Министерство образования и науки, молодежи и спорта
Донбасская государственная машиностроительная академия

Составитель Костиков А.А.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

для студентов направлений подготовки

6.040303 «Системный анализ»

Краматорск 2012

УДК 519, 92 (076.5)

Конспект лекций по дисциплине «Уравнения математической физики»(студентов 3-го курса специальности 6.040303 «Системный анализ» заочной формы обучения)
/ Сост. А.А.Костиков - Краматорск, ДГМА, 2012. – 46С.

В конспекте рассматриваются основные типы уравнений математической физики и различные методы их решения. Приводится физическая интерпретация полученных результатов, рассматриваются теоремы существования и единственности решений краевых задач. Дано значительное количество примеров и задач различного уровня сложности.

Конспект лекций является учебным пособием для студентов, обучающихся по специальности системный анализ.

.

Лекция 1.

Уравнения математической физики. Постановка задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка.

Рассматриваемые вопросы.

1. Предмет математической физики.
2. Основные уравнения математической физики. Математические модели.
3. Постановка задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка.

Общие положения.

Пусть $u(x, y)$ – некоторая неизвестная функция $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; $\ldots$ и т.д. ее частные производные различного порядка.

Рассмотрим уравнение

$$F\left(x,\, y,\, u(x,\, y),\, \frac{\partial u}{\partial x},\, \frac{\partial u}{\partial y},\, \ldots\right) = 0, \qquad (1.1)$$

связывающие независимые переменные x, y, искомую функцию $u(x, y)$ и ее частные производные различного порядка. Уравнение (1.1) называют дифференциальным уравнением в частных производных.

Порядок уравнения определяется наивысшим порядком частной производной, входящей в это уравнение.

Примеры.

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ – дифференциальное уравнение первого порядка.

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$ – дифференциальное уравнение второго порядка

и т.п.

Решением дифференциального уравнения называется любая функция $u(x, y)$, обращающая его в тождество. Задачи, связанные с решением дифференциального уравнения в частных производных, как правило, более сложные по сравнению с задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Мы знаем, что общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка зависит от n произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n. Более сложная ситуация складывается при решении дифференциальных уравнений в частных производных. Например, решением дифференциального уравнения $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ является <u>любая</u> функция $u = f(y)$, т.е. общее решение зависит от бесконечного числа функций, зависящих только от одной переменной

Или $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Рассмотрим $u(x, y) = f(x\text{-}y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 1 \qquad (\text{где } z = x\text{-}y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot (-1)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}+(-1)\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

при произвольной функции $f(z)$.

Предмет теории уравнений в частных производных составляет изучение дифференциальных уравнений, описывающих то или иное явление природы, по преимуществу физической. Наш курс будет посвящен по преимуществу уравнениям в частных производных второго порядка.

В связи с этим рассмотрим некоторые физические задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений в частных производных.

Задача 1 (о поперечных колебаниях струны).

Пусть струна длиной l натянута с силой T_0 и находится в прямолинейном положении равновесия. В момент времени $t=0$ точкам струны сообщаются некоторые отклонения и скорости.

Поставим задачу об определении малых поперечных колебаний точек струны при $t>0$, если концы струны:

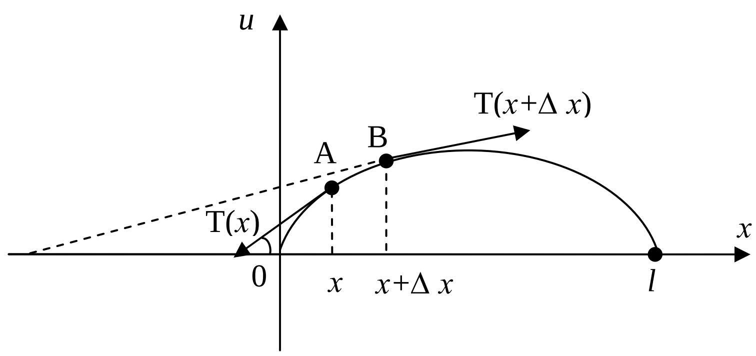
а) жестко закреплены,

б) свободны,

в) двигаются в поперечном направлении по заданным законам.

Сопротивлением среды и силой тяжести пренебрегаем.

Решение. Пусть ось *ох* совпадает с первоначальным положением струны в положении равновесия



Выделим участок струны от A до B и спроектируем все действующие на этот участок силы на ось u. Согласно принципу Даламбера сумма проекций должна равняться нулю.

$$S_{AB}=\int_{x}^{x+\Delta x}\sqrt{1+(u'_x)^2}\,dx\cong\Delta x,$$

так как мы рассматриваем малые колебания и $(u'_x)^2$ – малой величиной пренебрегаем.

Это значит, что удлинение участка струны не происходит и, следовательно, по закону Гука величина натяжения $T_0=|T|$ не зависит ни от времени, ни от x.

Проекция силы натяжения

$$T_0\sin\alpha(x+\Delta x)-T_0\sin\alpha(x)\cong T_0(tg\alpha(x+\Delta x)-tg\alpha(x))=T_0(u'_x(x+\Delta x)-u'_x(x))\cong T_0u''_{xx}(x,t)\Delta x.$$

Пусть $p(x,t)$ – непрерывная линейная плотность внешних сил. Тогда на AB действует вдоль оси u сила $p(x,t)\Delta x$.

Для нахождения силы инерции воспользуемся выражением $-mu''_{tt}$, где $m=\rho\Delta x$. Тогда

$$\left(T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p(x,t)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\Delta x=0$$

или

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p(x,t)=0.$$

Это и есть уравнение вынужденных колебаний струны.

Если ρ=const и $a^2=\frac{T_0}{\rho}$, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t). \tag{1.2}$$

Кроме того, искомая функция $u(x,y)$ должна удовлетворять начальным условиям:

$u(x\ t)\big|_{t=0}=\varphi(x)$ – начальное положение струны

$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$ – начальный импульс.

Краевые условия:

а) струна закреплена на концах

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{x=0}=0 \\ u(x,t)\big|_{x=l}=0 \end{cases},$$

б) в случае свободных концов должно быть

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$$

в) $\left.\begin{matrix} u\big|_{t=0}=\mu_1(t) \\ u\big|_{t=l}=\mu_2(t) \end{matrix}\right\}$ – законы движения концов струны.

Задача 2 (Уравнение неразрывности. Задача обтекания).

Рассмотрим движение идеальной жидкости (газа), т.е. жидкости в которой отсутствуют силы вязкости.

Пусть $\overline{V}(v_1,v_2,v_3)$ – вектор скорости движения жидкости, $\rho(x,t)$ –ее плотность, $f(x,t)$ – интенсивность источников. Выделим в жидкости некоторый объем ω, ограниченный поверхностью S. Изменение массы жидкости внутри ω в единицу времени равно

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \rho(x,t)dx=\int_\omega \frac{\partial\rho}{\partial t}dx$$

с другой стороны это изменение должно равняться приращению количества Q_1 жидкости за счет источников

$$Q_1=\int_\omega f(x,t)dx,$$

минус количество Q_2, вытекающей через S

$Q_2=\int_S \rho(\bar v\cdot\bar n\,t)ds=\int_\omega div(\rho\cdot\bar v)dx$ – формула Остроградского-Гауса,

где $\bar n$ – внешняя нормаль к S, таким образом

$$\int_\omega(\upsilon_t+div(\rho\cdot\bar v)-f)dx=0.$$

В силу произвольности ω

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\bar{v})=f(x,t). \qquad (1.3)$$

Это и есть уравнение неразрывности движения идеальной жидкости.

Рассмотрим теперь задачу обтекания твердого тела Ω с границей S потенциальным потоком несжимаемой однородной жидкости, имеющей заданную скорость $\bar{v}_0$ на бесконечности при отсутствии источников. В этом случае $\rho = const$ и $f\equiv 0$. Поэтому: $div\,\bar{v}=0$ при условии $v_n\big|_S=0.$

Пусть u –потенциал скоростей, т.е. $V = grad u,$ тогда

$$div\,grad\,u=0 \Rightarrow \Delta u=0 \quad \text{и}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0.$$

$$\bar{v}(x)\underset{|x|\to\infty}{\to}\bar{v}_0,$$

поэтому

$$\begin{cases}\Delta u=0 & x\in\Omega\\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0 & \lim\limits_{|x|\to\infty} grad\,u=\bar{v}_0\end{cases} \qquad (1.4)$$

Задача 3 (о распространении тепла).

Вывод уравнения теплопроводности базируется на законе Фурье, согласно которому количество тепла, проходящего за время Δt через малую площадку $\Delta S,$ лежащую внутри рассматриваемого тела, определяется формулой

$$\Delta Q=-k(x,u)\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\Delta S\Delta t,$$

где $\bar{n}$ – нормаль к $\Delta S,$ направленная в сторону передачи тепла, $k(x, u)$ – коэффициент внутренней теплопроводности, $u(x, t)$ – температура тела в точке $x=(x_1, x_2, x_3)$ в момент времени $t.$ Предполагается, что тело изотропно в отношении теплопроводности, т.е. $k(x, u)$ не зависит от направления площадки.

Выделим внутри тела объем ω, ограниченный S. Согласно закону Фурье, количество тепла, втекающее через S за промежуток $[t_1, t_2],$ равно

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\int_S k\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_\omega div(kgrad\,u)d\omega.$$

Если $F(x,t)$ – плотность тепловых источников, то количество тепла, образованного за их счет в ω за указанный промежуток времени, равно

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\int_\omega F(x,t)d\omega.$$

Общее количество тепла притекающего в ω за время от t_1 до t_2 можно посчитать и за счет приращения температуры

$$\int_\omega c\rho(u(x,t_2)-u(x,t_1))dx=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_\omega c\rho\frac{\partial u}{\partial t}d\omega,$$

где $c(x)$ и $\rho(x)$ – теплоемкость и плотность вещества. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\int_\omega\left(c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-div(k\,grad\,u)-F(x,t)\right)d\omega=0.$$

В силу произвольности ω и промежутка времени $t_1, t_2,$ следует равенство

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-div(k\,grad\,u)=F(x,t), \qquad (1.5)$$

называемое уравнением теплопроводности. Если $k(x,u)=k(x)$ (не зависит от температуры), то уравнение (1.5) становится линейным. Если же тело однородно $\left(c(x)=const,\quad \rho=const\right)$ и уравнение (1.5) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\Delta u+f(x,t). \tag{1.6}$$

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса распространения тепла необходимо кроме уравнения, задать начальное распределение температуры

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \text{ – начальное условие}$$

и температурный режим на границе

$$u\big|_{\Gamma}=\varphi(x,t) \text{ – граничное условие,}$$

(возможны и другие варианты задания граничных условий).

Рассмотренные три физические задачи приводят нас к решению трех различных типов дифференциальных уравнений второго порядка. Все дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка можно условно разделить на три класса:

1) уравнения гиперболического типа,
2) уравнения эллиптического типа,
3) уравнения параболического типа.

Лекция 2.

Классификация уравнений в частных производных..

Рассматриваемые вопросы.

1. Уравнения гиперболического типа.
2. Уравнения параболического типа.
3. Уравнения эллиптического типа.

При рассмотрении вопроса о классификации дифференциальных уравнений в частных производных ограничимся дифференциальными уравнениями второго порядка.

В общем виде такое уравнение может быть записано в виде:

$$F\left(x,\,y,\,u,\,\frac{\partial u}{\partial x},\,\frac{\partial u}{\partial y},\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0, \tag{2.1}$$

если искомая функция u зависит от двух переменных.

Однако и в дальнейших рассуждениях будем рассматривать уравнения, линейные относительно старших производных

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F_1\left(x,\,y,\,u,\,\frac{\partial u}{\partial x},\,\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2.2}$$

где $a_{ij}=a_{ij}(x,\,y)$ – заданные функции.

Произведем классификацию уравнений вида (2). Введем новые независимые переменные

$$\xi=\varphi(x,\,y);\qquad \eta=\psi(x,\,y),$$

где функции φ и ψ – достаточно гладкие и $\begin{vmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y\\ \psi'_x & \psi'_y\end{vmatrix}\neq 0$.

По правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=u'_{\xi}.\varphi'_x+u'_{\eta}.\psi'_x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=u'_{\xi}.\varphi'_y+u'_{\eta}.\psi'_y.$$

Далее

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{\xi^2}\left(\varphi'_x\right)^2+2u''_{\xi\eta}\varphi'_x\psi'_x+u''_{\eta^2}\left(\psi'_x\right)^2+u'_{\xi}\varphi''_{x^2}+u'_{\eta}\psi''_{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=u''_{\xi^2}\varphi'_x\varphi'_y+u''_{\xi\eta}(\varphi'_x\psi'_y+\varphi'_y\psi''_x)+u''_{\eta^2}\psi'\psi'_y+u'_{\xi}\varphi''_{xy}+u'_{\eta}\psi''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''_{\xi^2}\left(\varphi'_y\right)^2+2u''_{\xi\eta}\varphi'_y\psi'_y+u''_{\eta^2}\left(\psi'_y\right)^2+u'_{\xi}\varphi''_{y^2}+u'_{\eta}\psi''_{y^2}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (2) и, собирая подобные члены, получим

$$\bar{a}_{11}u''_{\xi^2}+2\bar{a}_{12}u''_{\xi\eta}+\bar{a}_{22}u''_{\eta^2}=F_2\left(\xi,\eta,u,u'_{\xi},u'_{\eta}\right), \tag{2.3}$$

где

$$\begin{cases}\bar{a}_{11}=a_{11}(\varphi'_x)^2+2a_{12}\;\varphi'_x\varphi'_y+a_{22}\left(\varphi'_y\right)^2\\ \bar{a}_{22}=a_{11}(\psi'_x)^2+2a_{12}\;\psi'_x\varphi'_y+a_{22}\left(\psi'_y\right)^2\\ \bar{a}_{12}=a_{11}\varphi'_x\psi'_x+a_{12}\;(\varphi'_x\psi'_y+\varphi'_y\psi'_x)+a_{22}\varphi'_y\varphi'_y\end{cases}. \tag{2.4}$$

Подберем теперь функцию $\varphi(x,\,y)$ так, чтобы $\bar{a}_{11}=0,$ т.е.

$$a_{11}(\varphi'_x)^2+2a_{12}\varphi'_x\varphi'_y+a_{22}\left(\varphi'_y\right)^2=0. \tag{2.5}$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Решение этого уравнения связано с решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{11}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0, \tag{2.6}$$

которое называют уравнением характеристик.

Имеет место.

Теорема. Для того, чтобы функция $\varphi(x,\,y)$ была решением уравнения (2.5) необходимо и достаточно, чтобы соотношение $\varphi(x,\,y)=c$ определяло один из общих интегралов дифференциального уравнения (2.6).

Необходимость. Если $\varphi(x,\,y)$ – решение уравнения (2.5), то имеется тождество

$$a_{11}(\varphi'_x)^2+2a_{12}\varphi'_x\varphi'_y+a_{22}\left(\varphi'_y\right)^2=0,$$

которое преобразуется к виду:

$$a_{11}\left(\frac{-\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)+a_{22}=0, \tag{2.7}$$

но равенство $\varphi(x,\,y)=c$ определяет неявную функцию $y=y(x,\,c),$ для которой $\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ и тогда тождество (2.7) означает, что $y=y(x,\,c)$ есть общее решение уравнения (6).

Достаточность. Если $\varphi(x,\,y)=c$ есть общий интеграл уравнения (2.6), то выполнено тождество (7) и стало быть $\varphi(x,\,y)$ есть решение уравнения (2.5).

Из этой теоремы следует, что решение уравнения (2.5) сведено к решению уравнения (2.6) характеристик.

Далее рассмотрим три случая

1. $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0,$ то уравнения (2.2) называют уравнением гиперболического типа. В этом случае уравнения характеристик распадается на два

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}.$$

Пусть $\varphi(x, y) = c_1$ и $\psi(x, y) = c_2$ – общие интегралы этих уравнений. Тогда $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ решения уравнения (2.5). Если эти функции взять за новые переменные, то обратится в нуль не только коэффициент $\bar{a}_{11}$, но и $\bar{a}_{22}$.

Таким образом мы получили первую форму для гиперболических уравнений

$$u''_{\xi\eta} = F_3\left(\xi, \eta, u, u'_{\xi}, u'_{\eta}\right).. \tag{2.8}$$

Употребительно и иное каноническое представление. Сделаем еще замену

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}; \qquad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

Тогда $u''_{\xi\eta} = \frac{1}{4}u''_{\alpha^2} - \frac{1}{4}u''_{\beta^2}$ и значит

$$u''_{\alpha^2} - u''_{\beta^2} = F_4\left(\alpha, \beta, u, u'_{\alpha}, u'_{\beta}\right).. \tag{2.9}$$

2. Если $D < 0,$ то уравнение (2) называют уравнением эллиптического типа. В этом случае уравнение характеристик сводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям с комплексно сопряженными правыми частями

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm i\sqrt{|D|}}{a_{11}}.$$

Общие интегралы $\varphi(x, y) = c_1$ и $\psi(x, y) = c_2$ будут иметь комплексно сопряженные левые части. Аналогично предыдущему придем к уравнению вида (2.8), в котором путем замены $\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}; \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2i}$ приводим к виду:

$$u''_{\alpha^2} + u''_{\beta^2} = F_5\left(\alpha, \phi, u, u'_{\alpha}, u'_{\beta}\right),$$

так как $\begin{matrix} u'_{\xi} = u'_{\alpha}\frac{1}{2} + u'_{\beta}\frac{1}{2} \\ u'_{\eta} = u'_{\alpha}\frac{1}{2} + u'_{\beta}\left(\frac{1}{2i}\right) \end{matrix}$, а $u''_{\xi\eta} = u''_{\alpha^2}\frac{1}{4} + u''_{\beta^2}\frac{1}{4}.$

Замечание. При приведении к каноническому уравнению достаточно сразу взять

$\alpha = \operatorname{Re}\varphi(x, y)$

$\beta = \operatorname{Jm}\varphi(x, y).$

3. $D = 0.$ В этом случае уравнение (2.2) называется уравнением параболического типа.

Уравнение характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

Найдем общий интеграл $\varphi(x, y) = c.$ Функцию $\varphi(x, y)$ возьмем за новую переменную ξ, а за переменную η возьмем любую $\psi(x, y),$ не связанную с $\varphi(x, y)$. Тогда $\bar{a}_{11} = 0.$ Покажем, что одновременно обратится в нуль и $\bar{a}_{12}.$ Можно считать, что $a_{11} > 0$ и $a_{22} > 0$

$$0 = \bar{a}_{11} = \left(\sqrt{a_{11}}\varphi'_x\right)^2 + 2\sqrt{a_{11}a_{22}}\varphi'_x\varphi'_y + \left(\sqrt{a_{22}}\varphi'_y\right)^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\varphi'_x + \sqrt{a_{22}}\varphi'_y\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a_{11}}\varphi'_x + \sqrt{a_{22}}\varphi'_y = 0.$$

Тогда разлагая $\overline{a}_{12}$. на множители

$$\overline{a}_{12} = \left(\sqrt{a_{11}}\varphi'_x + \sqrt{a_{22}}\varphi'_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\psi'_x + \sqrt{a_{22}}\psi'_y\right) = 0.$$

Теперь в уравнении слева осталось только

$$u''_{\eta^2} = F_6\left(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\mu\right). \tag{2.10}$$

Примеры.

1. $u''_{x^2} + 2u''_{xy} + 2u''_{y^2} = 0$, $\quad D = 1^2 - 1 \cdot 2 < 0 \;\Rightarrow$ эллиптический тип.

Уравнение характеристик

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{1} = 1 \pm i$$

$$y = (1+i)x + c$$

$$y - (1+i)x = c$$

$$\operatorname{Re}\varphi(x, y) = y - x$$

$$\operatorname{Im}\varphi(x, y) = -x$$

$$\alpha = y - x; \quad \beta = -x$$

$$u'_x = u'_\alpha(-1) + u'_\beta(-1)$$

$$u'_y = u'_\alpha \cdot 1 + u'_\beta \cdot 0$$

$$u''_{x^2} = u''_{\alpha^2}(-1)^2 - u''_{\alpha\beta}(-1) + u''_{\alpha\beta}(-1)(-1) + u''_{\beta^2}(-1)^2 = u''_{\alpha^2} + 2u''_{\alpha\beta} + u''_{\beta^2},$$

$$u''_{y^2} = u''_{\alpha^2},$$

$$u''_{xy} = u''_{\alpha^2}(-1)(+1) + u''_{\alpha\beta}(-1)(1) = -u''_{\alpha^2} - u''_{\alpha\beta}$$

$$u''_{\alpha^2} + 2u''_{\alpha\beta} + u''_{\beta^2} + (-2u''_{\alpha^2} - 2u''_{\alpha\beta}) + 2u''_{\alpha^2} = u''_{\alpha^2} + u''_{\beta^2}.$$

2. $u''_{x^2} + 2u''_{xy} + u''_{y^2} = 0$, $\quad D = 1 - 1 = 0 \;\Rightarrow$ параболический тип.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{+1 \pm \sqrt{D}}{1}$$

$$y = x + c \qquad y - x = c$$

$$\alpha = y - x \qquad \beta = -x \quad \text{(любая)}$$

$$u''_{x^2} = u''_{\alpha^2} + 2u''_{\alpha\beta} + u''_{\beta^2},$$

$$u''_{y^2} = u''_{\alpha^2},$$

$$u''_{xy} = -u''_{\alpha^2} - u''_{\alpha\beta},$$

$$u''_{\alpha^2} + 2u''_{\alpha\beta} + u''_{\beta^2} + (-2u''_{\alpha^2} - 2u''_{\alpha\beta}) + u''_{\alpha^2} = u''_{\beta^2} = 0.$$

3. $u''_{x^2} + 4u''_{xy} + 3u''_{y^2} = 0$, $\quad 2^2 - 1 \cdot 3 = 4 - 3 > 0$ гиперболический тип.

Уравнение характеристик

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{1}=\frac{1\pm1}{1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=3 \Rightarrow\ y=3x+c_1\\&\frac{dy}{dx}=1 \Rightarrow\ y=x+c_2\end{aligned}\right.\quad \Rightarrow \begin{cases}y-3x=c_1\\ y-x=c_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=y-3x\\ \beta=y-x\end{cases}$$

$$u'_x=u'_\alpha(-3)+u'_\beta(-1)$$

$$u'_y=u'_\alpha\cdot1+u'_\beta\cdot1$$

$$u''_{x^2}=u''_{\alpha^2}(+9)+u''_{\alpha\beta}(-3)(-1)+u''_{\alpha\beta}(-1)(-3)+u''_{\beta^2}(-1)^2=9u''_{\alpha^2}+6u''_{\alpha\beta}+u''_{\beta^2},$$

$$u''_{xy}=u''_{\alpha^2}(-3)(1)+u''_{\alpha\beta}(-3)(1)+u''_{\alpha\beta}(-1)(1)+u''_{\beta^2}(-1)(1)=-3u''_{\alpha^2}-4u''_{\alpha\beta}-u''_{\beta^2},$$

$$u''_{y^2}=u''_{\alpha^2}(1)+u''_{\alpha\beta}(1)+u''_{\alpha\beta}(1)+u''_{\beta^2}(-1)=u''_{\alpha^2}+2u''_{\alpha\beta}+u''_{\beta^2},$$

$$9u''_{\alpha^2}+6u''_{\alpha\beta}+u''_{\beta^2}-12u''_{\alpha^2}-16u''_{\alpha\beta}-4u''_{\beta^2}+3u''_{\alpha^2}+6u''_{\alpha\beta}+3u''_{\beta^2}=-4u''_{\alpha\beta}.$$

Лекция 3.
Задача Коши для волнового уравнения.

Рассматриваемые вопросы.

1. Особенности постановки краевых задач.
2. Формула Даламбера.

При рассмотрении задачи о поперечных колебаниях струны мы получили одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t).$$

Требуется найти решение этого уравнения, но не любое, а то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, обеспечивающим единственность решения.

1. Концы струны закреплены жестко. Это значит $u\big|_{x=0}=0;\quad u\big|_{x=l}=0.$ В то же время струна занимает некоторое начальное положение $u\big|_{t=0}=\varphi(x)$ и каждой точке сообщается некоторый начальный импульс $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x).$

И таким образом мы переходим к следующей задаче

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\\ u\big|_{x=0}=0;\quad u\big|_{x=l}=0 \qquad -\textit{граничныеусловия}\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x);\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)-\textit{начальныеусловия.}\end{cases}\tag{3.1}$$

Задача (3.1) называется смешанной задачей для уравнения колебаний струны с однородными граничными условиями

2. Концы струны могут двигаться по заданным законам

$$u\big|_{x=0}=\mu_1(t);\quad u\big|_{x=l}=\mu_2(t),$$

где $\mu_1(t),\ \mu_2(t)$ – некоторые периодические функции от $t.$ Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,\,t) \\ u\big|_{x=0} = \mu_1(t); \quad u\big|_{x=l} = \mu_{21}(t) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases} \tag{3.2}$$

более общая постановка смешанной задачи. Существуют и другие постановки смешанной задачи.

