

Міністерство освіти та науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ

Методичні вказівки

до виконання лабораторних та самостійних робіт

(для студентів 4-го курсу спеціальності
7.080404 «Інтелектуальні системи прийняття рішень»
денної форми навчання)

Краматорськ 2010

**Міністерство освіти та науки України
Донбаська державна машинобудівна академія**

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ

Методичні вказівки

до виконання лабораторних робіт

(для студентів 4-го курсу спеціальності
7.080404 «Інтелектуальні системи прийняття рішень»
денної форми навчання)

Краматорськ 2010

УДК

Чисельні методи в інформатиці : методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни (студентів 4-го курсу спеціальності 7.080404 «Інтелектуальні системи прийняття рішень» денної форми навчання) / Укл. В.М. Черномаз. – Краматорськ : ДДМА, 2010. –40 с.

Наведені теоретичні відомості та варіанти завдань для виконання лабораторних та самостійних робіт.

Укладачі

В.М. Черномаз, доц.

Відп. за випуск

В.М. Черномаз, доцент

Зміст

Вступ	5
Лабораторна робота 1. <i>Інтерполювання функцій</i>	8
Лабораторна робота 2. <i>Чисельні методи обчислення визначених інтегралів</i>	11
Лабораторна робота 3. <i>Розв'язання нелінійних рівнянь $f(x) = 0$</i>	17
Лабораторна робота 4. <i>Методи чисельного розв'язку систем нелінійних рівнянь</i>	25
Самостійна робота 1. <i>Методи чисельного розв'язку систем лінійних рівнянь</i>	32
Лабораторна робота 5. <i>Чисельний розв'язок звичайних диференціальних рівнянь</i>	35
Лабораторна робота 6. <i>Чисельний розв'язок рівняння коливань струни методом сіток</i>	41
Самостійна робота 2. <i>Чисельний розв'язок рівнянь теплопровідності методом сіток</i>	47
Література	51

ВСТУП

Головним інструментом майбутньої діяльності спеціаліста з побудови інтелектуальних систем прийняття рішень буде ЕОМ – електронно обчислювальна машина. Перше слово в назві відображає принцип дії, останнє нагадує, що яким би “інтелектуальним” не був комп’ютер він залишається не більше ніж машиною. Зверніть увагу на центральне слово “обчислювальна”, воно вказує на головне призначення ЕОМ – проводити обчислення.

Дослідження будь-якої фізичної або економічної системи, як правило, зводиться до побудови математичної моделі.

Математична модель – це сукупність математичних об’єктів (констант, змінних, функцій, рівнянь, систем рівнянь і т.д.) і відношень між ними, що відображають деякі істотні характеристики досліджуваної системи.

Коли математична модель створена, її потрібно досліджувати, тобто обчислювати інтеграли, розв’язувати рівняння та системи рівнянь. На жаль, аналітично, тобто в вигляді деяких виразів від коефіцієнтів, розв’язується лише невелика кількість “класичних” рівнянь та систем (лінійні, квадратні рівняння, лінійні алгебраїчні системи, деякі типи диференціальних рівнянь та систем). Дослідження реальних систем потребує вміння обчислювати або розв’язувати практично будь-які задачі. Це роблять за допомогою чисельних методів.

Чисельний метод – метод наближеного або точного розв’язання математичної задачі, що ґрунтується на побудові скінченої послідовності дій над скінченою множиною чисел.

В визначенні чисельного методу слід звернути увагу на дві обставини:

- 1) визначення чисельного методу практично співпадає з визначенням алгоритму;
- 2) поняття чисельного методу розповсюджується на одержання як наближеного, так і точного розв’язку.

Чисельний метод повинен задовольняти вимогам: бути усталеним та збіжним.

Чисельний метод називається *усталеним*, якщо результати безперервно залежать від вхідних даних задачі і, похибка округлення, що виникає в процесі реалізації чисельного методу на ЕОМ, залишається обмеженою при заданих межах зміни параметрів чисельного методу.

Чисельний метод називається *збіжним*, якщо результати можуть як завгодно близько наближатися до точного рішення.

Чисельні методи, які ми будемо розглядати усталені та збіжні по замовчуванню. В випадку коли можливі порушення цих передумов, будуть наведені необхідні та достатні умови усталеності та збіжності, виконання яких необхідно перевірити перед запуском чисельного методу на виконання.

Більшість чисельних методів реалізовані в пакетах прикладних програм: MathCad, Maple, Matematica та інших. Оволодіння вашою спеціальністю зумовлює вміння використати той чи інший пакет для реалізації чисельного методу в випадку розв'язання конкретної "одноразової" задачі або, в випадку проектування вами власної інтелектуальної системи, скласти алгоритм реалізації чисельного методу, написати програму, реалізувати цей алгоритм на комп'ютері.

Ціллю лабораторних робіт є здобуття практичних навичок розробки алгоритмів і програм чисельних методів та вміння користуватись пакетами комп'ютерної математики для реалізації чисельних методів.

Порядок виконання лабораторних та самостійних робіт

- 1 Вивчення чисельного методу розв'язання запропонованої задачі.
- 2 Запис розрахункових формул методу.
- 3 Складання блок-схеми алгоритму методу.
- 4 Написання програми для розв'язання задачі чисельним методом.
- 5 Виконання розрахунків на комп'ютері за допомогою складеної програми.
- 6 Реалізація чисельного методу за допомогою будь-якого пакету комп'ютерної математики. Порівняння результатів.
- 7 Складання звіту про виконання роботи.

Зміст звіту

- 1 Ціль роботи.
- 2 Умова індивідуального завдання.
- 3 Розрахункові формули чисельного методу.
- 4 Блок-схема алгоритму методу.
- 5 Розв'язання задачі на ЕОМ, в випадку необхідності графічна ілюстрація розв'язку.
- 6 Код програми, або розрахункова частина коду.
- 7 Висновки по роботі.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1

ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів та програм, які здійснюють глобальне та локальне (лінійне та квадратичне) інтерполювання поліномами Лагранжа.

Теоретичні відомості

Нехай задана система точок: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)$, при цьому $x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_n$. Надалі ці точки будемо називати вузлами інтерполяції.

Задача інтерполяції полягає в побудові деякої функції $y = f(x)$, графік якої проходить через вузли інтерполяції, тобто для будь-якого x_i маємо $y_i = f(x_i)$. Така функція називається інтерполяційною, для заданого набору вузлів.

Найпростішим серед можливих інтерполяційних функцій є інтерполяційний многочлен, зокрема, многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}. \quad (1)$$

Якщо многочлен Лагранжа будується один для всієї системи точок, то таку інтерполяцію будемо називати глобальною.

Досить часто для кожної пари точок $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ будують лінійні інтерполяційні поліноми:

$$L_1(x) = y_i \frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)}, \quad (2)$$

де $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.

В багатьох наближених обчисленнях (наприклад, формула Сімпсона, при обчисленні інтегралів) використовують також квадратичну інтерполяцію. Для цього область інтерполювання необхідно поділити на парне число відрізків.

Беремо три вузли інтерполяції $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$, де $i = (0, 2, 4, \dots, n-2)$:

$$L_2(x) = y_i \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})} + y_{i+1} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})} + y_{i+2} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}$$

(3)

Інтерполяцію за формулами (2), (3) називають, відповідно, локальною лінійною та локальною квадратичною інтерполяцією.

Індивідуальне завдання

Для функцій, заданих в таблиці 1, побудувати графік (для цього можна використати пакети MathCad, Maple). Інтервал інтерполювання для змінної x підібрати так, щоб на ньому функція мала один максимум та один мінімум. Обчислити координати шести характерних точок, які лежать

на графіку функції (за ці точки краще взяти кінці відрізка інтерполювання, точку максимуму, мінімуму та перегибу). Взяти ці точки за вузли інтерполяції.

Скласти програму, що реалізує:

- 1) глобальну інтерполяцію;
- 2) локальну лінійну інтерполяцію;
- 3) локальну квадратичну інтерполяцію;
- 4) побудувати сумісно графіки заданої функції та трьох видів інтерполяції;

5) для довільно вибраної точки $x_0 < x < x_n$, яка не співпадає з вузлами інтерполяції для кожного виду інтерполяції передбачити обчислення відносної похибки за формулою:

$$\delta = \frac{|y_{\text{набл}} - y_{\text{точн}}|}{y_{\text{точн}}} 100\% \quad (4)$$

Зробити висновки.

Таблиця 1 – Варіанти завдань

№ варіанту	Функція	№ варіанту	Функція
1	2	3	4
1	$y = 4 - \cos x^2$	14	$y = \ln(4 - \cos x)$
2	$y = e^{\sin(x+2)}$	15	$y = 3 + \cos(x^2)$
3	$y = e^{\cos 2x}$	16	$y = 2 \sin x + \cos^2 x$
4	$y = 2 + \ln(4 + \sin x)$	17	$y = e^{\cos(2+x)}$
5	$y = 4 + \sin(2 + x^2)$	18	$y = 2 - \sin(x/2)$
6	$y = \ln(4 - \cos x)$	19	$y = e^{(1+\sin(x/2))}$
7	$y = e^{\sin 2x}$	20	$y = \ln(3 + \sin(x/2))$
8	$y = \ln(4 + \sin 2x)$	21	$y = e^{\sin(x/2)}$
9	$y = 2 + \cos x$	22	$y = \ln(3 - \cos x^2)$
10	$y = 3 \sin(e^x)$	23	$y = 2 - \sin(x^2/2)$
11	$y = 2 + \cos(e^x)$	24	$y = \sin 3x + \cos(x+5)$
12	$y = 2 + \sin(x^2)$	25	$y = 3 + \sin x$
13	$y = 4 + \ln(2 + \sin x)$		

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів обчислення визначених інтегралів.

