

# МЕХАНІКА

## Лекція 1

КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.....	5
1 Основні поняття механіки.....	5
2 Радіус-вектор. Переміщення. Траєкторія. Пройдений шлях .....	5
3 Вектор швидкості.....	6
4 Прискорення.....	7
5 Елементи кінематики обертального руху.....	10

## Лекція 2

### ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.

ЗАКОНИ НЬЮТОНА.....	13
1 Інерціальні системи відліку. Перший закон Ньютона.....	13
2 Маса тіла. Сила. Другий закон Ньютона.....	14
3 Третій закон Ньютона.....	15
4 Види взаємодій і сили в механіці.....	16

## Лекція 3

### ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСА

І МОМЕНТУ ІМПУЛЬСА.....	20
1 Імпульс. Центр мас системи матеріальних точок. Повний імпульс системи матеріальних точок.....	20
2 Теорема про рух центра мас механічної системи.....	21
3 Закон збереження імпульсу.....	23
4 Момент імпульсу. Основне рівняння динаміки обертального руху. Закон збереження моменту імпульсу.....	24

## Лекція 4

### ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА.....

1 Дія моменту сил на тверде тіло.....	27
2 Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.....	28
3 Момент інерції твердого тіла. Теорема Штейнера.....	30
4 Вільні осі. Поняття про гіроскоп.....	31

## Лекція 5

### ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МЕХАНІЧНОЇ ЕНЕРГІЇ.....

1 Механічна робота. Потужність.....	33
2 Кінетична енергія. Теорема про кінетичну енергію.....	34
3 Консервативні сили. Потенціальна енергія.....	35
4 Закон збереження механічної енергії.....	39
5 Потенціальна яма. Умови рівноваги механічної системи.....	42

# ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ Й ТЕРМОДИНАМІКИ

## Лекція 6

### ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ.....

- |   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | Статистичний і термодинамічний методи.....          | 45 |
| 2 | Маса й розміри молекул.....                         | 47 |
| 3 | Дослідні закони ідеального газу.....                | 48 |
| 4 | Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії..... | 50 |
| 5 | Фізичний зміст термодинамічної температури.....     | 52 |
| 6 | Середня енергія теплового руху молекул.....         | 53 |

## Лекція 7

### РОЗПОДІЛ МОЛЕКУЛ ЗА ШВИДКОСТЯМИ.....

- |   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Зіткнення молекул і теплова рівновага.....       | 55 |
| 2 | Поняття про функцію розподілу.....               | 56 |
| 3 | Розподіл Максвелла за напрямками швидкостей..... | 57 |

## Лекція 8

### РОЗПОДІЛ БОЛЬЦМАНА.....

- |   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | Розподіл молекул за величиною швидкості й за кінетичною енергією..... | 61 |
| 2 | Барометрична формула.....   | 63 |
| 3 | Розподіл Больцмана.....   | 64 |

## Лекція 9

### ПЕРШИЙ ПОЧАТОК ТЕРМОДИНАМІКИ.....

- |   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Внутрішня енергія.....                           | 66 |
| 2 | Кількість теплоти.....                           | 67 |
| 3 | Робота, що здійснена тілом при зміні об'єму..... | 69 |
| 4 | Перший початок термодинаміки.....                | 70 |
| 5 | Теплоємність ідеального газу.....                | 71 |

## Лекція 10

### ДРУГИЙ ПОЧАТОК ТЕРМОДИНАМІКИ.....

- |   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | Кругові процеси. Теплові двигуни.....       | 74 |
| 2 | Цикл Карно.....                             | 76 |
| 3 | Ентропія. Другий початок термодинаміки..... | 79 |
| 4 | Статистичний зміст ентропії.....            | 81 |

# МЕХАНІКА

## Лекція 1

### ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МЕХАНІКИ. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

#### 1 Основні поняття механіки

Предметом вивчення механіки є механічний рух, який полягає в зміні з часом взаємного положення тіл або їхніх частин у просторі. Всякий рух відбувається відносно довільного тіла, що називається тілом відліку. З тілом відліку пов'язують систему координат, за допомогою якої задається положення тіла, що рухається. Сукупність тіла відліку, пов'язану з ним систему координат і годинника, що визначає час, називається системою відліку. Відносно різних систем відліку рух одного і того ж тіла виглядає по-різному. У цьому полягає відносність руху. При рішенні практичних задач систему відліку необхідно вибирати так, щоб рух розглянутого тіла був найбільш простим, тобто описувався найменшим числом рівнянь.

Для математичного опису руху різних тіл використовують математичні моделі. Ми будемо користуватися моделями матеріальної точки й абсолютно твердого тіла.

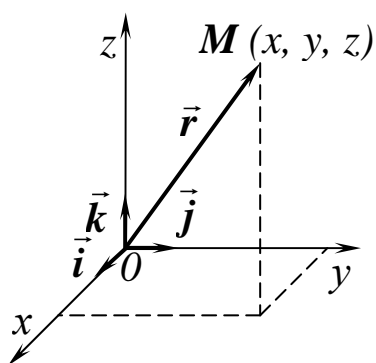


Рисунок 1.1

Матеріальною точкою називається тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати. Положення матеріальної точки в загальному випадку задається трьома декартовими координатами -  $x$ ,  $y$  і  $z$ . Абсолютно твердим називається тіло, деформаціями якого можна знехтувати при розгляді його руху. Для того щоб задати положення абсолютно твердого тіла в просторі досить знати координати двох точок цього тіла.