3. Колебания бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,\,t)\,.$$

Естественно никаких граничных условий уже не будет, а будут лишь начальные, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,\,t) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

Задача (3) называется задачей Коши.

Изучим теперь метод Даламбера решения задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши для однородного волнового уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,\,t) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Уравнение характеристик имеет вид

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0.$$

Общие интегралы определяются соотношениями:

$$x - at = C_1$$
$$x + at = C_2.$$

Введем новые переменные

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi), \quad u = \int f(\xi) d\xi = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции.

$$u = f_1(x + at) + f_2(x - at).$$

Учтем начальные условия:

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ a\big(f_1'(x) - f_2'(x)\big) = \psi(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ f_1(x) - f_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha) dx + C. \end{cases}$$

$$f_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}\psi(\alpha)d\alpha + \frac{C}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}\psi(\alpha)d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Отсюда

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x+at)+\psi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int\limits_{x_0}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha - \int\limits_{x_0}^{x-at}\psi(\alpha)d\alpha\right) =$$

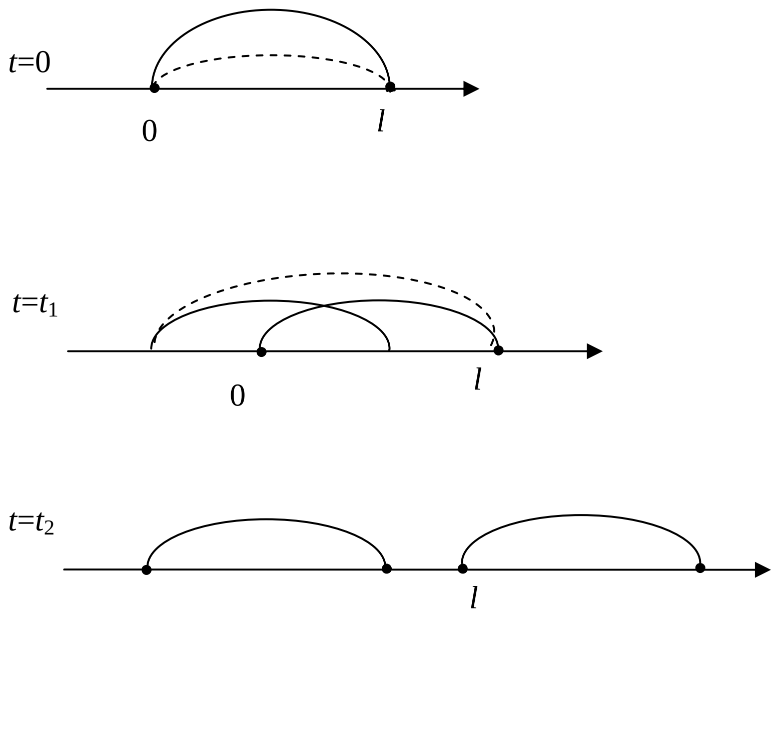
$$= \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha.$$

Эта формула носит название формулы Даламбера.

Пример 1. Пусть $\underset{x\in(0,\,l)}{\varphi(x>0)}$, а $\psi(x)=0$

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{\varphi(x-at)}{2}.$$

На рисунке показано распространение двух волн с течением времени.



Лекция 4

Задача Коши для уравнения параболического типа

Рассматриваемые вопросы.
1. Особенности постановки краевых задач. Задача Коши.
2. Формула Пуассона.

В лекции 1 при рассмотрении задачи о распространении тепла в ограниченном стержне было получено, что этот процесс описывается одномерным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \qquad x \in (0, l), \qquad t > 0.$$

На процесс распространения тепла оказывают влияние граничные условия

$$u\big|_{x=0} = \mu_1(t); \qquad u\big|_{x=l} = \mu_2(t)$$

и начальное условие

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x).$$

Так что в целом для описания этого процесса необходимо решать так называемую смешанную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \qquad x \in (0, l), \qquad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = \mu_1(t); \qquad u\big|_{x=l} = \mu_2(t), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

Обобщением этой задачи для описания процесса распространения тепла в ограниченном объеме ω с границей S является следующая задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t) \qquad x, y, z \in \omega, \qquad t > 0, \\ u\big|_{s} = \mu(x, y, z, t), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z). \end{cases} \tag{4.2}$$

В случае, если область ω неограниченна, то процесс распространения тепла описывается решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t) \qquad P(x, y, z) \in \omega, \qquad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z). \end{cases} \tag{4.3}$$

Найдем теперь решение задачи Коши сначала для одномерного уравнения теплопроводности, т.е. задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x,), \end{cases} \tag{4.4}$$

в предположении ограниченности искомого решения, т.е. $|u(x, t)| \le M$ для $x \in (-\infty, +\infty)$.

Нетривиальные решения этой задачи будем искать с использованием метода Фурье, т.е. $u(x, t) = X(x)T(t)$. Тогда из уравнения (4.4) следует

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2,$$
где λ – числовой параметр. Отсюда
$$T'+\lambda^2a^2T=0\Rightarrow T(t)=e^{-a^2\lambda^2t}$$
и
$$X''+\lambda^2X=0\Rightarrow X(x)=A(\lambda)e^{i\lambda x},\quad \lambda\in(-\infty,+\infty).$$
Значит частное решение уравнения (6) имеет вид: $A(\lambda)e^{-\lambda^2a^2t+i\lambda x}$.

Рассмотрим несобственный интеграл
$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}A(\lambda)e^{-\lambda^2a^2t+i\lambda x}d\lambda,$$
можно проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности (если предположить возможность дифференцирования под знаком интеграла).

Найдем функцию $A(\lambda)$ так, чтобы удовлетворялось начальное условие. Тогда должно быть выполнено
$$\int_{-\infty}^{+\infty}A(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=\varphi(x),$$
т.е. функция $\varphi(x)$ есть обратное преобразование Фурье для функции, $\sqrt{2\pi}A(\lambda)$ и значит $\sqrt{2\pi}A(\lambda)$ есть просто преобразование Фурье для $\varphi(x)$, т.е.
$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi.$$
Используя это представление и меняя порядок интегрирования, получим
$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\cdot e^{-a^2\lambda^2t+i\lambda x}d\lambda==\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t+i\lambda(x-\xi)}d\lambda\right)d\xi.$$

Рассмотрим внутренний интеграл, понимаемый в смысле главного значения $(P.V.)$, и вычислим его
$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t+i\lambda(x-\xi)}d\lambda=2\int_{0}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda=$$
$$=\begin{vmatrix}a\sqrt{t}=\lambda z & \lambda(x-\xi)=\mu z\\ d\lambda=\dfrac{dz}{a\sqrt{t}} & \mu=\dfrac{x-\xi}{a\sqrt{t}}\end{vmatrix}=\frac{2}{a\sqrt{t}}\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}\cos\mu z dz=\frac{2}{a\sqrt{t}}J(\mu).$$

С помощью дифференцирования пол параметру μ и интегрирования по частям, получим, что $J(\mu)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{dJ}{d\mu}=-\frac{\mu}{2}J$. Отсюда $J(\mu)=Ce^{-\frac{\mu^2}{4}}$. При $\mu=0$ $J(0)=\int_0^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, т.е. $C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а $J(\mu)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\mu^2}{4}}$.

Следовательно,
$$J=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}.$$
Таким образом, окончательно получаем
$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi.\qquad(4.5)$$

Имеет место следующее утверждение. Если $\varphi(x)$ – кусочно-непрерывная ограниченная функция на всей числовой оси, то решение задачи (6) дается формулой (8) (без доказательства).

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x,\,t,\,\xi)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

(ее называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности) и отметим, что эта функция задает распределение температуры в стержне, которое возникает при t>0, если при t=0 в точке x_0 происходит разогрев количеством теплоты $Q=C\rho.$ В этой связи $\Phi(x,\,t,\,x_0)$ называют функцией точечного источника.

Можно доказать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,\,t,\,x_0)dx=1.$$

Данное соотношение выражает тот факт, что количество теплоты в стержне $Q=C\rho.$ остается неизменным с течением времени, т.е. стержень теплоизолирован от окружающего пространства и вся теплота остается в стержне, лишь распределяясь по его длине.

Замечание. Задача Коши для трехмерного уравнения теплопроводности аналогичным образом решается с помощью формулы

$$u(\rho,\,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\,\eta,\,\lambda)\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\lambda-z)^2}{4a^2t}}d\xi d\eta d\lambda.$$

Лекция 5

Метод Фурье для гиперболических уравнений

Рассматриваемые вопросы.

1. Задача Штурма-Лиувилля. Собственные значения и собственные функции задачи.
2. Схема метода Фурье для гиперболического уравнения.
3. Физическая интерпретация решения.

Метод Фурье или *метод разделения переменных* является одним из основных методов решения уравнений с частными производными. Изложим суть метода на примере задачи о колебании струны длины l, закрепленной на концах.

Колебания струны описываются уравнением

$$u''_{tt}=a^2u''_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0, \tag{5.1}$$

граничные условия

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \tag{5.2}$$

начальные условия

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u'_t(x,0)=\psi(x). \tag{5.3}$$

Решение ищем в виде произведения $u(x,t)=X(x)T(t)$, где $X(x)$ $\left(x\in[0,l]\right)$ функция переменного x, $T(t)$ $\left(t\in[0,+\infty)\right)$ - функция переменного t. Подставив $u(x,t)=X(x)T(t)$ в (5.1) и поделив на $X(x)T(t)$, получим равенство $\dfrac{\ddot{T}(t)}{a^2T(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}$, где точками обозначена вторая производная по t, штрихами – вторая производная по x. Левая часть этого равенства зависит только от t, правая – только от x. Для того, чтобы равенство выполнялось тождественно для всех t и x, потребуем, чтобы каждая из его частей была постоянной. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$. Получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(x)\not\equiv 0, \tag{5.4}$$

$$\ddot{T}(t)+a^2\lambda T(t)=0,\quad T(t)\not\equiv 0 \tag{5.5}$$

с граничными условиями

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0,\quad u(l,t)=X(l)T(t)=0.$$

Отсюда следует, что $X(0)=X(l)=0$.

Граничная задача отыскания нетривиального решения уравнения

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases} \tag{5.6}$$

и тех значений параметра λ, при которых это решение существует, называется задачей Штурма – Лиувилля, числа λ - собственными числами (собственными значениями), решения – собственными функциями задачи.

Рассмотрим все возможные случаи.

1) Если $\lambda<0$, то $X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ и из граничных условий следует, что $c_1=c_2=0$, т.е. $X(x)\equiv 0$.

2) Если $\lambda=0$, то $X''(x)=0$. Поэтому $X(x)=c_1x+c_2$. Граничные условия снова приводят к равенствам $c_1=c_2=0$ и $X(x)\equiv 0$.

3) Если $\lambda>0$, то $X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$. Граничные условия дают равенства $X(0)=c_1=0$; $X(x)=c_2\sin\sqrt{\lambda}x=0$. Так как $X(x)\not\equiv 0$, то $c_2\neq 0$. Следовательно $\sin\sqrt{\lambda}x=0$, откуда $\sqrt{\lambda}=\dfrac{\pi n}{l}$ (n - любое натуральное число). Таким образом, ненулевые решения возможны только при $\lambda=\lambda_n=\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$. Этим собственным числам отвечают собственные функции

$$X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Подставив найденные числа λ_n в (5), получим набор решений уравнения (5.5)

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at \tag{5.7}$$

с произвольными постоянными A_n и B_n.

Возвращаясь к задаче (5.1) – (5.3) заключаем, что функции

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{5.8}$$

являются частными решениями уравнения (1) и удовлетворяют граничным условиям (2). Уравнение (5.1) линейно и однородно, поэтому формальная сумма частных решений

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{5.9}$$

также (формально) удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (5.2). Остается подобрать коэффициенты A_n и B_n так, чтобы функция (5.9) удовлетворяла начальным условиям (5.3). Формально подставив (5.9) в (5.3), получим систему

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin\dfrac{\pi n}{l}x, \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\partial u_n(x,0)}{\partial t}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi n}{l}aB_n\sin\dfrac{\pi n}{l}x. \end{cases} \quad (5.10)$$

Из теории рядов Фурье известно ([5], гл.VII, § 11), что в силу теоремы Дирихле кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[0,l]$, раскладывается в ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$$

Полагая, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ этим условиям удовлетворяют, получим

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \Phi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx, \quad (5.11)$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \Psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx. \quad (5.12)$$

Подставив (11) и (12) в (10) и используя условие равенства двух тригонометрических рядов, получим $A_n=\Phi_n$, $B_n=\dfrac{l}{\pi na}\Psi_n$. Таким образом, функция

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Phi_n\cos\frac{\pi nat}{l}+\frac{l}{\pi na}\Psi_n\sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \quad (5.13)$$

дает формальное решение задачи (1) - (3).