Теоретичні відомості

Чисельні методи обчислення визначеного інтегралу ґрунтуються на його визначенні та геометричній інтерпретації. З геометричної точки зору визначений інтеграл

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

є площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$ та прямими $x = a, x = b$.

Розділимо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин довжиною h . Надалі h будемо називати шагом чисельного методу.

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Тоді координати кінців відрізків поділу визначаються за формулою:

$$x_i = x_0 + ih,$$

де $x_0 = a, i = 0, 1, \dots, n$. Через кожну точку поділу проведемо пряму паралельно осі oy , тим самим криволінійну трапецію розіб'ємо на n частинних криволінійних трапецій.

Найпростіші чисельні методи наближеного обчислення визначеного інтегралу це *метод лівих прямокутників* та *метод правих прямокутників*.

(А): *Метод лівих прямокутників* одержуємо, коли площу кожної i -тої частинної криволінійної трапеції замінимо на прямокутник, ширина якого h , висота дорівнює значенню функції $f(x_i)$ (надалі це значення будемо позначати f_i).

Розрахункова формула має вигляд:

$$S_{n-1} = h(f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}).$$

Для організації циклу, краще використати її аналог

$$S_0 = hf_0 \Rightarrow S_i = S_{i-1} + hf_i, (i = 1, \dots, n-1). \quad (1)$$

(Б): *Метод правих прямокутників* одержуємо коли площу кожної i -тої частинної криволінійної трапеції замінимо на прямокутник, ширина якого h , висота дорівнює значенню функції на правому кінці частинної криволінійної трапеції.

Розрахункова формула має вигляд:

$$S_n = h(f_1 + f_2 + \dots + f_n).$$

Для організації циклу краще використати її аналог

$$S_0 = hf_1; S_i = S_{i-1} + hf_i, (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

(В): *Метод трапецій.* Маємо площу кожної i -тої трапеції з висотою h та основами f_{i-1}, f_i .

Розрахункова формула має вигляду:

$$S_n = h \left(\frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 + f_2}{2} + \dots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2} \right).$$

Для організації циклу краще використовувати її аналог

$$S_1 = \frac{f_0 + f_1}{2} h; S_i = S_{i-1} + h \frac{f_{i-1} + f_i}{2}; (i = 2, \dots, n). \quad (3)$$

Зауваження: якщо врахувати результати лабораторної роботи 1, то формулу трапеції ми одержуємо заміною функції $f(x)$ кусочно-лінійною інтерпретацією з послідовним інтегруванням.

(Г): *Метод парабол (формула Сімпсона).* Більш висока точність обчислення інтегралів забезпечується при виконанні кусочно-параболічної інтерпретації підінтегральної функції $f(x)$, при цьому відрізок інтегрування розбивається на парне $n = 2m$ число відрізків з кроком

$$h = \frac{b-a}{2m}.$$

При цьому беремо три точки (вузли інтерполяції). Почнемо з $(x_0, f_0); (x_1, f_1); (x_2, f_2)$. Здійснюємо локальну квадратичну інтерполяцію (дивись лабораторну роботу 1) і беремо інтеграл. Тоді площа під параболою на відрізку $[x_0, x_2]$ дорівнює

$$I_0 = \frac{1}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) h.$$

Беремо наступну пару відрізків $[x_2, x_3], [x_3, x_4]$ і повторимо попередні обчислення:

$$I_2 = \frac{1}{3} (f_2 + 4f_3 + f_4).$$

Продовжуючи обчислення, знайдемо наближено інтеграл над останньою парою відрізків $[x_{2m-2}, x_{2m-1}], [x_{2m-1}, x_{2m}]$:

$$I_{2m-2} = \frac{1}{3} (f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}).$$

Шукане наближення значення інтегралу на відрізку $[a, b]$ одержимо коли визначимо суму площин всіх параболічних сегментів

$$S_{2m-2} = \sum_{i=0}^{m-1} I_{2i}.$$

Після деяких перетворень одержимо формулу Сімпсона

$$S_{2m-2} = \frac{1}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}] h.$$

Більш зручною для програмування є формула

$$S_0 = \frac{1}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) h; S_{2i} = S_{2i-2} + \frac{1}{3} (f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}) h, (i = 1, \dots, m-1). \quad (4)$$

Оцінка похибки

Похибкою чисельного методу (зокрема обчислення інтегралу) є $\delta = |S_{\text{точне}} - S_{\text{набл}}|$, але ми точне значення ніколи не знаємо, тому похибку потрібно оцінити зверху.

Оцінкою похибки називають досить мале число $\varepsilon > 0$, таке, що $\delta < \varepsilon$, при цьому кажуть, що інтеграл обчислено з точністю ε .

Зрозуміло, що похибка залежить від точності чисельного методу та від числа частинних відрізків n , на яке розбивають відрізок інтегрування $[a, b]$.

Доведено, що похибка методів лівих та правих прямокутників пропорційна n^{-1} , або h . Це записують так $\delta \approx 0(n^{-1}) \approx 0(h)$.

Похибка методу трапеції $\delta \approx 0(n^{-2}) \approx 0(h^2)$.

Похибка методу Сімпсона $\delta \approx 0(n^{-4}) \approx 0(h^4)$.

Ці похибки відповідно називають похибками нульового, першого, другого та третього порядку.

Звичайно відрізок $[a, b]$ розбивають на таку кількість n частинних відрізків, щоб забезпечити необхідний порядок або оцінку похибки.

Існують більш складні, але більш конкретні оцінки похибки, а саме:

- для методу трапецій

$$\delta \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \text{ де } M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|, \quad (5)$$

де $f''(x)$ – друга похідна функції $f(x)$.

- для методу Сімпсона

$$\delta \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4, \text{ де } M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|, \quad (6)$$

де $f^{IV}(x)$ – четверта похідна функції $f(x)$.

На практиці часто для досягнення заданої точності використовують метод подвійних перерахунків. Обчислення інтегралу починають для невеликих n , а потім число відрізків, на яке розбивають $[a, b]$, подвоюють, умовою виходу з циклу є:

$$|S_{2n} - S_n| < \varepsilon. \quad (7)$$

Індивідуальні завдання:

- 1) Обчислити інтеграл запропонованими двома методами (табл. 2).
- 2) Забезпечити в першому методі заданий порядок похибки.
- 3) В другому методі забезпечити задану оцінку похибки.
- 4) Порівняти результати.

Таблиця 2 – Варіанти завдань

№ варіанту	Інтеграл	Метод	Порядок похибки	Оцінка похибки
1	2	3	4	5
1	$\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$	А, В	0,01	0,001 (за формулою (7))

Продовження таблиці 2

1	2	3	4	5
2	$\int_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3.2}}$	Б, Г	0,001	0,01
3	$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1.3}}$	А, Г	0,0001	0,001
4	$\int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$	Б, В	0,01	0,0001
5	$\int_{0.8}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}$	Б, Г	0,001	0,01
6	$\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2 + 2}}$	В, Г	0,001	0,0001 (за формулою (7))
7	$\int_{1.4}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 1}}$	А, В	0,01	0,0001
8	$\int_{1.2}^{2.4} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0.5}}$	А, Г	0,001	0,01
9	$\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$	Б, В	0,0001	0,01
10	$\int_{0.6}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$	Б, Г	0,01	0,0001 (за формулою (7))
11	$\int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$	В, Г	0,001	0,01
12	$\int_{0.5}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$	А, В	0,0001	0,01
13	$\int_{1.2}^{2.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0.6}}$	А, Г	0,01	0,0001 (за формулою (7))
14	$\int_{1.4}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}$	Б, В	0,001	0,01
15	$\int_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$	Б, Г	0,0001	0,01
16	$\int_{1.6}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2.5}}$	В, Г	0,01	0,0001 (за формулою (7))
17	$\int_{0.6}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0.8}}$	А, В	0,001	0,01
18	$\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1.2}}$	А, Г	0,001	0,01
19	$\int_{1.4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.7}}$	Б, Г	0,0001	0,01

Продовження таблиці 2

1	2	3	4	5
20	$\int_{3.2}^4 \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2 + 1}}$	Б, Г	0,01	0,0001
21	$\int_{0.8}^{1.7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}}$	А, В	0,001	0,01
22	$\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2 + 1.5}}$	А, Г	0,0001	0,01
23	$\int_{2.1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}}$	Б, В	0,01	0,001
24	$\int_{1.3}^{2.5} \frac{dx}{\sqrt{0.2x^2 + 1}}$	Б, Г	0,001	0,01
25	$\int_{2.3}^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$	Б, Г	0,0001	0,01

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ $f(x)=0$

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання нелінійних рівнянь $f(x)=0$.

Теоретичні відомості

Будь-яке рівняння з одним невідомим можна записати у вигляді $f(x)=0$.

