Министерство образования и науки, молодежи и спорта
Донбасская государственная машиностроительная академия

Составитель Костиков А.А.

Численные методы и моделирование на ЭВМ

Методические указания

к выполнению практических и самостоятельных работ

для студентов направлений подготовки

6.050202 «Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии»
6.092501 «Автоматизированное управление технологическими процессами»

Утверждено
на заседании
методического семинара кафедры
Протокол №5 от 19.01.2012

Краматорск 2012

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

ТЕМА: «ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ»

Задание:

Задача 1.1

Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры.: а) в широком смысле, б) в узком (строгом) смысле. Варианты заданий приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.1 – Варианты заданий к задаче 1.1.

№ варианта	1 число	2 число	№ варианта	1 число	2 число
1	а) 11,445	б) 2,043	14	а) 3,4	б) 0,078
2	а) 8,345	б) 0,288	15	а) 2,4516	б) 0,863
3	а) 0,374	б) 4,348	16	а) 5,6432	б) 0,00858
4	а) 41,72	б) 0,678	17	а) 12,688	б) 4,636
5	а) 18,357	б) 2,16	18	а) 15,644	б) 6,125
6	а) 14,862	б) 8,73	19	а) 16,383	б) 5,734
7	а) 0,3648	б) 21,7	20	а) 18,275	б) 0,00644
8	а) 0,5746	б) 236,58	21	а) 3,75	б) 6,8343
9	а) 5,634	б) 0,0748	22	а) 26,3	б) 4,8556
10	а) 20,43	б) 0,576	23	а) 43,813	б) 0,645
11	а) 12,45	б) 3,4453	24	а) 3,643	б) 72,385
12	а) 2,3445	б) 0,745	25	а) 3,425	б) 7,38
13	а) 0,5746	б) 42,884	26	а) 0,573	б) 3,6761

Задание 1.2.

Число x (табл..1.2), все цифры которого верны в широком смысле, округлить до двух значащих цифр. Для полученного результата $x_{округл} \approx x$ вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа $x_{округл}$ указать количество верных цифр по абсолютной погрешности

Таблица 12 – Варианты заданий к задаче 1.2

№ варианта	**Значение *x***	**№ варианта**	**Значение *x***
1	3549	14	129,66
2	32,147	15	23,394
3	35,085	16	0,003775
4	7,544	17	718,21
5	198,745	18	9,73491
6	37,4781	19	11,456
7	0,183814	20	0,1495
8	0,009145	21	6,2358
9	11,3721	22	4,4005
10	0,2538	23	2,3078
11	10,2118	24	3,2175
12	4,394	25	0,0002568
13	0,8437	26	37,8455

Задание 1.3.

Вычислить значение величины Z(табл.1.3) при заданных значениях чисел a , b и c, используя систематический учет абсолютных погрешностей после каждой операции.. Числа a и b верны в строгом смысле. Найти абсолютную и относительную погрешности Z и определить количество верніх цифр в Z. Записать ответ по правилу записи приближённых чисел..

Таблиця 1.3 – Варіанти завдань до завдання 1.3

№ варианта	**Значение величины Z**	**Численные значения**	**№ варианта**	**Значения величины Z**	**Численные значения**
1	$z = \dfrac{4\sqrt{a+b}}{ab-c}$	a = 0,317 b = 3,27 c = 4,7561	14	$z = \dfrac{a\ln(b)}{\sin\left(\sqrt{a}+c\right)}$	a = 29,49 b = 87,878 c = 4,403
2	$z = \dfrac{\ln(b+c)}{b-ac}$	a = 0,0399 b = 4,83 c = 0,0721	15	$z = \dfrac{0.8\ln(b)}{\sqrt{a+bc}}$	a = 74,079 b = 5,3091 c = 6,234
3	$z = \dfrac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	a = 1,0574 b = 1,40 c = 1,1236	16	$z = \dfrac{\sqrt{a}}{bc-\ln(c)}$	a = 3,4 b = 6,22 c = 0,149
4	$ab-4c$	a = 12,72	17	$\sqrt{ab}$	a = 5,387

№ варианта	Значение величины Z	Численные значения	№ варианта	Значения величины Z	Численные значения
		b = 0,34 c = 0,0290			b = 13,527 c = 0,7565
5	$z=\frac{a-tg(b)}{13c+b}$	a = 3,49 b = 0,845 c = 0,0037	18	$z=\frac{b^2+\ln(c)}{\sqrt{c-a}}$	a = 0,038 b = 3,9353 c = 5,75
6	$z=\frac{ac+3b}{\sqrt{b-c}}$	a = 0,0976 b = 2,371 c = 1,15887	19	$z=\frac{4\sqrt{a+b}}{ab-c}$	a = 0,317 b = 3,27 c = 4,7561
7	$z=\frac{\ln(a-b)}{\sqrt{b+c}}$	a = 82,3574 b = 34,12 c = 7,00493	20	$z=\frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	a = 0,0399 b = 4,83 c = 0,0721
8	$z=\frac{a^2-b}{\sqrt{ab-c}}$	a = 3,71452 b = 3,03 c = 0,756	21	$z=\frac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	a = 1,0574 b = 1,40 c = 1,1236
9	$z=\frac{b+\cos(c)}{3b+2a}$	a = 0,11587 b = 4,256 c = 3,00971	22	$z=\frac{ab-4c}{\ln(a)+3b}$	a = 12,72 b = 0,34 c = 0,0290
10	$z=\frac{\ln(a)+3b}{ab-c}$	a = 7,345 b = 0,31 c = 0,09871	23	$z=\frac{a-tg(b)}{13c+b}$	a = 3,49 b = 0,845 c = 0,0037
11	$z=\frac{2tg(a-b)}{a^2c+b}$	a = 0,2471 b = 0,0948 c = 4,378	24	$z=\frac{a^2-b}{\sqrt{ab-c}}$	a = 3,71452 b = 3,03 c = 0,756
12	$z=\frac{4\sqrt{a+c}}{ab-c}$	a = 1,284 b = 4,009 c = 3,2175	25	$z=\frac{b+\cos(c)}{3b+2a}$	a = 0,11587 b = 4,256 c = 3,00971
13	$z=\frac{\sin\left(a-\sqrt{b}\right)}{c+\ln(b)}$	a = 18,407 b = 149,12 c = 2,3078	26	$z=\frac{\ln(a)+3b}{ab-c}$	a = 7,345 b = 0,31 c = 0,09871

Задание 1.4.

Вычислить значение функции *U(x,y)* (табл. 1.4) и её предельные абсолютную и относительную погрешности, если известны погрешности её аргументов, используя общее правило для расчета погрешности функции, зависящей от нескольких переменных.

Таблиця 1.5 – Варіанти завдань до завдання 1.4

№ варианта	Значение функции $U(x,y)$	Значение аргумента x	Значенние аргумента y
1	$3\sin x+\cos(1+1{,}6y)$	(1,25±0,02)	1,3±10%
2	$2\sin(x+1{,}5y)$	(3,15±0,02)	1,15±5%
3	$x^4+y^{1,7}$	(1,23±0,02)	1,58±5%
4	$\sin(x-5)+\cos1{,}8y$	(1,12±0,01)	1,28±2%
5	$(x^6+y^{1,9})^{-1}$	(1,32±0,01)	1,97±2%
6	$\ln(7x+2{,}1y)$	(3,56±0,04)	2,56±2%
7	$x^{-6}+2{,}4y^{-2}$	(3,44±0,02)	1,21±3%
8	$\log_2(9x+2{,}3y)$	(5,12±0,02)	1,01±2%
9	$3^{x+1}–5{,}2y$	(1,54±0,02)	1,5±8%
10	$\lg(2x–0{,}1y)$	(1,45±0,02)	1,5±2%
11	$\mathrm{tg}(2x–0{,}2y)$	(0,42±0,02)	0,14±2%
12	$e^{\,–5x–2,9y}$	(2,12±0,02)	1,52±6%
13	$6^x–3{,}5\,e^{\,–y}$	(1,22±0,02)	1,1±1%
14	$\cos(7x+2{,}5y)$	4,11±0,02)	1,06±4%
15	$\log_4(2x–0{,}1y)$	(1,45±0,02)	1,5±2%
16	$\sin(x-5)+\cos1{,}8y$	(1,12±0,01)	1,28±2%
17	$(x^6+y^{1,9})^{-1}$	(1,32±0,01)	1,97±2%
18	$\ln(7x+2{,}1y)$	(3,56±0,04)	2,56±2%
19	$x^{-6}+2{,}4y^{-2}$	(3,44±0,02)	1,21±3%
20	$\log_2(9x+2{,}3y)$	(5,12±0,02)	1,01±2%
21	$3^{x+1}–5{,}2y$	(1,54±0,02)	1,5±8%
22	$\lg(2x–0{,}1y)$	(1,45±0,02)	1,5±2%
23	$\mathrm{tg}(2x–0{,}2y)$	(0,42±0,02)	0,14±2%
24	$e^{\,–5x–2,9y}$	(2,12±0,02)	1,52±6%
25	$6^x–3{,}5\,e^{\,–y}$	(1,22±0,02)	1,1±1%
26	$\cos(7x+2{,}5y)$	4,11±0,02)	1,06±4%
	$\log_4(2x–0{,}1y)$	(1,45±0,02)	1,5±2%

Пример выполнения работы

Задача 1.1

Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в широком смысле, б) в узком (строгом) смысле

Решение;

Поскольку в числе 0,856 все цифры верны в широком смысле, то его погрешность (абсолютная) не превосходит единицы разряда, соответствующего последней цифре, т.е. 0, 001. Следовательно, имеем;

$$\Delta \approx 0{,}001$$

$$\delta \approx \frac{0{,}001}{0{,}856} \approx 0{,}00117 \ \ (0{,}12\%)$$

Поскольку в числе 0, 07 все цифры верны в узком (строгом) смысле, то его погрешность (абсолютная) не превосходит половины единицы разряда, соответствующего последней цифре, т.е. 0,01/2 = 0,005. Следовательно, имеем::

$$\Delta \approx 0{,}005$$

$$\delta \approx \frac{0{,}005}{0{,}07} \approx 0{,}0714\,(7{,}14\%)$$

Задача 1.2

Число x = 1, 1426, все цифры которого верны в широком смысле, округлить до двух значащих цифр. Для полученного результата $x_{округл} \approx x$ вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа $x_{округл}$ указать количество верных цифр по абсолютной погрешности.