Замечание 1. Формальное решение (5.13) становится "настоящим" решением, если ряд (5.13) и ряды для производных u_t', u_{tt}'', u_{xx}'', полученные из (5.13) почленным дифференцированием, сходятся. В [13, 22] доказано, что для этого достаточно, чтобы функции φ', ψ' и φ'' были непрерывными, функции ψ'' и φ''' - кусочно-непрерывными и $\varphi(0)=\varphi(l)=$ $=\psi(0)=\psi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$. Эти условия не являются необходимыми и связаны только с выбранным методом решения. При решении задачи методом Даламбера и операционным методом условия, накладываемые на функции φ и ψ, менее ограничительные.

Замечание 2. Решение задачи о колебании струны, записанное в форме тригонометрического ряда (5.13), позволяет проанализировать физические свойства этого процесса.

Запишем решение (5.13) в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi na}{l}(t+\gamma_n)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $a_n=\sqrt{\Phi_n^2+\Psi_n^2}$, $\dfrac{\pi na}{l}\gamma_n=-arctg\dfrac{\Psi_n}{\Phi_n}$. Отсюда видно, что колебание струны слагается из отдельных гармонических колебаний

$$u_n(x,t)=a_n\cos\frac{\pi na}{l}(t+\gamma_n)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

причем колебание каждой точки x происходит с одной и той же амплитудой $a_n\sin\dfrac{\pi n}{l}x$ и частотой $\omega_n=\dfrac{\pi na}{l}$. Такое движение струны называется *стоячей волной*. Точки $x=\dfrac{ml}{n}$ $(m=1,2,...,n-1)$, в которых амплитуда равна нулю, остаются неподвижными и называются *узлами* стоячей волны $u_n(x,t)$. Точки $x=\frac{2m+1}{2n}l \quad (m=0,1,2,...n-1)$, в которых $\sin\frac{\pi n}{l}x=\pm 1$ и амплитуда a_n максимальная, называют *пучностями* стоячей волны (рис. 9). Частоты $\omega_n=\frac{\pi n a}{l}$ называют *собственными частотами* колебаний струны.

Легко подсчитать энергию n - й гармоники (n - й стоячей волны):

$$E_n=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2+T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right]dx=\omega_n^2 M\,\frac{\Phi_n^2+\Psi_n^2}{4}$$

(M - масса струны, ρ - постоянная плотность, $T=a^2\rho$).

Звук, издаваемый колеблющейся струной, является "смесью" звуков, соответствующих стоячим волнам. *Тон*, или высота, и сила звука зависят от частоты и амплитуды колебаний. Самый низкий тон определяется собственной частотой $\omega_1=\frac{\pi a}{l}$ и называется *основным тоном струны*. Остальные тона, соответствующие частотам $\omega_n=n\omega_1$, кратным ω_1, называются *обертонами* и характеризуют "окраску" звука, его *тембр*. Энергия основного тона, вообще говоря, больше энергии других тонов. Она зависит от начальных условий (5.3), чем широко пользуются при проектировании музыкальных инструментов.

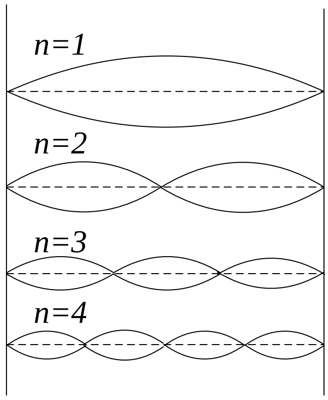


Рис. 2

Лекция 6

Метод Фурье для уравнения параболического типа

Рассматриваемые вопросы.

1. Задача Штурма-Лиувилля. Собственные значения и собственные функции задачи.
2. Схема метода Фурье для параболического уравнения.
3. Решение задачи с однородными граничными условиями
4. Решение задачи с неоднородными граничными условиями.

Займемся решением неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \quad \left(x\in(0,l),t>0\right) \tag{6.1}$$

при начальном условии

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad \left(x\in[0,l]\right) \tag{6.2}$$

и граничных условиях

$$u(0,t)=\psi_1(t), \quad u(l,t)=\psi_2(t) \qquad (t\ge 0). \tag{6.3}$$

Функции f, φ, ψ_1, ψ_2 предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми.

Решение поставленной задачи разобьем на четыре этапа.

1. *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \left(x \in (0,l), t > 0\right), \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \left(x \in [0,l]\right), \\ u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0, \ (t \ge 0), \end{cases} \tag{6.4}$$

где функция φ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Решение, согласно методу Фурье, ищем в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставив данное произведение в (4), получим $X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$. Разделим переменные:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда получаем два уравнения:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \tag{6.5}$$

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \tag{6.6}$$

Уравнение (5) уже было подробно рассмотрено в § 3 гл. III, где было показано, что только для значений $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ существуют нетривиальные решения

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l},$$

удовлетворяющие нулевым граничным условиям.

Подставив $\lambda = \lambda_n$ в (6.6), получим соответствующие решения $T_n(t) = \ = c_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$ с произвольными постоянными c_n. Таким образом, все функции

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = c_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют уравнению и граничным условиям задачи (6.4). Составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}. \tag{6.7}$$

Используя начальные условия, получим

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \tag{6.8}$$

Если коэффициенты c_n определить равенствами

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6.9}$$

то ряд (6.8) станет рядом Фурье по синусам на промежутке $(0, l)$ функции φ. По теореме Дирихле этот ряд равномерно и абсолютно сходится к функции φ.

Легко показать, что функция $u(x,t)$, определенная формулами (6.7) и (6.9), имеет производные любого порядка по x и t в области $x \in (0,l)$, $t > 0$ и, следовательно, является решением задачи (6.4).

2. *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \left(x \in (0,l), t > 0\right), \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \left(x \in [0,l]\right), \\ u(0,t) = \psi_1(t), \ u(l,t) = \psi_2(t) \ \ (t \ge 0). \end{cases} \tag{6.10}$$

Решение ищем в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l} \tag{6.11}$$

с неизвестными коэффициентами $T_n(t)$,

$$T_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \tag{6.12}$$

Займемся определением функций $T_n(t)$. Дважды интегрируя (6.12) по частям, получим

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi n}\left[u(0,t) - (-1)^n u(l,t)\right] - \frac{2l}{\pi^2 n^2}\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Так как функция $u(x,t)$ должна удовлетворять уравнению и граничным условиям задачи (10), то

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi n}\left[\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)\right] - \frac{2l}{\pi^2 n^2 a^2}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \tag{6.13}$$

Дифференцируя (6.12) по переменной t, получим

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \tag{6.14}$$

Выразив интеграл из равенства (6.14) и подставив его в (6.13), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения коэффициентов $T_n(t)$:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = \frac{2\pi n a^2}{l^2}\left[\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)\right].$$

Общее решение этого уравнения

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}[T_n(0) + \tag{6.15}$$

$$+\frac{2\pi n a^2}{l^2}\int_0^t e^{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \tau}\left(\psi_1(\tau) - (-1)^n \psi_2(\tau)\right)d\tau].$$

Для выполнения начального условия задачи (6.10) потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{\pi n x}{l} = \varphi(x).$$

Отсюда

$$T_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \tag{6.16}$$

Таким образом, решением задачи (6.10) является функция (6.11) с коэффициентами $T_n(t)$, определяемыми равенствами (6.15) и (6.16). Обсуждение сходимости ряда (6.11) и возможности его почленного дифференцирования по переменным t и x оставляем читателю.

3. *Рассмотрим неоднородное уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{6.17}$$

с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=0,\quad u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0.$$

Предполагаем, что функция f непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную по x и при $t>0$ удовлетворяет требованиям $f(0,t)=f(l,t)=0.$ Решение ищем в виде ряда Фурье

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{6.18}$$

Ясно, что граничные условия при этом выполняются автоматически.

Предположим, что функцию $f(x,t)$, рассматриваемую как функцию аргумента x, можно разложить в сходящийся к ней ряд Фурье

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l} \tag{6.19}$$

с коэффициентами

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \tag{6.20}$$

Формально подставив (6.18) и (6.19) в уравнение (6.17), получим равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{\pi nx}{l}=0,$$

которое должно выполняться для каждого $x\in(0,l)$. Это возможно только если $T_n(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2T_n(t)=f_n(t), \tag{6.21}$$

причем из начального условия $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{\pi nx}{l}=0$ следует, что $T_n(0)=0$.

Подставив решение

$$T_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau$$

уравнения (6.21) в ряд (6.18), получим решение задачи (6.17)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau\right]\sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{6.22}$$

Преобразуем полученное решение. Подставив в (6.22) выражение для $f_n(t)$ из (6.20), получим

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\right]f(\xi,\tau)d\xi d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где введено обозначение

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}.$$

Функция $G(x,\xi,t)$ называется *функцией Грина* или *функцией мгновенного точечного источника тепла*. Рассматриваемая как функция аргумента x, функция Грина дает распределение температуры на отрезке $[0,l]$ в момент времени t, порожденное действием мгновенного источника тепла $Q=c\rho$, помещенного при $t=0$ в точке $x=\xi$.

4. *Вернемся к задаче* (6.1) - (6.3), сформулированной в начале параграфа. Очевидно, что её решение u является суммой функций $u = v + w$, где v - решение задачи (6.10), w - решение задачи (6.17).

Лекция 7

Применение метода Фурье для решения эллиптических уравнений

Для простых областей (круг, прямоугольник, шар, цилиндр и ряд других) решение краевой задачи для уравнения Лапласа можно найти *методом разделения переменных*. Получающиеся при этом задачи на собственные значения (задачи Штурма – Лиувилля) приводят к различным классам *специальных функций* (сферическим, цилиндрическим и др.).

В качестве примера рассмотрим внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле для круга. Задачу естественно решать в полярной системе координат, где оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta_{\rho,\varphi} u \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

1. *Внутренняя задача Дирихле для круга*. Найдем функцию $u(\rho,\varphi)$, гармоническую внутри круга $\rho < R_0$ и принимающую на границе $\rho = R_0$ заданные значения:

$$\Delta_{\rho,\varphi} u = 0, \quad \rho < R_0, \tag{7.1}$$

$$u(\rho,\varphi)\big|_{\rho=R_0} = f(\varphi). \tag{7.2}$$

Решение ищем в виде произведения

$$u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi). \tag{7.3}$$

Подставив (7.3) в уравнение (7.1) и разделив переменные, получим

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \lambda$$

с неопределенной постоянной λ. Отсюда получаем два уравнения:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \lambda\Phi = 0, \tag{7.4}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0. \tag{7.5}$$

Так как $u(\rho,\varphi) = u(\rho,\varphi+2\pi)$, то функция $\Phi(\varphi)$ должна быть 2π - периодической. Поэтому в (7.4) параметр $\lambda \ge 0$ и $\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + \ +B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$. Кроме того, для периодичности Φ должно выполняться равенство $\sqrt{\lambda} = n \ \ (n = 0,1,2,...)$. Таким образом, получаем набор решений уравнения (7.4):

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi.$$

Решение уравнения (5) ищем в виде $R(\rho) = \rho^s$. Подставив $\Phi_n(\varphi)$ в (5) и сократив на ρ^s, получим $s^2 = n^2$ или $s = \pm n \ \ (n = 0,1,2,...)$. Тогда

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n},$$

где C и D - постоянные. Ясно, что для решения внутренней задачи следует взять $D = 0$ (для внешней задачи условие регулярности на бесконечности функции $u(\rho,\varphi)$ приводит к равенству $C = 0$). Отсюда

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right). \tag{7.6}$$

Для определения коэффициентов A_n и B_n используем граничное условие (7.2). Предполагая, что функция $f(\varphi)$ допускает разложение в ряд Фурье, сходящийся на промежутке $[-\pi,\pi]$, запишем

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi), \tag{7.7}$$

где $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi \quad (n=0,1,2,...)$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi \quad (n=1,2,...)$. Положив в (6) $\rho=R_0$ и приравняв полученный ряд и ряд (7), найдем коэффициенты $A_0=\frac{a_0}{2}$, $A_n=\frac{a_n}{R_0^n}$, $B_n=\frac{b_n}{R_0^n}$ $(n=1,2,...)$ и получим формальное решение внутренней задачи Дирихле для круга:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi). \tag{7.8}$$

Легко видеть, что ряд (7.8) сходится в круге $\rho<R_0$, допускает почленное дифференцирование любое количество раз и сходится к $f(\varphi)$ при $\rho\to R_0$. Поэтому формула (7.8) дает решение задачи (7.1) – (7.2).

