

Министерство образования и науки Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия

Тулупенко В.Н., Белых В.Г., Баржеев Р.В.

МЕХАНИКА
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
ТЕРМОДИНАМИКА

Курс лекций по дисциплине «ФИЗИКА»
(для студентов всех специальностей вуза)

Утверждено
на заседании ученого совета
Протокол № от 2006

Краматорск 2006

УДК 531

ББК 22.3

Т 82

Рецензенты:

Рябухо Елена Николаевна, к.ф.-м.н., зав. каф. алгебры СДПУ;

Чальцева Ирина Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, КЭГИ.

Матеріал охоплює розділи фізики «Механіка», «Молекулярна фізика», «Термодинаміка». Особливу увагу було приділено роз'ясненню смислу фізичних законів та їх свідомому застосуванню, що сприяє успішному засвоєнню основних ідей і методів фізичної науки. Курс лекцій буде корисний викладачам і студентам вищих навчальних закладів і всім зацікавленим фізикою.

Тулупенко В. Н., Белых В.Г., Баржеев Р.В.

Т 82 Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: Курс лекций по дисциплине “Физика”: Для студентов всех специальностей вуза. – Краматорск: ДГМА, 2006. – **108** с.

ISBN **XXXXXX**

Матеріал охоплює розділи фізики «Механіка», «Молекулярна фізика», «Термодинаміка». Особливу увагу було приділено роз'ясненню смислу фізичних законів та їх свідомому застосуванню, що сприяє успішному засвоєнню основних ідей і методів фізичної науки. Курс лекцій буде корисний викладачам і студентам вищих навчальних закладів і всім зацікавленим фізикою.

УДК 531

ББК 22.3

ISBN XXXXXX

© В.Н.Тулупенко, В.Г.Белых,

Р.В.Баржеев, 2006

© ДГМА, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
МЕХАНИКА.....	6
ЛЕКЦИЯ 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	6
1.1 Основные понятия механики.....	6
1.2 Радиус-вектор. Перемещение. Траектория. Пройденный путь	6
1.3 Вектор скорости	8
1.4 Ускорение	9
1.5 Элементы кинематики вращательного движения	13
ЛЕКЦИЯ 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА	17
2.1 Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона	17
2.2 Масса тела. Сила. Второй закон Ньютона	18
2.3 Третий закон Ньютона.....	20
2.4 Виды взаимодействий и силы в механике	21
ЛЕКЦИЯ 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА	26
3.1 Импульс. Центр масс системы материальных точек. Полный импульс системы материальных точек	26
3.2 Теорема о движении центра масс механической системы	27
3.3 Закон сохранения импульса	30
3.4 Момент импульса. Основное уравнение динамики вращательного движения. Закон сохранения момента импульса	31
ЛЕКЦИЯ 4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА	35
4.1 Действие момента сил на твердое тело	35
4.2 Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела	36
4.3 Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера	39
4.4 Свободные оси. Понятия о гироскопе.....	41
ЛЕКЦИЯ 5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ	43
5.1 Механическая работа. Мощность	43
5.2 Кинетическая энергия. Теорема о кинетической энергии	45

5.3 Консервативные силы. Потенциальная энергия	47
5.4 Закон сохранения механической энергии	52
5.5 Потенциальная яма. Условия равновесия механической системы	56
ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ.....	59
ЛЕКЦИЯ 6. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ	59
6.1 Статистический и термодинамический методы	59
6.2 Масса и размеры молекул	61
6.3 Опытные законы идеального газа	62
6.4 Основное уравнение молекулярно-кинетической теории	65
6.5 Физический смысл термодинамической температуры.....	67
6.6 Средняя энергия теплового движения молекул	68
ЛЕКЦИЯ 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ ПО СКОРОСТЯМ.....	71
7.1 Соударение молекул и тепловое равновесие	71
7.2 Понятия о функции распределения	72
7.3 Распределение Максвелла по направлениям скоростей.....	74
ЛЕКЦИЯ 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА.....	79
8.1 Распределение молекул по величине скорости и по кинетической энергии.....	79
8.2 Барометрическая формула	81
8.3 Распределение Больцмана	83
ЛЕКЦИЯ 9. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ	86
9.1 Внутренняя энергия	86
9.2 Количество теплоты	87
9.3 Работа, совершаемая телом при изменении объема	89
9.4 Первое начало термодинамики	91
9.5 Теплоемкость идеального газа	93
ЛЕКЦИЯ 10. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ	97
10.1 Круговые процессы. Тепловые двигатели	97
10.2 Цикл Карно	99
10.3 Энтропия. Второе начало термодинамики	103
10.4 Статистический смысл энтропии.....	105
ЛИТЕРАТУРА	107

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый вниманию читателей курс лекций охватывает разделы физики «Механика», «Молекулярная физика», «Термодинамика». При составлении материала особое внимание уделялось объяснению смысла физических законов и их сознательному применению, что, по мнению авторов, способствует успешному усвоению основных идей и методов физической науки.

Составители старались придать изложению материала лекций внешне интересную форму, исходя из того, что интерес к предмету усиливает работу мысли, повышает внимание и, следовательно, способствует более сознательному усвоению.

Курс лекций будет полезен преподавателям, читающим курс физики в высших учебных заведениях, заставит их по-новому взглянуть на процесс обучения; студентам всех специальностей, которые найдут много нового в дополнение к тому, что они узнают на лекциях; школьникам, у которых сформирует интерес к физике и поможет им войти в современную науку; а также всем интересующимся физикой.

МЕХАНИКА

ЛЕКЦИЯ 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1 Основные понятия механики

Предметом изучения механики является *механическое движение*, которое заключается в изменении с течением времени взаимного расположения тел или их частей в пространстве. Всякое движение происходит *относительно* какого-либо тела, которое называется *телом отсчёта*. С телом отсчёта связывают систему координат, с помощью которой задается положение движущегося тела. Совокупность тела отсчёта, связанной с ним системы координат и часов, отсчитывающих время, называется *системой отсчёта*. Относительно разных систем отсчета движение одного и того же тела выглядит по-разному. В этом заключается *относительность движения*. При решении практических задач систему отсчета необходимо выбирать так, чтобы движение рассматриваемого тела было наиболее простым, т.е. описывалось наименьшим числом уравнений.

Для математического описания движения различных тел используют математические модели. Мы будем пользоваться моделями материальной точки и абсолютно твёрдого тела. *Материальной точкой* называется тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Положение материальной точки в общем случае задается тремя декартовыми координатами – x , y и z . *Абсолютно твёрдым* называется тело, деформациями которого можно пренебречь при рассмотрении его движения. Для задания положения абсолютно твердого тела в пространстве достаточно знать координаты двух точек этого тела.

1.2 Радиус-вектор. Перемещение. Траектория. Пройденный путь

Как уже говорилось выше, положение материальной точки можно задать с помощью трех декартовых координат или с помощью радиус-вектора \vec{r} , который проводится из начала координат в ту точку простран-

ства, в которой находится материальная точка (рис. 1.1), причём

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.1)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы в направлении соответствующих осей x, y, z .

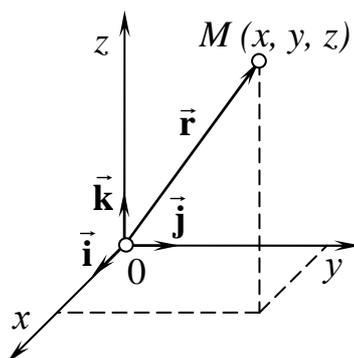


Рисунок 1.1 – Положение материальной точки в пространстве

При движении точки M изменяются с течением времени как её координаты, так и радиус-вектор. Потому для задания закона движения точки необходимо указать либо зависимость изменения координат со временем

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (1.2)$$

либо зависимость

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) и (1.3) называются *кинематическими уравнениями движения материальной точки*.

Введём некоторые определения. *Траекторией* называют воображаемую линию, которую описывает в пространстве материальная точка при её движении. Расстояние между точками 1 и 2 (рис. 1.2), отсчитанное вдоль траектории, называется *пройденным путём*.

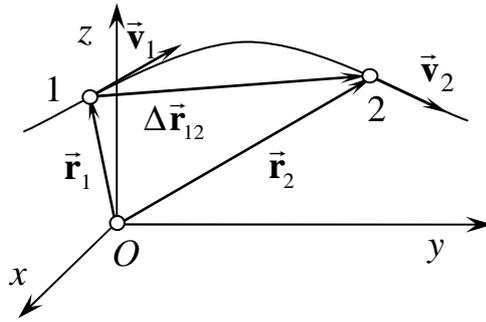


Рисунок 1.2 – Перемещение

Пройденный путь – величина скалярная. Вектор, проведенный из начальной точки траектории в конечную, называется *перемещением*:

$$\Delta \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Из определения вектора перемещения имеем, что

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}_{12},$$

т.е. положение материальной точки в данной системе отсчета определено, если известно ее начальное положение – вектор \vec{r}_1 и перемещение $\Delta \vec{r}_{12}$.

1.3 Вектор скорости

Предположим, что за время Δt материальная точка, которая находится в положении 1, переместилась в положение 2 (рис. 1.2). Тогда вследствие этого перемещения радиус-вектор получил приращение $\Delta \vec{r}_{12}$. Отношение перемещения ко времени, за которое оно произошло, называется *вектором средней скорости* за время Δt :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

Мгновенной скоростью, или просто *скоростью* в данный момент времени, называется предел отношения:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.5)$$

или производная от радиус-вектора по времени. Из рисунка 1.2 видно, что направление вектора скорости совпадает с направлением касательной к траектории движения в данной точке.

Вектор скорости можно разложить на 3 составляющие:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}.$$

Проекции и величина вектора скорости вычисляются по формулам:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad |\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Движение называется *равномерным*, если за любые одинаковые промежутки времени точка проходит одинаковые пути, или если численное значение скорости не изменяется с течением времени. Если же скорость изменяется, то такое движение называется *неравномерным*.

1.4 Ускорение

Изменение модуля и направления вектора скорости описывается физической величиной, которая называется *ускорением*:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.6)$$

Среднее ускорение за время Δt определяется аналогично вектору средней скорости:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Как и всякий вектор, ускорение можно записать в виде

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Проекции и величина вектора ускорения вычисляются по формулам:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2}.$$

Представим вектор скорости в виде $\vec{v} = v \vec{\tau}$, где v – модуль (величина) вектора скорости, а $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории. В общем случае и величина и направление вектора скорости изменяются с течением времени, тогда согласно формуле (1.6) получаем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (1.8)$$

Первое слагаемое в выражении (1.8) характеризует изменение скорости по величине, и по направлению совпадает с направлением вектора скорости. Это слагаемое называется *тангенциальным ускорением*.

Рассмотрим второе слагаемое в (1.8). Вначале определимся с направлением. По мере того, как угол $\delta\alpha$ будет стремиться к 0, вектор $\Delta \vec{\tau}$ будет уменьшаться: $\Delta \vec{\tau} \rightarrow d\vec{\tau}$ и $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$. Таким образом, вектор, соответствующий второму слагаемому в формуле (1.8), перпендикулярен к касательной к траектории в данной точке. Поэтому второе слагаемое в формуле (1.8) называют *нормальным ускорением*, которое характеризует изменение вектора скорости по направлению (рис. 1.3).

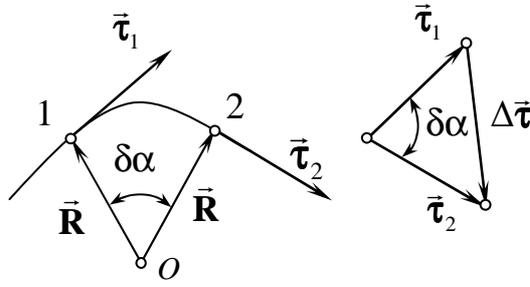


Рисунок 1.3 – Определение вектора $\Delta\vec{\tau}$

Таким образом, получаем, что

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.9)$$

Теперь определим величину нормального ускорения. Можно записать, что

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v \left(\frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} \right) = v \left(\frac{d\vec{\tau}}{ds} v \right) = v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds}. \quad (1.10)$$

Можно строго показать, что при стремлении точки 2 к точке 1 (рис. 1.3) отрезок траектории между этими точками будет стремиться к дуге окружности некоторого радиуса R с центром в точке O . Точку O называют *центром кривизны траектории*, а радиус R называют *радиусом кривизны траектории* в данной точке. Из рисунка 1.3 видно, что

$$\delta\alpha = \frac{ds}{R} = \frac{d\tau}{\tau}, \text{ или } \frac{d\tau}{ds} = \frac{\tau}{R} = \frac{1}{R}. \quad (1.11)$$

Теперь подставим выражение для $\frac{d\tau}{ds}$ из выражения (1.11) в выражение (1.10) и окончательно получим, что $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}$. Здесь \vec{n} – единичный вектор нормали к траектории в данной точке. Окончательно полное ускорение запишется в виде

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}. \quad (1.12)$$

Модуль полного ускорения, как обычно, определяется следующим образом:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}. \quad (1.13)$$

Можно показать, что всякое сложное движение можно свести к двум простым движениям – поступательному и вращательному. Мы, для простоты, как правило, будем рассматривать эти движения по отдельности. Итак, для прямолинейного движения $\vec{a}_n = 0$. Если при этом ускорение не изменяется с течением времени, то такое движение называется *равнопеременным*.

Пример. *Прямолинейное движение с постоянным ускорением.* Так как в этом случае направление вектора \vec{a} не изменяется, то дальше значок вектора писать не будем, а будем рассматривать ускорение как алгебраическую величину: $a = \frac{dv}{dt}$, откуда $\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_0^t a dt$, или $v_2 - v_1 = at$. Здесь

$v_2 = v$ – конечное значение скорости, а $v_1 = v_0$ – начальная скорость. С учётом сделанных замечаний окончательно получаем формулу

$$v = v_0 + at. \quad (1.14)$$

Проинтегрировав выражение (1.14) от 0 до некоторого t , найдём, что длина пути, пройденного за время t , определяется по известной школьной формуле

$$S = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.15)$$

1.5 Элементы кинематики вращательного движения

Движение твёрдого тела, закреплённого в одной точке, называется *вращением вокруг неподвижной точки* – центра вращения. Движение твёрдого тела, при котором все точки описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называется *вращением вокруг неподвижной оси*. Координатой в этом случае является угол поворота φ (рис 1.4).

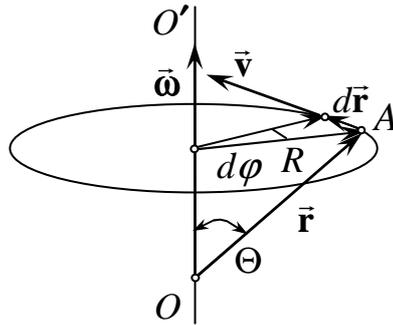


Рисунок 1.4 – Вращение вокруг неподвижной оси

Из рисунка 1.4 видно, что

$$|d\vec{r}| = R \cdot d\varphi = |\vec{r}| \sin\theta d\varphi. \quad (1.16)$$

Введем вектор $d\vec{\varphi} = d\varphi \vec{n}$, где $d\varphi$ – угол, на который повернулось тело, а \vec{n} – единичный вектор, направленный по оси вращения, и направление которого связано с направлением вращения правилом правого винта. Тогда в сокращённом виде, вместо выражения (1.16), можно записать:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]. \quad (1.17)$$

Здесь квадратными скобками обозначено векторное произведение двух векторов. Модуль векторного произведения равен произведению модулей сомножителей, умноженному на синус угла между ними. Напомним

также, что направление вектора, равного векторному произведению двух векторов, определяется по правилу правого винта.¹

Первая производная по времени от угла поворота называется *угловой скоростью*:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (1.18)$$

а первая производная от угловой скорости называется *угловым ускорением*:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.19)$$

В проекции на ось вращения z :

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} \text{ и } \varepsilon_z = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.20)$$

Векторы, подобные $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$, направление которых связывается с направлением вращения, называются *аксиальными*, или *псевдовекторами*. Эти вектора не имеют точки приложения, в отличие от истинных векторов.

Для вращения относительно неподвижной оси с постоянным ускорением имеем

$$d\omega = \varepsilon \cdot dt. \quad (1.21)$$

Интегрируя, получим

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (1.22)$$

¹ Вектор, который стоит в произведении первым, поворачиваем в направлении второго вектора, так, чтобы этот поворот был по часовой стрелке и на меньший угол. Тогда поступательное перемещение воображаемого правого винта укажет направление векторного произведения.

Интегрируя выражение (1.22) по времени, получим зависимость угла поворота от времени:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (1.23)$$

Отметим полную аналогию между формулами для координат и скорости для поступательного и вращательного движений: формул (1.14) и (1.22) и, соответственно, (1.15) и (1.23).

Найдём скорость \vec{v} произвольной точки A (см. рис. 1.4). Для этого разделим выражение (1.17) на dt :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\Phi}}{dt}, \vec{r} \right] = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (1.24)$$

Модуль вектора скорости

$$v = \omega r \sin \theta = \omega R, \quad (1.25)$$

где R – радиус окружности, по которой движется точка A . Найдём ускорение точки A :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]. \quad (1.26)$$

В случае, когда ось вращения неподвижна, вектор $\vec{\varepsilon}$ параллелен вектору $\vec{\omega}$, и поэтому вектор $[\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$ направлен в сторону скорости \vec{v} , т.е. по касательной к траектории в точке A и представляет собой тангенциальное ускорение

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]. \quad (1.27)$$

Второе слагаемое в выражении (1.26) представляет собой нормальное ускорение

$$\bar{\mathbf{a}}_n = [\bar{\boldsymbol{\omega}}, [\bar{\boldsymbol{\omega}}, \bar{\mathbf{r}}]]. \quad (1.28)$$

Модули тангенциального и нормального ускорений равны, соответственно,

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R, \quad (1.29)$$

а модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.30)$$

Для равномерного вращения (с постоянной угловой скоростью) можно ввести период обращения T – время совершения одного оборота.

Для такого вращения угловая скорость будет, очевидно, равна $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а

число оборотов за единицу времени $n = \frac{1}{T}$.

ЛЕКЦИЯ 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

2.1 Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона

Динамика изучает связь между взаимодействиями тел и происходящими в результате этого изменениями в движении взаимодействующих тел. В основе динамики лежат три закона Ньютона. Они являются эмпирическими, опытными законами. В кинематике, где не рассматриваются причины, вызывающие механическое движение, все системы отсчёта равноправны. В динамике же обнаруживается существенное различие между разными системами отсчёта. Оказывается, что динамические законы движения могут иметь различный вид в разных системах отсчёта. Естественно поэтому выбирать такие системы, где эти законы имеют наиболее простой вид. В связи с этим рассмотрим, чем может быть вызвано ускорение материальной точки в произвольной системе отсчёта.