Решение;

Поскольку цифры числа x верны в широком смысле, то $\Delta_x \leq 0,\ 0001$. Число x мы округляем до двух значащих цифр, значит, вносим погрешность округления: $\Delta_{округл} = |x_{округл} - x|$, где $x_{округл} = 1,\ 1$

С учётом этого, общая погрешность составляет

$$\Delta = \Delta_x + \Delta_{округл} = 0{,}0001 + |1{,}1 - 1{,}1426| = 0{,}0427$$

Зная оценку абсолютной погрешности, можно получить величину относительной погрешности по формуле связи между абсолютной и относительной погрешностью:

$$\delta_{x_{\text{округл}}} = \frac{0{,}0427}{1{,}1} \approx 0{,}0388\ (3{,}88\%)$$

Теперь выясним, какие цифры в числе $x_{\text{округл}}$ являются верными в строгом смысле:

Цифра 1: 0,5 > 0,0427, значить, 1 – вірна.

Цифра 1: 0,05 > 0,0427, значить, 1 – вірна.

В строгом смысле в числе $x_{\text{округл}}$ верны все цифры.
Аналогичной проверкой убеждаемся, что в широком смысле в числе $x_{\text{округл}}$ верны все цифры тоже.

Задача 1.3.

Вычислить значение величины Z при заданных значениях чисел a и b, используя систематический учет абсолютных погрешностей после каждой операции. Числа a и b верны в строгом смысле. Записать ответ по правилу записи приближённых чисел..

Решение:

Пусть $Z = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{b + \ln a}$, $a = 12{,}34$, $b = 14{,}3$.

Результаты расчетов удобно оформлять в виде таблицы, куда после выполнения каждой элементарной операции заносится информация о погрешности операции и числовое значение, которое состоит из верных цифр и одной сомнительной (обязательно!). Сомнительную цифру обычно подчёркивают.

В нашем случае целесообразно выделить следующие элементарные операции (первая строка таблицы)

Таблиця 1.1

Елементарна операція	a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	ln$a$	b+ln$a$	Z
Числове значення	12,34	14,3	$3{,}51\underline{3}$	$3{,}7\underline{8}$	$7{,}2\underline{9}$	$2{,}512\underline{9}$	$16{,}\underline{8}$	$0{,}43\underline{4}$
Погрішність операції	0,005	0,05	0,00071	0,0066	0,0073	0,00041	0,05041	0,002

Для каждой операции из таблицы для того, чтобы записать число с верными цифрами в строгом смысле и одной сомнительной, производится проверка, аналогичная выполненной в предыдущем задании.

Например, получим столбец 4 таблицы:

$$\sqrt{a} = \sqrt{12,34} \approx 3,51283$$

$$\Delta(\sqrt{a}) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \Delta a \approx 0,00071$$

Проверяем, какие цифры в $\sqrt{a}$ являются верными в строгом смысле:

3 : 0,5 > 0,00071 – верная;

5 : 0,05 > 0,00071 – верная;

1 : 0,005 > 0,00071 – верная;

2 : 0,0005 < 0,00071 – сомнительная.

Значит, в таблицу заносится значение $\sqrt{a} \approx 3,51\underline{3}$ (не забываем правильно применять пра-√ила округления приближённых чисел). В дальнейшем, когда будем использовать значение а (например, 6-й столбец таблицы), используем ОБЯЗАТЕЛЬНО 3, 51$\underline{3}$, а не что-нибудь другое!

Аналогичные действия выполняются для всех столбцов таблицы. Всегда надо учитывать строгую последовательность действий для систематического учёта ошибок на каждой операции: Вычислить значение → вычислить погрешность → с учетом погрешности внести в таблицу значение, состоящее из верных цифр и одной сомнительной.

Наконец, получим последний столбец таблицы

$$Z = \frac{7,2\underline{9}}{16,\underline{8}} \approx 0,43393$$

Для вычисления ΔZ воспользуемся тем фактом, что при делении чисел складываются их относительные погрешности. Следовательно, имеем:

$$\delta Z = \delta(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \delta(b + \ln a) = \frac{0,0073}{7,2\underline{9}} + \frac{0,05041}{16,\underline{8}} \approx 0,0040$$

$$\Delta Z = Z \cdot \delta Z = 0,43393 \cdot 0,0040 \approx 0,00174$$

Проверяем, какие цифры в Z являются верными в строгом смысле

$$0: \ 0{,}5 \quad > 0{,}00174 \text{ – верная;}$$

$$4: \ 0{,}05 \quad > 0{,}00174 \text{ – верная;}$$

$$3: \ 0{,}005 \quad > 0{,}00174 \text{ – верная;}$$

$$3: \ 0{,}0005 < 0{,}00174 \text{ – сомнительная.}$$

После этого мы можем записать окончательный ответ. Надо помнить, что по правилам записи приближённых чисел разрядности результата и погрешности для него должны совпадать, т. е. Z = (0, 434 ± 0, 002),

где 4 и 3 верны в строгом смысле, а последняя цифра – сомнительна.

Задача 1.4.

Вычислить значение функции *U(x,y)* и её предельные абсолютную и относительную погрешности, если известны погрешности её аргументов, используя общее правило для расчета погрешности функции, зависящей от нескольких переменных..

Решение:

Пусть нам дана функция и её аргументы, заданные с некоторой погрешностью:

$$U(x,y) = 8x^2 + 2{,}2y^{0{,}5}, \quad x = (1{,}84 \pm 0{,}04), \quad y = 6{,}21 \pm 5\%$$

Что касается аргумента x функции U (x, y) - он представлен в стандартной записи приближённого числа: приближенное значение аргумента x≈1,84 и абсолютная погрешность к нему Δx=0, 04. В случае аргумента y запись y=6,21±2% выражает то, что его значение указано с относительной погрешностью равной 5%. Стало быть, нам необходимо найти абсолютную погрешность этого аргумента по формуле связи относительной и абсолютной погрешности

$$\Delta y = y \cdot \delta y = \frac{6{,}21 \cdot 5\%}{100} \approx 0{,}3105$$

Поскольку никакой дополнительной информации об аргументе y нам не дано, то, во избежание потери точности округлим абсолютную погрешность (вне зависимости от правил округления!) в большую сторону и запишем приближенное значение y в стандартном виде записи приближенных чисел

$$y = (6,21 \pm 0,32).$$

Теперь используем общую формулу для расчета абсолютной погрешности функции, зависящей от нескольких переменных

$$\Delta f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \right| \left| \Delta x_i \right|$$

В нашем случае формула будет иметь вид

$$\Delta U(x,y) = \left| \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \right| \left| \Delta x \right| + \left| \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \right| \left| \Delta y \right|$$

$$\Delta U(1{,}84,\ 6{,}21) = 16 \cdot 1{,}84 \cdot 0{,}04 + 1{,}1 \cdot 6{,}21^{-0{,}5} \cdot 0{,}32 \approx 1{,}3189$$

Само значение функции в интересующей нас точке U (1, 84, 6, 21) ≈ 32, 5672.
Имея результат и погрешность к нему, проверяем, какие цифры ответа верны в строгом смысле

3 : 5 > 1,3189 – верная;

2 : 0,05 < 1,3189 – сомнительная.

Следовательно, U(1,84, 6,21) = (33 ± 1).

Относительная погрешность результата $\delta U(1{,}84,\ 6{,}21) = \frac{1}{33} \cdot 100\% \approx 3\%.$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

ТЕМА: «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Задание:

Задача 2.1

Найти решение уравнения(табл.2.1) методом половинного деления с точностью ε=0,01.

Задача 2.2

Найти решение уравнения(табл.2.1) методом итераций с точностью ε=0,01.

Задача 2.3

Найти решение уравнения(табл.2.1) методом касательных с помощью двух итераций и оценить погрешность вычисления.

Таблица 2.1 – Варианты заданий

№	Уравнение	№	Уравнение
1.	$3x^4+4x^3-12x^2-5=0$	16.	$x-\sin x=0{,}35$
2.	$0{,}5^x+1=(x-2)^2$	17.	$\sqrt{x}-\cos(0{,}374+x)=0$
3.	$(x-4)^2\log_{0.5}(x-3)=-1$	18.	$\sin(0{,}5+x)=2x-0{,}5$
4.	$x^2\cos(2x)=-1$	19.	$\ln x+(x+1)^3=0$
5.	$(x-2)^2 2^x=1$	20.	$3x-2e^x=1$
6.	$((x-2)^2-1)2^x=1$	21.	$2\sin(x-0.6)=1{,}5-x$
7.	$(x-2)\cos x=1,\ -2\pi\le x\le 2\pi$	22.	$5x-8\ln x=8$
8.	$(x-2)^3\lg(x+11)=1$	23.	$x=\sqrt{\lg(x+2)}$
9.	$5\sin x=x-1$	24.	$1{,}8x^2-\sin 10x=0$
10.	$x^4\cdot 3^x=2$	25.	$\mathrm{ctg}(1{,}05+x)-x^2=0$
11.	$2\lg x-\dfrac{x}{3}+1=0$	26.	$\mathrm{ctg}\,x-\dfrac{x}{5}=1$
12.	$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0{,}5x^2-1$	27.	$\lg x-\dfrac{7}{2x+6}=0$
13.	$2x^2-0{,}5^x-3=0$	28.	$x^3+0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}2=0$
14.	$\cos(x+0{,}5)=x^3$	29.	$0{,}5x+\lg(x-1)=0{,}5$
15.	$2e^x=5x+2$	30	$\sin 0{,}5x+1=x^2$

Пример выполнения работы

Задача 2.1. Методом половинного деления найти корень уравнения $4-e^x-2x^2=0$ с точностью ε=0,01.