2. *Решение внешней задачи Дирихле для круга радиуса* $\rho=R_0$ при том же краевом условии (7.2) дается рядом

$$u(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi). \tag{7.9}$$

Очевидно, что при $\rho>R_0$ ряд (7.9) сходится, допускает почленное дифференцирование любое количество раз и сходится к $f(\varphi)$ при $\rho\to R_0$.

3. В случае кругового кольца $a<r<b$ гармоническая функция ищется виде

$$\begin{aligned}u(r,\varphi)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+\\+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}(C_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi)\end{aligned} \tag{7.10}$$

Отметим, что соотношения (7.6), (7.9 – 7.10) позволяют решать также вторую и третью краевые задачи для названных областей.

Замечание. В простейших случаях, когда $f(\varphi)$ есть тригонометрический полином, т.е. линейная комбинация

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi),$$

коэффициенты A_n и B_n находятся из равенства $\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}a^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)=f(\varphi)$ путем приравнивания коэффициентов возле одноименных функций слева и справа. Решение задачи (7.1 – 7.2) будет на этот раз представлено в виде конечной суммы.

4. Рассмотрим метод Фурье для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Применение этого метода рассмотрим на примере решения следующей задачи:
Найти решение краевой задачи в прямоугольнике $\Omega=\{(x,y):\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\in\Omega \\ u\,|_{x=0}=A,\ u\,|_{x=a}=Ay, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\,|_{y=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\,|_{y=b}=0. \end{cases}$$

По методу Фурье полагаем $u(x,y) = X(x)Y(y)$ и приходим к равенству

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda^2.$$

Из граничных условий при y=0 и y=b найдем $Y'(0)=0, Y'(b)=0.$ Далее из задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} Y''+\lambda^2 Y=0 \\ Y'(0)=0,\ Y'(b)=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=\frac{k\pi}{b},\ Y_k(y)=\cos\frac{k\pi}{b}y,\ k=\overline{0,\infty}.$$

Для функции $X(x)$ имеем дифференциальное уравнение

$$X''-\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 X=0.$$

Если $k=\overline{1,\infty}$, то его общее решение имеет вид

$$X_k(x)=A_k sh\frac{k\pi}{b}x+B_k sh\frac{k\pi}{b}(a-x),$$

при k=0 общее решение будет линейной функцией $X_0(x)=A_0 x+B_0$. Гармоническая функция в Ω

$$u(x,y)=A_0 x+B_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k sh\frac{k\pi x}{b}+B_k sh\frac{k\pi(a-x)}{b})\cos\frac{k\pi}{b}y$$

будет, очевидно, удовлетворять условиям $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}=0,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=b}=0.$ Остается выбрать ее коэффициенты так, чтобы выполнялись граничные условия на сторонах x=0 и x=a.

Будем иметь

$$B_0+\sum_{k=1}^{\infty}B_k sh\frac{k\pi a}{b}\cos\frac{k\pi y}{b}=A\Rightarrow B_0=A,\ B_k=0,\ k=\overline{1,\infty}.$$

$$A_0 a+A+\sum_{k=1}^{\infty}A_k sh\frac{k\pi a}{b}\cos\frac{k\pi}{b}y=Ay\Rightarrow.$$

$$\Rightarrow A_0 a+A=\frac{1}{b}\int_0^b Ay\,dy=\frac{Ab}{2}\Rightarrow A_0=\left(\frac{b}{2}-1\right)\frac{1}{a};$$

$$A_k=\frac{2}{bsh\frac{k\pi a}{b}}\int_0^b Ay\cos\frac{k\pi}{b}y\,dy=\frac{-2b}{bk\pi\ \ sh\frac{k\pi a}{b}}\int_0^b A\sin\frac{k\pi}{b}y\,dy=$$

$$=\frac{2bA}{(k\pi)^2}\ \frac{1}{sh\frac{k\pi a}{b}}\left[\cos\frac{k\pi}{b}y\right]_0^b=\frac{2bA}{(k\pi)^2}\ \frac{1}{sh\frac{k\pi a}{b}}\left((-1)^k-1\right).$$

При четных k=2n коэффициенты A_{2n}=0, поэтому окончательно решение запишется в виде

$$u(x,y)=A+\left(\frac{b}{2}-1\right)\frac{x}{a}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4bA}{\pi^2(2n+1)^2}sh\frac{(2n+1)\pi x}{b}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi}{b}y}{sh\frac{(2n+1)\pi a}{b}}\ .$$

Лекция 8
Интегральные уравнения

Рассматриваемые вопросы.

1. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода. Решение интегральных уравнений с помощью резольвенты.
2. Метод последовательных приближений.
3. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Альтернатива Фредгольма
4. Метод определителей Фредгольма

1. *Уравнение*

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{8.1}$$

где $K(x,t)$ – заданная непрерывная функция в треугольнике $0\le x\le a$, $0\le t\le x$, $f(x)$ – заданная непрерывная функция на отрезке $0\le x\le a$, $\varphi(x)$ – искомая функция, λ – числовой параметр, называется *линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода*. Функции $K(x,t)$ и $f(x)$ называются соответственно *ядром* и *свободным членом* уравнения Вольтерра. *Решением* интегрального уравнения (8.1) называют функцию $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество относительно $x\in[0,a]$.

В теории интегральных уравнений доказывается, что всякое интегральное уравнение Вольтерра (8.1) с непрерывным ядром $K(x,t)$ при любом λ имеет единственное решение $\varphi(x)$ в классе непрерывных функций на отрезке $[0,\,a]$ для любого свободного члена $f(x)$ из того же класса.

Будем искать решение интегрального уравнения (8.1) в виде бесконечного степенного ряда по степеням λ:

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+...+\lambda^n\varphi_n(x)+\dots. \tag{8.2}$$

Подставляя этот ряд в (8.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем

$$\varphi_0(x)=f(x),$$

$$\varphi_1(x)=\int_0^x K(x,t)\,\varphi_0(t)\,dt=\int_0^x K(x,t)\,f(t)\,dt,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\,\varphi_1(t)\,dt = \int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1)\,f(t_1)\,dt_1\,dt, \tag{8.3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Из соотношений (8.3), дающих способ последовательного определения функций $\varphi_n(x)$, получим

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x,t)\,f(t)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{8.4}$$

Функции $K_n(x,t)$ называются *повторными ядрами* и вычисляются при помощи рекуррентных формул

$$\begin{aligned} &K_1(x,t) = K(x,t), \\ &K_n(x,t) = \int_t^x K(x,z)\; K_{n-1}(z,t)\;dz, \quad n = 2, 3, \ldots . \end{aligned} \tag{8.5}$$

Используя (8.4) и (8.5), равенство (8.2) можно записать так:

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_0^x K_n(x,t)\,f(t)\,dt.$$

Функция $R(x,t;\lambda)$, определяемая при помощи ряда

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,t), \tag{8.6}$$

называется *резольвентой* интегрального уравнения (8.1).

В теории интегральных уравнений доказывается, что ряд (3.6) сходится и решение интегрального уравнения (8.1) дается формулой

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x R(x,t;\lambda)\,f(t)\,dt. \tag{8.7}$$

2. *Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра второго рода*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{8.8}$$

Будем предполагать, что $f(x)$ непрерывна на $[0,a]$, а ядро $K(x,t)$ непрерывно при $0 \le x \le a$, $0 \le t \le x$.

Возьмем какую-либо непрерывную на $[0,a]$ функцию $\varphi_0(x)$. Подставляя в правую часть уравнения (8.8) вместо $\varphi(x)$ функцию $\varphi_0(x)$, получаем

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi_0(t)\,dt.$$

Определенная таким образом функция $\varphi_1(x)$ также непрерывна на отрезке $[0, a]$. Продолжая этот процесс, получим последовательность функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots,$$

где
$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi_{n-1}(t)\,dt.$$

При сделанных предположениях относительно $K(x,t)$ и $f(x)$ последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится при $n\to\infty$ к решению $\varphi(x)$ интегрального уравнения (8.8). Удачный выбор «нулевого» приближения $\varphi_0(x)$ может привести к быстрой сходимости последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ к решению интегрального уравнения.

3. *Линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода* называется уравнение вида

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{8.9}$$

где $\varphi(x)$ – неизвестная функция, $K(x,t)$ – заданная непрерывная функция в квадрате $a\le x\le b$, $a\le t\le b$, $f(x)$ – заданная непрерывная функция на отрезке $[a,b]$, λ – числовой множитель. *Решением* интегрального уравнения (1) называется непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая ему.

Для интегральных уравнений Фредгольма имеет место следующая теорема о разрешимости уравнения (8.9).

Теорема (альтернатива Фредгольма). Либо уравнение

$$\phi(x)-\int_a^b K(t,x)\,\phi(t)\,dt=0 \tag{8.10}$$

имеет только нулевое решение, и тогда уравнение

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{8.11}$$

имеет единственное решение при любой непрерывной функции $f(x)$; либо уравнение (3.10) имеет конечное число линейно независимых решений

$$\phi_1(x),\ldots,\phi_m(x), \tag{8.12}$$

и тогда уравнение (8.11) разрешимо только при условии, что свободный член $f(x)$ ортогонален всем решениям (8.12):

$$f \perp \phi_k, \quad k=1,\dots,m.$$

Здесь ортогональность $f \perp g$ означает выполнение равенства

$$\int_a^b f\, g\, dx=0.$$

Пример 8.1. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \sin \ln x\; \varphi(t)\, dt=2x.$$

Решение. Имеем $\varphi(x)=C\,\lambda \sin \ln x+2x$, где $C=\int_0^1 \varphi(t)\, dt$. Подставляя выражение $\varphi(t)$ в интеграл, найдем

$$C=C\lambda\int_0^1 \sin \ln t\; dt+1,$$

откуда $$C\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)=1.$$

Если $\lambda\neq-2$, то данное уравнение имеет единственное решение

$$\varphi(x)=\frac{2\lambda}{2+\lambda}\sin \ln x+2x,$$

а соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \sin \ln x\; \varphi(t)\, dt=0$$

только нулевое решение: $\varphi(x)\equiv 0$.

Если же $\lambda=-2$, то данное уравнение не имеет решений, т.к. правая часть $f(x)=2x$ не ортогональна к функции $\sin \ln x$; однородное уравнение имеет бесконечное множество решений, т.к. из уравнения для определения C: $0\cdot C=0$ следует, что C – произвольная постоянная; все эти решения даются формулой

$$\varphi(x)=\tilde{C}\;\lambda\;\sin\;\ln\,x\;\;(\tilde{C}=-2C).$$

4. *Решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода*

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\ \varphi(t)\ dt=f(x) \tag{8.13}$$

дается формулой

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)\ f(t)\ dt, \tag{8.14}$$

где функция $R(x,t;\lambda)$ называется *резольвентой Фредгольма* уравнения (8.13) и определяется равенством

$$R(x,t;\lambda)=\frac{\mathcal{D}(x,t;\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} \tag{8.15}$$

при условии $\mathcal{D}(\lambda)\neq 0$. Здесь $\mathcal{D}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ – степенные ряды по λ:

$$\mathcal{D}(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\lambda^n\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n} A(t_1,\ldots,t_n)\ dt_1\ldots dt_n,$$

$$\mathcal{D}(x,\ t;\ \lambda)=K(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\lambda^n\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n} B(x,t,t_1,\ldots,t_n)\ dt_1\ldots dt_n,$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$A(t_1,\ldots,t_n)=\begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \ldots & K(t_2,t_n) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix},$$

$$B(x,t,t_1,\ldots,t_n)=\begin{vmatrix} K(x,t_1) & K(x,t_2) & \ldots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix}.$$

Функция $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ называется *минором Фредгольма,*
а $\mathcal{D}(\lambda)$ *– определителем Фредгольма.*

Теорема. Уравнение (8.1) разрешимо при любой непрерывной функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(\lambda)\neq 0$.

