

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

В.М.Костенко,
В.М.Тулупенко

**ЕЛЕКТРОСТАТИКА.
ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ.
ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.
КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ**

КУРС ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ «ФІЗИКА»
(для студентів усіх спеціальностей вузу)

Утверджено на засіданні
вченої ради ДДМА
Протокол № від

Краматорськ 2007

УДК 535
ББК 22.33
Э 55

Рецензенты:

Левченко Г.Г., доктор фіз.–мат. наук, зав. Відділом фазових перетворень Фізико–технічного інституту НАН України, м.Донецьк;
Надточий В.А., доцент, зав. кафедрою фізики Слов'янського державного педагогічного університету

Запропонований методичний посібник містить теоретичний матеріал, який викладається в лекційному курсі студентам технічних спеціальностей ДДМА. Частина матеріалу призначена для самостійного вивчення студентами.

Э 55. Електростатика. Електричний струм. Електромагнетизм. Коливання і хвилі: Курс лекцій з дисципліни «Фізика» (для студентів усіх спеціальностей вузу)/ В.М.Костенко, В.Н.Тулупенко.– Краматорськ: ДДМА, 2007. – 92 с.
ISBN

Данное методическое пособие содержит теоретический материал, излагаемый в лекционном курсе студентам технических специальностей ДГМА. Часть материала предназначается для самостоятельного изучения студентами.

ISBN

УДК 535
ББК 22.33

© В.М.Костенко, В.М.Тулупенко,
© ДДМА, 2007

ЗМІСТ

1 ЕЛЕКТРОСТАТИКА

- 1.1 Електричні заряди, їх властивості. Точкові заряди. Закон Кулона..... 3
- 1.2 Напруженість електростатичного поля. Основне завдання електростатики. Принцип суперпозиції для електростатичного поля.... 5
- 1.3 Теорема про циркуляцію вектора напруженості електростатичного поля. Потенційна енергія заряду в електростатичному полі..... 6
- 1.4 Потенціал електростатичного поля. Зв'язок потенціалу з напруженістю електростатичного поля 7
- 1.5 Теорема Гаусса для напруженості електростатичного поля в інтегральній і диференціальній формах 10
- 1.6 Обчислення напруженостей полів за допомогою теореми Гаусса. 11
- 1.8 Діелектрики. Полярні і неполярні молекули 15

2 ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

- 2.1 Електричний струм провідності. Сила струму..... 20
- 2.2 Умови існування електричного струму. Джерела струму. Електрорушійна сила 21
- 2.3 Напряга на ділянці кола. Закони Ома для ділянки кола і повного кола. Правила Кірхгофа 22
- 2.4 Вектор щільності струму. Закон Ома в диференціальній формі 27
- 2.5 Елементи класичної електронної теорії металів 29

3 ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

- 3.1 Магнітне поле і його характеристики. Закони Ампера і Біо-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиції для магнітного поля 32
- 3.2 Розрахунок магнітного поля для нескінченно довгого прямолінійного провідника і в центрі кругового струму на основі закону Біо-Савара-Лапласа 38
- 3.3 Вихревої характер магнітного поля. Закон повного струму. Розрахунок полів нескінченно довгого соленоїда і тороїда 39

3.4	Контур з струмом в магнітному полі	43
3.5	Теорема Гауса для магнітного поля. Робота по переміщенню провідника і контуру з струмом в магнітному полі.....	45
3.6	Сила Лоренца. Ефект Холла.....	47
3.7	Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея.....	50
3.8	Самоіндукція. Екстраструми розмикання і замикання кола.....	53
3.9	Взаємна індукція. Трансформатори. Енергія магнітного поля.....	56
3.10	Магнітні моменти електронів і атомів. Намагніченість речовини. Діа- і парамагнетики.....	59
3.11	Магнітна сприйнятливність і магнітна проникненість. Теорема про циркуляцію вектору напруженості магнітного поля. Феромагнетики.....	61
3.12	Вихрєве електричне поле. Струм змещеня. Рівняння Максвелла.....	62
4	КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ	
4.1	Колебания. Типы колебаний. Характеристики колебаний. Гармонические колебания.	68
4.2	Метод векторных диаграмм. Сложение гармонических сонаправленных и взаимно перпендикулярных колебаний.....	71
4.3	Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Физический и математический маятники.....	76
4.4	Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и анализ его решений.....	78
4.5	Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и анализ его решений. Резонанс.....	82
	Список рекомендуемой литературы.....	86

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1.1 Электричні заряды, їх властивості. Точкові заряды.

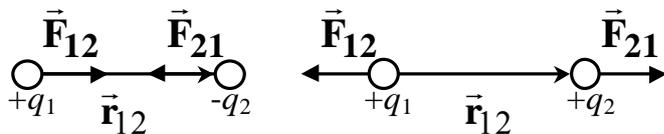
Закон Кулона.

Учение об электрических и магнитных явлениях начинаем с электростатики. Электростатика – раздел физики, который изучает взаимодействие между неподвижными зарядами. Известно, что существуют два типа электрических зарядов. Их условно назвали положительными и отрицательными. Наименьшим отрицательным зарядом является заряд электрона: $e=1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Точно такой же по величине, но положительный заряд имеет протон – ядро атома водорода. Все остальные заряды целочисленно кратны этому заряду. Необходимо отметить, что заряд – это релятивистский инвариант. Это означает, что заряд, например, электрона не зависит от скорости его движения. Макроскопические тела состоят из огромного количества зарядов разного знака, но обычно суммарные заряды тел равны нулю, т.е. в целом они являются электронейтральными. Процесс заряда тела или его части заключается в удалении части зарядов одного знака. Но в целом действует закон сохранения электрического заряда: *алгебраическая сумма зарядов замкнутой системы (т.е. не обменивающейся зарядами с другими телами) остаётся постоянной при любых изменениях происходящих с этой системой.*

Электростатика оперирует понятием точечного заряда. Точечный – это заряд, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Для точечных зарядов Ш.О.Кулон установил в 1785 г закон взаимодействия, который мы сейчас называем законом Кулона: *два точечных заряда взаимодействуют между собой с силой, действующей вдоль прямой, соединяющей заряды, пропорциональной величинам зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояний между ними таким образом, что одноименные заряды отталкиваются, а разноимённые заряды притягиваются*

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} . \quad (1.1.1)$$

Здесь $\epsilon_0=8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная. Для показанных на рис. 1.1.1 зарядов формулу (1.1.1) записывают в векторном виде следующим образом



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (1.1.2).$$

Рисунок 1.1.1

Протяженные заряженные тела можно мысленно

разделять на малые участки и считать системами точечных зарядов.

1.2 Напряжённость электростатического поля. Основная задача электростатики. Принцип суперпозиции для электростатического поля.

Электрические заряды взаимодействуют между собой посредством силового поля, которое в нашем случае неподвижных электрических зарядов называется электростатическим. Подчеркнём, что поле – это физическая реальность, а не абстракция, придуманная физиками для описания взаимодействия между заряженными телами.

Проведём мысленный эксперимент. Пусть у нас есть заряд Q , который создаёт вокруг себя электрическое поле. Поместим на расстоянии r от нашего заряда заряд q_1 . В соответствии с законом Кулона на заряд q_1 будет действовать сила $F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_1}{r^2}$. Уберём заряд q_1 и в это же место

поместим заряд q_2 . На него будет действовать сила $F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_2}{r^2}$. И сколько бы мы не продолжали опыт, помещая в одно и то же место разные заряды q_i , величина силы, действующей на этот, пробный заряд, зависит от величины заряда:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_1}{r^2},$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_2}{r^2},$$

$$F_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_i}{r^2},$$

Однако, как нетрудно видеть, отношение силы, действующей на заряд, помещённый в данную точку поля, к величине этого заряда, не зависит от величины этого заряда и является одним и тем же для всех зарядов.

$$\frac{F_1}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

$$\frac{F_2}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

$$\frac{F_i}{q_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

Таким образом, это отношение может служить характеристикой поля создаваемого точечным зарядом Q в данной точке и эта характеристика называется **напряжённостью поля** в данной точке и определяется как

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.2.1)$$

Из (1.2.1) следует определение напряженности поля – **это есть сила, действующая на единичный положительный заряд, помещённый в данную точку поля**. Подчеркнём, что напряжённость поля – это есть основная, силовая характеристика поля. Размерность напряжённости $[E] = \frac{H}{Кл}$. Чаше используется, однако, другая размерность, эквивалентная первой, а именно – В/м. Напряжённость поля точечного заряда q , как это следует из приведенного вывода, определяется как

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1.2.2)$$

Направление вектора \vec{E} в данной точке поля будет направлено от положительного заряда и к отрицательному заряду. Графически электростатическое поле изображают при помощи линий напряжённости – это линии, касательная к которым в каждой точке поля совпадает по направлению с напряжённостью поля в данной точке.

Из опыта известно, что *если поле в некоторой точке создаётся системой точечных зарядов, то результирующая напряжённость равна векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов в отдельности.* Это положение называется *принципом суперпозиции для электростатического поля*

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i . \quad (1.2.3)$$

1.3 Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля. Потенциальная энергия заряда в электростатическом поле.

Посмотрим, как определяется работа по перемещению точечного заряда q в электростатическом поле, создаваемым зарядом Q . В соответствии с определением элементарной работы

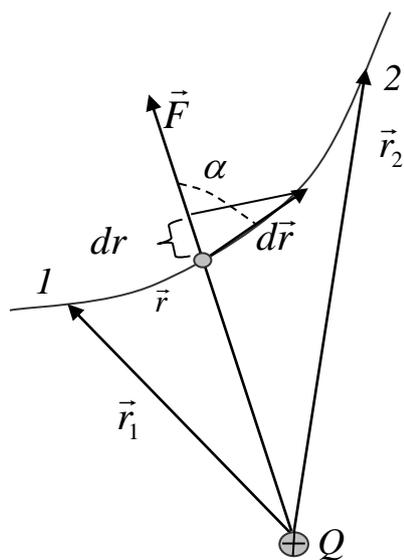


Рисунок 1.3.1

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} dr$$

В последнем равенстве мы учли, что $dl \cos \alpha = dr$ - см. рис. 1.3.1. (На этом рисунке, для определённости, мы положили оба заряда положительными). Тогда работа по перемещению заряда между начальным положением 1 и конечным положением 2 будет определяться как

$$A_{12} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.3.1)$$

Из последнего соотношения видно, что работа не зависит от формы пути между начальным и конечным положениями заряда, а определяется только этими положениями, и, следовательно, работа по перемещению заряда по замкнутому контуру равна нулю. Эту же работу можно записать иначе, используя определение напряжённости электростатического поля

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \oint q\vec{E} d\vec{r} \equiv 0. \quad (1.3.2)$$

Поскольку заряд не равен нулю, то его в последнем равенстве можно сократить

$$\oint \vec{E} d\vec{r} \equiv 0. \quad (1.3.3)$$

Интеграл в левой части (1.3.3) называется *циркуляцией вектора напряжённости*. Таким образом, получили, **что циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.**

Консервативными (или потенциальными) называются силы, работа которых не зависит от формы пути, а определяется начальным и конечным положениями. Для таких сил работа по замкнутому контуру тождественно равна нулю.

Известно, что для консервативных сил можно ввести понятие потенциальной энергии. Работу по перемещению заряда можно записать как убыль потенциальной энергии заряда в поле

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (1.3.4)$$

Учитывая, что потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной, и сравнивая (1.3.1) и (1.3.4), находим, что потенциальная энергия точечного заряда q в поле заряда Q определяется как

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} + const. \quad (1.3.5)$$

Постоянная выбирается из условия, что при удалении зарядов на бесконечность их потенциальная энергия взаимодействия обращается в нуль. Тогда

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}. \quad (1.3.6)$$

1.4 Потенциал электростатического поля. Связь потенциала с напряжённостью электростатического поля.

Как видно из (1.3.6) потенциальная энергия заряда q в поле заряда Q зависит от величины заряда q . Повторяя те же рассуждения, что и при выводе формулы (1.2.1) для напряжённости электрического поля, приходим к выводу, что отношение потенциальной энергии заряда в данной точке поля, к величине заряда, не зависит от величины этого заряда и может служить, таким образом, ещё одной характеристикой поля. Эта характеристика называется потенциалом

$$\varphi = \frac{U}{q}. \quad (1.4.1)$$

Единица измерения потенциала – Вольт: $[\varphi] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}$. Поскольку на бесконечности потенциальная энергия взаимодействующих зарядов равна нулю, то и потенциал поля на бесконечности тоже равен нулю. Из (1.4.1) следует ***определение потенциала – это есть потенциальная энергия единичного положительного заряда, помещённого в данную точку поля.*** Таким образом, потенциал – это энергетическая характеристика поля. Из сравнения формул (1.3.6) и (1.4.1) следует, что потенциал, создаваемый точечным зарядом в данной точке поля, определяется как

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (1.4.2)$$

Из формул (1.3.1), (1.3.4) и (1.4.1) следует

$$A_{12} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = U_1 - U_2 = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

или *работа по перемещению точечного заряда между двумя точками в электростатическом поле равна произведению величины заряда на разность потенциалов между начальной и конечной точками*

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.4.3)$$

Учитывая, что работа может быть также записана при помощи напряжённости электрического поля

$$A_{12} = \int_1^2 q\vec{E}d\vec{r}, \quad (1.4.4)$$

то из сравнения формул (1.4.3) и (1.4.4) получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{r}. \quad (1.4.5)$$

И напряжённость, и потенциал – это две характеристики одного и того же электростатического поля в данной точке. Следовательно, между ними должно быть некоторое соответствие, связь. Чтобы установить эту связь, рассмотрим работу по перемещению заряда вдоль оси x на расстояние dx , при этом разность потенциалов уменьшается на $d\varphi$

$$-qd\varphi = qE_x dx.$$

Из последнего соотношения находим (сокращая на q)

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (1.4.6)$$

В (1.4.6) введен символ частной производной ∂ , чтобы подчеркнуть, что перемещение рассматривается только вдоль оси x . Аналогично

находим и другие компоненты электрического поля $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Из найденных компонент вектора \vec{E} можно составить весь вектор:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right). \quad (1.4.7)$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы в направлении осей x, y, z . Выражение (1.18) можно сокращённо переписать, используя оператор “ ∇ ” – читается

“набла”: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. Поскольку в результате применения этого

оператора к скалярной функции получаем вектор градиента этой функции, то

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (1.4.8)$$

Чтобы сделать наглядным распределение потенциала, пользуются понятием **эквипотенциальной поверхности** – это поверхность, все точки которой обладают одинаковым потенциалом. Поскольку потенциал поля точечного заряда зависит только от расстояния до заряда (см. (1.4.2)), то отсюда следует, что эквипотенциальными поверхностями для точечного заряда являются концентрические сферы. С другой стороны, линии напряжённости электрического поля направлены по радиусу от положительного заряда и к отрицательному заряду. Таким образом, в случае точечного заряда линии напряжённости перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Можно, однако показать, что этот вывод является общим – **линии напряжённости всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям**.

1.5 Теорема Гаусса для напряжённости электростатического поля в интегральной и дифференциальной формах.

Принцип суперпозиции (1.2.3), в принципе, позволяет рассчитать поле любой системы зарядов. Однако для задач, обладающих какой-либо симметрией, вычисление напряжённости значительно упрощается при помощи теоремы Гаусса. Прежде чем сформулируем эту теорему, введём

понятие элементарного потока вектора напряжённости через произвольную площадку. **Потоком вектора напряжённости через произвольную элементарную площадку dS называется скалярное произведение этого вектора на элемент поверхности $d\vec{S}$.**

$$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S} . \quad (1.5.1)$$

Теорема Гаусса гласит, что **поток вектора напряжённости электростатического поля через любую замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме зарядов, заключённых внутри этой поверхности, делённой на электрическую постоянную**

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i . \quad (1.5.2)$$

Для непрерывного распределения зарядов с некоторой объёмной плотностью $\rho = \frac{dq}{dV}$, зависящей от координаты $\sum_{i=1}^N q_i \longrightarrow \int_V \rho dV$ и вместо (1.5.2) получаем

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV . \quad (1.5.3)$$

Гаусс получил формулу, которая связывает поток вектора через замкнутую поверхность с мощностью источника вектора (дивергенцией вектора) внутри этой поверхности $\oint \vec{E}d\vec{S} = \int_V \text{div}\vec{E}dV$, где дивергенция вектора \vec{E}

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} .$$

Отсюда с учетом (1.5.3) следует

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \quad (1.5.4)$$

Последняя формула представляет собой теорему Гаусса для электростатического потенциала в вакууме в дифференциальной форме.

1.6 Вычисление напряженностей полей с помощью теоремы Гаусса.