Опыт показывает, что, во-первых, причиной ускорения может быть действие на материальную точку других тел и, во-вторых, свойства самой системы отсчёта. В самом деле, относительно различных систем отсчёта (движущихся, например, с ускорением) ускорение материальной точки может быть различным. Поэтому естественно выбирать такие системы отсчёта, в которых ускорение материальной точки целиком и только обусловлено взаимодействием с другими телами. В таких системах отсчёта *материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет её из этого состояния*. Такие системы называются *инерциальными*. Выделенный текст составляет содержание *1-го закона Ньютона*. В нём содержатся 2 утверждения:

- 1 Для равномерного прямолинейного движения тела не требуется каких-либо внешних воздействий. В этом смысле состояния покоя и равномерного прямолинейного движения являются абсолютно равноправными.
- 2 Первый закон Ньютона дает опытный критерий, позволяющий ответить на вопрос – является ли система отсчета инерциальной или

нет. А именно – это такие системы, относительно которых материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.

Часто первый закон Ньютона называют законом инерции. *Инерция*² – это явление, заключающееся в том, что тело движется равномерно прямолинейно, если на него не действуют другие тела, или действие со стороны других тел скомпенсировано.

Мы будем рассматривать движение тел в инерциальных системах отсчёта. Во многих практических задачах инерциальной можно считать систему отсчёта, связанную с Землёй.

2.2 Масса тела. Сила. Второй закон Ньютона

Итак, состояние покоя и равномерного прямолинейного движения равноправны. Изменить эти состояния движения тел, т.е. придать им ускорения, можно при помощи сил. *Сила* – это физическая величина, определяющая изменение состояния движения тел, которая возникает в результате взаимодействия тел. Когда мы говорим, что на тело действует сила, то подразумеваем, что на это тело действует какое-то другое тело, и в результате этого воздействия изменяется состояние рассматриваемого тела – изменяется скорость движения или появляется деформация. Сила – величина векторная, т.е. она полностью определена, если указано её численное значение, направление и точка приложения силы. Прямую, проведенную через точку приложения силы в направлении ее действия, называют *линией действия силы*. Результат действия силы на абсолютно твёрдое тело не изменится при переносе точки приложения силы вдоль линии действия силы. Основная задача механики заключается в *установлении законов движения тел под действием приложенных к ним сил*.

² В физике употребляется много слов, и каждое из них в отличие от обычного разговорного языка имеет точный смысл. Возьмите, например, слово перемещение. В физике это физическая величина с определенными характеристиками, а в быденном языке, очень часто, это слово синоним движения. Инерцию часто путают с инертностью. *Инерция* – это физическое явление, а *инертность* – свойство тела.

Опыт показывает, что всякое тело “оказывает сопротивление” при любых попытках изменить его скорость, как по величине, так и по направлению. Это свойство называется *инертностью тела*. На практике инертность проявляется в том, что скорость тела нельзя изменить мгновенно. Если равные силы действуют на разные тела в течение одинаковых промежутков времени, то изменение скоростей этих тел будет разным. О теле, у которого изменение скорости будет наименьшим, говорят, что оно обладает большей инертностью. Мерой инертности тела служит величина, которая называется *массой этого тела*. Масса – величина аддитивная, т.е. масса тела равна сумме масс всех частей тела. В системе СИ масса тела измеряется в килограммах (кг).

Соотношение, устанавливающее связь между мерой инертности тела, т.е. его массой, и ускорением, приобретаемым телом под действием приложенной к телу силы, было установлено И. Ньютоном на основании большого числа опытных данных и называется *2-м законом Ньютона*:

Ускорение материальной точки прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе этого тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.1)$$

Единица силы называется Ньютоном (Н). Из выражения (2.1) следует, что размерность силы $[H] = \frac{кг \cdot м}{с^2}$.

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то каждая из них сообщает материальной точке такое же ускорение, как если бы других сил не было, т.е.

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^N \vec{a}_i. \quad (2.2)$$

Это положение называют *принципом независимости действия сил*, или *принципом суперпозиции движений*. Если на материальную точку одно-

временно действует несколько сил, то во втором законе Ньютона под силой мы понимаем равнодействующую всех сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (2.3)$$

2.3 Третий закон Ньютона

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия. Как показывает опыт, при взаимодействии изменяются скорости обоих тел. Ускорения, которые получают тела при взаимодействии, имеют противоположное направление (рис. 2.1), а величины ускорений удовлетворяют соотношению

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

где m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел.

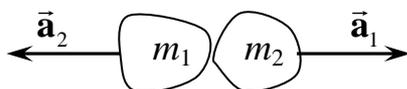


Рисунок 2.1 – Взаимодействие двух тел

Количественно это взаимодействие определяется 3-м законом Ньютона, который гласит, что если тело 1 действует на тело 2 с некоторой силой F_{21} , то и тело 2, в свою очередь, будет действовать на тело 1 с такой же по величине и противоположно направленной силой F_{12} :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.4)$$

2.4 Виды взаимодействий и силы в механике

Второй закон Ньютона занимает в механике очень важное место. Это связано с тем, что уравнение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

представляет собой дифференциальное уравнение относительно функции $\vec{r}(t)$. Решение этого уравнения дает решение основной задачи механики – *определения положения тела в любой момент времени*. Но это можно сделать только в том случае, если известны все силы, действующие на тело. Поэтому изучение различных взаимодействий физических объектов является одной из главных задач физики.

В современной науке выделяют 4 типа взаимодействий. Два из них, которые рассматриваются в механике, называются *гравитационное* и *электромагнитное*. Им соответствуют силы, которые нельзя свести к более простым, и поэтому они называются *фундаментальными*. Сила гравитационного взаимодействия (фундаментальная сила) описывается *законом всемирного тяготения*:

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.5)$$

Здесь G – постоянная всемирного тяготения, m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел, а r – расстояние между ними. В законе всемирного тяготения масса выступает мерой тяготения тел и называется *гравитационной массой*. Таким образом, мы уже знаем 2 определения массы: с одной стороны – *это мера инерции*, а с другой стороны, масса – *мера тяготения тел*.

Вторая, фундаментальная сила, которая описывает взаимодействие между двумя точечными зарядами, подчиняется *закону Кулона*:

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (2.6)$$

Гравитационные взаимодействия. О законе Кулона мы будем говорить позже. Сейчас же скажем несколько слов о законе всемирного тяготения. Видно, что величина силы пропорциональна массам взаимодействующих тел. Если мы возьмём 2 тела с массами, например, в 100 (кг), и пусть расстояние между этими телами 1 (м), то они будут взаимодействовать с силой, которая равна $6,67 \cdot 10^{-7}$ (Н).³ Такая маленькая сила не способна даже сдвинуть с места эти два тела. Однако если взаимодействующие тела обладают гигантской массой – например, звезда и планета, то величина силы будет очень большой. Именно сила всемирного тяготения является тем архитектором, который управляет структурой нашей Вселенной. Именно сила всемирного тяготения определяет взаимное расположение галактик, звезд и планетных систем.

Мы все живем на теле с огромной массой – на планете Земля. Человек и любой другой предмет массы m притягиваются к Земле вследствие закона всемирного тяготения. Эту силу притяжения к Земле мы называем *силой тяжести* и рассчитываем по формуле $F = mg$, которая является ничем иным как следствием закона всемирного тяготения. Следовательно,

$$mg = G \frac{mM}{R^2}. \quad (2.7)$$

Здесь g – ускорение свободного падения, M – масса Земли, а $R = R_3 + h$ – расстояние от центра Земли до тела массы m (рис. 2.2).

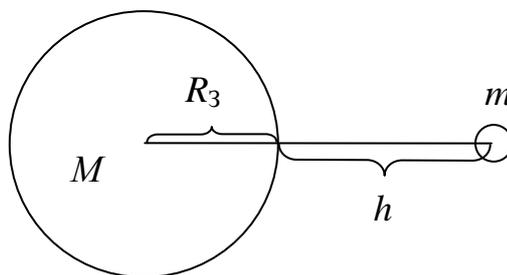


Рисунок 2.2 – Закон всемирного тяготения

³ Численное значение гравитационной постоянной $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{H \cdot M^2}{кг^2}$.

Из уравнения (2.7) находим, что

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{M}{(R_3 + h)^2}. \quad (2.8)$$

То есть, в общем случае ускорение свободного падения зависит от высоты тела над поверхностью Земли. Так как в большинстве практически важных случаев выполняется условие $h \ll R_3$ ($R_3 = 6,4 \cdot 10^6$ (м) = 6400 (км) !), то в формуле (2.8) можно пренебречь h , и формула для g примет вид

$$g = G \frac{M}{R_3^2}. \quad (2.9)$$

Все величины в формуле (2.9) – это константы. Следовательно, ускорение свободного падения не зависит от массы падающего тела, то есть для всех тел одинаково!⁴ После несложных вычислений получим $g = 9,81$ (м/с²). Направлена сила тяжести к центру Земли, именно это направление мы принимаем как вертикальное и определяем с помощью подвеса.

Электромагнитные взаимодействия. Электромагнитные взаимодействия в механических явлениях проявляются как силы упругости, которые появляются при деформации тел. *Деформация* – это изменение размеров или формы тела под воздействием других тел. Как известно из курса школьной физики, все тела состоят из электрических зарядов. При деформации тел изменяются расстояния между зарядами, а это, в свою очередь, приводит к нарушению равновесия между силами притяжения и отталкивания между зарядами. При растяжении тела преобладают силы притяжения между зарядами и тело «сопротивляется» растяжению, аналогично, при сжатии преобладают силы отталкивания.

⁴ Со времен древних греков бытовало утверждение, что более тяжелые тела падают на Землю быстрее, так как сильнее притягиваются к Земле. И, как пример, сравнивалось падение пушинки и камня. Галилей первый проверил это утверждение экспериментально, сбрасывая пушечные ядра разной величины со знаменитой Пизанской башни. Результат этого опыта известен каждому восьмикласснику.

В наиболее простых случаях, например деформации пружины, силу упругости можно рассчитать с помощью закона Гука:

$$F_x = -kx, \quad (2.10)$$

где x – смещение конца пружины из положения равновесия. Знак “–” показывает, что направление силы обратно направлению смещения. Коэффициент k называется *жесткостью* и определяется экспериментально. Рассмотрим некоторые проявления сил упругости.

Силы реакции опоры и натяжения подвеса. Рассмотрим тело на опоре или подвесе (рис. 2.3).

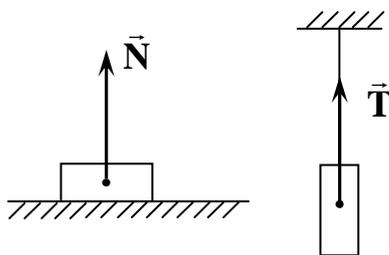


Рисунок 2.3 – Силы реакции опоры и натяжения подвеса

Как мы уже знаем, на наше тело действует сила тяжести $F = mg$, под действием которой тело стремится двигаться к центру Земли. При этом «стремлении» двигаться тело деформирует опору или подвес. В результате деформации появляется сила упругости, действующая на тело. В случае тела на опоре эту силу называют *силой реакции опоры*, а в случае тела на подвесе – *силой натяжения подвеса*.

Вес тела. *Весом тела* называют силу, с которой тело действует на опору или подвес. При взаимодействии тела с опорой или подвесом деформируется и само тело, что приводит к появлению силы упругости, действующей на опору или подвес.

Силы веса и реакции опоры связаны между собой согласно третьему закону Ньютона: $\vec{P} = \vec{N}$. Аналогичное равенство $\vec{P} = \vec{T}$ имеет место и для тела на подвесе. Вес тела очень часто путают с силой тяжести из-за того, что в случае неподвижного тела эти силы оказываются равными по величине. Но это две разные силы: сила тяжести является гравитационной силой

(взаимодействуют тело и Земля), в то время как вес тела – это сила упругости (взаимодействуют тело и опора). Сила тяжести действует на тело, а вес – на опору (или подвес), на которой (-ом) находится это тело. Кроме того, вес тела оказывается зависящим от условий, в которых находится тело, в частности, он зависит от ускорения, с которым движется рассматриваемое тело (рис. 2.4).

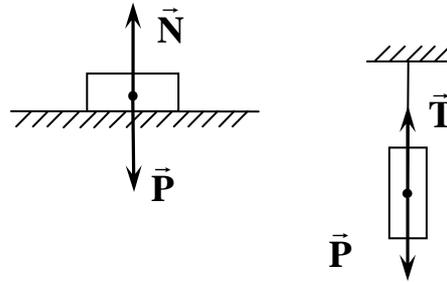


Рисунок 2.4 – Вес тела

И ещё одна сила, с которой имеют дело в механике – *сила трения*. Мы будем иметь дело с *внешним трением* – это трение между соприкасающимися поверхностями движущихся относительно друг друга тел. Сила трения тоже сводится к взаимодействию между атомами двух тел в местах контакта соприкасающихся тел, то есть, в конечном счёте, – к силам электромагнитного происхождения. Трение между поверхностями двух тел при отсутствии прослойки газа или жидкости между ними называется сухим трением. Сухое трение ещё делят на *трение скольжения* и *трения качения*. Последнее обычно много меньше первого. Различают трение скольжения и *трение покоя*. Сила трения покоя обычно меньше силы трения скольжения. Сила трения скольжения описывается выражением

$$F_{\text{тр.}} = \mu N, \quad (2.11)$$

где N – сила нормального давления, которая прижимает трущиеся поверхности друг к другу, μ – коэффициент трения. Сила трения всегда направлена противоположно вектору скорости.

ЛЕКЦИЯ 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

3.1 Импульс. Центр масс системы материальных точек. Полный импульс системы материальных точек

Импульсом (количеством движения) материальной точки (тела) называется вектор, равный произведению массы материальной точки (тела) на её скорость:

$$\vec{P} = m \vec{v}. \quad (3.1)$$

Посмотрим, чем определяется изменение импульса. Для этого найдем производную по времени выражения (3.1). В классической механике $m = const$, и тогда производная по времени от (3.1) будет равна

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \vec{F}, \text{ или } \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.2)$$

Скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на неё силе. Выражение (3.2) представляет собой другую форму записи второго закона Ньютона. Перепишем это уравнение в виде

$$d(m \vec{v}) = \vec{F} dt. \quad (3.3)$$

Физическая величина, равная $\vec{F} dt$, называется *импульсом силы* за время её действия dt . Таким образом, *изменение импульса материальной точки за время dt равно импульсу результирующей силы, действующей на материальную точку за тот же промежуток времени.*

Рассмотрим теперь механическую систему, состоящую из нескольких материальных точек (тел). *Центром инерции, или центром масс* системы материальных точек, называют такую точку C , радиус-вектор которой определяется выражением

$$\vec{\mathbf{r}}_C = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{\mathbf{r}}_i. \quad (3.4)$$

Здесь m_i , $\vec{\mathbf{r}}_i$ – масса и радиус-вектор i -й точки системы, $m = \sum_{i=1}^N m_i$ – общая масса всей системы и N – число материальных точек, входящих в состав системы. Соответственно, координаты точки C рассчитываются по формулам:

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m} \sum_i m_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{m} \sum_i m_i z_i.$$

Найдем скорость центра инерции:

$$\vec{\mathbf{v}}_C = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \frac{\vec{\mathbf{P}}}{m}. \quad (3.5)$$

Здесь $\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{P}}$ – векторная сумма импульсов всех материальных точек системы, которая называется *импульсом системы* материальных точек. Из выражения (3.5) следует, что

$$\vec{\mathbf{P}} = m \vec{\mathbf{v}}_C. \quad (3.6)$$

То есть, *импульс системы материальных точек равен произведению массы всей системы на скорость её центра масс.*

3.2 Теорема о движении центра масс механической системы

Тела, не входящие в состав рассматриваемой системы, называются *внешними*, а силы, действующие со стороны этих тел, называются *внешними силами*. Соответственно, силы, действующие между телами, входя-

щими в состав рассматриваемой системы, называются *внутренними*. Тогда на каждую точку, входящую в состав рассматриваемой системы, могут действовать внешние силы $\vec{F}_i^{\text{внеш.}}$ и силы \vec{F}_{ik} , действующие между частицами системы, т.е. силы внутренние. Запишем уравнение второго закона Ньютона для каждого тела рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) &= \vec{F}_1^{\text{внеш.}} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1N}, \\ \frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) &= \vec{F}_2^{\text{внеш.}} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2N}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}(m_N \vec{v}_N) &= \vec{F}_N^{\text{внеш.}} + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \dots + \vec{F}_{N,N-1}. \end{aligned}$$

Почленно сложим эти уравнения и получим:

$$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\text{внеш.}} + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{N-1,N} + \vec{F}_{N,N-1}). \quad (3.7)$$

Слагаемые, заключенные в скобки в уравнении (3.7), представляют собой сумму сил взаимодействия тел с номерами i и k . На основании 3-го закона Ньютона суммы в скобках равны 0. Тогда получим, что

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\text{внеш.}}. \quad (3.8)$$

Слева в (3.8) стоит скорость изменения полного импульса системы, а сумму в правой части (3.8) называют *главным вектором внешних сил*, или *результатирующей внешних сил*:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{внеш.}}.$$

С учётом сделанных замечаний, вместо выражения (3.8) можно записать:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.9)$$

Таким образом, получили обобщение 2 закона Ньютона на произвольную механическую систему: *скорость изменения импульса всей системы равна главному вектору внешних сил, действующих на систему.* В проекциях на оси системы координат:

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dP_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dP_z}{dt} = F_z, \quad (3.10)$$

причём $P_x = \sum_i m_i v_{xi}$, $P_y = \sum_i m_i v_{yi}$, $P_z = \sum_i m_i v_{zi}$. Согласно уравнению (3.6)

$\vec{P} = m\vec{v}_C$, и выражение (3.9) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_C) = m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F},$$

или, с учётом того, что $\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt}$,

$$m\vec{a}_C = \vec{F}. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) составляет содержание основного закона динамики твёрдого тела: *произведение массы тела на ускорение его центра масс равно результирующей силе, действующей на тело.* Если рассматривается система из нескольких тел, то из уравнения (3.11) следует, что *центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и на которую действует результирующая внешних сил, приложенных к системе.* Последнее утверждение носит название *теоремы о движении центра масс.*

3.3 Закон сохранения импульса

Механическую систему называют *замкнутой*, если на неё не действуют внешние силы. Вообще-то говоря, замкнутых систем в природе не бывает, но если внутренние силы в системе во много раз превышают внешние, то такую систему приближённо можно считать замкнутой. Например, при выстреле из орудия силы взаимодействия между снарядом и орудием во много раз превышают все остальные силы, действующие на снаряд и орудие, поэтому систему “орудие-снаряд” можно считать замкнутой. Для замкнутой системы главный вектор внешних сил равен нулю $\vec{F} \equiv 0$, и уравнение (3.9) принимает вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0,$$

а, следовательно,

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = const. \quad (3.12)$$

Таким образом, мы пришли к закону сохранения импульса, который гласит, что *импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени*. С другой стороны,

$$\vec{P} = m \vec{v}_C = const, \quad (3.13)$$

или при любых процессах, происходящих в замкнутой системе, скорость её центра масс (центра инерции) остаётся неизменной.

Закон сохранения импульса является одним из основных законов природы. Мы получили его как следствие из законов Ньютона. Однако область применения закона сохранения импульса гораздо шире, чем область применения законов Ньютона. Так, закон сохранения импульса справедлив и в микромире, где законы Ньютона неприменимы. В теоретической физике доказывается, что этот фундаментальный закон природы является следствием *однородности пространства*. Однородность пространства означает, что параллельный перенос

замкнутой системы не отражается на физических свойствах системы и законах её движения.