#### 2 Радіус-вектор. Переміщення. Траєкторія. Пройдений шлях

Як уже говорилося вище, положення матеріальної точки можна задати за допомогою 3-х декартових координат або за допомогою радіуса-вектора, що проводиться з початку координат у ту точку простору, у якій знаходиться матеріальна точка (Рис.1.1), причому

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.1)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - одиничні вектори у напрямку відповідних осей  $x, y, z$ . При русі точки  $M$  змінюються з часом як її координати, так і радіус-вектор. Тому для того щоб задати закон руху точки необхідно вказати залежність зміни координат з часом :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (1.2)$$

або залежність радіуса-вектора від часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.3)$$

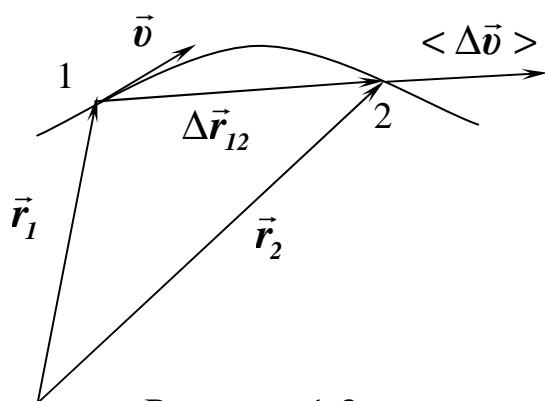


Рисунок 1.2

Рівняння (1.2) і (1.3) називаються кінематичними рівняннями руху матеріальної точки.

Введемо деякі визначення. **Траєкторією** називають уявну лінію, що описує в просторі матеріальна точка при її русі. Відстань між точками 1 і 2 (Рис. 1.2), відлічувана уздовж траєкторії, називається **пройденим шляхом**. Пройдений шлях -

величина скалярна. Вектор, поведений з початкової точки траєкторії в кінцеву, називається **переміщенням**

$$\Delta \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

З визначення вектора переміщення маємо, що:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}_{12},$$

тобто положення матеріальної точки в даній системі відліку визначено, якщо відомі її початкове положення - вектор  $\vec{r}_1$ , і переміщення  $\Delta \vec{r}_{12}$ .

### 3 Вектор швидкості

Нехай матеріальна точка перемістилася з положення 1 у положення 2 (Рис. 1.2) за час  $\Delta t$ . Радіус-вектор набув прирощування  $\Delta \vec{r}_{12}$ . Відношення переміщення до часу, за яке воно відбулося, називається **вектором середньої швидкості** за час  $\Delta t$ .

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

**Миттєвою швидкістю**, або просто швидкістю в даний момент часу, називається межа відношення

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.5)$$

або похідна від радіуса-вектора за часом. З рисунка 1.2 видно, що напрямок вектора швидкості збігається з напрямком дотичної до траєкторії руху в даній точці.

Вектор швидкості можна розкласти на три складові:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}.$$

причому проекції й величина вектора швидкості обчислюються за формулами

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad |\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Рух називається **рівномірним**, якщо за будь-які однакові проміжки часу точка проходить однаковий шлях, або чисельне значення швидкості не змінюється із часом. Якщо швидкість із часом змінюється, то такий рух називається **нерівномірним**.

#### 4 Прискорення

Зміна модуля й напрямку вектора швидкості описується фізичною величиною, що називається прискоренням:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.6)$$

Середнє прискорення за час  $\Delta t$  визначається аналогічно вектору середньої швидкості:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Як і всякий вектор, прискорення можна записати у вигляді:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Проекції й величина вектора прискорення обчислюються за формулами:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2}.$$

Представимо вектор швидкості у вигляді  $\vec{v} = v\vec{\tau}$ , де  $v$  - модуль (величина) вектора швидкості, а  $\vec{\tau}$  - одиничний вектор, спрямований по дотичній до траєкторії. У загальному випадку величина й напрямок вектора швидкості змінюються із часом, тоді відповідно до формули (1.6) одержуємо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (1.8)$$

Перший доданок у виразі (1.8) характеризує зміну швидкості за величиною, і за напрямком збігається із напрямком вектора швидкості. Цей доданок називається **тангенціальним прискоренням**. Розглянемо другий доданок у виразі (1.8). Спочатку визначимося з напрямком. У міру того, як кут  $\delta\alpha$  буде прагнути до нуля (рис. 1.3), вектор  $\Delta\vec{\tau}$  буде зменшуватися:  $\Delta\vec{\tau} \rightarrow d\vec{\tau}$  і  $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$ . Таким чином, вектор, що відповідає другому доданку у формулі (1.8), перпендикулярний до дотичної до траєкторії в даній точці. Тому другий доданок у формулі (1.8) називають **нормальним прискоренням**, що характеризує зміну вектора швидкості за напрямком. Таким чином, одержуємо, що