а). **Поле бесконечно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ .** Из соображений симметрии ясно, что поле будет направлено перпендикулярно плоскости – от плоскости для положительных зарядов – как показано на рис. 1.6.1 и к плоскости

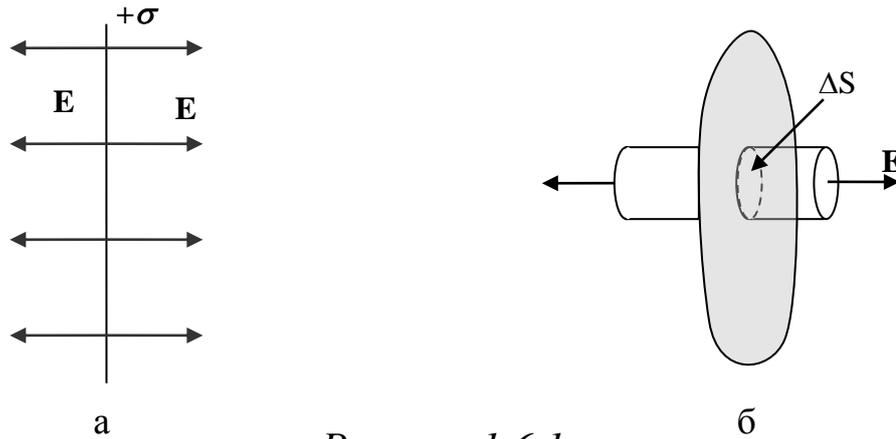


Рисунок 1.6.1

для отрицательных зарядов

$$\vec{E} \equiv \vec{E}_n. \quad (1.6.1)$$

Кроме того, также из соображений симметрии ясно, что поле будет однородным. Представим цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными плоскости и с основанием ΔS . Посчитаем теперь поток через цилиндр. Поток через боковую поверхность равен нулю и, таким образом, весь поток через поверхность цилиндра сведётся к потоку через основания

$$\oint_s \vec{E} d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} E_n ds + \int_{\Delta S_2} E_n ds = 2E\Delta S. \quad (1.6.2)$$

На основании теоремы Гаусса, этот поток равен заряду, заключённому внутри цилиндра, делённому на ϵ_0 .

$$2E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}. \quad (1.6.3),$$

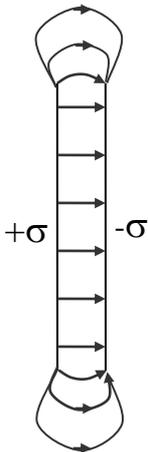
Откуда следует, что

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (1.6.4)$$

Таким образом, поле однородно заряженной плоскости:

- направлено перпендикулярно плоскости,
- является однородным,
- не зависит от расстояния до плоскости.

б) **Поле 2-х разноименно заряженных плоскостей.** Поле, образованное двумя разноименно заряженными плоскостями с поверхностной плотностью зарядов σ , на основании принципа суперпозиции можно представить как наложение полей, созданных этими плоскостями отдельно. Поскольку эти поля в промежутке между плоскостями направлены одинаковым образом, то величина поля будет просто равна удвоенной величине поля, создаваемого одной плоскостью



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (1.6.5)$$

Рис.1.6.2 Вне объёма, ограниченного плоскостями, поля направлены в разные стороны и результирующее поле равно нулю. Следовательно, поле, созданное двумя параллельными заряженными плоскостями:

- является однородным,
- сосредоточено в промежутке между плоскостями.

Полученные выводы приближённо справедливы для плоских конденсаторов, для которых расстояние между плоскостями (их называют пластинами, или обкладками конденсатора) много меньше размеров пластин – см. Рис.1.6.2.

в) **Поле бесконечного заряженного цилиндра.**

Пусть имеем бесконечный цилиндр радиуса R , заряженный с поверхностной плотностью заряда σ (рисунок 1.6.3). Из соображений

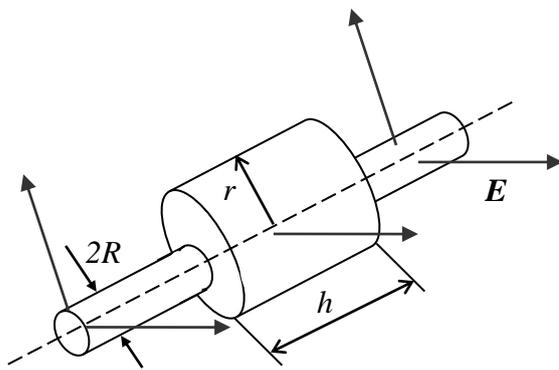


Рисунок 1.6.3

симметрии ясно, что поле будет направлено перпендикулярно к оси цилиндра, и его величина будет зависеть от расстояния до цилиндра. Мысленно окружим наш цилиндр коаксиальным расположенным цилиндром радиуса r и высотой h и посчитаем поток вектора

напряжённости через поверхность, ограниченную этим цилиндром. Из соображений симметрии ясно, что поток через основания цилиндра будет равен нулю. Поток через боковую поверхность цилиндра будет равен $E(r)2\pi rh$. На основании теоремы Гаусса он будет равен

$\frac{1}{\epsilon_0} \delta 2\pi R h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$. Здесь λ -линейная плотность заряда.

$$E(r)2\pi rh = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda h. \quad (1.6.6)$$

Откуда

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}. \quad (1.6.7)$$

Выражение (1.6.7) справедливо для $r > R$. Внутри полого цилиндра, на основании теоремы Гауса, поле равно нулю. Если мы составим цилиндрический конденсатор из двух коаксиальных заряженных цилиндров, то поле будет отличным от нуля только между цилиндрами, и его величина будет определяться выражением (1.6.7). Вне наружного цилиндра поле, на основании принципа суперпозиции, будет равно 0. Поле цилиндрического конденсатора (конечной длины) будет отличаться от поля цилиндрического конденсатора бесконечной длины только у краёв.

г) **Поле заряженной сферической поверхности.**

Пусть есть сфера радиуса R , с плотностью поверхностного заряда σ . Из соображений симметрии следует, что это поле будет центральным. Окружим нашу сферу другой концентрической сферой радиуса r . Если $r > R$, то на основании теоремы Гаусса

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

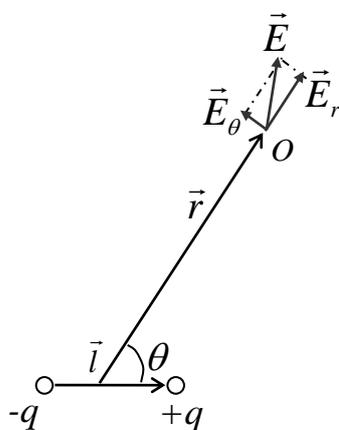
откуда

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R). \quad (1.6.8)$$

Внутри сферы поле равно нулю. Таким образом, поле равномерно заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда, помещённого в центр сферы.

1.7 Поле диполя. Дипольный момент.

Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине разноимённых зарядов, расстояние между которыми значительно меньше всех остальных расстояний задачи. Диполь характеризуется электрическим моментом $\vec{p} = q\vec{l}$, где \vec{l} - вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному, длина которого равна расстоянию между зарядами диполя. Потенциал диполя на больших расстояниях определяется по формуле



$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (1.7.1)$$

где θ - угол между вектором \vec{r} и осью диполя (вектором \vec{l}) – см. рис.1.7.1. Напряжённость электрического поля вдоль \vec{r} определяется в соответствии с

Рисунок 1.7.1

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}. \quad (1.7.2)$$

Напряжённость поля в перпендикулярном направлении

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}. \quad (1.7.3)$$

И полная напряжённость в точке O (см. рис.1.7.1) определяется как

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}. \quad (1.7.4)$$

Во внешнем электрическом поле на диполь действует пара сил, момент которой (см. рис. 1.7.2) определяется как

$$N = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha. \quad (1.7.5)$$

Из рис. 1.7.2 также видно, что момент (1.7.5) может быть записан в векторном виде

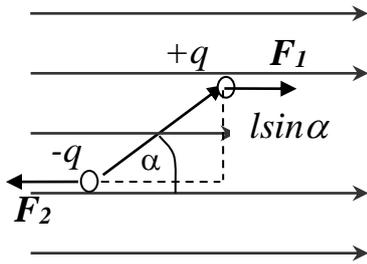


Рис. 1.7

Рисунок 1.7.2

$$\vec{N} = [\vec{p}, \vec{E}]. \quad (1.7.6)$$

Чем же интересен диполь, что мы акцентируем на нём внимание? Оказывается, диполь играет очень важную роль в физике.

Во-первых, поле системы зарядов q_i , алгебраическая сумма которых равна нулю, на больших расстояниях проявляет себя как поле диполя с моментом

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i. \quad (1.7.7)$$

Здесь \vec{r}_i - радиус-вектор i -го заряда.

Во вторых, осциллирующая модель диполя может служить элементарным излучателем электромагнитных волн.

1.8 Диэлектрики. Полярные и неполярные молекулы.

Диэлектриками называются вещества, электропроводность которых примерно в 10^{15} - 10^{20} раз ниже, чем электропроводность металлов. Мы сейчас рассмотрим качественно, что происходит с диэлектриком в электрическом поле.

Суммарный заряд атома равен нулю – число положительных зарядов, сосредоточенных в ядре атома – протонов – в точности равно числу электронов в атомных оболочках. Молекула диэлектрика, состоящая из нейтральных атомов, тоже является электрически нейтральной системой зарядов. Как мы уже знаем, поле такой системы определяется величиной и ориентацией дипольного электрического момента (1.7.7). С учётом того, что электроны движутся в атомах, на опыте обнаруживается некоторое среднее значение дипольного момента. Для определения этого значения в формуле (1.7.7) следует заменить мгновенные значения радиус-векторов зарядов их средними значениями

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \langle \vec{r}_i \rangle. \quad (1.8.1)$$

Такие молекулы, у которых сумма в правой части формулы (1.8.1) отлична от нуля, и которые обладают дипольным моментом, называются **полярными**. Полярными являются несимметричные молекулы, например молекулы HCl, NH и т.д.

Если сумма в правой части формулы (1.8.1) равна нулю, то такие молекулы называются **неполярными** и для них дипольный момент равен нулю. Неполярными являются симметричные молекулы H₂, O₂, N₂ и др. Под действием электрического поля положительные и отрицательные заряды смещаются в разные стороны. Положительные заряды смещаются в направлении по полю, а отрицательные – в направлении против поля. В результате молекула приобретает дипольный момент, направленный по полю и величина которого зависит от электрического поля

$$\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E} \quad (1.8.2).$$

β называется поляризуемостью молекулы.

На величину дипольного момента полярных молекул электрическое поле практически не влияет. Оно только поворачивает моменты и пытается выстроить их вдоль поля. А температура разбрасывает моменты.

Поляризованностью диэлектрика называют отношение суммарного момента, заключённого в физически бесконечно малом объёме диэлектрика, к величине этого объёма.

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_i . \quad (1.8.3)$$

Для изотропных диэлектриков

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} . \quad (1.8.4)$$

Здесь χ называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика. Легко показать, что

$$\chi = n\beta , \quad (1.8.6)$$

где n - концентрация молекул.

Заряды, которые входят в состав молекул диэлектрика, называются **связанными**. Они могут только немного смещаться под действием электрического поля. Заряды, которые находятся в диэлектрике и не входят в состав молекул, а также внешние по отношению к диэлектрику заряды, называются **сторонними зарядами**. Результирующее, макроскопическое поле в диэлектрике создаётся как связанными – E' , так и сторонними зарядами – E_0

$$E = E_0 + E' \quad (1.8.7).$$

1.9 Объемные и поверхностные заряды диэлектрика. Вектор электрического смещения.

Если диэлектрик поместить в электрическое поле, то на границах, а в некоторых случаях и в объёме, появляются некомпенсированные

связанные заряды. На рис. 1.9.1 схематически показан неполярный –а) и полярный – б) диэлектрики в электрическом поле.

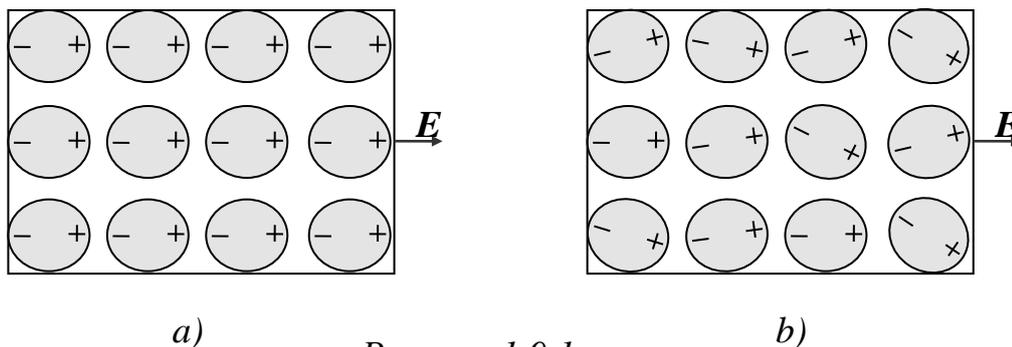


Рисунок 1.9.1

Можно показать, что поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = P_n, \quad (1.9.1)$$

где P_n - проекция поляризованности на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика – см. рис. 1.9.2. Также можно показать, что объёмная плотность связанных зарядов определяется выражением

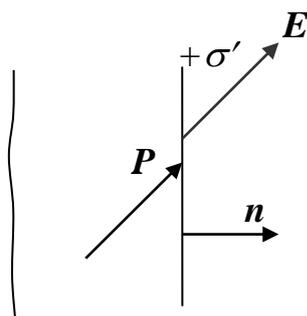


Рисунок 1.9.2

$$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (1.9.2)$$

1.9.3 помогает понять смысл выражения (1.9.2). Точки, в которых

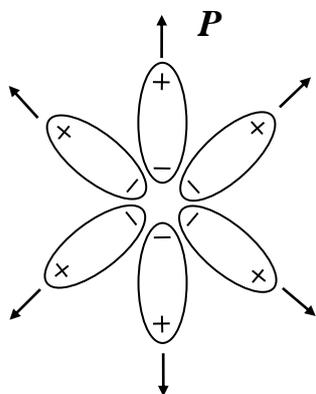


Рисунок 1.9.3

дивергенция поляризованности больше нуля, служат источниками вектора поляризованности – из этих точек линии \mathbf{P} расходятся. Это значит, что в этих точках появляется некомпенсированный отрицательный связанный заряд.

Электрическое поле может создаваться как сторонними, так и связанными зарядами. Это означает, что можно записать

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho') \quad (1.9.3)$$

С учётом (1.9.2)

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla \vec{P}),$$

откуда следует, что

$$\nabla(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho. \quad (1.9.4)$$

Выражение в скобках (1.9.4) называют вектором электрического смещения или электрической индукцией \mathbf{D} .

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (1.9.5)$$

С учётом (1.8.4), получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0(1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.9.6)$$

где $\varepsilon = 1 + \chi$ - называется (относительной) диэлектрической проницаемостью среды.

Из (1.9.6) следует, что вектор \mathbf{D} совпадает по направлению с вектором \mathbf{E} . Это справедливо только для изотропных сред. В общем случае, для анизотропных диэлектриков, вектора \mathbf{D} и \mathbf{E} неколлинеарные.

В соответствии с (1.9.4) и (1.9.5) получили, что источниками вектора электрической индукции могут быть только сторонние заряды

$$\nabla \vec{D} = \rho. \quad (1.9.7)$$

Проинтегрируем (1.9.7) по некоторому объёму V

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Выражение слева на основании теоремы Остроградского-Гаусса равно потоку вектора электрического смещения через поверхность, ограничивающую объём V

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \oint_S \vec{D} d\vec{S},$$

а интеграл от плотности зарядов по объёму можно заменить суммой заключённых в этом объёме зарядов

$$\int_V \rho dV \rightarrow \sum q_i .$$

Приравнивая правые части последних двух равенств, получим теорему Гаусса для электрического смещения: *поток электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключённых внутри этой поверхности сторонних зарядов.*

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i . \quad (1.9.8)$$

Подчеркнём, что вектор D – вспомогательный вектор, описывающий электрическое поле. Основной характеристикой является напряжённость электрического поля.

2.5. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ 2-Х ДИЭЛЕКТРИКОВ. СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКИ. (Самостоятельно. И.В.Савельев, т.2, §21 и §23).

2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

2.1 Электрический ток проводимости. Сила тока.

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов. Для возникновения электрического тока в среде необходимо выполнение двух условий : первое - наличие в веществе среды свободных зарядов, способных перемещаться по всему объему тела под действием сколь угодно малой силы, и второе - действие на свободные заряды сил, которые могут создать упорядоченное движение зарядов. Тела, обладающие свободными зарядами, принято называть проводниками, а частицы, участвующие в переносе заряда - носителями тока. Эти частицы могут быть как микроскопическими - ионы, электроны, так и макроскопическими - пылинки, капельки жидкости.

Электрический ток, соответствующий движению микроскопических заряженных частиц в твердых, жидких и газообразных проводниках, называется током проводимости.

Источником силы, способной создать упорядоченное движение зарядов может быть электрическое поле. При внесении проводника в электрическое поле на носители тока будет действовать сила $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ (q – заряд носителя тока, \vec{E} - напряженность электрического поля), которая приведет к их упорядоченному движению.

Для характеристики электрического тока вводится понятие силы тока. **Силой тока I называется скалярная физическая величина, равная количеству заряда, переносимого через поперечное сечение проводника за единицу времени:**

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (2.1.1)$$

где dq - заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время dt . Если сила тока не изменяется с течением времени, то ток называется постоянным. В этом случае через любое поперечное сечение проводника за одинаковые промежутки времени t протекает одинаковое количество заряда q . Поэтому сила постоянного тока равна:

$$I = \frac{q}{t} \quad (2.1.2)$$

Сила тока I , текущего по участку однородного проводника, удовлетворяет, как показывает опыт, закону Ома:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (2.1.3)$$

где U - напряжения на концах участка проводника, а R - величина, характеризующая данный участок проводника и называемая его сопротивлением. Сопротивление проводника зависит от его геометрических размеров, материала, из которого он изготовлен, и температуры. Для однородного проводника при постоянной температуре сопротивление может быть рассчитано по формуле:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.1.4)$$

где ρ - удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник; l - длина проводника; S - площадь его поперечного сечения.