Розв'язком рівняння називається таке значення x (корінь рівняння), при якому $f(x)=0$. Звичайно точне знаходження коренів рівняння неможливе крім деяких спеціальних випадків, які вивчались у школі (лінійні, квадратичні рівняння та рівняння, що зводяться до них).

Задача знаходження наближеного значення кореня розпадається на два етапи:

- 1 Відокремлення коренів.
- 2 Уточнення кореня.

Відокремлення коренів – це знаходження відрізка, на якому лежить цей і тільки цей корінь рівняння.

Для відокремлення коренів корисні дві теореми з математичного аналізу.

Теорема 1. Якщо функція $y=f(x)$ безперервна на відрізку $[a;b]$ та $f(a) \cdot f(b) < 0$, то всередині відрізка $[a;b]$ існує по меншій мірі один корінь рівняння $f(x)=0$.

Теорема 2. Якщо функція $y=f(x)$ безперервна на відрізку $[a;b]$ $f(a) \cdot f(b) < 0$ та $f'(x)$ на інтервалі зберігає знак, то всередині відрізка $[a;b]$ існує тільки один корінь рівняння $f(x)=0$.

Для відокремлення коренів використовують також графік функції $y=f(x)$. Коренями рівняння є ті значення, при яких графік функції $y=f(x)$ перетинає вісь абсцис. Якщо побудова графіку функції $y=f(x)$ викликає утруднення, то рівняння потрібно привести до вигляду $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ таким чином, щоб графік функції $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$ були достатньо простими. Абсциси точок перетину цих графіків і будуть коренями рівняння.

Уточнення кореня. Припустимо, що корінь рівняння відокремлено і він знаходиться на відрізку $[a;b]$. Подальше уточнення кореня будемо знаходити одним із чисельних методів.

(А): *Метод половинного ділення*

Опис алгоритму.

Припустимо, що $f(a) \cdot f(b) < 0$. Поділимо відрізок $[a; b]$ навпіл та знайдемо значення функції $f(x)$ в точці $x = \frac{a+b}{2}$. Може статись, що $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, тоді корінь рівняння знайдено. Якщо ж $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то на кінцях одного з відрізків $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ або $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ функція буде приймати значення різних знаків. Позначимо цей відрізок через $[a_1; b_1]$ і відмітимо, що $|b_1 - a_1| = \frac{|b-a|}{2}$. Якщо $|b_1 - a_1| < \varepsilon$, то будь-яка точка з інтервалу $[a_1; b_1]$ може бути прийнята за наближене значення кореня. Якщо ж $|b_1 - a_1| \geq \varepsilon$, то приймається $a = a_1$, $b = b_1$ і продовжується процес ділення відрізка навпіл. Через деяку скінчену кількість кроків отримується точне значення кореня або довжина відрізка $[a; b]$ стане менш ε . В останньому випадку за наближене значення кореня можна взяти будь-яку точку відрізка $[a; b]$, часто беруть його середину.

(Б): Метод хорд

Опис алгоритму.

Припустимо, що $f(a) \cdot f(b) < 0$ та $f'(x)$, $f''(x)$ на інтервалі $[a; b]$ зберігають знак, тобто графік функції $y = f(x)$ монотонний та опуклий, тоді можна застосовувати метод хорд.

Отримаємо перше наближення. Проведемо через точки $A(a, f(a))$ та $B(b, f(b))$ пряму лінію (хорду), рівняння якої можна записати в вигляді:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Одержимо точку перетину хорди з віссю абсцис, припустимо $y = 0$:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a). \quad (1)$$

Далі можна вибрати один з двох варіантів побудови алгоритму пошуку кореня.

(Б1): Друге наближення розраховується за формулою (1) в залежності від того на кінцях якого з відрізків $[a; x_1]$ чи $[x_1; b]$ функція приймає значення різних знаків. Якщо $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, то приймемо $b = x_1$, якщо ні – $a = x_1$.

(Б2): Припустимо, що друга похідна $f''(x)$ на інтервалі $[a; b]$ має один знак. Тоді, якщо $f''(x) < 0$ графік функції $y = f(x)$ опуклий догори та лежить вище хорди. В цьому випадку точка перетину хорди з віссю абсцис знаходиться між коренем рівняння $f(x) = 0$ і тим кінцем відрізка $[a; b]$, на якому значення функції $f(x)$ додатне.

У випадку $f''(x) > 0$ графік функції $y = f(x)$ опуклий донизу і лежить нижче хорди. В цьому випадку точка перетину хорди з віссю абсцис знаходиться між кореням рівняння $f(x) = 0$ та тим кінцем відрізка $[a; b]$ на якому значення $f(x) < 0$.

Таким чином маємо, що в будь-якому випадку наближене значення кореня лежить між точним його значенням і тим кінцем відрізка $[a; b]$, в якому $f(x)$ та $f''(x)$ протилежні.

Висновки: якщо відомо $(n-1)$ -не наближення кореня, то його n -не наближення обчислюється за формулою:

$$x_n = \frac{[bf(x_{n-1}) - x_{n-1}f(b)]}{[f(x_{n-1}) - f(b)]} \quad (2)$$

у випадку $f(a) \cdot f''(a) < 0$, чи

$$x_n = \frac{[af(x_{n-1}) - x_{n-1}f(a)]}{[f(x_{n-1}) - f(a)]} \quad (3)$$

у випадку $f(b) \cdot f''(b) < 0$.

Незалежно від того, за якою схемою (Б1) чи (Б2) будується алгоритм наближеного розв'язку рівняння, умовою закінчення обчислень (виходу з циклу) може бути одна з умов:

$$f(x_n) < \varepsilon \quad (4)$$

мінімізація нев'язки,

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \quad (5)$$

більш надійною умовою є:

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{|2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}|} < \varepsilon. \quad (6)$$

(В): Метод дотичних (метод Ньютона)

Нехай $f(a) \cdot f(b) < 0$ та $f''(x)$ зберігає знак на інтервалі $[a; b]$. Проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$ на тому кінці відрізка $[a; b]$, де знаки $f(x)$ та $f''(x)$ співпадають. Рівняння дотичної має вигляд

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \text{ якщо } f(a)f''(a) > 0;$$

$$y - f(b) = f'(b)(x - b), \text{ якщо } f(a)f''(a) < 0.$$

Знайдемо точку перетину дотичної з віссю абсцис. Прийmemo $y = 0$, тоді

$$x_1 = a - f(a)/f'(a), \text{ якщо } f(a)f''(a) > 0;$$

$$x_1 = b - f(b)/f'(b), \text{ якщо } f(a)f''(a) < 0.$$

Одержане значення x_1 прийmemo за наближене значення кореня.

Наступні наближення обчислимо за формулою:

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1}); n = 2, 3, \dots \quad (7)$$

Обчислення повторюють до тих пір, доки не виконається одна з умов (4-6), в залежності від того, яку з них обрано за критерій виходу з циклу.

(Г) : Комбінований метод

Нехай $f''(x)$ зберігає знак на інтервалі $[a;b]$. Було показано, що уточнення кореня методом хорд та дотичних відбувається з різних сторін: один з недостаткою, другий з надлишком. Комбінований метод полягає у послідовному застосуванні методу хорд та дотичних.

Якщо, наприклад, $f(a)f''(a) > 0$, то зліва застосовуємо метод дотичних

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

а праворуч

$$b_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a),$$

метод хорд.

Припустимо $a = a_1$ та $b = b_1$, тоді отримаємо новий відрізок $[a;b]$, довжина якого менш довжини попереднього. Обчислення повторюємо до тих пір, доки $|b - a| < \varepsilon$.

За наближене значення кореня беруть

$$x^* = a \text{ - з недостаткою;}$$

$$x^* = b \text{ - з надлишком,}$$

або

$$x^* = \frac{a + b}{2} \text{ - середнє значення.}$$

(Д): Метод ітерацій (метод послідовних наближень)

Замінімо рівняння $f(x) = 0$ еквівалентним йому рівнянням

$$x = \varphi(x). \quad (8)$$

це можна зробити, наприклад, так:

$$x = x + cf(x), \text{ де } c \text{ — константа.}$$

Припустимо, що обрано деяке початкове наближення до кореня x_0 рівняння (8).

Визначимо числову послідовність за формулою (задамо ітераційний процес):

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Теорема про нерухому точку. Якщо на відрізку $[a;b]$, що містить точку x_0 та всі наступні наближення x_n , буде виконуватись умова $|\varphi'(x)| \leq q \leq 1$, то ітераційний процес сходиться до єдиного на відрізку $[a;b]$ кореня рівняння (8).

Іноді виконання умови збіжності вдається досягти вдалим вибором константи c .

Вихід із циклу відбувається при виконання однієї з умов (4-6).

Зауваження. На практиці умову $|\phi'(x)| < 1$ часто не перевіряють, а запускають ітераційний процес з заданим числом ітерацій, якщо зсходимість не відбувається, то шукають рішення при іншому значенні константи c , або взагалі змінюють метод пошуку кореня.

Індивідуальні завдання

- 1) Відділити корені запропонованого рівняння (табл. 3).
- 2) Якщо коренів декілька, то уточнити один із них з заданою точністю ε двома вказаними методами.
- 3) Порівняти результати, зробити перевірку.