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.9)$$

Тепер визначимо величину нормального прискорення. Можна записати, що

$$\begin{aligned} \vec{a}_n &= v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v \left( \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} \right) = \\ &= v \left( \frac{d\vec{\tau}}{ds} v \right) = v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

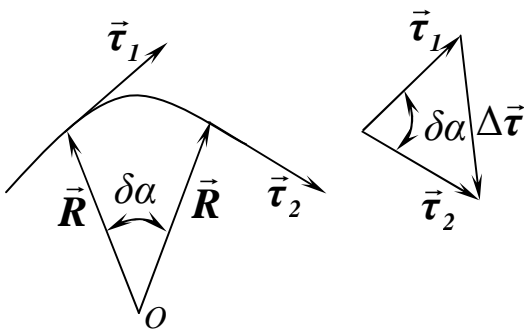


Рисунок 1.3

Можна показати, що при прагненні точки 2 до точки 1 (див. рис. 1.3), відрізок траєкторії між цими точками буде прагнути до дуги окружності деякого радіуса  $R$  із центром у точці  $O$ . Точку  $O$  називають центром кривизни траєкторії, а радіус  $R$  називають радіусом кривизни траєкторії в даній точці. З рисунка 1.3 видно, що

$$\delta\alpha = \frac{ds}{R} = \frac{d\tau}{\tau}, \quad \text{або} \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{\tau}{R} = \frac{1}{R}. \quad (1.11)$$

Тепер підставимо вираз для  $\frac{d\tau}{ds}$  з (1.11) в (1.10) і остаточно одержимо, що  $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}$ . Тут  $\vec{n}$  - одиничний вектор нормалі до траєкторії в даній точці. Остаточно повне прискорення запишеться у вигляді

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}. \quad (1.12)$$

Модуль повного прискорення, визначається таким способом

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.13)$$

Можна показати, що всякий складний рух можна звести до двох простих рухів - поступального й обертового. Ми, для простоти, як правило, будемо розглядати ці рухи окремо. Отже, для прямолінійного руху  $\vec{a}_n = 0$ . Якщо при цьому прискорення не змінюється із часом, то такий рух називається **рівнозмінним**.

***Приклад: Прямолінійний рух з постійним прискоренням.***

Так як у цьому випадку напрямок вектора  $\vec{a}$  не змінюється, то далі знак вектора писати не будемо, а будемо розглядати прискорення як алгебраїчну величину:  $a = \frac{dv}{dt}$ , звідки  $\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_0^t a dt$ , або

$v_2 - v_1 = at$ . Тут  $v_2 = v$  - кінцеве значення швидкості, а  $v_1 = v_0$  - початкова швидкість. З урахуванням зроблених зауважень остаточно одержуємо формулу:

$$v = v_0 + at. \quad (1.14)$$

Проінтегрував (1.14) від нуля до деякого  $t$ , знайдемо, що довжина шляху пройденого за час  $t$ , визначається за відомою у шкільній практиці формулою:

$$S = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.15)$$

## 5 Елементи кінематики обертального руху

Рух твердого тіла, закріпленого в одній точці, називається обертанням навколо нерухомої точки - центра обертання. Рух твердого тіла, при якому всі точки описують окружності, центри яких лежать на одній прямій, називається обертанням навколо нерухомої осі. Координатою в цьому випадку є кут повороту  $\varphi$ . З рисунка 1.4 видно, що

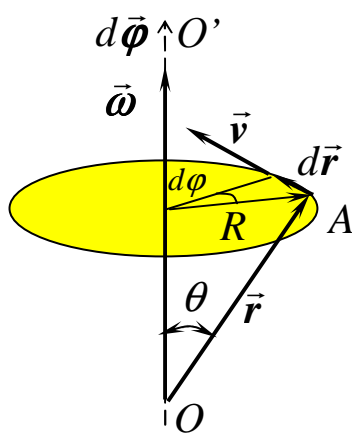


Рисунок 1.4

$$|d\vec{r}| = R \cdot d\varphi = |\vec{r}| \sin\theta d\varphi. \quad (1.16)$$

Введемо вектор  $d\vec{\varphi} = d\varphi \vec{n}$ , де  $d\varphi$  - кут, на який повернулося тіло, а  $\vec{n}$  - одиничний вектор, спрямований по осі обертання, і напрямком якого пов'язаний з напрямком обертання правилом правого гвинта. Тоді в скороченому вигляді, замість (1.16), можна записати

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]. \quad (1.17)$$

Тут квадратними дужками позначений векторний добуток двох векторів. Нагадаємо, що напрямком векторного добутку визначається за правилом правого гвинта<sup>1</sup>. Модуль векторного добутку дорівнює добутку модулів співмножників, помноженому на синус кута між ними.

Перша похідна за часом від кута повороту називається **кутовою швидкістю**:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (1.18)$$

а перша похідна від кутової швидкості називається **кутовим прискоренням**:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.19)$$

В проекції на вісь обертання z:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{і} \quad \varepsilon_z = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.20)$$

<sup>1</sup> Вектор, що стоїть в добутку першим, повертаємо в напрямку другого вектора, так, щоб цей поворот був по годинній стрілці та на менший кут. Тоді поступальне переміщення уявлюваного правого гвинта вкаже напрямком векторного добутку.



