Работа внешних узловых сил $\{F\}^e$ на виртуальных перемещениях элемента равна

$$(d\{d\}^e)^T \{F\}^e.$$

Приравняв работу внешних и внутренних сил на возможных перемещениях элемента, получим

$$(d\{d\}^e)^T \cdot \int_V |B|^T |D||B|dV \cdot \{d\}^e = (d\{d\}^e)^T \cdot \{F\}^e,$$

сократив $(d\{d\}^e)^T$, получим

$$\int_V |B|^T |D||B|dV \cdot \{d\}^e = \{F\}^e \text{ или}$$

$$|K|^e \{d\}^e = \{F\}^e, \quad (1.5)$$

где

$$|K|^e = \int_V |B|^T |D||B|dV \quad (1.6)$$

– матрица жёсткости конечного элемента.

Для конструкции в целом уравнение метода конечных элементов имеет вид

$$|K|\{d\} = \{R\}, \quad (1.7)$$

где $|K|$ – матрица жёсткости конструкции в целом, она представляет собой сумму матриц жёсткости конечных элементов, из которых состоит конструкция;

$\{d\}$ – вектор перемещения всех узлов;

$\{R\}$ – вектор узловых нагрузок.

Любая задача МКЭ в конечном итоге сводится к системе уравнений (1.7). Её порядок равняется произведению числа узлов на количество степеней свободы узла.

Решая задачу МКЭ, видим, что получаем систему алгебраических уравнений, вместо дифференциальных уравнений.

В заключение следует отметить, что при получении матрицы жёсткости конечного элемента (1.6) не учтены начальные перемещения узлов, действие температуры и начальные напряжения.

2 РАСЧЁТ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ, РАБОТАЮЩЕГО НА РАСТЯЖЕНИЕ

2.1 Основные зависимости сопротивления материалов при растяжении - сжатии

Растяжением называется вид нагружения, при котором в поперечном сечении из всех внутренних силовых факторов возникают только продольные силы (рис.2.1).

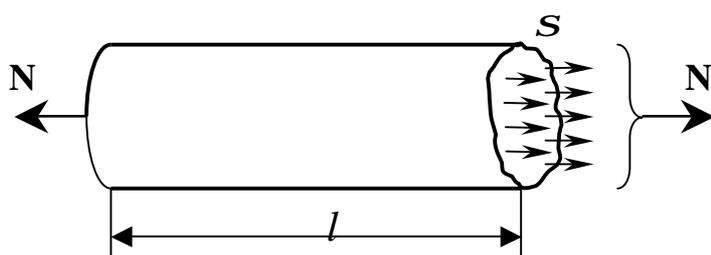


Рисунок 2.1

Условие прочности при растяжении имеет вид

$$s = \frac{N}{F} \leq [s], \quad (2.1)$$

где s – нормальное напряжение, МПа;

F – площадь поперечного сечения;

$[s]$ – допускаемое на-

пряжение, равное

$$[s] = \frac{s_0}{n},$$

где s_0 – опасное напряжение:

а) $s_0 = s_{\sigma}$ – для хрупкого материала;

б) $s_0 = s_T$ – для пластичного материала.

Здесь s_{σ} – предел прочности, s_T – предел текучести, n – коэффициент запаса прочности.

Абсолютное удлинение определяется с помощью закона Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \quad (2.2)$$

где E – модуль упругости при растяжении, для сталей $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Связь между деформацией ϵ и напряжением

$$s = eE \quad (2.3)$$

также называется законом Гука.

2.2 Функция перемещений

Для ступенчатого стержня (см. рис.1.1) конечным элементом является стержень, показанный на рис.2.2.

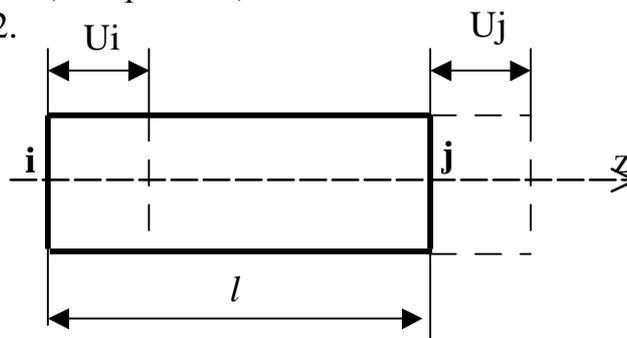


Рисунок 2.2

В этом случае в качестве функции перемещения принимается полином

$$U = a_0 + a_1 z. \quad (2.4)$$

Коэффициенты a_0 и a_1 определяются через перемещение узлов U_i и U_j .

При $z = 0$ $U = U_i$, значит $U_i = a_0$.

При $z = l$ $U = U_j$, значит $U_j = a_0 + a_1 l = U_i + a_1 l$,

откуда $a_1 = \frac{U_j - U_i}{l}$.

Подставив значения a_0 и a_1 , получим

$$U = U_i + \frac{U_j - U_i}{l} z \text{ или } U = \left(1 - \frac{z}{l}\right) U_i + \frac{z}{l} U_j.$$

В матричной форме это запишется так:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{l} & \frac{z}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

2.3 Векторы деформаций, напряжений и усилий

Под действием сил бесконечно малый участок стержня деформируется (рис.2.3).

Определим относительное удлинение этого участка

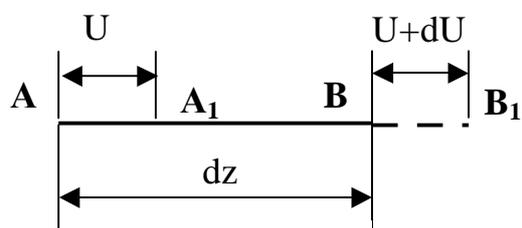


Рисунок 2.3

$$e = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l} = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB},$$

$$AB = dz, \quad A_1 B_1 = AB + BB_1 - AA_1,$$

$$A_1 B_1 = dz + U + dU - U = dz + dU.$$

$$e = \frac{dz + dU - dz}{dz} = \frac{dU}{dz},$$

следовательно $\{\mathbf{e}\} = \frac{dU}{dz}$,

подставив сюда выражение (2.5), получим вектор деформаций

$$\{\mathbf{e}\} = \frac{1}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}. \quad (2.6)$$

На основании закона Гука $\mathbf{S} = \mathbf{e}E$ имеем вектор напряжений

$$\{\mathbf{S}\} = E\{\mathbf{e}\} = \frac{E}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}. \quad (2.7)$$

Умножив вектор напряжений на площадь поперечного сечения элемента F , получим вектор усилий

$$\{N\} = F\{\mathbf{S}\} = \frac{EF}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}. \quad (2.8)$$

2.4 Матрица жёсткости для конечного элемента

В соответствии с выражением (1.6) матрица жёсткости для любого конечного элемента равна

$$|K|^e = \int_V |B|^T |D| |B| dV,$$

для растяжения $|B| = \frac{1}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix}$ из выражения (2.6), $|D| = E$ – из закона Гука, тогда

$$|K|^e = \int_0^l \frac{1}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{l} \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot F dz = \frac{EF}{l^2} \int_0^l \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \end{vmatrix} dz.$$

После интегрирования и перемножения матриц имеем

$$|K|^e = \frac{EF}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

2.5 Пример

Для стержня, показанного на рисунке 2.4, необходимо с помощью МКЭ построить эпюры продольных сил и напряжений.

Решение. Нумеруем узлы (желательно последовательно) и элементы (рис. 2.4, а). Вычисляем матрицу жёсткости каждого элемента (с помощью выражения (2.9)).

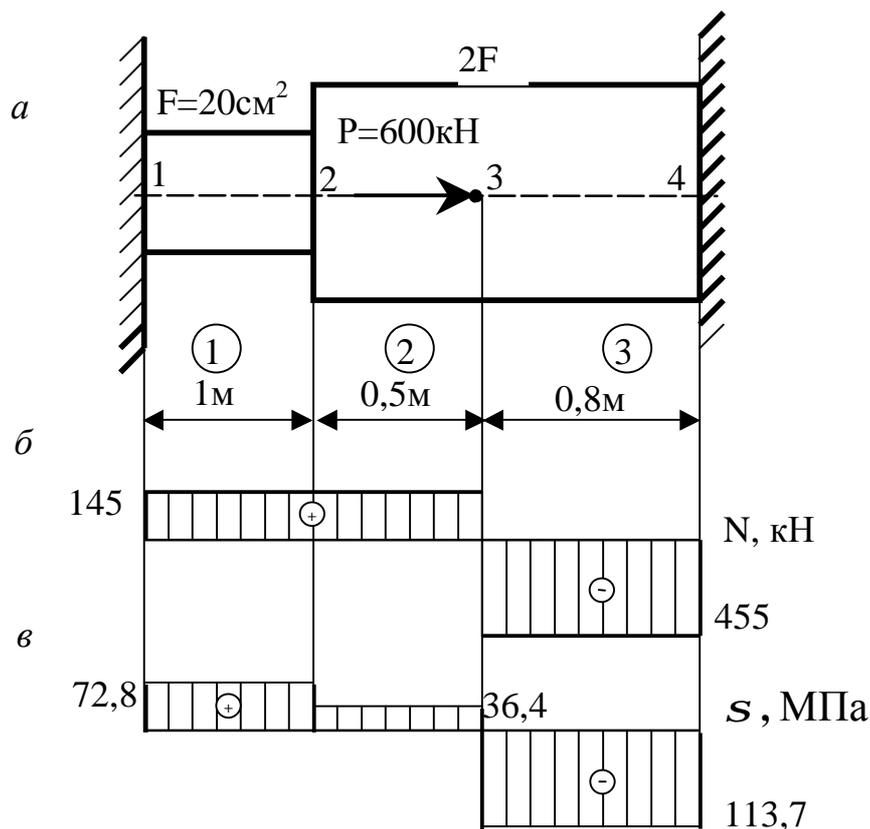


Рисунок 2.4

$$|K|_I^e = \frac{EF}{\mathbf{1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = EF \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$|K|_{II}^e = \frac{E \cdot 2F}{0,5} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = EF \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix};$$

$$|K|_{III}^e = \frac{E \cdot 2F}{0,8} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = EF \begin{vmatrix} 2,5 & -2,5 \\ -2,5 & 2,5 \end{vmatrix}.$$

Теперь формируем матрицу жёсткости конструкции. Так как имеем четыре узла, а каждый узел имеет одну степень свободы, то размерность матрицы жёсткости равна 4×4 .

Коэффициенты в одной и той же ячейке складываются алгебраически.

В правом столбце ставятся величины действующих нагрузок в соответствующих узлах.

В данном случае сила приложена в третьем узле вправо, следовательно, в правом столбце в третьей строке записываем 600.

$$EF \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2,5 \\ 0 & 0 & 2,5 & 2,5 \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 600 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.10)$$

Учитываем граничные условия: так как стержень по концам закреплён, то $U_1 = 0$, $U_2 = 0$. На основании этого вычёркиваем первый и четвёртый столбцы и строки. После этого получим

$$EF \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6,5 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \end{Bmatrix}, \quad \text{откуда } U_2 = 0,8U_3.$$

Подставив во вторую строку, имеем

$$EF(-4 \cdot 0,8U_3 + 6,5U_3) = 600, \\ U_3 = \frac{182}{EF}, \quad U_2 = \frac{182}{EF} \cdot 0,8 = \frac{145,6}{EF}.$$

Определяем величины продольных сил:

$$\{N\}_I = \frac{EF}{1} | -1; \quad 1 \left\{ \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \right\} = \frac{EF}{1} | -1; \quad 1 \left\{ \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{145,6}{EF} \end{Bmatrix} \right\} = 145,6 \text{ кН},$$

$$\{N\}_{II} = \frac{E \cdot 2F}{0,5} | -1; \quad 1 \left\{ \begin{Bmatrix} \frac{145,6}{EF} \\ \frac{182}{EF} \end{Bmatrix} \right\} = 145,6 \text{ кН},$$

$$\{N\}_{III} = \frac{E \cdot 2F}{0,8} | -1; \quad 1 \left\{ \begin{Bmatrix} \frac{182}{EF} \\ 0 \end{Bmatrix} \right\} = -455 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру N (рис. 2.4, б).

Разделив на каждом участке продольную силу на площадь, получим величину напряжений:

$$s_I = \frac{N_I}{F_I} = \frac{145,6 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 72,8 \text{ МПа},$$

$$s_{II} = \frac{N_{II}}{F_{II}} = \frac{145,6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 36,4 \text{ МПа},$$

$$s_{III} = \frac{N_{III}}{F_{III}} = \frac{-455 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 113,7 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений (рис. 2.4, в).

3 РАСЧЁТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ НА РАСТЯЖЕНИЕ

3.1 Расчёт плоских ферм

Ферма – это стержневая система, стержни которой между собой соединены с помощью шарниров.

Если все стержни и нагрузки расположены в одной плоскости, то ферма называется плоской (рис. 3.1).

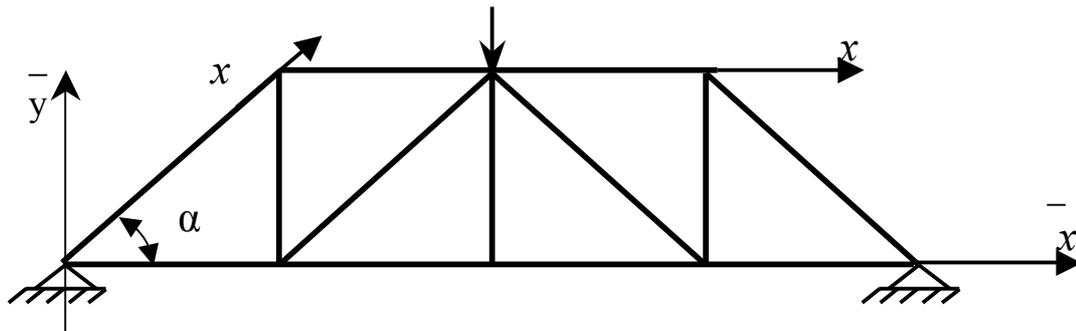


Рисунок 3.1

Особенность фермы по сравнению со ступенчатым стержнем состоит в том, что стержни по отношению друг к другу повернуты. В связи с этим необходимо вводить две системы координат: локальную – местную для каждого стержня и глобальную – общую для всех стержней.

Для ступенчатого стержня была получена матрица жёсткости в таком виде:

$$|K|^e = \frac{EF}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Теперь необходимо получить такую же матрицу жёсткости элемента, но в глобальной системе координат.

Под действием продольных сил I-й узел (рис. 3.2, точка A) получит перемещение в локальной системе координат U_i , а в глобальной системе координат – \bar{U}_i, \bar{V}_i

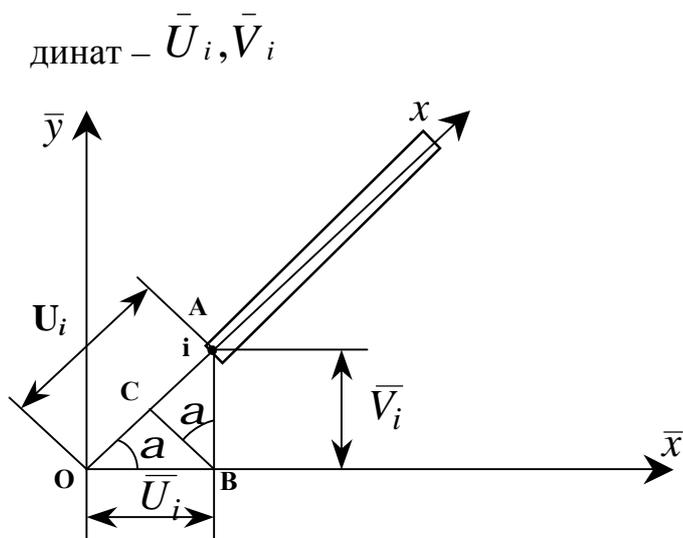


Рисунок 3.2

$$U_i = OA = OC + CA,$$

$$OC = \bar{U}_i \cos a, CA = \bar{V}_i \sin a,$$

$$U_i = \bar{U}_i \cos a + \bar{V}_i \sin a,$$

где a – угол наклона стержня к оси \bar{x} .

Аналогично

$$U_j = \bar{U}_j \cos a + \bar{V}_j \sin a.$$

В матричной форме это запишется так

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos a & \sin a \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

или $\begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = |I| \begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix}$, где матрица направляющих косинусов

$$|I| = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos a & \sin a \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

В этом случае вектор деформаций запишется так:

$$\{e\} = \frac{l}{\mathbf{1}} | - I; \quad I \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \frac{l}{\mathbf{1}} | - I; \quad I | |I| \begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix}. \quad (3.4)$$

Теперь матрица $|B|$ имеет вид

$$|B| = \frac{l}{\mathbf{1}} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad l||I|. \quad (3.5)$$

После подстановки в выражение (1.6) получим

$$\begin{aligned} |\bar{K}|^e &= \int_V |B|^T |D| |B| dV = \int_0^l |I|^T \cdot \frac{l}{\mathbf{1}} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot E \cdot \frac{l}{l} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot F \cdot dz = \\ &= \frac{EF}{\mathbf{1}} |I|^T \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} l; \quad l||I| = |I|^T \cdot \frac{EF}{\mathbf{1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} |I|, \end{aligned}$$

окончательно

$$|\bar{K}|^e = |I|^T |K|^e |I|, \quad (3.6)$$

где $|K|^e$ и $|\bar{K}|^e$ – матрицы жёсткости конечного элемента в локальной и глобальной системах координат.

Векторы напряжений и усилий соответственно запишутся

$$\{S\} = \frac{E}{\mathbf{1}} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad l||I| \begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_i \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\{N\} = \frac{EF}{\mathbf{1}} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad l||I| \begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_i \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix}. \quad (3.8)$$

3.2 Расчёт пространственных ферм

По аналогии с плоскими фермами выполняется расчёт пространственных ферм.

Вводим две системы координат: локальную – ось x и глобальную – оси $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Теперь каждый узел имеет три степени свободы, и перемещения узлов в глобальной системе координат запишутся так:

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos a_1 & \cos a_2 & \cos a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos a_1 & \cos a_2 & \cos a_3 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{W}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \\ \bar{W}_j \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

где $\cos a_1 = \frac{\bar{x}_j - \bar{x}_i}{l}$; $\cos a_2 = \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_i}{l}$; $\cos a_3 = \frac{\bar{z}_j - \bar{z}_i}{l}$;

$$l = \sqrt{(\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2 + (\bar{y}_j - \bar{y}_i)^2 + (\bar{z}_j - \bar{z}_i)^2}.$$

Матрица жёсткости конечного элемента в глобальной системе координат, как и для плоской фермы, вычисляется по формуле (3.6), но теперь матрица направляющих косинусов имеет вид

$$|I| = \begin{vmatrix} \cos a_1 & \cos a_2 & \cos a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos a_1 & \cos a_2 & \cos a_3 \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

3.3 Пример

На стержневую систему (рис. 3.3) действует сила $P=500$ кН. Определить усилия и напряжения в стержнях, приняв площади всех стержней одинаковыми и равными $F=30$ см².

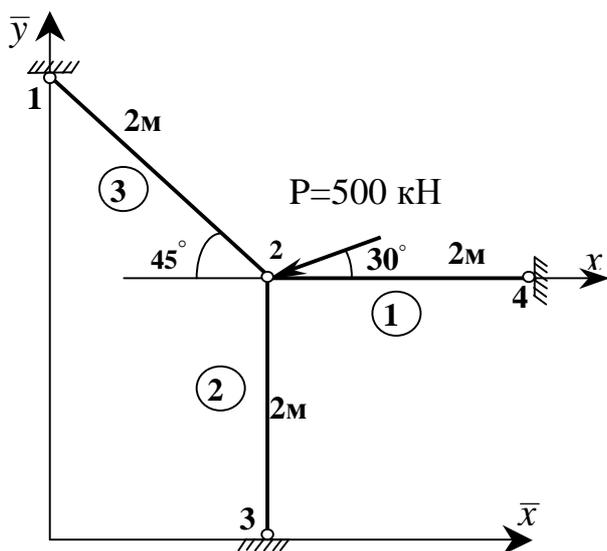


Рисунок 3.3

Решение. Вводим глобальную систему координат $\bar{x} \bar{y}$. Нумеруем узлы и элементы.

Матрицы жёсткости стержней определяем по формуле (3.6).

Элемент 1: его связи 2–4, ось x идёт от узла 2 к узлу 4, следовательно, угол между осями x и \bar{x} равен 0. Матрица направляющих косинусов для этого элемента запишется так

$$|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем матрицу жёсткости элемента

$$|\bar{K}|_I^e = \frac{EF}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = EF \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Элемент 2: стержень 2–3, $\alpha = -90^\circ$ (направление оси от узла 2 к 3).

$$|I| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$|\bar{K}|_{II}^e = \frac{EF}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = EF \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

Элемент 3: стержень 2–1, $\alpha = 135^\circ$.

$$|I| = \begin{vmatrix} -0,71 & 0,71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,71 & 0,71 \end{vmatrix}.$$

$$|\bar{K}|_{III}^e = \frac{EF}{2} \begin{vmatrix} -0,71 & 0 \\ 0,71 & 0 \\ 0 & -0,71 \\ 0 & 0,71 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -0,71 & 0,71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,71 & 0,71 \end{vmatrix} =$$

$$= EF \begin{vmatrix} 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 \\ -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 \\ 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 \end{vmatrix}.$$

Матрица жёсткости каждого элемента должна быть симметричной, а по главной диагонали должны стоять положительные коэффициенты.

Переходим к формированию матрицы жёсткости конструкции. Так как узлов 4, а каждый узел в глобальной системе координат имеет две степени свободы, то матрица жёсткости конструкции имеет размерность 8x8.

При заполнении матрицы жёсткости конструкции, необходимо учитывать, какие узлы входят в элемент. Например, элемент 1. В него входят узлы 2 и

4, следовательно, необходимо коэффициенты матрицы жёсткости этого элемента заносить в столбцы и строки 2 и 4.

В правый столбец заносим значения нагрузок. Так как нагрузка приложена только во втором узле, то только в этот узел заносим величины

$$P_{2x}^- = -P \cos 30^\circ = -500 \cdot 0,866 = -433 \text{ кН},$$

$$P_{2y}^- = -P \sin 30^\circ = -500 \cdot 0,5 = -250 \text{ кН}.$$

Нагрузки взяты с минусом, так как они направлены против положительного направления осей.

Теперь учитываем граничные условия. Узлы 1, 3 и 4 закреплены, следовательно

$$\bar{U}_1, \bar{V}_1, \bar{U}_3, \bar{V}_3 \text{ и } \bar{U}_4, \bar{V}_4 = 0.$$

После учёта граничных условий получим

| | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
|----|--|-------|-------|-------|-------|---|---|------|---|
| 1 | | 0,25 | -0,25 | -0,25 | 0,25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | -0,25 | 0,25 | 0,25 | -0,25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | -0,25 | 0,25 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | -0,5 | 0 |
| | | | 0,25 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| EF | | 0,25 | -0,25 | -0,25 | 0,25 | 0 | 0 | -0,5 | 0 |
| | | | | 0 | 0,5 | 0 | 0 | | |
| 3 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | | 0 | 0 | -0,5 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 0 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{V}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{V}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{V}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -433 \\ -250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$EF \begin{vmatrix} 0,75 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{V}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -433 \\ -250 \end{Bmatrix},$$

умножив вторую строку на 3, имеем

$$EF \begin{vmatrix} 0,75 & -0,25 \\ -0,75 & 2,25 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{V}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -433 \\ -750 \end{Bmatrix}.$$

Сложив строки, найдём

$$2,0\bar{V}_2 \cdot EF = -1183,$$

$$\bar{V}_2 = -\frac{591,5}{EF}.$$

Подставив во второе уравнение значение \bar{V}_2 , найдём \bar{U}_2 .

$$-0,25\bar{U}_2 + 0,75 \frac{(-591,5)}{EF} = -\frac{250}{EF};$$

$$\bar{U}_2 = -\frac{775}{EF}.$$

Определяем усилия в стержнях по формуле (3.8)

$$\{N\}_I = \frac{EF}{2} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{775}{EF} \\ -\frac{591,5}{EF} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EF}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{775}{EF} \\ -\frac{591,5}{EF} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 387,5 \text{кН},$$

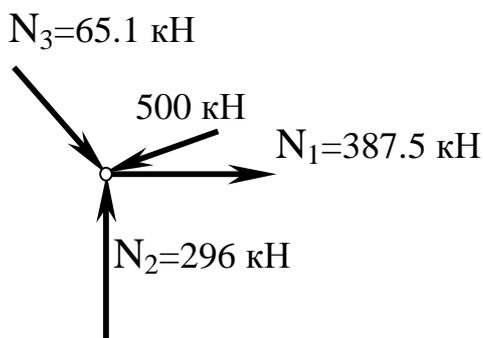
$$\{N\}_{II} = \frac{EF}{2} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{775}{EF} \\ -\frac{591,5}{EF} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EF}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{775}{EF} \\ -\frac{591,5}{EF} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -296 \text{кН},$$

$$\{N\}_{III} = \frac{EF}{2} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad 1 \begin{vmatrix} -0,71 & 0,71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,71 & 0,71 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{775}{EF} \\ -\frac{591,5}{EF} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{EF}{2} \begin{vmatrix} 0,71 & -0,71 & -0,71 & 0,71 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{775}{EF} \\ \frac{591,5}{EF} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -65,1 \text{ кН}.$$

Покажем усилия в стержнях (если усилие отрицательное, то показано к узлу, а положительное – от узла) (рис. 3.4).

Проверка: $\sum P_x = 0$.



$$\begin{aligned} N_3 \cos 45^\circ - 500 \cos 30^\circ + N_1 &= 0; \\ 65,1 \cdot 0,707 - 500 \cdot 0,866 + 387,5 &= 0; \\ 433,7 - 433 &= 0. \end{aligned}$$

Рисунок 3.4

Погрешность 0,2%.

$$\sum P_y = 0,$$

$$\begin{aligned} -N_3 \sin 45^\circ + N_2 - 500 \cdot \sin 30^\circ &= 0, \\ -65,1 \cdot 0,707 + 296 - 500 \cdot 0,5 &= 0, \\ -296,2 + 296 &= 0. \end{aligned}$$

Погрешность 0,1%, следовательно, усилия найдены, верно.

Определим напряжения в стержнях:

$$s_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{387,5 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-4}} = 129 \text{ МПа},$$

$$s_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{296 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-4}} = 98,7 \text{ МПа},$$

$$s_3 = \frac{N_3}{F} = \frac{65,1 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-4}} = 21,7 \text{ МПа}.$$

4 РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ КРУГЛЫХ ВАЛОВ

4.1 Основные зависимости сопротивления материалов при кручении

Напряжения в произвольной точке сечения определяются по формуле

$$t = \frac{M_{кр} r}{J_r}, \quad (4.1)$$

где $M_{кр}$ - крутящий момент в сечении, где определяются касательные напряжения t (рис. 4.1);

r - расстояние от точки, где определяются напряжения, до центра вала;

J_r - полярный момент инерции сечения вала:

$$J_r = \frac{\rho D^4}{32} \text{ - для сплошного вала,}$$

$$J_r = \frac{\rho D^4}{32} (1 - a^4) \text{ - для полого вала;}$$

D, d - наружный и внутренний диаметры вала, $a = d/D$.

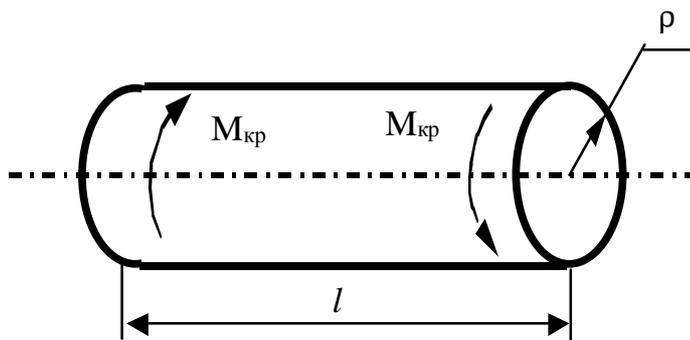


Рисунок 4.1

Эпюра напряжений при кручении показана на рис. 4.2.

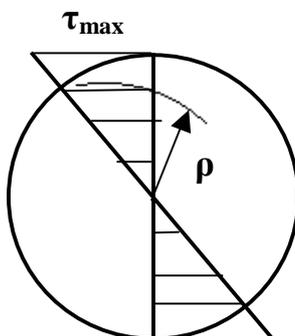


Рисунок 4.2 - Эпюра напряжений при кручении

$$t_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_r} \leq [t], \quad (4.2)$$

где W_r - полярный момент сопротивления сечения.

Для сплошного вала $W_r = \frac{\rho D^3}{16}$, а для полого $W_r = \frac{\rho D^3}{16} (1 - a^4)$.

Вал рассчитывается не только на прочность, но и на жесткость:

$$Q = \frac{M_{кр}}{GJ_r} \leq [Q], \quad (4.3)$$

где Θ - относительный угол закручивания;

G – модуль упругости второго рода: для стали $G = 8 \times 10^4$ МПа,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$[\Theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания.

Полный угол закручивания участка вала постоянного сечения вычисляется по формуле

$$j = \frac{M_{кр} l}{GJ_r}. \quad (4.4)$$

Закон Гука при кручении

$$t = gG, \quad (4.5)$$

где g - относительный сдвиг.

4.2 Функция перемещений для конечного элемента

Для расчета вала, показанного на рис. 4.3, в качестве конечного принимается элемент постоянного сечения (рис.4.4).

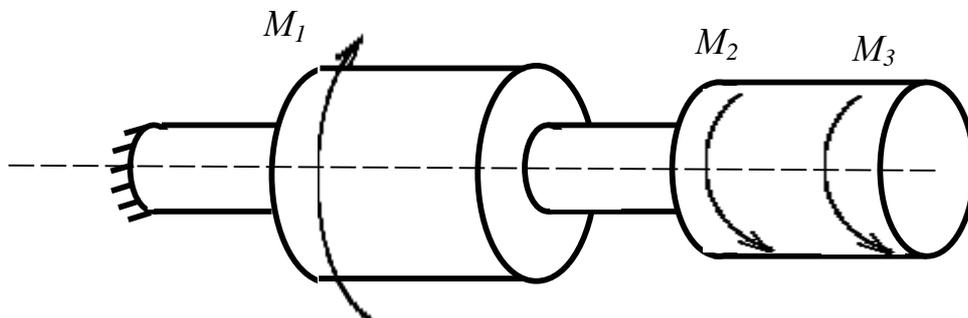


Рисунок 4.3 – Схема вала

Так как каждый узел имеет одну степень свободы, то функция перемещений для конечного элемента имеет вид

$$\mathbf{j} = a_0 + a_1 z. \quad (4.6)$$

Коэффициенты a_0 и a_1 определяем через перемещения $\mathbf{j}_i, \mathbf{j}_j$ узлов.

При $z=0$ $\mathbf{j} = \mathbf{j}_i$, а при $z=l$ $\mathbf{j} = \mathbf{j}_j$.