Решение:

Один из искомых корней принадлежит отрезку $[0;1]$. На каждом шаге вычислений значение корня принимаем равным $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ с погрешностью $d_n = a_n - b_n$. Будем производить вычисления и выбирать последовательность вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, используя условие $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$. Имеем

$$[a;b] = [0;1], \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = 0{,}5.$$

Так как $f(a) = 3,\ f(x_1) = 1{,}8513,\ f(b) = -0{,}72$ и $f(x_1)f(b) < 0$, то принимаем: $a_1 = x_1 = 0{,}5,\ b_1 = b = 1;\ d_1 = b_1 - a_1 = 0{,}5.$

Тогда $[a_1; b_1] = [0{,}5; 1],\ x_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 0{,}75.$

Здесь $f(a_1) = 1{,}8513,\ f(x_2) = 0{,}758,\ f(b_1) = 0{,}72,\ f(x_2)f(b_1) < 0.$

Следовательно, $a_2 = x_2 = 0{,}75,\ b_2 = b_1 = 1;\ d_2 = b_2 - a_2 = 0{,}25.$

Тогда $[a_2; b_2] = [0{,}75; 1],\ x_3 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = 0{,}875;\ d_3 = 0{,}125.$

Производя вычисления, можно убедиться, что требуемая точность достигается на 7-м шаге: $x_7 = 0{,}8828125$ с погрешностью $d_7 = 0{,}00785 < \varepsilon = 0{,}01.$

Задача 2.2. Решить уравнение методом итераций $2x - \cos x = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение: Для отделения корней представим данное уравнение в виде $x = \dfrac{1}{2}\cos x$. Построив графики функций $y = x$ и $y = \dfrac{1}{2}\cos x$, увидим, что корень уравнения содержится внутри отрезка $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Здесь

$$f(x) = 2x - \cos x;\ f'(x) = 2 + \sin x > 0;\ M = \max_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}(2 + \sin x) = 3;\ \lambda = -\frac{1}{M} = -\frac{1}{3};$$

Запишем уравнение $f(x) = 0$ в виде $x = g(x)$, где

$$g(x) = x + \lambda f(x) = x - \frac{1}{3}(2x - \cos x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos x$$

Положим $x_0 = 0{,}5$. Последовательные приближения найдём по формулам

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos x_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$x_1 = 0{,}4389128;$
$x_2 = 0{,}45263292;$
$x_3 = 0{,}44964938;$.
$x_4 = 0{,}450299978$

Для оценки погрешности четвёртого приближения воспользуемся неравенством $|c - x_k| \le \begin{cases} |x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon,\ 0 < q \le \dfrac{1}{2}; \\ 10|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon,\ \dfrac{1}{2} < q < 1 \end{cases}$, где $q = \max\limits_{[a;b]} |g(x)|$. Так как $q = \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} |g'(x)| = \dfrac{1}{2} \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} \sin x = \dfrac{1}{2}$, то $|c - x_4| \le |x_4 - x_3| = 0{,}0006504 < \varepsilon = 10^{-3}$.

Следовательно, $c \approx x_4 \approx 0{,}450$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$. Заметим, что мы получили приближённое значение корня с точностью более высокой, чем задано в условии.

Задача 2.3. Один из корней уравнения $x^3 - 6x + 2 = 0$ заключён в отрезке $[0;1]$. Найти приближённое значение этого корня методом касательных с помощью двух итераций и оценить погрешность вычисления.

Решение. Здесь $f(x) = x^3 - 6x + 2;\ f'(x) = 3x^2 - 6;\ f''(x) = 6x$. Заметим, что на отрезке $[0;1]$ сохраняют знак и первая и вторая производные: $f'(x) < 0;\ f''(x) > 0$. Таким образом, выполняются условия применения метода касательных. В качестве x_0 можно взять, например, $x = 0$, так как $f(0) = 2 > 0$ и $f''(0) = 0 \ge 0$. Тогда имеем $x_1 = 0 - \dfrac{f(0)}{f'(0)} = \dfrac{1}{3} = 0{,}3333$. Оценим погрешность вычисления. Найдём значения необходимых параметров:

$m = \min\limits_{[0;1]} |f'(x)| = \min\limits_{[0;1]} |(3x^2 - 6)| = 3;\ M = \max\limits_{[0;1]} |(3x^2 - 6)| = 6;\ q = 1 - \dfrac{m}{M} = 1 - \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Тогда $|c - x_1| \le |x_1 - x_0| = \dfrac{1}{3} < \varepsilon$.

Вторая итерация: $x_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{f(\frac{1}{3})}{f'(\frac{1}{3})} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\frac{1}{27}}{-\frac{16}{3}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{144} = \dfrac{147}{432} = \dfrac{29}{144}$.

Оценим погрешность вычисления: $|c - x_2| \le |x_2 - x_1| = \frac{1}{144} \approx 0{,}007 < \varepsilon$.

Таким образом, мы уже на второй итерации получили приближённое значение корня такой же точности, как в примере из предыдущей лекции лишь на седьмом шаге.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

ТЕМА: «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Задание:

Задача 3.1

Решить систему (табл.3.1) методом Гаусса.

Задание 3.2

Решить систему (табл.3.1) методом Крамера.

Задание 3.3

Решить систему (табл.3.1) методом Зейделя с точностью ε=0,01.

Таблица 3.1 – Варианты заданий к практической работе №3

№	Задание	№	Задание
1.	$\begin{cases} 0{,}21x_1 - 0{,}45x_2 - 0{,}20x_3 = 1{,}97 \\ 0{,}30x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}43x_3 = 0{,}32 \\ 0{,}60x_1 - 0{,}35x_2 - 0{,}25x_3 = 1{,}83 \end{cases}$	9.	$\begin{cases} 14{,}38x_1 - 2{,}41x_2 + 1{,}39x_3 = 5{,}86 \\ 1{,}84x_1 + 25{,}36x_2 - 3{,}31x_3 = -2{,}28 \\ 2{,}46x_1 - 3{,}49x_2 + 16{,}37x_3 = 4{,}47 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} 1{,}53x_1 - 1{,}65x_2 - 0{,}76x_3 = 2{,}18 \\ 0{,}86x_1 + 1{,}17x_2 + 1{,}84x_3 = 1{,}95 \\ 0{,}32x_1 - 0{,}65x_2 + 1{,}11x_3 = -0{,}47 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} 2{,}34x_1 - 4{,}21x_2 - 11{,}61x_3 = 14{,}41 \\ 8{,}04x_1 + 5{,}22x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}44 \\ 3{,}92x_1 - 7{,}99x_2 + 8{,}37x_3 = 55{,}56 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 0{,}45x_1 - 0{,}94x_2 - 0{,}15x_3 = -0{,}15 \\ -0{,}01x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}06x_3 = 0{,}31 \\ -0{,}35x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}65x_3 = 0{,}37 \end{cases}$	11.	$\begin{cases} 1{,}02x_1 - 0{,}73x_2 - 9{,}11x_3 = -1{,}25 \\ 6{,}25x_1 + 2{,}32x_2 + 7{,}62x_3 = 2{,}33 \\ 1{,}13x_1 - 8{,}88x_2 + 4{,}64x_3 = -3{,}75 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} 0{,}63x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}15x_3 = 0{,}34 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}71x_3 = 0{,}42 \\ 0{,}03x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}10x_3 = 0{,}32 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 0{,}62x_1 + 0{,}92x_2 + 0{,}03x_3 = -0{,}82 \\ 0{,}99x_1 + 0{,}01x_2 + 0{,}07x_3 = 0{,}66 \\ 1{,}01x_1 - 0{,}02x_2 + 0{,}99x_3 = -0{,}98 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} -0{,}20x_1 + 1{,}60x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}30 \\ -0{,}30x_1 + 0{,}10x_2 - 1{,}50x_3 = 0{,}40 \\ 1{,}20x_1 - 0{,}20x_2 + 0{,}30x_3 = -0{,}60 \end{cases}$	13.	$\begin{cases} 0{,}10x_1 - 0{,}07x_2 - 0{,}96x_3 = -2{,}04 \\ 0{,}04x_1 - 0{,}99x_2 - 0{,}85x_3 = -3{,}73 \\ 0{,}91x_1 + 1{,}04x_2 + 0{,}19x_3 = -1{,}67 \end{cases}$
6.	$\begin{cases} 0{,}30x_1 + 1{,}20x_2 - 0{,}20x_3 = -0{,}60 \\ -0{,}10x_1 - 0{,}20x_2 + 1{,}60x_3 = 0{,}30 \\ 0{,}50x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}10x_3 = 0{,}32 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} 0{,}62x_1 + 0{,}84x_2 + 0{,}77x_3 = -8{,}18 \\ 0{,}03x_1 - 1{,}11x_2 - 1{,}08x_3 = 0{,}08 \\ 0{,}97x_1 + 0{,}02x_2 - 1{,}08x_3 = 0{,}06 \end{cases}$