Таблиця 3 – Варіанти завдань

№ варіанту	Рівняння	Метод	Умова виходу з циклу	Оцінка похибки ε
1	2	3	4	5
1	$x - \sin x = 0.25$	А Б1	4 5	0,001
2	$3x - \cos x - 1 = 0$	А Б2	4 6	0,01
3	$x + \ln x = 0.25$	А В	5 6	0,001
4	$x^2 + 4 \sin x = 0$	Б1 Д	4 5	0,0001
5	$3x + \cos x + 1 = 0$	Г Д	4 6	0,01
6	$3x - e^x = 0$	В Д	5 6	0,001
7	$x^2 = \sin x$	Б2 Д	4 5	0,0001
8	$x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$	А Г	4 6	0,01
9	$2 - x = \ln x$	А Д	5 6	0,001
10	$x^3 + 4x - 6 = 0$	Г Д	4 5	0,01
11	$x + \cos x = 1$	А Д	4 6	0,001
12	$x^3 = \sin x$	Б1 Д	5 6	0,01
13	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0$	А Г	5 6	0,001
14	$\operatorname{tg}(0.55x + 0.1) = x^2$	А В	4 5	0,0001
15	$e^x \sin x - 1 = 0$	А Д	4 6	0,001
16	$\arcsin x - 2x - 0.1 = 0$	А Б2	5 6	0,001
17	$x^2 - 2 \cos x = 0$	Г Д	6 4	0,01

Продовження таблиці 3

1	2	3	4	5
18	$x^2 - 20\sin x = 0$	А Б1	5 4	0,001
19	$\operatorname{ctgx} - \frac{x}{4} = 0$	В Д	6 5	0,001
20	$x^3 + 4x - 6 = 0$	А Г	4 5	0,0001
21	$e^x(2 - x) - 0.5 = 0$	А Г	4 5	0,001
22	$(x - 2)^2 \cdot 2^x = 1$	А Б1	5 4	0,001
23	$x^4 \cdot 3^x = 2$	А Б2	5 6	0,01
24	$2e^x = 5x + 2$	А Д	6 4	0,001
25	$x^3 + 2x - 4 = 0$	А Д	6 4	0,001

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4

МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Теоретичні відомості

Розглянемо систему нелінійних рівнянь з невідомими

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ (x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1)$$

де f_i – деякі нелінійні функції.

Якщо ввести позначення $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, систему (1) можна записати в матричному вигляді:

$$F(X) = 0. \quad (2)$$

Системи нелінійних рівнянь розв'язуються ітераційними методами, які є узагальненням методів розв'язку одного рівняння $f(x) = 0$.

(А): Метод простої ітерації

У методі простої ітерації ітераційна формула має вигляд:

$$X_{k+1} = X_k + HF(X_k), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

Збіжність методу простої ітерації залежить від вдалого вибору початкової точки X_0 та вектора $H = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, де h_i деякі константи.

Зупинимось більш детально на системі двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Саме такі системи необхідно розв'язати в даній лабораторній роботі.

Приведемо систему до вигляду зручного для застосування методу простої ітерації та методу Зейделя:

$$\begin{cases} x = x + h_1 f_1(x, y), \\ y = y + h_2 f_2(x, y), \end{cases}$$

або позначивши $\varphi_1(x, y) = x + h_1 f_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y) = y + h_2 f_2(x, y)$, одержимо:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(x, y), \\ y &= \varphi_2(x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

Тоді ітераційна формула в методі простої ітерації має вигляд:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \varphi_1(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= \varphi_2(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

$X_0 = (x_0, y_0)$ – початкове наближення.

(Б): Метод Зейделя

Метод Зейделя відрізняється від методу простої ітерації тим, що в ньому поліпшення кожного наступного наближення відбувається

покоординатно, а в методі простої ітерації по векторно. Як правило збіжність у методі Зейделя більш висока.

Для системи (5) ітераційна формула за методом Зейделя має вигляд:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \varphi_1(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= \varphi_2(x_{k+1}, y_k), k = 0, 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (7)$$

де $X_0 = (x_0, y_0)$ – початкове наближення.

Умовою досягнення заданої точності $\varepsilon > 0$ в методах (А) та (Б) є:

$$\|X_{k+1} - X_k\| \leq \varepsilon$$

збіжність за евклідовою нормою.

Для системи двох рівнянь (5) ця умова матиме вигляд:

$$\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} \leq \varepsilon. \quad (8)$$

Можна також використати умову мінімізації нев'язки:

$$\sqrt{f_1^2(x_{k+1}, y_{k+1}) + f_2^2(x_{k+1}, y_{k+1})} \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Оскільки достатні умови збіжності ми не розглядали, то, якщо точність не досягається за задану кількість ітерацій, обчислювальний процес переривається з повідомленням “точність не досягнуто, рішення не знайдено”. В цьому випадку потрібно повернутись до системи (4) і спробувати уточнити $X_0 = (x_0, y_0)$ початкову умову, або більш вдало вибрати $H = (h_1, h_2)$.

Чисельний розв'язок системи лінійних рівнянь

Нехай задана система n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (10)$$

або в матричному вигляді:

$$A \cdot X = B.$$

З курсу вищої математики відомо, що необхідною і достатньою умовою розв'язку системи (10) є умова:

$$\det(A) = |A| \neq 0. \quad (11)$$

Якщо умова (11) виконана, то система (10) розв'язується точно, причому існує декілька методів такого розв'язку (метод Крамера, метод Гауса, матричний метод та інші).

Недоліком є те, що точний розв'язок можна одержати лише для систем, в яких кількість рівнянь невелика. Якщо кількість рівнянь велика, то поряд з технічними труднощами, виникають похибки обчислень, і отримується по суті наближене рішення.

Будемо розв'язувати лінійну систему алгебраїчних рівнянь (10) наближено. Так як лінійна система є частковим випадком нелінійної, то до неї можна застосовувати запропоновані вище методи простої ітерації та метод Зейделя.

(АЛ): Метод простої ітерації для системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Приведемо систему $A \cdot X = B$ до вигляду:

$$X = C \cdot X + D.$$

Запишемо детально цю систему для трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + d_2 \\ x_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + d_3 \end{cases} \quad (12)$$

Метод простої ітерації для системи (12) має вигляд:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} &= c_{21}x_1^{(k)} + c_{22}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + d_2, \\ x_3^{(k+1)} &= c_{31}x_1^{(k)} + c_{32}x_2^{(k)} + c_{33}x_3^{(k)} + d_3, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

За початкове наближення можна взяти будь-яку точку, але звичайно беруть:

$$X_0 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

(БЛ): Метод Зейделя для системи лінійних рівнянь

Метод Зейделя для системи (12) має вигляд:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} &= c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + d_2, \\ x_3^{(k+1)} &= c_{31}x_1^{(k+1)} + c_{32}x_2^{(k+1)} + c_{33}x_3^{(k)} + d_3, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (15)$$

За початкову умову також можна взяти (14).

Для системи (10) методи простої ітерації та Зейделя збігаються при виконанні умови:

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

тобто модулі діагональних коефіцієнтів для кожного рівняння системи більше суми модулів всіх інших коефіцієнтів цього рівняння.

Для системи лінійних рівнянь у вигляді (12) достатньою умовою збіжності є одна з умов:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| &< 1, \quad i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^n |c_{ij}| &< 1, \quad i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}|^2 &< 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Якщо система в вигляді (10) не задовольняє умові збіжності, то її можна привести до еквівалентної системи рівнянь, що буде задовольняти умові збіжності. Це роблять шляхом додавання та віднімання рівнянь системи.

Приклад. Дана система рівнянь:

$$\begin{cases} 4.5x_1 - 1.8x_2 + 3.6x_3 = -1.7; \\ 3.1x_1 + 2.3x_2 - 1.2x_3 = 3.6; \\ 1.8x_1 + 2.5x_2 + 4.6x_3 = 2.2. \end{cases}$$

Привести систему до вигляду, в якому елементи головної діагоналі були б більші за модулем інших елементів (умова 1б).

Зробимо перетворення.

$$\begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9; & (I + II) \\ 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7; & (2III + II - I) \\ -1.3x_1 + 0.2x_2 + 5.8x_3 = -1.4; & (III - II). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7.6}(-0.5x_2 - 2.4x_3 + 1.9); \\ x_2 = \frac{1}{9.1}(-2.2x_2 - 4.4x_3 + 9.7); \\ x_3 = \frac{1}{5.8}(1.3x_2 - 0.2x_3 - 1.4). \end{cases}$$

Тепер можна застосовувати методи (АЛ) та (БЛ).

Індивідуальні завдання

Запропонованим методом розв'язати систему нелінійних рівнянь (табл. 4), обравши в якості початкового наближення точку X_0 . За точність обчислень виберіть $\varepsilon = 10^{-4}$. Зробіть перевірку. Спробуйте змінити початкову умову та знайти інше рішення системи.