Иногда бывает, что $\vec{F} \neq 0$ и, соответственно, $\vec{P} \neq const$, но если проекция результирующего вектора внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция импульса на эту же ось не изменяется с течением времени. В этом случае говорят о *законе сохранения проекции импульса*, т.е. если $\frac{dP_x}{dt} = 0$, то $P_x = const$.

3.4 Момент импульса. Основное уравнение динамики вращательного движения. Закон сохранения момента импульса

Мы уже отмечали аналогию между законами поступательного и вращательного движений, когда рассматривали кинематику. Но эта аналогия распространяется и на динамику. Так, аналогом импульса для вращательного движения служит величина, которая называется *моментом импульса*.

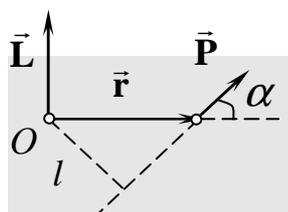


Рисунок 3.1 – Момент импульса частицы относительно точки O

Моментом импульса частицы относительно некоторой точки O называют вектор \vec{L} , равный векторному произведению радиус-вектора, проведенного из точки O в точку приложения импульса, на импульс (рис. 3.1):

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{P}], L = r \cdot P \cdot \sin \alpha = l \cdot P, \quad (3.14)$$

где величина $l = r \cdot \sin \alpha$ и называется плечом вектора \vec{P} относительно точки O .

Выясним, какая физическая величина определяет изменение вектора момента импульса. Для этого найдем производную по времени от вектора \vec{L} :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{P}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{P} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{P}}{dt} \right] = [\vec{v}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (3.15)$$

Первое слагаемое в уравнении (3.15) тождественно равно нулю как векторное произведение двух коллинеарных векторов. Второе слагаемое в (3.15) называется *моментом силы*, и это есть векторное произведение радиус-вектора, проведенного в точку приложения силы, на эту силу (рис. 3.2):

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (3.16)$$

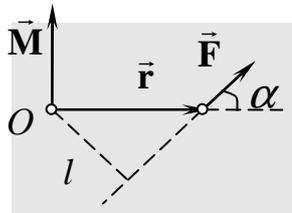


Рисунок 3.2 – Момент силы частицы относительно точки O

В результате для скорости изменения момента импульса мы получим так называемое *уравнение моментов*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (3.17)$$

Производная по времени от момента импульса частицы относительно некоторой точки O равна моменту равнодействующей силы относительно той же точки O .

Теперь рассмотрим систему частиц. Сразу же отметим, что момент импульса – величина аддитивная. Это значит, что момент импульса системы частиц относительно некоторой точки O равен сумме моментов импульса отдельных частиц системы относительно той же точки O : $L = \sum_i L_i$. Тогда для систе-

мы частиц можно записать:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt}. \quad (3.18)$$

Теперь учтём, что на каждую i – ю частицу системы действуют как внутренние силы $\vec{\mathbf{F}}_{ik}$ со стороны других частиц системы, так и результирующая внешних сил $\vec{\mathbf{F}}_i^{\text{внеш.}}$. Тогда изменение момента импульса каждой частицы системы описывается уравнением

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_k \vec{\mathbf{M}}_{ik} + \vec{\mathbf{M}}_i^{\text{внеш.}}, \quad (3.19)$$

где $\sum_k \vec{\mathbf{M}}_{ik} = \sum_k [\vec{\mathbf{r}}_i, \vec{\mathbf{F}}_{ik}]$, $\vec{\mathbf{M}}_i^{\text{внеш.}} = [\vec{\mathbf{r}}_i, \vec{\mathbf{F}}_i^{\text{внеш.}}]$.

Изменение результирующего момента импульса всей системы будет, очевидно, равно

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{\mathbf{M}}_{ik} + \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{M}}_i^{\text{внеш.}}. \quad (3.20)$$

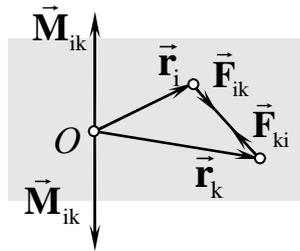


Рисунок 3.3 – Моменты сил $\vec{\mathbf{M}}_{ik}$ и $\vec{\mathbf{M}}_{ki}$ частицы относительно точки O

Покажем, что двойная сумма в выражении (3.20) тождественно равна нулю (рис. 3.3). В самом деле:

$$\vec{\mathbf{M}}_{ki} = [\vec{\mathbf{r}}_k, \vec{\mathbf{F}}_{ki}] = [(\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{r}}_{ik}), (-\vec{\mathbf{F}}_{ik})] = -[\vec{\mathbf{r}}_i, \vec{\mathbf{F}}_{ik}] = -\vec{\mathbf{M}}_{ik}. \quad (3.21)$$

А так как моменты в двойной сумме встречаются попарно, то они взаимно уничтожаются. В выражении (3.21) мы учли, что на основании 3-го закона Ньютона $F_{jk} = -F_{kj}$. В выражении (3.20) заменим сумму моментов внешних сил результирующим, или главным моментом внешних сил относительно той же точки O : $\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{\text{внеш.}}$. Тогда, в результате всех преобразований получим основной закон динамики для тела, вращающегося относительно неподвижной точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (3.22)$$

Скорость изменения момента импульса системы относительно неподвижной точки равна результирующему моменту относительно той же точки всех внешних сил, действующих на систему. Если система замкнута, т.е. $\vec{M} = 0$, то $\vec{L} = \text{const}$. Или момент импульса замкнутой системы не изменяется с течением времени. Закон сохранения момента импульса является одним из фундаментальных законов природы. Его область применения гораздо шире, чем область применения классической механики, в рамках которой мы его получили. В теоретической физике доказывается, что он является следствием изотропии пространства. Изотропия пространства означает, что в пространстве нет выделенных направлений. Другими словами, поворот механической системы как целого на произвольный угол не изменяет свойства системы и законы её движения.

ЛЕКЦИЯ 4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

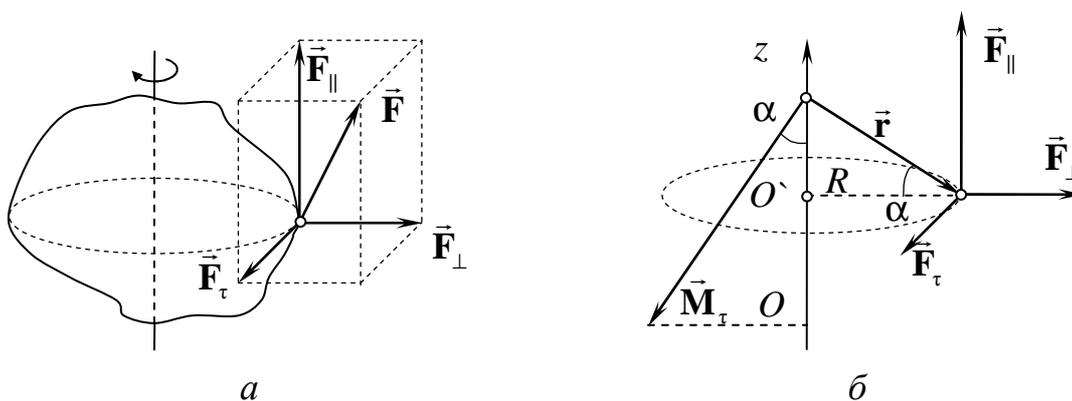
4.1 Действие момента сил на твердое тело

На прошлой лекции мы ввели величину, которую называли моментом силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Когда сила приложена к одной из точек твердого тела, вектор \vec{M} характеризует способность силы вращать тело вокруг точки O , относительно которой он вычисляется. Поэтому момент силы называют также вращающим моментом. Если тело не закреплено и может вращаться вокруг точки O произвольным образом, то под действием силы тело повернется вокруг оси, совпадающей по направлению с вектором \vec{M} .

Рассмотрим случай, когда твердое тело может вращаться вокруг неподвижной оси (рис. 4.1). Пусть на тело действует произвольно направленная сила \vec{F} . Найдем проекцию момента этой силы на ось вращения, которую обозначим как ось z . Для этого разложим силу на три составляющие (рис. 4.1, а), и рассмотрим, какое действие эти силы оказывают на тело.



а – действующие силы на произвольную точку тела; б – вращательный момент \vec{M}_τ

Рисунок 4.1 – Вращение тела вокруг неподвижной оси

Из рисунка ясно, что сила \vec{F}_\perp изгибает ось вращения, сила \vec{F}_\square приводит к скольжению тела вдоль оси, и только действие силы \vec{F}_τ приводит к вращательному движению вокруг оси. Прямым вычислением нетрудно показать, что

$$M_z = [\vec{r} \times \vec{F}]_z = (\vec{M}_\tau)_z = M_\tau \cos \alpha = r F_\tau \cos \alpha = R F_\tau. \quad (4.1)$$

Следовательно, вращение вокруг неподвижной оси (оси z) может вызывать только сила \vec{F}_τ , причем она тем успешнее осуществит этот поворот, чем больше ее плечо R относительно оси вращения (рис. 4.1, б). Отметим, что величина проекции момента сил на ось вращения не зависит от выбора точки O (точки, относительно которой вычисляется полный вращающий момент \vec{M}).

4.2 Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела

Если спроектировать уравнение моментов для системы материальных точек $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ на выделенное направление (ось вращения), вдоль которого направим координатную ось Oz , то получим основной закон динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (4.2)$$

Скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси вращения равна результирующему моменту относительно этой же оси всех внешних сил, действующих на тело.

Как находить проекцию момента внешних сил на ось вращения, мы уже знаем (формула 4.1), найдём теперь выражение для момента импульса L_z тела, вращающегося относительно неподвижной оси вращения Oz с уг-

ловой скоростью ω . Нам известна формула для момента импульса материальной точки:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{P}], \quad (4.3)$$

и мы знаем, что полный момент импульса системы материальных точек равен

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i, \quad (4.4)$$

где \vec{L}_i – момент импульса i -й материальной точки.

Для того чтобы воспользоваться формулами (4.3...4.4), мысленно разобьем тело на достаточно малые области, такие, чтобы скорости всех точек такой области можно было считать постоянными.

Представим радиус-вектор i -й материальной точки в виде (рис. 4.2)

$$\vec{r}_i = \vec{a}_i + \vec{b}_i.$$

Вектор \vec{a}_i перпендикулярен оси вращения, а вектор \vec{b}_i – параллелен ей.

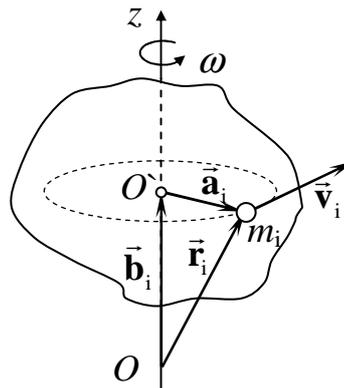


Рисунок 4.2 – Радиус-вектор i -й материальной точки

Тогда момент импульса i -й материальной точки запишется в виде

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = [\vec{b}_i, m_i \vec{v}_i] + [\vec{a}_i, m_i \vec{v}_i]. \quad (4.5)$$

Первое слагаемое в выражении (4.5) даёт вектор, перпендикулярный оси вращения (см. рис. 4.2), и его проекция на ось Oz равна нулю. Второе слагаемое даёт вектор, направленный вдоль оси вращения. Таким образом, с учётом того, что $\vec{v}_i \perp \vec{a}_i$, можно записать:

$$L_{iz} = a_i m_i v_i = \omega m_i a_i^2. \quad (4.6)$$

В формуле (4.6) мы учли, что линейная скорость материальной точки v_i связана с угловой скоростью вращения формулой $v_i = \omega a_i$ (a_i – радиус окружности, по которой движется i -я точка твердого тела). Угловая скорость вращения ω – одинакова для всех точек вращающегося тела, тогда на основании формулы (4.4) сразу получаем выражение для проекции момента импульса тела на ось вращения:

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i a_i^2 = \omega J_z. \quad (4.7)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$J_z = \sum_i m_i a_i^2. \quad (4.8)$$

Физическая величина, описываемая формулой (4.8), называется *моментом инерции тела относительно оси вращения*. Теперь основной закон динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (4.2), запишется в виде

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon. \quad (4.9)$$

Если момент внешних сил отсутствует ($M_z = 0$), то

$$\omega J_z = \text{const.} \quad (4.10)$$

Выражение (4.10) представляет собой частный случай закона сохранения момента импульса, записанного для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

4.3 Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

Момент инерции – очень важная характеристика вращающегося тела. Из основного закона динамики вращающегося тела (4.9) видно, что момент инерции описывает инертность тела во вращательном движении. Как и при поступательном движении, вращающееся тело “сопротивляется” изменению своей угловой скорости при действии момента сил⁵. Следовательно, *момент инерции есть мера инертности твердого тела при вращательном движении.*

Отметим некоторые свойства момента инерции, отличающие его от массы. Во-первых, момент инерции зависит от геометрических размеров тела. Это свойство момента инерции демонстрирует фигурист на льду, когда, прижимая руки к телу, он уменьшает свой момент инерции, что приводит к увеличению скорости вращения спортсмена в соответствии с законом сохранения момента импульса (4.10). Во-вторых, значение момента инерции зависит от выбора оси, относительно которой он вычисляется.

Момент инерции представляет собой, таким образом, важную величину, и нужно уметь определять её относительно произвольной оси вращения. Отметим, что в определении момента инерции (4.8) вычисления будут тем более точными, чем на большее число материальных точек можно разбить сумму в выражении (4.8). В пределе это означает переход к интегрированию:

$$J = \sum_i m_i a_i^2 \Rightarrow J_z = \int r^2 dm. \quad (4.11)$$

В формуле (4.11) r – это расстояние от выделенного элемента тела массой dm до оси вращения.

⁵ Точно так же, как и для поступательного движения, можно говорить о явлении инерции при вращательном движении – это явление есть результат закона сохранения момента импульса (4.10).

В качестве примера вычислим момент инерции однородного диска радиуса R относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Выделим на диске кольцевой слой толщиной dr . Все точки этого слоя будут находиться на одинаковом расстоянии r от оси вращения, и выражение под знаком интеграла запишется в виде

$$r^2 dm = r^2 \rho dV = r^2 \rho b 2\pi r dr. \quad (4.12)$$

где ρ – плотность материала диска, b – толщина диска (рис. 4.3).

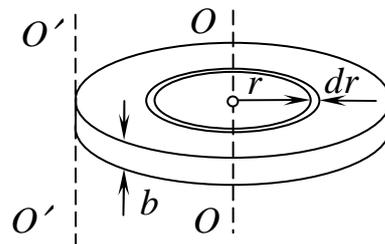


Рисунок 4.3 – Однородный диск радиуса R

Подставим выражение (4.12) в выражение (4.11) и проинтегрируем по r . В результате получим:

$$J_z = 2\pi b \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi b \rho \frac{R^4}{4} = \pi b \rho \frac{R^4}{2}. \quad (4.13)$$

Теперь учтём в выражении (4.13), что масса всего диска равна произведению плотности ρ на объём диска $b\pi R^2$, и окончательно получим:

$$J_z = \frac{mR^2}{2}. \quad (4.14)$$

Вычислить момент инерции тела относительно произвольной оси, даже не проходящей через тело, позволяет *теорема Штейнера*, согласно которой *момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, параллельной данной и*

проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$J = J_0 + ma^2. \quad (4.15)$$

Вычислим момент инерции того же диска относительно оси $O'O'$, проходящей через образующую диска (рис. 4.3). В соответствии с теоремой Штейнера, момент инерции диска относительно оси $O'O'$ будет равен

$$J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Отметим, что прямое вычисление момента инерции диска относительно оси $O'O'$ по формуле (4.11) представляет собой более трудную задачу, чем та, которую мы решили.

4.4 Свободные оси. Понятие о гироскопе

Теорема Штейнера показывает, какое значение имеет момент инерции относительно осей, проходящих через центр масс тел. Особенно важны так называемые *свободные оси* или *оси свободного вращения*. Это оси, которые сохраняют своё положение в пространстве при отсутствии внешних сил, действующих на тело.

Оказывается, что для любого тела существуют, по меньшей мере, три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела, которые являются свободными осями. Их ещё называют *главными осями инерции тела*.

Например, для параллелепипеда главными осями инерции являются три оси, которые проходят через центры противоположных граней (рис. 4.4).

Свойство свободных осей сохранять своё положение в пространстве используется в *гироскопах*.

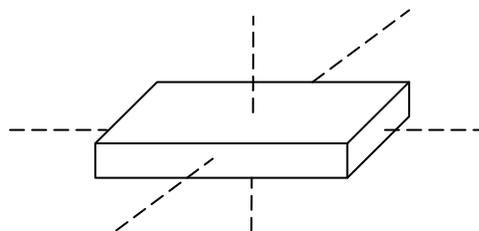


Рисунок 4.4 – Параллелепипед с главными осями инерции

Гироскопы представляют собой массивные однородные тела, которые с большой угловой скоростью вращаются вокруг своей оси симметрии, которая является свободной осью. Сила тяжести не может изменить ориентацию оси вращения, так как сила приложена к центру масс, и момент силы относительно центра масс равен нулю. Таким образом, как ни вращать гироскоп, направление его оси вращения останется неизменным в пространстве. Гироскопы используются в навигации. Все слышали, вероятно, о гироскопе, гирогоризонте и других навигационных устройствах, в которых используется неизменность ориентации в пространстве оси вращения гироскопа. Более подробно о гироскопе и *гироскопическом эффекте* можно узнать из “Курса физики” Т.И.Трофимовой (§20).

ЛЕКЦИЯ 5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

5.1 Механическая работа. Мощность

Пусть частица под действием силы \vec{F} движется по некоторой траектории из точки 1 в положение 2 (рис. 5.1). В общем случае сила \vec{F} может изменяться как по величине, так и по направлению.

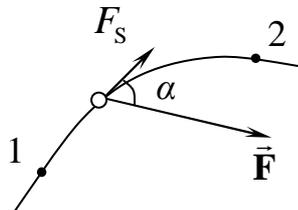


Рисунок 5.1 – Движение частицы под действием силы \vec{F}

Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r}$, в пределах которого силу \vec{F} можно считать постоянной. *Элементарной работой dA силы \vec{F} на перемещении $d\vec{r}$ называют величину, равную скалярному произведению $\vec{F} d\vec{r}$:*

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}), \text{ или } dA = F \cos \alpha dr = F_s ds, \quad (5.1)$$

где $F_s = F \cos \alpha$ – проекция силы \vec{F} на направление движения, $ds = |d\vec{r}|$. Работа dA – величина алгебраическая. Если угол $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то работа положительная, если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то работа отрицательная. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ работа тождественно равна нулю. Работа измеряется в *джоулях (Дж)*. Размерность работы – $[Дж] = Н \cdot м$. Работа, совершаемая на конечном пути s , равна сумме элементарных работ на отдельных участках ds или интегралу

$$A = \int_0^s F_s ds . \quad (5.2)$$

Работе можно придать наглядный геометрический смысл. Если сила F_s задана как функция пройденного пути s , то работа на этом пути равна площади ограниченной кривой $F_s(s)$ в координатах s и F_s (рис. 5.2).