Замечание. Вычисление $A(t_1,...,t_n)$ и $B(x,t,t_1,...,t_n)$ по приведенным выше формулам возможно лишь в очень редких случаях, но из этих формул получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$B_n(x,t)=A_n K(x,t)-n\int_a^b K(x,s)\, B_{n-1}(s,t)\, ds,$$

$$A_n=\int_a^b B_{n-1}(s,s)\, ds,$$

где обозначено

$$A_n=\underbrace{\int_a^b...\int_a^b}_{n} A(t_1,...,t_n)\, dt_1...dt_n,$$

$$B_n(x,t)=\underbrace{\int_a^b...\int_a^b}_{n} B(x,t,t_1,...,t_n)\, dt_1...dt_n.$$

Зная, что $A_0=1$, $B_0(x,t)=K(x,t)$, последовательно находят A_1, $B_1(x,t)$, A_2, $B_2(x,t)$ и т.д.

Пример 13. Решить уравнение Фредгольма

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 x\, e^t\, \varphi(t)\, dt=e^{-x},\ (\lambda\neq 1).$$

Решение. Здесь $K(x,t)=xe^t$, $f(x)=e^{-x}$, a=0, b=1. Имеем

$A(t_1)=K(t_1,t_1)=t_1e^{t_1}$,

$$A(t_1,t_2)=\begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2}\end{vmatrix}=0;$$

аналогично найдем: $A(t_1,...,t_n)=0$ при $n\geq 2$.
Поэтому

$$D(\lambda)=1-\lambda\int_0^1 A(t_1)\,dt_1=1-\lambda\int_0^1 t_1 e^{t_1}\,dt_1=1-\lambda.$$

В силу теоремы данное уравнение разрешимо при $\lambda\neq 1$. Аналогично найдем:

$$B(x,t)=x\,e^t,$$

$$B(x,t,t_1)=\begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x\,e^t & x\,e^{t_1} \\ t_1\,e^t & t_1\,e^{t_1} \end{vmatrix}=0,$$

$B(x,t,t_1,\ldots,t_n)=0$ при $n\geq 1$.

Поэтому

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)=xe^t.$$

Таким образом, по формуле (8.15) получаем

$$R(x,t;\lambda)=\frac{x\,e^t}{1-\lambda}.$$

Согласно формуле (8.14), решение данного уравнения имеет вид

$$\varphi(x)=e^{-x}+\lambda\int_0^1 \frac{x\,e^t}{1-\lambda}\cdot e^{-t}\,dt=e^{-x}+\frac{\lambda}{1-\lambda}x.$$

Лекция 9.

Гармонические функции. Формулы Грина

Рассматриваемые вопросы:

1. Фундаментальные и обобщенные решения уравнения Лапласа.
2. Свойства гармонических функций.
3. Формула Остроградского-Гаусса.
4. Формулы Грина.

Уравнения Лапласа и Пуассона относятся к числу основных уравнений эллиптического типа

$$\Delta u=0 \quad \text{(уравнение Лапласа)}$$
$$\Delta u=-f(x) \quad \text{(уравнение Пуассона)}$$

Первая краевая задача для уравнения Пуассона имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u=-f(x), & x\in\omega \\ u\big|_s=\mu(x), & \overline{\omega}=\omega\cup s. \end{cases} \tag{9.1}$$

Задача (9.1) носит название задачи Дирихле.

Вторая краевая задача или задача Неймана записывается в виде

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x), & x \in \omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_s = \mu(x), & \overline{\omega} = \omega \cup s. \end{cases} \tag{9.2}$$

<u>Третья</u> краевая задача связана с условием на границе

$$\left. u + h\frac{\partial u}{\partial n}\right|_s = \mu(x). \tag{9.3}$$

Гармоническими функциями называются функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа.

Рассмотрим некоторые свойства гармонических функций и их возможное интегральное представление.

Вспомним формулу Остроградского-Гаусса.

$$\iint\limits_{(s)} \left(A_x \cos nx + A_y \cos ny + A_z \cos nz\right) ds = \iiint\limits_{s} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) d\omega,$$

где A_x, A_y, A_z – любые достаточно гладкие функции пространственных переменных. Положим $A_x = u\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $A_y = u\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $A_z = u\dfrac{\partial v}{\partial z}$, где u и v – произвольные достаточно гладкие функции.

Тогда с учетом равенства

$$\frac{\partial v}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial v}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial v}{\partial z}\cos nz = \frac{\partial v}{\partial n}$$

получим

$$\iint\limits_{(s)} u\frac{\partial v}{\partial n} ds = \iiint\limits_{\omega} \left(u\Delta v + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\omega \tag{9.4}$$

так называемую <u>первую</u> формулу Грина.

Поменяв местами u и v получим двойственную формулу

$$\iint\limits_{(s)} v\frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint\limits_{\omega} \left(v\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\omega. \tag{9.5}$$

Вычтем (5) из (4)

$$\iint\limits_{(s)} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds = \iiint\limits_{\omega} \left(u\Delta v - v\Delta u\right) d\omega. \tag{9.6}$$

Аналогичная формула имеет место и для функции двух переменных

$$\iint\limits_{\omega} \left(u\Delta v - v\Delta u\right) ds = \int\limits_{(\gamma)} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dl \tag{9.7}$$

(6) и (7) – называют второй формулой Грина.

<u>Определение 1.</u> Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются <u>гармоническими.</u>

Найдем гармонические функции, обладающие сферической и цилиндрической симметрией.

Запишем уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (9.8)$$

и найдем его решение, зависящее только от r, так что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0 \Rightarrow r^2\frac{\partial u}{\partial r}=c_1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{c_1}{r^2} \Rightarrow u=-\frac{c_1}{r}+c_2.$$

Возьмем частное решение при $c_1=-1,\quad c_2=0$

$$u=\frac{1}{r}. \qquad (9.9)$$

Эту функцию называют <u>фундаментальным</u> решением уравнения Лапласа в пространстве.

Рассмотрим теперь уравнение Лапласа в цилиндрических (полярных) координатах

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z. \end{cases}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

и найдем его решение, обладающее цилиндрической симметрией

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0 \Rightarrow r\frac{\partial u}{\partial r}=c_1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{c_1}{r} \Rightarrow u=c_1\ln r+c_2.$$

Положим $c_1=-1,\quad c_2=0$

$$u=-\ln r=\ln\frac{1}{r}. \qquad (9.10)$$

Это <u>фундаментальное</u> решение уравнения Лапласа на плоскости. Наряду с гармоническими функциями $\frac{1}{r}$ и $\ln\frac{1}{r}$ будем пользоваться их сдвигами:

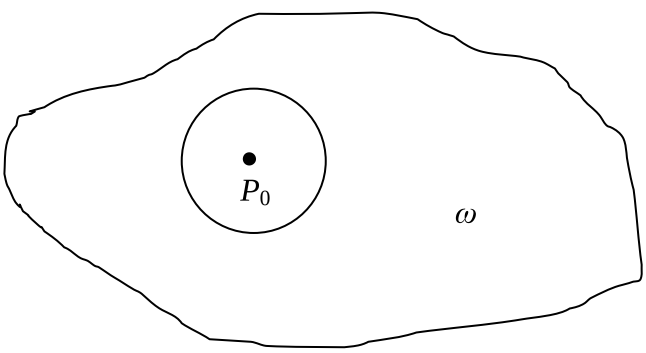
$$\frac{1}{r_{PP_0}}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

$$\ln\frac{1}{r_{PP_0}}=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},$$

которые гармоничны по координатам P всюду, за исключением точки P_0.

Найдем интегральное представление достаточно гладкой функции u, заданной в области ω с достаточно гладкой границей.

Пусть точка $P_0\in\omega$ – внутренняя точка области, $\omega_{P_0,\delta}$ – шар, радиуса δ с центром в точке P_0, причем $\delta>0$ настолько мало, что $\omega_{P_0,\delta}\subset\omega$.



Применим формулу Грина (7) к области $\omega / \omega_{P_0,\delta}$, полагая $v = \dfrac{1}{r_{PP_0}}$. Тогда $\Delta\left(\dfrac{1}{r_{PP_0}}\right) = 0$ в этой области и

$$\iint_{(s)} \left(u\frac{\partial v}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) - \frac{1}{r_{PP_0}}\frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \iint_{s_{P_0,\delta}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) - \frac{1}{r_{PP_0}}\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \iiint_{\omega/\omega_{P_0,\delta}} \left(-\frac{1}{r_{PP_0}}\Delta u \right) d\omega.$$

Рассмотрим

$$J_1 = \iint_{s_{P_0,\delta}} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) ds = \iint_{s_{P_0,\delta}} u\frac{1}{r^2{}_{PP_0}} ds = \frac{1}{\delta^2} u(P_{cp}) 4\pi\delta^2 = 4\pi u(P_{cp}).$$

Так как $\bar{n}$ – внешняя нормаль $\bar{n} \uparrow\uparrow \bar{r}_{P_0P} \uparrow\downarrow \bar{r}_{PP_0}$.

При $\delta \to 0$ $\quad P_{cp} \to P_0$ и $J_1 \to 4\pi u(P_0)$.

$$|J_2| = \left| \iint_{s_{P_0,\delta}} -\frac{1}{r_{PP_0}}\frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \le \frac{M_1}{\delta} 4\pi\delta^2 \to 0$$

при $\delta \to 0$.

Тогда

$$\iint_{(s)} \left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) - \frac{1}{r_{PP_0}}\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + 4\pi u(P_0) = -\iiint_{\omega} \frac{1}{r_{PP_0}} \Delta u d\omega.$$

и, следовательно

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{(s)} \frac{1}{r_{PP_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) ds - \frac{1}{4\pi}\iiint_{\omega} \frac{\Delta u}{r_{PP_0}} d\omega. \tag{9.10}$$

В частности, если u – гармоническая в ω функция, то $\Delta u = 0$ и

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{(s)} \frac{1}{r_{PP_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) ds.. \tag{9.11}$$

Замечание. Если $u(x, y)$ гармонична, то

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} \left(\ln\frac{1}{r_{PP_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r_{PP_0}}\right) \right) dl. \tag{9.12}$$

Свойства гармонических функций.

<u>Свойство 1.</u> Если $u(p)$ – гармоническая в области $\bar{\omega}$, то

$$\iint_{(s)} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Действительно, считая, что u гармоническая в области $\bar{\omega}$, а $v \equiv 1$ в формуле (9.6), имеем

$$\iint_{(s)} \left(0 - 1\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \iiint_{\omega} 0 \cdot d\omega = 0, \text{ т.е. } \iint_{(s)} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

<u>Свойство 2.</u> Теорема о среднем.

Значение гармонической функции в центре сферы равно среднему интегральному от ее значений на сфере, т.е.

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{s_{P_0,R}} u(p) ds.$$

Действительно, воспользуемся интегральным представлением (9.11)

$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_{P_0,R}}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)\right)ds.$$

На сфере $S_{P_0,R}$

$$r_{PP_0}=R;\quad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)=-\frac{1}{r_{PP_0}^2}=-\frac{1}{R^2},$$

то

$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R}\iint\limits_{S_{P_0,R}}\frac{\partial u}{\partial n}ds+\frac{1}{R^2}\iint\limits_{S_{P_0,R}}uds\right)$$

и с учетом свойства 1

$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{S_{P_0,R}}uds.$$

Свойство 3. Принцип максимума и минимума.

Если u – гармоническая в области $\overline{\omega}$ и отлична от const, то она достигает своего максима и минимума только на границе S.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $u(P_0)=\max$, где P_0 – внутренняя точка области ω.

$$u(P)\le u(P_0). \tag{9.13}$$

Возьмем сферу $S_{P_0R}\subset\overline{\omega}$ и применим свойство 2.

$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{S_{P_0,R}}u(P)ds\le\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{S_{P_0,R}}u(P_0)ds=u(P_0). \tag{9.14}$$

Если хотя бы в одной точке сферы S_{P_0R} выполняется строгое неравенство (9.13), то оно выполняется и в некоторой ее окрестности и тогда неравенство (9.14) примет вид

$$u(P_0)<u(P_0),$$

что невозможно.

Свойство 4. Если функция $f(z)$ (функция комплексной переменной) аналитична (имеет производные любого порядка), то ее вещественная и мнимая части и есть гармонические функции

$$f(z)=u(x,\,y)+iv(x,\,y).$$

Для аналитической функции справедливо условие Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)=0.$$

Лекция 10.

Метод функций Грина.

Рассматриваемые вопросы.

1. Функция Грина.
2. Однородная задача Дирихле на плоскости и в пространстве.

3. Электростатическая аналогия.