Вектора, подібні  $d\vec{\varphi}$ ,  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\varepsilon}$ , а напрямком яких зв'язується з напрямком обертання, називаються аксіальними, або псевдовекторами. Ці псевдовектора не мають точки прикладення, на відміну від векторів.

Для обертання відносно нерухомої осі з постійним прискоренням маємо

$$d\omega = \varepsilon \cdot dt. \quad (1.21)$$

Проінтегрувавши, отримаємо

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (1.22)$$

Інтегруючи (1.22) за часом, одержимо залежність кута повороту від часу

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (1.23)$$

Відзначимо повну аналогію між формулами для координат і швидкості для поступального й обертального рухів: формули (1.14) і (1.22) і відповідно (1.15) і (1.23).

Знайдемо швидкість  $\vec{v}$  довільної точки А (Рис. 1.4). Для цього поділимо вираз (1.17) на  $dt$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r} \right] = [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (1.24)$$

Модуль вектора швидкості:

$$v = \omega r \sin \theta = \omega R, \quad (1.25)$$

де  $R$  - радіус окружності, по якій рухається точка А. Знайдемо прискорення точки А.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[ \vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]. \quad (1.26)$$

У випадку, коли вісь обертання нерухома, вектор  $\vec{\varepsilon}$  паралельний вектору  $\vec{\omega}$ , і тому вектор  $[\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$  спрямований у бік швидкості  $\vec{v}$ , тобто по дотичній до траєкторії в точці А, та являє собою тангенціальне прискорення:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]. \quad (1.27)$$

Другий доданок в (1.26) являє собою нормальне прискорення:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]. \quad (1.28)$$

Модулі тангенціального й нормального прискорень рівні, відповідно

$$\begin{aligned} a_\tau &= \varepsilon R, \\ a_n &= \omega^2 R, \end{aligned} \quad (1.29)$$

а модуль повного прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.30)$$

Для рівномірного обертання (з постійною кутовою швидкістю) можна ввести період обертання  $T$  - час здійснення одного оберту. Для такого обертання кутова швидкість буде дорівнює  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , а число обертів за одиницю часу  $n = \frac{1}{T}$

## Лекція 2

### ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ. ЗАКОНИ НЬЮТОНА

#### 1 Інерціальні системи відліку. Перший закон Ньютона

Динаміка вивчає зв'язок між взаємодіями тіл і виникаючими в результаті цього змінами в русі взаємодіючих тіл. В основі динаміки лежать 3 закони Ньютона. Вони є емпіричними, дослідними законами. У кінематиці, де не розглядаються причини, що викликають механічний рух, всі системи відліку рівноправні. У динаміці ж виявляється істотне розходження між різними системами відліку. Виявляється, що динамічні закони руху можуть мати різний вигляд у різних системах відліку. Природно тому вибирати такі системи, де ці закони мають найбільш простий вид. У зв'язку із цим розглянемо, чим може бути викликане прискорення матеріальної точки в довільній системі відліку.

Досвід показує, що, по-перше, причиною прискорення може бути дія на матеріальну точку інших тіл й, по-друге, властивості самої системи відліку. Справді, щодо різних систем відліку (що рухаються, наприклад, із прискоренням) прискорення матеріальної точки може бути різним. Тому природно вибирати такі системи відліку, у яких прискорення матеріальної точки цілком і тільки обумовлено взаємодією з іншими тілами. У таких системах відліку матеріальна точка (тіло) зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, поки вплив з боку інших тіл не виведе її із цього стану. Такі системи називаються інерціальними. Виділений текст становить зміст *1-го закону Ньютона*. У ньому міститься 2 твердження:

1. Для рівномірного прямолінійного руху тіла не потрібно будь-яких зовнішніх впливів. У цьому змісті стан спокою й рівномірний прямолінійний рух є абсолютно рівноправними.

2. Перший закон Ньютона дає дослідний критерій, що дозволяє відповісти на питання - чи є система відліку інерціальною? А саме тому - це такі системи, щодо яких матеріальна точка, не залежить від зовнішніх впливів, або знаходиться у стані спокою, або рухається рівномірно й прямолінійно.

Часто перший закон Ньютона називають законом інерції. Інерція - це явище, що полягає в тім, що тіло рухається рівномірно

прямолінійно, якщо на нього не діють інші тіла, або дія з боку інших тіл скомпенсована<sup>2</sup>.

Ми будемо розглядати рух тіл в інерціальних системах відліку. У багатьох практичних завданнях інерціальною можна вважати систему відліку пов'язану із Землею.