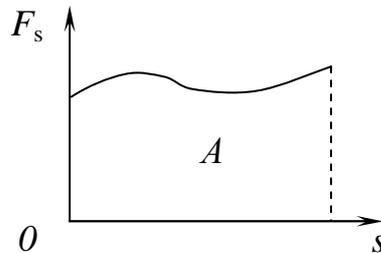


Рисунок 5.2 – Работа

Если на частицу одновременно действуют несколько сил, то работа результирующей силы равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил на том же перемещении:

$$A = \int \vec{F} d\vec{r} = \int (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) d\vec{r} = \int \vec{F}_1 d\vec{r} + \int \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots = A_1 + A_2 + \dots$$

Величина, характеризующая скорость выполнения работы силой \vec{F} , и равная работе, произведенной в единицу времени, называется мощностью:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v} . \quad (5.3)$$

Величина мощности в системе СИ измеряется в *ваттах* ($Вт$), и $[Вт] = Дж/с$. Мы также знаем ещё одну единицу измерения мощности – лошадиная сила: $1 л.с. = 736 Вт$.

5.2 Кинетическая энергия. Теорема о кинетической энергии

Распишем выражение для работы (5.1), воспользовавшись вторым законом Ньютона:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \vec{v} d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (5.4)$$

Физическая величина, равная:

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad (5.5)$$

называется кинетической энергией. Отметим, что в разных инерциальных системах отсчета скорость тела может быть разной. Следовательно, кинетическая энергия зависит от выбора инерциальной системы отсчёта. Здесь же отметим, что кинетическая энергия – величина аддитивная. Из формулы (5.4) следует, что элементарная работа равнодействующей всех сил равна полному дифференциалу от кинетической энергии. Если в результате действия силы \vec{F} скорость тела изменилась от v_1 до v_2 , то, интегрируя выражение (5.4), получаем:

$$A = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1. \quad (5.6)$$

Или, приращение кинетической энергии частицы на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, под действием которых совершалось это перемещение.

Формулу (5.6) называют *теоремой о кинетической энергии*.⁶ Из фор-

⁶ Подчеркнем еще раз, что в этой теореме речь идет о работе именно равнодействующей всех сил, действующих на тело, так как при выводе формулы (5.5) мы воспользовались вторым законом Ньютона.

мулы (5.6) следует, что кинетическая энергия измеряется, как и механическая работа, в джоулях.

Теперь рассмотрим тело массы m , которое вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси. Кинетическую энергию найдём, просуммировав кинетические энергии малых частичек массы m_i , на которые разобьем тело:

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 \rho_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i \rho_i^2 = \frac{J \omega^2}{2}.$$

Здесь ρ_i – расстояние от i -й частицы до оси вращения. Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела

$$T = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (5.7)$$

И опять отметим подобие формул для поступательного и вращательного движений – на это раз кинетических энергий поступательного (5.5) и вращательного движений (5.7).

Теперь можно легко найти выражение для работы равнодействующей всех сил при вращении тела вокруг неподвижной оси. На основании теоремы о кинетической энергии (5.6) имеем:

$$dA = dT = d \left(\frac{J \omega^2}{2} \right) = J \omega d\omega = J \omega \varepsilon dt = J \varepsilon d\varphi = M d\varphi. \quad (5.8)$$

Здесь мы воспользовались основным законом динамики вращательного движения (4.9) $M = J \varepsilon$, а также учли, что $d\omega = \varepsilon dt$. Из формулы (5.8) следует, что при вращательном движении работа совершается моментом сил.

В случае плоского сложного движения кинетическая энергия тела будет состоять из двух частей – кинетической энергии поступательного движения его центра масс и кинетической энергии вращения вокруг центра масс с угловой скоростью ω :

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega_c^2}{2}. \quad (5.9)$$

5.3 Консервативные силы. Потенциальная энергия

В современном естествознании принято считать, что взаимодействие тел осуществляется посредством полей. Полем сил называют область пространства, в каждой точке которого на частицу действует сила, закономерно изменяющаяся от точки к точке. Другими словами, если в каждой точке пространства на материальную точку действуют силы, то говорят, что в пространстве действует силовое поле. Пример силового поля – поле силы тяжести. Пусть тело перемещается из точки 1 в точку 2 (рис. 5.3).

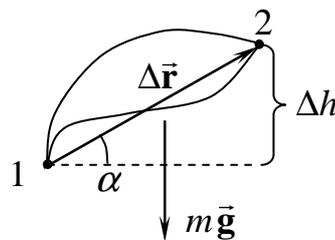


Рисунок 5.3 – Движение точки в поле силы тяжести

Вычислим работу, совершенную силой тяжести при этом перемещении. Согласно определению механической работы (5.1) мы можем записать:

$$A = \int_1^2 m\vec{g} d\vec{r}. \quad (5.10)$$

Теперь воспользуемся тем обстоятельством, что вблизи поверхности Земли сила тяжести постоянна: $m\vec{g} = const$. Постоянную величину можно вынести из-под знака интеграла, и выражение (5.10) для работы запишется так:

$$A = m\bar{g} \int_1^2 d\vec{r}. \quad (5.11)$$

Интеграл в выражении (5.11) представляет собой сумму элементарных перемещений $d\vec{r}$, которые совершает тело при своем движении из точки 1 в точку 2. Очевидно, что сумма всех элементарных перемещений будет равна $\Delta\vec{r}$. Следовательно, выражение (5.11) принимает вид

$$\begin{aligned} A &= m\bar{g} \Delta\vec{r} = mg |\Delta\vec{r}| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -mg |\Delta\vec{r}| \sin\alpha = \\ &= -mg\Delta h = -mg(h_2 - h_1), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где h_1 – высота, на которой находится тело над поверхностью Земли в начальном положении 1, а h_2 – высота в конечном положении 2. А теперь самое главное. При вычислении работы силы тяжести мы ничего не говорили о траектории, по которой движется наше тело. Очевидно, что для любой траектории, ведущей из точки 1 в точку 2, вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ будет один и тот же, и, согласно выражению (5.12), для всех траекторий работа силы тяжести будет иметь одно и то же значение. То есть работа силы тяжести не зависит от формы траектории, а определяются только начальной и конечной высотой тела над поверхностью Земли.

*Силы, работа которых не зависит от формы траектории, по которой частица переходит из одного положения в другое, а определяется только начальным и конечным положением частицы, называются консервативными.*⁷ В этом случае каждому положению частицы в силовом поле можно сопоставить некоторую функцию $U(\vec{r})$, такую, что разность значений этой функции в точках 1 и 2 определяет работу сил поля по перемещению частицы между этими точками:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (5.13)$$

⁷ Другое название этих сил – потенциальные. Мы будем использовать эти термины как синонимы.

Функцию U называют *потенциальной энергией* частицы. Сравнивая формулы (5.12) и (5.13), мы приходим к выводу, что потенциальная энергия тела в поле силы тяжести описывается формулой

$$U = mgh, \quad (5.14)$$

где h – высота, на которой находится тело над поверхностью Земли.

К консервативным силам относятся и силы упругости. Найдем потенциальную энергию упругой деформации. Сила упругости (см. лекцию 2, формула (2.10)) равна

$$F = -kx. \quad (5.15)$$

Здесь x – смещение конца пружины из положения равновесия. Если мы будем растягивать или сжимать пружину, то, на основании 3-го закона Ньютона, работа внешней силы, противоположно направленной силе упругости пружины, будет равна

$$A = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (5.16)$$

Эта работа внешней силы была затрачена на увеличение потенциальной энергии пружины. Если считать, что энергия пружины в недеформированном состоянии равна 0, то тогда:

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (5.17)$$

Потенциальную энергию часто называют энергией взаимодействия. Действительно, в первом примере взаимодействуют тело и Земля, в случае пружины взаимодействуют отдельные части одного тела (напомним, что силы упругости появляются при изменении взаимного расположения заряженных частиц, из которых состоит тело).

Еще один пример консервативных сил – *центральные силы*. Так называют силы, величина которых зависит только от расстояния между двумя частицами, а направлены они вдоль линии, соединяющей частицы. Центральными являются сила всемирного тяготения и сила Кулона (см. лекцию 2, формулы (2.5) и (2.6)). Для центральных сил элементарная работа $\vec{F}d\vec{r}$ будет равна

$$dA = \vec{F}(r)d\vec{r} = F(r)dr.$$

Соответственно, работа, совершаемая на конечном пути s , равна

$$A = \int \vec{F}d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr. \quad (5.18)$$

Из выражения (5.18) ясно, что полная работа зависит от начального и конечного расстояний от частицы до силового центра и не зависит от формы траектории. Подставим в формулу (5.18) выражение для силы всемирного тяготения (2.5):

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (5.19)$$

Знак “–” перед интегралом отражает тот факт, что направления силы и перемещения противоположны, если начало координат помещено на силовом центре. Из выражений (5.22) и (5.16) можно сделать вывод, что потенциальная энергия сил тяготения равна

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (5.20)$$

И ещё несколько слов о потенциальной энергии. Согласно выражению (5.13), работа консервативной силы будет равна убыли потенциальной энергии:

$$\vec{\mathbf{F}}d\vec{\mathbf{r}} = -dU . \quad (5.21)$$

Расписывая скалярное произведение, получим:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU . \quad (5.22)$$

Если перемещение частицы происходило только вдоль x , в то время как y -я и z -я координаты оставались постоянными, то $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$. Здесь знак ∂ означает частную производную по координате, которая берётся, когда остальные координаты остаются неизменными. Аналогичным образом получим компоненты сил F_y и F_z . Таким образом:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} . \quad (5.23)$$

В соответствии с выражением (5.23) мы имеем 3 проекции силы на оси координат. Если умножим их на соответствующие единичные вектора и сложим, то получим вектор силы:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{\mathbf{i}} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{\mathbf{j}} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{\mathbf{k}} , \quad (5.24)$$

или в сокращённом виде

$$\vec{\mathbf{F}} = -gradU . \quad (5.25)$$

Здесь подразумевается, что

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{\mathbf{k}} .$$

В соответствии с выражением (5.25) $gradU$ является вектором (читается “градиент U ”), хотя функция U является скаляром. Наряду с выражением

(5.25) используется обозначение ∇U : $gradU \equiv \nabla U$, где ∇ (набла) – дифференциальный *оператор*, также называемый оператором Гамильтона, есть:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Отметим, что *grad* какой-либо скалярной функции, как это доказывается в высшей математике, определяет направление наиболее быстрого роста этой функции. Если это свойство градиента скалярной функции применить к потенциальной энергии, то из уравнения (5.25) следует, что консервативные силы всегда направлены в сторону наиболее быстрого уменьшения потенциальной энергии.⁸

5.4 Закон сохранения механической энергии

Пусть на частицу действуют только консервативные силы. Тогда, с одной стороны, работа по перемещению частицы из точки 1 в точку 2 определяется выражением (5.13) $A_{12} = U_1 - U_2$, а с другой стороны, эта работа определяет изменение кинетической энергии (5.6) $A_{12} = T_1 - T_2$. Следовательно,

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2, \text{ или } T_1 + U_1 = T_2 + U_2. \quad (5.26)$$

Таким образом, мы получили, что величина $E = T + U$, для частицы, которая находится в поле действия консервативных сил, остаётся постоянной:

$$E = T + U = const. \quad (5.27)$$

⁸ Иллюстрацией этого утверждения является положение русел рек. Они всегда находятся в местах с наименьшей для данной местности потенциальной энергией поля силы тяжести.

Физическая величина E , равная сумме кинетической и потенциальной энергий частицы, называется *полной механической энергией частицы*. В соответствии с выражением (5.13) можно сказать, что работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии частицы в поле консервативных сил, при этом эта работа, согласно выражению (5.6), идет на увеличение кинетической энергии частицы:

$$dT = -dU.$$

Пусть, кроме потенциальных сил, результирующая которых равна F , на частицу действует также и неконсервативная сила F^* . Тогда при переходе частицы из положения 1 в положение 2 над ней будет совершаться работа:

$$A_{12} = \int F ds + \int F^* ds = A_{\text{конс}} + A^*.$$

В соответствии с теоремой о приращении кинетической энергии $A_{12} = dT$, и, таким образом:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A^*,$$

или

$$E_2 - E_1 = A^*. \tag{5.28}$$

Таким образом, мы получили, что работа неконсервативных сил затрачивается на приращение полной механической энергии частицы.

Рассмотрим теперь систему частиц (тел), между которыми действуют консервативные силы и эта система находится во внешнем силовом поле консервативных сил⁹, и, кроме того, пусть на частицы системы действуют неконсервативные силы. Тогда, как мы уже знаем, приращение кинетиче-

⁹ Например, электрически заряженные тела, которые находятся во внешнем электрическом поле.

ской энергии каждой частицы равно алгебраической сумме работ, которые совершают все силы:

$$dT_i = (dA_{\text{вн.}}^{\text{пот.}} + dA_{\text{внеш.}}^{\text{пот.}} + dA_i^*), \quad (5.29)$$

где индекс i обозначает номер частицы. С учётом того, что работу потенциальных сил можно представить как изменение потенциальной энергии частицы в соответствующем силовом поле:

$$dA_{\text{вн.}}^{\text{пот.}} = -dU_{\text{вн.}}, \quad dA_{\text{внеш.}}^{\text{пот.}} = -dU_{\text{внеш.}}$$

Выражение (5.29) можно переписать в виде

$$(dT + dU_{\text{вн.}} + dU_{\text{внеш.}})_i = dA_i^*. \quad (5.30)$$

Введём понятие полной механической энергии системы как суммы кинетической и потенциальной энергий всех частиц системы:

$$E = \sum_i (T + U_{\text{вн.}} + U_{\text{внеш.}})_i.$$

Теперь, суммируя выражение (5.30) по всем частицам рассматриваемой системы, мы получим:

$$dE = \sum_i dA_i^*. \quad (5.31)$$

То есть, как и для одной частицы, полная механическая энергия системы частиц изменяется за счет работы только неконсервативных сил, которые действуют на отдельные частицы системы. Если неконсервативные силы отсутствуют, то из выражения (5.31) получаем:

$$E = \sum_i (T + U_{\text{вн.}} + U_{\text{внеш.}}) = \text{const}. \quad (5.32)$$

Следовательно, *полная механическая энергия системы тел, на которые действуют только консервативные силы, остаётся постоянной*. Это и есть **закон сохранения полной механической энергии**.

В теоретической физике доказывается, что закон сохранения полной механической энергии является следствием *однородности времени*. Однородность времени означает независимость физических законов от начала отсчёта времени, т.е. говорит нам о равнозначности всех моментов времени.

Особый случай неконсервативных сил представляют силы трения. Работа сил трения всегда отрицательна, так как силы трения направлены против вектора скорости:

$$dA_{\text{тр.}} = \vec{F}_{\text{тр.}} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_{\text{тр.}} \cdot \vec{v} dt = -F_{\text{тр.}} v dt < 0. \quad (5.33)$$

Согласно уравнению (5.33) полная механическая энергия системы при наличии трения уменьшается. Такой процесс называется *диссипацией*, или рассеянием энергии, а *силы, которые приводят к потере механической энергии, называются диссипативными*.

Кроме рассмотренной нами полной механической энергии в природе существуют другие виды энергии. Как вы знаете из повседневного опыта, при трении тела нагреваются, а это значит, что полная механическая энергия переходит во внутреннюю энергию («тепловую» энергию) взаимодействующих тел. В этом смысле уравнение:

$$\Delta E = A^*,$$

также является законом сохранения энергии, если известно, в какие формы переходит механическая энергия системы. Для энергии, как единой характеристики различных форм движения материи, справедлив *закон сохранения энергии*, который может быть сформулирован следующим образом: *энергия никогда не уменьшается и не увеличивается, не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой*. Но это уже вопросы другого раздела физики – термодинамики, которую мы будем изучать позже.

5.5 Потенциальная яма. Условия равновесия механической системы

Пусть на частицу действуют только консервативные силы. Как мы знаем, в этом случае полная механическая энергия частицы сохраняется:

$$E = T + U = \text{const.}$$

Поскольку кинетическая энергия по своему определению всегда положительна, то это значит, что полная механическая энергия не может быть меньше, чем потенциальная:

$$E \geq U. \quad (5.34)$$

Так как потенциальная энергия зависит только от координат частицы, то соотношение (5.34) определяет область пространства, в пределах которой может находиться частица с заданной энергией E . Частица не может проникнуть в области, где $U > E$, поскольку потенциальная энергия не может быть больше полной энергии.

В качестве примера рассмотрим частицу, способную совершать только одномерное движение, например вдоль оси Ox . Тогда зависимость потенциальной энергии от координат сведётся к зависимости от x : $U = U(x)$ (рис. 5.4).

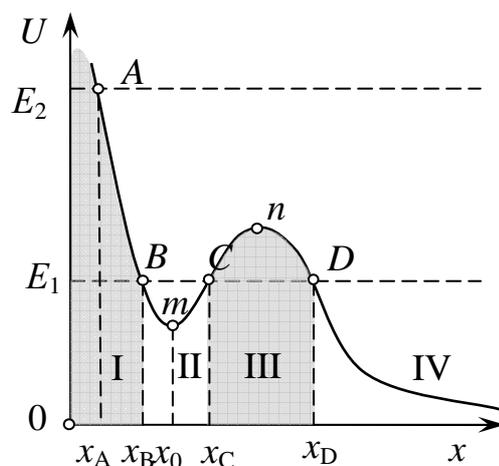


Рисунок 5.4 – Потенциальная энергия частицы

Прямая E_1 на этом рисунке соответствует движению частицы с полной энергией, равной E_1 . Из рисунка 5.4 видно, что частица может находиться только в области II или в области IV, и не может находиться в областях I и III, в которых её потенциальная энергия больше, чем полная. Если, например, частица находится в области II, то она не может попасть в область IV, поскольку для этого ей придётся преодолеть потенциальный барьер CnD , что невозможно без сообщения частице дополнительной механической энергии.

Таким образом, частица может совершать только *финитное*, т.е. ограниченное в пределах области II движение. Частица как бы заперта в области II в пределах потенциальной ямы BmC и может двигаться только между *точками поворота* x_B и x_C . Если же частица находится в области IV, то она имеет возможность уйти на бесконечность, если она движется вправо. В этом случае движение называется *инфинитным*. Если же частица движется влево, то, достигнув точки поворота x_D , она повернёт назад и снова будет уходить на бесконечность. Если полная энергия частицы равна E_2 , то доступной для движения будет вся область $x > x_A$.

Ещё один интересный пример изображён на рисунке 5.5. Здесь частица обладает отрицательной потенциальной энергией, которая обращается в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$. Движение будет финитным, если полная энергия отрицательна – частица может совершать только колебательное движение между точками x_A и x_B в пределах потенциальной ямы AmB . И движение будет инфинитным, если полная энергия частицы положительная – в этом случае частице доступна область от $-\infty$ до $+\infty$.