№	Задание	№	Задание
7.	$\begin{cases} 0{,}20x_1 + 0{,}44x_2 + 0{,}81x_3 = 0{,}74 \\ 0{,}58x_1 + 0{,}29x_2 + 0{,}05x_3 = 0{,}02 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}10x_3 = 0{,}32 \end{cases}$	15.	$\begin{cases} 0{,}63x_1 - 0{,}37x_2 + 1{,}76x_3 = -9{,}29 \\ 0{,}90x_1 + 0{,}99x_2 + 0{,}05x_3 = 0{,}12 \\ 0{,}13x_1 - 0{,}95x_2 + 0{,}69x_3 = 0{,}69 \end{cases}$
8.	$\begin{cases} 6{,}34x_1 + 11{,}75x_2 + 10x_3 = -41{,}40 \\ 7{,}42x_1 - 19{,}03x_2 + 11{,}75x_3 = -49{,}49 \\ 5{,}57x_1 + 7{,}48x_2 + 6{,}36x_3 = -27{,}67 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 0{,}98x_1 + 0{,}88x_2 - 0{,}24x_3 = 1{,}36 \\ 0{,}16x_1 - 0{,}44x_2 - 0{,}88x_3 = -1{,}27 \\ 9{,}74x_1 - 10x_2 + 1{,}74x_3 = -5{,}31 \end{cases}$

Пример выполнения работы

Задача 3.1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Здесь выполнены следующие элементарные преобразования:

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на –1.

(2) Вторую строку умножили на –1. Вторую и третью строки поменяли местами.

(3) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 5.

(4) Вторую строку умножили на –1. Третью строку разделили на 14.

Обратный ход: $z = -1$

$y - 2z = 2 \Rightarrow y + 2 = 2 \Rightarrow y = 0$

$x + 2y + 3z = 1 \Rightarrow x + 0 - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$

Ответ $x=4,\ y=0,\ z=-1.$

Задача 3.2. Решить систему по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=21 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=9 \\ 2x_1-x_2-x_3=10 \end{cases}$$

Решение: Решим систему по формулам Крамера

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot(-4-2)+2\cdot(-3+4)+4\cdot(-3-8)=$$

$=-18+2-44=-60\neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$D_1=\begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix}=21\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}=21\cdot(-4-2)+2\cdot(-9+20)+4\cdot(-9-40)=$$

$=-126+22-196=-300$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-300}{-60}=5$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}-21\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}=3\cdot(-9+20)-21\cdot(-3+4)+4\cdot(30-18)=$$

$=33-21+48=60$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{60}{-60}=-1$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=3\cdot(40+9)-3\cdot(-20+21)+2\cdot(-18-84)=$$

$=147-3-284=-60$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-60}{-60}=1$$

Ответ: $x_1=5,\ x_2=-1,\ x_3=1$

Задача 3.3. *Методом Зейделя решить с точностью 0,01 систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} 4{,}5x_1-1{,}8x_2+3{,}6x_3=-1{,}7 & (\mathrm{I}) \\ 3{,}1x_1+2{,}3x_2-1{,}2x_3=3{,}6 & (II) \\ 1{,}8x_1+2{,}5x_2+4{,}6x_3=2{,}2 & (III) \end{cases},$$

приведя ее к виду, удобному для итераций.

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы остальные элементы строк

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9 & (\mathrm{I} + \mathrm{II}) \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7 & (2III + II - I) \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4 & (III - II) \end{cases}$$

Нулевое приближение $x^0 = (1,9 \quad 9,7 \quad -1,4)^T$.

Первое приближение

$$x_1^1 = \frac{1}{7,6}(1,9 - 0,5 \cdot 9,7 + 2,4 \cdot 1,4) = 0,0539$$

$$x_2^1 = \frac{1}{9,1}(9,7 + 4,4 \cdot 1,4 - 2,2 \cdot 0,0539) = 1,7298$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5,8}(-1,4 + 1,3 \cdot 0,0539 - 0,2 \cdot 1,7298) = -0,289$$

и т.д.

Окончание вычислений определяется условием

$$\max_{1 \le i \le m} \left| x_i^{n+1} - x_i^n \right| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - заданное число.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

ТЕМА: «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Задание 4.1

Решить систему нелинейных уравнений(табл.4.1) методом Ньютона с точностью ε=0,01. Подсчитать число итераций, необходимых для достижения заданной точности.

Задание 4.2

Решить систему нелинейных уравнений(табл.4.1) методами простой итерации и Зейделя. Сделать три итерации.

Таблица 4.1 – Варианты заданий к практической работе №4

№	Задание	№	Задание
1.	$\begin{cases}\sin(x+1)-y=1{,}2\\ 2x+\cos y=2\end{cases}$	10.	$\begin{cases}\sin x+2y=2\\ \cos(y-1)+x=0{,}7\end{cases}$
2.	$\begin{cases}\cos(x-1)+y=0{,}5\\ x+\cos y=3\end{cases}$	11.	$\begin{cases}\cos x+y=1{,}5\\ 2x-\sin(y-0{,}5)=1\end{cases}$
3.	$\begin{cases}\cos(y+0{,}5)+x=0{,}8\\ \sin x-2y=1{,}6\end{cases}$	12.	$\begin{cases}\sin(x+0{,}5)-y=1{,}2\\ x+\cos(y-2)=0\end{cases}$
4.	$\begin{cases}\sin(y-1)+x=1{,}3\\ y+\sin(x+1)=0{,}8\end{cases}$	13.	$\begin{cases}\sin(y+1)-x=1{,}2\\ 2y+\cos x=2\end{cases}$
5.	$\begin{cases}2x-\cos(y+1)=0\\ y+\sin x=-0{,}4\end{cases}$	14.	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5)+y=1\\ \sin y-2x=2\end{cases}$
6.	$\begin{cases}\cos(y+0{,}5)-x=2\\ \sin x-2y=1\end{cases}$	15.	$\begin{cases}\cos(y-1)+x=0{,}5\\ y+\cos x=3\end{cases}$
7.	$\begin{cases}\sin(x+0{,}5)-y=1\\ x+\cos(y-2)=0\end{cases}$	16.	$\begin{cases}\sin(x-1)+y=1{,}5\\ x-\sin(y+1)=1\end{cases}$
8.	$\begin{cases}\sin(y+2)-x=1{,}5\\ y+\cos(x-2)=0{,}5\end{cases}$	17.	$\begin{cases}\sin y+2x=2\\ y+\cos(x-1)=0{,}7\end{cases}$
9.	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5)+y=0{,}8\\ \sin y-2x=1{,}6\end{cases}$	18.	$\begin{cases}\sin(y+1)-x=1\\ 2y+\cos x=2\end{cases}$

Задание 4.1. Решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона

$$\begin{cases}x_1-\dfrac{x_2^2}{3}=-0,5;\\ x_2+\dfrac{x_1^2}{2}=1;\end{cases}$$

с точностью $\varepsilon=0,01$.

Решение:

Записываем систему в виде

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{x_2^2}{3} = -0{,}5; \\ x_2 + \dfrac{x_1^2}{2} = 1; \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 - \dfrac{x_2^2}{3} + 0{,}5 = 0; \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 + \dfrac{x_1^2}{2} - 1 = 0; \end{cases}$$

Задаем начальное приближение

$x_1^{(0)} = 0{,}5;\quad x_2^{(0)} = -1$.

Вычисляем элементы матрицы Якоби в точке $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$

$$W = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{2}{3} \cdot x_2,\quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_1, \text{ т.е. } \frac{\partial f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_2} = 0.67,$$

$$\frac{\partial f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_1} = 0.5,\quad -f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = -0.67,\quad -f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1.87.$$

Решаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}(x_1 - x_1^{(k)}) + \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}(x_2 - x_2^{(k)}) = -f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}(x_1 - x_1^{(k)}) + \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}(x_2 - x_2^{(k)}) = -f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{cases}$$

при $k = 0$.

$$\begin{cases} 1 \cdot (x_1 - 0.5) + 0.67 \cdot (x_2 + 1) = -0.67; \\ 0.5 \cdot (x_1 - 0.5) + 1 \cdot (x_2 + 1) = 1.87; \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 0.67 x_2 = -0.84; \\ 0.5 x_1 + x_2 = 1.12; \end{cases}$$

$x_1^{(1)} = -2.36;\quad x_2^{(1)} = 2.3;$

Далее процесс повторяется для $k = 1, 2,$ и т.д. до достижения заданной точности, т.е. до выполнения условия $\max\limits_{i=1,2}\{\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|\} < \varepsilon$

$$\frac{\partial f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})}{\partial x_2} \approx -1.53,\quad \frac{\partial f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})}{\partial x_1} = -2.36,$$

$-f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 3.6,\quad -f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = -4.2$, т.е.

$$\begin{cases} 1 \cdot (x_1 + 2.36) - 1.53 \cdot (x_2 - 2.3) = 3.6; \\ -2.36 \cdot (x_1 + 2.36) + 1 \cdot (x_2 - 2.3) = -4.2; \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 1.53 x_2 = -2.28; \\ -2.36 x_1 + x_2 = 3.7; \end{cases}$$

$x_1^{(2)} = -1.26,\ x_2^{(2)} = 0.67$

Задание 4.2. Решить систему нелинейных уравнений методами простой итерации и Зейделя.