## 2 Маса тіла. Сила. Другий закон Ньютона

Отже, стан спокою й рівномірний прямолінійний руху рівноправні. Змінити ці стани руху тіл, тобто надати їм прискорення, можна за допомогою сил. **Сила - це фізична величина, що визначає зміну стану руху тіл, і яка виникає в результаті взаємодії тіл.** Коли ми говоримо, що на тіло діє сила, то розуміємо, що на це тіло діє якесь інше тіло, і в результаті цього впливу змінюється стан розглянутого тіла - змінюється швидкість руху або з'являється деформація. Сила - величина векторна, тобто вона повністю визначена, якщо зазначено її чисельне значення, напрям й точку прикладання сили. Пряму, проведену через точку прикладання сили в напрямку її дії, називають лінією дії сили. Результат дії сили на абсолютно тверде тіло не зміниться при переносі точки прикладання сили уздовж лінії дії сили. **Основне завдання механіки полягає у встановленні законів руху тіл під дією прикладених до них сил.**

Досвід показує, що всяке тіло "чинить опір" при будь-яких спробах змінити його швидкість, як по величині, так і по напрямку. Ця властивість називається **інертністю тіла.** На практиці інертність проявляється в тім, що швидкість тіла не можна змінити миттєво. Якщо рівні сили діють на різні тіла протягом однакових проміжків часу, то зміна швидкостей цих тіл буде різною. Про тіло, у якого зміна швидкості буде найменшою, говорять, що воно має більшу інертність. **Мірою інертності тіла служить величина, що називається масою цього тіла.** Маса - величина адитивна, тобто маса тіла дорівнює сумі мас всіх частин тіла. У системі СІ маса тіла вимірюється в кілограмах [кг].

Співвідношення, що встановлює зв'язок між мірою інертності тіла, тобто його масою, і прискоренням, що набуває тіло під дією прикладеної до тіла сили, було встановлено І. Ньютоном на підставі

---

<sup>2</sup> У фізиці вживається багато слів, і кожне з них на відміну від звичайної розмовної мови має точний зміст. Візьміть, наприклад, слово переміщення. У фізиці це фізична величина з певними характеристиками, а в повсякденній мові, дуже часто, це слово синонім руху. Інерцію часто плутають із інертністю. Інерція - це фізичне явище, а інертність - властивість тіла.

великої кількості дослідних даних і називається 2-м законом Ньютона.

Прискорення, що надане діючою на матеріальну точку (тіло) силою, прямо пропорційне цій силі, збігається з нею за напрямком й обернено пропорційне масі цього тіла.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.1)$$

Одиниця сили називається Ньютоном ( $H$ ). З виразу (2.1) випливає, що розмірність  $H = \frac{кг \cdot м}{с^2}$ . Якщо на матеріальну точку одночасно діють кілька сил, то кожна з них надає матеріальній точці таке ж прискорення, якби інших сил не було, тобто

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^N \vec{a}_i. \quad (2.2)$$

Це положення називають принципом незалежності дії сил, або принципом суперпозиції рухів. Якщо на матеріальну точку одночасно діє кілька сил, то в другому законі Ньютона під силою ми розуміємо рівнодіючу всіх сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (2.3)$$

### 3 Третій закон Ньютона

Всяка дія тіл, одне на інше, носить характер взаємодії. Як показує дослід, при взаємодії змінюються швидкості обох тіл. Прискорення, які одержують тіла при взаємодії, мають протилежний напрямок (Рис.2.1),

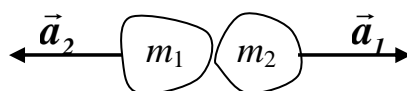


Рисунок 2.1

а величини прискорень задовольняють співвідношенню:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

де  $m_1$  і  $m_2$  – маси взаємодіючих тіл.

Кількісно ця взаємодія визначається **3-м законом Ньютона, що говорить, якщо тіло 1 діє на тіло 2 з деякою силою  $F_{21}$ , то й тіло 2, у свою чергу, буде діяти на тіло 1 з такою ж по величині й протилежно спрямованою силою  $F_{12}$ .**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.4)$$

#### 4 Види взаємодій й сили в механіці

Другий закон Ньютона займає в механіці дуже важливе місце. Це пов'язане з тим, що рівняння

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

являє собою диференціальне рівняння щодо функції  $\vec{r}(t)$ . Рішення цього рівняння дає рішення основного завдання механіки - визначення положення тіла в будь-який момент часу. Але це можна зробити тільки в тому випадку, якщо відомі всі сили, що діють на тіло. Тому вивчення різних взаємодій фізичних об'єктів є однією з головних завдань фізики.

У сучасній науці виділяють 4 типи взаємодій. Дві з них, котрі розглядаються в механіці, називаються **гравітаційні** й **електромагнітні**. Їм відповідають сили, які не можна звести до більш простих й тому вони називаються фундаментальними. Сила гравітаційної взаємодії (фундаментальні сили) описуються **законом Всесвітнього тяжіння**

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.5)$$

Тут  $G$  - стала Всесвітнього тяжіння,  $m_1$  й  $m_2$  маси взаємодіючих тіл, а  $r$  - відстань між ними. У законі всесвітнього тяжіння маса виступає мірою тяжіння тіл і називається гравітаційною масою. Таким чином, ми вже знаємо два визначення маси, з одного боку, це міра інерції, а з іншого боку, маса - міра тяжіння тіл.