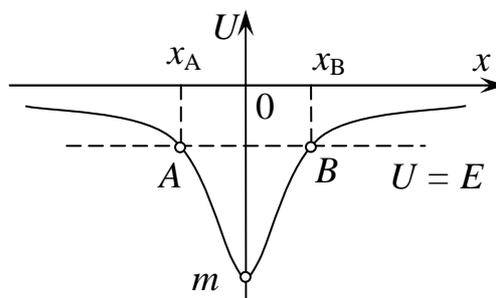


Рисунок 5.5 – Потенциальная яма

При помощи потенциальной энергии можно сформулировать условие равновесия механической системы. Как мы уже знаем, кинетическая энергия может увеличиваться только за счёт уменьшения потенциальной энергии. Следовательно, чтобы система находилась в равновесии, её потенциальная энергия должна быть минимальной. Чтобы найти минимум потенциальной энергии, необходимо исследовать функцию $U(x)$ на экстремум. Как известно, для этого нужно первую производную по координате приравнять нулю;

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (5.35)$$

При координате x_0 , соответствующей условию (5.35), силы, действующие на частицу, в соответствии с выражением (5.23), равны нулю. Но, как мы знаем, условие (5.35) также отвечает максимуму функции $U(x)$. И это тоже будет точка равновесия механической системы. Однако это будет точка неустойчивого равновесия, в отличие от точки, соответствующей x_0 (см. рис. 5.5).

Если систему вывести из положения равновесия, соответствующего минимуму потенциальной энергии, то возникают силы, которые стремятся вернуть систему в положение равновесия. И, наоборот, при выведении системы из положения неустойчивого равновесия в ней появляются силы, которые будут удалять систему от положения неустойчивого равновесия. Таким образом, можно сформулировать следующий принцип минимума потенциальной энергии: *в замкнутой системе самопроизвольно протекают только те процессы, при которых потенциальная энергия системы стремится к минимуму.*

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ 6. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

6.1 Статистический и термодинамический методы

Изучая механику, мы с вами не затрагивали вопросов, как устроены различные тела, какие процессы в них протекают, чем обусловлены превращения этих тел, которые мы наблюдаем на опыте. Все эти вопросы рассматриваются в разделах физики, которые называются термодинамика и молекулярная физика. Молекулярная физика и термодинамика взаимно дополняют друг друга, отличаясь различными методами исследования.

Молекулярная физика изучает строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений. В основе этого подхода лежат три положения, которые сформулированы как результат обобщения многочисленных опытных данных. Основные положения молекулярно-кинетической теории (МКТ) сводятся к следующему:

- 1 Все тела состоят из атомов или молекул.
- 2 Атомы (молекулы) хаотически движутся. (Интенсивность этого движения зависит от температуры, поэтому хаотическое движение атомов (молекул) называют тепловым.)
- 3 Атомы (молекулы) взаимодействуют между собой с силами притяжения и отталкивания.

Основная задача молекулярной физики – объяснение наблюдаемых на опыте свойств макроскопических тел как суммарный результат действия большого количества молекул. Поскольку молекул очень много, то МКТ использует статистический метод. В рамках этого метода описание систем, состоящих из большого числа частиц, проводится с помощью усредненных по всему ансамблю характеристик, таких как средняя скорость движения, средняя энергия и т.д. Необходимость использования усредненных величин обусловлена не только тем, что невозможно проследить за движением отдельной молекулы, но и тем, что большая совокупность молекул обнаружи-

вает новые свойства, отсутствующие у одной отдельно взятой молекулы. Например, не имеет смысла говорить о давлении, оказываемом одной молекулой на стенки сосуда. В то же время большое количество молекул, образующих газ, характеризуется давлением, которое оказывает этот газ на стенки сосуда. Можно сказать, что здесь мы наблюдаем проявление известного философского закона о переходе количества в новое качество.

Термодинамика изучает общие свойства макроскопических тел, находящихся в состоянии равновесия, и процессы перехода между этими состояниями безотносительно к внутреннему микроскопическому строению вещества. Благодаря этому область применения термодинамики значительно шире, чем молекулярно-кинетической теории. Термодинамика основана на двух опытных законах, которые называются *началами термодинамики*.

Совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией, как между собой, так и окружающей средой, называют *термодинамической системой*. Описание свойств макроскопических тел в термодинамике ведется с помощью термодинамических параметров, таких как давление P , объём V , температура T и т.д. Термодинамические параметры состояния характеризуют систему в положении равновесия, когда с течением времени эти параметры не изменяются. Такое состояние системы называется *равновесным*. Равновесное состояние системы можно изобразить точкой на графике, по осям которого отложены параметры системы, например давление и объём. Если система не находится в равновесии, то какой-либо из термодинамических параметров не определен для всей системы. Например, если быстро сжать газ в цилиндре с поршнем, то в разных точках цилиндра давление будет разным – большим вблизи поршня и меньшим у противоположной стенки цилиндра. Такое состояние уже нельзя изобразить точкой на диаграмме. Однако с течением времени система вернется в положение равновесия, и её снова можно будет описывать параметрами состояния. Переход системы из неравновесного состояния в равновесное называется *релаксацией*.

Всякий процесс, т.е. переход системы из одного равновесного состояния в другое, связан с нарушением равновесия системы. Однако если переход между состояниями делать очень медленно, то можно считать, что в каждый момент времени система находится в равновесном состоянии. Такой процесс называется *равновесным* или *квазистатическим*. Равновесный

процесс можно провести в обратном направлении, причём система будет проходить через те же равновесные состояния. Поэтому равновесные процессы называются *обратимыми*.

6.2 Масса и размеры молекул

Массу молекул принято выражать в относительных молекулярных единицах. За стандарт принята масса изотопа углерода ^{12}C . Считается, что молекулярная масса углерода равна 12 атомным единицам. Тогда *молекулярной массой вещества* называется отношение массы молекулы этого вещества к $1/12$ массы атома углерода ^{12}C . Таким образом, молекулярная масса – величина безразмерная. Количество вещества, в котором содержится количество молекул, равное числу атомов в $0,012$ (кг) изотопа углерода ^{12}C , называется *молем вещества*. Число молекул, которое содержится в 1 (моле), называется *числом Авогадро*, и оно равно: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ (моль $^{-1}$). Массу одного моля называют *молярной массой* M , это величина размерная – (кг/моль). Например, молярная масса кислорода (O_2) равна $0,032$ (кг/моль), углерода – $0,012$ (кг/моль). Очевидно, что молярная масса равна произведению числа Авогадро на массу одной молекулы m_0 :

$$M = N_A m_0. \quad (6.1)$$

Из соотношения (6.1) можно рассчитать массу молекулы данного вещества. Например, молярная масса воды (H_2O) равна $2 \cdot 0,001 + 0,016 = 0,018$ (кг/моль), следовательно, масса одной молекулы воды

$$\frac{0,018}{6,022 \cdot 10^{23}} = 3 \cdot 10^{-26} \text{ (кг)}.$$

Оценку размеров молекулы проведем на примере жидкостей. Приближенную величину объема одной молекулы можно получить, разделив объем моля (молярный объем) какой-либо жидкости на число молекул в моле N_A . Численную оценку удобно провести на примере воды, так как плотность воды 1000 (кг/м 3). Молярный объем воды $0,018/1000 = 18 \cdot 10^{-6}$ (м 3). Следовательно, на одну молекулу воды приходится объем, равный $18 \cdot 10^{-6} / 6,022 \cdot 10^{23} = 30 \cdot 10^{-30}$ (м 3). Линейные размеры молекулы воды

приблизительно равны $\sqrt[3]{30 \cdot 10^{-30}} \approx 3 \cdot 10^{-10}$ (м). Такой же порядок величины имеют размеры молекул и других веществ.

6.3 Опытные законы идеального газа

Идеальный газ – это идеализированная модель реальных газов, согласно которой:

- 1 Общий объем всех молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, в котором находится газ.
- 2 Взаимодействие молекул между собой и стенками сосуда сводится к абсолютно упругим столкновениям.

Из первого предположения следует, что расстояния между молекулами намного превышают размеры молекул, и поэтому молекулы можно рассматривать как материальные точки. С другой стороны, при больших расстояниях между молекулами можно пренебречь силами притяжения и отталкивания между молекулами. Это обстоятельство оправдывает второе предположение. Напомним, что упругим называется удар, при котором механическая энергия соударяющихся тел остаётся постоянной. Оказывается, что очень многие реальные газы при нормальных условиях (комнатной температуре и атмосферном давлении) можно считать идеальными.

Термодинамическими параметрами, описывающими состояние данной массы газа, являются давление P , объём V и температура T ¹⁰. Эти параметры состояния идеального газа связаны *уравнением состояния* идеального газа, которое называют *уравнением Менделеева – Клапейрона*:

$$PV = \frac{m}{M}RT. \quad (6.2)$$

В уравнении (6.2) m – масса газа, M – его молярная масса. Таким образом, отношение $m/M = \nu$ равно числу молей газа, $R = 8,31$ (Дж/моль·К) – универсальная газовая постоянная. Универсальная газовая постоянная рав-

¹⁰ Мы всегда будем пользоваться термодинамической температурой T , которая измеряется в градусах Кельвина. Соотношение между термодинамической шкалой и шкалой в градусах Цельсия: $T = 273,15 + t$.

на произведению двух констант – числа Авогадро и постоянной Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ (Дж/К). Таким образом, выражение (6.2) можно переписать в виде

$$PV = \nu N_A kT .$$

Произведение $\nu N_A = N$ равно числу молекул, которое содержится в массе газа m . С учётом этого:

$$PV = NkT . \quad (6.3)$$

Теперь разделим обе части уравнения (6.3) на V . С учётом того, что $N/V = n$, где n – *концентрация молекул*, т.е. число молекул в единице объёма, вместо выражения (6.3) получим:

$$P = nkT . \quad (6.4)$$

Уравнения (6.2), (6.3), (6.4) также называют *уравнениями состояния идеального газа*, записанными в разных формах.

Уравнение Менделеева – Клапейрона является обобщением опытных законов, описывающих поведение идеального газа в различных изопроцессах. Рассмотрим эти газовые законы. Перепишем уравнение (6.2) в виде:

$$\frac{PV}{T} = \frac{m}{M} R . \quad (6.5)$$

Из уравнения (6.5) следует, что при постоянной массе газа выполняется соотношение:

$$\frac{PV}{T} = const , \quad (6.6)$$

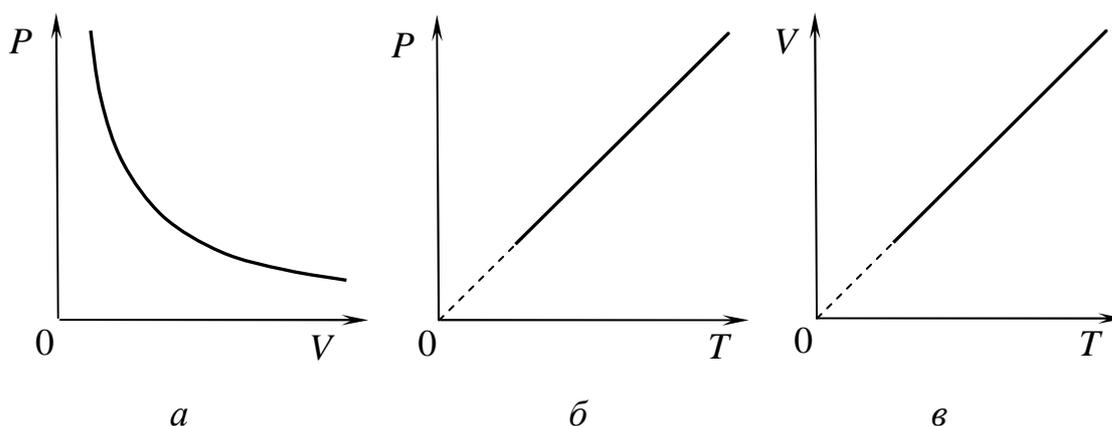
которое называют *объединённым газовым законом*.

1 *Изотермический процесс: $T = const, m = const.$*

Из уравнения (6.5) получаем закон Бойля-Мариотта:

$$PV = const,$$

для постоянной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная (рис. 6.1, а).



а – изотермический процесс; б – изохорный процесс; в – изобарный процесс

Рисунок 6.1 – Изопроцессы

2 *Изохорный процесс: $V = const, m = const.$*

При этих условиях выполняется закон Гей-Люссака:

$$\frac{P}{T} = const, \text{ или } P = const \cdot T,$$

давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой (рис. 6.1, б).

3 *Изобарный процесс: $P = const, m = const.$*

В этом случае из выражения (6.6) получаем закон Шарля:

$$\frac{V}{T} = const, \text{ или } V = const \cdot T,$$

объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой (рис. 6.1, в).

Для смеси газов выполняется *закон Дальтона*: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в неё газов:

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_i,$$

где P_i – парциальное давление i -й компоненты смеси. Парциальное давление – это давление, которое производил бы один газ при том же объёме и температуре, если бы других газов не было. Парциальное давление можно найти из уравнения Менделеева – Клапейрона (6.2).

6.4 Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Рассмотрим идеальный одноатомный газ и попытаемся определить давление, которое оказывает этот газ на стенки сосуда с идеально отражающими стенками (рис. 6.2).

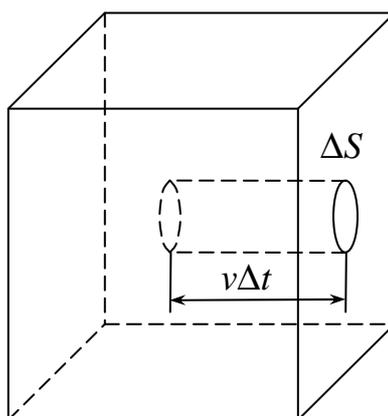


Рисунок 6.2 – Ёмкость с идеально отражающими стенками

То есть будем считать, что удары молекул о стенки – абсолютно упругие. Предположим также, что все молекулы движутся вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени вдоль каждого направления движется $1/3$ от общего числа всех молекул, причём половина из этого числа (т.е. $1/6$) движется по направлению к стенке, а вторая половина – от стенки. За время Δt площадки ΔS достигнут только те молекулы, которые находятся в прямом цилиндре объёмом $V = \Delta S v \Delta t$. Число таких молекул будет равно $N_V = (1/6) n \Delta S v \Delta t$. Каждая молекула при

ударе о стенку передаст ей импульс $\Delta K_1 = m_0 v - (-m_0 v) = 2m_0 v$. Общий импульс ΔK , переданный площадке ΔS за время Δt , будет равен произведению ΔK_1 – импульса, полученного при ударе одной молекулы, на число ударов молекул о стенку. Это число ударов равно N_v – числу молекул, достигших площадки ΔS за время Δt . Следовательно,

$$\Delta K = \Delta K_1 N_v = \frac{1}{3} m_0 n v^2 \Delta S \Delta t.$$

Импульс, передаваемый стенке за единицу времени, согласно второму закону Ньютона, равен силе, действующей на эту площадку:

$$F = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{1}{3} n m_0 v^2 \Delta S. \quad (6.7)$$

После деления выражения (6.7) на площадь ΔS получим давление, которое оказывает газ на стенки сосуда:

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{1}{3} n m_0 v^2 \quad (6.8)$$

Полученное выражение (6.8) требует уточнения. В реальном газе молекулы движутся во всевозможных направлениях и с различными величинами скоростей. Эту разницу мы учтем, если в формулу (6.8) подставим среднее значение квадрата скорости:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2. \quad (6.9)$$

Введенную соотношением (6.9) скорость принято называть *средней квадратичной скоростью*. С учётом выражения (6.9) выражение для давления (6.8) примет вид

$$P = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2. \quad (6.10)$$

Выражение (6.10) называется *основным уравнением* молекулярно-кинетической теории газов. Это уравнение связывает макроскопический параметр – давление газа P – с характеристиками молекул. Отметим, что точный расчёт с учётом всевозможных направлений движения молекул также даёт ту же самую формулу.

6.5 Физический смысл термодинамической температуры

Умножим числитель и знаменатель выражения (6.10) на 2. В итоге получим:

$$P = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} n \langle E \rangle, \quad (6.11)$$

где $\langle E \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа. Уравнение (6.11), точно так же, как уравнение Менделеева – Клапейрона (6.4), описывает давление газа на стенки сосуда. Приравнявая правые части уравнений (6.4) и (6.11), находим, что

$$nkT = \frac{2}{3} n \langle E \rangle, \text{ или } \langle E \rangle = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (6.12)$$

Из выражения (6.2) получаем, что *абсолютная температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул*. Вот почему термодинамическая температура может принимать только положительные значения! Соответственно, температуру следовало бы измерять в джоулях. Но исторически сложилось так, что температура вошла в физику раньше энергии, и ее измеряют в градусах. Из уравнения (6.2) следует, что постоянная Больцмана – это размерный коэффициент, переводящий градусы в джоули.

Отметим, что энергия поступательного движения молекул зависит только от температуры и не зависит от массы молекулы. Выражение (6.12) позволяет оценить величину скорости теплового движения молекул. Из выражения (6.12) получаем, что

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Подставим в эту формулу массу молекулы воды $m = 3 \cdot 10^{-26}$ (кг) и температуру 373 (К)¹¹:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{3 \cdot 10^{-26}}} \approx 717 \text{ (м/с)}.$$

Типичные значения скорости теплового движения молекул – $10^2 \dots 10^3$ (м/с).

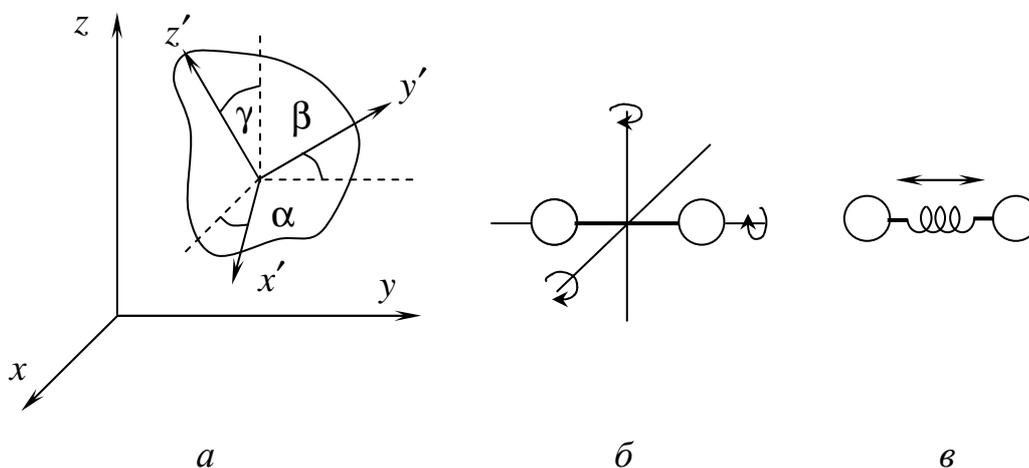
6.6 Средняя энергия теплового движения молекул

В модели идеального газа одноатомную молекулу рассматривают как материальную точку, которая одновременно может двигаться вдоль трех координат. В этом случае говорят, что молекула обладает тремя степенями свободы. Вообще, *степенями свободы называют минимальное число независимых координат, которыми можно задать положение тела в пространстве.*

Рассмотрим пример абсолютно твёрдого несимметричного тела. Оно имеет шесть степеней свободы: три из них описывают поступательное движение центра масс тела и три вращательных степени свободы, которые описывают вращение вокруг трех взаимно перпендикулярных осей (рис. 6.3, а). Если мы соединим две материальные точки жёсткой связью, то при вращении вокруг оси, проходящей через точки, положение такой системы в пространстве не изменится (рис. 6.3, б), т.е. число степеней свободы будет рав-

¹¹ Численное значение постоянной Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ (Дж / К).