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{x_2^2}{3} = 1; \\ x_2 + \dfrac{1}{x_1 + 1} = -1; \end{cases}$$

Приводим систему к виду, пригодному для итераций

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{x_2^2}{3} = 1; \\ x_2 + \dfrac{1}{x_1 + 1} = -1; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{x_2^2}{3} = \phi_1(x_1, x_2); \\ x_2 = -1 - \dfrac{1}{x_1 + 1} = \phi_2(x_1, x_2); \end{cases}$$

Проверяем условие сходимости $\sum\limits_{j=1}^{n} \left| \dfrac{\partial \phi_i(x_1, x_1, ..., x_n)}{\partial x_j} \right| < 1$, i=1,2,...,n

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right| = \left|\frac{2 \cdot x_2}{3}\right| < 1;$$
$$\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right| = \left|\frac{1}{(x_1+1)^2}\right| < 1;$$

Задаем начальное приближение

$$x_1^{(0)} = 1.5, \quad x_2^{(0)} = 0.$$

Вычисляем последующие приближения

Метод итераций:

$$x_1^{(1)} = 1; \quad x_2^{(1)} = -1 - 1/2.5 = -1.4;$$
$$x_1^{(2)} = 1 + 1.96/3 = 1.65; \quad x_2^{(2)} = -1 - 1/2 = -1.5;$$
$$x_1^{(3)} = 1 + 2.25/3 = 1.75; \quad x_2^{(3)} = -1 - 1/2.65 = -1.38;$$
$$\varepsilon_{n=3} = \max(|1.75 - 1.65|, |-1.38 + 1.5|) = 0.12; \; x_1^* \approx 1.75, \; x_2^* \approx -1.38.$$

Метод Зейделя:

$$x_1^{(1)} = 1; \quad x_2^{(1)} = -1 - 1/2 = -1.5;$$
$$x_1^{(2)} = 1 + 2.25/3 = 1.75; \quad x_2^{(2)} = -1 - 1/2.75 = -1.36;$$
$$x_1^{(3)} = 1 + 1.85/3 = 1.61; \quad x_2^{(3)} = -1 - 1/2.61 = -1.39;$$
$$\varepsilon_{n=3} = \max(|1.61 - 1.75|, |-1.39 + 1.36|) = 0.14; \; x_1^* \approx 1.61, \; x_2^* \approx -1.39.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

ТЕМА: «МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ»

Задание

Задача 5

Установить вид эмпирической формулы $y = f(x)$, используя аппроксимирующие зависимости с двумя параметрами α и β, и определить наилучшие значения параметров для опытных данных представленны х таблицей 5.1.

Таблица 5.1 – Варианты заданий к лабораторной работе №5

1.	x	1,20	1,57	1,94	2,31	2,68	3,05	3,42	3,79
	y	2,59	2,06	1,58	1,25	0,91	0,66	0,38	0,21
2.	x	1,73	2,56	3,39	4,22	5,05	5,89	6,70	7,53
	y	0,63	1,11	1,42	1,94	2,30	2,89	3,29	3,87
3.	x	-4,38	-3,84	-3,23	-2,76	-2,22	-1,67	-1,13	-0,60
	y	2,25	2,83	3,44	4,31	5,29	6,55	8,01	10,04
4.	x	1,00	1,64	2,28	2,91	3,56	4,19	4,84	5,48
	y	0,28	0,19	0,15	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06
5.	x	5,84	3,82	6,19	9,22	7,87	6,29	4,43	8,91
	y	79,31	57,43	60,66	92,55	90,12	71,30	70,50	91,25
6.	x	2,91	2,94	6,35	6,58	3,80	6,43	0,57	5,96
	y	82,16	61,02	44,56	82,52	99,17	70,24	63,23	66,48
7.	x	5,46	2,73	6,49	4,26	2,39	6,46	0,86	2,05
	y	65,72	58,05	60,05	55,79	50,83	47,69	44,49	59,74
8.	x	1,28	1,76	2,24	2,72	3,20	3,68	4,16	4,64
	y	2,10	2,62	3,21	3,96	4,98	6,06	7,47	9,25
9.	x	-4,84	-4,30	-3,76	-3,22	-2,68	-2,14	-1,60	-1,06
	y	-0,09	-0,11	-0,13	-0,16	-0,19	-0,26	-0,39	-0,81
10.	x	3,54	4,29	4,78	3,99	1,13	6,29	1,89	3,27
	y	22,81	28,42	24,95	26,96	8,78	33,55	15,77	22,89
11.	x	4,08	4,42	2,52	-0,08	2,14	3,36	7,35	5,00
	y	18,31	21,85	16,93	-8,23	10,90	17,18	36,45	24,11

12.	x	1,16	1,88	2,60	-3,32	4,04	4,76	5,48	6,20
	y	0,18	0,26	0,32	0,36	0,40	0,43	0,95	0,85
13.	x	1,00	1,71	2,42	-3,13	3,84	4,55	5,26	5,97
	y	12,49	4,76	2,55	1,60	1,11	0,82	0,63	0,50
14.	x	-0,64	-0,36	-0,08	0,20	0,48	0,76	1,04	1,32
	y	29,51	18,86	12,05	7,70	4,92	3,14	2,01	1,28
15.	x	-2,45	-1,94	-1,43	-0,92	-0,41	0,10	0,61	1,12
	y	0,87	1,19	1,68	2,23	3,04	4,15	5,66	7,72
16.	x	1,54	1,91	2,28	-2,65	3,02	3,39	3,76	4,13
	y	-2,52	-3,08	-3,54	-3,93	-4,27	-4,57	-4,84	-5,09
17.	x	1,20	2,00	2,80	-3,60	4,40	5,20	6,00	6,80
	y	-10,85	-6,15	-4,14	-3,02	-2,30	-1,81	-1,45	-1,17
18.	x	-1,04	-0,67	-0,30	0,07	0,44	0,81	1,18	1,55
	y	10,80	8,08	5,97	4,44	3,31	2,46	1,83	1,36
19.	X	0,41	0,97	1,53	-2,09	2,65	3,21	3,77	4,33
	Y	0,45	1,17	1,56	1,82	2,02	2,18	2,31	2,44
20.	x	3,80	0,25	0,48	5,78	4,91	1,56	0,91	5,73
	y	-19,23	-21,41	-9,90	-19,56	-0,30	-12,04	1,14	11,26
21.	x	1	2	5	8	9	12	14	16
	y	6	7,45	8,24	12,46	13,09	14,56	25,89	29,91
22.	x	0	2	4	5	8	10	12	15
	y	29,8	22,9	17,1	15,16	10,7	10,2	10,1	25,2
23.	x	1,65	1,39	1,19	1,02	0,82	0,75	0,66	0,89
	y	1,034	1,232	1,432	1,752	2,056	2,37	2,76	3,198
24.	x	0,22	-3,05	-1,76	-1,25	-0,45	-0,80	-0,26	-3,07
	y	58,46	36,05	31,17	16,17	11,16	69,23	58,08	43,13

Пример выполнения работы

Задача 5. Установить вид эмпирической формулы $y = f(x)$, используя аппроксимирующие зависимости с двумя параметрами α и β, и определить наилучшие значения параметров, если опытные данные представлены таблицей:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	27,8	62,1	110	161

Решение.

Легко заметить, что точки $(\ln x_i, \ln y_i)$ лежат приблизительно на одной прямой. Положим $X = \ln x; Y = \ln y$ и составим таблицу для экспериментальных данных в новых переменных:

X_i	0,000	0,693	1,099	1,386	1,609
Y_i	1,960	3,325	4,129	4,700	5,081

Точки (X_i, Y_i) лежат приблизительно на одной прямой, в чём легко убедиться, построив их в системе координат (X, Y). Наилучшие значения параметров k и b находятся из системы уравнений (8):

$$\begin{cases} bn + k\sum_{i=1}^{m} X_i = \sum_{i=1}^{m} Y_i, \\ b\sum_{i=1}^{m} X_i + k\sum_{i=1}^{m} X_i^2 = \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b + 4{,}787k = 19{,}166, \\ 4{,}787b + 6{,}200k = 21{,}535 \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим: $b = 1{,}97; k = 1{,}95$. Неявное уравнение, выражающее связь между переменными x и y имеет вид $\ln y = 1{,}95 \ln x + 1{,}97$.

Отсюда легко получить прямую зависимость между переменными в виде степенной функции:

$y = e^{1,97} x^{1,95}$.

Для сравнения можно привести таблицу экспериментальных данных, и данных, полученных с помощью найденной формулы:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	27,8	62,1	110	161
$y = e^{1,97} x^{1,95}$.	7,16	27,703	61,081	107,04	165,39

Формула, полученная в результате решения приведённого примера, является частным случаем аппроксимирующей зависимости с двумя параметрами, имеющей вид $Q(x, \alpha, \beta) = \alpha x^{\beta}$.. В данном случае $\alpha = e^b$, $\beta = k$.

Рекомендации по переведению экспериментальных данных в аппроксимирующие зависимости с двумя переменными приведены в следующей таблице.