Друга, фундаментальна сила, що описує взаємодію між двома точковими зарядами, підкоряється **закону Кулона**

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (2.6)$$

## 4.1 Гравітаційні взаємодії

Про закон Кулона ми будемо говорити пізніше. Зараз же скажемо декілька слів про закон всесвітнього тяжіння. Видно, що величина сили пропорційна масам взаємодіючих тіл. Якщо ми візьмемо два тіла з масами, наприклад, в 100 кг, і, нехай, відстань між цими тілами 1 м, то вони будуть взаємодіяти із силою, що дорівнює  $6,67 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$ .<sup>3</sup> Така мала сила не здатна навіть зрушити з місця ці два тіла. Однак якщо взаємодіючі тіла мають гігантську масу - наприклад, зірка й планета, то величина сили буде дуже великою. Саме сила Всесвітнього тяжіння є тим архітектором, що управляє структурою нашої Вселенної. Саме сила Всесвітнього тяжіння визначає взаємне розташування галактик, зірок і планетних систем.

Ми всі живемо на тілі з величезною масою - на планеті Земля. Людина, та будь-який інший предмет маси  $m$  притягаються до Землі внаслідок закону Всесвітнього тяжіння. Цю силу притягання до Землі ми називаємо силою ваги й розраховуємо за формулою  $F = mg$ , що є нічим іншим як наслідком закону всесвітнього тяжіння, тобто ми можемо записати, що

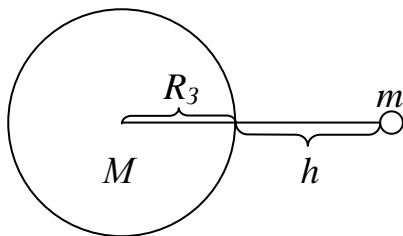


Рисунок 2.2

$$mg = G \frac{mM}{R^2}. \quad (2.7)$$

Тут  $g$  - прискорення вільного падіння,  $M$  - маса Землі, і  $R = R_3 + h$  - відстань від центра Землі до тіла маси  $m$  (Рис. 2.2). З рівняння (2.7) маємо, що

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{M}{(R_3 + h)^2}. \quad (2.8)$$

Тобто, у загальному випадку прискорення вільного падіння залежить від висоти тіла над поверхнею Землі. Так як в більшості практично важливих випадків виконується умова  $h \ll R_3$  ( $R_3 = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м} = 6400 \text{ км}$ !), то у формулі (2.8) можна зневажити  $h$ , і формула для  $g$  буде мати вигляд

---

<sup>3</sup> Чисельне значення гравітаційної сталої  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н м}^2}{\text{кг}^2}$

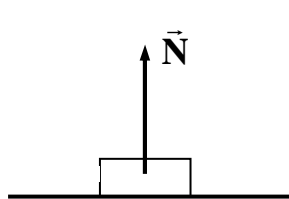
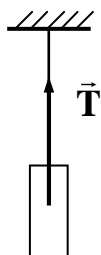


Рисунок 2.3



$$g = G \frac{M}{R_3^2}. \quad (2.9)$$

Всі величини у формулі (2.9) - це константи. Отже, прискорення вільного падіння не залежить від маси падаючого тіла, тобто для всіх тіл однакове<sup>4</sup> ! Після нескладних обчислень одержимо  $g=9,81 \text{ м/с}^2$ . Сила ваги направлена до центру Землі, саме цей напрямок ми приймаємо, як вертикальний, і визначаємо за допомогою підвісу.

#### 4.2 Електромагнітні взаємодії

Електромагнітні взаємодії в механічних явищах проявляються як сили пружності, які з'являються при деформації тіл. Деформація - це зміна розмірів або форми тіла під впливом інших тіл. Як Вам відомо з курсу шкільної фізики, всі тіла містять електричні заряди. При деформації тіл змінюються відстані між зарядами, а це, у свою чергу, приводить до порушення рівноваги між силами притягання й відштовхування між зарядами. При розтяганні тіла переважають сили притягання між зарядами й тіло "опирається" розтягнню, аналогічно, при стисканні переважають сили відштовхування.

У найбільш простих випадках, наприклад деформації пружини, силу пружності можна розрахувати за допомогою закону Гука:

$$F_x = -kx. \quad (2.10)$$

Тут  $x$  - зсув кінця пружини із положення рівноваги. Знак "-" показує, що напрямок сили обернений напрямку зсуву. Коефіцієнт  $k$  називається жорсткістю й визначається експериментально. Розглянемо деякі прояви сил пружності.

##### *Сили реакції опори й натягу підвісу.*

Розглянемо тіло на опорі або підвісі (Рис. 2.3). Як ми вже знаємо, на наше тіло діє сила ваги  $F = mg$ , під дією якої тіло прагне рухатися до центру Землі. При цьому "прагненні" рухатися тіло де-

<sup>4</sup> Із часів стародавніх греків існувало твердження, що більш важкі тіла падають на Землю швидше, тому що сильніше притягаються до Землі. І, як приклад, зрівнювалося падіння пушинки й каменю. Галілей перший перевірив це твердження експериментально, скидаючи гарматні ядра різної величини зі знаменитої Пізанської вежі. Результат цього досвіду відомий кожному восьмикласникові.