2.2 Условия существования электрического тока. Источники тока. Электродвижущая сила

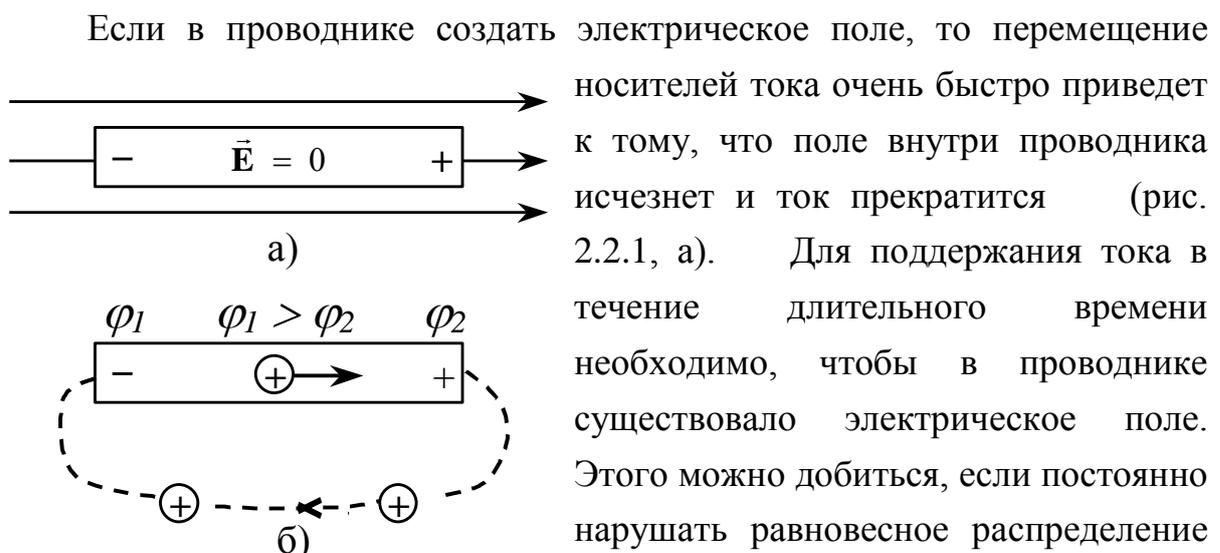


Рисунок 2.2.1

переносить заряды из областей с меньшим потенциалом (носители тока предполагаются положительными) в области с более высоким потенциалом (рис. 2.2.2, б). Иными словами, необходимо осуществить круговорот зарядов, при котором они двигались бы по замкнутому пути.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по замкнутому пути равна нулю. Поэтому в замкнутой цепи наряду с движением положительных зарядов под действием сил электростатического поля в сторону убывания потенциала должны быть участки цепи, где перенос положительных зарядов происходил бы в направлении возрастания потенциала, т.е. против сил электростатического поля. Перемещение носителей тока против сил электростатического поля возможно только под действием сил неэлектростатического происхождения – сторонних сил. Эти силы порождаются химическими процессами, диффузией носителей тока в неоднородной среде, электрическими полями, порождаемыми переменными во времени магнитными полями. Устройства, которые являются источниками сторонних сил, принято называть источниками тока.

Основная характеристика источника тока – электродвижущая сила (ЭДС). *ЭДС источника – это физическая величина, численно равная работе сторонних сил по перемещению положительного единичного заряда по цепи.* Следовательно, если работа сторонних сил над зарядом q равна A , то

$$\varepsilon = \frac{A}{q}. \quad (2.2.1)$$

ЭДС измеряется в вольтах.

2.3 Напряжение на участке цепи. Законы Ома для участка цепи и полной цепи. Правила Кирхгофа.

Величина сторонней силы $\vec{F}_{\text{ст}}$, действующей на заряд, равна:

$$\vec{F}_{\text{ст}} = \vec{E}^* q,$$

где \vec{E}^* – напряженность поля сторонних сил. Работа сторонних сил над зарядом q на участке цепи 1-2 равна:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = q \int \vec{E}^* d\vec{l}.$$

Разделив эту работу на q , получим ЭДС, действующую на данном участке:

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}. \quad (2.3.1)$$

Аналогичный интеграл, вычисленный для замкнутой цепи, даст ЭДС, действующую в этой цепи:

$$\varepsilon = \oint \vec{E}^* d\vec{l}. \quad (2.3.2)$$

Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил.

Учитывая то, что на заряд в каждой точке цепи действуют и электростатические и сторонние силы, то суммарная сила равна:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_{\text{ст}} = q (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}).$$

Работа, совершаемая этой силой над q зарядом на участке 1-2, определяется выражением

$$A_{12} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l} = q (\varphi_1 - \varphi_2) + q \varepsilon_{12}. \quad (2.3.3)$$

Физическая величина, численно равная работе, совершаемой при перемещении единичного заряда электростатическими и сторонними силами, называется падением напряжения или просто напряжением на данном участке цепи. В соответствии с формулой (2.3.3)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (2.3.4)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным участком цепи. Если на носители тока действуют и сторонние силы, то такой участок цепи называется неоднородным. Используя выражения (2.1.3) и (2.3.4), формулу закона Ома для неоднородного участка цепи (рис. 2.3.1, а) можно записать в виде

$$I = \frac{U_{12}}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{R}. \quad (2.3.5)$$

Необходимо помнить, что, если ЭДС способствует движению положительных зарядов в выбранном направлении, то $\varepsilon > 0$, если

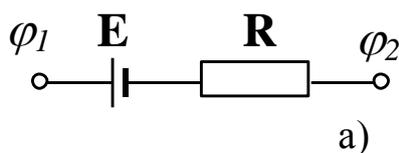
Рисунок 2.3.1 т, то $\varepsilon < 0$.

Учитывая связь заряда с силой тока (2.1.1) и (2.1.2), определение напряжения (2.3.4) и закон Ома для участка цепи (2.3.5), можно формулу для работы, совершаемой силами электрического поля при прохождении электрического тока (2.3.3) записать в виде

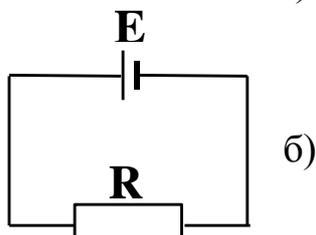
$$A_{12} = IU_{12}t = I^2 R t = \frac{U_{12}^2}{R} t, \quad (2.3.6)$$

где t – время прохождения тока. Формула 2.3.6 в случае, если в участке цепи отсутствуют устройства, преобразующие электрическую энергию в механическую (электродвигатели), определяет выделяющееся в участке цепи количество тепла и соответствует **закону Джоуля–Ленца**.

Допустив в формуле (2.3.5) $\varphi_1 = \varphi_2$, получим выражение закона Ома для замкнутой цепи (рис.2.3.1, б):



$$I = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (2.3.7)$$



В формулах (2.3.5) и (2.3.7) R – это полное сопротивление цепи, которое включает в себя внутреннее сопротивление источника тока, сопротивление соединительных проводов и сопротивление потребителей электрической энергии.

Формулы (2.3.5), (2.3.7) используются для расчета простых цепей. Расчет сложных цепей упрощается, если пользоваться правилами Кирхгофа. Первое из них относится к узлам цепи. Узел – это точка, в которой сходится более чем два проводника. Первое

Рисунок 2.3.1

правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=0}^N I_k = 0. \quad (2.3.8)$$

Второе правило относится к любому замкнутому контуру, выделенному в этой цепи. Согласно второму правилу Кирхгофа, алгебраическая сумма падений напряжений на каждом участке выбранного замкнутого контура равна алгебраической сумме Э.Д.С., включенных в этот контур:

$$\sum_{k=1}^N I_k \cdot R_k = \sum_{k=1}^N E_k. \quad (2.3.9)$$

Решения системы уравнений (4.5)-(4.6) позволят найти все токи в цепи, а также рассчитать напряжения на отдельных участках цепи.

2.4 Вектор плотности тока. Закон Ома в дифференциальной форме.

Силу тока можно определить не только для всего поперечного сечения проводника, но и для любой, в том числе элементарной (бесконечно малой) площадки dS_{\perp} , перпендикулярной направлению движения зарядов в точке ее нахождения. Эта сила тока

$$dI = \frac{dq}{dt}, \quad (2.4.1)$$

где dq – заряд, проходящий через элементарную площадку за время dt . Это позволяет ввести заданный в каждой точке проводника вектор плотности тока. Он характеризует распределение тока по поверхности, через которую он протекает. Величина плотности тока определяется формулой:

$$j = \frac{d^2q}{dt \cdot dS_{\perp}} = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (2.4.2)$$

где dS_{\perp} - площадь элементарной площадки, перпендикулярной к направлению движения зарядов. Таким образом, **вектор плотности тока численно равен заряду, переносимому в единицу времени через единичную (с площадью 1 м^2) площадку, расположенную перпендикулярно к направлению движения зарядов.** Направлен вектор плотности тока в сторону движения положительных зарядов.

Рассмотрим участок цилиндрического проводника, по которому течет ток (рис. 2.4.1). Выделим два сечения этого проводника, отстоящих друг от друга на расстоянии dl . Разность потенциалов между этими сечениями $d\varphi$.

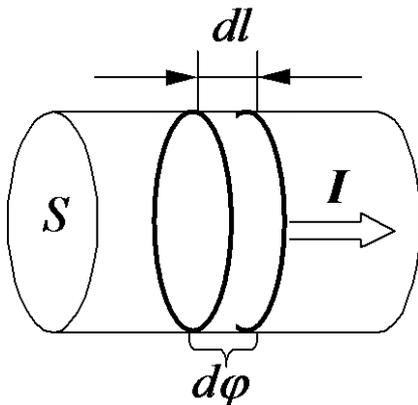


Рисунок 2.4.1

Сопротивление выделенного элемента проводника $dR = \rho dl / S$.

Применяя к рассматриваемому участку проводника закон Ома, получим:

$$I = \frac{d\varphi}{dR} = \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{S dl} \quad (2.4.3)$$

Из (2.4.3) следует выражение для величины плотности тока в проводнике

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{dl} \quad (2.4.4)$$

Производная $d\varphi/dl$ равна напряженности поля E внутри проводника. Таким образом,

$$j = \frac{1}{\rho} E \quad (2.4.5)$$

Вектор напряженности электрического поля \vec{E} задает направление движения положительных зарядов и направлен так же, как и вектор плотности тока \vec{j} , поэтому

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}, \quad (2.4.6)$$

где $\sigma = 1/\rho$ - удельная проводимость проводника. Полученное соотношение называется законом Ома в дифференциальной форме.

2.5 Элементы классической электронной теории металлов

Рассмотрим электрический ток в металлах. Согласно классической электронной теории при образовании кристалла металла из отдельных атомов валентные электроны отделяются от атомов. Образующиеся при этом положительные ионы занимают места в узлах кристаллической решетки. Валентные электроны, отделившись от атомов, заполняют все пространство между положительными ионами, компенсируя их кулоновское отталкивание. Положительные ионы в узлах кристаллической решетки совершают только колебательное движение. Электроны совершают тепловое хаотическое движение подобно молекулам идеального газа. Правда, в отличие от молекул газа электроны сталкиваются преимущественно не между собой, а с ионами в узлах кристаллической решетки. Благодаря этим столкновениям устанавливается тепловое равновесие между газом свободных электронов и кристаллической решеткой.

При включении электрического поля в металле начинается направленное движение электронов, то есть появляется электрический ток, плотность которого равна:

$$\vec{j} = n e \vec{u}_{\text{cp}}, \quad (2.5.1)$$

где n - концентрация электронов; \vec{u}_{cp} - средняя скорость направленного движения электронов. Сила, действующая на электроны со стороны электрического поля, сообщает им ускорение

$$\vec{a} = \frac{e \vec{E}}{m}, \quad (2.5.2)$$

к концу пробега скорость упорядоченного движения достигает в среднем значения:

$$\bar{\mathbf{u}}_{\max} = \bar{\mathbf{a}} \tau = \frac{e \vec{\mathbf{E}}}{m} \tau, \quad (2.5.3)$$

где τ - среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами. Это время определяется хаотическим тепловым движением электронов и может быть оценено по формуле

$$\tau = \frac{\lambda}{\langle v \rangle}, \quad (2.5.4)$$

где λ - средняя длина свободного пробега (по величине она должна быть близка к постоянной кристаллической решетки); $\langle v \rangle$ - средняя скорость теплового хаотического движения. Поэтому

$$\bar{\mathbf{u}}_{\max} = \frac{e \vec{\mathbf{E}} \lambda}{m \langle v \rangle}. \quad (2.5.6)$$

Среднее значение скорости упорядоченного движения равно половине максимального:

$$\bar{\mathbf{u}}_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{\max} = \frac{e \vec{\mathbf{E}} \lambda}{2 m \langle v \rangle}. \quad (2.5.7)$$

Тогда выражение для плотности тока в металле принимает вид

$$\bar{\mathbf{j}} = \frac{n e^2 \lambda}{2 m \langle v \rangle} \vec{\mathbf{E}}. \quad (2.5.8)$$

Следовательно, электропроводность металла определяется формулой

$$\sigma = \frac{n e^2 \lambda}{2 m \langle v \rangle}. \quad (2.5.9)$$

Таким образом, согласно классической электронной теории сопротивление металла обусловлено соударениями свободных электронов с ионами кристаллической решетки. Столкнувшись с ионом, электрон передает приобретенную от электрического поля дополнительную

кинетическую энергию кристаллической решетке. Сообщенная решетке энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, что проявляется в нагревании проводника. Отсюда также можно вывести закон Джоуля–Ленца для участка цепи (2.3.6)

Следует отметить трудности, с которыми столкнулась классическая электронная теория проводимости металлов. Первая трудность относится к самой успешности теории. В основе ее лежат весьма грубые упрощения реальной картины, не учитывается весьма сильное кулоновское взаимодействие между частицами. Но все попытки учесть взаимодействия приводят только к ухудшению согласия теории с экспериментальными данными.

Вторая трудность связана с зависимостью удельного сопротивления металла от температуры. Из молекулярной физики известно, что средняя скорость теплового движения частиц в теле $\langle v \rangle$ пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры, откуда должна следовать пропорциональность этой величине удельного сопротивления металла. Но эксперимент показывает, что при высоких и средних температурах удельное сопротивление пропорционально первой степени абсолютной температуры. А при температурах близких к абсолютному нулю сопротивление части металлов скачком обращается в точный нуль, это называется явлением сверхпроводимости металлов. Классическая электронная теория не может объяснить ни явление сверхпроводимости, ни линейную зависимость удельного сопротивления от температуры.

Третья трудность связана с молярной теплоемкостью металлов. Эксперимент показывает, что для всех металлов значения этой величины близки к $3R$, где R – универсальная газовая постоянная. Такое значение соответствует средней тепловой энергии, приходящейся на один атом $3kT$, где k – постоянная Больцмана, а эта энергия приходится на три колебательных степени свободы иона в узле кристаллической решетки. Таким образом, теплоемкость металла есть теплоемкость его кристаллической решетки, а теплоемкость идеального газа электронов на эксперименте не наблюдается. Между тем, для одновалентных металлов она должна увеличить общую теплоемкость в полтора раза, а для двухвалентных – вдвое.

Все перечисленные трудности удалось преодолеть только после перехода при описании электронного газа в металле от классической механики к квантовой.

3 ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

3.1 Магнитное поле и его характеристики. Законы Ампера и Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции для магнитного поля.

Все мы слышали слова “магнитное поле”, знаем, что постоянные магниты притягивают металлы, знаем, что стрелка компаса ориентируется вдоль магнитного поля Земли. Сейчас мы более детально познакомимся с тем, что мы называем “магнитное поле”. Итак, учение о магнетизме ведёт своё начало с опытов датского физика Х. Эрстеда, который в 1820 г. обнаружил, что проводник с током оказывает ориентирующее воздействие на магнитную стрелку. Схема опыта



Рисунок 3.1.1

Эрстеда показана на рис.3.1.1. При включении тока через прямолинейный проводник магнитная стрелка устанавливалась перпендикулярно току. При смене направления тока в проводнике

изменялось и направление магнитной стрелки. В том же 1820 г. Французский физик Ампер установил, что два параллельных прямых проводника с током, размещённых на некотором расстоянии R друг от друга, притягиваются, если токи в них имеют одинаковое направление, и отталкиваются, если токи в этих проводниках противоположно направлены. Он же установил и формулу силы, приходящейся на единицу длины каждого проводника. Сейчас выражение для этой силы записывается в виде

$$F_{un} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}. \quad (3.1.1)$$

Здесь I_1 и I_2 – токи в проводниках, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м – так называемая **магнитная постоянная**. Так было показано, что электрические токи могут создавать магнитное поле, посредством которого осуществляется взаимодействие между током и постоянным магнитом – как в опыте Х.Эрстеда – и между токами – как в опыте Ампера. Из опытов Эрстеда и Ампера следовало, что магнитное поле должно иметь направление, и, следовательно, величина, характеризующая это поле, должна быть векторной. По историческим причинам, основной силовой характеристикой магнитного поля была названа величина, которая называется магнитная индукция и обозначается **\mathbf{B}** . Магнитная индукция измеряется в Теслах (Тл). Эта величина названа в честь сербского физика Н. Тесла. Ампер же установил и закон, который определяет силу, действующую на элемент тока Idl в магнитном поле

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (3.1.2)$$

Квадратные скобки в (3.1.2) обозначают векторное произведение. Модуль векторного произведения (3.1.2) определяется как

$$dF = IdlB \sin \alpha, \quad (3.1.3)$$

где α - угол между векторами $d\mathbf{l}$ и \mathbf{B} . Здесь же отметим, что направление силы перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые вектора и определяется правилом правого винта для определения направления векторного произведения.

Из (3.1.3) следует и определение величины Тесла. А именно, если положить $\alpha = 90^\circ$, то $\sin \alpha = 1$, и тогда из (3.1.3) следует, что $B = \frac{dF}{I dl}$, или $1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ А } 1 \text{ м}}$, или **магнитному полю с индукцией в 1 Тл соответствует сила в 1 Н, действующая на кусок прямолинейного проводника в 1 м по которому течёт ток силой в 1 А при взаимно перпендикулярном расположении проводника и магнитного поля.**

Так как магнитное поле является силовым, то его можно графически изобразить при помощи линий магнитной индукции, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением

индукции магнитного поля в этой же точке. Подчеркнём, что основная силовая характеристика магнитного поля – это индукция. В этом смысле индукция магнитного поля аналогична напряжённости электрического поля. Кроме того, имеется и вспомогательная характеристика магнитного поля, которая называется напряжённость магнитного поля и эта величина аналогична электрическому смещению для электрического поля. Для однородной изотропной среды связь между напряжённостью и индукцией магнитного поля имеет следующий вид

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \quad (3.1.4)$$

Здесь μ - так называемая магнитная проницаемость среды, о которой мы будем говорить позднее.