Таблиця 4 – Варіанти завдань

Номер варіанту	Система рівнянь	Початкова точка	Умова досягнення точності	Метод
1	2	3	4	5
1	$\begin{cases} x = e^x \cos y - 1 \\ y = e^x \sin y + 1 \end{cases}$	(-0,9;1,4)	8	А
2	$\begin{cases} x = 0.25(x^2 - y^2) - x^2 y^2 + 0.5 \\ y = xy(x^2 - y^2) + 0.5 \end{cases}$	(1;1)	8	Б
3	$\begin{cases} x = x/(x^2 - y^2) + 0.4 \\ y = -y(x^2 - y^2) + 1.4 \end{cases}$	(1;1)	9	Б
4	$\begin{cases} x = x^2 + 0.8y^2 + 0.1 \\ y = 2xy + 0.1 \end{cases}$	(0;0)	8	Б
5	$\begin{cases} x = x^2 - y^2 + 0.1 \\ y = 2xy + 0.1 \end{cases}$	(0;0)	9	А
6	$\begin{cases} x = x^2 - y^2 - 0.1 \\ y = 2xy + 0.1 \end{cases}$	(0;0)	9	Б
7	$\begin{cases} x = x^2 + y^2 + 0.1 \\ y = 2xy - 0.1 \end{cases}$	(0;0)	8	Б

Продовження таблиці 4

1	2	3	4	5
8	$\begin{cases} x = 1 - e^x \cos y \\ y = e^{-x} \sin y + 1 \end{cases}$	(0,9;1,4)	8	Б
9	$\begin{cases} x = x^2 + y^2 - 0.1 \\ y = 2xy - 0.1 \end{cases}$	(0;0)	9	А
10	$\begin{cases} x = x/(x^2 + y^2) + 0.4 \\ y = (1 - y)/(x^2 + y^2) + 1 \end{cases}$	(1;1)	9	А
11	$\begin{cases} x = x^2 y^2 - 0.25(x^2 - y^2)^2 - 0.5 \\ y = xy(y^2 - x^2) + 0.5 \end{cases}$	(-0,5;0,5)	9	А
12	$\begin{cases} x = x/(x^2 + y^2) - 0.4 \\ y = 1.4 - y/(x^2 + y^2) \end{cases}$	(-1;1)	9	Б
13	$\begin{cases} x = -x^2 - 0.8y^2 - 0.1 \\ y = y^2 - x^2 - 0.1 \end{cases}$	(0;0)	9	А
14	$\begin{cases} x = -x^2 + y^2 - 0.1 \\ y = -2xy + 0.1 \end{cases}$	(0;0)	8	А
15	$\begin{cases} x = -x^2 + y^2 + 0.1 \\ y = 0.1 - 2xy \end{cases}$	(0;0)	9	Б
16	$\begin{cases} x = -x^2 - y^2 - 0.1 \\ y = -2xy - 0.1 \end{cases}$	(0;0)	8	Б
17	$\begin{cases} x = -x^2 - y^2 + 0.1 \\ y = -2xy - 0.1 \end{cases}$	(0;0)	9	А
18	$\begin{cases} x = x/(x^2 + y^2) - 0.4 \\ y = e^x \sin y - 1 \end{cases}$	(-1;1)	8	А
19	$\begin{cases} x = -1 + e^x \cos y \\ y = e^x \sin y - 1 \end{cases}$	(-0,9;-1,4)	9	А
20	$\begin{cases} xy^2 - 1 = 0 \\ y + e^x = 0 \end{cases}$	(0,5;-1,5)	8	Б
21	$\begin{cases} xy^2 - 1 = 0 \\ y - e^x = 0 \end{cases}$	(0,5;1,5)	9	А
22	$\begin{cases} 1 - x^2 + e^y = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$	(2;2)	9	А
23	$\begin{cases} x^2 y - 1 = 0 \\ x - e^y = 0 \end{cases}$	(1,5;0,5)	8	Б
24	$\begin{cases} 1 - y^2 + e^x = 0 \\ xy + 1 = 0 \end{cases}$	(-2;2)	8	Б

Продовження таблиці 4

1	2	3	4	5
25	$\begin{cases} 1 - y^2 + e^{-x} = 0 \\ y - \operatorname{tg} x = 0 \end{cases}$	(0;1)	9	Б

САМОСТІЙНА РОБОТА 1

МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання систем лінійних рівнянь.

Завдання. Запропонованим методом розв'язати систему лінійних рівнянь з точністю 0,001 (табл. 5). Спочатку привести систему до зручного для ітерацій вигляду.

Таблиця 5 – Варіанти завдань

Номер варіанту	Система рівнянь	Умова досягнення точності	Метод
1	2	3	4
1	$\begin{cases} 2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1 \\ 3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7 \\ 4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8 \end{cases}$	8	БЛ
2	$\begin{cases} 3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.2 \\ 1.9x_1 + 3.1x_2 + 2.1x_3 = 2.1 \\ 7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.6 \end{cases}$	9	БЛ
3	$\begin{cases} 9.1x_1 + 5.6x_2 + 7.8x_3 = 9.8 \\ 3.8x_1 + 5.1x_2 + 2.8x_3 = 6.7 \\ 4.1x_1 + 5.7x_2 + 1.2x_3 = 5.8 \end{cases}$	9	АЛ
4	$\begin{cases} 1.7x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.7 \\ 2.1x_1 + 3.4x_2 + 1.8x_3 = 1.1 \\ 4.2x_1 - 1.7x_2 + 1.3x_3 = 2.8 \end{cases}$	9	АЛ
5	$\begin{cases} 3.3x_1 + 2.1x_2 + 2.x_3 = 0.8 \\ 4.1x_1 + 3.7x_2 + 4.8x_3 = 5.7 \\ 2.7x_1 + 1.8x_2 + 1.1x_3 = 3.2 \end{cases}$	8	БЛ
6	$\begin{cases} 3.2x_1 - 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5 \\ 0.5x_1 + 0.34x_2 + 1.7x_3 = -0.24 \\ 1.6x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 = 4.3 \end{cases}$	8	БЛ

Продовження таблиці 5

1	2	3	4
7	$\begin{cases} 3.6x_1 + 1.8x_2 - 4.7x_3 = 3.8 \\ 2.7x_1 - 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4 \\ 1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = -1.6 \end{cases}$	8	БЛ
8	$\begin{cases} 2.4x_1 + 3.7x_2 - 8.3x_3 = 2.3 \\ 1.8x_1 + 4.3x_2 + 1.2x_3 = -1.2 \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 5.2x_3 = 3.5 \end{cases}$	9	БЛ
9	$\begin{cases} 2.4x_1 + 2.5x_2 - 2.9x_3 = 4.5 \\ 0.8x_1 + 3.5x_2 - 1.4x_3 = 3.2 \\ 1.5x_1 - 2.3x_2 + 8.6x_3 = -5.5 \end{cases}$	8	АЛ
10	$\begin{cases} 1.5x_1 + 2.3x_2 - 3.7x_3 = 4.5 \\ 2.8x_1 + 3.4x_2 + 5.8x_3 = -3.2 \\ 1.2x_1 + 7.3x_2 - 2.3x_3 = 5.6 \end{cases}$	9	АЛ
11	$\begin{cases} 3.7x_1 - 2.3x_2 + 4.5x_3 = 2.4 \\ 2.5x_1 + 4.7x_2 - 7.8x_3 = 3.5 \\ 1.6x_1 + 5.3x_2 + 1.3x_3 = -2.4 \end{cases}$	8	АЛ
12	$\begin{cases} 3.2x_1 - 11.5x_2 + 3.8x_3 = 2.8 \\ 0.8x_1 + 1.3x_2 - 6.4x_3 = -6.5 \\ 2.4x_1 + 7.2x_2 - 1.2x_3 = 4.5 \end{cases}$	9	БЛ
13	$\begin{cases} 5.4x_1 - 2.4x_2 + 3.x_3 = 5.5 \\ 0.8x_1 + 1.3x_2 - 6.4x_3 = -6.5 \\ 2.4x_1 + 7.2x_2 - 1.2x_3 = 4.5 \end{cases}$	8	БЛ
14	$\begin{cases} 5.4x_1 - 2.4x_2 + 3.8x_3 = 5.5 \\ 2.5x_1 + 6.8x_2 - 1.1x_3 = 4.3 \\ 2.7x_1 - 0.6x_2 + 1.5x_3 = -3.5 \end{cases}$	9	БЛ
15	$\begin{cases} 0.9x_1 + 2.7x_2 - 3.8x_3 = 2.4 \\ 2.5x_1 + 5.8x_2 - 0.5x_3 = 3.5 \\ 4.5x_1 - 2.1x_2 + 3.2x_3 = -1.2 \end{cases}$	8	БЛ
16	$\begin{cases} 6.3x_1 + 5.2x_2 - 0.6x_3 = 1.5 \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = 2.7 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$	9	АЛ
17	$\begin{cases} 4.1x_1 + 5.2x_2 - 5.8x_3 = 7.0 \\ 3.8x_1 - 3.1x_2 + 4.0x_3 = 5.3 \\ 7.8x_1 + 5.3x_2 - 6.3x_3 = 5.8 \end{cases}$	8	АЛ
18	$\begin{cases} 7.1x_1 + 6.8x_2 + 6.1x_3 = 7.0 \\ 5x_1 + 4.8x_2 + 5.3x_3 = 6.1 \\ 8.2x_1 + 7.8x_2 + 7.1x_3 = 5.8 \end{cases}$	9	БЛ