формує опору або підвіс. У результаті деформації з'являється сила пружності, що діє на тіло. У випадку тіла на опорі цю силу називають силою реакції опори, а у випадку тіла на підвісі - силою натягу підвісу.

### Вага тіла

Вагою тіла називають силу, з якою тіло діє на опору або підвіс (Рис. 2.4). При взаємодії тіла з опорою або підвісом деформується й саме тіло, що приводить до появи сили пружності, що діє на опору або підвіс. Сили ваги й реакції опори зв'язані між собою відповідно до третього закону Ньютона:  $\vec{P} = -\vec{N}$ . Аналогічна рівність

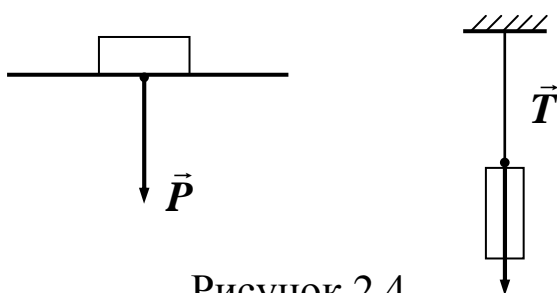


Рисунок 2.4

$\vec{P} = \vec{T}$  має місце й для тіла на підвісі. Вагу тіла дуже часто плутають із силою ваги через те, що у випадку нерухомого тіла ці сили виявляються рівними по величині. Але це дві різні сили: сила ваги є гравітаційною силою (взаємодіють

тіло й Земля), у той час як вага тіла - це сила пружності (взаємодіють тіло й опора). Сила ваги діє на тіло, а вага - на опору (або підвіс), на якій (-ому) перебуває це тіло. Крім того, вага тіла виявляється залежною від умов, у яких перебуває тіло, зокрема, вона залежить від прискорення з яким рухається розглянуте тіло.

І ще одна сила, з якою мають справу в механіці - сила тертя. Ми будемо мати справу із зовнішнім тертям - це тертя між рухомими відносно один одного тілами. Сила тертя теж зводиться до взаємодії між атомами двох тіл, у точках дотику контактуючих тіл, тобто, в остаточному підсумку, - до сил електромагнітного походження. Тертя між поверхнями двох тіл при відсутності прошарку газу або рідини між ними, називається сухим тертям. Сухе тертя ще ділять на тертя ковзання й тертя котіння. Останнє звичайно багато менше першого. Розрізняють тертя ковзання й тертя спокою. Сила тертя спокою звичайно менше сили тертя ковзання. Сила тертя ковзання описується виразом:

$$F_{тер} = \mu N \quad (2.11)$$

де  $N$  - сила нормального тиску, що притискає тертьові поверхні одна до іншої,  $\mu$  - коефіцієнт тертя. Сила тертя завжди спрямована протилежно вектору швидкості.

## Лекція 3

### ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСА І МОМЕНТА ІМПУЛЬСА

#### 1 Імпульс. Центр мас системи матеріальних точок. Повний імпульс системи матеріальних точок

**Імпульсом** (кількістю руху) матеріальної точки (тіла) називається вектор, що дорівнює добутку маси матеріальної точки (тіла) на її швидкість

$$\vec{P} = m\vec{v}. \quad (3.1)$$

Подивимося, чим визначається зміна імпульсу. Для цього знайдемо похідну за часом виразу (3.1). У класичній механіці  $m=const$ , і тоді похідна за часом від (3.1) буде дорівнювати

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F},$$

або

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.2)$$

**Швидкість зміни імпульсу матеріальної точки дорівнює діючій на неї силі.** Вираз (3.2) являє собою іншу форму запису другого закону Ньютона. Перепишемо це рівняння у вигляді

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt. \quad (3.3)$$

Фізична величина рівна  $\vec{F} dt$  називається імпульсом сили за час її дії  $dt$ . Таким чином, **зміна імпульсу матеріальної точки за час  $dt$  дорівнює імпульсу результуючої сили, що діє на матеріальну точку за той же проміжок часу.**

Розглянемо тепер механічну систему, що складається з декількох матеріальних точок (тіл). **Центром інерції**, або **центром мас** системи матеріальних точок, називають таку точку  $C$ , радіус-вектор якої визначається виразом

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i. \quad (3.4)$$

Тут  $m_i, \vec{r}_i$  - маса й радіус-вектор  $i$  - ї точки системи,  $m = \sum_{i=1}^N m_i$  -

загальна маса всієї системи й  $N$  - число матеріальних точок, що входять до складу системи. Відповідно, координати точки  $C$  розраховуються за формулами:

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i y_i, \quad z_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i z_i.$$

Знайдемо швидкість центра інерції:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{P}}{m}. \quad (3.5)$$

Тут  $\sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}$  - векторна сума імпульсів всіх матеріальних точок системи, що називається **імпульсом системи** матеріальних точок. З виразу (3.5) випливає, що

$$\vec{P} = m \vec{v}_c. \quad (3.6)$$

Тобто, **імпульс системи матеріальних точок дорівнює добутку маси всієї системи на швидкість її центра мас.**