Из опытов Эрстеда и Ампера следовало, что магнитное поле создаётся электрическими токами. Французские физики Био и Савар попытались установить закон, определяющий связь между током и создаваемым этим током магнитным полем. Они проделали много опытов, собрали большой фактический материал, но не смогли установить искомую зависимость из своих результатов. Тогда они обратились за помощью к тогда уже известному другому французскому учёному Лапласу. Лаплас проанализировал результаты опытов Био и Савара и предложил формулу, которая сейчас называется законом Био-Савара-Лапласа, и которая вместе с принципом суперпозиции для магнитного поля, позволяет определить магнитное поле, создаваемое любым проводником в произвольной точке

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[Id\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.1.5)$$

Здесь Idl – произведение силы тока на элементарный вектор dl , совпадающий по направлению с током на данном участке проводника, называется элементом тока. r – вектор, проведенный от элемента тока Idl в точку, где вычисляется магнитная индукция. Рис.3.1.2 поясняет формулу Био-Савара-Лапласа. Из формулы (3.1.4) и рис.3.1.2 видно, что направление магнитного поля связано с направлением тока в проводнике

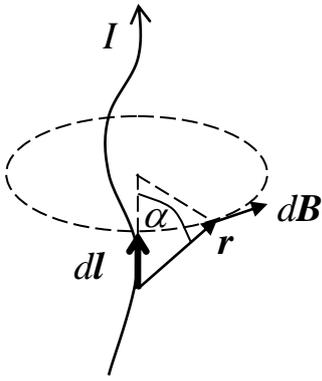


Рисунок 3.1.2

правилом правого винта. Таким образом, вектор магнитной индукции \mathbf{B} перпендикулярен плоскости, проходящей через вектор $d\mathbf{l}$ и точку, в которой вычисляется магнитная индукция. Чтобы получить индукцию, созданную всем проводником, нужно просуммировать в данной точке магнитные поля, создаваемые каждым элементом тока этого проводника. Если имеется несколько проводников, то необходимо векторно сложить в данной точке магнитные поля,

создаваемые каждым проводником в отдельности. Модуль выражения (3.1.4) определяется как

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (3.1.6)$$

где α - угол между векторами $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} .

Как уже отмечалось, для магнитного поля, так же как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции**, который утверждает, что **магнитное поле, созданное в некоторой точке несколькими токами, равно векторной сумме полей, создаваемых в этой точке каждым из токов в отдельности**

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (3.1.7)$$

Формулу (3.1.7) можно преобразовать следующим образом

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qnSdl [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qN [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.1.8)$$

Здесь q – заряд электрона, n – концентрация, \vec{v} - скорость направленного движения электронов в проводнике. Она совпадает по направлению с вектором $d\mathbf{l}$, поэтому мы имеем право в векторном произведении перенести значок вектора с вектора $d\mathbf{l}$ на вектор скорости. Мы также воспользовались тем, что сила тока может быть записана как плотность тока, умноженная на площадь поперечного сечения проводника

$I = jS = qn v S$, а также тем, что произведение поперечного сечения проводника на его бесконечно малую длину dl равно элементу объёма dV , а произведение концентрации зарядов на объём равно количеству зарядов в этом объёме N :

$$nSdl = ndV = N. \quad (3.1.9)$$

С учётом сделанных замечаний получим индукцию магнитного поля, создаваемого движущимся со скоростью \vec{v} зарядом

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.1.10)$$

Необходимо отметить, что формула (3.1.10) справедлива при условии $\frac{v}{c} \ll 1$, где c – скорость распространения света в вакууме.

Из (3.1.5) видно, что величина магнитного поля обратно пропорциональна квадрату расстояния до элемента тока, создающего это поле. Вспомним, что и основная силовая характеристика электрического поля – напряжённость электрического поля – также обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника этого поля – электрического заряда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (3.1.11)$$

Такая зависимость не является случайной, а отражает глубокую связь между электрическими и магнитными явлениями. В частности, в курсе теоретической физики доказывается, что магнитное взаимодействие токов является следствием закона Кулона и инвариантности заряда. Инвариантность заряда означает, что его величина не зависит от скорости движения заряда. Также доказывается, что электрическое и магнитное поля неразрывно связаны и образуют единое электромагнитное поле. Можно так выбрать систему отсчёта, что магнитное поле будет равно нулю. Этот вывод также следует и из формулы (3.1.9). Соответственно, также можно выбрать такую систему отсчёта, в которой электрическое поле будет равно нулю. Во всех остальных системах отсчёта будет

наблюдаться единое электромагнитное поле, как совокупность электрического и магнитного полей.

Теперь воспользуемся законом Ампера для расчёта силы взаимодействия, приходящейся на единицу длины двух параллельных токов. В самом деле, пусть у нас есть два параллельных проводника, с расстоянием между ними R , по которым в одном и том же направлении текут токи I_1 и I_2 – см. рис.3.1.3. Ток I_1 создаёт в месте нахождения второго проводника магнитное поле B_1 и ток I_2 создаёт в месте нахождения первого проводника магнитное поле B_2 . По закону Ампера на элемент тока $I_2 dl$ действует сила $dF_1 = I_2 B_1 dl$. Здесь учтено, что $\sin\alpha = 1$.

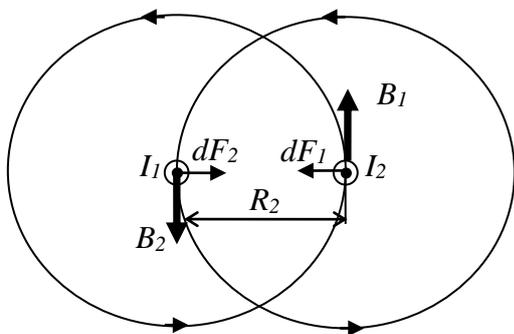


Рисунок 3.1.3

На основании (3.2.2) $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{R}$.

Окончательно, таким образом, получаем, что

$$dF_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (3.1.12)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$dF_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (3.1.13)$$

Направления сил указаны на рис. 3.1/3. Таким образом, получили, что два параллельных проводника, по которым текут токи в одном и том же направлении, притягиваются друг к другу с одинаковыми силами, приходящимися на единицу длины этих проводников и задаваемыми формулой (3.1). Если токи направлены в разные стороны, то, рассуждая аналогичным образом, можно показать, что проводники будут отталкиваться с силой, также определяемой (3.1).

3.2 Расчет магнитного поля для бесконечно длинного прямолинейного проводника и в центре кругового тока на основе закона Био-Савара-Лапласа.

В некоторой точке O все элементы тока создают поле направленное в одну и ту же сторону. Рис.3.2.1 соответствует случаю, когда поле

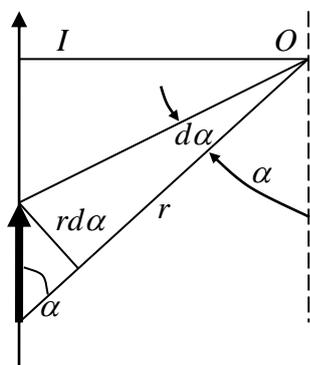


Рисунок 3.2.1

направлено от нас, за чертёж. Поэтому векторное сложение индукций создаваемых каждым элементом тока в данной точке, сведётся к сложению их модулей, величина каждого из которых определяется выражением (1.1.5). Для того, чтобы получить индукцию B , создаваемую в точке O всеми элементами тока, нужно просто сложить индукции, создаваемые каждым элементом тока, что означает взятие интеграла

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \alpha}{r^2} \quad (3.2.1)$$

Величина интеграла (3.2.1) зависит от расстояния до точки наблюдения r и угла α . Интеграл (3.2.1) можно упростить, выразив все изменяющиеся величины через одну, по которой затем произвести интегрирование. Для нашего интеграла удобно в качестве таковой использовать угол α . Из рис.3.2.1 видно, что

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Полученные выражения подставим в интеграл (3.2.1) и проинтегрируем по углу с учётом того, что он изменяется от нуля (для бесконечности внизу рис.3.2.1) до π (для бесконечности вверху рис.3.2.1). В результате получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \cdot \int_0^\pi \sin \alpha da = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} \quad (3.2.2).$$

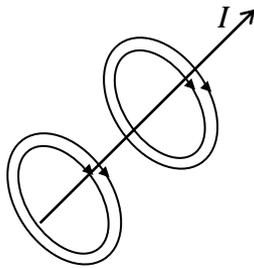


Рисунок 3.2.2

Линии индукции магнитного поля, создаваемого прямолинейным бесконечным током, представляют собой семейство концентрических окружностей, как это показано на рис.3.2.2. Таким образом, линии индукции магнитного поля не имеют ни начала, ни конца. Другими словами, нет в природе магнитных зарядов. Источниками магнитного поля всегда являются **движущиеся**

заряды.

Теперь получим выражение для индукции магнитного поля в центре кругового тока радиуса R . Из рис.3.2.3 видно, что все элементы тока

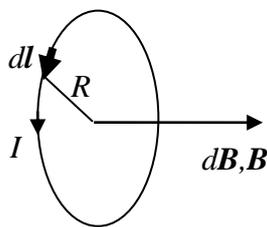


Рисунок 3.2.3

создают в центре кругового тока одинаково направленные индукции магнитного поля. Таким образом, векторная сумма может быть сведена к сложению модулей. Также видно, что угол $\alpha=90^\circ$. С учётом сделанных замечаний и используя (3.5), получим

$$B = \int dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}$$

Таким образом, магнитная индукция в центре кругового тока определяется выражением

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R} \quad (3.2.3)$$

3.3 Вихревой характер магнитного поля. Закон полного тока. Расчет полей бесконечно длинного соленоида и тороида.

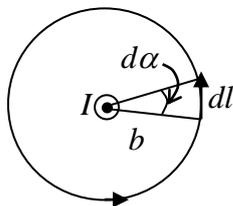
Для электростатического поля мы вводили понятие циркуляции вектора напряжённости электростатического поля как

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl . \quad (3.3.1)$$

Аналогично вводится циркуляция для магнитного поля

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl . \quad (3.3.2)$$

Здесь $B_l = B \cos \alpha$ - проекция вектора \mathbf{B} на направление касательной к контуру, α - угол между касательной к контуру и вектором \mathbf{B} . Посчитаем теперь циркуляцию для прямолинейного проводника с током. В качестве контура обхода выберем окружность некоторого радиуса b , в центре которой находится проводник с током. В этом случае индукция определяется выражением (3.2.2). Теперь, с учётом (3.2.2), посчитаем циркуляцию (3.3.2). Как видно из рис. 3.3.1. $dl = b d\alpha$.



Тогда

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} \int_0^{2\pi} b d\alpha = \mu_0 I \quad (3.3.3)$$

Рисунок 3.3.1

При вычислении интеграла мы также учли, что $\cos \alpha = 1$. Мы получили этот результат, специальным образом выбрав контур обхода. Оказывается, этот результат остаётся справедливым для любого контура обхода. Знак (3.3.3) зависит только от направления обхода – если направление обхода и направление тока соответствуют правилу правого винта, то знак (3.3.3) будет положительным. В противном случае знак будет отрицательным. Если же контур обхода охватывает несколько токов, то, в силу принципа суперпозиции для магнитного поля, можно записать, что

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint \left(\sum_m \vec{B}_m \right) d\vec{l} = \sum_m \oint \vec{B}_m d\vec{l} . \quad (3.3.4)$$

Каждый из интегралов в последней сумме равен $\mu_0 I_m$. Таким образом, окончательно получим

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_m I_m . \quad (3.3.5)$$

Полученное выражение называется законом полного тока для магнитного поля в вакууме и читается как **“Циркуляция вектора магнитной индукции в вакууме по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную”**.

Напомним, что для электростатического поля циркуляция вектора напряжённости равна нулю и это позволило ввести понятие потенциала для электростатического поля. Для магнитного поля циркуляция отлична от нуля и это означает, что для магнитного поля нельзя ввести понятие потенциала.

Если токи текут по всему пространству, охватываемому контуром, то $\sum_m I_m \rightarrow \int_S \vec{j} d\vec{S}$, и тогда вместо (3.3.5) получим

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (3.3.6)$$

Преобразуем левую часть (3.3.6) по теореме Стокса

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (3.3.7)$$

Последнее равенство в (3.3.7) справедливо, если подинтегральные выражения одинаковы в каждой точке поверхности S

$$\text{rot} \vec{B} = \vec{j}. \quad (3.3.8)$$

Поля, у которых ротор отличен от нуля, называются вихревыми или соленоидальными. Таким образом, магнитное поле является вихревым.

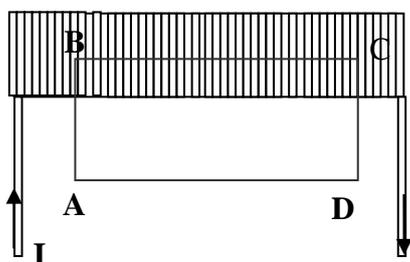


Рисунок 3.3.2

Применим закон полного тока для расчёта магнитного поля бесконечно длинного соленоида (соленоидом называют катушку с намотанным на ней проводом, по которому пропускают электрический ток). Соленоиды используют для получения магнитного поля. В

реальности, модель бесконечно длинного соленоида можно использовать

для реальных соленоидов, если длина соленоида много больше его диаметра. Эксперимент показывает, что магнитное поле в основном сосредоточено внутри соленоида.

Выберем некий контур обхода $ABCD$ и посчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции для этого контура. Пусть на длине $AD=BC$ укладывается N витков. Тогда

$$\int_{ABCD} B_l dl = \int_{AB} B_l dl + \int_{BC} B_l dl + \int_{CD} B_l dl + \int_{DA} B_l dl = \mu_0 NI . \quad (3.3.9)$$

Интегралы на участках AB и CD равны нулю, поскольку на этих участках $B_l=0$ (угол между векторами B и dl равен 90°). На участке DA магнитное поле равно нулю (для конечного соленоида поле вне его, конечно же будет, но очень слабым, поэтому им можно пренебречь). Таким образом, вместо (3.3.9) получим

$$\int_{ABCD} B_l dl = \int_{BC} B_l dl = \mu_0 NI . \quad (3.3.10)$$

Теперь вспомним, что поле внутри соленоида постоянное и его можно вынести за знак интеграла. Оставшийся интеграл даст длину участка $BC=l$. Следовательно, для поля внутри соленоида окончательно получим

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI . \quad (3.3.11)$$

Здесь $n = N/l$ – число витков, приходящееся на единицу длины. Важное место в технике имеет также тороид – кольцевая катушка с навитым на ней проводом. Как показывает опыт, поле полностью сосредоточено внутри катушки, поэтому выберем контур обхода, проходящим внутри катушки. Очевидно, что это будет окружность радиуса r . Если в катушке N витков, то для поля внутри тороида получим

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \mu_0 nI . \quad (3.3.12)$$

Из (3.3.11) и (3.3.12) видно, что формулы для тороида и бесконечно длинного соленоида одинаковы. И это неудивительно, если вспомнить, что бесконечно длинный соленоид можно представить как тороид с бесконечно большими радиусами.

3.4 Контур с током в магнитном поле

Пусть у нас имеется плоский контур с постоянным током I в однородном магнитном поле B , причём поле направлено, как показано на рис.3.4.1. В соответствии с законом Ампера на элемент тока действует

сила

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (3.4.1)$$

Чтобы получить полную силу, действующую на контур, необходимо проинтегрировать (3.4.1). При этом учтём, что магнитное поле и сила тока – величины постоянные.

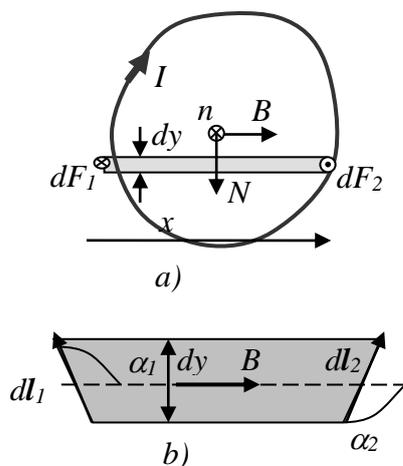


Рисунок 3.4.1

$$\vec{F} = \oint I[d\vec{l}, \vec{B}] = I[(\oint d\vec{l}), \vec{B}] = 0,$$

поскольку $\oint d\vec{l} = 0$. Таким образом, получили, что результирующая сила, действующая на контур в постоянном магнитном поле равна нулю. Продолжим наш анализ дальше.

На выделенный элемент тока слева действует сила dF_1 , направленная от нас, а на выделенный элемент тока справа действует сила dF_2 , направленная на нас. Модули этих сил равны по величине. В самом деле

$$dF_1 = IBdl_1 \sin \alpha_1 = IBdy$$

$$dF_2 = IBdl_2 \sin \alpha_2 = IBdy$$

Мы, получили, что на противоположные участки контура действуют две противоположно направленные и одинаковые по величине силы, которые создают вращательный момент

$$dN = IBx dy = IBdS. \quad (3.4.2)$$

Здесь $dS = x dy$ - площадь заштрихованной полоски. Из рис.3.4.1 видно, что вектора \mathbf{n} (единичный вектор нормали к поверхности контура - $d\mathbf{s} = \mathbf{n}dS$) \mathbf{B} и \mathbf{N} образуют правовинтовую систему, следовательно, можно записать, что

$$d\mathbf{N} = I[\mathbf{n}, \mathbf{B}]dS, \quad (3.4.3)$$

и

$$\mathbf{N} = \int I[\mathbf{n}, \mathbf{B}]dS = I[\mathbf{n}, \mathbf{B}] \int dS = I[\mathbf{n}, \mathbf{B}]S = [I S \mathbf{n}, \mathbf{B}] = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]. \quad (3.4.4)$$

Здесь $\mathbf{p}_m = I S \mathbf{n}$ – так называемый магнитный момент контура с током. Таким образом, получили, что на контур с током в магнитном поле действует вращательный момент

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]. \quad (3.4.5)$$

Модуль выражения (3.4.1) равен

$$N = p_m B \sin \alpha. \quad (3.4.6)$$

Можно показать, что если направления магнитного момента и магнитного поля совпадают, то магнитные силы стремятся растянуть контур, а если магнитный момент и магнитное поле имеют противоположные направления, то магнитные силы стремятся сжать контур.