Продовження таблиці 5

1	2	3	4
19	$\begin{cases} 2.8x_1 + 3.8x_2 - 3.2x_3 = 4.5 \\ 2.5x_1 - 2.8x_2 + 3.3x_3 = 7.1 \\ 6.5x_1 - 7.1x_2 + 4.8x_3 = 6.3 \end{cases}$	8	БЛ
20	$\begin{cases} 3.8x_1 + 4.1x_2 - 2.3x_3 = 4.8 \\ -2.1x_1 + 3.9x_2 - 5.8x_3 = 3.3 \\ 1.8x_1 + 1.1x_2 - 2.1x_3 = 5.8 \end{cases}$	9	БЛ
21	$\begin{cases} 5.4x_1 - 6.2x_2 - 0.5x_3 = 0.52 \\ 3.4x_1 + 2.3x_2 + 0.8x_3 = -0.8 \\ 2.4x_1 - 1.1x_2 + 3.8x_3 = 1.8 \end{cases}$	8	БЛ
22	$\begin{cases} 4.5x_1 - 3.5x_2 + 7.4x_3 = 2.5 \\ 3.1x_1 - 0.6x_2 - 2.3x_3 = -1.5 \\ 0.8x_1 + 7.4x_2 - 0.5x_3 = 6.4 \end{cases}$	9	АЛ
23	$\begin{cases} 5.6x_1 + 2.7x_2 - 1.7x_3 = 1.9 \\ 3.4x_1 - 3.6x_2 - 6.7x_3 = -2.4 \\ 0.8x_1 + 1.3x_2 - 3.7x_3 = 1.2 \end{cases}$	8	АЛ
24	$\begin{cases} 5.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = -3.5 \\ 4.2x_1 + 1.7x_2 - 2.3x_3 = 2.7 \\ 3.4x_1 + 2.4x_2 + 7.4x_3 = 1.9 \end{cases}$	9	БЛ
25	$\begin{cases} 7.6x_1 + 5.8x_2 + 4.7x_3 = 10.1 \\ 3.8x_1 + 4.1x_2 + 2.7x_3 = 9.7 \\ 2.9x_1 + 2.1x_2 + 3.8x_3 = 7.8 \end{cases}$	9	АЛ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Теоретичні відомості

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку має вигляд:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язати диференціальне рівняння (1), це значить знайти на відрізку $[x_0, a]$ функцію $y = y(x)$, яка при підстановці її в рівняння та початкову умову перетворює їх в тожність.

Типи рівнянь, для яких можна знайти точне рішення охоплюють невелику частину задач, які виникають на практиці. Тому потрібні чисельні методи розв'язку задачі Коші (1).

Загальний підхід чисельного розв'язку диференціальних рівнянь, це розбити відрізок $[x_0, a]$ на частинні відрізки точками $x_i = x_0 + ih, i = \overline{1, n}$, потім на кожному частинному відрізку замінити похідну деяким її різницеvim наближенням та одержати замість диференціального рівняння систему кінцево-різницеvих рівнянь. Розв'язавши цю систему одержимо систему точок $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)$. Чисельним розв'язком є ламана лінія, що з'єднує ці точки.

(А): Метод Ейлера

На частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ замінимо $y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, одержимо

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \text{ звідки}$$

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (2)$$

Формула (2) описує реалізацію методу Ейлера.

Цей метод має перший порядок точності (порядок апроксимації). Його похибка дорівнює $\delta = kh^2$, або, що теж саме, $\delta = O(h^2)$.

(Б): Полагоджений метод Ейлера

В практичних обчисленнях частіше застосовується модифікований метод Ейлера.

На частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ замінимо похідну на середнє арифметичне похідних (нахилів) на кінцях відрізка і одержимо розрахункову формулу полагодженого методу Ейлера:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + f(x_i, y_i))] \end{cases}$$

При програмуванні краще використовувати більш поетапну модифікацію цієї формули:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ \overline{y_{i+1}} = y_i + f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \overline{y_{i+1}})] \end{cases} \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

Метод має другий порядок точності, його помилка апроксимації дорівнює $\delta = O(h^3)$.

(В): Модифікований метод Ейлера

У модифікованому методі похідну на частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ замінюють нахилом в середній точці відрізка. Рекурентні співвідношення мають вигляд:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h \left[f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hf(x_i, y_i)}{2}\right) \right] \end{cases} \quad i = \overline{1, n} \quad (4)$$

Цей метод також має другий порядок точності з помилкою апроксимації $\delta = O(h^3)$.

(Г): Метод Рунге-Кутта четвертого порядку

На практиці найбільш часто використовують саме цей метод, що описується системою співвідношень:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{cases} \quad i = \overline{1, n} \quad (5)$$

Помилка апроксимації методу $\delta = O(h^5)$, тому його називають методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

Оцінка похибки чисельних методів розв'язку диференціальних рівнянь

Слід відзначити: наближеним рішенням є функція, яка задана множиною точок $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)$. Це означає, що похибку потрібно оцінювати для кожної із цих точок.

Для практичної оцінки похибки в точці $[x_i, y_i]$ використовують правило Рунге подвійного перерахунку:

$$\delta_i \approx \frac{|y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|}{2^p - 1},$$

де $y_h(x_i)$ та $y_{h/2}(x_i)$ наближені рішення, обчислені в точці x_i з кроком h та $h/2$, p - точність чисельного методу.

Для методу Ейлера $p=1$

$$\delta_i \approx |y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|. \quad (6)$$

Для полагодженого та модифікованого методів Ейлера $p=2$

$$\delta_i \approx \frac{|y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|}{3}. \quad (7)$$

Для методу Рунге-Кутта $p=4$

$$\delta_i \approx \frac{|y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|}{15}. \quad (8)$$

Знайти наближене рішення з заданою точністю $\varepsilon > 0$, це значить підібрати такий крок h_i , щоб виконувалась умова:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i < \varepsilon. \quad (9)$$

На практиці діють одним з двох способів.

1 Забезпечення точності з постійним кроком ($h_{\text{ном}}$)

Вибирають деякий досить малий крок h . В кожній точці роблять подвійний перерахунок з кроками $h/2$ та h і оцінюють похибку.

Якщо умова (9) не виконується, то за нове h беруть $h/2$ і повторюють подрібнення кроку до тих пір, доки умова (9) не буде виконана.

2 Забезпечення точності з автоматичним вибором кроку ($h_{\text{змін}}$)

Вибирають деякий досить малий крок h . В першій точці роблять подвійний перерахунок з кроками $h/2$ та h і оцінюють похибку. Величину подальших кроків вибирають за одним з двох правил:

$$h_{i+1} = \begin{cases} 0.5h_i, & \text{якщо } \delta > \varepsilon; \\ h_i, & \text{якщо } \varepsilon/10 \leq \delta \leq \varepsilon; \\ 1.5h_i, & \text{якщо } \delta < \varepsilon/10. \end{cases} \quad (10)$$

(правило трьох зон).

$$h_{i+1} = \begin{cases} 0.5h_i, & \text{якщо } \delta > \varepsilon; \\ h_i \sqrt[p+1]{\varepsilon / \delta}, & \text{якщо } \delta \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (11)$$

Якщо невдалим був вже перший крок, то його зменшують (перший крок повинен завжди бути вдалим).

Індивідуальні завдання

Розв'язати запропонованим чисельним методом задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

На відрізку $[x_0, a]$ забезпечити точність розв'язку $\varepsilon \leq 0.01$. Побудувати графік наближеного рішення (табл. 6).

Таблиця 6 – Варіанти завдань

Номер варіанту	$f(x, y)$	x_0	y_0	a	Метод	Спосіб забезпечення точності ($1-h_{\text{пост}}$; $2-h_{\text{змін}}$)
1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$	1	0	2	А	1
2	$\frac{y}{1+x}$	0	2	3	Б	2
3	$y - \frac{2x}{y}$	0	1	1	В	1
4	$x^3 - \frac{2y}{x}$	1	2	3	Г	2
5	$\frac{y}{2\sqrt{x}}$	4	1	6	А	1
6	$\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$	1	0	2	Б	1
7	$\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$	1	1	3	В	2
8	$\frac{x+1-y^3}{3y^2}$	1	-1	3	Г	2
9	$\frac{xy^2 + xy}{1+x^2}$	0	0	3	А	1
10	$\frac{2xy}{3x^2 - y^2}$	1	1	2	Б	2
11	$\frac{1+y^2}{xy}$	1	1	4	В	1
12	$-\frac{y^2}{2x+1}$	4	1	6	Г	2
13	$\frac{x^2 + y^2}{10}$	1	1	2	А	1
14	$x^2 + xy^3$	0	0	3	Б	2
15	$\sqrt{xy} + 1$	0	0	2	В	2
16	$x^2 + xy + y^2$	0	0	3	А	2
17	$2xy^3 - 1$	0	0	2	Г	1
18	$\frac{x^2 + y^2}{12}$	2	3	3	Б	1
19	$\frac{4x^2 + y^2}{4}$	0	-1	2	А	2
20	$\sqrt{xy} - 2$	1	2	3	Б	1
21	$y^3 - x^3$	0	1	2	В	2
22	$\frac{x^2 + 3y^2}{4}$	2	0	5	Г	1

Продовження таблиці 6

1	2	3	4	5	6	7
23	$x^2 + y^3$	0	0	2	A	1
24	$x + y^2$	0	1	3	Б	2
25	$2x + y^2$	0	0	2	В	1

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ МЕТОДОМ СІТОК

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання змішаної крайової задачі для диференційного рівняння коливань струни методом сіток.

Теоретичні відомості

В звичайних диференційних рівняннях невідома функція $y = y(x)$ залежить від однієї змінної. Такими рівняннями можна описати лише невелику кількість процесів з фізики та інших наук.