№	Выравнивание данных (преобразование переменных)	Эмпирическая формула
1	$X = x; Y = xy$	$y = \alpha x + \frac{\beta}{\alpha}, \alpha = k, \beta = b$
2	$X = x; Y = \frac{1}{y}$	$y = \frac{1}{\alpha x + \beta}, \alpha = k, \beta = b$
3	$X = x; Y = \frac{x}{y}$	$y = \frac{x}{\alpha x + \beta}, \alpha = k, \beta = b$
4	$X = x; Y = \ln y$	$y = \alpha \beta^{x}, \alpha = e^{b}, \beta = e^{k}$
5	$X = \ln x; Y = y$	$y = \alpha \ln x + \beta, \alpha = k, \beta = b$
6	$X = \ln x; Y = \ln y$	$y = \alpha x^{\beta}, \alpha = e^{b}, \beta = k$

Одну из шести предложенных формул преобразования следует выбирать одновременно с проверкой линейной зависимости к исходным данным. Условием выбора наилучшей эмпирической формулы является наименьшее уклонение исходных или преобразованных экспериментальных данных от прямой. Его можно определить по формуле:

$$d=\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i-kX_i-b)^2}{\sum_{i=1}^{m}Y_i^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для наилучшей эмпирической формулы значение d будет наименьшим.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

ТЕМА: «ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ»

Задание

Задача 6.1.

Для заданной функции (табл.8) найти численно значение производной в середине интервала [a;b] с точностью ε =0,01.

Задача 6.2.

Найти приближенное значение интеграла заданной функции f(x) (табл.6.1) на отрезке [a, b] по формулам трапеций, левых и правых прямоугольников и Симпсона, разбив отрезок на 10 равных частей.. Оценить ошибку вычислений и сравнить полученное значение с точным значением, вычисленным по формуле Ньютона-Лейбница.

Таблица 6.1 – Варианты заданий к лабораторной работе №6

№	Функция	Интервал
1.	$f(x)=\sqrt{1+\cos^2(x)}$	[0;3]
2.	$f(x)=\sin(2x^2+1)$	[0;1]
3.	$f(x)=(x+1{,}9)\cdot\sin\left(\frac{x}{3}\right)$	[1;2]

№	Функция	Интервал
4.	$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln(x+2)$	[2;3]
5.	$f(x)=\sqrt{tg(x)}$	[0;0.5]
6.	$f(x)=2{,}6\cdot x^2\cdot\ln(x)$	[1,2;2,2]
7.	$f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\sin(x-0{,}5)$	[0,5;1,5]
8.	$f(x)=x^2\cdot\cos\left(\frac{x}{4}\right)$	[2;3]
9.	$f(x)=3x+\ln(x)$	[1;2]
10.	$f(x)=3x^2+tg(x)$	[-0,5;0,5]
11.	$f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{-x}$	[0,1;1,1]
12.	$f(x)=\frac{-21}{(6-7x)^2}$	[-2;0]
13.	$f(x)=\frac{8}{(3x+4)^2}$	[0;1]
14.	$f(x)=\frac{-15}{(2-x)^3}$	[3;5]
15.	$f(x)=\frac{9}{(5x+7)^2}$	[2;3]
16.	$f(x)=\frac{-3}{(15x-9)^3}$	[-1;0]
17.	$f(x)=\frac{1+e^{2x}}{5}$	[0;3]
18.	$f(x)=e^x\cdot\sin\left(x^2\right)$	[0;5]
19.	$f(x)=\frac{17}{(1-3x)^3}$	[-3;-1]
20.	$f(x)=\frac{12}{(4x-9)^2}$	[0;1]

Пример выполнения работы

Задача 6.1. Вычислить производную функции $y=\sin x$ в точке $x_0=\pi/3$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ $(\pi/3)\approx 1{,}047198$.

Решение:

Положим $(\Delta x)_0=0{,}1;\ \alpha=10;\ (\Delta x)_n=0{,}1\cdot 10^{-n}$, откуда: $(\Delta y)_n=\sin\left(\frac{\pi}{3}+0{,}1\cdot 10^{-n}\right)-\sin\frac{\pi}{3}$.

Определим приближённое значение производной:

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + 0{,}1 \cdot 10^{-n}\right) - \sin\frac{\pi}{3}}{0{,}1 \cdot 10^{-n}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдём отношения, аппроксимирующие производную:

$$\frac{(\Delta y)_0}{(\Delta x)_0} = 0{,}45590189, \frac{(\Delta y)_1}{(\Delta x)_1} = 0{,}49566158, \frac{(\Delta y)_2}{(\Delta x)_2} = 0{,}49956690, \frac{(\Delta y)_3}{(\Delta x)_3} = 0{,}49995670.$$

Заметим, что $\left|\frac{(\Delta y)_3}{(\Delta x)_3} - \frac{(\Delta y)_2}{(\Delta x)_2}\right| = 0{,}00038979390 < \varepsilon$. Таким образом, начиная с третьего приближения, в соответствии с оценкой (3), получаем искомое приближение производной данной функции с точностью не меньшей заданной. Точное значение $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$.

Задача 6.2. Вычислить по формуле левых прямоугольников интеграл $\int_0^1 e^x dx$, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Оценить ошибку вычислений и сравнить полученное значение с точным значением, вычисленным по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение.

Вычислим значения подынтегральной функции e^x в точках деления и соответствующие значения занесём в таблицу:

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	1,0	1,1051	1,2214	1,3498	1,4928	1,6487	1,8221	2,0137	2,2255	2,4596

Воспользуемся формулой (1):

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{10}\sum_{i=0}^{9} y_i = 0{,}1 \cdot 16{,}1253 = 1{,}61253.$$

Оценим ошибку вычисления. Имеем: $\left(e^x\right)' = e^x; \max\limits_{[0;1]} e^x = e^1 \approx 2{,}71828$.

Подставляя в формулу $\varepsilon \le \frac{b-a}{2} M_1 h$, где $M_1 = \max\limits_{[a;b]} f'(x)$(наибольшее значение первой производной подынтегральной функции на отрезке интегрирования), получаем $\varepsilon \le \frac{1-0}{2} \cdot 2{,}71828 \cdot 0{,}1 = 0{,}135914$. Действительно, сравнивая полученное значение с точным значением, получаем $d = |1{,}718281 - 1{,}612534| = 0{,}105747 \le \varepsilon$. Это весьма значительная ошибка.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

ТЕМА: «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Задание:

Задача 7

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ (табл.7.1) на отрезке [a,b] при начальном заданном условии $y(a) = c$ и шаге интегрирования h:

улучшенным методом Эйлера с шагом h .

методом Рунге-Кутта с шагом h .

Таблица 7.1 – Варианты заданий к лабораторной работе №7

№	Функция	Интервал	y_0	Шаг
1.	$f(x, y) = 3x^2 + 0{,}1xy$	[0;1]	$y(0)=0{,}2$	0,1
2.	$f(x, y) = 0{,}185(x^2 + \cos(0{,}7x)) + 1{,}843y$	[0,2;1,2]	$y(0{,}2)=0{,}25$	0,1
3.	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{3}\right)$	[1,6;2,6]	$y(1{,}6)=4{,}6$	0,1
4.	$f(x, y) = x + \sin\left(\frac{y+1}{\sqrt{13}}\right)$	[0,2;1,2]	$y(0{,}2)=1{,}1$	0,1
5.	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{e}\right)$	[1,4;2,4]	$y(1{,}4)=2{,}5$	0,1
6.	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$	[1,7;2,7]	$y(1{,}7)=5{,}3$	0,1

№	Функция	Интервал	y_0	Шаг
7.	$f(x,y)=-3y^2+\sqrt{4x^2+1}$	[2,6;4,6]	$y(2{,}6)=3{,}5$	0,2
8.	$f(x,y)=2-\sin^2(x+y)$	[2;3]	$y(2)=2{,}3$	0,1
9.	$f(x,y)=1{,}6x+0{,}5y^2$	[0;1]	$y(0)=0{,}3$	0,1
10.	$f(x,y)=x-\cos\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)$	[1,8;2,8]	$y(1{,}8)=2{,}6$	0,1
11.	$f(x,y)=x+\cos\left(\frac{y}{\sqrt{11}}\right)$	[2,1;3,1]	$y(2{,}1)=2{,}5$	0,1
12.	$f(x,y)=e^{2x}+0{,}25y^2$	[0;0,5]	$y(0)=2{,}6$	0,05

Пример выполнения работы

Задание 7. Улучшенным методом Эйлера с шагом h=0,1 получить решение дифференциального уравнения $y'=(y+x)^2$ с начальними условиями $y(0)=0$ на интервале [0;0,5].

Решение:

Расчетные формулы улучшенного метода Эйлера имеют вид:

$$\begin{cases} x_{i+1}=x_i+h \\ \overline{y_{i+1}}=y_i+hf(x_i,y_i) \\ y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},\overline{y_{i+1}})\right],\ i=\overline{1,n} \end{cases}$$

Разобьем отрезок [0;0,5] на N=5 частичных интервалов. Длина каждого интервала будет равна $h=\frac{0{,}5-0}{5}=0{,}1$.Исходя из начальной точки $x_0=0,\quad y_0=0$ рассчитаем значение y_1 в узле $x_1=0{,}1$ по формуле

$$\overline{y_1}=y_0+hf(x_0,y_0)=0+0{,}1\cdot(0+0)^2=0$$

$f(x_1, \overline{y_1}) = (0+0.1)^2 = 0.01$

$y_1 = y_0 + 0,5 \cdot h \cdot (f(x_0, y_0) + f(x_1, \overline{y_1})) = 0 + 0.5 \cdot 0,1 \cdot (0 + 0,01) = 0,0005$

Аналогично получим решение в остальных узлах. Продолжая вычисления и вводя обозначение $\Delta y_k = 0,5h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \overline{y_{k+1}}))$ получаемые результаты занесем в таблицу.

k	x_k	y_k	$\overline{y}_k$	Δy_k
1	0.0	0.0		5.0000E-4
2	0.1	5.0000E-4	0.0	2.5353E-3
3	0.2	3.0353E-3	1.5100E-3	6.7784E-3
4	0.3	9.8137E-3	7.1576E-3	1.3594E-2
5	0.4	2.3408E-2	1.9412E-2	2.3615E-2
6	0.5	4.7024E-2	4.1335E-2	