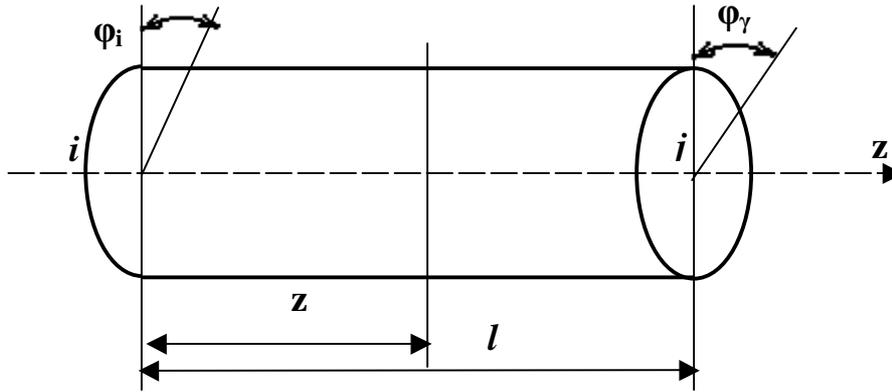


Рисунок 4.4 – Конечный элемент вала

Подставив эти значения в выражение (4.6), получим

$$\mathbf{j}_i = a_0, \mathbf{j}_j = a_0 + a_1 l = \mathbf{j}_i + a_1 l, \quad \text{откуда } a_1 = \frac{\mathbf{j}_j - \mathbf{j}_i}{l}.$$

Подставляем значения a_0 и a_1 в выражение (4.6):

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_i + \frac{\mathbf{j}_j - \mathbf{j}_i}{l} z = \left(1 - \frac{z}{l}\right) \mathbf{j}_i + \frac{z}{l} \mathbf{j}_j.$$

В матричной форме имеем

$$\{\mathbf{j}\} = \left[1 - \frac{z}{l}; \frac{z}{l}\right] \begin{Bmatrix} \mathbf{j}_i \\ \mathbf{j}_j \end{Bmatrix}. \quad (4.7)$$

4.3 Векторы деформаций, напряжений и усилий

В результате действия крутящих моментов элемент вала длиной dz закручивается на угол $d\mathbf{j}$ (рис. 4.5)

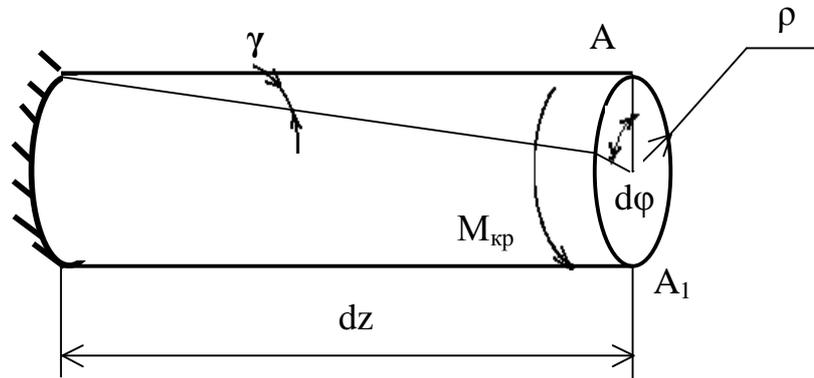


Рисунок 4.5

Установим зависимость между g и dj .

С одной стороны, $AA_1 = r dj$, с другой – $AA_1 = r dz$.

Приравняв эти значения, получим $r dj = g dz$, откуда

$$\{g\} = \frac{dj}{dz} r. \quad (4.8)$$

Подставляем сюда выражение (4.7), берем производную

$$\{g\} = \frac{r}{l} |1; 1| \begin{Bmatrix} j_i \\ j_j \end{Bmatrix}. \quad (4.9)$$

Теперь матрица $|B|$ запишется так:

$$|B| = \frac{r}{l} |-1; 1|. \quad (4.10)$$

Вектор напряжений на основании закона Гука при кручении запишется так:

$$\{t\} = G\{g\} = \frac{Gr}{l} |-1; 1| \begin{Bmatrix} j_i \\ j_j \end{Bmatrix}. \quad (4.11)$$

Вектор усилий определяем из выражения (4.1):

$$\{M_{кр}\} = \frac{tJ_r}{r} = \frac{GJ_{кр}}{l} |-1; 1| \begin{Bmatrix} j_i \\ j_j \end{Bmatrix}. \quad (4.12)$$

4.4 Матрица жесткости конечного элемента

Матрицу жесткости определяем по формуле (1.6)

$$|K|^e = \int_V |B|^T |D| |B| dV = \int_F \int_0^l \frac{r}{l} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} G \frac{r}{l} \begin{vmatrix} -1; 1 \end{vmatrix} dz dF,$$

где $dv=dz dF$, $|D|=G$.
 После интегрирования получим

$$|K|^e = G \frac{1}{l^2} \begin{vmatrix} -1 & \\ & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ & -1 & 1 \end{vmatrix} \int_F r^2 dF \int_0^l dz = \frac{GJ_r}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, матрица конечного элемента равна

$$|K|^e = \frac{GJ_r}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.12)$$

Как видим, несмотря на различные задачи растяжения и кручения, их матрицы жесткости аналогичны.

4.5 Пример

Для вала, показанного на рис.4.6, а, построить эпюру крутящих моментов, определить диаметры вала, если $[\tau]=120 \text{ МПа}$, построить эпюру наибольших касательных напряжений.

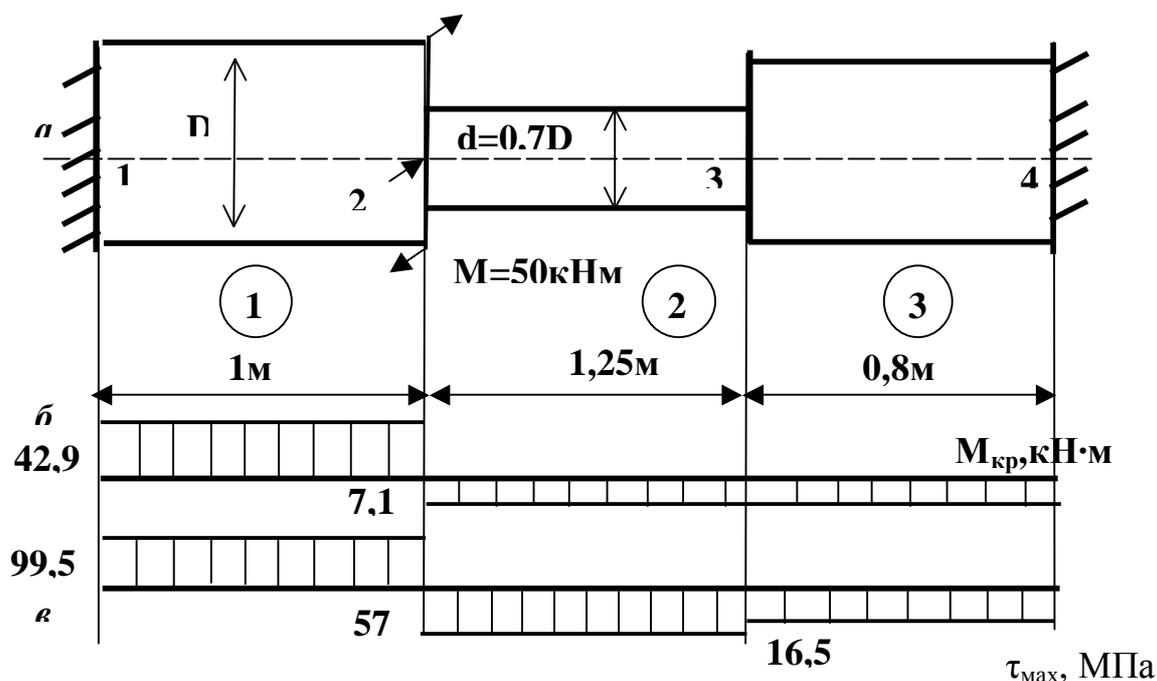


Рисунок 4.6

Решение. Нумеруем узлы, нумеруем элементы. Матрицы жесткости элементов определяем по формуле (4.12). Предварительно определяем полярные моменты инерции сечений вала:

$$J_r^I = \frac{\rho D^4}{32},$$

$$J_r^{II} = \frac{\rho D^4}{32} = \frac{\rho(0,7D)^4}{32} = \frac{\rho D^4}{32} 0,24 = 0,24 J_r^I,$$

$$|K|_I^e = \frac{GJ_r^I}{1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = GJ_r^I \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$|K|_{II}^e = \frac{0,24GJ_r^I}{1,25} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = GJ_r^I \begin{vmatrix} 0,19 & -0,19 \\ -0,19 & 0,19 \end{vmatrix},$$

$$|K|_{III}^e = \frac{GJ_r^I}{0,8} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = GJ_r^I \begin{vmatrix} 1,25 & -1,25 \\ -1,25 & 1,25 \end{vmatrix}.$$

Формируем матрицу жесткости конструкции. Ее размерность 4x4 (число узлов 4, степень свободы узла - 1).

$$GJ_r^I \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -0,19 & 0 \\ 0 & -0,19 & 0,19 & -1,25 \\ 0 & 0 & 1,25 & 1,25 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Учитываем граничные условия: $\varphi_1=0$, $\varphi_4=0$.

Вычеркиваем 1-ю и 4-ю строки и соответствующие столбцы, получим

$$GJ_r^I \begin{vmatrix} 1,19 & -0,19 \\ -0,19 & 1,44 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 \\ j_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-0,19\varphi_2 + 1,44\varphi_3 = 0 \quad \text{à} \quad j_2 = \frac{1,44}{0,19} j_3 = 7,58 j_3.$$

Подставляем в первое уравнение значение φ_2 :

$$1,19 \cdot 7,53j_2 - 0,19j_3 = \frac{50}{GJ_r^I};$$

откуда

$$j_3 = \frac{50}{8,829GJ_r^I} = \frac{5,66}{GJ_r^I} \text{ и } j_2 = \frac{42,9}{GJ_r^I}.$$

Вычисляем крутящие моменты:

$$\{M_{кр}\}_I = \frac{GJ_r^I}{1} | -1; \quad 1 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 42,93 \\ \frac{5,66}{GJ_r^I} \end{array} \right\} = 42,9 \text{ кН}\times\text{м}$$

$$\{M_{кр}\}_{II} = \frac{GJ_r^{II}}{1,25} | -1; \quad 1 \left\{ \begin{array}{c} 42,93 \\ \frac{5,66}{GJ_r^I} \\ \frac{5,66}{GJ_r^I} \end{array} \right\} = \frac{0,24GJ_r^I}{1,25} | -1; \quad 1 \left\{ \begin{array}{c} 42,4 \\ \frac{5,66}{GJ_r^I} \\ \frac{5,66}{GJ_r^I} \end{array} \right\} = -7,1 \text{ кН}\times\text{м}$$

$$\{M_{кр}\}_{III} = \frac{GJ_r}{0,8} | -1; \quad 1 \left\{ \begin{array}{c} 5,66 \\ \frac{5,66}{GJ_r^I} \\ 0 \end{array} \right\} = -7,1 \text{ кН}\times\text{м}.$$

По этим значениям строим эпюру крутящих моментов (см. рис. 4.6,б).

Из условия прочности определяем необходимый момент сопротивления сечения

$$W_r \geq \frac{M_{кр}}{[t]} = \frac{42,9 \cdot 10^{-3}}{120} 10^6 = 357,5 \text{ см}^3.$$

С другой стороны,

$$W_r = \frac{pD^3}{16} = 357,5,$$

откуда

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 357,5}{p}} = \sqrt[3]{1821,7} = 12,2 \text{ см}.$$

Принимаем $D=130 \text{ мм}$, $d=0,7D=0,71 \times 130=91 \text{ мм}$.

Определим d по моменту на втором участке:

$$W_r^{II} = \frac{M_{кр}}{[t]} = \frac{7,1 \cdot 10^{-3}}{120} 10^6 = 59,2 \text{ см}^3,$$

$$\frac{pd^3}{16} = 59,2 \text{ а } d = \sqrt[3]{\frac{59,2 \cdot 16}{p}} = \sqrt[3]{301,7} = 6,7 \text{ см}.$$

Принимаем $d = 70 \text{ мм}$, $D = \frac{70}{0,7} = 100 \text{ мм}$.

В качестве расчетных принимаем большие диаметры: $D=130 \text{ мм}$, $d=91 \text{ мм}$.

Определяем максимальные касательные напряжения:

$$t_{max}^I = \frac{M_{кр}^I}{W_r^I} = \frac{42,9 \cdot 10^{-3}}{431 \cdot 10^{-6}} = 99,5 \text{ МПа},$$

$$W_r^I = \frac{pD^3}{16} = \frac{p \cdot 13^3}{16} = 431 \text{ см}^3,$$

$$t_{max}^{II} = \frac{M_{кр}^{II}}{W_r^{II}} = \frac{7,1 \cdot 10^{-3}}{124,5 \cdot 10^{-6}} = 57 \text{ МПа},$$

$$W_r^{II} = \frac{p \cdot 9,1^3}{16} = 124,5 \text{ см}^3,$$

$$t_{max}^{III} = \frac{M_{кр}^{III}}{W_r^{III}} = \frac{7,1 \cdot 10^{-3}}{431 \cdot 10^{-6}} = 16,5 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру касательных напряжений (рис.4.6, в).

5 РАСЧЕТ БАЛОК

5.1 Понятие об изгибе. Основные зависимости при изгибе

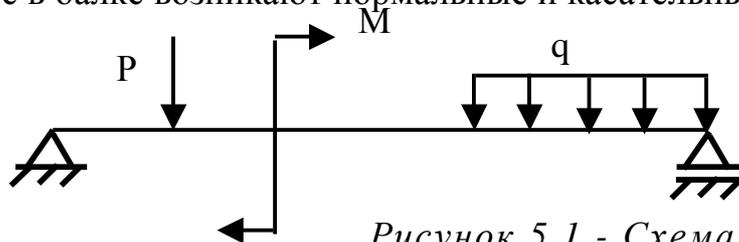
Различают чистый и поперечный изгиб.

Чистым изгибом называется вид нагружения, при котором в поперечном сечении возникают только изгибающие моменты.

Если кроме изгибающих моментов возникают и поперечные силы, то *изгиб называют поперечным*.

Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой* (рис. 5.1).

При изгибе в балке возникают нормальные и касательные напряжения.



Нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x}, \quad (5.1)$$

где M_x - изгибающий момент относительно оси X (рис. 5.2);

y – расстояние от главной центральной оси X до точки, в которой определяются напряжения;

I_x – момент инерции сечения относительно оси X. В общем случае он равен

$$I_x = \int_F y^2 dF.$$

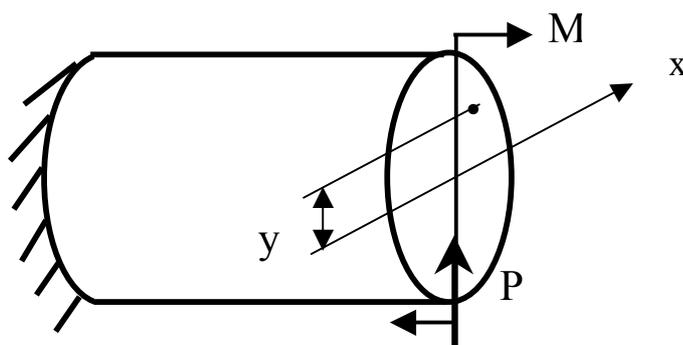


Рисунок 5.2

Для простейших сечений I_x равен:

- для прямоугольника $I_x = \frac{bh^3}{12}$;

- для круга $I_x = \frac{\rho d^4}{64}$.

Касательные напряжения при изгибе определяются по формуле Журавского:

$$t = \frac{QS_x^{omc}}{bI_x}, \quad (5.2)$$

где Q – поперечная сила в сечении, где определяются касательные напряжения;

$S_x^{omc} = y_c^{omc} F_{omc}$ – статический момент отсеченной части сечения, расположенной выше уровня y , где определяются напряжения (рис.5.3);

b – ширина сечения в том месте, где определяются напряжения.

При расчете балки необходимо выполнить следующие условия:

а) основное условие прочности

$$s_{max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [s], \quad (5.3)$$

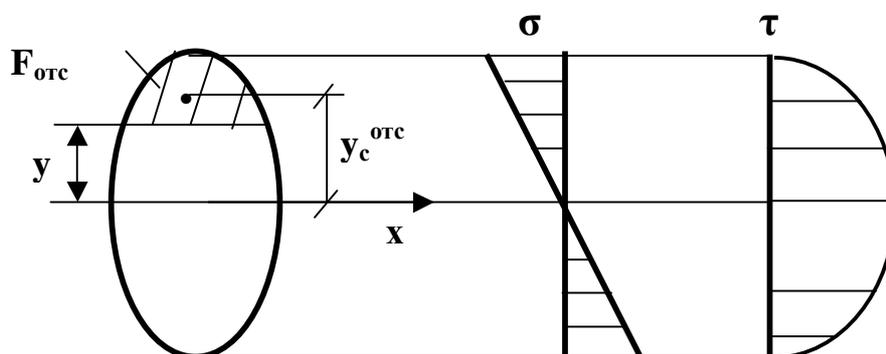


Рисунок 5.3 – Эпюры нормальных и касательных напряжений при поперечном изгибе

где W_x - момент сопротивления сечения относительно оси X.

В общем случае
$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$$

для прямоугольника
$$W_x = \frac{bh^2}{6},$$

для круга
$$W_x = \frac{pd^3}{32} = 0,1d^3;$$

б) условие прочности по касательным напряжениям

$$t_{max} = \frac{Q_{max} S_x^{отс}}{bI_x} \leq [t], \quad (5.4)$$

где $[t] = (0,5 \div 0,6)[\sigma]$ – допускаемое касательное напряжение;

в) по эквивалентным напряжениям:

- по третьей теории прочности

$$s_{эКВ}^{III} = \sqrt{s^2 + 4t^2} \leq [s]; \quad (5.5)$$

- по четвертой теории прочности

$$s_{эКВ}^{IV} = \sqrt{s^2 + 3t^2} \leq [s]. \quad (5.6)$$

5.2 Функция перемещений при изгибе

Для балки, представленной на рис 5.4, в качестве конечного элемента принимается стержень длиной l , расположенный между характерными сечениями, а нагрузки приложены по концам элемента (рис.5.5).

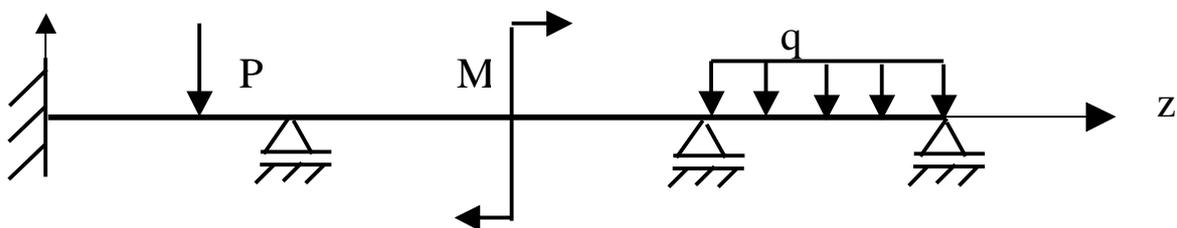


Рисунок 5.4 - Схема балки

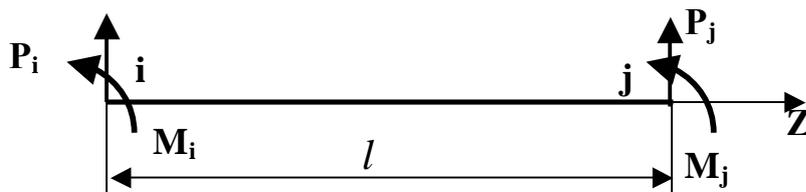


Рисунок 5.5 - Элемент балки с положительно направленными узловыми нагрузками

Покажем элемент после деформации (рис.5.6).

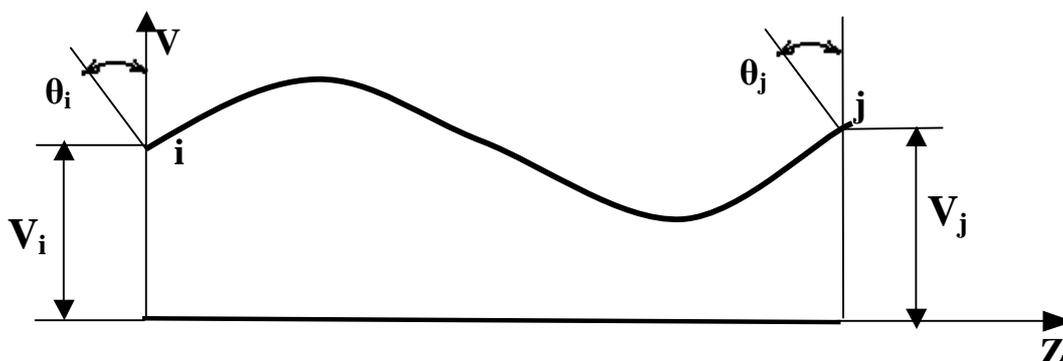


Рисунок 5.6 - Конечный элемент после деформации

Как видим, каждый узел имеет две степени свободы, а в элементе два узла. Значит, функция перемещений для элемента представляет собой полином (5.7), содержащий четыре коэффициента:

$$V = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \quad (5.7)$$

Коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 , a_3 определяем через перемещения узлов V_i , θ_i , V_j и θ_j .

$$\text{При } z=0 \quad V=V_i, \quad \theta=\theta_i.$$

$$\text{При } z=l \quad V=V_j, \quad \theta=\theta_j.$$

При изгибе

$$q = \frac{dV}{dz}, \quad \theta = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2. \quad (5.8)$$

Подставив в выражения (5.7) и (5.8) значения перемещений для узлов i и j , получим

$$V_i = a_0 \longrightarrow a_0 = V_i, \quad \theta_i = a_1 \longrightarrow a_1 = \theta_i,$$

$$V_j = V_i + \theta_i l + a_2 l^2 + a_3 l^3,$$

$$\theta_j = \theta_i + 2a_2 l + 3a_3 l^2,$$

$$\begin{cases} a_2 l^2 + a_3 l^3 = V_j - V_i - \theta_i l; \\ 2a_2 l + 3a_3 l^2 = \theta_j - \theta_i. \end{cases}$$

С помощью определителей находим:

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} V_j - V_i - \theta_i l & l^3 \\ \theta_j - \theta_i & 3l^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l^2 & l^3 \\ 2l & 3l^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{l^4} [3l^2(V_j - V_i - \theta_i l) - l^3(\theta_j - \theta_i)],$$

$$a_3 = \frac{1}{l^4} \begin{vmatrix} l^2 & V_j - V_i - \theta_i l \\ 2l & \theta_j - \theta_i \end{vmatrix} = \frac{1}{l^4} [(\theta_j - \theta_i)l^2 - 2l(V_j - V_i - \theta_i l)].$$

Подставляем найденные коэффициенты в выражение (5.7):

$$V = V_i + \theta_i z + \frac{1}{l^4} [3l^2(V_j - V_i - \theta_i l) - l^3(\theta_j - \theta_i)]z^2 + \frac{1}{l^4} [(\theta_j - \theta_i)l^2 - 2l(V_j - V_i - \theta_i l)]z^3$$

или

$$V = \left[1 - 3 \frac{z^2}{l^2} + 2 \frac{z^3}{l^3} \right] \cdot V_i + \left[z - 2 \frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \right] q_i + \\ + \left[3 \frac{z^2}{l^2} - 2 \frac{z^3}{l^3} \right] \cdot V_j + \left[-\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \right] q_j.$$

Запишем это выражение в матричной форме:

$$V = \begin{vmatrix} 1 - 3 \frac{z^2}{l^2} + 2 \frac{z^3}{l^3}; & z - 2 \frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2}; & 3 \frac{z^2}{l^2} - 2 \frac{z^3}{l^3}; & -\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_i \\ q_i \\ V_j \\ q_j \end{Bmatrix}. \quad (5.8)$$

5.3 Векторы деформаций, напряжений и усилий

Установим связь между деформациями и перемещениями при изгибе. Для этого покажем элемент балки длиной dz до и после деформации (рис.5.7).

Относительное удлинение произвольного волокна CD равно

$$e = \frac{C_1 D_1 - CD}{CD}, \\ CD = AB = A_1 B_1 = \rho \, d\theta,$$

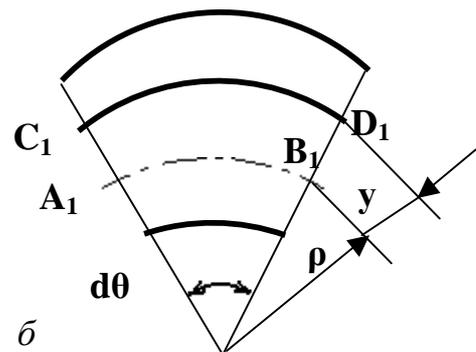
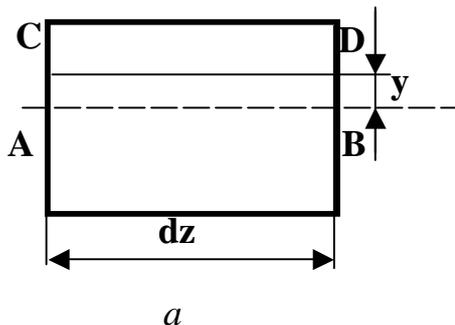


Рисунок 5.7- Элемент балки длиной dz :
а- до деформации, б – после деформации

$$C_1 D_1 = (\rho + y) \, d\theta, \\ e = \frac{(r + y) \cdot dq - r \cdot dq}{r \cdot dq} = \frac{ry}{r}.$$

Из математики известна зависимость

$$\frac{l}{r} = \frac{\frac{d^2V}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} \approx \frac{d^2V}{dz^2}.$$

Таким образом, имеем

$$e = y \frac{d^2V}{dz^2}.$$

Взяв вторую производную выражения (5.8), получим

$$\{e\} = y \left| -\frac{6}{l^2} + \frac{6z}{l^3}; \quad -\frac{4}{l} + \frac{6z}{l^2}; \quad \frac{6}{l^2} - \frac{6z}{l^3}; \quad -\frac{2}{l} + \frac{6z}{l^2} \right| \cdot \begin{Bmatrix} V_i \\ q_i \\ V_j \\ q_j \end{Bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\{e\} = |B| \cdot \begin{Bmatrix} V_i \\ q_i \\ V_j \\ q_j \end{Bmatrix},$$

здесь

$$|B| = y \cdot \left| -\frac{6}{l^2} + \frac{6z}{l^3}; \quad -\frac{4}{l} + \frac{6z}{l^2}; \quad \frac{6}{l^2} - \frac{6z}{l^3}; \quad -\frac{2}{l} + \frac{6z}{l^2} \right|. \quad (5.10)$$

На основании закона Гука получим вектор напряжений

$$\{s\} = E \cdot \{e\} = yE \cdot \left| -\frac{6}{l^2} + \frac{6z}{l^3}; \quad -\frac{4}{l} + \frac{6z}{l^2}; \quad \frac{6}{l^2} - \frac{6z}{l^3}; \quad -\frac{2}{l} + \frac{6z}{l^2} \right| \cdot \begin{Bmatrix} V_i \\ q_i \\ V_j \\ q_j \end{Bmatrix}. \quad (5.11)$$

Из формулы (5.1) изгибающий момент равен

$$M_x = I_x \{s\} \frac{l}{y}.$$

Подставив сюда выражение (5.10), получим вектор усилий

$$\{M_x\} = EI_x \cdot \begin{vmatrix} -\frac{6}{l^2} + \frac{6z}{l^3}; & -\frac{4}{l} + \frac{6z}{l^2}; & \frac{6}{l^2} - \frac{6z}{l^3}; & -\frac{z}{l} + \frac{6z}{l^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_i \\ q_i \\ V_j \\ q_j \end{Bmatrix}. \quad (5.12)$$

5.4 Матрица жесткости конечного элемента

В соответствии с выражением (1.6) находим

$$|K|^e = \int_V |B|^T |D| |B| dV = \int_0^l \int_F y \begin{vmatrix} -\frac{6}{l^2} + \frac{6z}{l^3} \\ -\frac{4}{l} + \frac{6z}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} - \frac{6z}{l^3} \\ -\frac{z}{l} + \frac{6z}{l^2} \end{vmatrix} E y^* \\ * \begin{vmatrix} -\frac{6}{l^2} + \frac{6z}{l^3} & -\frac{4}{l} + \frac{6z}{l^2} & \frac{6}{l^2} - \frac{6z}{l^3} & -\frac{z}{l} + \frac{6z}{l^2} \end{vmatrix} dz dF,$$

$\int_F y^2 dF = I_x$ – момент инерции сечения относительно оси X.

Перемножив матрицы и взяв интегралы, получим матрицу жесткости конечного элемента в следующем виде:

$$|K|^e = EI_x \begin{vmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{vmatrix}. \quad (5.13)$$

5.5 Учет влияния распределенной нагрузки на величину нагрузок в узлах

При составлении уравнений МКЭ в вектор нагрузок узлов записываются значения сил и моментов в соответствующих узлах. При наличии распределен-

ной нагрузки, которая распределена по длине элемента (рис. 5.8, а), ее влияние необходимо затенить узловыми силами. Для этого определим работу, которую выполняет нагрузка q на перемещении V .

Таким образом, матрица конечного элемента равна

$$\int_0^l qVdz = \int_0^l q \left| 1 - 3\frac{z^2}{l^2} + 2\frac{z^3}{l^3}; \quad z - 2\frac{z^2}{l} + 3\frac{z^3}{l^2}; \quad 3\frac{z^2}{l^2} - 2\frac{z^3}{l^3}; \quad -\frac{z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2} \right| dz.$$

Если $q = \text{const}$, то

$$\int_0^l qVdz = \left| \frac{ql}{2}; \quad \frac{ql^2}{12}; \quad \frac{ql}{2}; \quad -\frac{ql^2}{12} \right|.$$

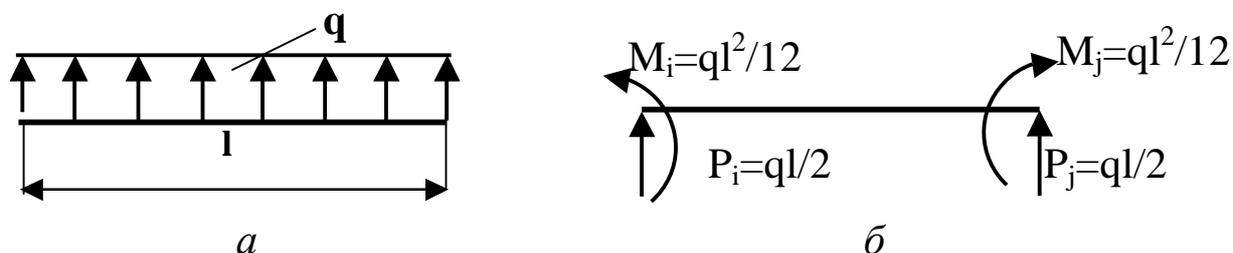


Рисунок 5.8

Это значит, что влияние распределенной нагрузки с энергетической точки зрения равносильно влиянию узловых нагрузок: в левом узле $P_i = ql/2$, $M_i = ql^2/12$, а в правом $P_j = ql/2$, $M_j = -ql^2/12$ (рис. 5.8, б).