В більшості диференційних рівнянь невідома функція $U = U(t, x, y, z)$ залежить від багатьох змінних (звичайно це час t та просторові координати x, y, z). Такі диференційні рівняння будемо називати рівняннями з частинними похідними.

Найчастіше, це рівняння другого порядку, так як згідно з законами механіки перша похідна – швидкість, друга – прискорення.

Позначимо $U_x = \frac{\partial U}{\partial x}; U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; U_{xt} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}; U_{tt} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, тоді лінійне диференційне рівняння з частинними похідними другого порядку можна записати у вигляді

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xt} + a_{22}U_{tt} + b_1U_x + b_2U_t + cU = f(x, t) \quad (1)$$

де a_{ij}, b_i, c – константи;

$U(x, t)$ – невідома функція.

Рівняння виду (1) підрозділяють на три класи:

1) Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то рівняння належить до класу еліптичних рівнянь.

Еліптичними рівняннями описують різноманітні електричні, магнітні та гравітаційні поля (в цьому випадку, звичайно, замість t застосовують позначення y).

2) Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то рівняння належить до класу гіперболічних рівнянь.

Гіперболічними рівняннями описують процеси коливань.

3) Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то рівняння належить до класу параболічних рівнянь.

Параболічними рівняннями описують процеси розповсюдження тепла (теплопровідності) та дифузійні процеси.

Найбільш розповсюдженим методом розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод сіток.

Сутність методу сіток полягає у тому, що область, в якій шукають рішення прямими, котрі паралельні осям координат, розбивають на сітку. Вузлами цієї сітки є точки $(x_i, t_j) = (x_0 + ih, t_0 + jk)$, де h, k – відповідно крок по осям $0x$ та $0t$, $i, j = 0, 1, \dots$.

Невідому функцію $U(x, t)$ відшукують наближено у вузлах сітки.

Позначимо $U_{ij} = U(x_i, t_j)$.

Частинні похідні у вузлах сітки замінюють кінцево-різницевиими співвідношеннями

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k}; \\ U_x &= \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h}; \\ U_{tt} &= \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2}; \\ U_{xx} &= \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Зупинимось більш детально на методі сіток для розв'язання гіперболічного рівняння коливань струни.

Розглянемо фізичну задачу. Є струна довжиною L , натягнута між двома точками осі $x: x=0; x=L$. Якщо відхилити струну від положення рівноваги та відпустити, то вона почне коливатися (рис. 1). Ми опишемо процес коливань, коли знайдемо функцію $U = U(x, t)$ величини відхилення струни від положення рівноваги в точці x в момент часу t .

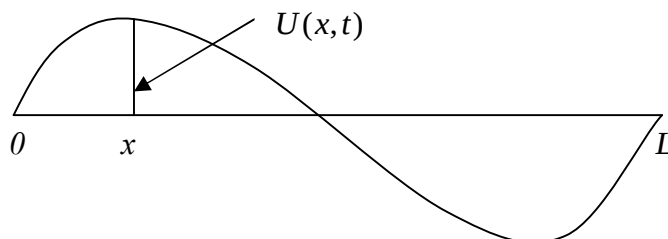


Рисунок 1 – Коливання струни

Відхилення струни $U(x,t)$ описується диференціальним рівнянням

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}.$$

Постійна a^2 враховує фізичні характеристики струни. Заміною змінних ми можемо досягти виконання умови $a^2 = 1$. Для однозначного задання процесу коливань потрібно задати граничні умови, які задають режим коливань на кінцях струни, початкові умови, що задають форму струни в момент часу $t=0$ та початкову швидкість. Така задача називається змішаною крайовою задачею.

В загальній постановці крайова задача має вигляд:

$$U_{tt} = U_{xx}; \quad (3)$$

$$U(0,t) = p(t); \quad (4)$$

$$U(L,t) = q(t); \quad (5)$$

$$U(x,0) = f(x); \quad (6)$$

$$U_t(x,0) = g(x). \quad (7)$$

(4-5) – граничні умови, (6-7) – початкові умови.

Таким чином область, де шукаємо рішення є напівсмуга $D: \{0 \leq x \leq L; 0 \leq t \leq +\infty\}$. Зрозуміло, що повинні виконуватись умови узгодження:

$$p(0) = f(0), q(0) = f(L), p'(0) = g(0), q'(0) = g(L).$$

Замінімо задачу (3-7) її кінцево-різницевою аналогом:

$$\frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{k^2} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2}; \quad (3')$$

$$U_{0,j} = p_j, j = 0, 1, 2, \dots \quad (4')$$

$$U_{n,j} = q_{nj}, j = 0, 1, 2, \dots \quad (5')$$

$$U_{i,0} = f_j, i = 0, 1, 2, \dots \quad (6')$$

$$\frac{U_{i1} - U_{i0}}{k} = g_i. \quad (7')$$

Таким чином умови (4'-6') задають значення функції $U(x,t)$ на кордоні області D .

За допомогою умови (7') відшукуємо значення в першому прошарку

$$U_{i1} = U_{i0} + kg_i.$$

Таким чином значення функцій на нульовому та першому прошарку відомі. Позначимо $\lambda = k/h$ і приведемо рівняння (3') до вигляду:

$$U_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)U_{ij} + \lambda^2(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - U_{i,j-1}; i = 1..n-1; j = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Для спрощення користування формулою (8) використовуємо трафарет (рис. 2).

За допомогою (8) (трафарету) (рис. 2), спираючись на відомі значення функції у вузлах сітки на попередніх двох прошарках, знаходимо значення у вузлах наступного прошарку.

Рішення різницевої задачі (3'-7') рівномірно сходиться до рішення вихідної крайової задачі (3-7) при $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$, якщо $\lambda < 1$, тобто $k < h$.

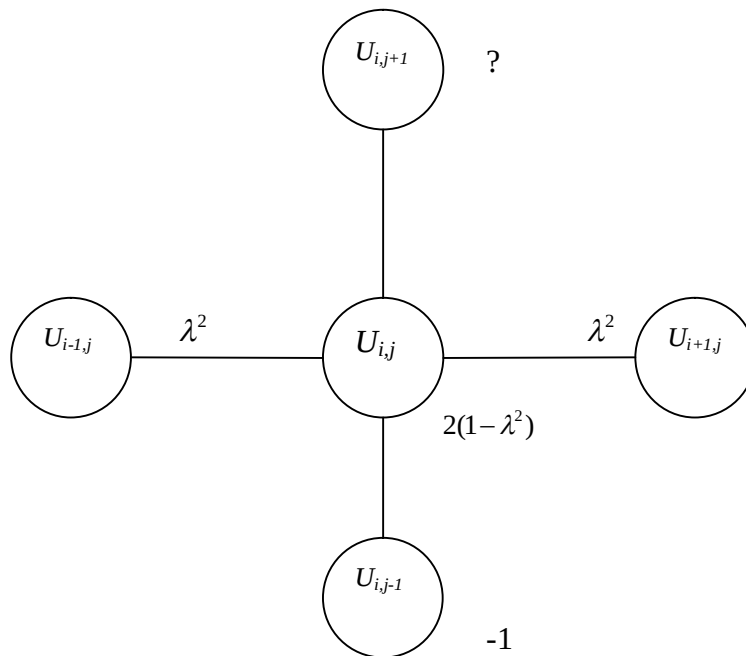


Рисунок 2 - Трафарет

Ця умова є достатньою для збіжності методу, але не є необхідною.

Індивідуальні завдання

Використовуючи метод сіток знайти функцію $U = U(x, t)$ у вузлах сітки, яка є чисельним розв'язком змішаної крайової задачі для рівняння коливань струни:

$$U_{tt} = U_{xx};$$

$$U(0, t) = p(t) \text{ – гранична умова;}$$

$$U(1, t) = q(t) \text{ – гранична умова;}$$

$$U(x, 0) = f(x) \text{ – початкова умова;}$$

$$U_t(x, 0) = g(x) \text{ – початкова умова.}$$

В області $D: \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq t \leq 5\}$, вибираючи відповідні дані з таблиці 9.

Побудувати:

- 1) форму струни в момент часу $t = 0; t = 3; t = 5$;
- 2) графіки положення точок струни для $x = 0.3; x = 0.5; x = 0.7$.