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8
ТЕМА: «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ»

Задание:

Задача 8.1

Используя метод сеток, найти решение смешанной задачи для дифференциального уравнения параболического типа: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (уравнения теплопроводности) при заданных начальных и граничных условиях: u(x,0)=f(x), u(0,t)=φ(t); u(0,6;t)=ψ(t), где x∈[0;0,6]. Решение выполнить при h=0,1 для t∈[0;0,01] с тремя десятичными знаками. Шаг по t вібрать равнім 0.005.. Ниже приведены варианты заданий

1. U(x,0)=cos2x; U(0,t)=1-6t; U(0,6; t)=0,3624
2. U(x,0)=x(x+1); U(0,t)=2t+0,96; U(0,6; t)=0,960
3. U(x,0)=1,2+ln(x+0,4); U(0,t)=0,8+t; U(0,6; t)=1,200

4. U(x,0)=sin2x;	U(0,t)=2t;	U(0,6; t)=0,932
5. U(x,0)=3x(2-x);	U(0,t)=t+2,52;	U(0,6; t)=2,52
6. U(x,0)=sin(0,55x+,.33);	U(0,t)=t+0,33;	U(0,6; t)=0,354
7. U(x,0)=2x(1-x)+0,2;	U(0,t)=0,2+t;	U(0,6; t)=0,680
8. U(x,0)=sinx+0,08;	U(0,t)=0,08+2t;	U(0,6; t)=0,6446
9. U(x,0)=cos(2x+0,19);	U(0,t)=0,932;	U(0,6; t)=0,1798
10. U(x,0)=2x(x+0,2)+0,4;	U(0,t)=2t+0,4;	U(0,6; t)=1,36
11. U(x,0)=ln(x+0,26)+1;	U(0,t)=0,415+t;	U(0,6; t)=0,9345
12. U(x,0)=sin(x+0,45);	U(0,t)=0,435-2t;	U(0,6; t)=0,8674
13. U(x,0)=0,3+x(x+0,4);	U(0,t)=0,3+t;	U(0,6; t)=0,9
14. U(x,0)=(x-0,2)(x+1)+0,2;	U(0,t)=6t;	U(0,6; t)=0,84
15. U(x,0)=x(0,3+2x);	U(0,t)=t;	U(0,6; t)=0,9
16. U(x,0)=sin(x+0,02);	U(0,t)=3t+0,02;	U(0,6; t)=0,581
17. U(x,0)=cos(x+0,48);	U(0,t)=6t+0,887;	U(0,6; t)=0,4713
18. U(x,0)=ln(2,63-x);	U(0,t)=3(0,14-t);	U(0,6; t)=0,3075
19. U(x,0)=1,5-x(1-x);	U(0,t)=3(0,5-t);	U(0,6; t)=1,26
20. U(x,0)=cos(x+0,845);	U(0,t)=6(t+0.11);	U(0,6; t)=0,1205

Задача 8.2

Найти решение смешанной задачи для уравнения колебания струны с начальными условиями $u(x, 0)=f(x)$, $u_t(x, 0)=\Phi(x)$ $(0\le x\le 1,\ 0\le t\le 0{,}01)$ и краевыми условиями $u(0,t)=\varphi(t)$, $u(1, t)=\psi(x)$ методом сеток($\Delta x=0{,}2, \Delta t=0{,}005$). Варианты заданий приведены ниже.

1. $f(x)=x(x+1)$
$\Phi(x)=\cos x$
$\varphi(t)=0$
$\psi(x)=2(t+1)$

2. $f(x)=x\cos\pi x$
$\Phi(x)=x(2-x)$
$\varphi(t)=2t$
$\psi(x)=-1$

3. $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}$
$\Phi(x)=x^2$
$\varphi(t)=1+2t$
$\psi(x)=0$

4. $f(x)=(x+0{,}5)(x-1)$
$\Phi(x)=\sin(x+0{,}2)$
$\varphi(t)=t-0{,}5$
$\psi(x)=3t$

5. $f(x)=2x(x+1)$
$\Phi(x)=2\sin x$
$\varphi(t)=0{,}3$
$\psi(x)=4{,}3+t$

6. $f(x)=(x+0{,}2)\sin\frac{\pi x}{2}$
$\Phi(x)=1+x^2$
$\varphi(t)=0$
$\psi(x)=1{,}2(t+1)$

7. $f(x)=x\sin\pi x$
$\Phi(x)=(x+1)^2$
$\varphi(t)=2t$
$\psi(x)=0$

8. $f(x)=3x(1-x)$
$\Phi(x)=\cos(x+0{,}5)$
$\varphi(t)=2t$
$\psi(x)=0$

9. $f(x)=x(2x-0{,}5)$
$\Phi(x)=\cos 2x$
$\varphi(t)=t^2$
$\psi(x)=1{,}5$

10. $f(x)=(x+1)\sin\pi x$
$\Phi(x)=x^2+x$
$\varphi(t)=0$
$\psi(x)=0{,}5t$

11. $f(x)=(1-x)\cos\frac{\pi x}{2}$
$\Phi(x)=2x+1$
$\varphi(t)=2t+1$
$\psi(x)=0$

12. $f(x)=0{,}5x(x+1)$
$\Phi(x)=x\cos x$
$\varphi(t)=2t^2$
$\psi(x)=1$

13. $f(x)=0{,}5\left(x^2+1\right)$
$\Phi(x)=x\sin\left(x\right)$
$\varphi(t)=0{,}5+3t$
$\psi(x)=1$

14. $f(x)=(x+1)\sin\frac{\pi x}{2}$
$\Phi(x)=1-x^2$
$\varphi(t)=0{,}5t$
$\psi(x)=2$

15. $f(x)=x^2\cos\pi x$
$\Phi(x)=x^2(x+1)$
$\varphi(t)=0{,}5t$
$\psi(x)=t-1$

16. $f(x)=(1-x^2)\cos\pi x$
$\Phi(x)=2x+0{,}6$
$\varphi(t)=1+0{,}4t$
$\psi(x)=0$

17. $f(x)=(x+0{,}5)^2$
$\Phi(x)=(x+1)\sin x$
$\varphi(t)=0{,}5(0{,}5+t)$
$\psi(x)=2{,}25$

18. $f(x)=1{,}2x-x^2$
$\Phi(x)=(x+0{,}6)\sin x$
$\varphi(x)=0$
$\psi(x)=0{,}2+0{,}5t$

19. $f(x)=(x+0{,}5)(x+1)$
$\Phi(x)=\cos(x+0{,}3)$
$\varphi(t)=0{,}5$
$\psi(x)=3-2t$

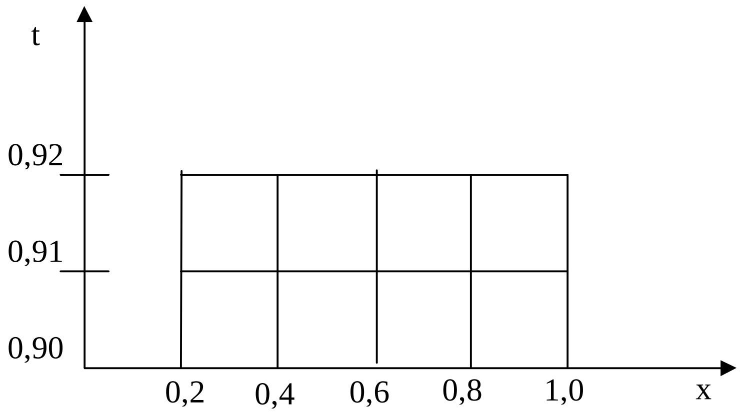
20. $f(x)=0{,}5(x+1)$
$\Phi(x)=(x+0{,}5)\cos\pi x$
$\varphi(t)=0{,}5$
$\psi(x)=2-3t$

В узлах сетки $D:\{0.2\le x\le 1; 0.9\le t\le 0.92\}$, $\Delta x=0.2$, $\Delta t=0.01$ найти значения функции u(x,t), являющейся решением задачи

$$u_t=u_{xx}$$
$$u(0,t)=t^2+1 \quad u(L,t)=t^2+3$$
$$u(x,0.9)=x+1$$

Решение:

Построим сетку по оси Ox с шагом Δx=0,2 , по оси Ot с шагом Δt=0,01.



Точки деления: $x_0 = 0.2, x_1 = 0.4, x_2 = 0.6, x_3 = 0.8, x_4 = 1$; $t_0 = 0.9, t_1 = 0.91, t_2 = 0.92$.

Обозначим $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$. Заменяя в уравнении теплопроводности производные их разностными аналогами, получим следующее разностное уравнение

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2},$$

Откуда следует, что

$$u_{i,j+1} = \gamma u_{i-1,j} + (1-2\gamma)u_{i,j} + \gamma u_{i+1,j},$$

где $\gamma = \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Вначале находим значения $u_{0,j}$, $j = 1,2$; $u_{4,j}, j = 1,2$; $u_{i,0}, i = 0,1,2,3,4.$

Затем по формуле $\dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$ находим значения решения в остальных точках..