ным пяти. Вообще, говорят, что любая жёсткая связь уменьшает число степеней свободы системы на единицу. Пусть теперь две материальные точки связаны не жёсткой связью, а упругой. В этом случае такая система имеет шесть степеней свободы: три поступательных, две вращательных и одну колебательную (рис. 6.3, в).



а – абсолютно твердое несимметричное тело; б – две материальные точки, связанные жесткой связью; в – две материальные точки, связанные упругой связью

Рисунок 6.3 – Степени свободы

В классической физике двухатомную молекулу рассматривают как две материальные точки, соединенные или жёсткой, или упругой связью. Тогда двухатомная молекула может обладать либо пятью степенями свободы (для жёсткой связи), либо шестью – при наличии упругой связи между молекулами. Но сколько бы степеней свободы не имело тело (молекула) – три из них всегда поступательные, и на них приходится энергия $\frac{3}{2}kT$.

В статистической физике доказывается закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Согласно этому закону *на каждую степень свободы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2}kT$* . Таким образом, средняя энергия теплового движения молекулы должна равняться:

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (6.16)$$

где полное число степеней свободы i определяется как

$$i = n_{\text{пос}} + n_{\text{вр}} + 2n_{\text{кол}}. \quad (6.17)$$

Двойка в выражении (6.17) отражает тот факт, что колебательная степень свободы имеет удвоенную энергетическую ёмкость. В то время как поступательные и вращательные степени свободы несут только кинетическую энергию, на колебательную степень свободы приходится и кинетическая и потенциальная энергии. Причём, как мы знаем, в случае колебаний средние значения этих энергий равны между собой. Следовательно, средняя энергия, приходящаяся на колебательную степень свободы, будет равна

$$\frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT.$$

ЛЕКЦИЯ 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ ПО СКОРОСТЯМ

7.1 Столкновения молекул и тепловое равновесие

При выводе основного уравнения МКТ мы пренебрегли столкновением молекул между собой и ввели среднюю квадратичную скорость. Тем самым мы заменили реальный закон распределения молекул по скоростям предположением, что у всех молекул одинаковые скорости движения. На самом деле это, конечно, не так. Даже в состоянии термодинамического равновесия молекулы имеют разные скорости хотя бы из-за столкновений друг с другом. Напомним, что равновесным состоянием называется такое состояние, в котором термодинамические параметры, характеризующие систему, имеют определённые значения, не изменяющиеся с течением времени. При более детальном рассмотрении равновесных состояний нам необходимо каким-то образом учитывать столкновения молекул между собой. Потому что как раз через столкновения молекул устанавливается равновесное значение термодинамических параметров системы. Например, если сосуд с газом, имеющим температуру T_1 , поставить на нагреватель, а затем снять с него, то по истечении некоторого времени мы обнаружим, что температура всего газа будет T_2 , хотя мы нагревали только дно сосуда. Причем $T_2 > T_1$. В результате столкновений молекул друг с другом в сосуде устанавливается новое равновесное состояние с температурой T_2 . Более «горячие» молекулы, которые обладают большей кинетической энергией, при столкновениях отдают избыток энергии другим, «холодным» молекулам. После серии столкновений среднее значение кинетической энергии молекул станет одинаковым во всем сосуде, а это и означает, что установилось новое равновесное состояние.

Чтобы доказать, что именно столкновения молекул между собой играют определяющую роль при установлении термодинамического равновесия, приведём следующий численный пример. При нормальном атмосферном давлении и комнатной температуре в 1 м^3 воздуха содержится около 10^{25} молекул. Среднее расстояние между молекулами по

порядку величины будет равно $l \approx \left(\frac{1}{10^{25}} \right)^{1/3} \sim 0,3 \cdot 10^{-8} \sim 10^{-8} (м)$. Это почти на 2 порядка больше размеров молекул и расстояний, на которых молекулы взаимодействуют между собой. Другими словами, воздух действительно можно считать идеальным газом. Подсчитаем теперь суммарную площадь всех молекул в 1 ($м^3$). Будем считать молекулы сферами с диаметром в $d \sim 10^{-10} (м)$. Тогда поверхность всех молекул, заключённых в одном кубометре воздуха, будет, очевидно, равна произведению поверхности шара πd^2 на число всех молекул $10^{25} (м^{-3})$: $10^{25} \cdot \pi \cdot 10^{-20} \approx \pi \cdot 10^5 (м^2)$. Другими словами, мы получили, что суммарная поверхность молекул в 100 000 раз больше, чем поверхность 1 ($м^3$)! Следовательно, молекулы сталкиваются между собой гораздо чаще, чем со стенками сосуда. И именно столкновения между молекулами играют определяющую роль при установлении равновесных состояний. Но при этом скорости у молекул будут самые разные. Теперь попытаемся найти распределение молекул по скоростям.

7.2 Понятие о функции распределения

Давайте теперь уточним задачу. А что мы понимаем под словами “распределение молекул по скоростям”? Очевидно, что мы не сможем точно указать, какие молекулы обладают теми или иными скоростями. Наверное, мы можем говорить об этом только с какой-то долей вероятности. Значит, давайте вначале поговорим о вероятностях. Поставим перед собой вопрос – сколько же молекул имеют скорости, лежащие в интервале от v до $v+dv$? Очевидно, что число таких молекул пропорционально общему числу молекул N в рассматриваемом объёме, величине интервала dv и будет некоторой функцией $f(v)$. Таким образом, искомое число может быть записано как

$$dN = Nf(v)dv. \quad (7.1)$$

Здесь $f(v)$ – функция распределения молекул по скоростям. Для выяснения физического смысла функции распределения, вспомним, что

$dP = \frac{dN}{N}$ есть, очевидно, вероятность того, что молекулы имеют скорость в интервале от v до $v+dv$. Тогда функция $f(v) = \frac{dP}{dv}$ будет называться *плотностью вероятности*, и это есть искомая функция распределения молекул по скоростям v . С помощью функции распределения можно определять любые средние характеристики для всего ансамбля молекул. Действительно, если нам нужно определить среднее значение некоторой величины a , зависящей от скорости (например, импульса), то для этого надо просто вычислить интеграл:

$$\langle a(v) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} a(v) f(v) dv. \quad (7.2)$$

В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(v) f(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} a(v) \frac{dN}{N dv} dv = \frac{1}{N} \int_0^N a(v) dN. \quad (7.3)$$

Последнее выражение в выражении (7.3) есть не что иное, как определение средней величины. И ещё, нам понадобится условие нормировки функции распределения. Из выражения (7.1) следует, что

$$\int_0^N dN = \int_{-\infty}^{+\infty} N f(v) dv, \text{ или } \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) dv = 1. \quad (7.4)$$

Говорят, что функция распределения нормирована на единицу. И это не удивительно, поскольку функция распределения, по определению, есть плотность вероятности. А вероятность достоверного события – найти частицу с определённой скоростью во всём интервале скоростей, равна 1.

7.3 Распределение Максвелла по направлениям скоростей

Теперь, когда мы определились, какую же величину будем искать, давайте воспользуемся довольно часто используемым в физике приёмом. Мы попытаемся “угадать” искомое распределение. А проверку того, что мы угадали правильно, мы получим, сравнивая результаты нашей теории с экспериментом.

Из чего мы должны исходить при нахождении искомого распределения? Оказывается, у нас есть 2 отправных момента:

- 1 Распределение молекул по скоростям должно быть симметричным относительно начала координат. Это следует из того, что в равновесном состоянии все направления в пространстве равноправны. Если бы это было не так, то был бы дрейф молекул – поток молекул в каком-либо одном направлении, связанный с переносом, например, энергии. В равновесном состоянии никаких потоков нет.
- 2 Исходя из того, что кинетическая энергия молекул, заключённых в любом сосуде, должна быть конечной, в искомом распределении не должно быть бесконечно большой скорости даже у одной молекулы.

Итак, предположим, что функция распределения молекул по проекциям скорости имеет вид

$$f(v_x) = Ae^{(-\beta v_x^2)}. \quad (7.5)$$

Действительно, такой вид функции распределения удовлетворяет двум нашим исходным требованиям:

- 1) эта функция – чётная относительно начала координат;
- 2) $f(v_x) \rightarrow 0$ при $v_x \rightarrow \infty$.

Теперь наша задача – определение коэффициентов A и β . Для определения коэффициента A воспользуемся условием нормировки (7.4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\beta v_x^2} dv_x = 1. \quad (7.6)$$

Сделаем замену переменных в интеграле:

$$\xi = \sqrt{\beta}v_x, \text{ и } dv_x = \frac{d\xi}{\sqrt{\beta}}. \quad (7.7)$$

Тогда вместо выражения (7.6) получим

$$\frac{A}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1. \quad (7.8)$$

В выражении (7.8) мы получили *табличный интеграл Пуассона*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}. \quad (7.9)$$

Подставим значение интеграла Пуассона в выражение (7.8):

$$A\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}. \quad (7.10)$$

Таким образом,

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{(-\beta v_x^2)}. \quad (7.11)$$

Аналогично можно получить, что

$$f(v_y) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{(-\beta v_y^2)}, \quad f(v_z) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{(-\beta v_z^2)}.$$

На основании теоремы о вероятности независимых событий¹² полная функция распределения имеет вид:

¹² Вероятность независимых событий равна произведению вероятностей каждого события в отдельности.

$$f(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}. \quad (7.12)$$

Для определения константы β с помощью функции распределения (7.12) вычислим среднее значение кинетической энергии, уже зная ответ.

А именно $\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT$. На основании формулы (7.2) мы можем записать,

что:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = \\ &= 3 \frac{m}{2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(v_y^2+v_z^2)} dv_y dv_z. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Выражение (7.13) представляет собой произведение трех одинаковых интегралов, поэтому в выражении (7.13) появляется множитель 3. Оставшееся выражение также равно произведению трех интегралов – по переменным v_x , v_y и v_z :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(v_y^2+v_z^2)} dv_y dv_z = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta v_x^2} dv_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_y^2} dv_y \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_z^2} dv_z. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Вычислим интеграл по переменной v_x . Снова сделаем замену переменных в выражении (7.7) и получим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta v_x^2} dv_x = \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta v_x^2 e^{-\beta v_x^2} \sqrt{\beta} dv_x = \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi \quad (7.15)$$

Последний интеграл в выражении (7.14) также является табличным (и тоже называется *интегралом Пуассона*):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \quad (7.16)$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\beta^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2\beta^{3/2}} \sqrt{\pi}. \quad (7.17)$$

Второй и третий интегралы мы фактически уже вычисляли – они отличаются от интеграла в выражении (7.6) только другим обозначением переменной интегрирования. Следовательно, каждый из этих интегралов равен $\sqrt{\pi/\beta}$. Теперь соберём весь наш тройной интеграл (7.14) и получим

$$\frac{3m}{2} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \frac{\pi^{1/2}}{2\beta^{3/2}} \frac{\pi}{\beta} = \frac{3m}{4\beta} = \frac{3}{2} kT \rightarrow \beta = \frac{m}{2kT}. \quad (7.18)$$

Окончательный вид функции распределения:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}. \quad (7.19)$$

Выражение (7.19) называется функцией *распределения Максвелла по направлениям скоростей*. Она имеет вид, показанный на рисунке 7.1.

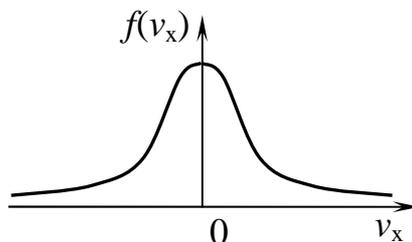


Рисунок 7.1 – Распределения Максвелла по направлениям скоростей

Напомним, что выражение $f(v_x) dv_x$ дает вероятность dP_{v_x} того, что проекция скорости молекулы на ось x лежит в пределах от v_x до $v_x + dv_x$. А если мы умножим $f(v_x) dv_x$ на число молекул в сосуде N , то получим dN_{v_x} — число молекул, имеющих проекцию скорости на ось x в пределах от v_x до $v_x + dv_x$. Так как движения в положительном и отрицательном направлениях оси Ox равновероятны, то эта функция симметрична. Кроме того, в условиях термодинамического равновесия в обоих направлениях оси Ox движется в среднем одинаковое количество молекул, а это значит, что среднее значение проекции скорости v_x , вычисленное для всех молекул, будет равно 0. Поэтому функция $f(v_x)$ имеет максимум при $v_x = 0$. Аналогично, умножив функцию (7.18) на $dv_x dv_y dv_z$ мы получаем вероятность того, что компоненты скорости молекулы лежат в пределах от dv_x, dv_y, dv_z до $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$. Число молекул, скорости которых находятся в указанном интервале, будет равно

$$dN|_{v_x, v_y, v_z} = N \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z. \quad (7.20)$$

ЛЕКЦИЯ 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

8.1 Распределение молекул по величине скорости и по кинетической энергии

Формулу Максвелла:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}, \quad (8.1)$$

можно преобразовать так, чтобы она давала ответ на вопрос, какова вероятность того, что молекулы имеют величину скорости от v_x до $v_x + dv_x$ независимо от направления движения молекулы. Это легко сделать, если ввести в рассмотрение воображаемое пространство скоростей (рис. 8.1).

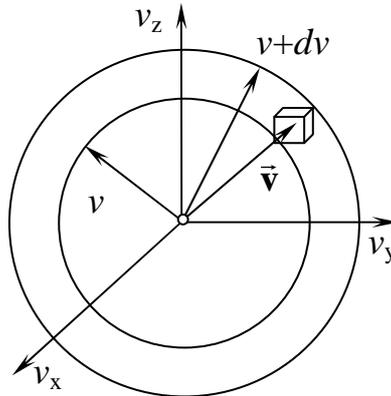


Рисунок 8.1 – Пространство скоростей

По осям системы координат в этом пространстве мы будем откладывать проекции вектора скорости v_x, v_y, v_z . Роль радиус-вектора в этом пространстве играет вектор скорости молекулы \vec{v} . Нетрудно сообразить, что каждой молекуле в реальном пространстве соответствует строго свой вектор скорости \vec{v} в пространстве скоростей. Как мы уже знаем, выражение $Nf(v)dv_x dv_y dv_z$ дает число молекул, проекции скорости которых лежат в

пределах от v_x, v_y, v_z до $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$. Применительно к пространству скоростей это выражение дает число векторов, концы которых попадают в прямоугольный параллелепипед объемом $dv_x dv_y dv_z$. Положение этого параллелепипеда в пространстве скоростей задается вектором $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (см. рис. 8.1). Одинаковым значениям модуля скорости v в пространстве скоростей соответствует сфера радиуса v , а значениям модуля $v + dv$ – сфера радиуса $v + dv$ (см. рис. 8.1). Теперь мы можем сказать, что число молекул, величина скорости которых лежит в интервале от v до $v + dv$, равно числу векторов \vec{v} , концы которых попадают в шаровой слой, ограниченный указанными сферами. Число таких векторов прямо пропорционально объему шарового слоя – $4\pi v^2 dv$. Следовательно, число молекул, величина скорости которых лежит в интервале от v до $v + dv$, описывается выражением

$$dN|_{dv} = N \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv, \quad (8.2)$$

а функция распределения по модулям скоростей имеет вид (рис 8.2)

$$F(v) = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2. \quad (8.3)$$

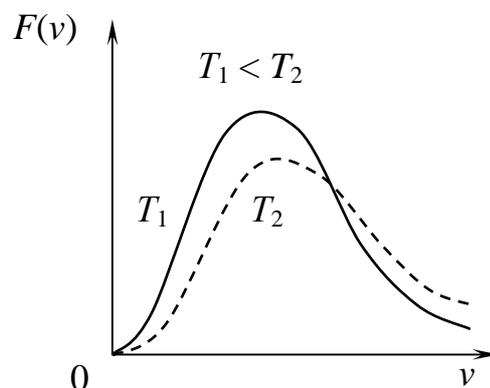


Рисунок 8.2 – График функции распределения по модулям скоростей

Площадь под кривой на этом рисунке равна 1 в соответствии с условием нормировки. При увеличении температуры максимум кривой на рисунке 8.2 уменьшается и смещается вправо, но площадь, ограниченная кривой, остаётся неизменной.

Исходя из распределения молекул по скоростям (8.3), можно перейти к распределению по энергиям кинетического движения молекул. Для этого в выражении (8.3) от переменной v нужно перейти к кинетической энергии поступательного движения молекулы $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Сделаем замену

$v = \left(\frac{2E_k}{m}\right)^{1/2}$ и $dv = \frac{dE_k}{\sqrt{2mE_k}}$ в формуле (8.3). В результате получим:

$$F(E_k) = A e^{-\frac{E_k}{kT}} \sqrt{E_k},$$

где $A = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2}$. И, соответственно, количество молекул, имеющих кинетическую энергию в интервале от E_k до $E_k + dE_k$, описывается выражением:

$$dN = NF(E_k)dE_k = NA e^{-\frac{E_k}{kT}} \sqrt{E_k} dE_k. \quad (8.4)$$

8.2 Барометрическая формула

До сих пор, рассматривая идеальный газ, мы не учитывали влияние поля силы тяжести. На Земле, однако, сила тяжести действует на любые тела, в том числе и на молекулы газа. И, как мы знаем, именно земное тяготение обуславливает изменение плотности газа с высотой над поверхностью Земли.