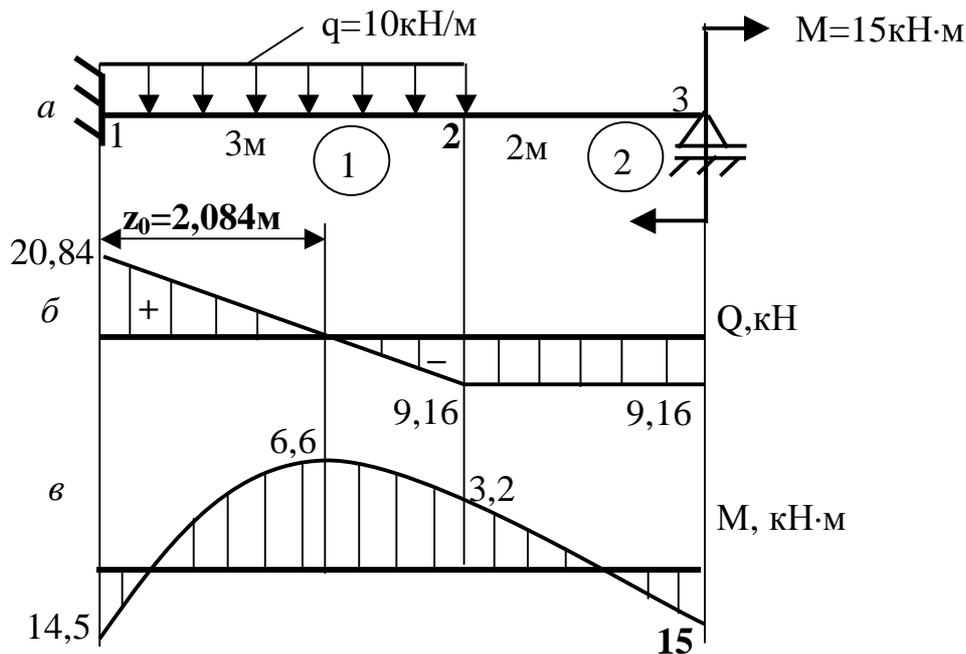
После решения задачи МКЭ и определения перемещений узлов нагрузки по узлам конечных элементов определяются так:

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \\ P_j \\ M_j \end{Bmatrix} = |K|^e \begin{Bmatrix} V_i \\ q_i \\ V_j \\ q_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{Bmatrix}. \quad (5.14)$$

5.6 Пример

Для балки, показанной на рис.5.9, а, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Решение. Нумеруем узлы и элементы (элементы обведены кружками). Вычисляем матрицы жесткости элементов по формуле (5.13). В элемент 1 входят узлы 1 и 2, его длина 3м.



*а – заданная балка; б – эпюра поперечных сил;
в – эпюра изгибающих моментов*

Рисунок 5.9

$$|K|_I^e = EI_x \begin{vmatrix} 0,44 & 0,67 & -0,44 & 0,67 \\ 0,67 & 1,33 & -0,67 & 0,67 \\ -0,44 & -0,67 & 0,44 & -0,67 \\ 0,67 & 0,67 & -0,67 & 1,33 \end{vmatrix}.$$

Элемент 2: входят узлы 2 и 3, его длина 2м.

$$|K|_{II}^e = EI_x \begin{vmatrix} 1,5 & 1,5 & -1,5 & 1,5 \\ 1,5 & 2 & -1,5 & 1 \\ -1,5 & -1,5 & 1,5 & -1,5 \\ 1,5 & 1 & -1,5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь формируем матрицу жесткости конструкции. Так как каждый узел имеет две степени свободы, а узлов 3, то размерность матрицы жесткости конструкции 6х6.

$$EI_x \begin{bmatrix} 0,44 & 0,67 & -0,44 & 0,67 & 0 & 0 \\ 0,67 & 1,33 & -0,67 & 0,67 & 0 & 0 \\ -0,44 & -0,67 & 0,44 & -0,67 & -1,5 & 1,5 \\ 0,67 & 0,67 & -0,67 & 1,33 & -1,5 & 1 \\ 0 & 0 & -1,5 & -1,5 & 1,5 & -1,5 \\ 0 & 0 & 1,5 & 1 & -1,5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_1 \\ q_1 \\ V_2 \\ q_2 \\ V_3 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ 0 \\ -15 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15 \\ -7,5 \\ -15 \\ 7,5 \\ 0 \\ -15 \end{Bmatrix},$$

При записи вектора нагрузок учитываем, что на первый элемент действует распределенная нагрузка. Ее действие заменяем узловыми нагрузками, как было сказано выше. В данном случае знак распределенной нагрузки берем с минусом, так как она направлена вниз.

Учитываем граничные условия:

$$V_1=0, \theta_1=0, V_3=0.$$

После их учета получим систему уравнений:

$$EI_x \begin{bmatrix} 1,94 & 0,83 & 1,5 \\ 0,83 & 3,33 & 1 \\ 1,5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15 \\ 7,5 \\ -15 \end{Bmatrix}.$$

После решения получим

$$V_2 = -\frac{5,1}{EI_x}; \quad q_2 = \frac{5,4}{EI_x}; \quad q_3 = -\frac{6,4}{EI_x}.$$

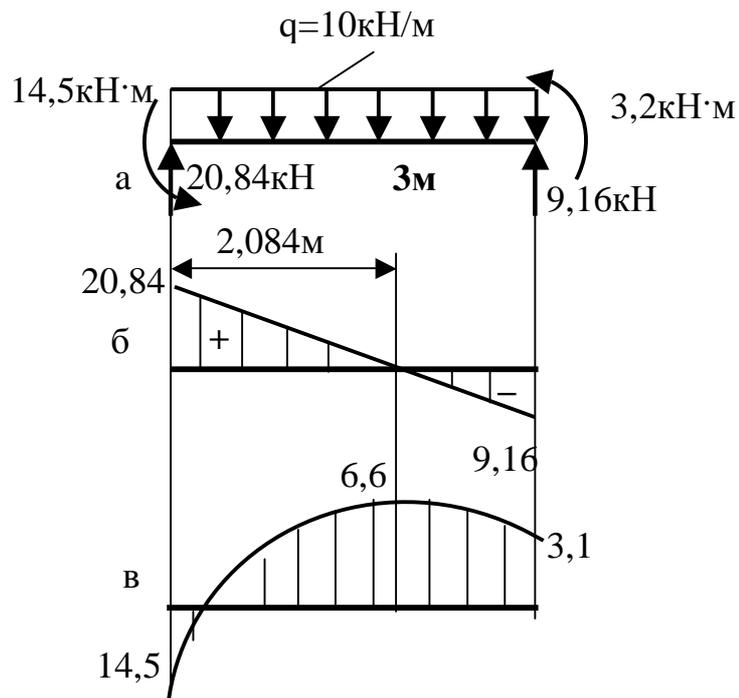
Определяем усилия по концам элементов.

Рассматриваем 1-й элемент:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = |K|_I^e \cdot \begin{Bmatrix} V_1 \\ q_1 \\ V_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{Bmatrix} =$$

$$= EI_x \begin{vmatrix} 0,44 & 0,67 & -0,44 & 0,67 \\ 0,67 & 1,33 & -0,67 & 0,67 \\ -0,44 & -0,67 & 0,44 & -0,67 \\ 0,67 & 0,67 & -0,67 & 1,33 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5,1}{EI_x} \\ \frac{5,4}{EI_x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15 \\ -7,5 \\ -15 \\ 7,5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20,84 \\ 14,5 \\ 9,16 \\ 3,2 \end{Bmatrix}$$

Прикладываем полученные узловые силы к узлам 1-го элемента (рис.5.10, а).



а – 1-й элемент с внешней нагрузкой и узловыми усилиями;
 б – эпюра поперечных сил; в – эпюра изгибающих моментов.

Рисунок 5.10

Для контроля необходимо выполнить проверки: $\sum P_y=0$, $\sum M_a=0$.

$$\begin{aligned} 20,84+9,16-10 \cdot 3 &= 0, \\ 14,5-20,84 \cdot 3+10 \cdot 3 \cdot 1,5+3,2 &= 0, \\ 14,5-62,52+45+3,2 &= 0. \end{aligned}$$

Рассматриваем 2-й элемент:

$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = |K|_{II}^e \begin{Bmatrix} V_2 \\ q_2 \\ V_3 \\ q_3 \end{Bmatrix} = EI_x \begin{vmatrix} 1,5 & 1,5 & -1,5 & 1,5 \\ 1,5 & 2 & -1,5 & 1 \\ -1,5 & -1,5 & 1,5 & -1,5 \\ 1,5 & 1 & -1,5 & 2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{5,1}{EI_x} \\ \frac{5,4}{EI_x} \\ 0 \\ -\frac{6,4}{EI_x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9,16 \\ -3,2 \\ 9,16 \\ -15 \end{Bmatrix}.$$

Прикладываем полученные узловые силы к узлам 2-го элемента (рис.5.11, а).

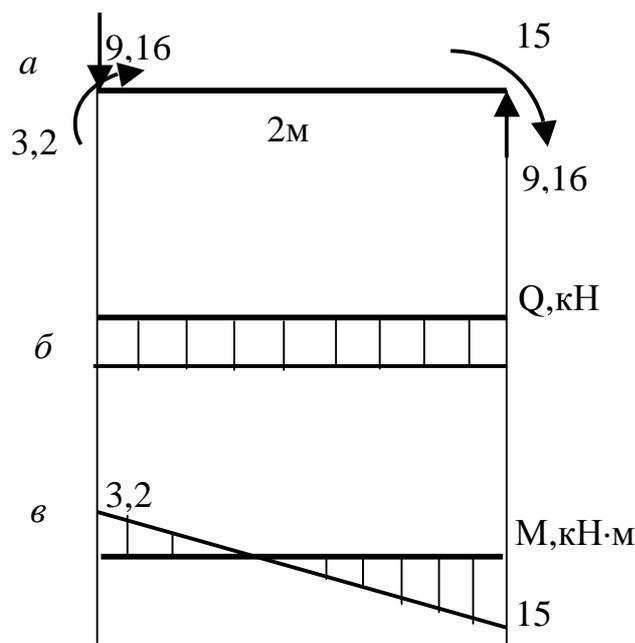


Рисунок 5.11– Элемент 2 с эпюрами Q и M : а – элемент с действующими нагрузками; б – эпюра поперечных сил; в – эпюра изгибающих моментов

Состыковав эпюры по участкам, получаем окончательные эпюры поперечных сил (см. рис.5.9, б) и изгибающих моментов (см. рис.5.9, в).

6 РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМ

6.1 Изгиб с растяжением плоского стержня

Стержни рамы испытывают поперечный изгиб с растяжением (рис. 6.1).

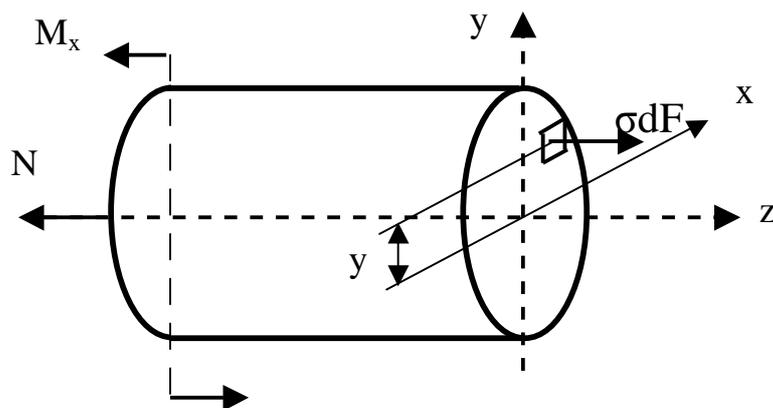


Рисунок 6.1 – Расчетная схема стержня, испытывающего изгиб с растяжением

Напряжения в произвольной точке сечения равны

$$s = \frac{N}{F} + \frac{M_x y}{I_x} \quad (6.1)$$

Этот вид нагружения следует рассматривать как комбинацию растяжения и изгиба.

6.2 Матрица жесткости в локальных координатах для конечного элемента при изгибе с растяжением

При растяжении (рис.6.2, а) вектор перемещения узлов элемента и матрица жесткости имеют вид

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}, \quad |K|^e = \frac{EF}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

при изгибе (рис. 6.2, б)

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ q_i \\ u_j \\ q_j \end{Bmatrix}, \quad |K|^e = EI_x \begin{vmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{vmatrix}.$$

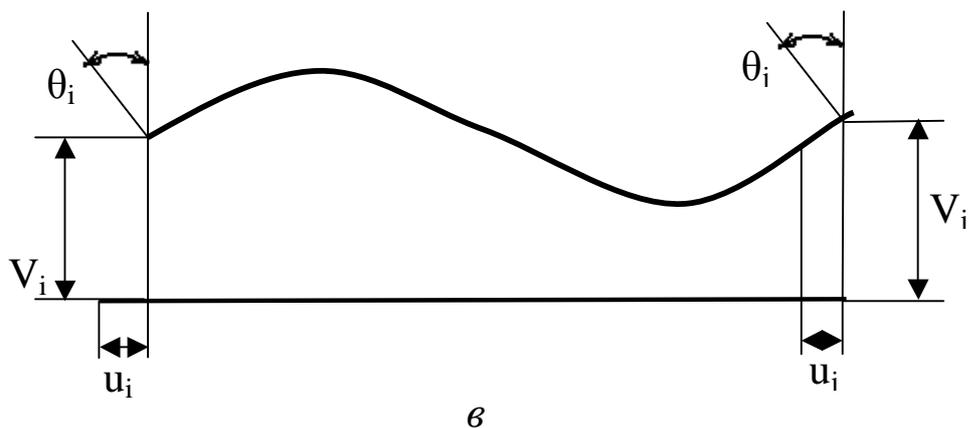
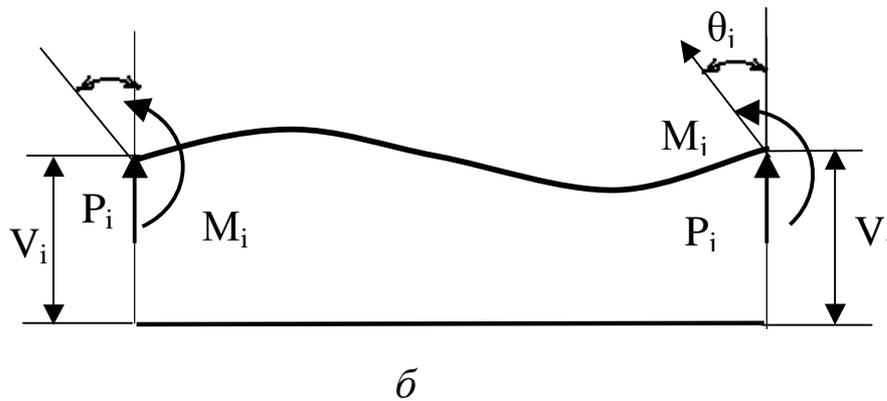
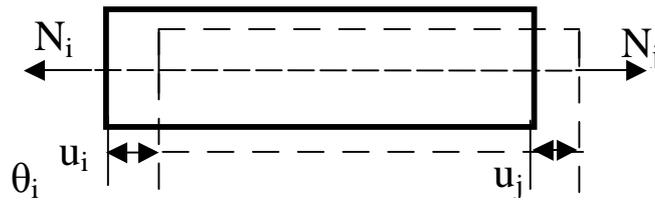


Рисунок 6.2 – Деформация конечного элемента при совместном действии растяжения и изгиба: а – растяжение стержня; б – изгиб стержня; в – совместное действие изгиба и растяжения

При совместном действии изгиба и растяжения вектор перемещений узлов и матрица жесткости получаются путем наложения растяжения и изгиба (рис. 6.2, в).

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ V_i \\ q_i \\ u_j \\ V_j \\ q_j \end{Bmatrix}; \quad |K|^e = \begin{vmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_x}{l^3} & \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_x}{l^3} & \frac{6EI_x}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_x}{l^2} & \frac{4EI_x}{l} & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{2EI_x}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_x}{l^3} & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{12EI_x}{l^3} & -\frac{6EI_x}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_x}{l^2} & \frac{2EI_x}{l} & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & \frac{4EI_x}{l} \end{vmatrix}.$$

6.3 Матрица жесткости для стержней плоской рамы

Рама (рис. 6.3) – это стержневая система, стержни которой во всех или некоторых узлах жестко соединены друг с другом. Если стержневая система находится в одной плоскости и в этой плоскости действуют нагрузки, то рама называется *плоской*.

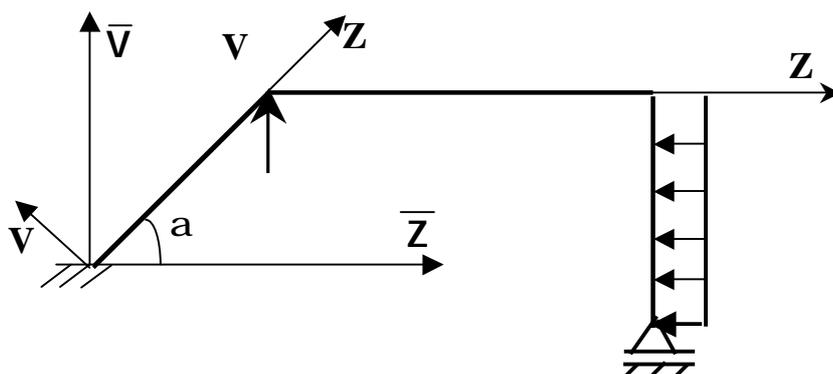


Рисунок 6.3 – Плоская рама

В этом случае вводим две системы координат: глобальную \bar{V} и \bar{z} – общую для всей рамы и локальную (местную) VZ для каждого стержня.

Как и для фермы, матрица жесткости в глобальной системе координат выражается через матрицу жесткости в локальных координатах (6.2) и матрицу направляющих косинусов.

$$|\bar{K}|^e = |\lambda|^T |K|^e |\lambda|. \quad (6.3)$$

Установим связь между перемещениями в локальной и глобальной системе координат для стержня общего положения (рис.6.4).

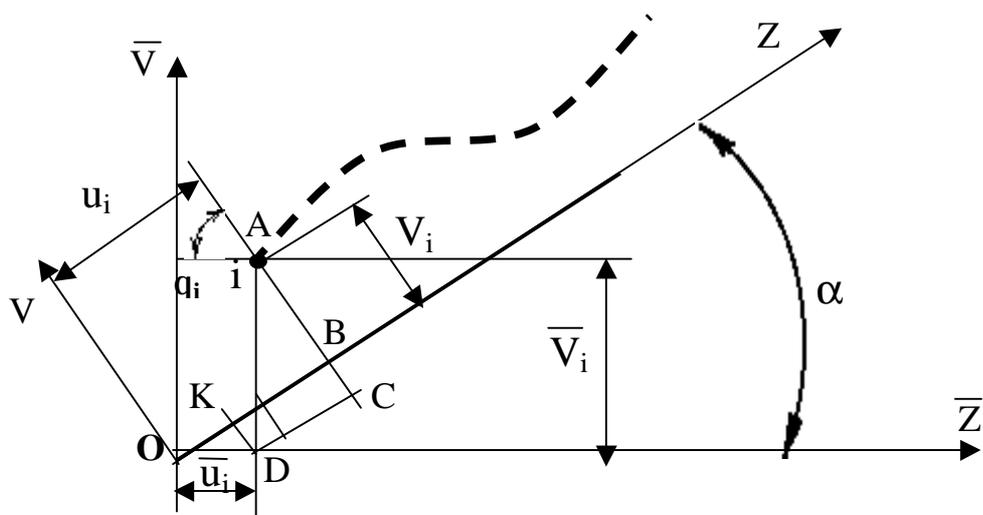


Рисунок 6.4 – Перемещения элемента в локальной и глобальной системах координат

$$\begin{aligned}
 U_i &= OB = OK + KB, \\
 OK &= \bar{u}_i \cos \alpha, \\
 BK &= DC = \bar{V}_i \sin \alpha, \\
 U_i &= \bar{u}_i \cos \alpha + \bar{V}_i \sin \alpha, \\
 V_i &= AB = AC - BC, \\
 AC &= \bar{V} \cos \alpha, \\
 BC &= KD = \bar{u}_i \sin \alpha, \\
 V_i &= -\bar{u}_i \sin \alpha + \bar{V} \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

Аналогичная связь для узла j:

$$U_j = \bar{u}_j \cos \alpha + \bar{V}_j \sin \alpha, \quad V_j = -\bar{u}_j \sin \alpha + \bar{V}_j \cos \alpha.$$

Углы поворота в обеих системах координат одинаковые, т.е. $\bar{q}_i = q_i$,
 $\bar{q}_j = q_j$.

В матричной форме имеем

$$|I| = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6.4)$$

6.1 Пример

Для рамы, показанной на рис.6.5, построить эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов. Определить максимальные нормальные напряжения, если поперечное сечение рамы – прямоугольного сечения ($h=10\text{см}$, $b=6\text{см}$).

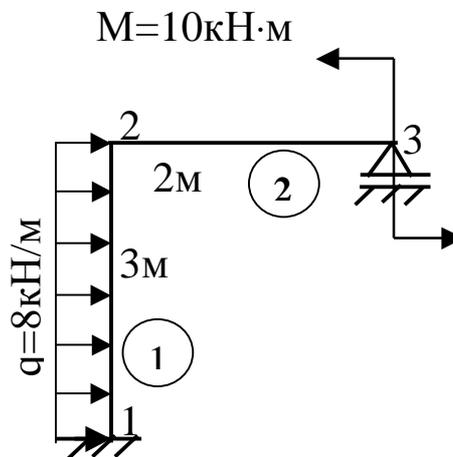


Рисунок 6.5

Решение. Нумеруем узлы и элементы. Определяем геометрические характеристики сечения (рис.6.6).

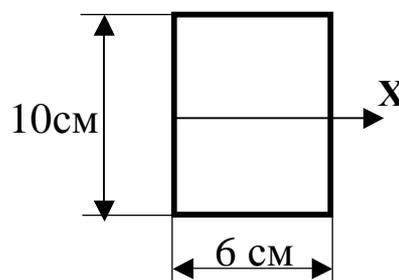


Рисунок 6.6 – Поперечное сечение рамы

$$F = 6 \cdot 10 = 60 \text{ см}^2 \quad , \quad I_x = 6 \cdot 10^3 : 12 = 500 \text{ см}^4.$$

Определяем жесткости элементов при растяжении и изгибе:

$$EF=2 \cdot 10^5 \cdot 60 \cdot 10^{-4}=1200\text{МН}, \quad EI_x=2 \cdot 10^5 \cdot 500=1\text{МН} \cdot \text{м}^2.$$

Переходим к вычислению матриц жесткости элементов.

1-й элемент (входят узлы 1-2): $\alpha = 90^\circ$.

Матрица направляющих косинусов для него

$$|I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$|K|_I^e = \begin{vmatrix} 400 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 \\ 0 & 0,44 & 0,67 & 0 & -0,44 & 0,67 \\ 0 & 0,67 & 1,33 & 0 & -0,67 & 0,67 \\ -400 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & -0,44 & -0,67 & 0 & 0,44 & -0,67 \\ 0 & 0,67 & 0,67 & 0 & -0,67 & 1,33 \end{vmatrix},$$

$$|\bar{K}|^e = |I|^T |K|^e |I| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 400 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 \\ 0 & 0,44 & 0,67 & 0 & -0,44 & 0,67 \\ 0 & 0,67 & 1,33 & 0 & -0,67 & 0,67 \\ -400 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & -0,44 & -0,67 & 0 & 0,44 & -0,67 \\ 0 & 0,67 & 0,67 & 0 & -0,67 & 1,33 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0,44 & 0 & -0,67 & -0,44 & 0 & -0,67 \\ 0 & 400 & 0 & 0 & -400 & 0 \\ -0,67 & 0 & 1,33 & 0,67 & 0 & 0,67 \\ -0,44 & 0 & 0,67 & 0,44 & 0 & 0,67 \\ 0 & -400 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ -0,67 & 0 & 0,67 & 0,67 & 0 & 1,33 \end{vmatrix}.$$

2-й элемент (узлы 2-3): $\alpha = 0^\circ$.

$$|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$|K|_{II}^e = \begin{vmatrix} 600 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 1,5 & 0 & -1,5 & 1,5 \\ 0 & 1,5 & 2 & 0 & -1,5 & 1 \\ -600 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & -1,5 & 0 & 1,5 & -1,5 \\ 0 & 1,5 & 1 & 0 & -1,5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Т.к. $|\lambda|$ представляет собой единичную матрицу, то $|\bar{K}|_{II}^e = |K|_{II}^e$.

Теперь формируем матрицу жесткости конструкции. В раме имеем три узла, каждый из которых имеет три степени свободы. Следовательно, матрица жесткости конструкции имеет размерность 9x9.

| | | | | | | | | |
|-------|------|-------|-------|------|-------|------|------|------|
| 0,44 | 0 | -0,67 | -0,44 | 0 | -0,67 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 400 | 0 | 0 | -400 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0,67 | 0 | 1,33 | 0,67 | 0 | 0,67 | 0 | 0 | 0 |
| -0,44 | 0 | 0,67 | 0,44 | 0 | 0,67 | -600 | 0 | 0 |
| | | | 600 | 0 | 0 | | | |
| 0 | -400 | 0 | 0 | 400 | 0 | 0 | -1,5 | 1,5 |
| | | | 0 | 1,5 | 1,5 | | | |
| -0,67 | 0 | 0,67 | 0,67 | 0 | 1,33 | 0 | -1,5 | 1 |
| | | | 0 | 1,5 | 2 | | | |
| 0 | 0 | 0 | -600 | 0 | 0 | 600 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1,5 | -1,5 | 0 | 1,5 | -1,5 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1,5 | 1 | 0 | -1,5 | 2 |

$$\left. \begin{matrix} \overline{u_1} \\ \overline{V_1} \\ \overline{q_1} \\ \overline{u_2} \\ \overline{V_2} \\ \overline{q_2} \\ \overline{u_3} \\ \overline{V_3} \\ \overline{q_3} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 0 \\ -6 \\ 12 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{matrix} \right\} \cdot 10^{-3}.$$

При записи вектора узловых сил учитываем, что на 1-й элемент действует распределенная нагрузка. Следовательно, в первом и втором узле должны быть приложены силы в горизонтальном направлении $q_1/2=8 \cdot 3/2=12$ кН и моменты $-q_1^2/12=-8 \cdot 3^2/12=-6$ кН·м и $q_1^2/12=8 \cdot 3^2/12=6$ кН·м.

В третьем узле приложен момент 15 кН·м. Так как коэффициенты матрицы жесткости имеют единицы измерения меганьютон (МН) и метр (м), то вектор узловых сил умножаем на 10^{-3} .

Граничные условия: $\overline{u_1} = 0$; $\overline{V_1} = 0$; $\overline{q_1} = 0$; $\overline{u_3} = 0$; $\overline{V_3} = 0$.

После учета граничных условий имеем:

$$\begin{vmatrix} 600,44 & 0 & 0,67 & 0 \\ 0 & 401,5 & 1,5 & 1,5 \\ 0,67 & 1,5 & 3,33 & 1 \\ 0 & 1,5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \overline{u_2} \\ \overline{V_2} \\ \overline{q_2} \\ \overline{q_3} \end{matrix} = \begin{matrix} 12 \\ 0 \\ 6 \\ 10 \end{matrix} \cdot 10^{-3}.$$

После решения системы уравнений получим:

$$\overline{u_2} = 19,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \quad \overline{V_2} = -19,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \quad \overline{q_2} = 353 \cdot 10^{-6}; \quad \overline{q_3} = 4858 \cdot 10^{-6}.$$

Определяем усилия на концах элементов по формуле

$$\begin{Bmatrix} P_{i\bar{z}} \\ P_{i\bar{v}} \\ M_i \\ P_{j\bar{z}} \\ P_{j\bar{v}} \\ M_j \end{Bmatrix} = |\bar{K}|^e \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{q}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{V}_j \\ \bar{q}_j \end{Bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{усилия} \\ \text{в} \\ \text{узлах} \\ \text{элемента} \\ \text{от} \\ \text{распределенной} \\ \text{нагрузки} \end{array} \right\}$$

1-й элемент:

$$\begin{Bmatrix} P_{1\bar{z}} \\ P_{1\bar{v}} \\ M_1 \\ P_{2\bar{z}} \\ P_{2\bar{v}} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0,44 & 0 & 0,67 & -0,44 & 0 & -0,67 \\ 0 & 400 & 0 & 0 & -400 & 0 \\ -0,67 & 0 & 1,33 & 0,67 & 0 & 0,67 \\ -0,44 & 0 & 0,67 & 0,44 & 0 & 0,67 \\ 0 & -400 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ -0,67 & 0 & 0,67 & 0,67 & 0 & 1,33 \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19,6 \\ -19,4 \\ 353,5 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$-\begin{Bmatrix} 12 \\ 0 \\ -6 \\ 12 \\ 0 \\ 6 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -12,25 \\ 7,7 \\ 6,2 \\ -11,75 \\ -7,7 \\ -5,5 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Получим значения вектора узловых нагрузок по концам элемента (силы – в меганьютонах (МН), моменты – в меганьютонах на метр (МН·м)).