Для того, чтобы увеличить угол между магнитным моментом и внешним магнитным полем на $d\alpha$, необходимо внешними силами совершить работу против магнитных сил, создающих вращательный момент (3.4.6).

$$dA = p_m B \sin \alpha \cdot d\alpha. \quad (3.4.7)$$

Эта работа пойдёт на увеличение механической составляющей потенциальной энергии контура с током в магнитном поле

$$dW_{\text{мех}} = p_m B \sin \alpha \cdot d\alpha. \quad (3.4.8)$$

Интегрируя, и полагая константу интегрирования равной нулю (тем самым мы просто смещаем начало отсчёта потенциальной энергии), получим

$$W_{mech} = - p_m B \cos \alpha = -\mathbf{p}_m \mathbf{B}. \quad (3.4.9)$$

Из (3.4.9) следует, что если направления магнитного момента и магнитного поля совпадают, то потенциальная энергия будет иметь минимум и это будет положение устойчивого равновесия. Если же направления магнитного поля и магнитного момента антипараллельны, то это будет соответствовать максимуму потенциальной энергии, и, следовательно, это будет положение неустойчивого равновесия.

3.5 Теорема Гаусса для магнитного поля. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.

Потоком вектора магнитной индукции через площадку dS называется скалярное произведение

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_n \cdot dS. \quad (3.5.1)$$

Здесь $B_n = B \cos \alpha$ - проекция вектора \mathbf{B} на направление нормали к площадке dS . Если по контуру течёт ток, то положительное направление вектора нормали к поверхности связывают правилом правого винта с направлением тока в контуре. Таким образом, магнитный поток, создаваемый самим током контура всегда положителен. Исходя из (3.5.1) полный поток через контур

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int B_n \cdot dS. \quad (3.5.2)$$

Если поле однородно по *плоской* поверхности, то

$$\Phi = B \cdot S. \quad (3.5.3)$$

Из последнего соотношения следует определение единицы измерения магнитного потока, которая называется Вебер (Вб): 1 Вб – это магнитный поток через 1 м² плоской поверхности индукции магнитного поля в 1 Т при параллельном направлении индукции и вектора нормали к поверхности.

Для магнитного потока справедлива теорема Гаусса: **поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю**

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int B_n \cdot dS = 0. \quad (3.5.4)$$

Аналогичная теорема для вектора напряжённости электрического поля звучит как **поток вектора напряжённости электрического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключённых внутри этой поверхности, делённой на электрическую постоянную**

$$\int \mathbf{E} d\mathbf{S} = \Sigma q / \epsilon_0. \quad (3.5.5)$$

Таким образом, теорема Гаусса для магнитного поля отражает факт отсутствия в природе магнитных зарядов, и что линии индукции магнитного поля суть замкнутые линии. В качестве примера рассмотрим, чему равен магнитный поток, создаваемый соленоидом, через соленоид. Поскольку внутри соленоида магнитное поле однородно по сечению соленоида и совпадает с направлением нормали к одному витку, то магнитный поток через один виток будет равен (см. формулу (3.11) для магнитного поля соленоида)

$$\Phi_1 = BS = \frac{\mu_0 NI}{l} S. \quad (3.5.6)$$

Магнитный поток через весь соленоид будет очевидно равен магнитному потоку через 1 виток, умноженному на число витков и эта величина называется потокоцеплением

$$\Psi = \Phi_1 N = BSN = \frac{\mu_0 N^2 I}{l} S. \quad (3.5.7)$$

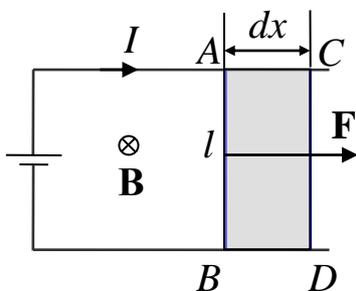


Рисунок 3.5.1

Если проводник длиной \$l\$ с током \$I\$ не закреплён (участок \$AB\$ на рис.3.5.1), то под действием силы Ампера он будет перемещаться в магнитном поле \$\mathbf{B}\$ в направлении \$x\$. По определению, элементарная работа будет равна

$$dA = Fdx = IBldx = IBdS = Id\Phi, \quad (3.5.8)$$

где $d\Phi$ – магнитный поток через поверхность dS , очерчиваемую проводником при его движении. Таким образом, получили, что работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока в проводнике на магнитный поток через поверхность, которую пересекает проводник при своём движении. Можно показать, что полученная формула справедлива и при произвольном направлении вектора \mathbf{B}

$$dA = Id\Phi. \quad (3.5.9)$$

Выражение для работы по перемещению замкнутого контура оказывается подобным (3.5.9) и для произвольного конечного перемещения контура в магнитном поле имеет вид

$$A = I\Delta\Phi, \quad (3.5.10)$$

т.е. равно произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

3.6 Сила Лоренца. Эффект Холла.

Как известно, на проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера (1.1.2). Перепишем выражение для силы Ампера в несколько ином виде

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}] = jS [d\mathbf{l}, \mathbf{B}] = qn v S [d\mathbf{l}, \mathbf{B}] = qns dl [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = qndV [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = qN [\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (3.6.1)$$

Здесь мы учли, что $I = jS$; $j = qn v$ – есть плотность тока, $Sdl = dV$ – элемент объёма проводника, $ndV = N$ – число электронов в этом элементе объёма. Также учли, что направления векторов \mathbf{v} и $d\mathbf{l}$ совпадают между собой, и поэтому мы имеем право в векторном произведении перенести значок вектора с элемента $Id\mathbf{l}$ на скорость \mathbf{v} . Если теперь разделим обе части (3.6.1) на число электронов, то получим силу, действующую на движущийся электрон в магнитном поле. Эта сила называется силой Лоренца и она равна

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (3.6.2)$$

Подчеркнём, что тот путь, которым мы получили выражение для силы Лоренца нельзя рассматривать как вывод этой формулы. Выражение для силы Лоренца найдено экспериментально. Просто мы показали, как из одного экспериментального выражения (для силы Ампера) можно получить другое и наоборот. Но и сила Ампера и сила Лоренца представляют собой прежде всего экспериментально установленные законы природы. Модуль (3.6.2) естественно определяется выражением

$$F = qvB\sin\alpha. \quad (3.6.3)$$

Здесь α - угол между векторами \mathbf{v} и \mathbf{B} .

Так как сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости частицы, то она работу не совершает. Она только изменяет направление скорости (оставаясь всегда перпендикулярной направлению скорости), оставляя неизменной величину скорости. Мы знаем, что движение под действием силы, всё время перпендикулярной направлению скорости и оставляющей неизменной её величину, есть движение по окружности.

Если помимо магнитного поля, имеется и электрическое, то полная сила, действующая на движущийся заряд, будет определяться как

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}] + q\mathbf{E}. \quad (3.6.4)$$

Полученное выражение называют формулой Лоренца.

Можно показать, что сила магнитного взаимодействия двух движущихся со скоростью v ($v \ll c$) относительно магнитного поля зарядов относится к силе электрического взаимодействия между ними, как

$$\frac{F_m}{F_e} = \varepsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}. \quad (3.6.5)$$

Другими словами, из (3.6.5) следует, что магнетизм исчез бы, если бы скорость света была равна бесконечности. Таким образом, магнетизм является релятивистским эффектом.

Эффектом Холла называют возникновение в проводнике, помещённом в перпендикулярное к направлению тока магнитное поле, поперечной к направлению тока разности потенциалов. Пусть у нас есть проводник прямоугольного поперечного сечения (см. рис 3.6.1), по

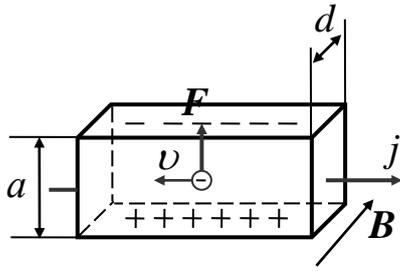


Рисунок 3.6.1

которому течёт ток плотностью j . Перпендикулярно направлению тока приложено магнитное поле B . На электроны, скорость которых противоположна направлению тока, будет действовать сила Лоренца. Под действием этой силы электроны будут отклоняться к верхней грани, которая, таким образом, будет заряжаться отрицательно. На

нижней грани будут оставаться нескомпенсированные положительные заряды. В результате возникнет поперечное поле. В стационарном

состоянии величина этого поля будет равна силе Лоренца $eE = e \frac{\Delta\varphi}{a} = e v B$

или $\Delta\varphi = a v B$. Здесь $\Delta\varphi$ - поперечная (холловская) разность потенциалов.

Так как сила тока $I = jS = e v n S$ (n как обычно, концентрация электронов),

то $v = \frac{I}{enS}$. Подставим полученное выражение для скорости в формулу для холловской

разности потенциалов. При этом учтём, что $S = ad$.

Окончательно получим, что

$$\Delta\varphi = \frac{I}{enS} a B = \frac{I}{enad} a B = \frac{I}{end} B = R \frac{IB}{d}$$

или

$$\Delta\varphi = R \frac{IB}{d}. \quad (3.6.6)$$

Здесь $R = \frac{1}{en}$ - так называемая постоянная Холла. Таким образом, измеряя

макрохарактеристики, такие как холловская разность потенциалов, сила тока в проводнике, индукция магнитного поля, а также поперечный размер проводника d , можно определить концентрацию зарядов и их знак – для положительных зарядов (дырок в полупроводниках), холловское поле будет иметь противоположный знак.

3.7 Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея.

После того, как было установлено, что магнитное поле создаётся электрическими токами, учёные пытались решить обратную задачу – при помощи магнитного поля создать электрический ток. Эту задачу успешно решил М.Фарадей в 1831 г., который открыл явление электромагнитной индукции. Суть этого явления заключается в том, что **в замкнутом проводящем контуре при любом изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур, возникает электрический ток, который называется индукционным.** Схема некоторых опытов Фарадея показана

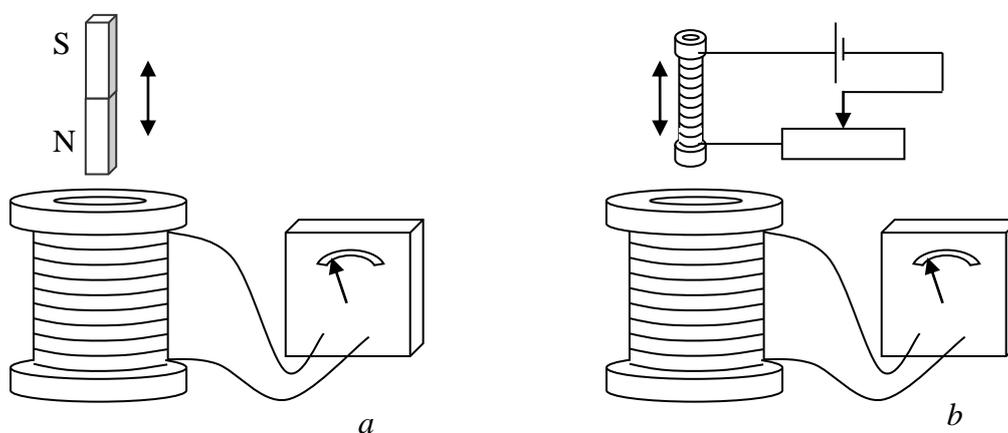


Рисунок 3.7.1

на рис. 3.7.1. При изменении положения постоянного магнита относительно катушки, замкнутой на гальванометр, в последней возникал электрический ток, причём направление тока оказывалось различным – в зависимости от направления перемещения постоянного магнита. Аналогичный результат достигался и при перемещении другой катушки, по которой шёл электрический ток. Более того, в большой катушке возникал ток даже при неизменном положении меньшей катушки, но при изменении тока в ней. На основании подобных опытов М.Фарадей пришёл к выводу, что в катушке всегда возникает электрический ток при изменении магнитного потока, сцепленного с этой катушкой. Величина тока зависит от скорости изменения магнитного потока. Сейчас мы формулируем открытия Фарадея в виде закона электромагнитной индукции: **при любом изменении магнитного потока, сцепленного с проводящим замкнутым контуром, в этом контуре возникает ЭДС индукции, которая определяется как**

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.7.1)$$

Знак “–” в (3.7.1) означает, что при увеличении магнитного потока, магнитное поле, созданное индукционным током, направлено против внешнего магнитного поля. Если же магнитный поток уменьшается по величине, то магнитное поле индукционного тока совпадает по направлению с внешним магнитным полем. Русский учёный Х.Ленц таким образом определил появление знака минус в (3.7.1) – ***Индукционный ток в контуре всегда имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле имеет такое направление, что препятствует изменению магнитного потока, вызвавшего возникновение индукционного тока.***

Дадим ещё одну формулировку закона электромагнитной индукции: ***ЭДС индукции в замкнутом проводящем контуре равна взятой с противоположным знаком скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур.***

Немецкий физик Гельмгольц показал, что закон электромагнитной индукции можно получить из закона сохранения энергии. В самом деле, энергия источника ЭДС по перемещению проводника с током в магнитном поле (см.рис.3.5.1) будет затрачена как на Джоулев разогрев проводника сопротивлением R , так и на работу по перемещению проводника

$$\mathcal{E} I dt = I^2 R dt + I d\Phi. \quad (3.7.2)$$

Тогда из (3.7.2) сразу же следует, что

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (3.7.3)$$

В числителе (3.7.3) стоит алгебраическая сумма ЭДС, действующих в контуре. Следовательно,

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Какова же физическая причина возникновения ЭДС? На заряды в проводнике АВ действует сила Лоренца при движении проводника вдоль оси х. Под действием этой силы положительные заряды будут смещаться вверх, в результате чего электрическое поле в проводнике будет ослаблено. Другими словами, в проводнике появится ЭДС индукции. Следовательно, в рассмотренном нами случае, физической причиной возникновения ЭДС является сила Лоренца. Однако, как мы уже отмечали, и в неподвижном замкнутом контуре может появиться ЭДС индукции, если будет изменяться магнитное поле, пронизывающее этот контур. В этом случае заряды можно считать неподвижными, а на неподвижные заряды сила Лоренца не действует. Чтобы объяснить возникновение ЭДС в этом случае, Максвелл предположил, что всякое изменяющееся магнитное поле порождает в проводнике изменяющееся электрическое поле, которое и является причиной возникновения ЭДС индукции. Циркуляция вектора напряжённости, действующей в этом контуре, таким образом, будет равна ЭДС индукции, действующей в контуре

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} . \quad (3.7.4)$$

Явление электромагнитной индукции используется для превращения механической энергии вращения в электрическую – в генераторах электрического тока. Обратный процесс – превращение электрической энергии в механическую, основанный на вращательном моменте, действующем на рамку с током в магнитном поле, используется в электродвигателях.

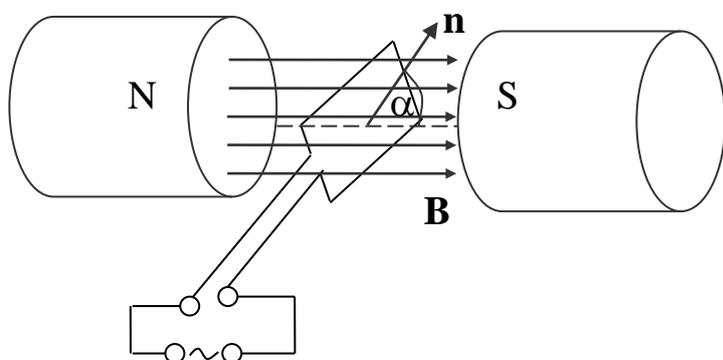


Рисунок 3.7.2

Рассмотрим принцип действия генератора электрического тока (рис. 3.7.2). Пусть у нас проводящая рамка вращается между полюсами магнита (это может быть и

электромагнит) с частотой ω . Тогда угол между нормалью к плоскости рамки и направлением магнитного поля изменяется по закону $\alpha = \omega t$. В этом случае магнитный поток, сцепленный с рамкой, будет изменяться в соответствии с

$$\Phi = BS \cos \omega t, \quad (3.7.5)$$

где S – площадь контура. В соответствии с законом электромагнитной индукции в рамке будет индуцироваться ЭДС

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t = \varepsilon_{\max} \sin \omega t, \quad (3.7.6)$$

с $\varepsilon_{\max} = BS\omega$. Таким образом, если в магнитном поле вращается с постоянной угловой скоростью проводящая рамка, то в ней будет индуцироваться ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону. В реальных генераторах вращают много витков, соединенных последовательно, а в электромагнитах, для увеличения магнитной индукции, используют сердечники с большой магнитной проницаемостью μ .

Индукционные токи могут возникать и в толще проводящих тел, помещённых в переменное магнитное поле. В этом случае эти токи называются токами Фуко. Эти токи вызывают разогрев массивных проводников. Это явление используется в вакуумных индукционных печах, где сильные токи разогревают металл до плавления. Поскольку разогрев металлов происходит в вакууме, то это позволяет получать особо чистые материалы.

3.8 Самоиндукция. Экстратоки размыкания и замыкания цепи

Текущий в замкнутом контуре электрический ток создаёт вокруг себя магнитное поле, величина которого, на основании закона Био-Савара-Лапласа, пропорциональна току в контуре I . Поэтому магнитный поток через поверхность этого же контура (сцепленный с контуром) может быть записан как

$$\Phi = LI, \quad (3.8.1)$$

где коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью контура. Если ток, а следовательно и магнитный поток (3.8.1) будут изменяться во времени, то согласно закона электромагнитной индукции в контуре возникнет дополнительная к существующей ЭДС самоиндукции.