Таблиця 8 – Варіанти завдань

Номер варіанту	h	k	Граничні умови		Початкові умови	
			$p(t)$	$q(t)$	$f(t)$	$g(t)$
1	2	3	4	5	6	7
1	0,1	0,05	0	0	$\sin \pi x$	0
2	0,05	0,025	0	0	0	$2 \sin \pi x$
3	0,1	0,025	0	$1.2(t+1)$	$(x+0.2) \sin \frac{\pi x}{2}$	$1+x^2$
4	0,2	0,05	0	$0.5t$	$(x+1) \sin \pi x$	x^2+x
5	0,1	0,05	$1+0.4t$	0	$(1-x^2) \cos \pi x$	$2x+0.6$

Продовження таблиці 8

1	2	3	4	5	6	7
6	0,05	0,025	$2t$	0	$3x(1-x)$	$\cos(x+0.5)$
7	0,1	0,025	0	$0.2+0.5t$	$1.2x-x^2$	$(x+0.6)\sin x$
8	0,2	0,05	$2t+1$	0	$(1-x)\cos\frac{\pi x}{2}$	$2x+1$
9	0,1	0,05	$0.5t$	0	$(x+0.4)\sin\pi x$	$(x+1)^2$
10	0,1	0,025	$0.5t$	0	$(2-x)\sin\pi x$	$(x+0.6)^2$
11	0,2	0,1	$0.4t$	0	$(2+x)\sin\pi x$	$(x+0.3)^2$
12	0,05	0,025	$2t+1$	0	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x^2
13	0,1	0,025	$2t$	0	$x\sin\pi x$	$(x+1)^2$
14	0,2	0,05	0	t^2	$x\cos\frac{\pi x}{2}$	$2x^2$
15	0,1	0,025	0	$2(t+1)$	$x(x+1)$	$\cos x$
16	0,05	0,025	0	$2(t+1)$	$x(x+1)$	$\cos x$
17	0,1	0,025	$3t$	2	$x\cos\pi x$	$x(4-x)$
18	0,05	0,025	2	$2(t+3)$	$x(x+1)$	$\cos x$
19	0,1	0,05	$0.5t$	2	$(x+1)\sin\frac{\pi x}{2}$	$1-x^2$
20	0,1	0,025	1	$0.5t$	$(x^2+1)(1-x)$	$1-\sin x$
21	0,2	0,025	$2t^2$	1	$0.5x(x+1)$	$x\cos x$
22	0,1	0,05	1	$1.2(t+2)$	$(x+0.5)\sin\frac{\pi x}{2}$	$1+x^2$
23	0,1	0,025	$t-0.5$	$3t$	$(x+0.5)(x-1)$	$\sin(x+0.2)$
24	0,1	0,05	0,5	$2-3t$	$0.5(x+1)$	$(x+0.5)\cos\pi x$
25	0,05	0,025	t^2	1,5	$x(2x-0.5)$	$\cos(2x)$

САМОСТІЙНА РОБОТА 2

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ СІТОК

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельного розв'язку змішаної крайової задачі для диференційного рівняння теплопровідності методом сіток.

Теоретичні відомості

Рівняння вигляду $U_t = a^2 U_{xx}$ є параболічне диференційне рівняння з частинними похідними, яке описує процеси теплопровідності та дифузії. В цьому рівнянні $U(x,t)$, задає температуру в будь-якій точці стрижня довжиною L в момент часу t . Будемо вважати, що $a^2 = 1$, цього завжди можна досягти зміною змінних.

Для однозначного задання процесу теплопровідності потрібно задати граничні умови, які задають теплові режими на кінцях стрижня, та початкову умову, що задає розподіл температури в момент часу $t = 0$. Така задача називається змішаною крайовою задачею для рівняння теплопровідності.

В загальній постановці задача виглядає наступним чином:

$$U_t = U_{xx}; \quad (1)$$

$$U(0, t) = p(t); \quad (2)$$

$$U(L, t) = q(t); \quad (3)$$

$$U(x, 0) = f(x); \quad (4)$$

(2-3) – граничні умови, (4) – початкова умова.

Таким чином область, де шукаємо рішення є напівсмуга $D: \{0 \leq x \leq L; 0 \leq t \leq \infty\}$. зрозуміло, що повинні виконуватись умови узгодження:

$$p(0) = f(0); q(0) = f(0).$$

Замінімо задачу (1-4) її кінцево-різницеvim аналогом (дивись формули (2) лабораторної роботи № 6):

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}; \quad (1')$$

$$U_{0,j} = p_j, j = 0, 1, 2, \dots \quad (2')$$

$$U_{n,j} = q_{nj}, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3')$$

$$U_{i,0} = f_j, i = \overline{0, n} \quad (4')$$

Таким чином умови (1'-4') задають значення функції $U(x, t)$ на кордоні області D . Позначимо $\lambda = \frac{k}{h^2}$ іведемо рівняння (1') до вигляду:

$$U_{i,j+1} = \lambda U_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)U_{i,j} + \lambda U_{i+1,j}; i = \overline{1, n-1}; j = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Для спрощення користування формулою (5) використовуємо трафарет (рис. 3):

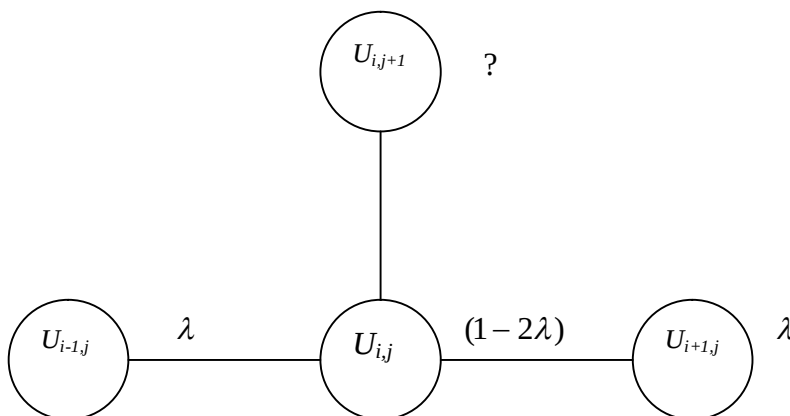


Рисунок 3 – Трафарет

За допомогою формули (5), або трафарету, спираючись на значення функції у вузлах сітки на попередньому прошарку, знаходимо значення

функції у вузлах наступного прошаку. Ітераційний процес починаємо, спираючись на відомі значення на нульовому прошаку (4').

Процес розв'язання за цією схемою збігається і є стійким, якщо $\lambda \leq 0.5$, тобто, якщо $k < \frac{h^2}{2}$, що потребує дуже дрібного кроку за часом. Це є недоліком запропонованого методу.

Індивідуальні завдання

Використовуючи метод сіток, знайти функцію $U(x, t)$, яка є рішенням змішаної задачі для рівняння теплопровідності:

$$U_t = U_{xx};$$

$$U(0, t) = p(t) \text{ — гранична умова;}$$

$$U(0.6, t) = q(t) \text{ — гранична умова;}$$

$$U(x, 0) = f(x) \text{ — початкова умова;}$$

$$0 \leq x \leq 0.6; 0 < t \leq t_1.$$

Крок по h, t вибрати самостійно, але не менш ніж $h = 0.1$, величину t_1 — також обрати самостійно.

Передбачити графічний вивід розподілу температур у стрижні для довільного фіксованого значення $0 < t \leq t_1$.

Побудувати графіки розподілу температур при $t_0 = 0, t_0 = \frac{t_1}{2}, t_0 = t_1$.

Таблиця 9 – Варіанти завдань

№ варіанту	$f(x)$	$p(t)$	$q(t)$
1	2	3	4
1	$\cos(2x)$	$1 - 6t$	0,3624
2	$(x + 1)x$	$2t$	0,960
3	$1.3 + \ln(x + 0.4)$	$0.8 + t$	1,2
4	$\sin(2x)$	$2t$	0,932
5	$3x(2 - x)$	t	2,52
6	$\sin(0.55x + 0.33)$	$t + 0.33$	0,354
7	$2x(1 - x) + 0.2$	$0.2 + t$	0,680
8	$\sin x + 0.08$	$0.08 + 2t$	0,6446
9	$2x(x + 0.2) + 0.4$	$2t + 0.4$	1,36
10	$0.3 + x(x + 0.4)$	$0.3 + t$	0,9
11	$(x - 0.2)(x + 1) + 0.2$	$6t$	0,84
12	$\ln(263 - x)$	$3(0.14 - t)$	0,3075
13	$1.5 - x(1 - x)$	$3(0.5 - t)$	1,26
14	$\cos(x + 0.845)$	$6(t + 0.11)$	0,1205
15	$0.6 + x(0.8 - x)$	$0.6 + t$	0,72
16	$\ln(1.95 + x)$	$0.29 + 6t$	0,4065
17	$2\cos(x + 0.55)$	$0.8179 + 3t$	1,705
18	$\sin(0.48 + x)$	$0.882 + 3t$	0,4618
19	$\sin(3x)$	$3t$	0,932

Продовження таблиці 9

1	2	3	4
20	$x(x + 3)$	$2t$	0,94
21	$\ln(x + 0.4)$	$0.6 + t$	1,2
22	$\sin(3x)$	$2t$	0,532
23	$3x(2 + x)$	$3t$	2,78
24	$\cos(x - 0.45)$	$0.123 - 2t$	0,485
25	$\sin(0.9 + x)$	$0.02 + 3t$	0,581

ЛІТЕРАТУРА

1. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ / В.В. Иванов. – Киев: Наукова думка, 1986. – 583 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Житков, Г.М. Кобельков. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 598 с.
3. Бахвалов Н. С., Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: Высшая школа, 2000. – 348 с.
4. Поршнев С.В. Численные методы на базе MathCad / С.В. Поршнев, И.В. Беленкова. – С.-П., 2005. – 450 с.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ

Методичні вказівки до виконання лабораторних та самостійних робіт

(для студентів 4-го курсу спеціальності
7.080404 Інтелектуальні системи прийняття рішень
денної форми навчання)

Укладачі: ЧЕРНОМАЗ Володимир Миколайович
ШЕВЧЕНКО Наталя Юріївна

Редактор О.О. Дудченко
Комп'ютерна верстка О.П. Ордіна

Підп. до друку Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Ризограф. друк. Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк.
Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003