Проверяем равновесие элемента (см. рис. 6.6, а):

$$\sum P_z = 0 \quad -12,2 - 11,8 + 3 \cdot 8 = 0; \quad -24 + 24 = 0,$$

$$\sum P_v = 0 \quad -7,7 + 7,7 = 0,$$

$$\sum M_c = 0 \quad -5,5 - 8 \cdot 3 \cdot 1,5 + 11,8 \cdot 3 + 6,2 = 0; \quad -41,5 + 41,6 = 0.$$

Строим эпюры продольных (рис.6.6, б) сил, поперечных сил (рис.6.6, в) и эпюру изгибающих моментов (рис.6.6, г) и

$$M_K = -11,8 \cdot 1,475 + 5,5 + 8 \cdot 1,475 \cdot 1,475/2 = -3,1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

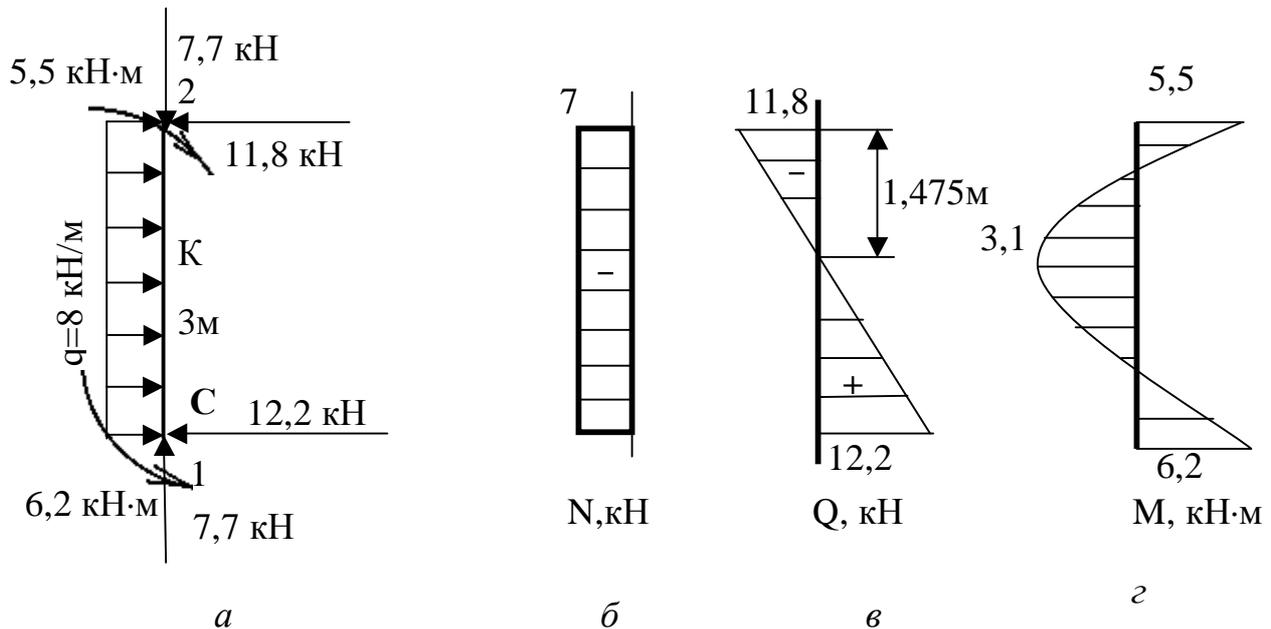


Рисунок 6.6 – Элемент 1: а – элемент с нагрузками; б – эпюра продольных сил; в – эпюра поперечных сил; г – эпюра изгибающих моментов

2-й элемент:

$$\begin{bmatrix} P_{2z}^- \\ P_{2V}^- \\ M_2 \\ P_{3z}^- \\ P_{3V}^- \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 1,5 & 0 & -1,5 & 1,5 \\ 0 & 1,5 & 2 & 0 & -1,5 & 1 \\ -600 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & -1,5 & 0 & 1,5 & -1,5 \\ 0 & 1,5 & 1 & 0 & -1,5 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = \begin{bmatrix} 196 \\ -194 \\ 3535 \\ 0 \\ 0 \\ 4858 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = \begin{bmatrix} 1175 \\ 7,7 \\ 5,5 \\ -1175 \\ -7,7 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot 10^3.$$

Проверяем равновесие второго элемента:

$$\begin{aligned} \sum P_z &= 0 & -11,75 + 11,75 &= 0, \\ \sum P_V &= 0 & 7,7 - 7,7 &= 0, \\ \sum M_c &= 0 & 5,5 - 7,7 \cdot 2 + 10 &= 0, \\ & & 15,5 - 15,4 &\approx 0. \end{aligned}$$

Состыковав эпюры по всем элементам (см. рис.6.6 и рис.6.7), получаем окончательные эпюры (рис.6.8).

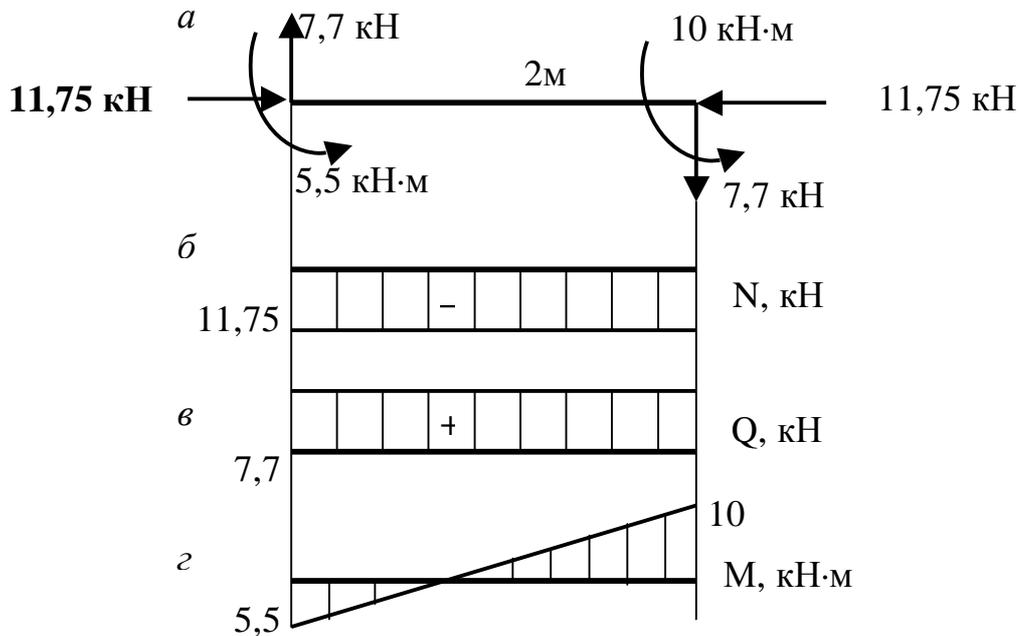


Рисунок 6.7 – Элемент 2: а – элемент 2 с нагрузками; б – эпюра продольных сил; в – эпюра поперечных сил; г – эпюра изгибающих моментов

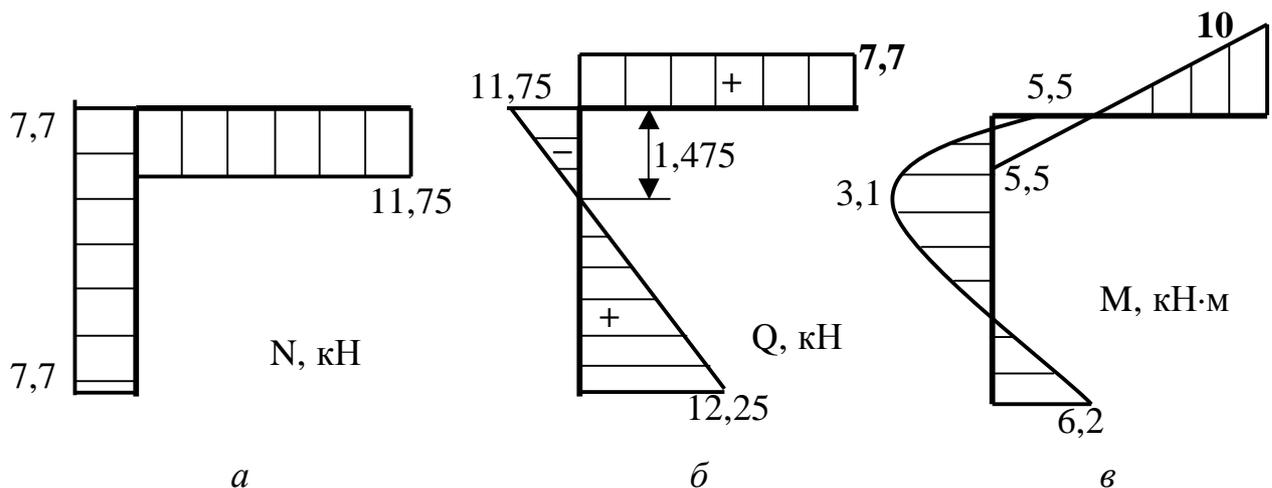


Рисунок 6.8 – Окончательные эпюры для рамы: а – эпюра продольных сил; б – эпюра поперечных сил; в – эпюра изгибающих моментов

Определяем максимальные нормальные напряжения.
 Опасным является сечение, где $M_{\max}=10$ кН·м.
 В этом сечении $N=7,7$ кН.

$$s = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_x} = \frac{7,7 \cdot 10^{-3}}{60 \cdot 10^{-4}} + \frac{10 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-6}} = 102 \text{ МПа,}$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 10^2}{6} = 100 \text{ см}^3.$$

7 РАСЧЁТ СТЕРЖНЕЙ, ИСПЫТЫВАЮЩИХ СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ

7.1 Основные зависимости сопротивления материалов при сложном изгибе

Сложным изгибом называется вид нагружения, при котором силы, изгибающие стержень, действуют в различных силовых плоскостях (рис.7.1).

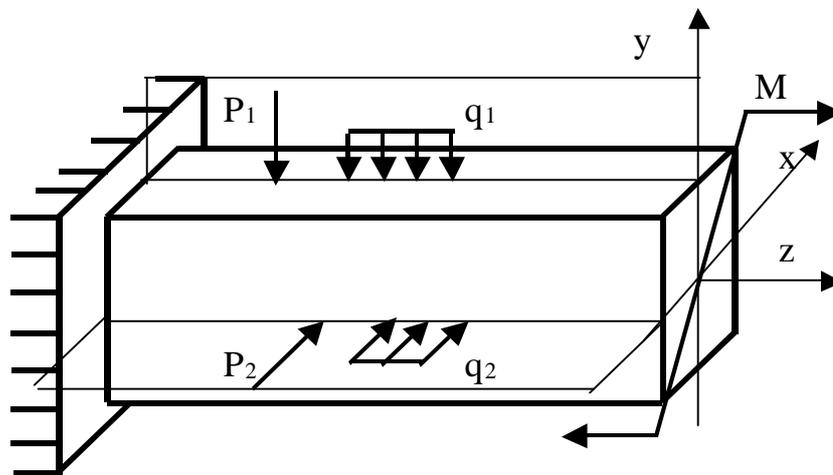


Рисунок 7.1 – Схема стержня, испытывающего сложный изгиб

Сложный изгиб следует рассматривать как комбинацию двух плоских изгибов. В произвольном поперечном сечении возникают две поперечные силы - Q_x и Q_y и два изгибающих момента - M_x и M_y (рис.7.2).

Как правило, касательные напряжения, возникающие от поперечных сил, незначительные – ими пренебрегаем.

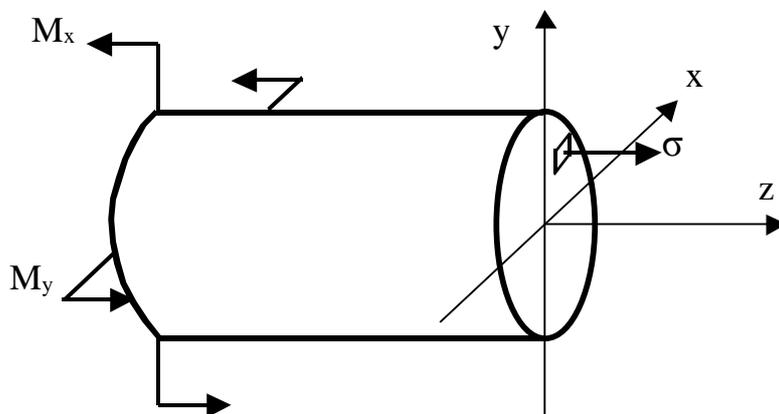


Рисунок 7.2

Нормальные напряжения в произвольной точке сечения равны

$$S = \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y}, \quad (7.1)$$

где M_x и M_y - изгибающие моменты относительно осей x и y ;

J_x и J_y - моменты инерции сечения относительно осей x и y ;

x и y - координаты точки, в которой определяются напряжения, относительно главных центральных осей.

Условие прочности для стержней с бисимметричным сечением и выступающими углами (прямоугольника, двутавра, коробчатого сечения) имеет вид

$$S_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [S], \quad (7.2)$$

где W_x и W_y - моменты сопротивления сечения относительно осей x и y .

Для стержня с горизонтальным сечением определяется положение нейтральной оси по формуле

$$\operatorname{tg} b = -\frac{M_x J_x}{M_y J_y} = -\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} a. \quad (7.3)$$

Находится наиболее удалённая точка (рис.7.3), для которой условие прочности имеет вид

$$S_{\max} = \frac{M_x y_A}{J_x} + \frac{M_y x_A}{J_y} \leq [S]. \quad (7.4)$$

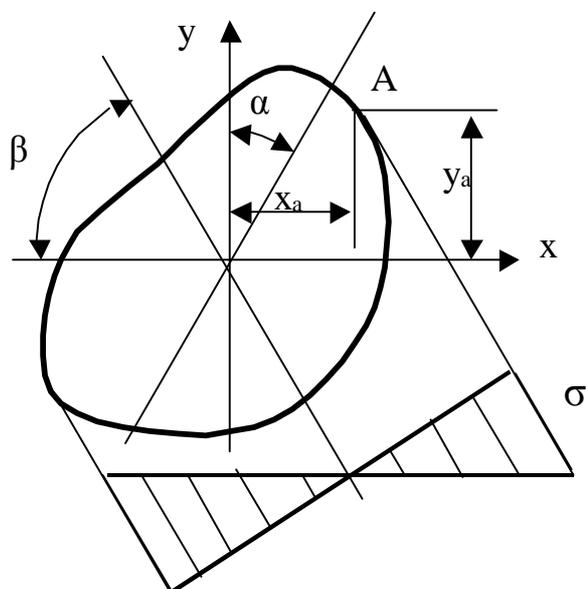


Рисунок 7.3 – Эпюра напряжений при сложном изгибе

7.2 Матрица жёсткости конечного элемента при сложном изгибе

При сложном изгибе (рис. 7.4) любая нагрузка раскладывается по главным силовым плоскостям yz и xz .

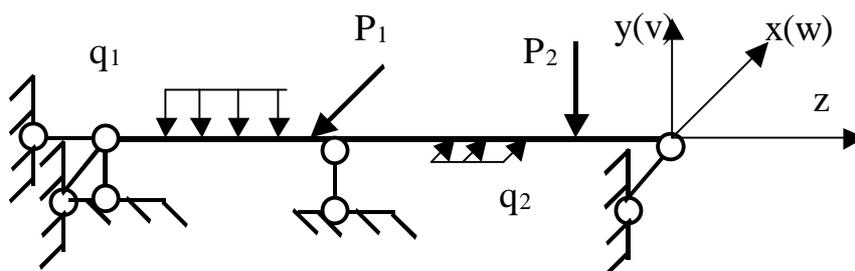


Рисунок 7.4

В этом случае вектор перемещения узлов и матрица жёсткости элемента представляют собой соответственно комбинацию векторов перемещения и матриц жёсткости при двух плоских изгибах.

$$|K|^1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{12 \times EJ_x}{l^3} & 0 & \frac{6 \times EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{-12EJ_x}{l^3} & 0 & \frac{6 \times EJ_x}{l^2} & 0 \\ \hline 0 & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{-12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6 \times EJ_x}{l^2} \\ \hline \frac{6EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{-6 \times EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_x}{l} & 0 \\ \hline 0 & \frac{6EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{l} & 0 & \frac{-6EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_x}{l} \\ \hline \frac{-12EJ_x}{l^3} & 0 & \frac{-6EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{12EJ_x}{l^3} & 0 & \frac{-6EJ_x}{l^2} & 0 \\ \hline 0 & \frac{-12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{-6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{-6EJ_y}{l^2} \\ \hline \frac{6EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_x}{l} & 0 & \frac{-6EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_x}{l^2} & 0 \\ \hline 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 & \frac{-6EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{l^2} \\ \hline \end{array} \quad (7.5)$$

Так как каждый узел имеет четыре степени свободы, то вектор перемещения узла имеет четыре составляющие, а матрица жёсткости элемента будет 8x8.

$$\{d\}_i^1 = \begin{Bmatrix} V_i \\ w_i \\ q_{xi} \\ q_{yxi} \end{Bmatrix}. \quad (7.6)$$

7.3 Пример

Для стержня, показанного на рис.7.5, с помощью МКЭ построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Определить σ_{\max} .

Решение. Нумеруем узлы и элементы.

Вычисляем матрицы жёсткости элементов (выражения (7.7) и (7.8)).

$$|K|_1^1 = E \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0,44J_x & 0 & 0,67J_x & 0 & -0,44J_x & 0 & 0,67J_x & 0 \\ \hline 0 & 0,44J_y & 0 & 0,67J_y & 0 & -0,44J_y & 0 & 0,67J_y \\ \hline 0,67J_x & 0 & 1,33J_x & 0 & -0,67J_x & 0 & 0,67J_x & 0 \\ \hline 0 & 0,67J_y & 0 & 1,33J_y & 0 & -0,67J_y & 0 & 0,67J_y \\ \hline -0,44J_x & 0 & -0,67J_x & 0 & 0,44J_x & 0 & -0,67J_x & 0 \\ \hline 0 & -0,44J_y & 0 & -0,67J_y & 0 & 0,67J_y & 0 & -0,67J_y \\ \hline 0,67J_x & 0 & 0,67J_x & 0 & -0,67J_x & 0 & 1,33J_x & 0 \\ \hline 0 & 0,67J_y & 0 & 0,67J_y & 0 & -0,67J_y & 0 & 1,33J_y \\ \hline \end{array} \quad (7.7)$$

$$|K|_2^1 = E \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1,5J_x & 0 & 1,5J_x & 0 & -1,5J_x & 0 & 1,5J_x & 0 \\ \hline 0 & 1,5J_y & 0 & 1,5J_y & 0 & -1,5J_y & 0 & 1,5J_y \\ \hline 1,5J_x & 0 & 2J_x & 0 & -1,5J_x & 0 & J_x & 0 \\ \hline 0 & 1,5J_y & 0 & 2J_y & 0 & -1,5J_y & 0 & J_y \\ \hline -1,5J_x & 0 & -1,5J_x & 0 & 1,5J_x & 0 & -1,5J_x & 0 \\ \hline 0 & -1,5J_y & 0 & -1,5J_y & 0 & 1,5J_y & 0 & -1,5J_y \\ \hline 1,5J_x & 0 & J_x & 0 & -1,5J_x & 0 & 2J_x & 0 \\ \hline 0 & 1,5J_y & 0 & J_y & 0 & -1,5J_y & 0 & 2J_y \\ \hline \end{array} \quad (7.8)$$

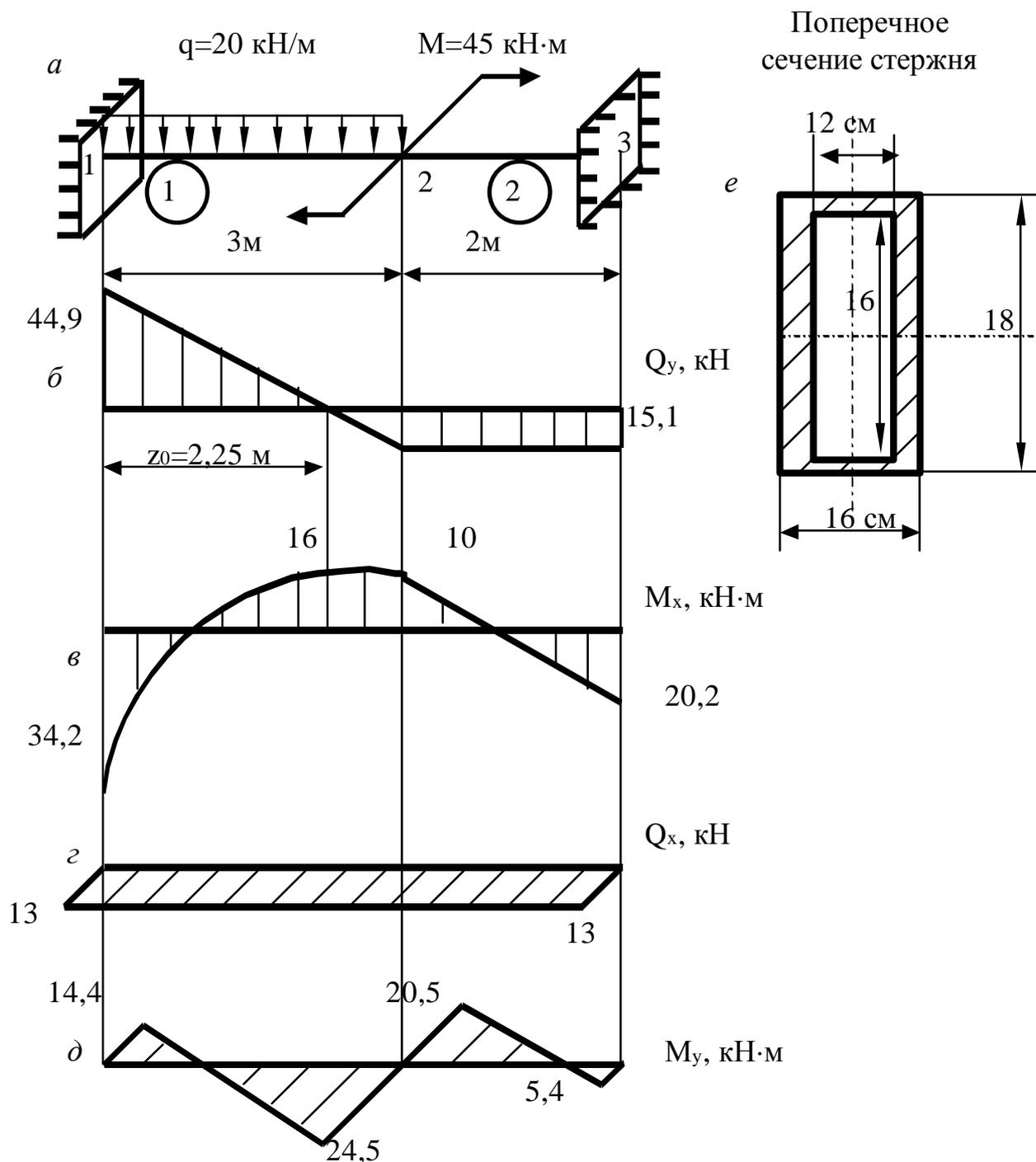


Рисунок 7.5 – Эпюры внутренних усилий для стержня, испытывающего сложный изгиб

Вычисляем J_x и J_y :
$$J_x = \frac{16 \cdot 18^3}{12} - \frac{16^3 \cdot 12}{12} = 3680 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \frac{18 \cdot 16^3}{12} - \frac{12^3 \cdot 16}{12} = 3840 \text{ см}^4.$$

Вычисляем моменты сопротивления W_x и W_y :

$$W_x = \frac{3680}{9} = 409 \text{ см}^3; \quad W_y = \frac{3840}{8} = 480 \text{ см}^3.$$

Формируем матрицу жёсткости конструкции (7.9).

Имеем три узла, каждый узел имеет четыре степени свободы, значит, размерность матрицы жёсткости 12x12. В вектор узловых нагрузок записываем следующие значения: на первый элемент действует распределённая нагрузка, от неё - узловые нагрузки:

$$-\frac{ql}{2} = -\frac{20 \cdot 3}{2} = -30 \text{ кН}, \quad -\frac{ql^2}{2} = -\frac{20 \cdot 9}{12} = -15 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$-\frac{ql}{2} = -\frac{20 \cdot 3}{2} = -30 \text{ кН}, \quad \frac{ql^2}{2} = \frac{20 \cdot 9}{12} = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Они запишутся в первую, третью, пятую и седьмую строки.

Во втором узле приложен сосредоточенный момент в горизонтальной плоскости – его значение заносим в восьмую строку. В остальных строках ставим нули.

Таким образом, получили матрицу жёсткости конструкции (7.9).

Теперь учитываем граничные условия:

$$V_1=0, \quad W_1=0, \quad \Theta_{x1}=0, \quad \Theta_{y1}=0, \quad V_3=0, \quad W_3=0, \quad \Theta_{x3}=0, \quad \Theta_{y3}=0.$$

После их учёта получаем систему уравнений (7.10),

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--|
| E | 0,44 J _x | 0 | 0,67 J _x | 0 | 0,44 J _x | 0 | 0,67 J _x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\left. \begin{array}{l} \mathbf{V}_1 \\ w_{11} \\ J_{x_1} \\ q_{y_1} \\ \mathbf{V}_2 \\ w_2 \\ q_{x_2} \\ q_{y_2} \\ \mathbf{V}_3 \\ w_3 \\ q_{x_3} \\ q_{y_3} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -30 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ 7,5 \\ -45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (7.9)$ |
| | 0 | 0,44 J _y | 0 | 0,67 J _y | 0 | -0,44J _y | 0 | 0,67 J _y | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 0,67 J _x | 0 | 1,33 J _x | 0 | 0,67 J _x | 0 | 0,67 J _x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 0 | 0,67 J _y | 0 | 1,33 J _y | 0 | 0,67 J _y | 0 | 0,67 J _y | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | -0,44J _x | 0 | -0,67J _x | 0 | 0,44 J _x | 0 | 0,67 J _x | 0 | 1,5 J _x | 0 | 1,5 J _x | 0 | |
| | 0 | -0,44J _y | 0 | -0,67J _y | 0 | 0,44 J _y | 0 | 0,67 J _y | 0 | -1,5 J _y | 0 | 1,5 J _y | |
| | 0,67 J _x | 0 | 0,67 J _x | 0 | -0,67J _x | 0 | 1,33 J _x | 0 | -1,5 J _x | 0 | J _x | 0 | |
| | 0 | 0,67 J _y | | 0,67 J _y | 0 | -0,67J _y | 0 | 1,33J _y | 0 | 1,5 J _y | 0 | J _y | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | -1,5 J _x | 0 | -1,5 J _x | 0 | 1,5 J _x | 0 | -1,5 J _x | 0 | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | -1,5 J _y | 0 | -1,5 J _y | 0 | 1,5 J _y | 0 | -1,5 J _y | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,5 J _x | 0 | J _x | 0 | -1,5 J _x | 0 | 2J _x | 0 | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,5 J _y | 0 | J _y | 0 | -1,5 J _y | 0 | 2J _y | |

$$\mathbf{E} \begin{bmatrix} 1,94 J_x & 0 & 0,83 J_x & 0 \\ 0 & 1,94 J_y & 0 & 0,83 J_y \\ 0,83 J_x & 0 & 3,33 J_x & 0 \\ 0 & 0,83 J_y & 0 & 3,33 J_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ w_2 \\ q_{x2} \\ q_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -30 \\ 0 \\ 15 \\ -45 \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

Её решение даёт следующие значения:

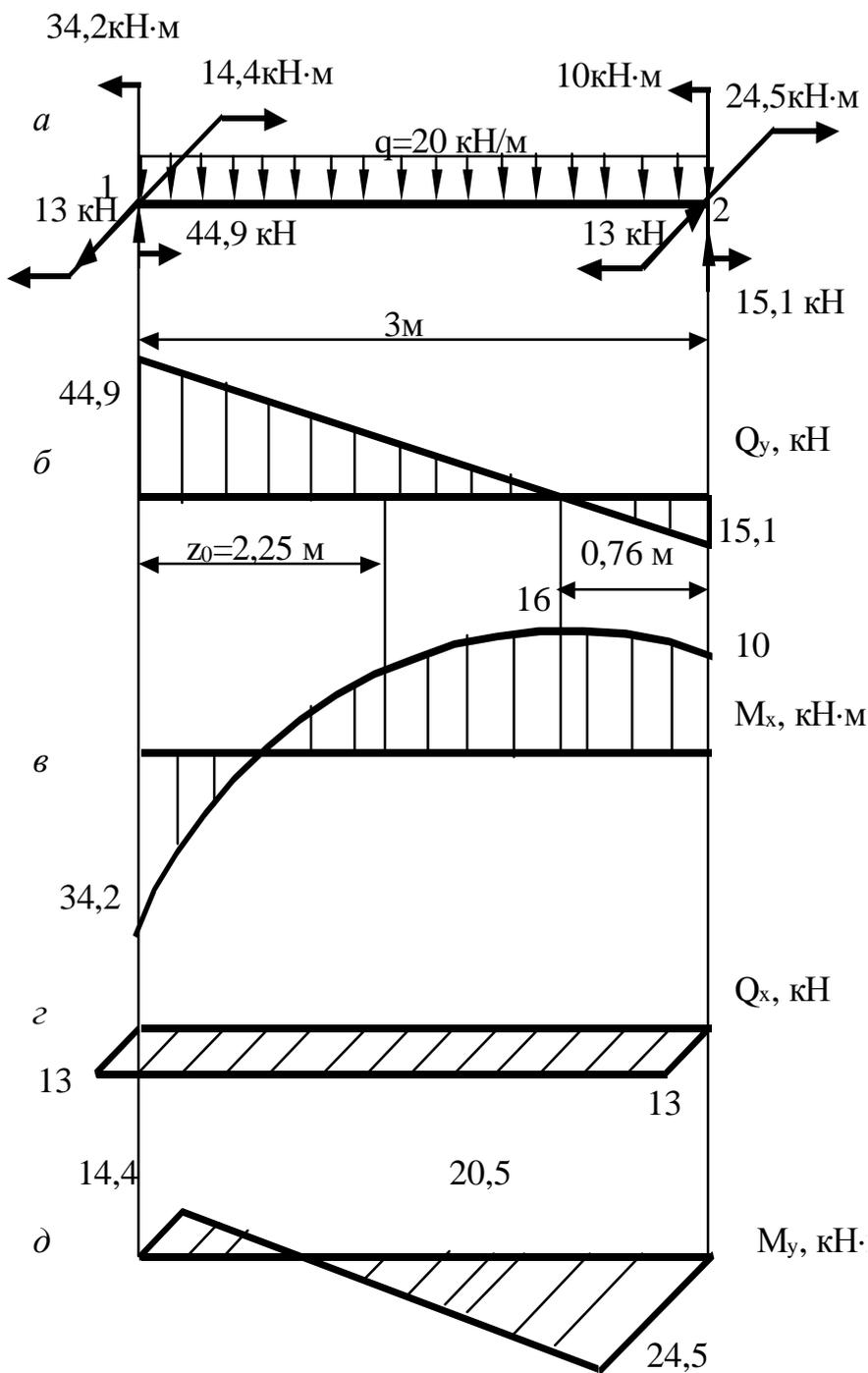
$$V_2 = -\frac{19,4}{EJ_x}, \quad w_2 = \frac{15,1}{EJ_y}, \quad q_{x2} = \frac{9,4}{EJ_x}, \quad q_{y2} = -\frac{15,1}{EJ_y}.$$

Вычисляем векторы узловых нагрузок на концах элементов.

1-й элемент:

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \end{Bmatrix} = \mathbf{K}_{|I}^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -19,4/EJ_x \\ 15,1/EJ_y \\ 9,4/EJ_x \\ -15,1/EJ_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -30 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 44,9 \\ -13 \\ 34,2 \\ -14,4 \\ 15,1 \\ 13 \\ 10 \\ -24,5 \end{Bmatrix}.$$

Полученные нагрузки прикладываем к узлам первого элемента (рис.7.6).



Проверим его равновесие:

$$\sum P_y = 0.$$

$$44,9 + 15,1 - 20 \cdot 3 = 0;$$

$$60 - 60 = 0;$$

$$\sum P_x = 0. \quad -13 + 13 = 0;$$

$$\sum M_x = 0.$$

$$34,2 - 44,9 \cdot 3 +$$

$$+ 20 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10 = 0;$$

$$34,2 - 134,7 + 90 + 10 \approx 0;$$

$$-134,7 + 134,2 \approx 0.$$

Погрешность составляет 0,38%, что допустимо.

$$\sum M_y = 0.$$

$$-14,4 + 13 \cdot 3 - 24,5 \approx 0;$$

$$-38,9 + 39 \approx 0.$$

Погрешность составляет 0,25%, что допустимо.