Рассмотрим вертикальный столб газа. Пусть у поверхности Земли, где $h=0$, давление равно P_0 , а на высоте h равно P . При изменении высоты на dh давление изменяется на dP . Давление газа на некоторой высоте равно, как

известно, весу вертикального столба газа, находящегося на этой высоте над площадью, равной единице. Поэтому dP равно разности весов столбов газа на высотах h и $h+dh$, то есть равно весу столба газа высотой dh с площадью основания, равной единице:

$$dP = -\rho g dh, \quad (8.5)$$

где ρ – плотность газа, а g – ускорение свободного падения. Знак минус отражает тот факт, что давление с увеличением высоты уменьшается. Плотность газа найдем из уравнения состояния идеального газа:

$$PV = \frac{m}{M} RT, \text{ получим, что}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}. \quad (8.6)$$

Подставим выражение (8.6) в выражение (8.5):

$$dP = -\frac{PM}{RT} g dh, \text{ или } \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dh.$$

Вообще-то говоря, температура изменяется с высотой. Если известен закон изменения температуры, то последнее соотношение можно проинтегрировать. Мы рассмотрим простой случай, когда $T = const$. Тогда, интегрируя последнее соотношение, получим, что:

$$\ln P = -\frac{Mgh}{RT} + \ln C, \quad (8.7)$$

где C – постоянная интегрирования. Тогда, потенцируя выражение (8.7), получим, что

$$P = Ce^{\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)}. \quad (8.8)$$

Константу C можно найти из условия, что при $h=0$ (на уровне моря) давление равно P_0 . Тогда окончательно получим:

$$P = P_0 e^{\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)}. \quad (8.9)$$

Выражение (8.9) называется *барометрической формулой*. Из этой формулы следует, что давление газа убывает с высотой по экспоненциальному закону. Этим законом пользуются для определения высоты над Землей путем измерения давления на данной высоте и на уровне моря (конечно, последнее достаточно измерить один раз). Приборы, служащие для измерения высоты горных вершин, полета самолета и т.д., представляют собой специальные барометры, шкала которых проградуирована в метрах. Для этих целей, однако, необходимо в уравнении (8.9) внести поправку на температуру, которая, как известно, понижается с ростом высоты, в то время как барометрическая формула получена нами в предположении постоянства температуры на всех высотах.

Уравнение состояния идеального газа можно, как мы знаем, записать в виде $P = nkT$. Подставим это выражение в выражение (8.9), в итоге получим (температуру по-прежнему считаем постоянной):

$$n(h) = n_0 e^{\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)}. \quad (8.10)$$

В выражении (8.10) $n(h)$ – концентрация молекул газа на высоте h , а n_0 – на уровне моря. Из формулы (8.10) следует, что причиной падения давления с ростом высоты над уровнем моря является уменьшение концентрации молекул газа. Причем концентрация молекул быстрее всего уменьшается для тяжелых газов (большие M).

8.3 Распределение Больцмана

Преобразуем показатель экспоненты в формуле (8.10), учтём, что

$$\frac{Mgh}{RT} = \frac{m N_A gh}{k N_A T} = \frac{mgh}{kT} = \frac{U}{kT}. \quad (8.11)$$

В выражении (8.11) $U=mgh$ – потенциальная энергия одной молекулы в поле силы тяжести. В результате вместо выражения (8.10) получим:

$$n = n_0 e^{\left(-\frac{U}{kT}\right)}. \quad (8.12)$$

Самое замечательное заключается в том, что формула (8.12) справедлива не только в случае потенциального поля силы тяжести, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии теплового хаотического движения. Формулу (8.12) называют *распределением Больцмана*.

Согласно формуле (8.12) количество молекул, попадающих в параллелепипед, расположенный в точке с координатами x, y, z и имеющий объем $dV=dx dy dz$, равно

$$dN_{x,y,z} = n_0 e^{\left(-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right)} dx dy dz.$$

Вероятность того, что частица имеет потенциальную энергию $U(x, y, z)$

$$W = A e^{\left(-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right)}. \quad (8.13)$$

В формуле (8.13) A – нормировочный множитель¹³. События, заключающиеся в том, что молекула имеет кинетическую энергию E_k и потенциальную энергию $U(x, y, z)$, являются статистически независимыми. Поэтому вероятность того, что частица обладает полной энергией $E=E_k+U(x, y, z)$, на основании выражений (8.4) и (8.13) может быть записана в виде

¹³ Напомним, что функция распределения нормируется так, чтобы сумма вероятностей всех возможных событий равнялась единице (См. лекцию 7).

$$W(E) = Ae^{\left(\frac{E_{\text{к}} + U(x, y, z)}{kT}\right)} = Ae^{\left(\frac{E}{kT}\right)}. \quad (8.14)$$

Подчеркнем, что в формуле (8.14), которую также называют распределением Больцмана, E – это *полная энергия* частицы, соответственно, формула (8.14) описывает распределение частиц по энергии. В форме (8.14) распределение Больцмана имеет универсальный характер – оно применимо и для описания квантовых систем. В этом случае полная энергия частицы может принимать только дискретный ряд значений: E_1, E_2, \dots , как это имеет место, например, для энергии атома. В этом случае распределение Больцмана имеет вид

$$N_i = Ae^{\left(\frac{E_i}{kT}\right)}. \quad (8.15)$$

где N_i – число частиц, имеющих энергию E_i , A – нормировочный множитель, который находится из условия

$$\sum_i N_i = A \sum_i e^{\left(\frac{E_i}{kT}\right)} = N, \quad (8.16)$$

где N – полное число частиц в рассматриваемой системе. Выражая постоянную A из уравнения (8.16), получаем окончательное выражение распределения Больцмана для случая дискретных значений энергии:

$$N_i = \frac{Ne^{\left(\frac{E_i}{kT}\right)}}{\sum_i e^{\left(\frac{E_i}{kT}\right)}}.$$

ЛЕКЦИЯ 9. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

9.1 Внутренняя энергия

Под *внутренней энергией тела* понимают сумму кинетической энергии хаотического движения молекул и потенциальной энергии взаимодействия молекул, составляющих это тело. При вычислении внутренней энергии не должны учитываться кинетическая энергия движения всего тела и потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле. Также во внутреннюю энергию не входит внутриатомная энергия.

Внутренняя энергия системы тел складывается из суммы внутренних энергий каждого из тел в отдельности и энергии межмолекулярного взаимодействия между телами системы. Для макроскопических тел количество молекул на поверхностях, через которые происходит взаимодействие тел, намного меньше числа молекул внутри объема этих тел. Поэтому энергией взаимодействия можно пренебречь и считать, что внутренняя энергия системы тел равна сумме внутренних энергий каждого из тел. Таким образом, внутренняя энергия системы – аддитивная функция.

Расчет внутренней энергии произвольного тела является очень сложной задачей, которую удастся решить только для некоторых простых частных случаев. Это связано, с одной стороны, с неполнотой наших знаний о силах межмолекулярного взаимодействия, а с другой стороны – с огромным количеством частиц, из которых состоят реальные тела. Очень просто вычисляется внутренняя энергия идеального газа. Напомним, что для идеального газа можно пренебречь потенциальной энергией взаимодействия молекул. Поэтому внутренняя энергия идеального газа складывается из кинетических энергий отдельных молекул. Средняя кинетическая энергия одной молекулы равна (формула (6.16)):

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i – число степеней свободы молекулы, k – постоянная Больцмана, T – температура газа. Если в газе содержится N молекул, то внутренняя

энергия идеального газа будет равна

$$U = N \langle E \rangle = \frac{i}{2} N k T = \frac{i}{2} \frac{m}{M} N_A k T = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R T. \quad (9.1)$$

При записи формулы (9.1) мы воспользовались равенством

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M},$$

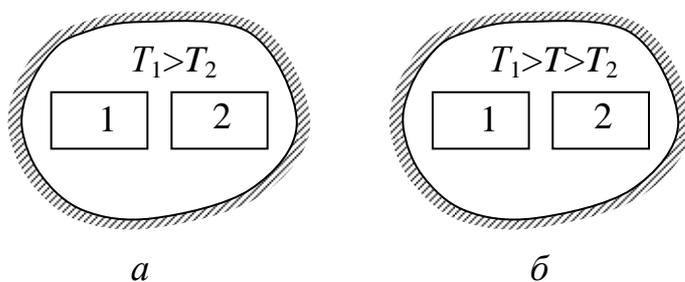
и учли, что универсальная газовая постоянная равна $R = N_A k$. Из формулы (9.1) следует, что внутренняя энергия идеального газа определяется только одним термодинамическим параметром – температурой T . В общем случае внутренняя энергия зависит от всех термодинамических параметров, характеризующих состояние тела. Но из формулы (9.1) следует один практический вывод. Так как кинетической энергией теплового движения обладают молекулы произвольного тела, а температура есть мера кинетической энергии теплового движения молекул, то признаком изменения внутренней энергии для любого тела является изменение температуры тела.

Подчеркнем, что *не всегда* изменение внутренней энергии сопровождается изменением температуры. Пример этого – фазовые переходы (плавление – кристаллизация, испарение – конденсация), при которых внутренняя энергия изменяется при постоянной температуре. Но, кроме этих особых случаев, этот признак оказывается справедливым.

Внутренняя энергия является *функцией состояния* системы. Это означает, что внутренняя энергия однозначно характеризует систему в положении равновесия и что всегда в данном состоянии, независимо от того, как система пришла в это состояние, её внутренняя энергия одна и та же.

9.2 Количество тепла

Давайте проведем такой мысленный эксперимент: поместим два тела с разными температурами в вакуумированную теплоизолированную оболочку (рис. 9.1, а) и предоставим их самим себе.



a – условие $T_1 > T_2$; *б* – температуры тел равны T , причем $T_1 > T > T_2$

Рисунок 9.1 – Теплоизолированная оболочка

Будем считать, что у нас есть возможность контролировать температуру обоих тел. Результат этого эксперимента очевиден – спустя некоторое время мы обнаружим, что температуры наших тел стали одинаковыми (рис. 9.1, б), причем выполняется неравенство

$$T_1 > T > T_2,$$

где T_1 и T_2 – начальные температуры тел (предположим, что температура первого тела выше, чем второго), T – конечная температура.

Давайте объясним результат нашего опыта. Из того факта, что температура первого тела понизилась ($T_1 > T$), следует, что внутренняя энергия этого тела уменьшилась. У второго тела температура, наоборот, возросла, а это значит, что его внутренняя энергия увеличилась. Следовательно, в ходе опыта происходил обмен внутренней энергией между телами. Этот процесс принято называть *теплообменом*. Процесс теплообмена может происходить как путем межмолекулярных взаимодействий (столкновения молекул) при непосредственном контакте тел, так и посредством излучения, если тела не соприкасаются.

Теперь мы можем сформулировать еще одно определение: *количество тепла* – это часть внутренней энергии одного тела, переданной другому телу в процессе теплообмена.

Опыты, подобные рассмотренному нами, проводят в специальных устройствах, называемых калориметрами, которые изготавливаются таким образом, чтобы теплообмен с окружающей средой был минимальным.

Тщательные измерения, проводимые в таких устройствах, показывают, что для тел, участвующих в теплообмене, количество отданного тепла, в пределах точности измерений, равно количеству полученного тепла. А это значит, что суммарная внутренняя энергия тел, участвующих в теплообмене, не изменяется.

Количество тепла, полученное или отданное телом в процессе теплообмена, рассчитывают по эмпирической формуле

$$dQ = cm dT, \quad (9.2)$$

где m – масса тела, dT – изменение температуры тела. Если $dT > 0$, то тело получает тепло, в противном случае – отдает. Коэффициент пропорциональности c в формуле (9.2) называется *удельной теплоемкостью* вещества. Из выражения (9.2) получаем, что

$$c = \frac{dQ}{m dT}.$$

Следовательно, *удельная теплоемкость – это количество тепла, которое нужно сообщить телу массой 1 кг, чтобы повысить его температуру на 1 градус.*

Теплоемкость определяют экспериментально. Она зависит от рода вещества и, как правило, от температуры.

9.3 Работа, совершаемая телом при изменении объема

Взаимодействие соприкасающихся тел сопровождается изменением объема этих тел. Следовательно, работа, совершаемая данным телом над внешними телами, может быть выражена через давление и изменение объема.

Рассмотрим газ в сосуде с подвижным поршнем (рис. 9.2).

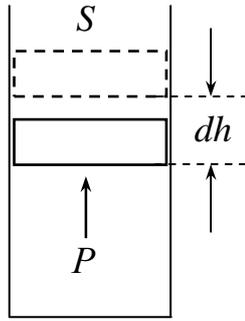


Рисунок 9.2 – Подвижный поршень

Если по каким-нибудь причинам газ станет расширяться, то он будет перемещать поршень и совершать над ним работу. Элементарная работа, совершенная газом, будет равна

$$dA = Fdh,$$

где F – сила, с которой газ действует на поршень. Учтем, что сила равна произведению давления P на площадь поршня S . Тогда получим

$$dA = PS dh.$$

Но произведение $S dh$ равно приращению объема газа dV . Следовательно, элементарная работа, совершенная газом, равна:

$$dA = P dV. \tag{9.3}$$

Работа, совершенная газом, является величиной алгебраической: при расширении газа $dV > 0$, и работа положительна, при сжатии $dV < 0$, и работа отрицательна. Отметим, что полученное выражение (9.3) для работы справедливо при любых изменениях объема не только газообразных, но и жидких и твердых тел. Из третьего закона Ньютона имеем, что сила, с которой поршень действует на газ, равна по величине силе давления газа на поршень и противоположна ей по направлению. Следовательно, работа внешних сил над данным телом будет описываться выражением

$$d'A = -P dV. \quad (9.4)$$

Если давление газа остаётся постоянным, то тогда полная работа по перемещению поршня между положениями 1 и 2 будет равна

$$A_{12} = P(V_2 - V_1). \quad (9.5)$$

Если же при изменении объема давление меняется, то произведенная газом работа будет равна:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV. \quad (9.6)$$

Работе можно придать наглядный геометрический смысл. Изобразим процесс изменения объема в координатах (P, V) (рис. 9.3).

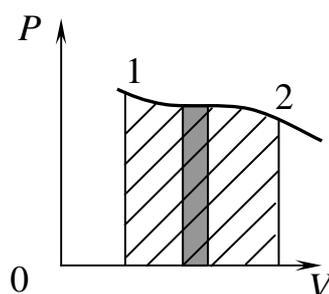


Рисунок 9.3 – Работа при расширении газа

Элементарная работа – это темная полоса, а полная работа, совершенная газом при расширении, равна заштрихованной площади.

9.4 Первое начало термодинамики

Опыт показывает, что внутренняя энергия термодинамической системы может изменяться двумя способами: путем совершения над телами системы работы и путем сообщения ей теплоты. Сказанное можно записать в виде формулы:

$$dU = d'Q + d'A. \quad (9.7)$$

Если учесть, что работа внешних сил связана с работой, совершаемой термодинамической системой, соотношением $dA = -d'A$, то выражение (9.7) можно переписать в виде:

$$d'Q = dU + dA. \quad (9.8)$$

Уравнение (9.8) выражает закон сохранения энергии и представляет собой первое начало термодинамики: *количество теплоты, сообщённой системе (dQ), расходуется на увеличение внутренней энергии системы (dU) и на совершение системой работы против внешних сил (dA)*. Исторически первый закон (первое начало) термодинамики был сформулирован как запрет на возможность создания вечного двигателя первого рода. Действительно, если система периодически возвращается в исходное состояние, то изменение внутренней энергии в таком процессе (его называют циклом) равно нулю $dU=0$. В этом случае, как это следует из выражения (9.8), $d'Q = dA$. То есть периодически действующий двигатель, который совершал бы работу большую, чем сообщённая ему энергия, невозможен.

Рассмотрим применение первого начала термодинамики к различным процессам, совершаемым идеальным газом.

1 *Изотермический процесс* проходит при постоянной температуре газа: $T = const$. Согласно уравнению (9.1) в этом случае $dU = 0$, и уравнение (9.8) запишется в виде

$$d'Q = dA.$$

Следовательно, *в изотермическом процессе вся подведенная газу теплота идет на совершение работы против внешних сил*.

2 В *изохорном процессе* остается постоянным объем: $dV = 0$. Согласно уравнению (9.3) в этом случае не совершается работа против внешних сил: $dA = 0$. Следовательно, первое начало термодинамики (9.8) примет вид

$$d'Q = dU.$$

В изохорном процессе вся подведенная газу теплота расходуется на изменение внутренней энергии.

3 В изобарном процессе изменяются как объем, так и температура. Следовательно, в изобарном процессе количество теплоты, сообщённой газу, расходуется на увеличение внутренней энергии системы и на совершение системой работы против внешних сил.

4 Адиабатный процесс. Так называют процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой. В этом процессе $dQ = 0$. Следовательно, уравнение (9.8) запишется в виде

$$dA = -dU .$$

То есть, в адиабатном процессе термодинамическая система совершает работу против внешних сил за счет убыли внутренней энергии. Можно показать, что адиабатический процесс описывается уравнением Пуассона:

$$PV^\gamma = const ,$$

где $\gamma = \frac{(i+1)}{i}$, здесь i – число степеней свободы молекул газа.

9.5 Теплоемкость идеального газа

Теплоёмкостью тела называется количество тепла, которое надо сообщить телу, чтобы повысить его температуру на 1 (K). Различают молярную теплоёмкость, т.е. теплоёмкость одного моля вещества,

$$C_M = \frac{dQ}{\nu dT} , \quad (9.9)$$

и удельную теплоёмкость – теплоёмкость единицы массы вещества:

$$c = \frac{dQ}{m dT} . \quad (9.10)$$

Из выражений (9.9) и (9.10) видно, что молярная и удельная теплоёмкости связаны между собой соотношением:

$$c = \frac{C_M}{M},$$

где M – молярная масса.

Различают теплоёмкость при постоянном объёме C_V и теплоёмкость при постоянном давлении C_P . Если $V = const$, то из 1-го начала термодинамики следует, что $dQ = dU$, и тогда:

$$C_V = \frac{dU}{dT}. \quad (9.11)$$

Из выражения (9.11) следует, что внутренняя энергия одного моля $U = C_V T$, и для произвольного числа молей

$$U = \frac{m}{M} C_V T.$$

Поскольку внутренняя энергия идеального газа определяется числом степеней свободы $U = \frac{i}{2} RT$, то

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (9.12)$$

Из первого начала термодинамики (9.8) для газа, который нагревают при постоянном давлении, следует, что

$$C_P = \frac{dU}{dT} + \frac{PdV}{dT}. \quad (9.13)$$

Продифференцировав уравнение Менделеева – Клапейрона по температуре (при постоянном давлении), получим

$$\frac{PdV}{dT} = R. \quad (9.14)$$

Подставим выражение (9.14) в (9.13) и учтём выражение (9.12). В результате получим *уравнение Майера*, которое связывает теплоёмкости при постоянном давлении и объёме:

$$C_p = C_v + R. \quad (9.15)$$

Из этого уравнения видно, что C_p всегда больше C_v на величину газовой постоянной R .

Это объясняется тем, что при постоянном объёме всё тепло расходуется только на увеличение внутренней энергии газа, в то время как при постоянном объёме подводимое тепло расходуется и на увеличение внутренней энергии газа и на совершение газом работы.

Подставляя в уравнение (9.15) выражение для молярной теплоёмкости при постоянном объёме (9.12), получим, что

$$C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{(i+2)}{2}R. \quad (9.16)$$

Из выражения (9.12) следует, что C_v (а, следовательно, и C_p) не должна зависеть от температуры.

Этот закон выполняется довольно неплохо для одноатомных газов. Однако уже для двухатомных газов, как показывает эксперимент, теплоёмкость при постоянном объёме C_v зависит от температуры, как показано на рисунке 9.4.