В результате вычислений получим

$u_{0,1} = t_1^2 + 1 = 0,91^2 + 1 \approx 1,828$, $u_{0,2} = t_2^2 + 1 = 0,92^2 + 1 \approx 1,846$

$u_{4,1} = t_1^2 + 3 = 0,91^2 + 3 \approx 3,828$, $u_{4,2} = t_2^2 + 3 = 0,92^2 + 3 \approx 3,846$

$u_{0,0} = x_0 + 1 = 0,2 + 1 = 1,2; u_{1,0} = x_1 + 1 = 0,4 + 1 = 1,4; u_{2,0} = x_2 + 1 = 0,6 + 1 = 1,6$

$u_{3,0} = x_3 + 1 = 0,8 + 1 = 1,8; \quad u_{4,0} = x_4 + 1 = 1 + 1 = 2$

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{0,01}{0,2^2} = 0,25$$

$$u_{1,1} = \gamma u_{0,0} + (1-2\gamma)u_{1,0} + \gamma u_{2,0} = 0,25 \cdot 1,2 + (1 - 2 \cdot 0,25) \cdot 1,4 + 0,25 \cdot 1,6 = 1,4$$

и т.д.

ЗАДАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Вариант 1

1. Решить методом простой итерации и методом Зейделя систему уравнений (решение найти с точностью $\varepsilon = 0,01$): $\begin{cases} 1,7x_1 - 0,2x_2 = 1 \\ 0,5x_1 + 1,5x_2 = 1 \end{cases}$
2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующей таблице значений функции

x	0	2	4	6
y	1	3	2	5

.

Вычислить значение y для x=3.

3. Отделить корни уравнения графически и вычислить их, используя метод Ньютона и метод хорд ($\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$): $3x - \cos x - 1 = 0$.
4. Вычислить интеграл тремя способами: методами прямоугольника, трапеции и Симпсона: $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.
5. Применяя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения с данными начальными условиями в указанных точках: $y' = x + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0, \quad h = 0,1;$ найти $y(1,4)$.

Вариант 2

1. Решить методом простой итерации и методом Зейделя систему уравнений (решение найти с точностью $\varepsilon = 0,01$): $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = -3 \end{cases}$.
2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующей таблице значений функции

x	4	6	8	10
y	11	27	50	83

Вычислить значение y для x=9.

3. Отделить корни уравнения графически и вычислить их, используя метод Ньютона и метод хорд ($\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$): $x^2 - \cos^2 \pi x = 0$.
4. Вычислить интеграл тремя способами: методами прямоугольника, трапеции и Симпсона. Сравнить полученные значения с точным решением: $\int_1^3 \frac{dx}{1+x}$.
5. Применяя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения с данными начальными условиями в указанных точках:

$$y' = \frac{x-y}{x-2y}, \quad y(0) = 1, \quad h = 0{,}1; \text{ найти } y(0{,}3).$$

Вариант 3

1. Решить методом простой итерации и методом Зейделя системы уравнений (решение найти с точностью $\varepsilon = 0{,}01$): $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$
2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующей таблице значений функции

x	10	12	14	16
y	3	7	11	17

.

Вычислить значение y для x=15.

3. Отделить корни уравнения графически и вычислить их, используя метод Ньютона и метод хорд ($\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$): $x^2 + 4\sin x = 0$.
4. Вычислить интеграл тремя способами: методами прямоугольника, трапеции и Симпсона. Сравнить полученные значения с точным решением: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad n = 6$.
5. Применяя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения с данными начальными условиями в указанных точках:

$$y' = -\frac{(xy-2)^2}{x^2}, \quad y(1) = 4, \quad h = 0{,}2; \text{ найти } y(1{,}8)$$

Вариант 4

1. Решить методом простой итерации и методом Зейделя системы уравнений (решение найти с точностью $\varepsilon = 0{,}01$)

$$\begin{cases} 1{,}52x_1 + 0{,}13x_2 = 1 \quad , \\ 0{,}13x_1 + 1{,}52x_2 = 5 \quad . \end{cases}$$

2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующей таблице значений функции

x	-2	-1	0	1	2
y	6	0	2	0	6

.

Вычислить значение y для x=0,5.

3. Отделить корни уравнения графически и вычислить их, используя метод Ньютона и метод хорд ($\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$): $(x-1)^3 + 0{,}5e^x = 0$.
4. Вычислить интеграл тремя способами: методами прямоугольника, трапеции и Симпсона. Сравнить полученные значения с точным решением: $\int_0^1 \frac{xdx}{x+1} \quad n = 6$.
5. Применяя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения с данными начальными условиями в указанных точках:
$$y' = e^{x+y} - 1, \quad y(0) = 0, \quad h = 0{,}05; \text{ найти } y(0{,}5).$$

Вариант 5

1. Решить методом простой итерации и методом Зейделя системы уравнений (решение найти с точностью $\varepsilon = 0{,}01$)
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 3 \quad , \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \quad . \end{cases}$$
2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующей таблице значений функции

Х	-1	0	1	2	3
У	6	5	0	3	2

.

Вычислить значение y для x=2,5.

3. Отделить корни уравнения графически и вычислить их, используя метод Ньютона и метод хорд ($\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$): $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$.
4. Вычислить интеграл тремя способами: методами прямоугольника, трапеции и Симпсона. Сравнить полученные значения с точным решением: $\int_1^{13} \sqrt{6x-5}dx \quad n = 6$.
5. Применяя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения с данными начальными условиями в указанных точках:
$$y' = 2x + \cos y, \quad y(0) = 0, \quad h = 0{,}025; \text{ найти } y(0{,}1).$$

Вариант 6

1. Исследовать сходимость и решить методом простой итерации и методом Зейделя системы уравнений (решение найти с точностью $\varepsilon = 0{,}01)$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 16 & , \\ x_1 + 2x_2 = 1 & . \end{cases}$$

2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующей таблице значений функции

x	-1	0	1	2
y	0	0,5	3	2,5

.

Вычислить значение y для x=0,5.

3. Отделить корни уравнения графически и вычислить их, используя метод Ньютона и метод хорд ($\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$): $5x^3 + 2x^2 - 15x - 6 = 0$.
4. Вычислить интеграл тремя способами: методами прямоугольника, трапеции и Симпсона. Сравнить полученные значения с точным решением: $\int_4^{5,2} \ln x \, dx \quad n = 6$.
5. Применяя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения с данными начальными условиями в указанных точках:

$$y' = \frac{1 + \sqrt{y^2/x - 1}}{2y}, \quad y(1) = 1{,}412, \quad h = 0{,}05; \text{ найти } y(1{,}5).$$

Вариант 7

1. Решить методом простой итерации и методом Зейделя системы уравнений (решение найти с точностью $\varepsilon = 0{,}01)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 & , \\ x_1 + 4x_2 = 7 & . \end{cases}$$

2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующей таблице значений функции

x	-1	0	1	2
y	2	1	0	-7

.

Вычислить значение y для x=0,5.

3. Отделить корни уравнения графически и вычислить их, используя метод Ньютона и метод хорд ($\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$): $x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$.
4. Вычислить интеграл тремя способами: методами прямоугольника,

трапеции и Симпсона: $\int_0^{1,2} \ln(1 + x^2) dx \qquad n = 6$.

5. Применяя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения с данными начальными условиями в указанных точках:

$$y' = \frac{y}{x} \cdot \ln\frac{y}{x}, \quad y(1) = 1, \quad h = 0{,}025; \text{ найти } y(1{,}1).$$

Вариант 8

1. Исследовать сходимость и решить методом простой итерации и методом Зейделя системы уравнений (решение найти с точностью $\varepsilon = 0{,}01$)

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -1 \quad , \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \quad . \end{cases}$$

2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующей таблице значений функции

x	0	2	4	6
y	-1	0	7	26

.

Вычислить значение у для х=5.

3. Отделить корни уравнения графически и вычислить их, используя метод Ньютона и метод хорд ($\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$): $(x-1)^2 - \frac{1}{2}e^x = 0$.
4. Вычислить интеграл тремя способами: методами прямоугольника, трапеции и Симпсона: $\int_0^1 xe^x dx \quad n = 6$.
5. Применяя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения с данными начальными условиями в указанных точках:

$$y' = -\frac{xy}{1+x^2}, \quad y(0) = 2, \quad h = 0{,}05; \text{ найти } y(1{,}2).$$

Вариант 9

1. Решить методом простой итерации и методом Зейделя системы уравнений (решение найти с точностью $\varepsilon = 0{,}01$)

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 = 1 \quad , \\ 3x_1 - x_2 = 5 \quad . \end{cases}$$

2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующей таблице значений функции

x	0	1	2	3
y	-5	-4	11	76

.

Вычислить значение у для х=2,5 .

3. Отделить корни уравнения графически и вычислить их, используя метод Ньютона и метод хорд ($\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$): $3x - e^{0,5x} = 0$.
4. Вычислить интеграл тремя способами: методами прямоугольника, трапеции и Симпсона: $\int_1^9 \sqrt{x}dx \quad n = 6$.
5. Применяя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения с данными начальными условиями в указанных точках:

$$y' = y + (1 + x)y^2, \quad y(1) = 0, \quad h = 0{,}1; \text{ найти } y(0{,}4).$$

Вариант 10

1. Решить методом простой итерации и методом Зейделя системы уравнений (решение найти с точностью $\varepsilon = 0{,}01$)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -2 & , \\ 2x_1 - 3x_2 = 5 & . \end{cases}$$

2. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующей таблице значений функции

X	0	1	2	3
У	3	1	-5	-15

.

Вычислить значение у для x=1,5.

3. Отделить корни уравнения графически и вычислить их, используя метод Ньютона и метод хорд ($\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$): $\sqrt{x+1} - \frac{1}{x} = 0$.
4. Вычислить интеграл тремя способами: методами прямоугольника, трапеции и Симпсона: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \quad n = 6$.
5. Применяя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения с данными начальными условиями в указанных точках:

$$y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad h = 0{,}1; \text{ найти } y(1{,}4).$$