Явление возникновения в замкнутом контуре ЭДС при изменении силы тока в этом же контуре, называется явлением самоиндукции. Единица измерения индуктивности называется Генри. Из (3.8.1) следует определение 1 Гн – это есть индуктивность контура, в котором магнитный поток самоиндукции равен 1 Вб при протекании в контуре тока в 1 А . Посмотрим, чему равна индуктивность бесконечно длинного соленоида. На основании (5.7) магнитный поток, сцепленный с контуром, равен

$$\Psi = \Phi_1 N = BSN = \frac{\mu_0 N^2 I}{l} S \quad (3.8.2)$$

Из сравнения формул (3.8.1) и (3.8.2) видно, что

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \quad (3.8.3)$$

Если сердечник контура представляет собой материал с магнитной проницаемостью μ , то тогда вместо (3.8.3) следует писать

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}. \quad (3.8.4)$$

Из (3.8.4) видно, что индуктивность контура определяется его геометрическими размерами, числом витков, и магнитной проницаемостью сердечника.

На основании (3.8.1) можно найти чему равна ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} \right). \quad (3.8.5)$$

Так как контуры делаются, как правило, жёсткими, то $\frac{dL}{dt} = 0$, и тогда для ЭДС самоиндукции получаем

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.8.6)$$

Если ток в контуре возрастает $\frac{dI}{dt} > 0$, то $\varepsilon_s < 0$, и ток самоиндукции направлен против “основного тока”. Если же основной ток убывает $\frac{dI}{dt} < 0$, то $\varepsilon_s > 0$ и ток самоиндукции совпадает с направлением основного тока. И в том и в другом случае индукционный ток замедляет изменение основного тока. Другими словами, катушка индуктивности обладает электрической инерционностью, которая обусловлена законом Ленца и любые изменения тока тормозятся тем больше, чем больше индуктивность контура.

Наличие в электрической цепи индуктивности приводит к замедлению любого изменения тока в этой цепи. Более того, как мы ниже покажем, в момент размыкания и замыкания цепи в ней могут возникать большие дополнительные ЭДС самоиндукции и обусловленные этими ЭДС электрические токи, которые называются экстратоками размыкания и замыкания.

Пусть у нас есть контур, состоящий из ЭДС ε (внутренним сопротивлением пренебрегаем), сопротивления R , и индуктивности L –

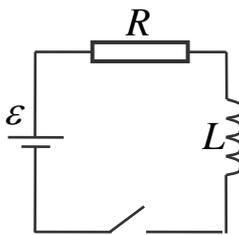


Рисунок 3.8.1

см.рис. 3.8.1. В цепи течёт ток $I_0 = \frac{\varepsilon}{R_0}$. В момент размыкания цепи, когда ток в цепи резко уменьшается, в индуктивности возникает ЭДС самоиндукции. На основании закона Ома можно записать

$$IR = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.8.7)$$

В последнем уравнении разделим переменные и разделим обе части на L , после чего получим $\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$. Проинтегрируем левую часть от I_0

до I , а правую – от нуля до t : $\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t$ или

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.8.8)$$

где $\tau = \frac{L}{R}$ называется временем релаксации. Таким образом, при выключении ток уменьшается до нуля не мгновенно, а в соответствии с законом (3.8.8). График этого процесса показан на рис. 3.8.2, кривая 1.

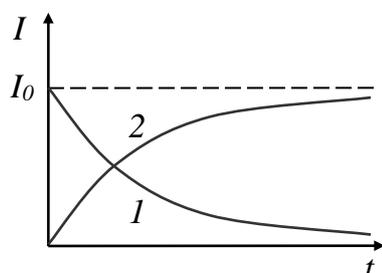


Рисунок 3.8.2

Можно показать, что при замыкании цепи, ток будет нарастать постепенно, в соответствии с законом

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (3.8.9)$$

чему соответствует кривая 2 на рис. 3.8.1.

Из (3.8.8) и (3.8.9) видно, что и нарастание тока при замыкании цепи, и спадание тока при размыкании, будут тем быстрее, чем меньше индуктивность и больше сопротивление. Таким образом, наличие индуктивности в цепи обуславливает инерционные свойства цепи.

В момент резкого размыкания цепи, содержащей индуктивность, ЭДС самоиндукции может превышать действующую в цепи ЭДС (до выключения) во много раз. Это может привести к пробоем диэлектрика и большим токам утечки. Поэтому такие цепи следует выключать и включать плавно, чтобы ЭДС самоиндукции не достигала больших значений.

3.9 Взаимная индукция. Трансформаторы. Энергия магнитного поля.

Пусть у нас имеется 2 контура, расположенных недалеко друг от друга. Тогда, если в контуре 1 течёт ток I_1 , то магнитный поток, пронизывающий второй контур, может быть записан как

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1 \quad (3.9.1).$$

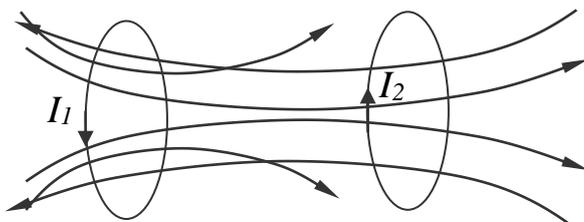


Рисунок 3.9.1

Здесь L_{21} - коэффициент пропорциональности, который называется коэффициентом взаимной индукции. Если ток I_1 будет изменяться, и контура – жёсткие, то во втором контуре будет индуцироваться ЭДС индукции, равная

$$\varepsilon_{s2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (3.9.2)$$

Аналогично, если будет изменяться ток во втором контуре, то в первом будет индуцироваться ЭДС и можно записать, что

$$\varepsilon_{s1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (3.9.3)$$

Соответствующий расчёт (и опыт это подтверждает) показывает, что коэффициенты взаимной индукции равны друг другу

$$L_{12} = L_{21}, \quad (3.9.4)$$

А явление возникновения в одном контуре ЭДС, при изменении тока в другом контуре, называется явлением взаимной индукции.

Для примера рассмотрим, чему равен коэффициент взаимной индуктивности для практически важного случая 2-х контуров, намотанных на один тороидальный сердечник (тороидальный трансформатор – см.рис. 3.9.2). Пусть в контуре 1 имеется N_1 витков и через эту обмотку пропускается ток I_1 , а в контуре 2 – N_2 витков. Потокосцепление со вторым контуром равно

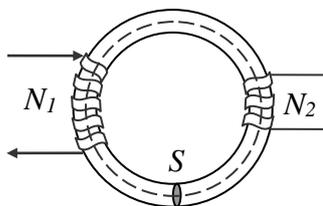


Рисунок 3.9.2

$$\Psi = \Phi_2 N_2 = B_1 S N_2 = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1}{l_1} S N_2. \quad (3.9.5)$$

Из сравнения (3.9.1) и (3.9.5), и на основании (3.9.4) находим, что

$$L_{21} = L_{12} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l_1} S. \quad (3.9.6)$$

Если ток I_1 изменяется во времени, то в контуре 1 возникает ЭДС самоиндукции, а в контуре 2 – ЭДС взаимной индукции. Обмотка 1 называется тогда первичной, а обмотка 2- вторичной. Можно показать, что отношение ЭДС

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{N_2}{N_1}. \quad (3.9.7)$$

Если $N_2 > N_1$, то трансформатор называется повышающим, в противном случае трансформатор называется понижающим. Знак минус в (3.9.7) указывает на то, что напряжения в обмотках находятся в противофазе.

Пусть у нас имеется контур L , по которому течёт ток I . Магнитный поток самоиндукции равен $\Phi = LI$. Для того, чтобы увеличить поток на $d\Phi$ надо увеличить ток на dI

$$d\Phi = LdI. \quad (3.9.8)$$

Для того, чтобы увеличить поток, необходимо затратить работу $Id\Phi$. Полная работа на создание магнитного потока, будет, очевидно, равна

$$dA = Id\Phi = LI dI. \quad (3.9.9)$$

Для того, чтобы получить полную работу источника ЭДС на создание магнитного потока величины Φ , необходимо проинтегрировать (3.9.9)

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.9.10)$$

Работа (3.9.10) была затрачена на создание магнитного поля W , следовательно, магнитная энергия, запасённая в контуре

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.9.11)$$

Подставим в (3.9.5) выражение (8.4) для $L: L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}$. В результате получим

$$W = \frac{LI^2}{2} = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l} I^2. \quad (3.9.12)$$

Заменим I в (3.9.12), используя выражение (3.11):

$$Bl = \mu_0 \mu NI \Rightarrow I = \frac{Bl}{\mu_0 \mu N}$$

$$W = \frac{LI^2}{2} = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l} I^2 = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} Sl = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V = \frac{BH}{2} V. \quad (3.9.13)$$

В последнем выражении мы также учли, что $Sl=V$ – объём соленоида, и $B=\mu_0 \mu H$. Мы знаем, что магнитное поле сосредоточено внутри соленоида и однородно. Это означает, что энергия магнитного поля распределена по соленоиду также однородно с объёмной плотностью

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (3.9.14)$$

Хотя формула (3.9.14) получена для однородного поля, она справедлива и для неоднородного.

3.10 Магнитные моменты электронов и атомов. Намагниченность вещества. Диа- и парамагнетики.

Все вещества реагируют на наличие магнитного поля, потому все вещества являются **магнетиками**. Мы раньше формально учитывали магнитные свойства среды при помощи магнитной проницаемости μ . Сейчас мы попытаемся определить, какими же процессами в веществе определяется изменение μ , или, другими словами, почему вещества ведут себя по разному в магнитном поле. Наше рассмотрение будет качественным и основанным на гипотезе Ампера, согласно которой в любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах. При этом движение электрона по орбите рассматривается в рамках классических представлений. При таком

движении электрон создаёт круговой ток $I=ev$ (e – заряд электрона, v – частота вращения), и, следовательно, обладает орбитальным магнитным моментом

$$p_m=IS=evS. \quad (3.10.1)$$

Кроме того, было установлено, что электрон обладает собственным магнитным (его ещё называют спиновым) магнитным моментом. Под спином понимают собственный механический момент импульса электрона. Но любой заряд, обладающий механическим моментом импульса, обладает и магнитным моментом. Было также установлено, что проекция спинового магнитного момента на направление внешнего поля может принимать только 2 значения, которые называются магнетоном Бора

$$p_{msB} = \pm \frac{eh}{2m} = \pm \mu_B. \quad (3.10.2)$$

Здесь h – постоянная Планка, а μ_B - так называемый магнетон Бора. Таким образом, суммарный магнитный момент электрона складывается из орбитального и спинового магнитных моментов. Магнитный момент атома \vec{p}_a , в свою очередь, должен складываться из магнитных моментов электронов и магнитных моментов ядер. Последние, однако, в тысячи раз меньше магнитных моментов электронов (см.11.2), поэтому можно записать, что

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}. \quad (3.10.3)$$

Для характеристики магнитных свойств веществ вводится величина, которая называется **намагниченность**, и которую для однородного вещества можно определить как магнитный момент единицы объёма

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_m}{V}. \quad (3.10.4)$$

Имеются вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атомов, а, следовательно, и намагниченность, равны нулю. Такие вещества называются диамагнетиками. Если включить внешнее магнитное поле, то, в соответствие с законом Ленца, на движение

электронов в атоме будет накладываться движение (такое движение называют прецессией), которое будет порождать магнитный момент (магнитное поле), направленное против внешнего поля. Подчеркнём, что такое индуцированное поле, ослабляющее внешнее поле, будет наблюдаться у всех веществ, независимо от того, имеют ли атомы собственные магнитный момент, или нет. Просто для диамагнетиков этот эффект проявляется в чистом виде (поэтому он и называется диамагнитным). Итак, можно дать двойное определение диамагнетиков. С одной стороны – это вещества, магнитные моменты атомов которых в отсутствие внешнего магнитного поля равны нулю. С другой стороны – это вещества, которые ослабляют внешнее магнитное поле.

Имеется ещё один класс веществ, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов не равны нулю, но вследствие теплового движения магнитные моменты атомов направлены хаотически и намагниченность равна нулю. Такие вещества называются парамагнетиками. Внешнее магнитное поле оказывает ориентирующее воздействие на магнитные моменты атомов, каждый из которых приобретает составляющую магнитного момента вдоль направления внешнего поля. Подчеркнём, что и для парамагнетиков присущ диамагнитный эффект, но определяющим его магнитные свойства является именно ориентирующее действие внешнего магнитного поля на магнитные моменты атомов.

3.11 Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля. Ферромагнетики.

На основании изложенного, можно записать, что магнитное поле в рассмотренных веществах (диамагнетиках и парамагнетиках) можно представить в виде суммы 2-х слагаемых – внешнего магнитного поля и магнитного поля \mathbf{B}' , обусловленного микротоками вещества

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'. \quad (3.11.1)$$

Можно показать, что

$$\mathbf{V}' = \mu_0 \mathbf{J} . \quad (3.11.2)$$

Для не очень сильных магнитных полей намагниченность прямо пропорциональна напряжённости поля \mathbf{H} , вызвавшего эту намагниченность

$$\mathbf{0J} = \chi \mathbf{H} . \quad (3.11.3)$$

Здесь коэффициент пропорциональности χ называется магнитной восприимчивостью вещества. С учётом (3.11.2) и (3.11.3) выражение для магнитного поле в магнетике (3.11.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}' = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}) = \mu_0 (\mathbf{H} + \chi \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} \Rightarrow \\ \mathbf{V} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} \end{aligned} \quad (3.11.4),$$

или

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 (1 + \chi)} . \quad (3.11.5)$$

Величина $\mu = 1 + \chi$ называется магнитной проницаемостью вещества. С учётом сделанного замечания вместо (3.11.5) можно записать

$$\mathbf{V} = \mu_0 \mu \mathbf{H} . \quad (3.11.6)$$

С учётом новых введённых величин, для диамагнетиков $\chi < 0$ и $\mu < 1$, а для парамагнетиков - $\chi > 0$ и $\mu > 1$.

Подчеркнём, что вспомогательная величина H – напряжённость магнитного поля, создаётся только внешними токами – токами проводимости. Тогда для напряжённости магнитного поля можно сформулировать закон полного тока в таком виде: ***циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром***

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k . \quad (3.11.7)$$

Кроме диа- и парамагнетиков, которые являются слабыми магнетиками, существуют и сильно магнитные вещества, которые могут

обладать спонтанной намагниченностью и без внешнего магнитного поля. Для ферромагнетиков характерны нелинейная зависимость намагниченности, а следовательно, и магнитной индукции, от напряжённости внешнего магнитного поля – см. рис. 3.11.1. Такой характер зависимостей определяет и вид зависимости магнитной проницаемости от напряжённости магнитного поля – рис. 3.11.1 с.

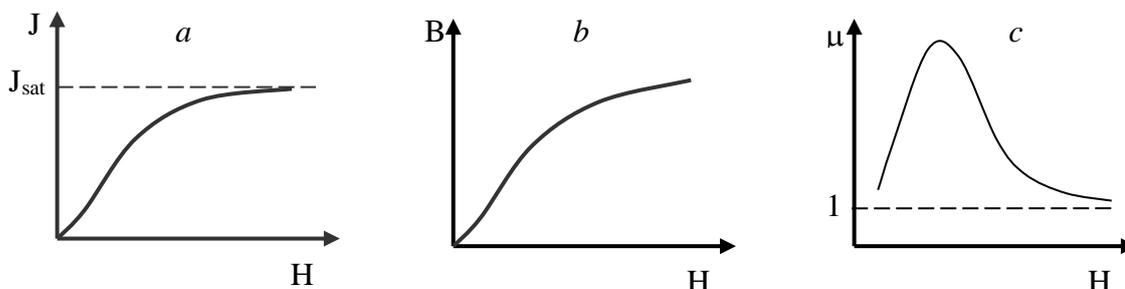


Рисунок 3.11.1

3.12 Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла.

Как мы знаем из закона электромагнитной индукции Фарадея, в замкнутом контуре индуцируется ЭДС при изменении магнитного потока пронизывающего этот контур

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.12.1)$$

Если контур (проводник) движется, то причиной возникновения ЭДС может быть сила Лоренца. Если же контур неподвижен, то и в этом случае, как показывает опыт, в нём возникает ЭДС, определяемая (3.12.1). Какова же в этом случае причина возникновения ЭДС? Под действием ЭДС в контуре возникает электрический ток. Это значит, что на электроны проводника действует электрическое поле. Если контур жёсткий, то можно записать

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \text{ или}$$

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (3.12.2)$$

(Мы поставили знак частной производной, поскольку магнитная индукция может зависеть и от координаты и от времени.) Из 14.2 следует, что циркуляция этого поля по замкнутому контуру не равна нулю, в отличие от электростатического поля. Максвелл предположил, что изменяющееся во времени магнитное поле порождает *вихревое* электрическое поле, независимо от того, имеется у нас проводящий контур, или нет. Просто если он есть, то позволяет зарегистрировать вихревое электрическое поле \vec{E}_B .

Левую часть (3.12.2) можно преобразовать по формуле Стокса $\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E}_B d\vec{S}$. Тогда, вместо (3.12.2) получим

$$\int_S \text{rot} \vec{E}_B d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (3.12.3)$$

Поскольку интегрирование может производиться по любой поверхности, опирающейся на контур L , то в каждой точке этой поверхности должны равняться подинтегральные выражения

$$\text{rot} \vec{E}_B = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.12.4)$$

Поле \vec{E}_B существенно отличается от электростатического поля, для которого, как мы помним, циркуляция по замкнутому контуру равна нулю $\oint_L \vec{E}_q d\vec{l} = 0$, а значит, в соответствии с теоремой Стокса, и ротор этого поля

в любой точке равен нулю

$$\int_L \vec{E}_q d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E}_q d\vec{S} = 0 \Rightarrow \text{rot} \vec{E}_q = 0. \quad (3.12.5)$$

В общем случае

$$\vec{E} = \vec{E}_B + \vec{E}_q, \quad (3.12.6)$$

но для ротора суммарного поля, в силу (3.12.5), остаётся справедливым соотношение (3.12.4). Таким образом

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.12.7)$$

Поскольку переменное магнитное поле порождает электрическое, как это следует из закона индукции Фарадея и полученной нами из этого закона формуле (3.12.7), то должно существовать и обратное явление – переменное электрическое поле должно порождать магнитное поле. Для установления количественных соотношений, рассмотрим процесс заряда конденсатора.