Рисунок 7.6 – Эпюры внутренних усилий для 1-го элемента

2^й элемент:

$$\begin{Bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \\ M_{3x} \\ M_{3y} \end{Bmatrix} = |K|_I^1 \begin{Bmatrix} -19,4/EJ_x \\ 15,1/EJ_y \\ 9,4/EJ_x \\ -15,1/EJ_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -30 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15,1 \\ -13 \\ -10 \\ -20,5 \\ 15,1 \\ 13 \\ 20,2 \\ -5,4 \end{Bmatrix}.$$

Прикладываем найденные нагрузки по узлам элемента 2 (рис. 7.7).

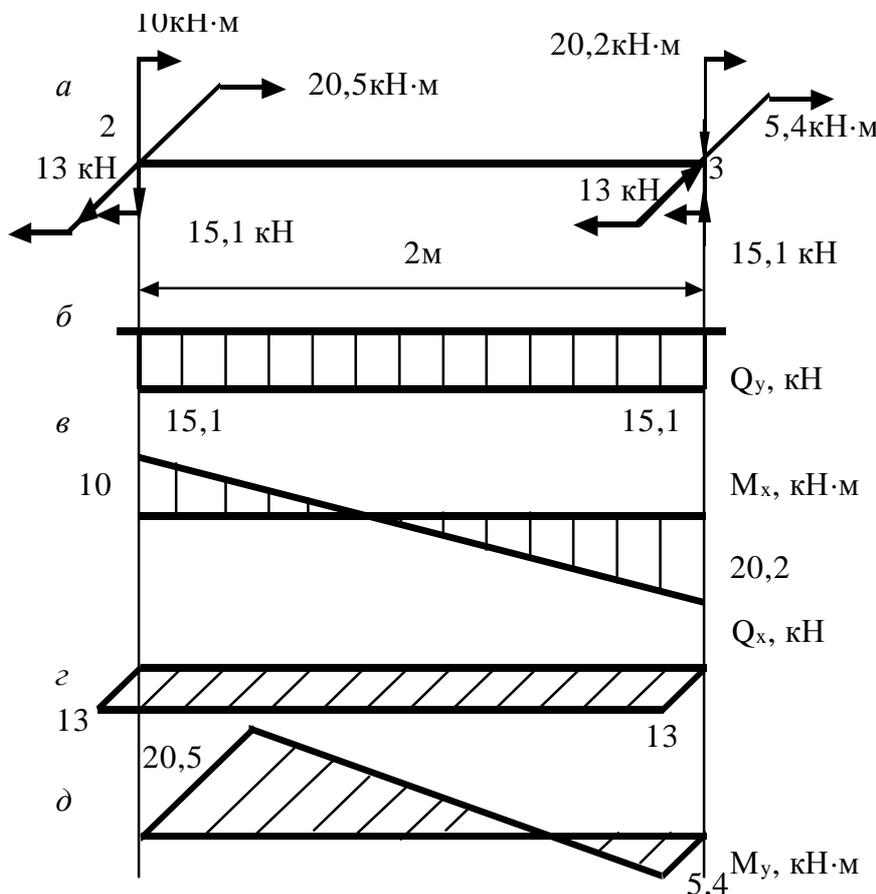


Рисунок 7.7 – Эпюры внутренних усилий для 2-го элемента

Проверяем уравнения

равновесия.

$$\sum P_y = 0.$$

$$-15,1 + 15,1 = 0;$$

$$\sum P_x = 0.$$

$$-13 + 13 = 0;$$

$$\sum M_x = 0.$$

$$15,1 \cdot 2 - 10 - 20,2 = 0;$$

$$30,2 - 30,2 = 0;$$

$$\sum M_y = 0.$$

$$13 \cdot 2 - 20,5 - 5,4 = 0;$$

$$26 - 25,9 = 0.$$

Все уравнения удовлетворены.

Стыкуем эпюры по участкам, получаем окончательные эпюры, показанные на рисунке 7.7.

Определяем σ_{\max} .

Опасными явля-

ются сечения, где $M_{xI} = 34,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{yI} = 14,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$, и $M_{xII} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{yII} = 24,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

$$S_{\max I} = \frac{M_{xI}}{W_x} + \frac{M_{yI}}{W_y} = \frac{34,2 \cdot 10^{-3}}{409 \cdot 10^{-6}} + \frac{14,4 \cdot 10^{-3}}{480 \cdot 10^{-6}} = 83,6 + 30 = 113,6 \text{ МПа},$$

$$S_{\max II} = \frac{M_{xII}}{W_x} + \frac{M_{yII}}{W_y} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{409 \cdot 10^{-6}} + \frac{24,5 \cdot 10^{-3}}{480 \cdot 10^{-6}} = 24,4 + 51 = 85,4 \text{ МПа}.$$

Как видим, опасным является первое сечение.

8 РАСЧЁТ СТЕРЖНЕЙ, ИСПЫТЫВАЮЩИХ СЛОЖНЫЙ ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

8.1 Основные зависимости при изгибе с кручением

При изгибе с кручением (рис.8.1) в произвольном сечении вала возникают три момента $M_{\text{верт}}$, $M_{\text{гор}}$ и $M_{\text{кр}}$ и две поперечные силы $Q_{\text{верт}}$, $Q_{\text{гор}}$. Касательные напряжения, возникающие от поперечных сил, незначительные - ими пренебрегаем. От моментов (рис.8.2) определяется расчётный момент:

- по третьей теории прочности

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{верт}}^2 + M_{\text{гор}}^2 + M_{\text{кр}}^2} ;$$

- по четвёртой теории прочности

$$M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{верт}}^2 + M_{\text{гор}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2} .$$

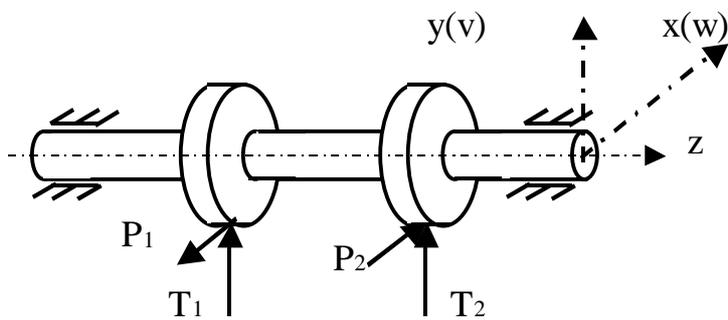


Рисунок 8.1 - Схема вала, испытывающего изгиб с кручением

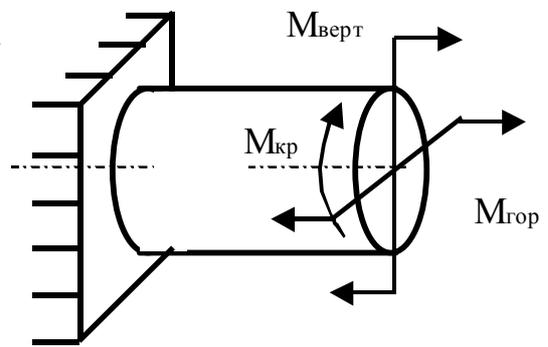


Рисунок 8.2 - Моменты, возникающие в сечениях вала

Условие прочности имеет вид:

$$S_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_0} \leq [S], \quad (8.1)$$

где W_0 – осевой момент сопротивления вала:

$$W_0 = \frac{\rho D^3}{32} \approx 0,1 \cdot D^3 \quad \text{- для сплошного вала;}$$

$$W_0 = 0,1 \cdot D^3 (1 - I^4) \quad \text{- для кольцевого вала.}$$

Здесь $I = \frac{d}{D},$

где d – внутренний диаметр кольцевого вала.

8.2 Матрица жёсткости конечного элемента при изгибе с кручением

Изгиб с кручением можно рассматривать как комбинацию сложного изгиба и кручения. В этом случае каждый узел имеет пять степеней свободы, им соответствуют 5 перемещений узла (рис. 8.3) и 5 внутренних усилий (рис. 8.4). Вектор перемещений i -го узла имеет вид:

$$\{d\}_i = \begin{Bmatrix} V_i \\ w_i \\ q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \end{Bmatrix}. \quad (8.2)$$

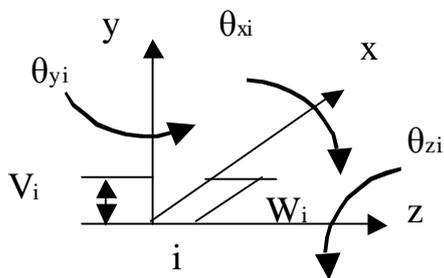


Рисунок 8.3 - Положительные направления перемещений

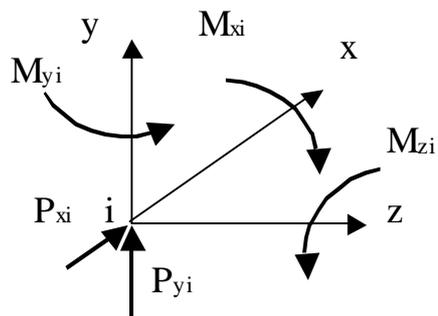


Рисунок 8.4 - Положительные направления узловых усилий

Матрица жёсткости конечного элемента имеет размерность 10x10. Так как осевые моменты инерции $J_x = J_y = J_0$, то матрица жёсткости запишется так:

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix}
 \frac{12EJ_0}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12EJ_0}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EJ_0}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12EJ_0}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_0}{l^2} & 0 \\
 \frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_0}{l} & 0 & 0 & -\frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_0}{l} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_0}{l} & 0 & 0 & \frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_0}{l} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_p}{l} \\
 -\frac{12EJ_0}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & 0 & \frac{12EJ_0}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EJ_0}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & 0 & \frac{12EJ_0}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_0}{l^2} & 0 \\
 \frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_0}{l} & 0 & 0 & -\frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_0}{l} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_0}{l} & 0 & 0 & -\frac{6EJ_0}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_0}{l} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_p}{l}
 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

8.3 Пример

Для стержня, показанного на рис.8.5, а, с помощью МКЭ построить эпюры $M_{верт}$, $M_{гор}$ и $M_{кр}$. Определить диаметр вала по IV-ой теории прочности, если $[\sigma]=120$ МПа.

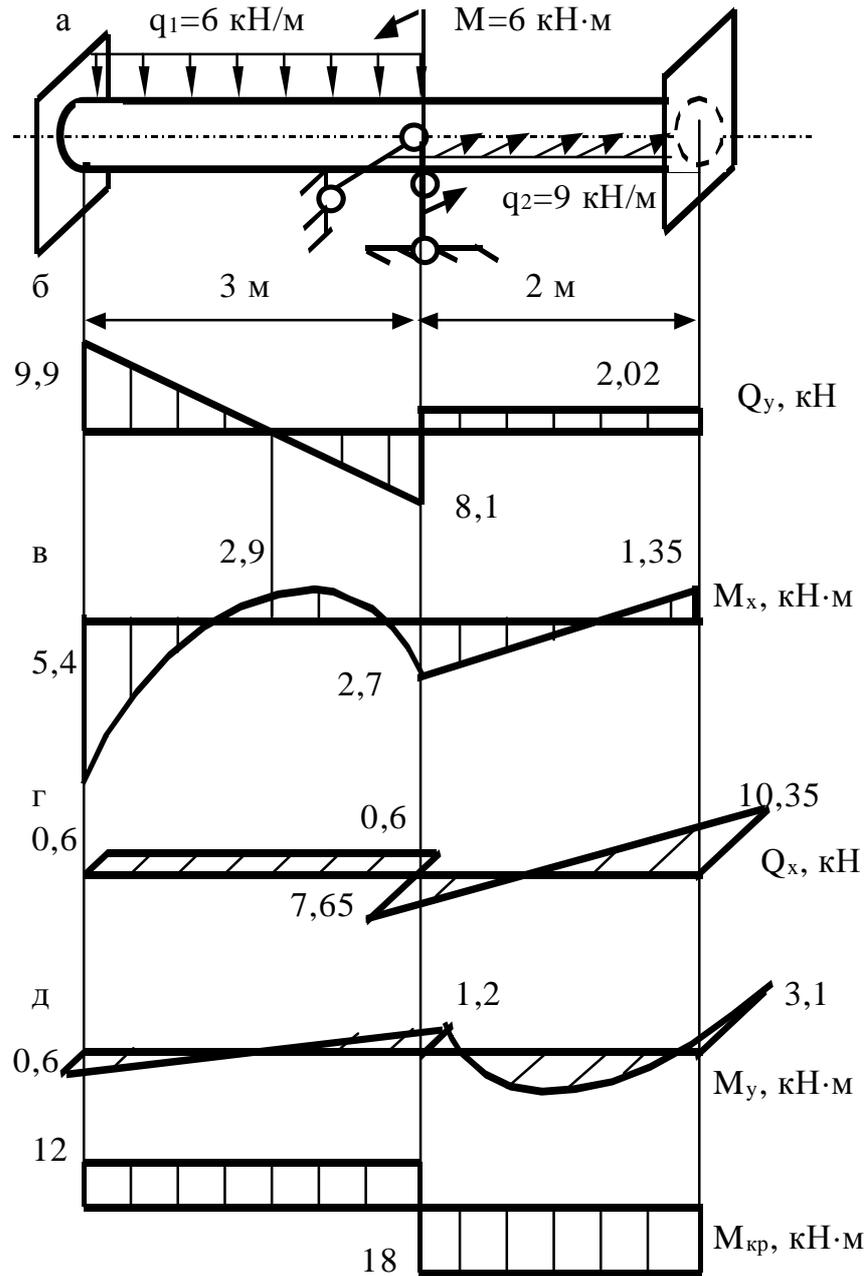


Рисунок 8.5 – Стержень, испытывающий изгиб с кручением, и его окончательные эпюры

Решение. Нумеруем узлы и элементы.

Вычисляем матрицу жёсткости каждого элемента (выражения (8.4) и (8.5)), при этом выносим общий множитель EJ_0 . Коэффициент от кручения GJ_p необходимо разделить на EJ_0 , он равен

$$\frac{GJ_p}{EJ_0} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 2J_0}{2 \cdot 10^5 \cdot J_0} = 0,8.$$

Формируем матрицу жесткости всей конструкции (8.6).

В вектор узловых нагрузок заносим значения от $q_1=6$ кН/м:

$$\begin{aligned} - \text{1-я строка} & \quad -\frac{q_1 \mathbf{l}_1}{2} = -\frac{6 \cdot 3}{2} = -9 \text{кН}; \\ - \text{3-я строка} & \quad -\frac{q_1 \mathbf{l}_1^2}{12} = -\frac{6 \cdot 3^2}{12} = -4,5 \text{кН} \cdot \text{м}; \\ - \text{6-я строка} & \quad -\frac{q_1 \mathbf{l}_1}{2} = -\frac{6 \cdot 3}{2} = -9 \text{кН}; \\ - \text{8-я строка} & \quad \frac{q_1 \mathbf{l}_1^2}{12} = \frac{6 \cdot 3^2}{12} = 4,5 \text{кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

от нагрузки $q_2=9$ кН/м:

$$\begin{aligned} - \text{7-я строка} & \quad \frac{q_2 \mathbf{l}_2}{2} = \frac{9 \cdot 2}{2} = 9 \text{кН}; \\ - \text{9-я строка} & \quad \frac{q_2 \mathbf{l}_2^2}{12} = \frac{9 \cdot 2^2}{12} = 3 \text{кН} \cdot \text{м}; \\ - \text{12-я строка} & \quad \frac{q_2 \mathbf{l}_2}{2} = \frac{9 \cdot 2}{2} = 9 \text{кН}; \\ - \text{14-я строка} & \quad -\frac{q_2 \mathbf{l}_2^2}{12} = -\frac{9 \cdot 2^2}{12} = -3 \text{кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

От $M = 30$ кН·м в 10-ю строку заносим 30 кН·м.

$$|K|_I = EJ_0 \begin{matrix} \begin{matrix} 0,44 & 0 & 0,67 & 0 & 0 & -0,44 & 0 & 0,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0,44 & 0 & 0,67 & 0 & 0 & -0,44 & 0 & 0,67 & 0 \\ 0,67 & 0 & 1,33 & 0 & 0 & -0,67 & 0 & 0,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0,67 & 0 & 1,33 & 0 & 0 & -0,67 & 0 & 0,67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,27 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,27 \\ -0,44 & 0 & -0,67 & 0 & 0 & 0,44 & 0 & -0,67 & 0 & 0 \\ 0 & -0,44 & 0 & -0,67 & 0 & 0 & 0,44 & 0 & -0,67 & 0 \\ 0,67 & 0 & 0,67 & 0 & 0 & -0,67 & 0 & 1,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0,67 & 0 & 0,67 & 0 & 0 & -0,67 & 0 & 1,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,27 \end{matrix} \end{matrix} \quad (8.4)$$

$$|K|_{II}^e = EJ_0 \begin{matrix} \begin{matrix} 1,5 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & -1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & -1,5 & 0 \\ 1,5 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4 \\ -1,5 & 0 & -1,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & -1,5 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & 0 & -1,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & -1,5 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \end{matrix} \end{matrix} \quad (8.5)$$

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| 0,44 | 0 | 0,67 | 0 | 0 | -0,44 | 0 | 0,67 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0,44 | 0 | 0,67 | 0 | 0 | -0,44 | 0 | 0,67 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,67 | 0 | 1,33 | 0 | 0 | -0,67 | 0 | 0,67 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0,67 | 0 | 1,33 | 0 | 0 | -0,67 | 0 | 0,67 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0,27 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2,7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0,44 | 0 | -0,67 | 0 | 0 | 0,44 | 0 | -0,67 | 0 | 0 | -1,5 | 0 | 1,5 | 0 | 0 |
| 0 | -0,44 | 0 | -0,67 | 0 | 1,5 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1,5 | 0 | 1,5 |
| 0,67 | 0 | 0,67 | 0 | 0 | 0 | 0,44 | 0 | -0,67 | 0 | 0 | -1,5 | 0 | 1,5 | 0 |
| 0 | 0,67 | 0 | 0,67 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,5 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -0,27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0,4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1,5 | 0 | -1,5 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | -1,5 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1,5 | 0 | -1,5 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | -1,5 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1,5 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,5 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1,5 | 0 | 2 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 |

$$\left. \begin{matrix} V_1 \\ w_1 \\ q_{x1} \\ q_{y1} \\ q_{z1} \\ V_{x2} \\ w_{y2} \\ q_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{z2} \\ V_3 \\ w_3 \\ q_{x3} \\ q_{y3} \\ q_{z3} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -9 \\ 0 \\ -4,5 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ 9 \\ 4,5 \\ 3 \\ 30 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (8.6)$$

Граничные условия:

$$V_1 = 0; w_1 = 0; q_{y1} = 0; q_{x1} = 0; q_{z1} = 0;$$

$$V_2 = 0; w_2 = 0; V_3 = 0; w_3 = 0; q_{x3} = 0; q_{y3} = 0; q_{z3} = 0.$$

После учёта граничных условий в выражении (8.6) получим систему уравнений

$$EJ_0 = \begin{vmatrix} 3,33 & 0 & 0 \\ 0 & 3,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0,67 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} q_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4,5 \\ 3 \\ 30 \end{Bmatrix}.$$

Её решение:

$$q_{x2} = \frac{1,35}{EJ_0}; q_{y2} = \frac{0,9}{EJ_0}; q_{z2} = \frac{45}{EJ_0}.$$

Определяем усилия по узлам элементов, прикладываем эти усилия к соответствующим элементам и строим эпюры внутренних усилий (рис. 8.5 и 8.6).

1-й элемент:

$$\begin{Bmatrix} P_{y1} \\ P_{x1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ P_{y2} \\ P_{x2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = |K|_I^1 \begin{Bmatrix} V_1 \\ w_1 \\ q_{x1} \\ q_{y1} \\ q_{z1} \\ V_2 \\ w_2 \\ q_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_1 \mathbf{1}/2 \\ 0 \\ -q_1 \mathbf{1}^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ -q_1 \mathbf{1}/2 \\ 0 \\ -q_1 \mathbf{1}^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = |K|_I^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,35/EJ_0 \\ 0,9/EJ_0 \\ 45/EJ_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9 \\ 0 \\ -4,5 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 4,5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9,9 \\ 0,6 \\ 5,4 \\ 0,6 \\ -1,2 \\ 8,1 \\ -0,6 \\ -2,7 \\ 1,2 \\ 12 \end{Bmatrix}.$$

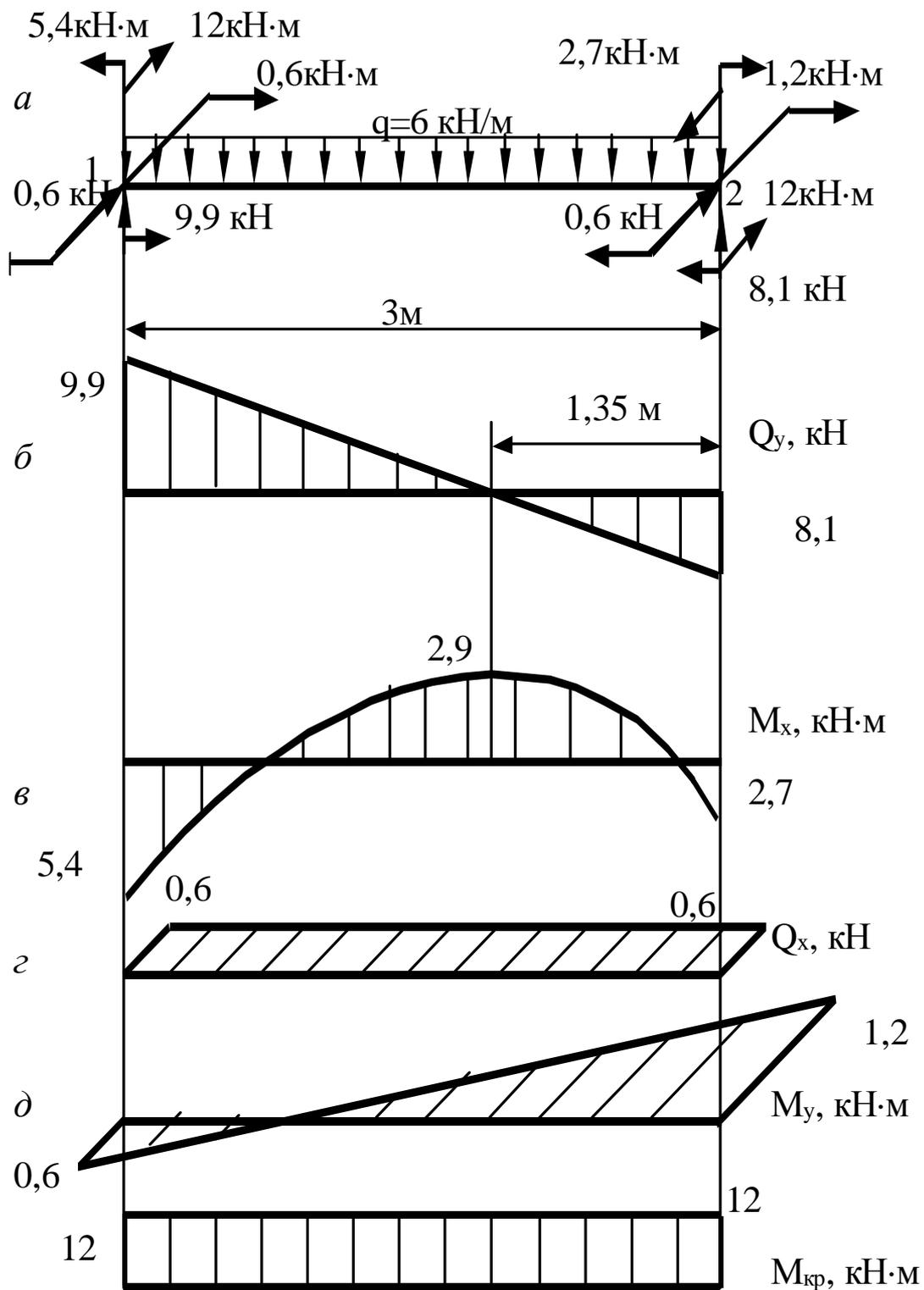


Рисунок 8.5 – Эпюры внутренних усилий для 1-го элемента

2-й элемент:

$$\begin{Bmatrix} P_{y2} \\ P_{x2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \\ P_{y3} \\ P_{x3} \\ M_{x3} \\ M_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = |K|_{II}^I \begin{Bmatrix} V_2 \\ w_2 \\ q_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{z2} \\ V_3 \\ w_3 \\ q_{x3} \\ q_{y3} \\ q_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 l/2 \\ 0 \\ q_2 l^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ q_2 l/2 \\ 0 \\ -q_2 l^2/12 \\ 0 \end{Bmatrix} = |K|_{II}^I \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.35/EJ_0 \\ 0.9/EJ_0 \\ 45/EJ_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,02 \\ -7,65 \\ 2,7 \\ -1,2 \\ 18 \\ -2,02 \\ -10,35 \\ 1,35 \\ 3,1 \\ -18 \end{Bmatrix} .$$

Состыковав эпюры по участкам, строим окончательные эпюры (см. рис.8.4).

Наиболее опасными являются сечения в заделках, где действуют моменты:

- а) левая заделка : $M_x = 5,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_y = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_z = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 б) правая заделка : $M_x = 1,35 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_y = 3,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_z = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Как видим, наиболее опасными являются сечения в правой заделке.

Для этого сечения определяем расчетный момент

$$M_{расч}^{IV} = \sqrt{M_{верт}^2 + M_{гор}^2 + 0,75M_{кр}^2} = \sqrt{1,35^2 + 3,1^2 + 0,75 \cdot 18^2} = 15,9 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Определяем необходимый момент сопротивления сечения

$$W_o = \frac{M_{расч}^{IV}}{[S]} = \frac{15,9 \cdot 10^{-3}}{120} \cdot 10^6 = 132,5 \text{ см}^3 .$$

С другой стороны, $W_o = 0,1D^3$, откуда $D = \sqrt[3]{\frac{W_o}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{132,5}{0,1}} = 10,95 \text{ см} .$

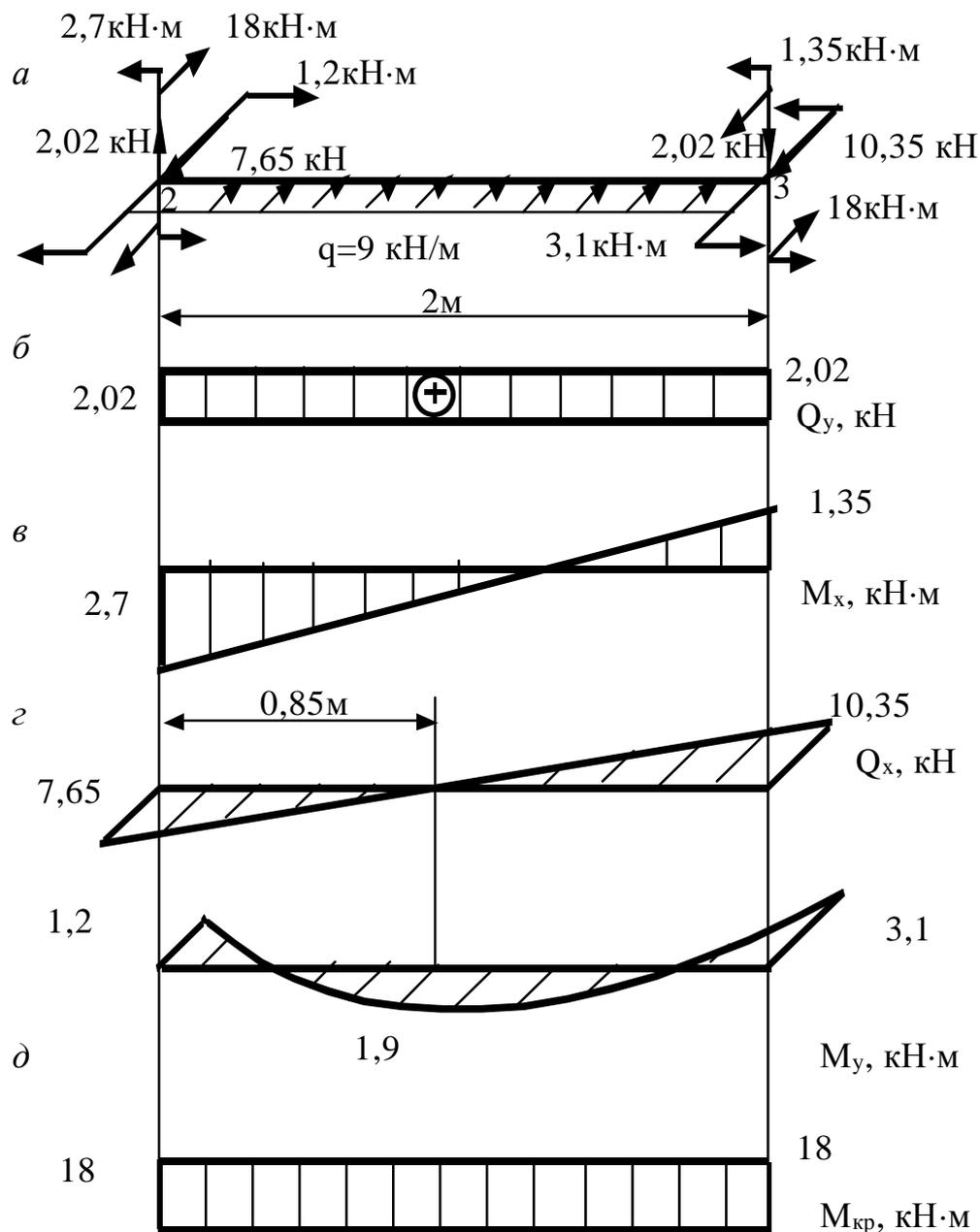


Рисунок 8.6 – Эпюры внутренних усилий для 2-го элемента

Принимаем диаметр вала $D = 110 \text{ мм}$.

9 РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

9.1 Понятие о плоской задаче теории упругости

До сих пор рассматривали стержневые конструкции, для которых МКЭ дает точное решение. Для задач теории упругости МКЭ дает приближенное решение, которое зависит от вида конечных элементов и их количества.

9.2 Обобщенный закон Гука

При объемном напряженном состоянии (рис. 9.1) из сопротивления материалов известны зависимости между напряжениями и деформациями, называемые обобщенным законом Гука.