1) Пусть область ω имеет достаточно гладкую границу S и функция $u(p)$ непрерывна вместе с производными до второго порядка включительно в замкнутой области $\vec{\omega} = \omega \cup vs.$ Тогда имеет место интегральное представление

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(s)} \left(\frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{PP_0}} \right) \right) ds - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\omega} \frac{\Delta u}{r_{PP_0}} d\omega, \tag{10.1}$$

где P_0 – внутренняя точка области ω. С другой стороны по второй формуле Грина

$$\iint\limits_{(s)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \iiint\limits_{\omega} (u\Delta v) - v\Delta u) d\omega. \tag{10.2}$$

Если предположить, что v – гармоническая функция, то из (2) следует

$$0 = \iint\limits_{(s)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \iiint\limits_{\omega} v\Delta u d\omega. \tag{10.3}$$

Вычитая из (1)-(3), получим

$$u(P_0) = \iint\limits_{(s)} \left(\left(\frac{1}{4\pi r_{PP_0}} + v \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi\, r_{PP_0}} + v \right) \right) ds - \iiint\limits_{\omega} \left(\frac{1}{4\pi\, r_{PP_0}} + v \right) \Delta u d\omega, \tag{10.4}$$

где v – произвольная гармоническая функция.

<u>Определение.</u> Функцией Грина для задачи Дирихле называется

$$\begin{cases} G(P,\, P_0) \overset{\det}{=} \dfrac{1}{4\pi r_{PP_o}} + v(P) \\ G(P,\, P_0)\big|_s = 0, \end{cases} \tag{10.5}$$

где v –гармоническая в ω функция. Так как первое слагаемое $\dfrac{1}{r_{PP_0}}$ – есть просто фундаментальное решение уравнения Лапласа и не зависит от области $\vec{\omega}$, то равенства (5) на самом деле определяют гармоническую в ω функцию v, которая на границе подчинена условию

$$v(P)\big|_s = -\frac{1}{4\pi r_{PP_0}}.$$

Иными словами определение функции v связано с решением специальной задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v\big|_s = -\dfrac{1}{4\pi r_{PP_o}} \end{cases}. \tag{10.6}$$

Если такая функция v найдена, то

$$u(P_0) = -\iint\limits_{(s)} u \frac{\partial G}{\partial n} ds - \iiint\limits_{\omega} G\Delta u d\omega. \tag{10.7}$$

Если функция $G(P,\, P_0)$ найдена, то решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = -f(P_0) & P_0 \in \omega \\ u\big|_s = \psi(P_0) & P_0 \in \overline{\omega} \end{cases}$$

определяется по формуле

$$u(P_0) = -\iint\limits_{(s)} \psi(P) \frac{\partial G}{\partial n} ds_P + \iiint\limits_{\omega} f(P) G(P,\, P_0) d\omega. \tag{10.8}$$

Итак, для того, чтобы решить задачу Дирихле, хорошо бы найти функцию Грина $G(P,\,P_0)$ для этой области.

В некоторых случаях (для некоторых областей) можно найти ее явное представление.

Замечание.

В двумерном случае

$$\begin{cases} G(P,\,P_0)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{PP_o}}+v(P) \\ G(P,\,P_0)\big|_{\gamma}=0, \end{cases}$$

где v – гармоническая функция двух переменных.

Решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x,\,y) \\ u\big|_{\gamma}=\varphi(x,\,y) \end{cases}$$

дается формулой

$$u(x_0,\,y_0)=-\int\limits_{\gamma}\varphi(x,\,y)\frac{\partial G}{\partial n}d\gamma+\iint\limits_{\omega}Gf(x,\,y)d\omega. \qquad (10.9$$

2) Для некоторых областей функцию Грина удается найти в замкнутой форме методом электростатических отображений. В электростатической интерпретации функция Грина

$$G(P,\,P_0)=\frac{1}{4\pi r_{PP_0}}+v(P)$$

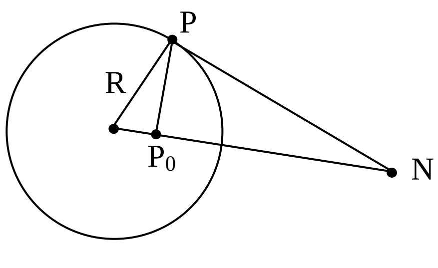
представляет собой суммарный потенциал в точке P заряда, помещенного в точке P_0 внутри заземленной поверхности.

Первое слагаемое есть, очевидно, потенциал самого точечного заряда, а второе $v(P)$ представляет потенциал зарядов индуцированных на проводящей поверхности. Ясно, что для построения функции Грина, надо уметь находить потенциал индуцированных зарядов $v(P)$. В свете такой интерпретации функцию Грина $G(P,\,P_0)$ называют функцией точечного источника.

Примеры.

1. Функция Грина для шара

Пусть R – радиус шара, P – любая точка на сфере, а во внутренней точке P_0 помещен единичный заряд.



На проводящей сфере индуцируется заряд, потенциал которого равен потенциалу некоторого точечного заряда, помещенного в инверсионном образе N точки P_0, относительно сферы так, что выполнено равенство:

$$[0P_0[\cdot|0N|=R^2\Rightarrow\frac{[0P_0[}{[0P[}=\frac{[0P[}{[0N[}.$$

Треугольники OPP_0 и OPN подобны (общий угол и стороны пропорциональны).

Поэтому $\dfrac{OP_0}{OP}=\dfrac{PP_0}{PN}$.

Пусть $OP_0=\rho_0$; $PP_0=r_{PP_0}$; $PN=r_{PN}$; $\dfrac{\rho_0}{R}=\dfrac{r_{PP_0}}{r_{PN}}\Rightarrow r_{PN}=\dfrac{R}{\rho_0}r_{PP_0}$. Тогда

$$G(PP_0)=\frac{1}{4\pi r_{PP_0}}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{PN}}\frac{1}{4\pi}. \qquad (10.10)$$

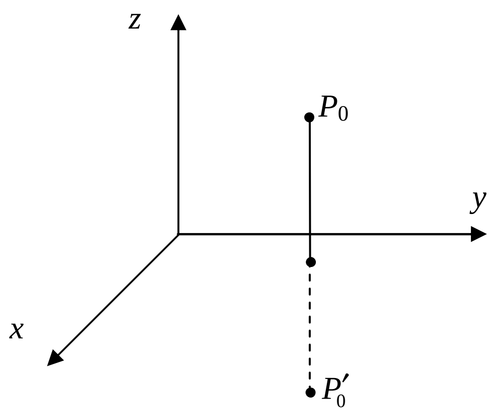
Действительно, $v=-\dfrac{R}{\rho_0}\dfrac{1}{r_{PN}}\dfrac{1}{4\pi}$. Очевидно гармонична по P в замкнутом шаре. Если же точка P лежит на сфере, то

$$G(PP_0)\Big|_s=\frac{1}{4\pi r_{PP_0}}-\frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{\frac{R}{\rho_0}r_{PP_0}}=0.$$

Как видно из (10.10) функция Грина для шара есть потенциал электростатического поля, созданный двумя точечными зарядами.

2. <u>Функция Грина для полупространства</u>

В качестве области ω берем часть, где $z>0$. Граница S имеет уравнение $z=0$. В точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ помещаем единичный заряд, который создает поле с потенциалом $\dfrac{1}{4\pi r_{PP_0}}$.



Внесение проводящей поверхности $z=0$ приводит к индуцированию зарядов, потенциал которых можно заменить потенциалом отрицательного единичного заряда, помещенного в точку $P_0'(x_0,y_0,-z_0)$.

Суммарный потенциал
$$G(PP_0)=\frac{1}{4\pi r_{PP_0}}-\frac{1}{4\pi r_{PP_0'}}.$$

Рассмотрим задачу Дирихле для полупространства $z>0$.

$$\begin{cases}\Delta u=0 & z>0\\ u\big|_{z=0}=\varphi(x,y)\end{cases}.$$

Ее решение:

$$u(x_0,y_0,z_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)\frac{\partial G}{\partial z}dxdy$$

$$r_{PP_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2(z-z_0)^2}$$

$$r_{PP_0'}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2(z+z_0)^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{z_0-z}{r_{PP_0}^3}+\frac{z+z_0}{r_{PP_0'}^3}\right)\bigg|_{z=0}=\frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right)^{3/2}}$$

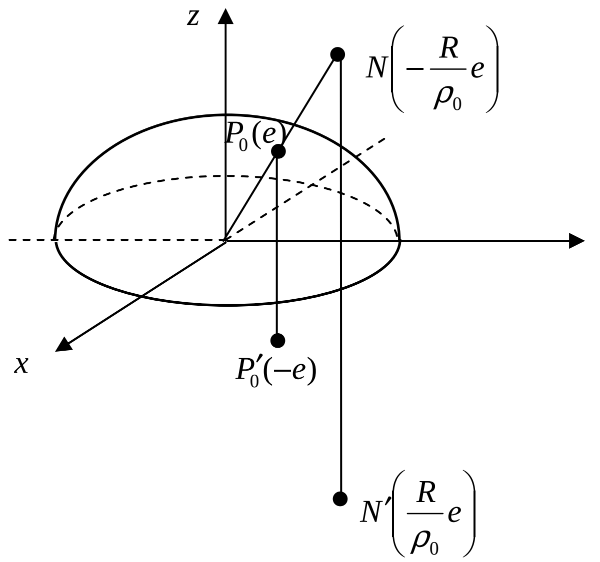
или

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z_0\varphi(x,y)}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right)^{3/2}}dxdy$$

3) Функции Грина для полушара.

$$G(PP_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{PN}}\right)-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{PP_0'}}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{PN'}}\right),$$

где



Лекция 11

. Теория потенциала.

Рассматриваемые вопросы.
1.Объемный и логарифмический потенциалы.
2. Поверхностные потенциалы.
3. Решение основных краевых задач методом потенциала.

Приведем некоторые сведения из теории потенциала.
1. Объемный потенциал и его свойства.

Предположим, что в области ϖ распределен электрический заряд с плотностью $\rho=\rho(P),\quad P(x,\,y,\,z).$ Для нахождения потенциала такого электростатического поля разобьем область ω на элементарные части $\Delta\omega_k$, не имеющие общих внутренних точек. Допустим, что действие заряженной области ω_k равносильно действию точечного заряда $\rho(P_k)\Delta\omega_k$. Тогда потенциал электростатического поля в точке наблюдения P_0 можно найти по формуле:

$$u_n(P_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho(P_k)}{r_{P_kP_0}}\Delta\omega_k.$$

При $n\to\infty$ очевидно

$$u(P_0)=\iiint\limits_{\omega}\frac{\rho(P)}{r_{PP_0}}d\omega_p. \tag{11.1}$$

Функцию (1) называют <u>объмным</u> или ньютоновским потенциалом.

Свойство 1. Объемный потенциал есть гармоническая функция по координатам точки $P_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ во внешней области ϖ .

Если $P_0 \notin \varpi,$ то (1) есть обычный тройной интеграл, функция $\dfrac{1}{r_{PP_0}}$ имеет непрерывные производные любого порядка, интеграл $\iiint\limits_{\omega} |\rho(P)| d\omega < \infty,$ поэтому производные по x_0, y_0, z_0 можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла. В частности

$$\Delta u(P_0) = \iiint\limits_{\omega} \rho(P) \Delta \left(\frac{1}{r_{PP_0}} \right) d\omega_p = 0,$$

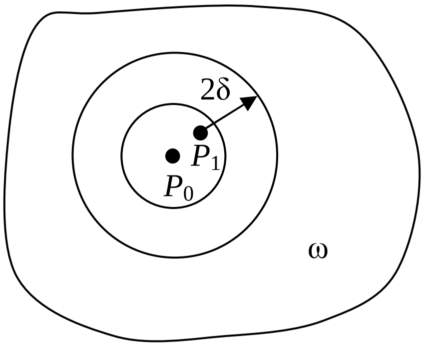
так как $\Delta_{P_0} \left(\dfrac{1}{r_{PP_0}} \right) = 0,$ если $P_0 \notin \varpi.$

Свойство 2. Объемный потенциал есть непрерывная функция по координатам точки P_0 во всем пространстве $R^3.$

Действительно, непрерывности в внешности ϖ вытекает из ее гармоничности. Пусть теперь точка $P_0 \in \omega,$ а $\omega_{P_0,\,\delta}$ есть шар радиуса $\delta > 0$ с центром в точке P_0 такой, что $\omega_{P_0,\,\delta} \subset \varpi.$

Рассмотрим разность $u(P_0) - u(P_1),$ где точка $P_1 \in \omega_{P_0,\,\delta}$

$$u(P_0) - u(P_1) = \iiint\limits_{\omega_{P_0,\,\delta}} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}} d\omega_p - \iiint\limits_{\omega_{P_0,\,\delta}} \frac{\rho(P)}{r_{PP_1}} d\omega_p + \iiint\limits_{\omega/\omega_{P_0,\,\delta}} \rho(P) \left(\frac{1}{r_{PP_0}} - \frac{1}{r_{PP_1}} \right) d\omega_p = J_1 + J_2 + J_3.$$



$$|J_2| \le \iiint\limits_{\omega_{P_1,\,2\delta}} \frac{|\rho(P)|}{r_{PP_1}} d\omega_p \le \iiint\limits_{\omega_{P_1,\,2\delta}} \frac{M}{r_{PP_1}} d\omega_p = M \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\delta} r_{PP_1} \sin\theta d u d\theta dr_{PP_1} = 8\pi M\delta.$$

Для J_1 аналогично получаем

$$|J_1| \le 2\pi M\delta.$$

Будем считать, что δ фиксировано так, что

$$10\pi M\delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим теперь J_3. Если $P \in \omega/\omega_{P_0,\,\delta},$ то выбирая P_1 достаточно близко к P_0 получим

$$\left(\frac{1}{r_{PP_0}} - \frac{1}{r_{PP_1}} \right) < \frac{\varepsilon}{2M\omega}$$

с помощью которого

$$|J_3| \le M \iiint\limits_{\omega/\omega_{P_0,\delta}} \left(\frac{1}{r_{PP_{01}}} - \frac{1}{r_{PP_1}} \right) d\omega_p \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

А значит

$$|u(P_0)-u(P_1)|<\varepsilon.$$

Непрерывность во внутренних точках области ω объемного потенциала доказана.