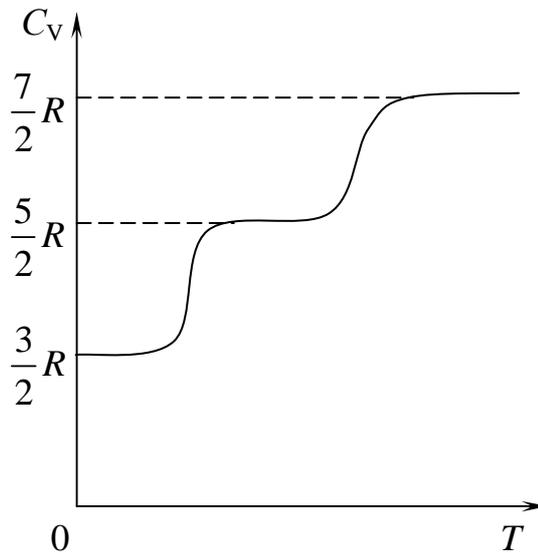


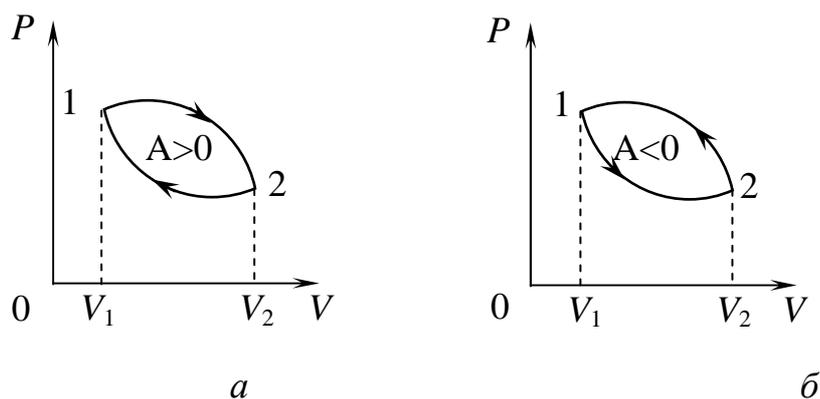
Рисунок 9.4 – Зависимость C_v от T

Такой ход зависимости теплоемкости от температуры можно объяснить тем, что при низких температурах молекулы обладают только кинетической энергией поступательного движения. При более высокой температуре добавляется вращение молекул. Говорят, что при более высокой температуре возбуждаются вращательные степени свободы. Если ещё поднимать температуру, то будут возбуждаться колебательные степени свободы. Последовательную теорию теплоёмкости газов смогла дать только квантовая механика. Оказывается, что энергия вращения и колебаний не может принимать любые значения, а только дискретные, или квантованные. В соответствии с этим, при низких температурах не хватает энергии поступательного движения, чтобы при столкновениях молекул возбудить вращательные степени свободы. Говорят, что они (так же, как и колебательные степени свободы) заморожены.

ЛЕКЦИЯ 10. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

10.1 Круговые процессы. Тепловые двигатели

Процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное состояние, называется *круговым процессом*, или *циклом*. Цикл, совершаемый идеальным газом, можно представить как расширение и сжатие. В процессе расширения работа, выполняемая газом, считается положительной, а работа, совершаемая газом в процессе сжатия, – отрицательной. Как мы уже знаем, работа на диаграмме P - V определяется площадью под кривой, описывающей процесс. Соответственно, работа, выполненная газом за цикл, будет положительной, если работа расширения больше, чем работа сжатия (рис. 10.1, *а*).



а – прямой цикл; *б* – обратный цикл

Рисунок 10.1 – Круговые процессы

Такой цикл называется *прямым*. И наоборот, работа будет отрицательной, если работа сжатия меньше, чем работа расширения (рис. 10.1, *б*). Этот цикл называется *обратным*. Циклические процессы используются в тепловых двигателях – устройствах, выполняющих механическую работу за счет полученной извне теплоты.

При изучении тепловых двигателей возникает важный вопрос: можно ли при циклическом процессе получить работу, равную количеству тепла, полученному от источника? Ответ на этот вопрос дает *принцип*

Томсона: невозможно осуществить циклический процесс, единственным результатом которого было бы превращение в механическую работу теплоты, отнятой у какого-нибудь тела, без того, чтобы произошли какие-либо изменения в другом теле или телах. Согласно этому принципу (основанному на многочисленных опытных данных), в процессе превращения теплоты в работу кроме источника теплоты (*нагревателя*), от которого теплота отнимается, и тела, совершающего работу (*рабочее тело*), которому теплота непосредственно передается, должно участвовать еще какое-то третье тело (или тела). Какова роль этого третьего тела в процессе преобразования теплоты в работу? Дело в том, что при циклическом процессе рабочее тело, после того как оно, расширившись, совершит работу за счет теплоты, полученной от нагревателя, должно быть возвращено к исходному состоянию. А для этого его необходимо сжать, то есть совершить над ним работу. Но работа эта должна быть меньше, чем работа, совершенная рабочим телом при расширении. Иначе цель нашего цикла не будет достигнута. Это возможно, если кривая сжатия лежит ниже кривой расширения на диаграмме $P - V$ (см. рис. 10.1, *a*).

Но более низкая кривая на диаграмме $P - V$ соответствует более низкой температуре. Значит перед сжатием рабочее тело должно быть охлаждено. Следовательно, от него нужно отнять некоторое количество теплоты и передать его третьему телу – *холодильнику* (рис. 10.2).

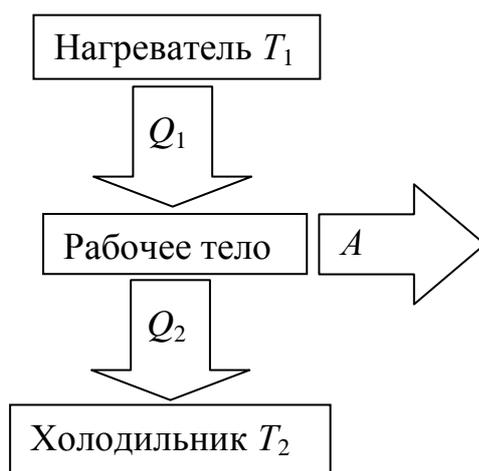


Рисунок 10.2 – Циклично работающая машина

Вот почему никакая циклически работающая машина не может обойтись только источником тепла и рабочим телом.

Поскольку в цикле рабочее тело возвращается в исходное состояние, то изменение внутренней энергии в цикле равно нулю. Таким образом, первое начало термодинамики, записанное для цикла тепловой машины, будет иметь вид

$$A = Q_1 - Q_2, \quad (10.1)$$

где A – работа, совершенная рабочим телом, Q_1 – количество теплоты, полученной рабочим телом от нагревателя, Q_2 – количество тепла, переданного холодильнику.

Эффективность тепловой машины характеризуется коэффициентом полезного действия (КПД), который определяется как отношение выполненной за цикл работы к полученной энергии (в виде тепла):

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (10.2)$$

Из формулы (10.2) следует, что КПД тепловых двигателей всегда меньше 1.

Машины, работающие по обратному циклу, называют холодильными. В холодильных машинах, кроме переноса тепла от менее нагретого тела, к более нагретому, происходят ещё и изменения во внешней среде, которые связаны с совершением над системой работы. Эффективность холодильной машины характеризуют *холодильным коэффициентом*, который определяется как отношение отнятого у охлаждаемого тела тепла Q_2 к работе в цикле, выполняемой внешними силами:

$$\eta^* = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}.$$

10.2 Цикл Карно

Рассмотрим теперь круговой процесс, при помощи которого тепло, отнятое от нагревателя, можно превратить в работу, причем таким образом, чтобы полученная работа была максимальной. Впервые такой процесс

проанализировал французский инженер *С. Карно*, и поэтому он называется *циклом Карно* (рис. 10.3).

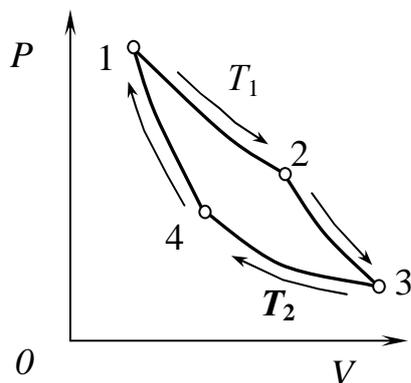


Рисунок 10.3 – Цикл Карно

Начнем круговой процесс над рабочим телом с того, что оно находится в контакте с нагревателем и, следовательно имеет такую же температуру T_1 (точка 1 на рисунке 10.3). Процесс теплопроводности при этом не происходит, так как нет разности температур, а значит, и нет передачи тепла без совершения механической работы.

Предоставим теперь рабочему телу возможность расширяться, совершая работу, не прерывая контакта с нагревателем. Расширение, следовательно, будет изотермическим (кривая 1-2 на рисунке 10.3). Работа совершается за счет тепла, полученного от нагревателя, который благодаря своей большой теплоемкости не изменяет своей температуры.

Полученное рабочим телом тепло теперь нужно отдать холодильнику. Такой процесс нельзя осуществлять путем прямого контакта рабочего тела и холодильника, так как температура рабочего тела выше температуры холодильника, и передача тепла не будет сопровождаться совершением полезной работы. Поэтому рабочее тело надо охладить до температуры холодильника. Для охлаждения рабочего тела его изолируют от нагревателя и дают возможность адиабатно расширяться (кривая 2-3 на рисунке 10.3) до тех пор, пока оно не примет температуру холодильника. Только потом рабочее тело приводят в контакт с холодильником. На этом заканчивается первая половина цикла, во время которой рабочее тело совершило полезную работу за счет тепла, полученного от нагревателя.

Возвращение рабочего тела к исходному состоянию тоже проводят в

два этапа. Сначала рабочее тело сжимают, не прерывая его контакта с холодильником, то есть изотермически (кривая 3-4 на рисунке 10.3). Затем, изолировав рабочее тело от холодильника, его дополнительно сжимают адиабатно, так, чтобы оно нагрелось до температуры нагревателя (кривая 4-1 на рисунке 10.3). После этого рабочее тело приводят в контакт с нагревателем, и цикл на этом завершается.

Описанный круговой процесс состоит из двух изотермических и двух адиабатных расширений и сжатий. При расширении рабочее тело совершает полезную работу, а сжатия происходят за счет работы, совершаемой над рабочим телом. На всех стадиях рассмотренного цикла нигде не допускается контакта двух тел с различными температурами, и, следовательно, отсутствует необратимый процесс теплопроводности. Поэтому цикл Карно является обратимым.

Теперь рассчитаем КПД цикла Карно. Итак, первый процесс 1-2 – изотермический. Изменение внутренней энергии равно нулю. Работа в изотермическом процессе равна

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1. \quad (10.3)$$

Второй процесс 2-3 – адиабатический (без теплообмена с окружающей средой), и работа равна убыли внутренней энергии:

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1). \quad (10.4)$$

Третий процесс 3-4 – изотермическое сжатие, и количество теплоты, отданное холодильнику, равно работе сжатия:

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2. \quad (10.5)$$

И четвёртый, завершающий процесс 4-1 – работа адиабатического сжатия:

$$A_{41} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2). \quad (10.6)$$

Полная работа, совершенная за цикл, равна

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2. \quad (10.7)$$

В соответствии с выражением (10.2), КПД цикла равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{M}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M}RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (10.8)$$

Теперь учтём, что состояния 2 и 3 находятся на одной адиабате:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (10.9)$$

Для состояний 4 и 1, которые также находятся на одной адиабате, получим, что

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (10.10)$$

Разделим выражение (10.9) на выражение (10.10) и получим, что

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (10.11)$$

С учётом выражения (10.11), получаем окончательное выражение для КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{M}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M}RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}{\frac{m}{M}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (10.12)$$

При выводе формулы (10.12) мы не делали никаких предположений о свойствах рабочего тела и устройстве тепловой машины. Таким образом, можно сделать вывод, который впервые сделал С. Карно, и этот вывод сейчас называется *теоремой Карно*, что *КПД всех обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателя и холодильника, одинаков*.

наков и определяется только температурами нагревателя и холодильника. Поскольку мы рассматривали обратимый цикл Карно, то будет справедливым и следующее утверждение: *КПД цикла Карно всегда больше КПД реальной тепловой машины.*

10.3 Энтропия. Второе начало термодинамики

Запишем КПД цикла Карно в виде уравнения: $1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, из которого следует, что

$$\frac{|Q_1|}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2}. \quad (10.13)$$

Если рассматривать цикл Карно с точки зрения изменений, происходящих с рабочим телом, то Q_1 и Q_2 надо приписать разные знаки, так как Q_1 – это полученное рабочим телом количества теплоты, а Q_2 – отданное. С учетом этого замечания уравнение (10.13) перепишем в виде

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (10.14)$$

Величину, равную отношению теплоты Q , полученной в изотермическом процессе, к температуре тела T , называют *приведенным количеством теплоты*. Соотношение (10.14) означает, что в ходе цикла Карно приведенное количество теплоты не изменяется. Напомним, что цикл Карно является обратимым. Строгий теоретический анализ показывает, что *приведенное количество теплоты, сообщаемое телу в любом обратимом круговом процессе, равно нулю:*

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (10.15)$$

Равенство (10.15) позволяет утверждать, что существует некоторая величина – обозначим ее буквой S , – являющаяся *функцией состояния системы*. Величину S называют *энтропией* и вычисляют по формуле:

$$S = \int \frac{dQ}{T}.$$

Из формулы (10.15) следует, что для обратимых процессов изменение энтропии:

$$dS = 0. \quad (10.16)$$

В термодинамике доказывается, что энтропия системы, совершающей необратимый цикл, возрастает:

$$dS > 0. \quad (10.17)$$

Соотношения (10.16) и (10.17) относятся только к замкнутым системам, если же система обменивается теплотой с окружающей средой, то ее энтропия может вести себя любым образом. Соотношения (10.16) и (10.17) можно представить в виде *неравенства Клаузиуса*:

$$dS \geq 0. \quad (10.18)$$

Неравенство (10.18) лежит в основе *второго начала термодинамики*: *в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает.*

Второе начало термодинамики занимает в физике очень важное место, так как определяет направленность всех процессов. Заметим, что все реальные процессы, происходящие в природе, являются необратимыми. Для необратимых процессов в замкнутых системах энтропия, как показывают опыт и теория, всегда возрастает. И это свойство так же присуще энтропии, как энергии свойственно сохраняться при любых процессах в замкнутых системах.

Именно потому, что энергия обладает свойством сохраняться, она не может служить функцией, показывающей, в каком направлении идут процессы в замкнутой системе. Ведь при любом изменении состояния энергия в начале и конце процесса одна и та же, и поэтому она не дает возможности отличить друг от друга начальное и конечное состояния. Энтропия же, в

естественно идущих процессах, всегда возрастает, что позволяет судить, какое направление процесса возможно и какое нет, какое состояние является начальным и какое – конечным.

Рост энтропии в любом процессе продолжается не беспрестанно, а лишь до определенного максимального значения, характерного для данной системы. Это максимальное значение энтропии соответствует состоянию равновесия, и после того, как оно достигнуто, любые изменения в состоянии системы прекращаются.

10.4 Статистический смысл энтропии

Состояние термодинамической системы может быть задано несколькими способами. Мы будем говорить, что нам задано *макросостояние*, если известны термодинамические параметры (давление P , объем V , температура T и т.д.), характеризующие всю систему в целом. С точки зрения молекулярно-кинетической теории, состояние системы является заданным, если известны координаты и скорости движения всех молекул, образующих рассматриваемую систему. Столь детально охарактеризованное состояние системы называется *микросостоянием*.

Если система находится в состоянии термодинамического равновесия, то все параметры будут постоянными, а макросостояние – не изменяющимся с течением времени. В тоже время молекулы, образующие систему, находятся в состоянии хаотического теплового движения – их положения и скорости движения постоянно изменяются из-за взаимодействия молекул друг с другом. В соответствии с этим микросостояния системы все время изменяются. Следовательно, данное макросостояние осуществляется различными способами, каждому из которых соответствует определенное микросостояние системы. Например, мы получим одно и то же макросостояние, если попарно поменяем молекулы местами. Но такая перестановка молекул отвечает уже другому микросостоянию. Число различных микросостояний, посредством которого может быть реализовано данное макросостояние, называется *статистическим весом* макросостояния. Статистический вес обозначают буквой Ω . Отметим, что статистический вес обычно выражается огромными числами.

Согласно Л. Больцману, энтропия и статистический вес связаны между собой формулой

$$S = k \ln \Omega, \quad (10.19)$$

где k – постоянная Больцмана. В основе статистической физики лежит гипотеза, согласно которой все микросостояния данной термодинамической системы равновероятны (эргодическая гипотеза). Отсюда следует, что вероятность реализации данного макросостояния пропорциональна его статистическому весу. При статистическом толковании энтропии (10.19) из второго начала термодинамики следует, что процессы в замкнутой системе идут в направлении увеличения числа микросостояний. Иными словами, замкнутая термодинамическая система все время переходит от менее вероятных макросостояний к более вероятным, до тех пор, пока вероятность не станет максимальной. Но тот факт, что всякий сам собою идущий процесс ведет к состоянию с большей вероятностью, не означает, что другое направление процесса невозможно. Почему же тогда все процессы в природе необратимы? Мы неоднократно подчеркивали, что реальные тела состоят из огромного числа частиц. Для таких коллективов вероятностные законы статистики приобретают характер объективных законов природы. Поясним сказанное примером. Ни один закон сохранения не запрещает упавшему на землю камню взлететь и вернуться в точку, из которой он был брошен. Для этого необходимо, чтобы молекулы всех тел, к которым перешла механическая энергия упавшего камня, начиная с некоторого момента времени, начали двигаться «согласовано». Причем настолько «согласовано», чтобы в конечном итоге толкнуть камень так, чтобы он взлетел и начал двигаться по своей первоначальной траектории. Вероятность такого события настолько мала, что такое событие *никто(!)* и *никогда(!)* не наблюдал(!), и мы с уверенностью говорим, что такое событие никогда не произойдет. Хотя, в принципе, такое событие *возможно!*

ЛИТЕРАТУРА

1 Детлаф А.А. Курс физики / А.А.Детлаф, Б.М.Яворский. – М.: Высш. шк., 1989. – 607 с.

2 Савельев И.В. Курс физики: Учебное пособие: В 3 т. – Т. 1: Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 352 с. – ISBN 5020144304 (Т.1)

3 Бушок Г.Ф. Курс физики / Г.Ф.Бушок, В.В.Левандовский, Г.Ф.Пивень. – К.: Лыбидь, 2001. – Кн. 1. – 346 с.

4 Яворский Б.М. Справочник по физике. – М.: Наука, 1985. – 512 с.

5 Трофимова Т.И. Курс физики: Учебное пособие для вузов. – 7-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 541 с. – ISBN 5060036340

Навчальне видання

**ТУЛУПЕНКО Віктор Миколайович
БЛИХ Валерій Георгійович
БАРЖЕСВ Роман Вікторович**

**МЕХАНІКА
МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА
ТЕРМОДИНАМІКА**

Курс лекцій з дисципліни «ФІЗИКА»
(для студентів всіх спеціальностей вуза)

(Російською мовою)

Редактор О.О.Дудченко

Комп'ютерна верстка О.П.Ордіна

Підп. до друку . Формат 60x84/16
Папір офсетний. Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк.
Тираж 250 прим. Зам. №

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.2003 р.