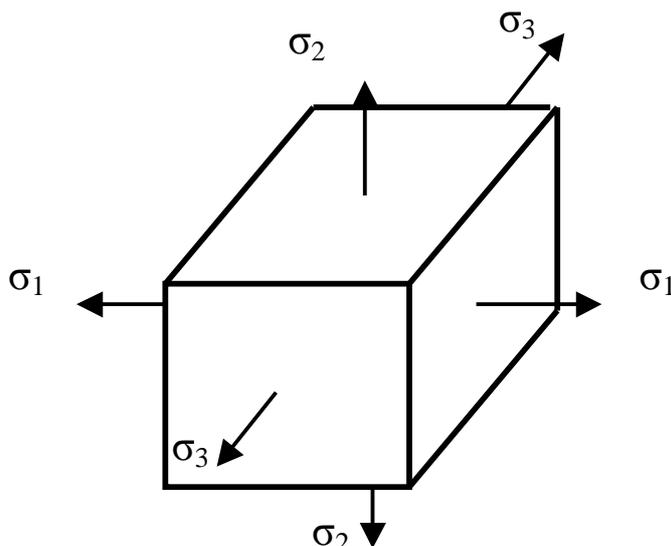


Рисунок 9.1 - Объемное напряженное состояние

Они имеют вид

$$\begin{aligned}e_1 &= \frac{1}{E} [s_1 - m(s_2 + s_3)], \\e_2 &= \frac{1}{E} [s_2 - m(s_1 + s_3)], \\e_3 &= \frac{1}{E} [s_3 - m(s_1 + s_2)],\end{aligned}\tag{9.1}$$

где s_1, s_2, s_3 - главные нормальные напряжения;
 e_1, e_2, e_3 - главные деформации.

9.3 Плоское напряженное состояние

Для плоской задачи теории упругости различают плоское напряженное и плоское деформированное состояния.

При плоском напряженном состоянии напряжения, перпендикулярные плоскости, отсутствуют (рис. 9.2):

$$s_z = 0, t_{xz} = 0, t_{yz} = 0.$$

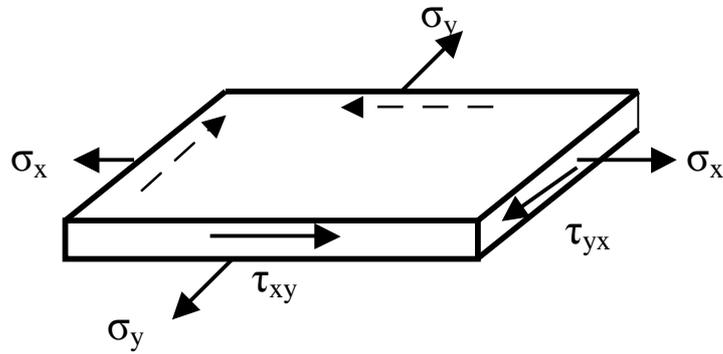


Рисунок 9.2 - Плоское напряженное состояние

Обобщенный закон Гука для этого случая имеет вид

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E}(s_x - ms_y), \\ e_y &= \frac{1}{E}(s_y - ms_x), \\ e_z &= -\frac{m}{E}(s_x + s_y). \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Выразим теперь s_x и s_y через e_1 и e_2 :

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{E}{1-m^2}(e_1 + me_2), \\ s_y &= \frac{E}{1-m^2}(e_2 + me_1), \\ t &= Gg = \frac{E}{1(1+m)}g. \end{aligned}$$

В матричной форме имеем:

$$\left\{ \begin{matrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{matrix} \right\} = \frac{E}{1-m^2} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-m}{2} \end{vmatrix} \left\{ \begin{matrix} e_x \\ e_y \\ t_{xy} \end{matrix} \right\}. \quad (9.3)$$

9.4 Плоское деформированное состояние

При плоском деформированном состоянии все деформации находятся в одной плоскости (рис.9.3), $e_z = 0$.

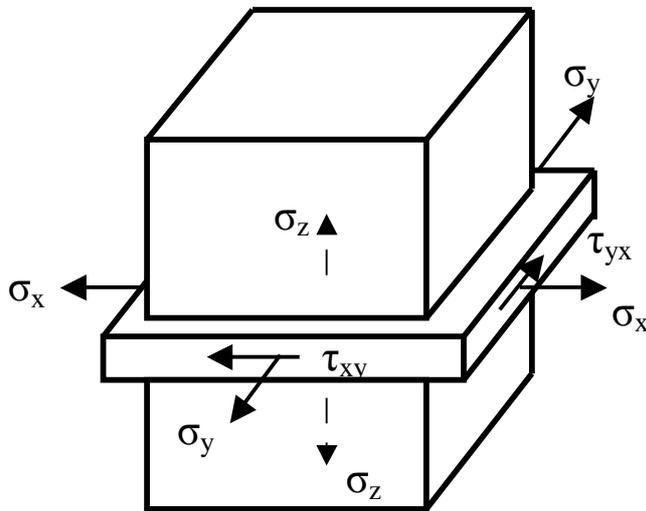


Рисунок 9.3 - Плоское деформированное состояние

Тогда обобщенный закон Гука запишется так:

$$e_x = \frac{1}{E} [s_x - m(s_y + s_z)],$$

$$e_y = \frac{1}{E} [s_y - m(s_x + s_z)],$$

$$e_z = \frac{1}{E} [s_z - m(s_x + s_y)].$$

Отсюда определяем s_z и подставляем в ϵ_x и ϵ_y : $s_z = m(s_x + s_y)$,

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E} [s_x - ms_y - m^2(s_x + s_y)], \\ e_y &= \frac{1}{E} [s_y - ms_x - m^2(s_x + s_y)]. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Напряжения через деформации равны

$$s_x = \frac{E(1-m)}{(1-2m)(1+m)} \left(e_x + \frac{1-m}{m} e_y \right)$$

$$s_y = \frac{E(1-m)}{(1-2m)(1+m)} \left(e_y + \frac{1-m}{m} e_x \right)$$

$$t_{xy} = Gg_{xy} = \frac{E}{2(1+m)} g_{xy},$$

или, в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-m)}{(1-2m)(1+m)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1-m}{m} & 0 \\ \frac{1-m}{m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2m}{2(1-m)} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (9.5)$$

9.5 Связь между деформациями и перемещениями

Рассмотрим деформацию элемента с размерами dx и dy (рис. 9.4).

Под действием сил элемент деформируется (на рис 9.4 показано пунктиром).

Определим относительные деформации e_x , e_y и g_{xy} :

$$e_x = \frac{A_1D_1 - AD}{AD},$$

$$AD = dx,$$

$$A_1D_1 = AD + DD_1 - AA_1 = dx + U + \frac{\partial U}{\partial x} dx - U = dx + \frac{\partial U}{\partial x} dx,$$

(приближенно определяем проекции на ось x),

$$e_x = \frac{dx + \frac{\partial U}{\partial x} dx - dx}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$e_y = \frac{A_1B_1 - AB}{AB}, \quad AB = dy, \quad A_1B_1 = AB + BB_1 - AA_1,$$

(приближенно определяем проекции на ось y),

$$A_1B_1 = dy + V + \frac{\partial v}{\partial y} dy - V = dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

$$e_y = \frac{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

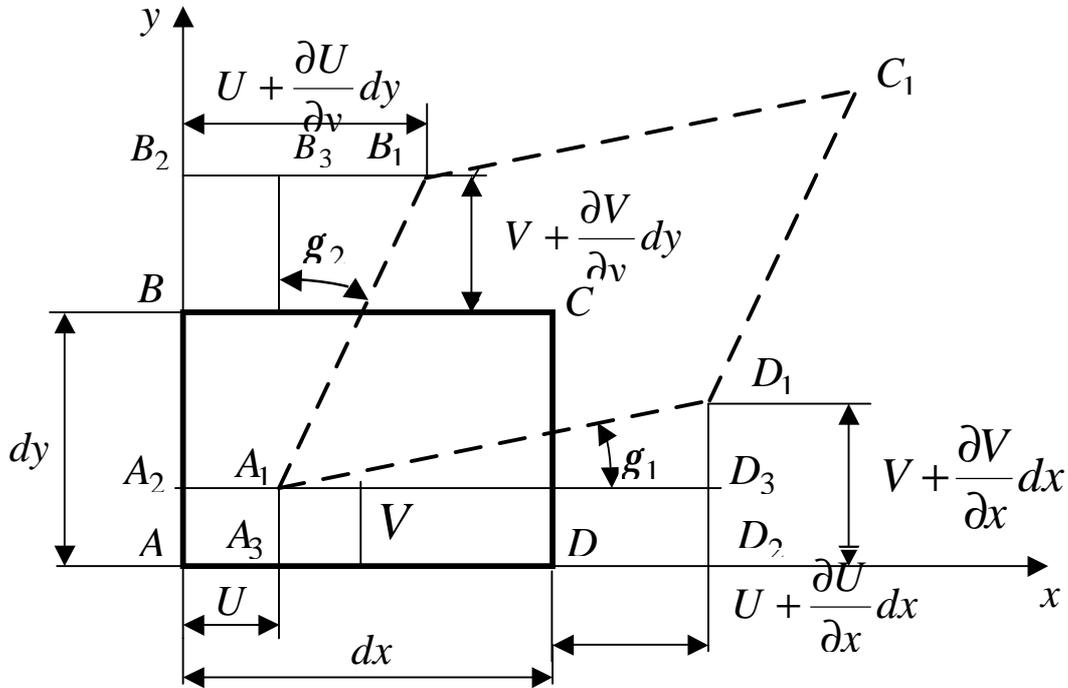


Рисунок 9.4 - Элемент ABCD до и после деформации

Относительным сдвигом g_{xy} называют уменьшение прямого угла BAD .

Он равен $g_{xy} = g_1 + g_2$,

$$g_1 = \frac{D_1D_2 - A_1A_3}{A_1D_3} = \frac{V + \frac{\partial V}{\partial x} dx - V}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$g_2 = \frac{B_1B_2 - A_1A_2}{B_3A_1} = \frac{U + \frac{\partial U}{\partial y} dy - U}{dy} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

таким образом,

$$g_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}.$$

В матричной форме имеем известные зависимости Коши:

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (9.6)$$

9.6 Связь между напряжениями и перемещениями

Для решения задач теории упругости МКЭ необходимо напряжения выразить через перемещения. Для этого в выражения (9.3) и (9.5) необходимо подставить зависимость (9.6).

Для плоского напряженного состояния

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-m^2} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-m}{2} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (9.7)$$

$$\text{где } |D| = \frac{E}{1-m^2} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-m}{2} \end{vmatrix} - \quad (9.8)$$

матрица упругости для плоского напряженного состояния.

Для плоского деформированного состояния

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-m)}{(1-2m)(1+m)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{m}{1-m} & 0 \\ \frac{m}{1-m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2m}{2(1-m)} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (9.9)$$

где

$$|D| = \frac{E(1-m)}{(1-2m)(1+m)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{m}{1-m} & 0 \\ \frac{m}{1-m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2m}{2(1-m)} \end{vmatrix} \quad (9.10)$$

матрица жесткости для плоского деформированного состояния.

9.7 Функция перемещений для конечного треугольного элемента

Наиболее простыми являются треугольные элементы, которыми легко аппроксимировать любую конструкцию (рис. 9.5).

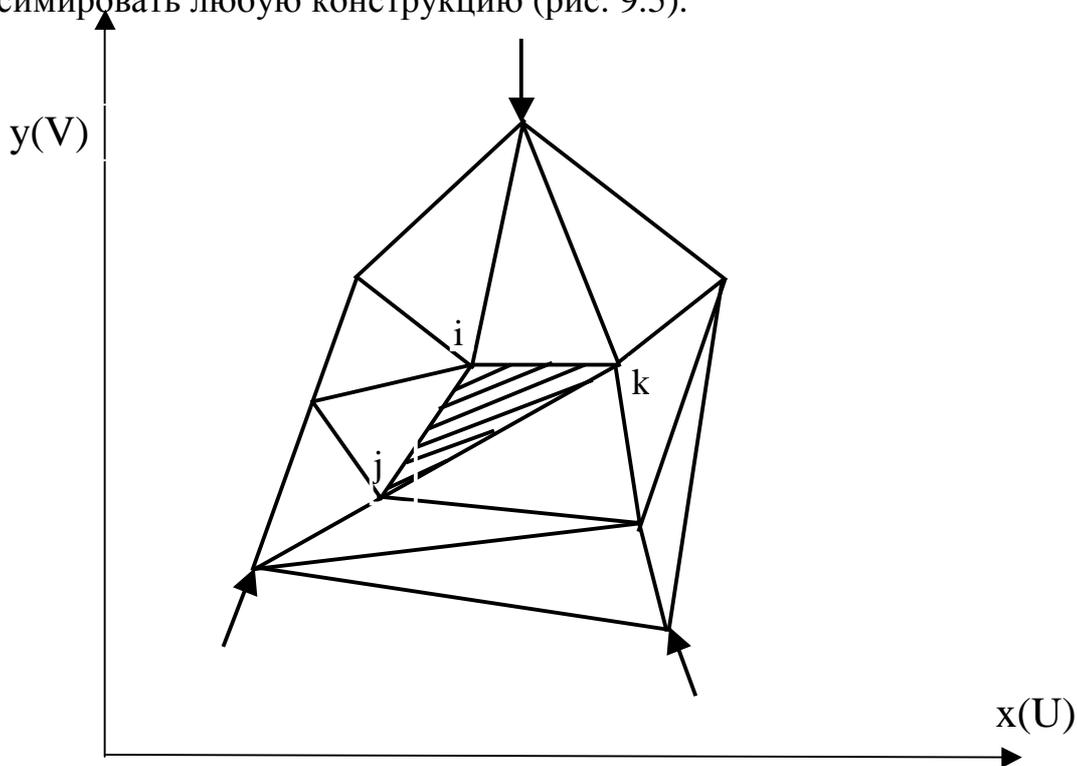


Рисунок 9.5 - Разбивка конструкции на элементы

Так как конечный элемент имеет три узла, то в качестве функции перемещений необходимо взять полином с тремя коэффициентами. В направлении оси x перемещения u равны

$$U = a_0 + a_1x + a_2y, \quad (9.11)$$

коэффициенты a_0, a_1, a_2 определяются через перемещения узлов из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} U_i &= a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i \\ U_j &= a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j \\ U_k &= a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k \end{aligned} \right\}. \quad (9.12)$$

Решая с помощью определителей, получаем

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} U_i & x_i & y_i \\ U_j & x_j & y_j \\ U_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}}; \quad \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2\Delta, \quad ,$$

где Δ - площадь элемента,

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & U_i & y_i \\ 1 & U_j & y_j \\ 1 & U_k & y_k \end{vmatrix}}{2\Delta}; \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & U_i \\ 1 & x_j & U_j \\ 1 & x_k & U_k \end{vmatrix}}{2\Delta}.$$

Подставив эти значения в выражение (9.11) и сгруппировав коэффициенты, получим

$$U = \left| \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}; \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta}; \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2\Delta} \right| \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{Bmatrix}. \quad (9.13)$$

Аналогично, перемещения в направлении оси $y - V$:

$$V = \left| \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2D}; \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2D}; \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2D} \right| \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{Bmatrix}. \quad (9.14)$$

Здесь $a_i = x_j y_k - x_k y_j$, $b_i = y_j - y_k$, $c_i = x_k - x_j$, остальные коэффициенты $a_j, a_k, b_j, b_k, c_j, c_k$ определяются путем круговой замены индексов соответственно i, j, k .

9.8 Матрица жесткости для треугольного конечного элемента

Подставив функции перемещений (9.13) и (9.14) в (9.6), получим вектор деформаций

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix}. \quad (9.15)$$

Здесь
$$\frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{vmatrix} = |B|. \quad (9.16)$$

Для вычисления матрицы жесткости элемента подставляем все составляющие, входящие в формулу (1.6). В результате чего имеем

$$|k|^{\mathbf{1}} = \int_V |B|^T |D| |B| dV = \int_F |B|^T |D| |B| t \cdot dF, \\ dV = dF \cdot t.$$

Так как под интегралом имеем $|B|$ и $|D|$, которые не зависят от координат x и y , то получим окончательное выражение матрицы жесткости для треугольных конечных элементов:

$$|k|^{\mathbf{1}} = |B|^T |D| |B| t \cdot \Delta, \quad (9.17)$$

где t - толщина конечного элемента.

9.9 Функция перемещения для прямоугольного конечного элемента

Во многих случаях удобно конструкцию разбивать на плоские прямоугольные элементы (рис. 9.6).

Для таких элементов (рис. 9.7) функции U и V перемещений произвольной точки задают в виде

$$U(x, y) = \left| \frac{1}{ab}(a-x)(b-y); \frac{1}{ab}x \cdot (b-y); \frac{1}{ab}xy; \frac{1}{ab}y \cdot (a-x) \right| \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \\ U_m \end{Bmatrix}, \quad (9.18)$$

$$V(x, y) = \left| \frac{1}{ab}(a-x)(b-y); \frac{1}{ab}x \cdot (b-y); \frac{1}{ab}xy; \frac{1}{ab}y \cdot (a-x) \right| \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \\ V_m \end{Bmatrix}. \quad (9.19)$$

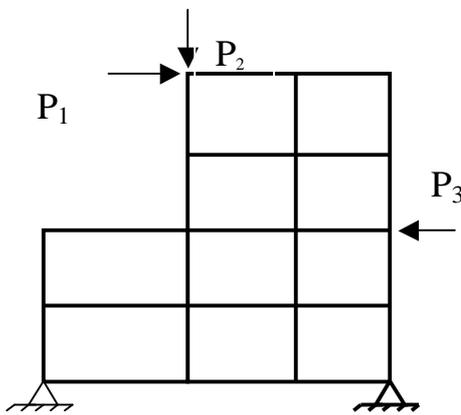


Рисунок 9.6 - Схема конструкции, разбитой на прямоугольные элементы

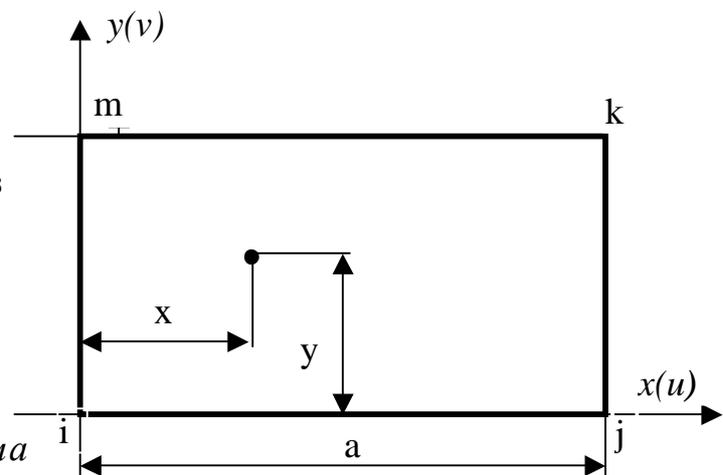


Рисунок 9.7 - Конечный прямоугольный элемент

Подставив эти функции в выражения деформаций (9.6), получим $\{e\} = [B]\{d\}^T$, где $\{d\}^T$ - вектор деформаций узлов.

$$[B] = \frac{1}{ab} \begin{vmatrix} y-b & 0 & b-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & x-a & 0 & -x & 0 & x & 0 & a-x \\ x-a & y-b & -x & b-y & x & y & a-x & -y \end{vmatrix}. \quad (9.20)$$

Матрица жесткости прямоугольного элемента представляет собой интеграл

$$|k|^1 = \int_F |B|^T |D| |B| dV = t \int_F \frac{1}{ab} \begin{vmatrix} y-b & 0 & x-a \\ 0 & x-a & y-b \\ b-y & 0 & -x \\ 0 & -x & b-y \\ y & 0 & x \\ 0 & x & y \\ -y & 0 & a-x \\ 0 & a-x & -y \end{vmatrix} |D| \times$$

$$\times \begin{vmatrix} y-b & 0 & b-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & x-a & 0 & -x & 0 & x & 0 & a-x \\ x-a & y-b & -x & b-y & x & y & a-x & -y \end{vmatrix} dx dy.$$
(9.21)

Как видно из выражения (9.21), коэффициенты матрицы жесткости представляют собой интегралы, зависящие от x и y . Размер матрицы жесткости 8×8 , ее коэффициенты можно взять из учебника [9].

9.10 Пример

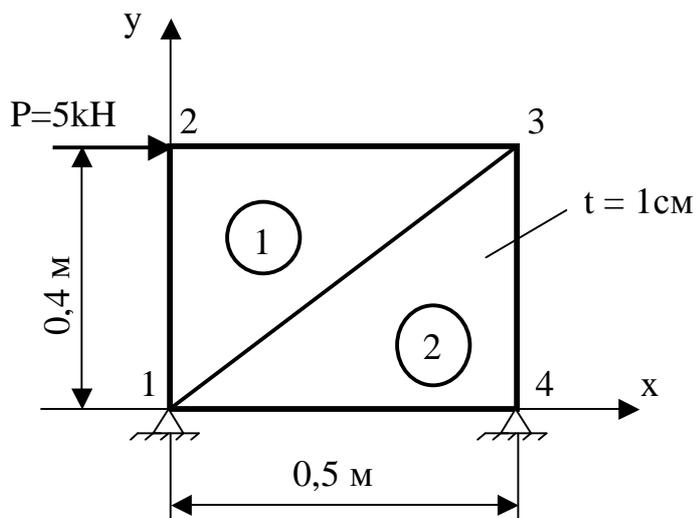


Рисунок 9.8 - Схема пластины

Для пластины, показанной на рис 9.8, необходимо определить эквивалентные напряжения по третьей теории прочности, если $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$.

Решение. Разбиваем пластину на элементы. Для иллюстрации МКЭ разбиваем всего на 2 элемента (естественно, такая разбивка слишком грубая и не обеспечивает точности расчета). Нумеруем узлы и элементы.

Переходим к вычислению матриц жесткости элементов.

1-й элемент: его связи 1-3-2 (начинаем с меньшего номера и называем узлы, обходя их против хода часовой стрелки).

Значит, i -й узел - 1, j -й - 3, k -й - 2.

Вычисляем коэффициенты b и c :

$$b_i = y_j - y_k = 0,4 - 0,4 = 0, \quad c_i = x_k - x_j = 0 - 0,5 = -0,5,$$

$$b_j = y_k - y_i = 0,4 - 0 = 0,4, \quad c_j = x_i - x_k = 0 - 0 = 0,$$

$$b_k = y_i - y_j = 0 - 0,4 = -0,4, \quad c_k = x_j - x_i = 0,5 - 0 = 0,5 \quad ,$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,1.$$

Матрица $|B|$ равна

$$|B| = \frac{1}{0,2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0,4 & 0 & -0,4 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0,4 & 0,5 & -0,4 \end{vmatrix}.$$

Матрица жесткости первого элемента

$$|k|_I^1 = \frac{1}{0,2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \\ -0,4 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,4 \end{vmatrix} \frac{2 \cdot 10^5 (1-0,3)}{(1-2 \cdot 0,3)(1+0,3)} \begin{vmatrix} 0 & \frac{0,3}{1-0,3} & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot 0,3}{2 \cdot (1-0,3)} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{0,2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0,4 & 0 & -0,4 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0,4 & 0,5 & -0,4 \end{vmatrix} \cdot 0,01 \cdot 0,1;$$

$$|k|_I^1 = \begin{vmatrix} 481 & 0 & 0 & -385 & -481 & 385 \\ 0 & 1688 & -577 & 0 & 577 & -1682 \\ 0 & -577 & 1077 & 0 & -1077 & 577 \\ -385 & 0 & 0 & 308 & 385 & -308 \\ -481 & 577 & -1077 & 385 & 1558 & -962 \\ 385 & -1682 & 577 & -308 & -962 & 1990 \end{vmatrix}.$$

2-й элемент: его связи 1-4-3 . Аналогично определяем

$$|k|_{II}^1 = \begin{vmatrix} 1077 & 0 & -1077 & 577 & 0 & -577 \\ 0 & 308 & 385 & -308 & -385 & 0 \\ -1077 & 385 & 1558 & -962 & -481 & 577 \\ 577 & -308 & -962 & 1990 & 385 & -1682 \\ 0 & -385 & -481 & 385 & 481 & 0 \\ -577 & 0 & 577 & -1682 & 0 & 1682 \end{vmatrix}.$$

Формируем матрицу жесткости конструкции. Так как пластина имеет четыре узла, а каждый узел имеет две степени свободы, то размерность матрицы жесткости конструкции имеет размерность 8×8 . При занесении коэффициентов в матрицу жесткости конструкции следует внимательно следить, какие узлы включают элементы и какова их последовательность.

В правую часть заносим нагрузки, приложенные в узлах. Так как нагрузка приложена только во втором узле в горизонтальном направлении, то заносим в третью строку нагрузку $5 \cdot 10^{-3}$ (переводим в меганьютоны (МН)). В остальных строках ставим нули.

| | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|------|-------|-------|------|-------|---|
| 481 | 0 | -481 | 385 | 0 | -385 | 1077 | 577 | $\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ |
| 1077 | 0 | | | 0 | -577 | | | |
| 0 | 1082 | 577 | - | -577 | 0 | 385 | -308 | |
| 0 | 308 | | 1682 | -385 | 0 | | | |
| -481 | 577 | 1558 | -962 | -1077 | 385 | 0 | 0 | |
| 385 | -1682 | -962 | 1990 | 577 | -308 | 0 | 0 | |
| 0 | -577 | -1077 | 577 | 1077 | 0 | -481 | 385 | |
| 0 | -385 | | | 481 | 0 | | | |
| -385 | 0 | 385 | -308 | 0 | 308 | 577 | -1682 | |
| -577 | 0 | | | 0 | 1682 | | | |
| -1077 | 385 | 0 | 0 | -481 | 577 | 1558 | -962 | |
| 577 | -308 | 0 | 0 | 385 | -1682 | -962 | 1990 | |

Учитываем граничные условия:

$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0, \quad U_4 = 0, \quad V_4 = 0.$$

После их учета получим

$$\begin{vmatrix} 1558 & -962 & -1077 & 385 \\ -962 & 1990 & 577 & -308 \\ -1077 & 577 & 1558 & 0 \\ 385 & -308 & 0 & 1990 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Решая систему уравнений, найдем:

$$U_2 = 0,0084 \text{ м}, \quad V_2 = 0,0024 \text{ м}, \quad U_3 = 0,0049 \text{ м}, \quad V_3 = -0,00125 \text{ м}.$$

Определяем напряжения в элементах.

1-й элемент:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = |D||B| \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} = \frac{2 \cdot 10^5 (1-0,3)}{(1-2 \cdot 0,3)(1+0,3)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{0,3}{1-0,3} & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot 0,3}{2 \cdot (1-0,3)} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{2 \cdot 0,1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0,4 & 0 & -0,4 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0,4 & 0,5 & -0,4 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,049 \\ -0,00125 \\ 0,0084 \\ 0,0024 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -118,4 \\ 84,2 \\ 105,3 \end{Bmatrix}.$$

2-й элемент:

$$\{S\} = \frac{2 \cdot 10^5 (1-0,3)}{(1-2 \cdot 0,3)(1+0,3)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{0,3}{1-0,3} & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot 0,3}{2(1-0,3)} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0,1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} -0,4 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & -0,4 & -0,5 & 0,4 & 0,5 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,00401 \\ -0,00125 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -36,1 \\ -84,2 \\ 94,7 \end{Bmatrix}.$$

Как видим, более нагруженным является 1-й элемент. Для него определяем главные нормальные напряжения по формуле

$$s_{1,3} = \frac{1}{2} \left[s_x + s_y \pm \sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2} \right],$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \left[-118 + 84,2 + \sqrt{(-118 - 84,2)^2 + 4 \cdot 105,3^2} \right] = 123 \text{ МПа},$$

$$s_3 = \frac{1}{2} \left[-118 + 84,2 - \sqrt{(-118 - 84,2)^2 + 4 \cdot 105,3^2} \right] = -157 \text{ МПа}.$$

Так как имеем плоское деформированное состояние, то

$$s_2 = -m(s_1 + s_3) = -0,3(123 - 157) = 10,2 \text{ МПа}.$$

В соответствии с третьей теорией прочности,

$$\sigma_{\text{экв}} = s_1 - s_3 \leq [s], \quad \sigma_{\text{экв}} = 123 + 157 = 280 \text{ МПа}.$$

10 РЕАЛИЗАЦИЯ НАПРЯЖЕННО - ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

10.1 Ввод исходных данных

С появлением МКЭ и мощной вычислительной техники стало возможным использовать напряженно-деформированное состояние самых сложных конструкций без каких-либо упрощений. Но для того, чтобы в компьютер ввести математическую модель конструкции, необходимо подготовить соответствующие исходные данные.

Проследим решение задачи МКЭ на ЭВМ на примере плоской задачи, представленной на рис. 10.1.

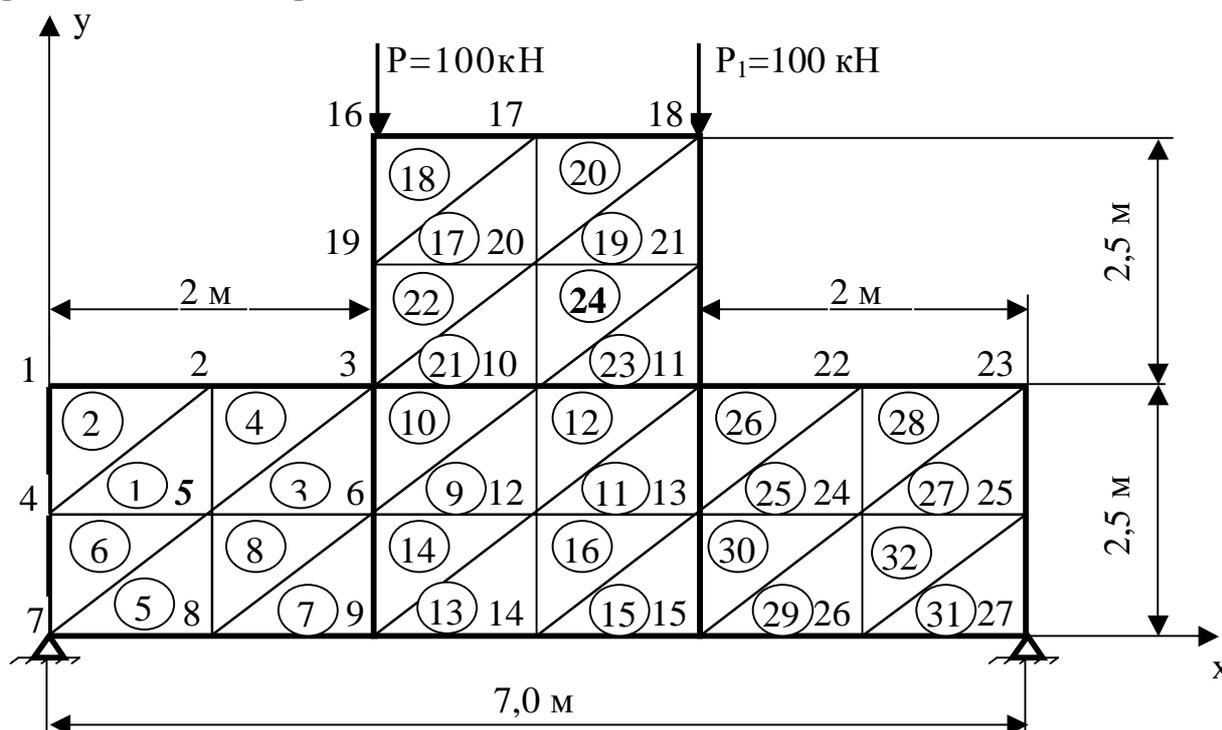


Рисунок 10.1 - Пластина с разбивкой на элементы

Наиболее сложным из всех этапов решения задачи МКЭ на ЭВМ является ввод исходных данных.