Для начала определим поле вблизи поверхности металлической обкладки конденсатора. Применим терему Гаусса для вектора

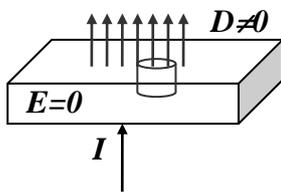


Рисунок 3.12.1

электрического смещения к одной из обкладок – см. рис. 3.12.1. Внутри металла поле равно нулю, а снаружи направлено перпендикулярно поверхности. Следовательно, поток через весь цилиндр сведётся к потоку через верхнее основание цилиндра, площадью dS . И этот поток должен равняться заряду, заключённому внутри

нашего цилиндра, или $DdS = \sigma dS$, или

$$D = \sigma. \quad (3.12.8)$$

Здесь σ – поверхностная плотность зарядов на обкладке конденсатора.

Как мы уже говорили, Максвелл предположил, что изменяющееся электрическое поле создаёт магнитное поле. Но мы знаем, что постоянное магнитное поле создаётся токами. Поэтому естественно предположение, что должен быть ещё один ток, который Максвелл назвал током смещения, и который ответственен за создание магнитного поля. Для установления вида этого тока смещения, рассмотрим соотношение (3.12.8) справа налево, а именно

$$\sigma = D. \quad (3.12.9)$$

Умножим обе части на площадь пластины S получим

$$q = \sigma S = DS. \quad (3.12.10)$$

Здесь q – заряд пластины конденсатора. Во время заряда конденсатора ток в подводящем проводе

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} S = \frac{dD}{dt} S. \quad (3.12.11)$$

Разделив обе части последнего уравнения на площадь пластины S , получим слева ток проводимости $j=I/S$, а справа – плотность нового, максвелловского тока, или плотность тока смещения. Таким образом,

$$\vec{j}_{displace} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.12.12)$$

В последнем уравнении мы поставили значки векторов – для общего случая и написали частную производную, поскольку в общем случае вектор электрического смещения может зависеть и от координаты.

Проанализировав полученные результаты, Максвелл ввёл понятие общего тока, как сумму токов проводимости и тока смещения. Здесь подчеркнём, что ток смещения – это просто название изменяющегося во времени электрического поля. Единственная функция тока смещения – создавать магнитное поле. Тогда обобщенный закон полного тока будет иметь вид

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{tot} d\vec{S} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (3.12.13)$$

или окончательно

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (3.12.14)$$

Максвелл создал замкнутую макроскопическую теорию электромагнитного поля. В основе этой теории лежат его знаменитые уравнения. Первая пара связывает основные характеристики электрического и магнитного полей

$$\int_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad (3.12.15)$$

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.12.16)$$

В уравнении (3.12.15) под полем \vec{E} надо понимать полное поле – поле, созданное неподвижными зарядами и поле, созданное изменяющимся магнитным полем. Уравнение (3.12.16) отражает тот факт, что в природе нет магнитных зарядов.

Вторая пара уравнений Максвелла связывает вспомогательные характеристики электрического и магнитного полей

$$\int_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad (3.12.17)$$

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = \rho. \quad (3.12.18)$$

Уравнение (3.12.17) является следствием того, что магнитное поле создаётся как токами проводимости, так и токами смещения (изменяющимся во времени электрическим полем). И уравнение (3.12.18) говорит нам, что источниками электрического поля (помимо изменяющегося магнитного поля) являются электрические заряды. Уравнения Максвелла (3.12.15)-(3.12.18) называются уравнениями Максвелла в интегральной форме.

Уравнения Максвелла дополняются так называемыми материальными уравнениями, которые устанавливают связь между вспомогательными и основными характеристиками полей. Для однородной и изотропной неферромагнитной среды эти уравнения имеют вид

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \quad \vec{j} = \sigma\vec{E} \quad (3.12.19)$$

Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей, поскольку в природе нет магнитных зарядов.

Уравнения Максвелла позволили предсказать существование электромагнитных волн – распространяющихся в пространстве со скоростью света переменных электрического и магнитного полей. Вскоре электромагнитные волны были обнаружены немецким физиком Г.Герцем.

Оказалось, что их свойства полностью описываются уравнениями Максвелла. Это также позволило Максвеллу создать электромагнитную теорию света – как электромагнитных волн с длиной волны $\lambda = 0.4..0.7 \mu m$.

Если применить к уравнениям (3.12.15)-(3.12.18) теоремы Гаусса и Стокса, то получим уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (3.12.20)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (3.12.21)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (3.12.22)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (3.12.23)$$

Уравнения (3.12.6)-(3.12.9) связывают локальные характеристики поле в каждой точке.

4 КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1 Колебания. Типы колебаний. Характеристики колебаний. Гармонические колебания.

Колебаниями называются процессы, в той или иной мере повторяющиеся во времени. Колебания бывают механические, электромагнитные, численности животных и т.д. Здесь важно отметить, что независимо от типа колебаний, все они описываются одинаковым образом с математической точки зрения, т.е., одинаковыми уравнениями. Поэтому колеблющуюся величину мы будем часто называть *колебательной системой*.

Иногда колебания играют отрицательную роль в технике – например, вибрация (что означает колебания со звуковой частотой) корпуса автомобиля, корабля, самолёта.... В других случаях, колебания не просто играют положительную роль, но на колебаниях основаны самые различные отрасли техники – например радиовещание, телевидение, да и вообще вся инфраструктура передачи информации.

В зависимости от характера внешнего воздействия на колебательную систему различают свободные и вынужденные колебания.

Свободными, или собственными называются колебания системы выведенной из положения устойчивого равновесия внешней силой и затем предоставленной самой себе. Колебания при этом совершаются за счёт внутренних сил системы.

Вынужденными называются колебания, происходящие под действием периодически изменяющегося внешнего воздействия на систему.

Периодическими называются такие колебания, при которых значения физических величин (например, некоторой величины S), характеризующих колебательную систему, повторяются через равные промежутки времени, наименьший из которых называется **периодом** колебаний

$$S(t+T)=S(t) \quad (4.1.1)$$

Частотой колебаний называется число полных колебаний в 1 времени: $\nu = \frac{1}{T}$. Размерность частоты – Герц: Гц = 1/с. **Циклической**, или круговой частотой называется число полных колебаний за 2π секунд:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (4.1.2).$$

Чрезвычайно важными в теории колебаний являются гармонические колебания – это такие колебания, которые происходят по закону синуса или косинуса:

$$\begin{aligned} S &= A\sin(\omega t + \varphi_{01}) \\ S &= A\cos(\omega t + \varphi_{02}) \end{aligned} \quad (4.1.3).$$

Во первых, очень многие колебания, особенно малые, в технике имеют гармонический вид (4.1.3). Во вторых, любые периодические процессы, которые не являются гармоническими, могут, тем не менее, быть представлены как наложение простых гармонических колебаний.

Часто систему, совершающую гармонические колебания, называют гармоническим осциллятором.

В (4.1.3) $A \equiv S_{max}$ - максимальное значение колеблющейся величины, называется амплитудой колебаний. Аргумент синуса или косинуса называется фазой колебаний

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= (\omega t + \varphi_{01}) \\ \Phi_2(t) &= (\omega t + \varphi_{02})\end{aligned}\quad (4.1.4),$$

а значение фазы в начальный момент времени $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ называется начальной фазой. Отметим, что с изменением начала отсчёта времени изменяется и начальная фаза. Так как функции (4.1.3) являются периодическими с периодом 2π , то всегда можно выбрать начальную фазу по модулю меньшей π .

Хотя функции синуса и косинуса являются взаимно дополняющими друг друга, по ряду причин чаще для представления гармонических колебаний используют функцию косинуса. Например, математические выражения чаще оказываются более простыми, если представлять гармоническое колебание в комплексном виде

$$S^* = Ae^{i(\omega t + \varphi)} \quad (4.1.5)$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$. Такое представление основано на доказываемой в математике формуле Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (4.1.6)$$

В соответствии с (4.1.6) вещественная часть (4.1.5) представляет собой гармоническое колебание

$$\operatorname{Re} S^* = S = A \cos(\omega t + \varphi_{02}) \quad (4.1.7).$$

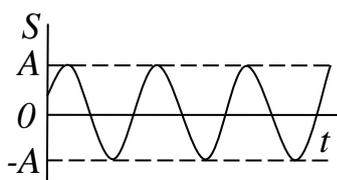


Рисунок 4.1.1

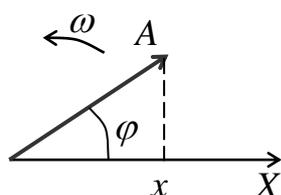
Графически вид гармонических колебаний (4.1.3) показан на рисунке 4.1.1. Ещё раз отметим, что функция, изображённая на этом рисунке, может быть представлена как

синусом, так и косинусом – естественно, с разными начальными фазами.

4.2 Метод векторных диаграмм. Сложение гармонических сонаправленных и взаимно перпендикулярных колебаний.

В некоторых случаях гармонические колебания удобно изображать при помощи метода векторных диаграмм. Возьмём ось X и на ней точку O . Из этой точки отложим вектор длиной A под углом φ к оси X – см. рис.

4.2.1. Если вращать этот вектор с частотой ω , то проекция этого вектора на ось X будет изменяться по закону



$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Рисунок 4.2.1

Таким образом, проекция вектора на ось X будет совершать гармоническое колебание с круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора и с начальной фазой, равной углу, который образует вектор A с осью X в начальный момент времени.

Воспользуемся методом векторных диаграмм для сложения двух колебаний одинаково направленных и с одинаковой частотой. Т.е., пусть результирующее смещение будет суммой двух смещений $x = x_1 + x_2$, причём

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

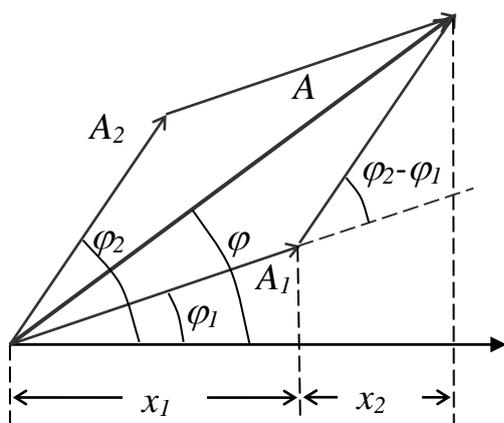


Рисунок 4.2.2

Представим оба колебания при помощи метода векторных диаграмм – рис. 4.2.2. В соответствии с правилом сложения векторов получим результирующий вектор A . Из рисунка видно, что его проекция на ось X равна сумме проекций слагаемых векторов x_1 и x_2 . Другими словами, вектор A действительно является суммой двух колебаний. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью, что и вектора-слагаемые, т.е.

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.2.1),$$

причём, как это видно из рис. 4.2.2

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4.2.2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (4.2.3).$$

Мы продемонстрировали возможности метода векторных амплитуд на примере сложения двух колебаний. Особенно удобен этот метод, когда надо складывать много колебаний – мы просто складываем вектора по правилу сложения векторов.

Как следует из (4.2.2), если разность фаз складываемых колебаний равна 0, то результирующая амплитуда будет просто равна сумме амплитуд. Складываемые колебания в этом случае называются **синфазными, а колебания, у которых разность фаз не изменяется с течением времени, называются когерентными**. Если же разность фаз равна π , то результирующая амплитуда будет равна разности амплитуд складываемых колебаний. О таких колебаниях говорят, что они происходят в **противофазе**. Если же частоты складываемых колебаний неодинаковы, то векторы-слагаемые будут вращаться с разными угловыми скоростями, а результирующий вектор будет изменяться по величине и вращаться с изменяющейся угловой скоростью. Результирующее колебание при этом уже не будет гармоническим.

Особый интерес представляет сложение двух гармонических колебаний с близкими (но разными!) частотами. В этом случае результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое с пульсирующей амплитудой. Такое колебание называют **биениями**.

Итак, будем складывать 2 колебания с близкими частотами, т.е. будем считать, что $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2$. Для упрощения формул будем

складывать колебания с одинаковыми амплитудами, а начальные фазы обеих колебаний положим равными нулю:

$$x_1 = A \cos \omega t; \quad x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t$$

Применяя формулу сложения косинусов

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ получим}$$

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t \quad (4.2.4).$$

Здесь мы пренебрегли во втором сомножителе слагаемым $\frac{\Delta\omega}{2}$ по сравнению с ω . График результирующей функции (4.2.11) показан на

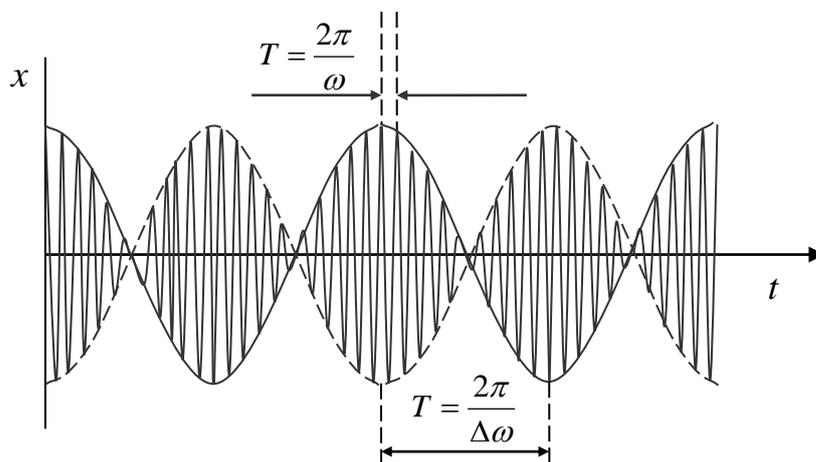


Рисунок 4.2.3

рис. 4.2.4. Из рисунка видно, что мы можем рассматривать результирующее колебание как гармоническое с периодически изменяющейся амплитудой

$$A^* = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \quad (4.2.5).$$

Пусть теперь частица одновременно совершает колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, например, вдоль осей y и x . Фазу колебания вдоль оси x положим равной 0.

$$x = A \cos \omega t; \quad y = B \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.2.6).$$

Чтобы получить уравнение траектории в координатах x и y из уравнений (4.2.6) необходимо исключить время. Из первого уравнения (4.2.6) следует, что

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}; \quad \sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \quad (4.2.7)$$

Теперь раскроем косинус во втором уравнении (4.2.6) в соответствии с формулой $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. В результате получим

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \varphi \mp \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \quad (4.2.8)$$

Возведём в квадрат (4.2.8), приведём подобные члены и, последовательно, получим

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \varphi \right)^2 = \sin^2 \varphi \cdot \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right)$$

$$\frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos \varphi + \frac{x^2}{A^2} \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{x^2}{A^2} \sin^2 \varphi$$

$$\frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos \varphi + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2 \varphi \quad (4.2.9).$$

Последнее уравнение (4.2.9) представляет собой уравнение эллипса, оси которого повернуты произвольным образом относительно осей x и y . Ориентация осей и форма эллипса зависят от разности фаз φ . Проанализируем (4.2.9) для некоторых частных случаев.

1. Разность фаз складываемых колебаний: $\varphi = \pm m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Тогда в (4.2.16) $\cos \varphi = \pm 1$; и $\sin \varphi = 0$ и в результате вместо (4.2.9) получим уравнение прямой (говорят, что эллипс вырождается в прямую)

$$y = \pm \frac{B}{A}x \quad (4.2.10),$$

где знак “+” соответствует нулю и чётным значениям m (рис.4.2.4а), а знак “-”

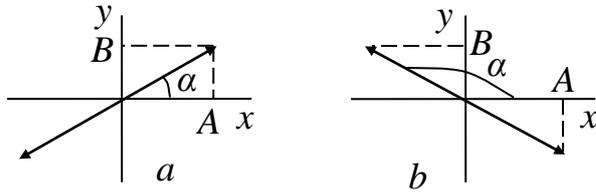


Рисунок 4.2.4

соответствует нечётным значениям m – рис.4.2.4 б. Результирующее колебание будет гармоническим с частотой ω и амплитудой $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Угол $\alpha = \arctg \frac{B}{A}$. Такие колебания называются **линейно-поляризованными**.

2. Пусть теперь разность фаз складываемых колебаний:

$\varphi = (2m + 1)\frac{\pi}{2}, (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Тогда уравнение (4.2.9) примет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (4.2.11)$$

Это есть уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны, соответственно, A и B . Такие колебания называются **эллиптически поляризованными**. Если ещё и $A=B$, то эллипс вырождается в окружность, и колебания в этом случае называются **циркулярно-поляризованными**. Анализ показывает (провести самостоятельно), что при $\alpha = \pi/2$ точка вращается по часовой стрелке, $\alpha = -\pi/2$ - против.

Если частоты складываемых колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания имеет сложную форму, которая зависит от соотношения частот и фаз складываемых колебаний. В этом случае результирующие кривые называются фигурами Лиссажу. Эти фигуры протабулированы и их анализ позволяет делать заключение о характеристиках одного колебания, если характеристики другого известны.

4.3 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Физический и математический маятники.

Гармонические колебания (4.1.3) являются решением дифференциального уравнения гармонических колебаний

$$\ddot{S} + \omega^2 S = 0, \quad (4.3.1)$$

в чём можно убедиться непосредственной подстановкой. В самом деле,

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{S} &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 S \end{aligned} \quad (4.3.2).$$

Следует также отметить, что систему, совершающую гармонические колебания, называют *гармоническим осциллятором*.