Пусть теперь точка $P_0 \in S$ – границе области ω. Рассмотрим более широкую область $\omega_1 \supset \omega$ и положим $\rho_1(P)=\begin{cases}\rho(P), & \text{если } P\in\overline{\omega}\\ 0, & \text{если } P\in\omega_1\setminus\omega\end{cases}.$

Тогда

$$u(P_0)=\iiint\limits_{\omega_1}\frac{\rho(P)}{r_{PP_0}}d\omega_p$$

и точка P_0 будет внутренней по отношению к ω_1. Следовательно, потенциал в точке P_0 непрерывен.

Свойство 3. Объемный потенциал имеет непрерывные производные первого порядка в R^3. Доказательство аналогично доказательству свойства 2.

Свойство 4. Если плотность $\rho(P)$ имеет непрерывные производные первого порядка, то объемный потенциал имеет производные второго порядка в области ω и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u(P_0)=-4\pi\rho(P_0)$$

(без доказательства).

Замечание 1. С помощью объемного потенциала решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона может быть сведено к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Замечание 2. В двумерном случае роль объемного потенциала играет так называемый логарифмический потенциал

$$u(x_0,\,y_0)=\iint\limits_{(D)}\rho(x,y)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}dxdy.$$

Поверхностные интегралы простого и двойного слоя.

Пусть на некоторой достаточно гладкой поверхности S распределен заряд с плотностью $\rho(P)$. Тогда потенциал электростатического поля в точке $P_0\notin S$ представляется в виде:

$$u(P_0)=\iint\limits_{S}\frac{\rho(P)}{r_{PP_0}}ds_p. \tag{11.2}$$

Функцию (11.2) называют потенциалом простого слоя. Перечислим некоторые свойства этого потенциала.

1). Потенциал простого слоя есть гармоническая вне S функция.

2). Потенциал простого слоя есть непрерывная во всем пространстве R^3 функция.

3). Нормальная производная потенциала простого слоя терпит разрыв при переходе через поверхность S.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_i=\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_0-2\pi\rho(P_0),\ \left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_e=\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_0+2\pi\rho(P_0).\ , \tag{11.3}$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_i$ - значение нормальной производной потенциала простого слоя изнутри, а

$\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_e$ - снаружи поверхности.

Потенциалом двойного слоя называется выражение

$$u(P_0)=\iint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)ds_P,$$

где $\nu(P)$ – есть плотность распределения дипольного момента, а $\overline{n}_P$ – внутренняя нормаль к S.

4). Потенциал двойного слоя есть гармоническая вне S функция.

5). Потенциал двойного слоя терпит разрыв при переходе через поверхность S.

Если предел потенциала двойного слоя снаружи обозначить через $u_e(P_0)$, а предел изнутри - через $u_i(P_0)$, то имеют место формулы

$$u_e(P_0)=\iint_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}ds-2\pi\nu(P_0)=u(P_0)-2\pi\nu(P_0),$$

$$u_i(P_0)=\iint_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}ds+2\pi\nu(P_0)=u(P_0)+2\pi\nu(P_0), \tag{11.4}$$

где φ_0 - угол, образованный вектором $\overline{r}_0=\overline{P_0P}$ и нормалью $\overline{n}$ в переменной точке $P\in S$.

В двумерном случае формулы скачка для потенциала двойного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} u_e(P_0)&=u(P_0)-\pi\mu(P_0),\\ u_i(P_0)&=u(P_0)+\pi\mu(P_0) \end{aligned} \tag{11.5}$$

6). Потенциал двойного слоя может быть представлен в виде:

$$u(P_0)=\iint_S \nu(P)\frac{\cos(\overline{P}\overline{P}_0,\ \overline{n}_P)}{r_{PP_0}^2}ds_p,$$

Аналогично могут быть введены криволинейные интегралы простого и двойного слоя с аналогичными свойствами.

Поверхностные потенциалы дают возможность сводить краевые задачи для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям. Такой прием эффективен при решении краевых задач со сложной границей и удобен в теоретических исследованиях. Отметим, что решение задачи Дирихле при этом ищут в виде потенциала двойного слоя, решение задачи Неймана – в виде потенциала простого слоя.

В качестве примера рассмотрим первую и вторую краевые задачи: найти функцию u, гармоническую в области $D\subset R^2$, ограниченной контуром Γ, и удовлетворяющую либо граничным условиям задачи Дирихле (первой краевой задачи) $u\big|_\Gamma=f$, либо условиям задачи Неймана (второй краевой задачи) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=f$.

Как для внутренней, так и для внешней задачи нормаль в граничном условии будем считать внутренней.

Решение внутренней первой краевой задачи ищем в виде потенциала двойного слоя

$$u(M)=\int_\Gamma \mu(P)\frac{\cos\varphi}{r_{MP}}ds \tag{11.6}$$

с неизвестной пока функцией $\mu(P)$. При любом выборе $\mu(P)$ функция $u(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области D, охваченной контуром Γ, и разрывна на контуре Γ. Для выполнения граничных условий необходимо, чтобы в каждой точке $P_0\in\Gamma$ выполнялось равенство $u_i(P_0)=f(P_0)$. Поэтому по формуле (11.5) получим уравнение для определения $\mu(P)$:

$$\pi\mu(P_0)+\int_\Gamma \frac{\cos\varphi}{r_{P_0P}}\mu(P)ds=f(P_0). \tag{11.7}$$

Если в формуле (11.7) перейти к естественному параметру, обозначив через s_0 и s дуги контура *Г*, соответствующие точкам P_0 и P, то (11.7) примет вид

$$\pi\mu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\mu(s)ds = f(s_0), \tag{11.8}$$

где L – длина контура *Г*, $K(s_0, s) = \dfrac{\cos\varphi}{r_{PP_0}}$ - ядро интегрального уравнения. Уравнение (11.8) является уравнением Фредгольма второго рода. Решив его, найдем функцию $\mu(P)$, а значит, решим и внутреннюю задачу Дирихле.

Для внешней первой краевой задачи аналогично получим уравнение

$$-\pi\mu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\mu(s)ds = f(s_0). \tag{11.9}$$

Перейдем ко второй краевой задаче. Если искать ее решение в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \int_{Г} \mu(P)\ln\frac{1}{r}ds, \tag{11.10}$$

то для *внутренней задачи* функция $\mu(P)$ определяется как решение уравнения

$$-\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\mu(s)ds = f(s_0), \tag{11.11}$$

для *внешней задачи* – как решение уравнения

$$\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\mu(s)ds = f(s_0). \tag{11.12}$$

Ядро $K_1(s_0, s)$ в интегральных уравнениях (11.11) и (11.12) имеет вид

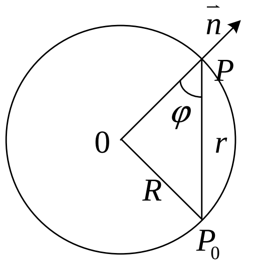
$$K_1(s_0, s) = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\ln\frac{1}{r_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}}.$$

Пример (первая краевая задача для круга). Решим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге радиуса *R* с границей *Г*. Предполагая использовать формулы (11.6) и (11.7), найдем ядро

$$K(s_0, s) = \frac{\cos\varphi}{r_{P_0P}}$$

потенциала двойного слоя. Из рисунка ясно, что $\dfrac{\cos\varphi}{r} = \dfrac{1}{2R}$, поэтому интегральное уравнение (11.8) для определения функции μ примет вид

$$\mu(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_{Г}\frac{1}{2R}\mu(s)ds = \frac{1}{\pi}f(s_0). \tag{11.13}$$



Ядро этого уравнения вырожденное, т.к. зависит только от одного аргумента s. Поэтому легко видеть, что решением уравнения (11.13) является функция

$$\mu(s) = \frac{1}{\pi}f(s) + A \tag{11.14}$$

где *A* – некоторая подлежащая определению постоянная. Подставим функцию (9) в уравнение (8) и выразим постоянную *A* через заданную функцию f:

$$A = -\frac{1}{4\pi^2 R}\int_{Г} f(s)ds.$$

Таким образом, решением интегрального уравнение (11.13) является функция

$$\mu(s) = \frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{\Gamma} f(s) ds.$$

Соответствующий потенциал двойного слоя, дающий решение первой краевой задачи для круга, равен

$$u(M) = \int_{\Gamma} \mu(P) \frac{\cos\varphi}{r_{MP}} ds = \int_{\Gamma} \frac{\cos\varphi}{r_{MP}} \left(\frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{\Gamma} f(s) ds \right) ds.$$

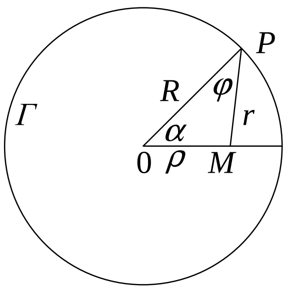
Преобразуем правую часть этой формулы, полагая, что точка M лежит внутри Γ:

$$u(M) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos\varphi}{r_{MP}} f(s) ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_{\Gamma} f(s) ds \right) \int_{\Gamma} \frac{\cos\varphi}{r_{MP}} ds = \tag{11.15}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos\varphi}{r_{MP}} f(s) ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_{\Gamma} f(s) ds \right) \cdot 2\pi = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\cos\varphi}{r_{MP}} - \frac{1}{2R} \right) f(s) ds.$$

(Здесь было использовано равенство $\int_{\Gamma} \frac{\cos\varphi}{r_{MP}} ds = 2\pi,$ проверить которое предлагается читателю).

Преобразуем подынтегральное выражение. Из треугольника OPM (см. рис.)



$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\alpha$ и $\cos\varphi = \;= \dfrac{R - \rho\cos\alpha}{r}$. Отсюда $\dfrac{\cos\varphi}{r} - \dfrac{1}{2R} = \dfrac{R^2 - \rho^2}{2Rr^2}$.

Подставив найденное выражение в (11.15), получим известную формулу Пуассона для круга

$$u(M) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} \frac{R^2 - \rho^2}{r^2} f(s) ds,$$

дающую решение задачи .

Литература

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. Новосибирск: Наука, 1972.
4. Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск: Наука, 1974.
5. Макаров А.П., Макарова В.В. Краткий курс математического анализа. Ч. 2. СП-б.: Наука, 1994.
6. Очан Ю.С. Методы математической физики. М.: Высшая школа, 1965.
7. Очан Ю.С. Сборник задач по методам математической физики. М.: Высшая школа, 1973.
8. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968.
9. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973.
10. Макаров А.П. Операционное исчисление. Череповец, 2002.
11. Макаров А.П. Теория операторов (вводный курс). Череповец, 2002.
12. Макаров А.П. Уравнения математической физики. - Череповец, 2004.- 175 с.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1985.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М.: Наука, 1963.
15. Макаров А.П. Элементы теории функций комплексного переменного. Череповец, 2002.
16. Макаров А.П., Макарова В.В. Вариационное исчисление. Череповец, 2002.
17. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1970.
18. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
19. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Физматгиз, 1961.
20. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. II. М.: Наука, 1967.
21. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
22. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
23. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
24. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964.