При вводе необходимо ввести число узлов, число элементов, их связи, нагрузки, граничные условия, свойства материала.

Простейший способ ввода приведен в таблицах 10.1 и 10.2.

Таблица 10.1

| Номер узла | Координаты | | Граничные условия | Нагрузки | |
|------------|------------|-----|-------------------|----------|-------|
| | x | y | | P_x | P_y |
| 1 | 0 | 2,5 | 00 | 0 | 0 |
| 2 | 1,0 | 2,5 | 00 | 0 | 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 7 | 0 | 0 | 11 | 0 | 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 16 | 2 | 5,0 | 00 | 0 | -100 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 27 | 7,0 | 0 | 11 | 0 | 0 |

Таблица 10.2

| Номер элемента | Связи | | | E | μ |
|----------------|-------|-----|-----|---------|-------|
| | 4 | 2 | 5 | | |
| 1 | 4 | 2 | 5 | 200 000 | 0,3 |
| 2 | 1 | 4 | 2 | 200 000 | 0,3 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 32 | 24 | 26 | 25 | 200 000 | 0,3 |

Наиболее трудоемок ручной ввод, когда конструкция вручную разбивается на элементы.

Рекомендуется ввод данных выполнять с помощью программы, которая позволяет автоматически разбивать на элементы, формировать связи элементов, определять координаты узлов.

Крайне необходимо введенные исходные данные заносить в файл, с тем, чтобы при их корректировке заносить не все данные, а только те, что меняются. Желательно задавать графически ввод данных, которые затем трансформируются в числовые данные и заносятся в файл. Граничные условия (условия закрепления) задают в виде массива чисел с нулями и единицами. Единицы соответствуют закреплениям узлов в определенном направлении, а нули - их отсутствию.

10.2 Вывод исходных данных на экран и в файл

В зависимости от того, как был организован ввод данных, они должны сразу же выводиться на экран компьютера и заноситься в файл. Это необходимо, чтобы контролировать, верно ли введены данные, и при необходимости повторного ввода вызывать соответствующий файл.

10.3 Определение коэффициентов матрицы жесткости элемента

В зависимости от рассматриваемой задачи коэффициенты матрицы жесткости должны определяться по соответствующим зависимостям. При отладке программы желательно коэффициенты матрицы жесткости выводить на экран или в файл. Матрица жесткости элемента должна быть симметричной, а коэффициенты ее главной диагонали должны быть положительными.

10.4 Формирование матрицы жесткости конструкции

Матрица жесткости конструкции представляет собой таблицу коэффициентов, складывающуюся из соответствующих коэффициентов матрицы жесткости элементов.

Например, для элемента №14 (см. рис. 10.1), включающего узлы 6 – 9 – 12, коэффициенты его матрицы жесткости должны быть занесены в строки и столбцы 11,12, 17, 18, 23 и 24. Так как матрица симметричная, то с целью экономии оперативной памяти нет смысла заносить симметричную часть.

При разбивке конструкции на элементы необходимо стремиться к тому, чтобы разница между узлами одного элемента была как можно меньше. В этом случае многие коэффициенты матрицы жесткости конструкции будут нулевыми, и вместо квадратной матрицы можно хранить прямоугольную матрицу. Ее ширина равна произведению максимальной разницы между узлами, входящими в один элемент, плюс один, умноженному на степень свободы узла.

После того как матрица жесткости конструкции сформирована, формируется вектор нагрузок – нагрузки заносятся в соответствующие строки, а затем учитываются граничные условия. Чтобы не нарушать ансамбль таблицы, рекомендуется не вычеркивать строки и столбцы, соответствующие номеру узла, где имеются закрепления, приравнять нулю все коэффициенты строк и столбцов, кроме главного коэффициента, который приравнивается единице.

10.5 Решение системы уравнений

В задачах МКЭ порядок системы уравнений может быть очень большой, около 100 000 уравнений и больше. Это зависит от рассматриваемой конструкции и от ее разбивки на элементы. В зависимости от рассматриваемой задачи могут быть предложены различные методы решения системы уравнений.

Очень эффективным и достаточно точным является метод решения уравнений Гаусса. Его идея состоит в том, что при прямом ходе все уравнения при-

водятся к виду, когда первый коэффициент каждого уравнения равен единице, а следующие коэффициенты получаются в виде разности между коэффициентами уравнений. В последнем уравнении остается один коэффициент, равный единице, откуда получаем величину последнего неизвестного. Затем идем в обратном порядке, подставляем найденные решения и находим предыдущее неизвестное.

10.6 Определение усилий и напряжений

Решив систему уравнений, получаем перемещения узлов. В зависимости от рассматриваемой конструкции, вида конечных элементов с помощью формулы для векторов и усилий определяем составляющие напряжений и усилий.

10.7 Вывод результатов расчетов на экран и в файл

Особенность задач МКЭ состоит в том, что в результате их решения получаем массу чисел. В связи с этим желательно вывод результатов выполнять в виде эпюр или рисунков, на которых необходимо закрашивать элементы цветом, соответствующим уровню напряжений. Кроме того, все результаты необходимо заносить в файл, который при необходимости можно распечатать.

11 РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

11.1 Особенности осесимметричной задачи теории упругости

Исследование распределения напряжений в телах вращения (осесимметричных телах) при осесимметричном нагружении представляет большой практический интерес. Поскольку эти задачи тоже трехмерные, с практической точки зрения они аналогичны задачам о плоском напряженном состоянии. Вследствие симметрии деформированное, а, следовательно, и напряженное состояние в любом сечении по оси симметрии тела полностью определяется двумя компонентами перемещения.

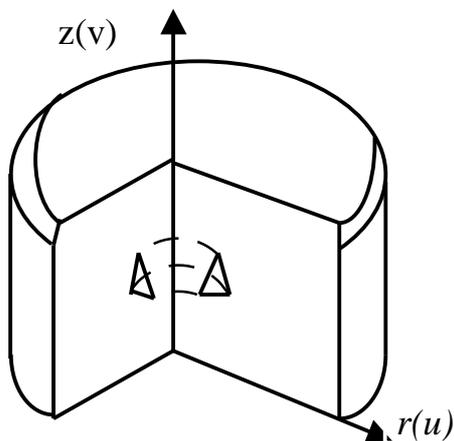


Рисунок 11.1 - Осесимметричное тело и торообразный конечный элемент

В осесимметричном случае любое радиальное перемещение вызывает деформацию в окружном направлении, и так как напряжения в этом направлении не равны нулю, в рассмотрение должна быть введена четвертая компонента деформации в соответствующее направление. В этом состоит отличие осесимметричного случая от плоской задачи теории упругости.

Вектор деформации теперь имеет вид

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_z \\ e_r \\ e_q \\ g_{rz} \end{Bmatrix}, \quad (11.1)$$

как и для плоской задачи, $e_z = \frac{\partial V}{\partial z}$, $e_r = \frac{\partial U}{\partial r}$, $g_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial r}$.

Определим относительную деформацию e_q в окружном направлении (рис 11.2):

$$e_q = \frac{B_1 A_1 - BA}{BA},$$

$$BA = r dq, \quad B_1 A_1 = (r + u) dq,$$

$$e_q = \frac{(r + u) dq + r dq}{r dq} = \frac{u}{r}.$$

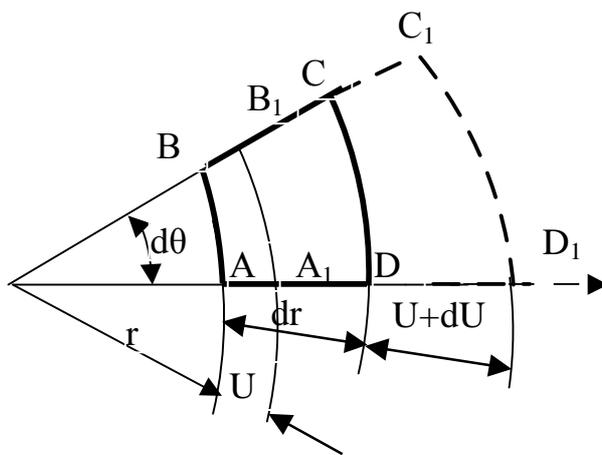
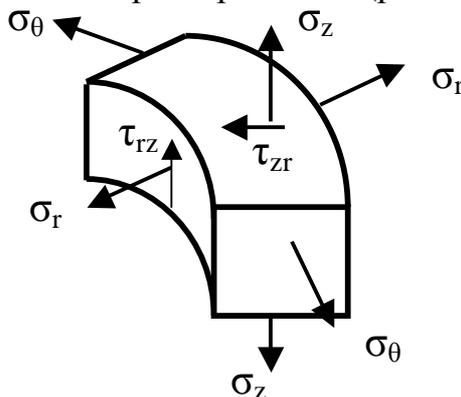


Рисунок 11.2 –Элемент осесимметричного тела до и после деформации

Таким образом, вектор деформаций в этом случае имеет вид

$$\{e\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial U} \end{array} \right\}. \quad (11.2)$$

Вектор напряжений (рис. 11.3) теперь примет вид



$$\{s\} = \begin{Bmatrix} s_z \\ s_r \\ s_q \\ t_{rz} \end{Bmatrix} = |D| \begin{Bmatrix} e_z \\ e_r \\ e_q \\ g_{rz} \end{Bmatrix}. \quad (11.3)$$

Рисунок 11.3 - Напряженное состояние для осесимметричной задачи

11.2 Функция перемещения

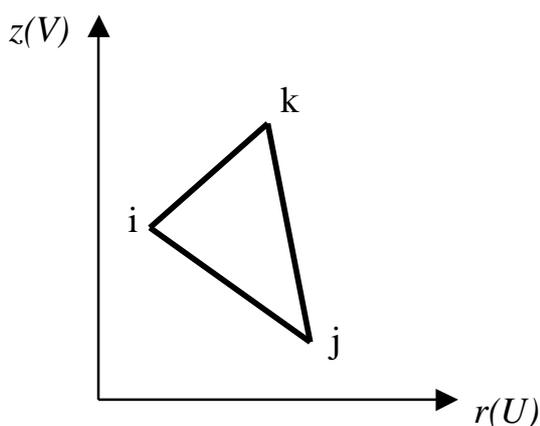


Рисунок 11.4 – Сечение конечного элемента

В зависимости от вида рассматриваемых конечных элементов необходимо задавать соответствующую функцию.

Как и для плоской задачи теории упругости, наиболее простыми являются треугольные элементы (точнее, тор, поперечным сечением которого является треугольник). Сравнивая рис 9.5 и рис. 11.4, видим, что они одинаковы, только вместо осей x и y имеем оси r и z . Поэтому воспользуемся результатами функции перемещений для плоской задачи теории упругости. Таким образом, имеем

$$U = \left| \frac{a_i + b_i r + c_i z}{2\Delta}, \frac{a_j + b_j r + c_j z}{2\Delta}, \frac{a_k + b_k r + c_k z}{2\Delta} \right| \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{Bmatrix}, \quad (11.4)$$

$$V = \left| \frac{a_i + b_i r + c_i z}{2\Delta}; \frac{a_j + b_j r + c_j z}{2\Delta}; \frac{a_k + b_k r + c_k z}{2\Delta} \right| \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{Bmatrix}. \quad (11.5)$$

11.3 Векторы деформаций и напряжений

Вектор деформаций теперь имеет вид

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_z \\ e_r \\ e_q \\ g_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial r} \\ U \\ r \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial U} \end{Bmatrix} = |B| \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix}, \quad (11.6)$$

$$|B| = \frac{1}{2D} \begin{vmatrix} 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ \frac{a_i + b_i r + c_i z}{r} & 0 & \frac{a_j + b_j r + c_j z}{r} & 0 & \frac{a_k + b_k r + c_k z}{r} & 0 \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{vmatrix}. \quad (11.7)$$

Вектор напряжений запишется так:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_z \\ S_r \\ S_q \\ t_{zr} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-m)}{(1-2m)(1+m)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{m}{1-m} & \frac{m}{1-m} & 0 \\ \frac{m}{1-m} & 1 & \frac{m}{1-m} & 0 \\ \frac{m}{1-m} & \frac{m}{1-m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2m}{2(1-m)} \end{vmatrix} |B| \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix}. \quad (11.8)$$

11.4 Матрица жесткости конечного элемента

Используя общее выражение матрицы жесткости для конечного элемента (1.6), получим

$$|k|^1 = \int_V |B|^T |D| |B| dv = \int_F |B|^T |D| |B| 2p dF r. \quad (11.9)$$

В выражение (11.9) входит матрица $|B|$, коэффициенты которой (третья строка, соответствующая окружной деформации) зависят от r и z . Это не позволяет выносить из-под интеграла матрицу $|B|$. С целью упрощения эти коэффициенты заменим приближенными значениями \bar{r} и \bar{z} , соответствующими средним значениям:

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_k}{3}, \quad \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_k}{3},$$

теперь матрица $|B|$ заменяется на $|\bar{B}|$, что позволит получить приближенное значение коэффициентов матрицы жесткости элемента:

$$|\bar{k}|^1 = |\bar{B}|^T |\bar{D}| |\bar{B}| 2p \bar{r} \bar{D}, \quad (11.10)$$

где

$$|\bar{B}| = \frac{1}{2D} \begin{vmatrix} 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ \frac{a_i + b_i \bar{r} + c_i \bar{z}}{\bar{r}} & 0 & \frac{a_j + b_j \bar{r} + c_j \bar{z}}{\bar{r}} & 0 & \frac{a_k + b_k \bar{r} + c_k \bar{z}}{\bar{r}} & 0 \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{vmatrix}. \quad (11.11)$$

Здесь $a_i = r_j z_k - r_k z_j$, $b_i = z_j - z_k$, $c_i = r_k - r_j$, а остальные коэффициенты получаются круговой подстановкой индексов $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$.

При формировании матрицы жесткости конструкции в вектор нагрузок должны записываться значения суммарных нагрузок, которые равны

$$P_{2(n-1)+m} = 2p r_n q_{n,m}, \quad (11.12)$$

где n - номер узла, в котором действует распределенная по окружности нагрузка;

$m = 1$ - когда нагрузка действует в направлении r ;

$m = 2$ - когда нагрузка действует в направлении z ;

r_n - радиус узла n .

11.5 Пример

С помощью МКЭ оценить прочность втулки, показанной на рис 11.5, по IV теории прочности, если $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 0,3$.

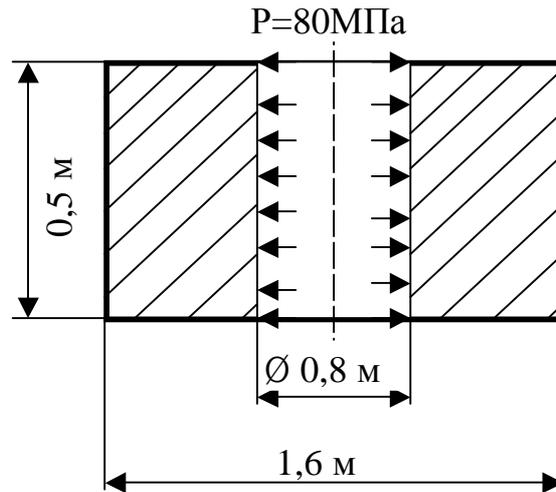


Рисунок 11.4- Расчетная схема втулки

Решение. В качестве конечных элементов принимаем тор с поперечным сечением в виде треугольника.

Сечение втулки разбиваем на элементы (рис. 11.5), нумеруем узлы и элементы.

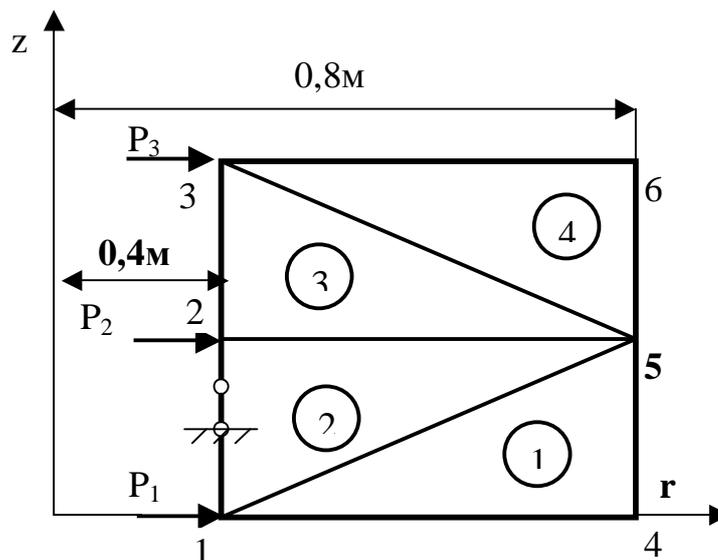


Рисунок 11.5 – Разбивка втулки на элементы

Матрицу жесткости конечных элементов вычисляем по формуле (11.10).

1-й элемент. Его связи 1 – 4 – 5:

$$\begin{aligned}
a_i &= r_j \cdot z_k - r_k \cdot z_j = 0,8 \cdot 0,25 - 0,8 \cdot 0 = 0,2, \\
a_j &= r_k \cdot z_i - r_i \cdot z_k = 0,8 \cdot 0 - 0,4 \cdot 0,25 = -0,1, \\
a_k &= r_i \cdot z_j - r_j \cdot z_i = 0,4 \cdot 0 - 0,8 \cdot 0 = 0, \\
b_i &= z_j - z_k = 0 - 0,25 = -0,25, \\
b_j &= z_k - z_i = 0,25 - 0 = 0,25, \\
b_k &= z_i - z_j = 0 - 0 = 0, \\
c_i &= r_k - r_j = 0,8 - 0,8 = 0, \\
c_j &= r_i - r_k = 0,4 - 0,8 = -0,4, \\
c_k &= r_j - r_i = 0,8 - 0,4 = 0,4, \\
\frac{a_i + b_i \bar{r} + c_i \bar{z}}{\bar{r}} &= \frac{0,2 - 0,25 \cdot 0,67 + 0 \cdot 0,08}{0,67} = 0,05, \\
\frac{a_j + b_j \bar{r} + c_j \bar{z}}{\bar{r}} &= \frac{-0,1 - 0,25 \cdot 0,67 - 0,4 \cdot 0,08}{0,67} = 0,15, \\
\frac{a_k + b_k \bar{r} + c_k \bar{z}}{\bar{r}} &= \frac{0 + 0 \cdot 0,67 + 0,4 \cdot 0,08}{0,67} = 0,048, \\
\bar{r} &= \frac{r_i + r_j + r_k}{3} = \frac{0,4 + 0,8 + 0,8}{3} = 0,67, \\
\bar{z} &= \frac{z_i + z_j + z_k}{3} = \frac{0 + 0 + 0,25}{3} = 0,08, \\
D &= \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 0,25 = 0,05.
\end{aligned}$$

Матрица $|B|$ для первого элемента равна

$$|B|_I = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0 & 0,4 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0,15 & 0 & 0,048 & 0 \\ 0 & -0,25 & -0,4 & 0,25 & 0,4 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{2 \cdot 0,05}.$$

Матрица жесткости первого элемента запишется так:

$$|k|_I^1 = \frac{1}{2 \cdot 0,05} \begin{vmatrix} 0 & -0,25 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0,25 & 0,15 & -0,4 \\ -0,4 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,048 & 0,4 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{2 \cdot 10^5 (1-0,3)}{(1-2 \cdot 0,3)(1+0,3)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & \frac{0,3}{0-0,3} & \frac{0,3}{0-0,3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0,3}{0-0,3} & 1 & \frac{0,3}{0-0,3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0,3}{0-0,3} & \frac{0,3}{0-0,3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot 0,3}{2(1-0,3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot 0,3}{2(1-0,3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot 0,3}{2(1-0,3)} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0,05} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0 & 0,4 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0,15 & 0 & 0,048 & 0 \\ 0 & -0,25 & -0,4 & 0,25 & 0,4 & 0 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,05 .$$

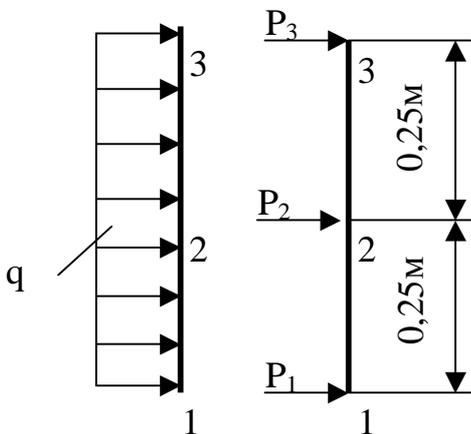


Рисунок 11.7

Аналогично вычисляются матрицы жесткости для остальных элементов. После чего, как и для предыдущих задач, формируется матрица жесткости конструкции.

Здесь следует обратить внимание на граничные условия и на вектора нагрузок.

Для того чтобы втулка не перемещалась как единое целое в направлении оси z (из-за приближенности вычислений сумма сил вдоль оси не будет равна нулю), необ-

ходимо ее в этом направлении в одной из точек закрепить, например $V_2 = 0$.

При формировании вектора нагрузок следует учесть, что давление, распределенное вдоль линии 1-2-3 (рис.11.7), необходимо приложить в узлах 1-2-3.

$$P_1 = P_3 = \frac{1}{2} p \cdot 0,25 \cdot 2p \cdot 0,4 =$$

$$80 \cdot 0,1p = 25,2 \text{ МН}$$

$$P_2 = p \cdot 0,25 \cdot 2p \cdot 0,4 = 50,4 \text{ МН}.$$

Значит,

$$R_1 = 25,2 \text{ МН}, R_3 = 50,4 \text{ МН},$$

$$R_5 = 25,2 \text{ МН}.$$

Решив систему уравнений, найдем

$$U_1 = 30,2 \cdot 10^{-5}, \quad V_1 = 0, \quad U_2 = 31,8 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$U_3 = 30,2 \cdot 10^{-5}, \quad V_3 = -3,9 \cdot 10^{-5}, \quad U_4 = 22,1 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$U_5 = 20,1 \cdot 10^{-5}, \quad V_5 = -1,9 \cdot 10^{-5}, \quad U_6 = 22,1 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$V_2 = -1,9 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$V_4 = 0,1 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$V_6 = -0,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Определяем вектор напряжений по формуле

$$\{\mathbf{s}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_z \\ \mathbf{s}_r \\ \mathbf{s}_q \\ \mathbf{t}_{rz} \end{Bmatrix} = |D| |\overline{B}| \{\mathbf{d}\}^1.$$

Подставив матрицы $|D|$, $|\overline{B}|$ и вектор перемещений для первого элемента, найдем вектор напряжений:

$$\{\mathbf{s}\}_I = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_z \\ \mathbf{s}_r \\ \mathbf{s}_q \\ \mathbf{t}_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,7 \\ -22,3 \\ 64,4 \\ -5,8 \end{Bmatrix}.$$

Теперь определяем главные нормальные напряжения по формуле

$$\mathbf{s}_{2,3} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{s}_r + \mathbf{s}_z \pm \sqrt{(\mathbf{s}_r - \mathbf{s}_z)^2 + 4\mathbf{t}_{rz}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-22,3 - 3,7 \pm \sqrt{(-22,3 + 3,7)^2 + 4 \cdot 5,8^2} \right].$$

$$S_2 = -1 \text{ МПа}, S_3 = -25 \text{ МПа}, S_1 = S_q = 64,4 \text{ МПа}.$$

Эквивалентные напряжения по IV теории прочности равны

$$s^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_3 - s_2)^2]} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(64,4 + 1)^2 + (-1 + 25)^2 + (64,4 + 25)^2]} = 72 \text{ п [s]} = 100 \text{ МПа}.$$

Условие прочности удовлетворено.

12 РАСЧЕТ ОБЪЕМНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

12.1 Понятие об объемной задаче теории упругости

Тела, называемые массивами, для которых все размеры одного порядка, испытывают объемное напряженное состояние (рис. 12.1). В этом случае в произвольной точке тела возникает шесть компонентов напряжений: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z,$

$$t_{xy}, t_{yx}, t_{xz}, t_{zx}, t_{zy}.$$

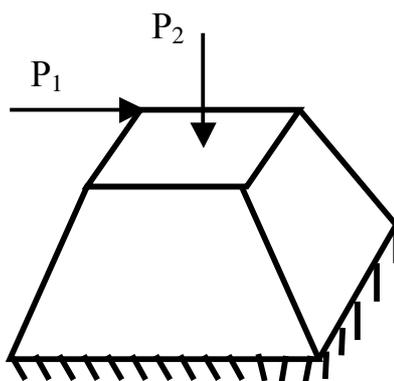


Рисунок 12.1- Массив

Обобщенный закон Гука для объемного напряженного состояния имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \end{aligned} \quad (12.1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Выразив напряжения через деформации, получим:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-2\mu)}{(1-2\mu)(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (12.2)$$

Вектор деформаций для объемного напряженного состояния через перемещения выражается с помощью зависимостей Коши (рис. 12.2):

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ g_{xy} \\ g_{xz} \\ g_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{dw}{dz} \\ \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \\ \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \\ \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \end{Bmatrix} \quad (12.3)$$

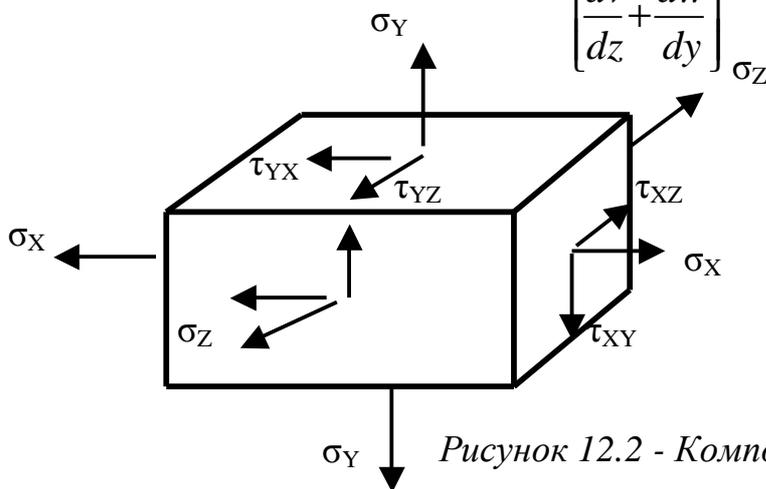


Рисунок 12.2 - Компоненты напряжений в точке

12.2 Функция перемещения для тетраэдра

При рассмотрении объемных задач МКЭ наиболее простым конечным элементом является тетраэдр (рис. 12.3). Теперь вектор перемещения узла имеет три составляющие

$$\{d\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}. \quad (12.4)$$

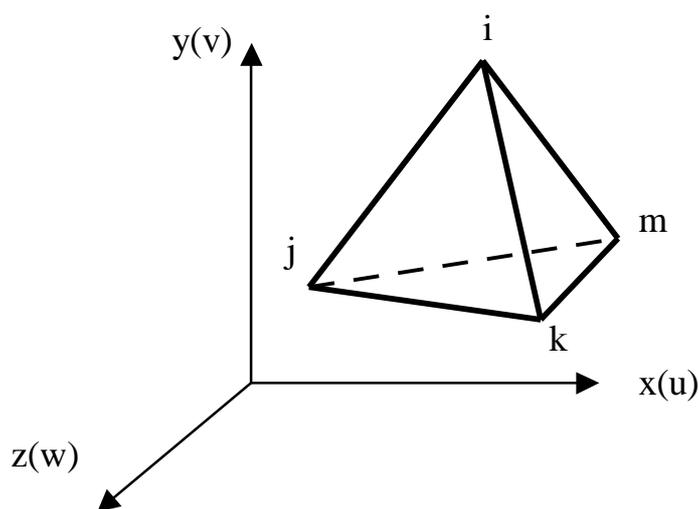


Рисунок 12.3 - Конечный элемент в виде тетраэдра

Функция перемещения u , v или w теперь представляет полином, состоящий из четырех составляющих, т.к. тетраэдр имеет четыре узла:

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z. \quad (12.5)$$

Коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 и a_3 выражаем через перемещения узлов:

$$\begin{aligned} U_i &= a_0 + a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i, \\ U_j &= a_0 + a_1x_j + a_2y_j + a_3z_j, \\ U_k &= a_0 + a_1x_k + a_2y_k + a_3z_k, \\ U_m &= a_0 + a_1x_m + a_2y_m + a_3z_m. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Решая систему уравнений с помощью определителей, определяем a_0 , a_1 , a_2 и a_3 :

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i & z_i \\ u_j & x_j & y_j & z_j \\ u_k & x_k & y_k & z_k \\ u_m & x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}}, \quad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i & z_i \\ 1 & u_j & y_j & z_j \\ 1 & u_k & y_k & z_k \\ 1 & u_m & y_m & z_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}}, \quad (12.7)$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i & z_i \\ 1 & x_j & u_j & z_j \\ 1 & x_k & u_k & z_k \\ 1 & x_m & u_m & z_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}}, \quad a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & u_i \\ 1 & x_j & y_j & u_j \\ 1 & x_k & y_k & u_k \\ 1 & x_m & y_m & u_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}}.$$

Проанализировав знаменатель этих коэффициентов, убеждаемся, что он равен δV :

$$\delta V = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}. \quad (12.8)$$

Подставив значения этих коэффициентов в выражение (12.5) и выполнив преобразования, получим

$$u = \frac{1}{\delta V} \begin{vmatrix} a_i + b_i x + c_i y + d_i z & a_j + b_j x + c_j y + d_j z & a_k + b_k x + c_k y + d_k z \\ a_m + b_m x + c_m y + d_m z & & \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (12.9)$$

(аналогично получим функции v и w), где

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}; \quad b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_m & z_m \end{vmatrix};$$

(12.10)

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_m & z_m \end{vmatrix}; \quad d_i = - \begin{vmatrix} 1_j & x_j & y_j \\ 1_k & x_k & y_k \\ 1_m & x_m & y_m \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты a_j, b_j, a_m, d_m получаются круговой подстановкой индексов $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow i$.