В качестве примера гармонических колебаний рассмотрим колебания груза на пружине вдоль оси x . Эти колебания, как мы знаем, происходят под действием упругой силы $F = -kx$. Это уравнение можно переписать как

$$m \ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (4.3.3)$$

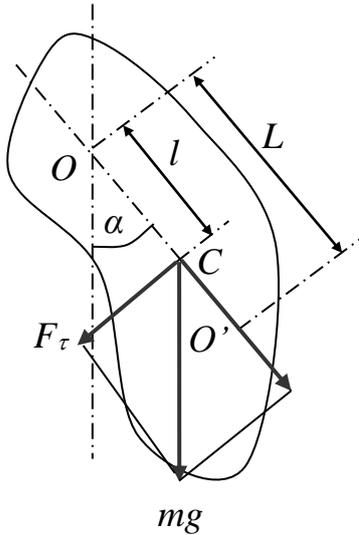
Если в последнем уравнении обозначить $\frac{k}{m} = \omega^2$, то придём к уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (4.3.4)$$

которое абсолютно подобно уравнению (4.3.1). На основании подобной аналогии силы, под действием которых совершаются гармонические колебания, называют *квазиупругими*.

Физическим маятником называют колебания твёрдого тела под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела (точку C на рис.4.3.1.). Отведём маятник из положения равновесия на некоторый малый угол α .
4.3.1 Запишем теперь 2-й закона Ньютона для вращательного движения

$$M = J \ddot{\alpha} \quad (4.3.5)$$



Здесь момент возвращающей силы M для малых углов α

$$M = F_{\tau} l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha \quad (4.3.6)$$

В (4.3.6) знак “-” отражает тот факт, что направления возвращающей силы F_{τ} и угла α всегда противоположны.

J – момент инерции маятника относительно точки подвеса O . Объединяя (4.3.5) и (4.3.6) придём к уравнению

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0. \quad (4.3.7)$$

Обозначим $\omega^2 = \frac{mgl}{J}$ и окончательно получим

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0. \quad (4.3.8)$$

Решение последнего уравнения мы знаем

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.3.9)$$

Таким образом, при малых отклонениях из положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания с частотой

$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (4.3.10)$$

где $L = \frac{J}{ml}$ - называется **приведенной длиной** физического маятника.

Точка O' , которая находится на расстоянии приведенной длины от точки подвеса, называется **центром качаний** физического маятника. Точка подвеса маятник O и центр качаний обладают свойством

взаимности – если маятник перевернуть и подвесить за точку O' , то период колебания маятника не изменится.

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на длинной тонкой нерастяжимой нити и совершающая колебания под действием силы тяжести. Момент инерции материальной точки, подвешенной на нити длиной l , относительно точки подвеса

$$J = ml^2 . \quad (4.3.11)$$

Подставим (4.3.29) в (4.3.28) и получим известную со школы формулу для периода колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \quad (4.3.12)$$

Из сравнения формул (4.3.12) и (4.3.10) видно, что если приведенная длина физического маятника равна длине математического маятника, то их периоды совпадают. Т.о., приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, у которого период колебаний равен периоду физического маятника.

4.4 Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и анализ его решений.

Гармонические колебания происходят в системе, свободной от потерь энергии. В этом случае полная механическая энергия колеблющейся системы сохраняется. В жизни, однако, потери энергии присутствуют всегда. Механическая энергия расходуется, как мы уже говорили, против работы диссипативных сил. Амплитуда колебаний при этом, естественно уменьшается, а сами колебания называются затухающими. В очень важном случае не очень больших потерь энергии сила сопротивления (сила трения) пропорциональна скорости частицы, совершающей колебательное движение

$$F_{\partial\partial} = -r\dot{S} \quad (4.4.1)$$

Здесь r называется коэффициентом сопротивления среды.

Таким образом, при наличии сопротивления среды колебания происходят под действием двух сил – упругой (квазиупругой) и силы сопротивления. В таком случае 2-й закон Ньютона для такой системы имеет вид

$$m\ddot{S} = -kS - r\dot{S} \quad (4.4.2).$$

Последнее уравнение обычно записывают в виде

$$\ddot{S} + 2\beta\dot{S} + \omega_0^2 S = 0 \quad (4.4.3)$$

и называют дифференциальным уравнением затухающих колебаний.

Здесь $\beta = \frac{r}{2m}$ - называют коэффициентом затухания, а $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ - частота собственных колебаний системы (собственная частота) в отсутствие сил сопротивления ($r=0$), на что указывает нижний индекс – 0.

Уравнения типа (4.4.3) в математике называют однородным линейным (все производные в первой степени) дифференциальным уравнением второго порядка (старшая производная – вторая) с постоянными коэффициентами. Решением такого уравнения является функция

$$S = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (4.4.4),$$

где $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний, e – основание натурального логарифма, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - собственная циклическая частота затухающих колебаний. На рис. 4.4.1 показан график функции (4.4.4).

В соответствии с (4.4.4) движение колебательной системы можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой ω и с изменяющейся по экспоненциальному закону амплитудой $A(t)$. Начальное смещение S_0 зависит как от амплитуды в начальный момент времени A_0 , так и от начальной фазы φ_0 : $S_0 = A_0 \cos \varphi_0$.

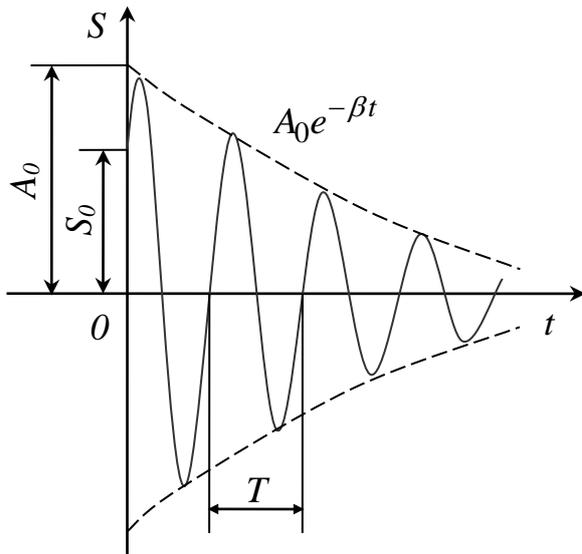


Рисунок 4.4.1

Найдём время τ , за которое амплитуда уменьшается в e раз – так называемое время релаксации:

$$e^{-\beta\tau} = e^{-1}.$$

Следовательно $\beta\tau=1$, или $\beta=1/\tau$, т.е. коэффициент затухания равен обратному времени релаксации.

Отношение двух последующих через период амплитуд называется декрементом затухания

$$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}, \quad (4.4.5),$$

а натуральный логарифм этого отношения называется **логарифмическим декрементом затухания**

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T \quad (4.4.6).$$

За время релаксации система совершит $N_e = \tau/T$ колебаний. С учётом этого, а также принимая во внимание, что $\beta=1/\tau$, получим

$$\lambda = \beta T = \frac{1}{\tau} T = \frac{1}{N_e} \quad (4.4.7).$$

Следовательно, логарифмический декремент затухания является величиной обратной числу колебаний, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Для характеристики колебательной системы также используют величину, которая называется добротностью и определяется как

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e \quad (4.4.8).$$

Из (4.4.8) видно, что добротность пропорциональна числу колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Можно показать, что зависимость полной энергии

$E = \frac{1}{2}kS^2 + \frac{1}{2}m\dot{S}^2$ от времени даётся выражением

$$E = E_0 e^{-2\beta t} \quad (4.4.9),$$

где $E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2$. Продифференцировав (4.4.9) по времени, найдём, что

скорость убывания энергии определяется как

$$-\frac{dE}{dt} = 2\beta E \quad (4.4.10).$$

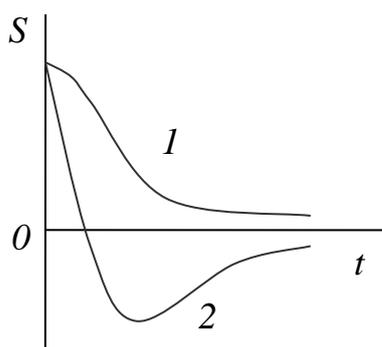
При малом затухании, когда убыль энергии за период невелика, приближённо можно считать, что

$$-\frac{\Delta E}{T} = 2\beta E, \text{ или } -\Delta E = 2\beta TE \quad (4.4.11)$$

откуда находим, что

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{\lambda} = \frac{Q}{2\pi} \quad (4.4.12).$$

Таким образом, получили, что при малом затухании добротность с точностью до множителя $1/2\pi$ равна отношению энергии, запасённой к данному моменту времени, к убыли этой энергии за 1 период колебаний.



Период затухающих колебаний определяется выражением

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (4.4.13)$$

Рисунок 4.4.2

из которого следует, что по мере увеличения коэффициента затухания β период стремится к бесконечности, т. е. движение перестаёт быть периодическим. При большом затухании $\beta > \omega$ система, выведенная из положения равновесия, возвращается к нему, не совершив ни одного

колебания. Такое движение называется *апериодическим*. Анализ показывает, что возможны 2 вида апериодического движения, показанные на рис. 4.4.2. Какой из видов реализуется на практике зависит от начальных условий. Кривая 1 описывает апериодический процесс, когда систему вывели из положения равновесия и отпустили с нулевой начальной скоростью. Кривая 2 соответствует случаю, когда системе дали начальный толчок к положению равновесия. Другими словами, для случая 1 начальная скорость равна нулю, а для случая 2 она отлична от нуля.

4.5 Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и анализ его решений. Резонанс.

Теперь рассмотрим случай, когда на колебательную систему действует внешняя, периодически изменяющаяся сила. Тогда в выражение, определяемое вторым законом Ньютона (4.4.2), в правой части добавится сила $F \cos \omega t$

$$m \ddot{S} = -kS - r \dot{S} + F \cos \omega t \quad (4.5.1)$$

или используя обычные обозначения, перепишем последнее уравнение в виде

$$\ddot{S} + 2\beta \dot{S} + \omega_0^2 S = f \cos \omega t \quad (4.5.2).$$

Здесь $f = \frac{F}{m}$. Уравнение (4.5.2) – это неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка. В математике доказывается, что его решением является сумма общего решения однородного дифференциального уравнения (когда правая часть в (4.5.2) равна нулю) S_1 и частного решения неоднородного уравнения S_2 .

$$S = S_1 + S_2 \quad (4.5.3).$$

Общее решение мы уже знаем. Оно определяется выражением (4.4.4)

$$S_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Частное решение можно искать 2-я основными путями: строго математически (причём и в этом случае возможно несколько путей) и используя физические представления. Мы пойдём вторым путём. В самом деле, опыт и здравый смысл подсказывают нам, что если на колебательную систему воздействовать периодически изменяющейся с частотой Ω силой, то, в конце концов, система начнёт совершать колебания с той же частотой вынуждающей силы. **Колебания, происходящие под действием внешней, периодически изменяющейся силы, называются вынужденными колебаниями.**

Т.о., частное решение может быть записано в виде

$$S_2 = S_0 \cos(\Omega t + \varphi) \quad (4.5.4)$$

С пока ещё неопределёнными S_0 и φ . Таким образом, задача нахождения частного решения свелась к определению амплитуда и фазы колебаний. Чтобы определить их подставим решение (4.5.4) в исходное уравнение (4.5.1). В результате получим

$$-S_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi) - 2\beta \Omega S_0 \sin(\Omega t + \varphi) + \omega_0^2 S_0 \cos(\Omega t + \varphi) = f \cos \Omega t \quad (4.5.5)$$

Воспользовавшись тригонометрическими формулами приведения

$$-S_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi) = S_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi + \pi)$$

и

$$-2\beta \Omega S_0 \sin(\Omega t + \varphi) = 2\beta \Omega S_0 \sin(\Omega t + \varphi + \pi / 2)$$

Вместо (4.5.5) получим

$$S_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi + \pi) + 2\beta \Omega S_0 \cos(\Omega t + \varphi - \pi / 2) + \omega_0^2 S_0 \cos(\Omega t + \varphi) = f \cos \Omega t \quad (4.5.6)$$

Сумму трёх гармонических колебаний с одной и той же частотой можно изобразить графически при помощи метода векторных диаграмм. Из рис.4.5.1 видно, что

$$S_0 = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \quad (4.5.7)$$

и

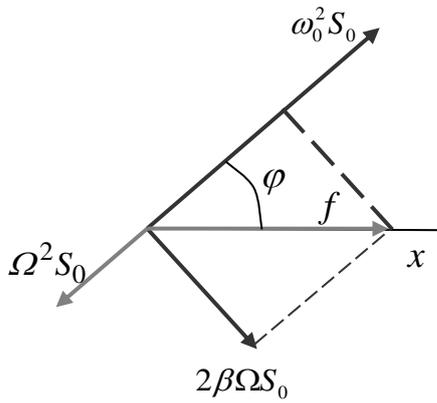


Рисунок 4.5.1

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (4.5.8)$$

Общее решение однородного уравнения (4.4.4) можно учитывать только в начальный момент времени, до тех пор пока амплитуда установившихся колебаний не станет равной (4.5.7). Для времён, больших времени релаксации,

амплитуда будет целиком определяться выражением (4.5.7). Видно, что амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы и она будет максимальна, когда знаменатель будет минимальным. Чтобы определить условие минимума знаменателя, первую производную от него приравняем нулю

$$-4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\beta^2\Omega = 0 \quad (4.5.9).$$

Уравнение (4.5.9) имеет три решения, из которых реальный физический смысл может иметь только положительная частота, при которой знаменатель в (4.5.7) минимален. Эта частота называется резонансной

$$\omega_{\partial \dot{a} \zeta} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (4.5.10)$$

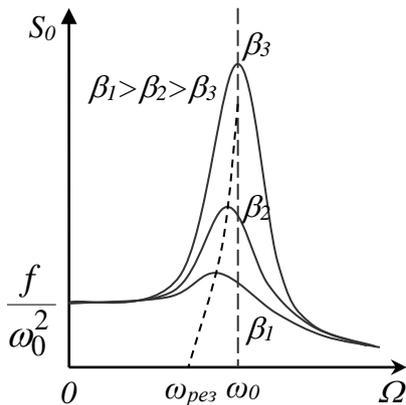


Рисунок 4.5.2

а резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте, называется резонансом. Зависимость амплитуды колебаний от частоты Ω показана на рис.

4.5.2. Из этого рисунка видно, что чем меньше затухание β , тем выше и острее максимум амплитуды и тем ближе

резонансная частота к собственной.

Можно показать, что при малом затухании отношение максимальной амплитуды к *статическому смещению* (т.е. к смещению под действием постоянной силы) равно добротности колебательной системы:

$$S_0 : \frac{f}{\omega_0^2} = Q \quad (4.5.11)$$

На рис.4.5.3 показаны *фазовые резонансные кривые* - зависимости

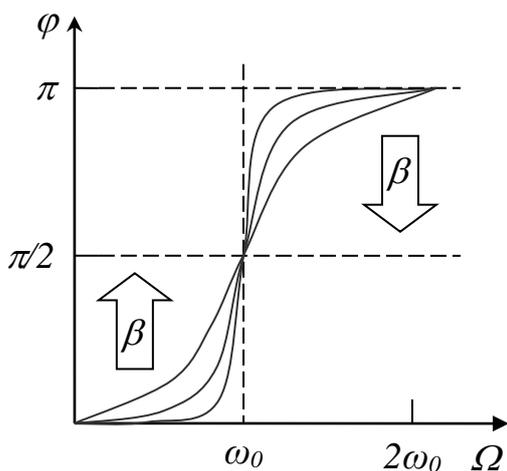


Рисунок 4.5.3

фазы колебаний от частоты вынуждающей силы при различных коэффициентах затухания β . Видно, что при совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой независимо от величины затухания фаза колебаний отстаёт от фазы вынуждающей силы на $\pi/2$. При дальнейшем увеличении частоты сдвиг фаз возрастает, и при $\Omega \rightarrow \infty$ фаза колебаний становится почти

полностью противоположна фазе вынуждающей силы.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Бушок Г.Ф. Курс физики. - Кн. 1 / Г.Ф. Бушок, В.В. Левандовский, Г.Ф. Пивень. - К.:Лыбидь, 2001. - 346 с.

2 Бушок Г.Ф. Курс физики. - Кн. 2 / Г.Ф. Бушок, Э.Ф. Венгер. - К.: Лыбидь, 2001. – 428 с.

3 Детлаф А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. - М.: Высш. шк., 1989. - 607 с.

4 Савельев И.В. Курс общей физики. - Т.2. - М.: Наука, 1986. - 432 с.

5 Яворский Б.М. Справочник по физике. - М.: Наука, 1985. - 512 с.

Навчальне видання

КОСТЕНКО Володимир Михайлович,
ТУЛУПЕНКО Віктор Миколайович

Електростатика. Електричний струм.
Електромагнетизм. Коливання и хвилі.
Курс лекцій з дисципліни «Фізика»
(для студентів усіх спеціальностей вузу)

(Російською мовою)

Редактор І.І.Дьякова
Комп'ютерна верстка О.П.Ордіна

Підп. до друку Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 7,5. Обл. – вид. арк. 5,4.
Тираж 200 прим. Зам №

Видавець і виготівник
„Донбаська державна машинобудівна академія”
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
Серія ДК №1633 від 24.12.03.



В.М.Костенко,
В.Н.Тулупенко

**ЭЛЕКТРОСТАТИКА.
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИЗИКА»
(для студентов всех специальностей вуза)

КРАМАТОРСЬК 2007

Министерство образования и науки Украины
Донбасская государственная машиностроительная академия

В.М.Костенко,
В.Н.Тулупенко

**ЭЛЕКТРОСТАТИКА.
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИЗИКА»
(для студентов всех специальностей вуза)

В печать 200 экз.
Первый проректор
А.Н.Фесенко

Утверждено на заседании
ученого совета ДГМА
Протокол № от

Краматорск 2007