12.3 Векторы деформаций и напряжений

Подставляем значения функции u, v и w из выражения (12.9) в выражение (12.3), получим вектор деформаций элемента.

$$\{\mathbf{e}\} = \frac{1}{6v} \begin{vmatrix} b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_k & 0 & 0 & b_m & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_k & 0 & 0 & c_m & 0 \\ 0 & 0 & d_i & 0 & 0 & d_j & 0 & 0 & d_k & 0 & 0 & d_m \\ c_i & b_i & 0 & c_j & b_j & 0 & c_k & b_k & 0 & c_m & b_m & 0 \\ d_i & 0 & b_i & d_j & 0 & b_j & d_k & 0 & b_k & d_m & 0 & b_m \\ 0 & d_i & c_i & 0 & d_j & c_j & 0 & d_k & c_k & 0 & d_m & c_m \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ u_k \\ v_k \\ w_k \\ u_m \\ v_m \\ w_m \end{Bmatrix} \quad (12.11)$$

или $\{\mathbf{\epsilon}\} = \mathbf{B} \{\delta\}^e$, где $\{\delta\}^e$ - вектор перемещений узлов элемента,

$$[B] = \frac{1}{6v} \begin{vmatrix} b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_k & 0 & 0 & b_m & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_k & 0 & 0 & c_m & 0 \\ 0 & 0 & d_i & 0 & 0 & d_j & 0 & 0 & d_k & 0 & 0 & d_m \\ c_i & b_i & 0 & c_j & b_j & 0 & c_k & b_k & 0 & c_m & b_m & 0 \\ d_i & 0 & b_i & d_j & 0 & b_j & d_k & 0 & b_k & d_m & 0 & b_m \\ 0 & d_i & c_i & 0 & d_j & c_j & 0 & d_k & c_k & 0 & d_m & c_m \end{vmatrix}. \quad (12.12)$$

Умножив выражение (12.11) на матрицу упругости, получим вектор напряжений

$$\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\}^e, \quad (12.13)$$

где $[D]$ - матрица упругости.

$$[D] = \frac{E(1-2\mu)}{(1-2\mu)(1+\mu)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{vmatrix}. \quad (12.14)$$

12.4 Матрица жесткости для тетраэдра

Подставив значения матриц $[D]$ и $[B]$ в выражение (1.6), получим матрицу жесткости конечного элемента. Так как в матрице $[B]$ коэффициенты a , b , c , и d не зависят от X , Y , и Z , то имеем

$$[K]^l = [B]^T [D] [B] V. \quad (12.15)$$

12.5 Функция перемещений и матрица жесткости для параллелепипеда

При выборе конечного элемента в виде тетраэдра, хотя это и наиболее простой элемент, трудно представить разбивку объемного тела в виде набора пирамид. Значительно проще представить разбивку массива на параллелепипеды (рис. 12.4). Начало координат помещаем в центр параллелепипеда. Вектор перемещений узла имеет три составляющих: u , v и w .

$$\{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}.$$

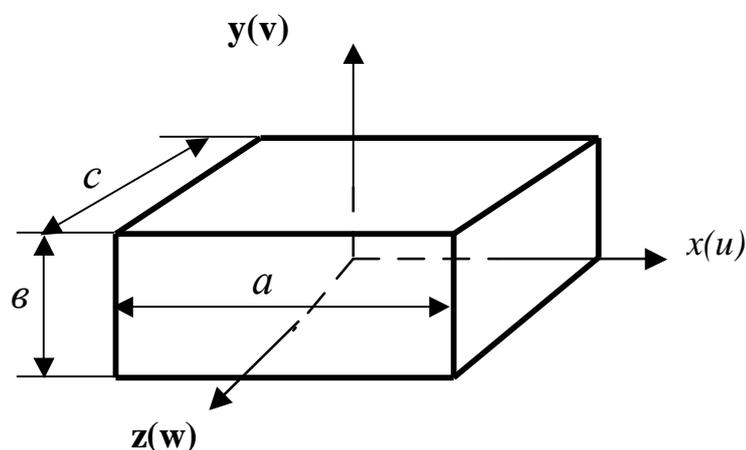


Рисунок 12.4 - Конечный элемент в виде параллелепипеда

Функцию перемещений представляем в виде:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_8 \end{bmatrix} \{d\}^T, \quad (12.16)$$

где N_1, N_2, \dots, N_8 - функции формы, изменяющиеся от 0 до 1:

$$N_1 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta),$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta),$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta),$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta),$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta),$$

$$N_6 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta),$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta),$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta),$$

где $\xi = \frac{2x}{a}$; $\eta = \frac{2y}{b}$; $\zeta = \frac{2z}{c}$; $\{d\}^1$ - вектор перемещений узлов

элемента, состоящий из 24 перемещений (8 узлов \times 3 степени свободы).

Подставив функции перемещений (12.16) в зависимости Коши (12.3), определим вектор деформации, куда входит матрица $|B|$.

Как и для плоской задачи теории упругости при выборе прямоугольных элементов, в подынтегральном выражении матрицы жесткости содержатся переменные, зависящие от x , y , и z . Коэффициенты матрицы жесткости в параллелепипеде можно найти в книге [9].

13 РАСЧЕТ ПЛАСТИН

13.1 Понятие о пластинах. Гипотеза Кирхгофа

Оболочкой называют тело, у которого один размер – толщина значительно меньше остальных (рис.13.1, а): $\frac{t}{b} \geq 5$.

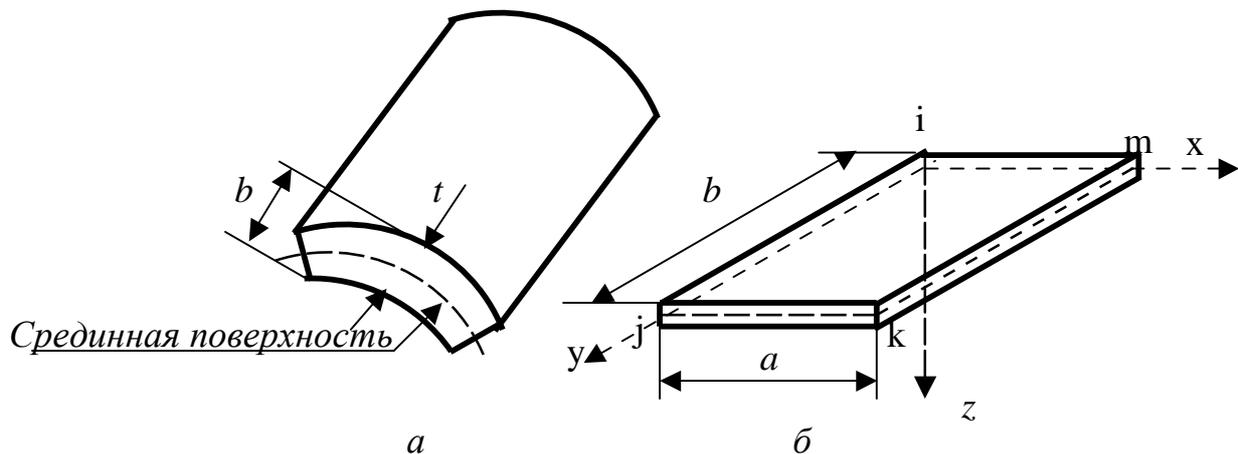


Рисунок 13.1 – Тонкостенные конструкции:
а - оболочка; б - пластина

Поверхность, проходящая через середину толщины, называют срединной поверхностью. Если срединная поверхность переходит в плоскость, то оболочка переходит в пластину (рис.13.1, б).

Пластиной называют тело, ограниченное двумя плоскостями, расстояние между которыми h (толщина пластины) мало по сравнению с размерами этих плоскостей.

Линия пересечения срединной плоскости с ограничивающими пластину боковыми поверхностями образует контур пластины.

Пластины, у которых толщина не превышает одной пятой меньшего размера, называют тонкими.

Во всех задачах, которые были рассмотрены выше, основные зависимости между напряжениями и деформациями приведены в точной форме, хотя во многих задачах решение находилось приближенно.

В классической теории пластин, чтобы упростить задачу и свести ее к двумерной, с самого начала вводятся некоторые гипотезы, называемые гипотезами Кирхгофа. Они заключаются в следующем:

1 Точки пластины, расположенные до ее изгиба на прямой, нормальной к срединной плоскости, при изгибе остаются на этой прямой. Эта прямая поворачивается, оставаясь нормальной к изогнутой срединной плоскости. Данная гипотеза аналогична гипотезе плоских сечений в теории изгиба балок, и ее часто называют гипотезой прямых нормалей.

2 На основе гипотезы прямых нормалей установлен линейный закон изменения по толщине нормальных напряжений изгиба и касательных напряжений кручения и получены формулы для углов поворота и прогибов.

3 Слои пластины, параллельные срединной плоскости, не давят друг на друга. Из этой гипотезы следует, что в любом сечении пластины, параллельном срединной плоскости, нормальные напряжения равны нулю и каждый элемент слоя пластины, параллельного срединной плоскости, в общем случае изгиба находится в плоском напряженном состоянии.

4 Кроме того, принимают, что материал пластины однороден, изотропен, а возникающие напряжения ниже предела пропорциональности, и поэтому напряжения и деформации связаны между собой законом Гука.

5 Интенсивности изгибающих моментов вдоль оси X и Y в пластине принято обозначать через M_x и M_y (рис. 13.2), а интенсивность крутящих моментов – через M_{xy} .

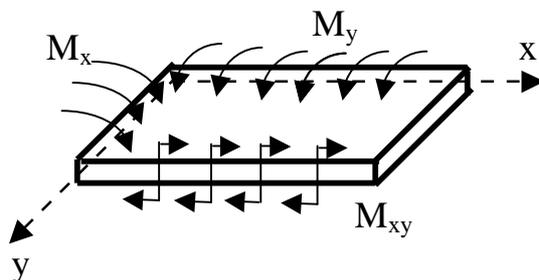


Рисунок 13.2 - Распределенные моменты M_x , M_y , M_{xy}

13.2 Связь между перемещениями, деформациями и усилиями

При изгибе пластины все точки перемещаются перпендикулярно ее плоскости. Эти перемещения (рис.13.3) называют прогибами. Все элементы деформирования выражают через прогибы.

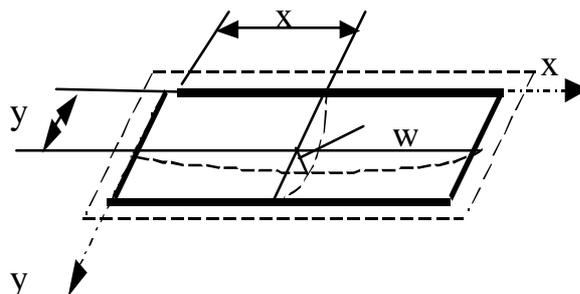


Рисунок 13.3 - Схема изгиба пластины

Нормали к срединной поверхности при изгибе проворачиваются относительно оси X и Y на углы θ_x и θ_y соответственно:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (13.1)$$

Из рисунка 13.4, видно, что $u = q_y z = z \frac{\partial w}{\partial x}$, аналогично $v = q_x z = z \frac{\partial w}{\partial y}$.

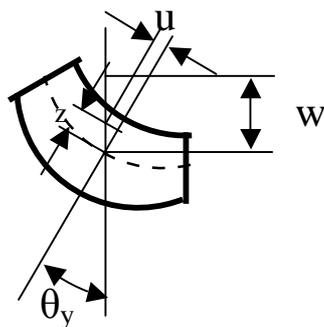


Рисунок 13.4

Так как при изгибе имеем плоское напряженное состояние, то справедливы зависимости Коши:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix},$$

куда подставляем перемещения U и V:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (13.2)$$

Вектор напряжений

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-m^2)} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-m}{2} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Ez}{(1-m^2)} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-m}{2} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (13.3)$$

Распределение напряжений по толщине пластины показано на рис.13.5.

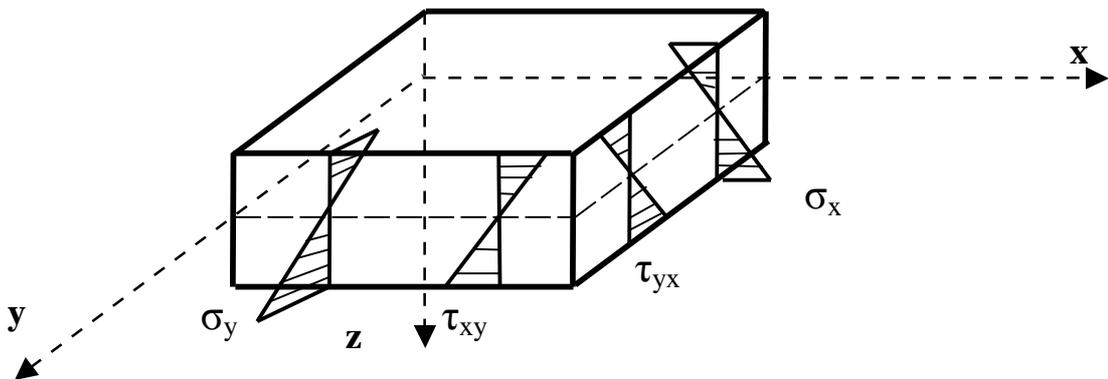


Рисунок 13.5 - Распределение напряжений при изгибе пластины

Определим моменты M_x , M_y и M_{xy} . Они определяются из условия равновесия внутренних усилий

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} s_x z dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{Ez^2}{1-m^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz = \frac{Et^3}{12(1-m^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Обозначим через D выражение $\frac{Et^3}{12(1-m^2)}$, которое называется цилиндрической жесткостью. С учетом этого получим вектор усилий:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = |D| \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-m}{2} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (13.4)$$

13.3 Функция перемещений для прямоугольного элемента

Для прямоугольной пластины (см. рис.13.1,б) в каждой узловой точке вводятся перемещения, которые имеют по три компоненты: перемещение ω_i в направлении Z , угол поворота θ_{x_i} вокруг оси X и угол поворота θ_{y_i} вокруг оси Y .

Для определения функции формы по двенадцати параметрам удобно использовать полиномы. При этом в полном полиноме четвертой степени необходимо опустить часть членов.

Выражение

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3 \quad (13.5)$$

имеет определенные преимущества. В частности, вдоль любой линии $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ перемещение ω будет изменяться по кубическому закону. Все внешние границы и границы между элементами состоят именно из таких линий. Поскольку полином третьей степени единственным образом определяется четырьмя постоянными, перемещения вдоль границы однозначно определяются значениями перемещений и углов наклона в узловых точках на концах этой границы. А так как для смежных элементов значения на концах границы одинаковы, вдоль любой границы между элементами функция ω будет непрерывной.

Постоянные a_1, \dots, a_{12} определяются из системы двенадцати уравнений, связывающих значения ω углов наклона в узловых точках, которые получаются в результате подстановки координат этих точек.

Например:

$$\begin{aligned} \omega_i &= a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + \dots, \\ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_i &= \theta_{y_i} = a_3 + \dots, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_i = \theta_{y_i} = a_2 + \dots$$

Эти двенадцать уравнений можно записать в матричной форме:

$$\{\delta\}^e = |c|\{a\}, \quad (13.6)$$

где $|c|$ - матрица размерности 12x12, зависящая от узловых координат, а $\{a\}$ - вектор, содержащий 12 неизвестных постоянных.

Обращая систему (13.6), получаем

$$\{a\} = |c|^{-1} \{\delta\}^e. \quad (13.7)$$

Выражение для перемещений внутри элемента теперь можно записать в стандартной форме:

$$\{w\} = |N|\{d\}^e. \quad (13.8)$$

где $|N| = |N_i, N_j, N_k, N_e|$ - функции формы.

$$|N| = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)(1 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2), a\xi_1(\xi_0 + 1)^2(\xi_0 - 1)(\eta_0 + 1), \\ b\eta_1(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)^2(\eta_0 - 1) \end{bmatrix}, \quad (13.9)$$

где $\xi = \frac{x - x_c}{a}$; $\eta = \frac{y - y_c}{b}$; $x_0 = x_1x$; $h = hh_e$; x_c и y_c - координаты центра тяжести элемента.

Выражение для матрицы $|B|$ получается непосредственно из соотношений (13.9) и (13.2).

Матрица жесткости элемента определяется из интеграла

$$|K| = \iint |B|^T |D| |B| dx dy. \quad (13.10)$$

Так как в матрице $|B|$ имеем коэффициенты, зависящие от x и y , то при получении матрицы жесткости необходимо выполнить интегрирование, в результате чего получим матрицу 12x12, коэффициенты которой можно найти в одном из источников[9].

14 РАСЧЕТ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА

14.1 Общие понятия и определения

Как было ранее отмечено, МКЭ можно применить в самых разных задачах техники: в оценке прочности конструкции, в гидравлике, в электротехнике, в исследовании теплопроводности.

Самопроизвольный, необратимый процесс переноса теплоты в пространстве полем температуры называется теплообменом.

Перенос теплоты может осуществляться тремя способами: теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением.

Теплопроводность - перенос теплоты от более нагретых частиц тела к менее нагретым, приводящий к выравниванию температуры.

При теплопроводности перенос энергии в теле осуществляется в результате непосредственной передачи энергии от частиц (молекул, атомов, электронов), обладающих большей энергией, частицам с меньшей энергией.

Она характеризуется коэффициентом теплопроводности λ (в дальнейшем он обозначается через K_{xx} , K_{yy} и K_{zz}), измеряемым в ваттах на метр-кельвин (Вт/(м·К)).

Для газов: $\lambda = 0,1655$ (водород), $t = 0$;

$\lambda = 0,0226$ (воздух), $t = 4$.

Для металлов: $\lambda = 429$ (серебро), $t = 0$;

$\lambda = 86$ (железо);

$\lambda = 36$ (свинец).

Для жидкостей: $\lambda = 7,82$ (серебро), $t = 0$;

$\lambda = 0,599$ (вода), $t = 20$.

Для материалов: $\lambda = 0,16-0,25$ (дерево), $t = 18$;

$\lambda = 0,4-1,0$ (стекло), $t = 18$.

Конвекция (перенесение, доставка - лат.) – перенос теплоты в жидкостях, газах или сыпучих средах потоками вещества. Различают свободную, или естественную, и вынужденную конвекцию.

Естественная конвекция возникает при неравномерном нагреве (нагреве снизу) текучих или сыпучих веществ, находящихся в поле силы тяжести (или в системе, движущейся с ускорениями). Вещество, нагретое сильнее, имеет меньшую плотность и под действием архимедовой силы перемещается относительно менее нагретого вещества.

При вынужденной конвекции перемещение теплоты происходит главным образом под воздействием каких-либо устройств (насоса, мешалки и т.п.).

Интенсивность переноса теплоты здесь зависит не только от перечисленных выше факторов, но и от скорости вынужденного движения вещества.

Конвекция широко распространена в природе: в нижних слоях атмосферы (конвекция в атмосфере), в морях и океанах (конвекция в океане), в недрах Земли и на Солнце.

С помощью конвекции осуществляют охлаждение или нагревание жидкостей и газов в различных технических устройствах (конвективный теплообмен).

Для описания конвективной теплоотдачи используется формула

$$q_{\text{ст}} = \alpha(T_{\text{н}} - T_{\text{ст}}),$$

где $q_{\text{ст}}$ – плотность теплового потока на поверхности, Вт/м²;

α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·°С);

$T_{\text{н}} - T_{\text{ст}}$ – температуры среды (жидкости или газа) и поверхности соответственно.

ΔT часто называют *температурным напором*.

Лучистый теплообмен (тепловое излучение) – процесс распространения теплоты электромагнитными волнами, обусловленный лишь температурой и оптическими свойствами излучаемого тепла. Это излучение осуществляется за счет преобразования внедренной энергии тела (среды) в энергию излучения.

Существенное отличие лучистого теплообмена от других видов теплообмена заключается в том, что он может протекать и при отсутствии материальной среды, разделяющей поверхности теплообмена, т.к. осуществляется в результате распространения электромагнитного излучения. Он характеризуется значением потока падающего излучения $Q_{\text{пад}}$, который частично поглощается телом, а частично отражается от поверхности.

Любое тело, температура которого отлична от абсолютного нуля, испускает энергию, обусловленную нагревом тела. Это излучение называется собственным излучением тела и характеризуется потоком собственного излучения $Q_{\text{соб}}$.

Собственное излучение, отнесенное к единице поверхности тела, называется плотностью потока собственного излучения, или лучеиспускательной способностью тела.

14.2 Уравнения МКЭ для задачи переноса тепла

Для тепловой задачи уравнения МКЭ имеют вид:

$$[K]^T \{T\} = \{F\},$$

где $[K]^T$ – матрица теплопроводности конструкции;

$\{F\}$ – глобальный вектор нагрузки (тепловой).

$$[K]^T = \sum_{i=1}^n [K^T]^e,$$

где $[K^T]^e$ – матрица теплопроводности элемента.

$$[K^T]^e = \int_V [B]^T [D] [B] dV + \int_S h [N]^+ [N] dS,$$

где $\alpha = h$ – коэффициент теплообмена;

B – теплопроводность;

$[N]^+$ – конвекция.

Матрица $[B]$ зависит от координат узлов элементов, так же, как и для прочностных задач. Она получает дифференцированные функции формы.

$[D]$ – содержит коэффициенты теплопроводности.

$$[D] = \begin{vmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{vmatrix} \text{ – матрица свойств материала,}$$

где K_{xx}, K_{yy}, K_{zz} – коэффициенты теплопроводности λ в направлениях x , y и z .

$\alpha = h$ – коэффициент теплообмена, кВт/(м²·°С).

Для стационарного случая

$$[K]\{T\} = 0.$$

В общем случае

$$\{F\}^e = \int_V Q |N|^T dV + \int_S q |N|^T dS - \int_S h j |N|^T dS,$$

где Q – источник тепла;

$q = T$ – тепловой поток;

$h = \alpha$ – коэффициент теплообмена.

14.3 Расчет распределения температуры вдоль стержня

Интерполяционный полином для одномерного линейного элемента (рис. 14.1) имеет вид:

$$T = N_i T_i + N_j T_j,$$

где $N_i = (1 - \frac{x}{L}); N_j = \frac{x}{L}$.

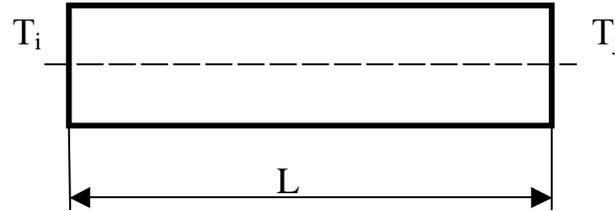


Рисунок 14.1- Конечный одномерный элемент

$$[N] = [N_i, N_j] = [1 - \frac{x}{L}; \frac{x}{L}],$$

$$|B| = \frac{dT}{dx} = \left| 1 - \frac{1}{L}; \frac{1}{L} \right|.$$

Матрица свойств материала сводится к одному коэффициенту:

$$\int |B|^T [D] |B| dV = \int_0^L \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{L} \\ 1 \\ \frac{1}{L} \end{array} \right| K_{xx} \left| -\frac{1}{L}; \frac{1}{L} \right| F dx = \frac{FK_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сравните с матрицей жесткости при растяжении стержня:

$$|K|^e = \frac{EF}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видно, здесь вместо жесткости стоит коэффициент теплопроводности

K_{xx} .

$$\begin{aligned} \int_S h |N|^T [D] dS &= hP \int_0^L \left| \begin{array}{c} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{array} \right| \left| 1 - \frac{x}{L}; \frac{x}{L} \right| dx = \\ &= \int_S h |N|^T [D] dS = \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$dS = PdX,$$

где P – периметр.

Матрица теплопроводности элемента получается сложением матриц

$$|K|^e = \frac{FK_{xx}}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{hPL}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Член в последнем выражении, описывающий конвекцию, исчезает, если $h = 0$ на границе элемента.

Вычисление интегралов в векторе сил элемента дает:

$$\int_V [N J]^T Q dV = QF \int_0^L \begin{vmatrix} 1 - \frac{X}{L} \\ \frac{X}{L} \end{vmatrix} dX = \frac{QFL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\int_S [N J]^T q dS = qP \int_0^L \begin{vmatrix} 1 - \frac{X}{L} \\ \frac{X}{L} \end{vmatrix} dX = \frac{qPL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Так как интеграл идентичен по форме второму, можно сразу записать

$$\int_S [N J]^T hT_\infty dS = \frac{hT_\infty L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

где T_∞ – температура окружающей среды.

Полное выражение для $\{F\}^e$ теперь имеет вид

$$\{F\}^e = \frac{QFL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{qPL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{hTPL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\{F\}^e = \left(\frac{QFL - qPL - hT_\infty PL}{2} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Примером одномерной задачи переноса тепла является задача об охлаждении стержня. Рассмотрим стержень, один конец которого соединен с источником тепла; через боковую поверхность стержня и другой его конец тепло отводится в окружающую сферу.

14.4 Пример

Требуется вычислить распределение температуры в одномерном стержне (рис.14.2) с характеристиками: $T_{\infty} = 40^{\circ}\text{C}$; $h = 10\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{K})$, температура с левой стороны стержня равна 150°C .

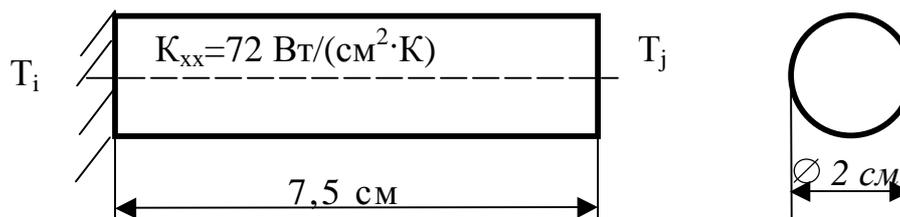


Рисунок 14.2

$$\frac{FK_{xx}}{L} = \frac{p \cdot 2^2}{4} \cdot \frac{72}{1,5} = 48p,$$

$$\frac{hPL}{6} = \frac{10 \cdot p \cdot 2 \cdot 1,5}{6} = 6p,$$

$$hT_{\infty}PL = 10 \cdot 40 \cdot p \cdot 2 \cdot 1,5 = 1200p,$$

$$hF = 10 \cdot p \cdot 1 = 10p,$$

$$hT_{\infty}F = 10 \cdot 40 \cdot p \cdot 1 = 400p.$$

Матрица теплопроводности для I –го элемента:

$$|K|_1^e = \frac{FK_{xx}}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{hPL}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 48\pi \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 5\pi \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \pi \begin{vmatrix} 58 & -43 \\ -43 & 58 \end{vmatrix}.$$

Для II – V элементов матрицы одинаковы и равны $|K|_I^e$.

Векторы нагрузки элемента

$$|F|^e = \frac{hT_{\infty}L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 600\pi \\ 600\pi \end{Bmatrix}.$$

В результате получили матрицу теплопроводности конструкции:

$$\begin{pmatrix} 58 & -43 & 0 & 0 & 0 \\ -43 & 116 & -43 & 0 & 0 \\ 0 & -43 & 116 & -43 & 0 \\ 0 & 0 & -43 & 116 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & -43 & 68 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 600 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1000 \end{Bmatrix}.$$

Для главного элемента учитывается отвод тепла.

Значение T_1 известно (150°C), так что система уравнений должна быть модифицирована перед решением. Эта модификация преобразует столбец правых частей к виду

$$\{F\}^T = | 8700 \quad 7650 \quad 1200 \quad 1200 \quad 1200 \quad 1000 |.$$

После решения системы имеем

$$|T|^T = | 150 \quad 82,6 \quad 59 \quad 48,6 \quad 44,2 \quad 42,6 |.$$

Для осесимметричной задачи матрица теплопроводности

$$|K|^e = 2\pi r \bar{B}^T |D| B \Delta,$$

где

$$|B| = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} c_i & c_j & c_k \\ b_i & b_j & b_k \\ \frac{a_i + b_i \bar{r} + c_i \bar{z}}{\bar{r}} & \frac{a_j + b_j \bar{r} + c_j \bar{z}}{\bar{r}} & \frac{a_k + b_k \bar{r} + c_k \bar{z}}{\bar{r}} \end{vmatrix};$$

$$|D| = \begin{vmatrix} I_z & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I_q \end{vmatrix} \frac{\kappa B m}{\text{м} \cdot ^{\circ} K}.$$

Условие $\{F\} = 0$ приводит к системе

$$\{K\}^T \{T\} = 0.$$

Для решения эта система должна быть преобразована, если известна нагрузка в некоторых узлах.

При горячем изостатическом прессовании это узлы, лежащие на поверхности заготовки. Если известна температура в одном из узлов, то преобразование системы уравнений представляет собой двух шаговую процедуру. Пусть, например, известно значение T_5 , тогда преобразование сводится к следующему:

- а) все коэффициенты пятой строки матрицы $\{K\}^T$, за исключением диагональных, приравниваются нулю. Диагональный член остается неизменным. Соответствующая компонента F_5 вектора $\{F\}$ заменяется на произведение $K_{55} T_5$;
- б) все остальные уравнения преобразуются вычитанием произведения $K_{j5} T_5$ из F_j и подстановкой $F_{j5} = 0 (j = 1..n, j \neq 5)$.

Для нестационарного случая, когда температура не остается постоянной, а является функцией времени, уравнение теплопроводности при решении МКЭ имеет вид:

$$[C] \frac{\partial T}{\partial t} + [K]^T \{T\} = 0.$$

Здесь учтено, что при горячем изостатическом прессовании отсутствуют внутренние источники тепла и конвективный теплообмен. Матрица теплоемкости $[C]$ определяется как сумма матриц $[C]^e$ отдельных элементов.

$$[C]^e = \int_V h [N]^T [N] dV,$$

где $h = R c \rho$, здесь R – абсолютная плотность;
 c – удельная теплоемкость, которая зависит от температуры;
 ρ – относительная плотность.

$$|N| = \frac{1}{2\Delta} [a_i + b_i \bar{r} + c_i \bar{z}; \quad ; \quad a_k + b_k \bar{r} + c_k \bar{z}].$$

При точечном интегрировании

$$|C|^e = \frac{\pi \bar{r}}{2\Delta} c R \rho \begin{vmatrix} a_i + b_i \bar{r} + c_i \bar{z} \\ a_k + b_k \bar{r} + c_k \bar{z} \end{vmatrix} \left| a_i + b_i \bar{r} + c_i \bar{z}; \quad ; \quad a_k + b_k \bar{r} + c_k \bar{z}; \right|.$$

Решение задачи теплопроводности МКЭ для нестационарного случая выполняется по следующей схеме: на первом этапе рассматривается квазистационарный случай, для которого определяется распределение температуры по кон-

струкции; затем определяется изменение температуры во время последующего этапа по отношению к предыдущему; после этого снова определяется распределение температуры с учетом $\frac{\partial\{T\}}{\partial t}$.

Вычислительный процесс повторяется до окончания цикла горячего изостатического прессования.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541с.
- 2 Л. Сегерпинд. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979.– 392с.
- 3 Рейтман М.И. Залог прочности. – М.: Стройиздат, 1979. – 134с.
- 4 Сахаров А.С. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев; Лейпциг: Выща школа, 1982. – 480с.
- 5 Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 280с.
- 6 Писаренко Г.С. Сопротивление материалов. – К.: Выща школа, 1986. – 775с.
- 7 Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986.– 612с.
- 8 Дарков А.В. Сопротивление материалов. – М.: Высш. школа, 1989. – 624с.
- 9 Варвак П.М. Метод конечных элементов. – К.: Выща школа, 1981. – 176с.
- 10 Мячников В.И. и др. Расчет машиностроительных конструкций методом конечных элементов. – М.: Машиностроение, 1989. – 520с.

Овчаренко Владимир Андреевич

**Учебное пособие
«Расчет задач машиностроения
методом конечных элементов»**

Редактор

Дудченко Елена Александровна

Подп. в печ.

Формат 60x84/16

Ризограф. печать.

Усл. печ. л. 8,0

Уч.-изд. л.

Тираж экз.

Заказ №

ДГМА. 84313, г.Краматорск, ул. Шкадинова, 72