## 2 Теорема про рух центра мас механічної системи

Тіла, що не входять до складу розглянутої системи, називаються **зовнішніми**, а сили, що діють із боку цих тіл, називаються **зовнішніми силами**. Відповідно, **сили**, що діють між тілами, що входять до складу розглянутої системи, називаються **внутрішніми**. Тоді, на кожну точку, що входить до складу розглянутої системи, можуть діяти сили зовнішні  $\vec{F}_i^{ext}$  й сили  $\vec{F}_{ik}$ , що діють між частками системи, тобто сили внутрішні. Запишемо рівняння другого закону Ньютона для кожного тіла розглянутої системи

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1N}$$

$$\frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2N}$$

.....

$$\frac{d}{dt}(m_N \vec{v}_N) = \vec{F}_N^{ext} + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \dots + \vec{F}_{N,N-1}$$

Почленно складемо ці рівняння й одержимо

$$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + \dots \quad (3.7)$$

$$+ (\vec{F}_{N-1,N} + \vec{F}_{N,N-1})$$

Доданки, що стоять у дужках, в рівнянні (3.7) являють собою суму сил взаємодії тіл з номерами  $i$  й  $k$ . На підставі 3-го закону Ньютона суми в дужках рівні нулю. Тоді одержимо, що

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext}. \quad (3.8)$$

З лівої сторони в рівнянні (3.8) стоїть швидкість зміни повного імпульсу системи, а суму в правій частині (3.8) називають головним вектором зовнішніх сил, або результуючою зовнішніх сил  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$ . З урахуванням зроблених зауважень, замість (3.8)

можна записати

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.9)$$

Таким чином, одержали узагальнення другого закону Ньютона на довільну механічну систему: швидкість зміни імпульсу всієї системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що діють на систему. У проєкціях на осі системи координат

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dP_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dP_z}{dt} = F_z. \quad (3.10)$$

Причому  $P_x = \sum_i m_i v_{xi}$ ,  $P_y = \sum_i m_i v_{yi}$ ,  $P_z = \sum_i m_i v_{zi}$ . Відповідно до рівняння (3.6)  $\vec{P} = m\vec{v}_c$ , і вираз (3.9) приймає вид

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F},$$

або, з урахуванням того, що  $\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt}$

$$m\vec{a}_c = \vec{F}. \quad (3.11)$$

Рівняння (3.11) становить зміст основного закону динаміки твердого тіла: добуток маси тіла на прискорення його центра мас

дорівнює результуючій силі, що діє на тіло. Якщо розглядається система з декількох тіл, то з рівняння (3.11) випливає, що центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи, і на яку діє результуюча зовнішніх сил, прикладених до системи. Останнє твердження носить назву теореми про рух центра мас.

### 3 Закон збереження імпульсу

Механічну систему називають замкнутою, якщо на неї не діють зовнішні сили. Взагалі ж говорячи, замкнутих систем у природі не буває, але якщо внутрішні сили в системі в багато разів перевищують зовнішні, то таку систему наближено можна вважати замкнутою. Наприклад, при пострілі із зброя сили взаємодії між снарядом і зброєю у багато разів перевищують всі інші сили, що діють на снаряд і зброю, тому систему "зброя-снаряд" можна вважати замкнутою. Для замкнутої системи головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю  $\vec{F} \equiv 0$  й рівняння (3.9) приймає вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0,$$

а, відповідно

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = const. \quad (3.12)$$

Таким чином, ми прийшли до закону збереження імпульсу, що говорить, що імпульс замкнутої системи не змінюється із часом. З іншої сторони

$$\vec{P} = m\vec{v}_c = const, \quad (3.13)$$

або при будь-яких процесах, що відбуваються в замкнутій системі, швидкість її центра мас (центра інерції) залишається незмінною.

Закон збереження імпульсу є одним з основних законів природи. Ми одержали його як наслідок із законів Ньютона. Однак область застосування закону збереження імпульсу набагато ширше, ніж область застосування законів Ньютона. Так, закон збереження імпульсу справедливий й у мікросвіті, де закони Ньютона не застосовуються. У теоретичній фізиці доводиться, що цей фундаментальний закон природи є наслідком однорідності простору. Однорідність простору означає, що паралельний перенос замкнутої системи не відбивається на фізичних властивостях системи й законах її руху.

Іноді буває, що  $\vec{F} \neq 0$  й, відповідно  $\vec{P} \neq const$ , але якщо проекція результуючого вектора зовнішніх сил на яку-небудь вісь дорівнює нулю, то проекція імпульсу на цю ж вісь не змінюється із часом. У цьому випадку говорять про **закон збереження проекції імпульсу**, тобто, якщо  $\frac{dP_x}{dt} = 0$ , то  $P_x = const$ .

#### 4 Момент імпульсу. Основне рівняння динаміки обертального руху навколо нерухомої точки

Ми вже відзначали аналогію між законами поступального й обертального рухів коли розглядали кінематику. Але ця аналогія поширюється й на динаміку. Так, аналогом імпульсу для обертального руху служить величина, що називається моментом імпульсу.

**Моментом імпульсу частки щодо деякої точки  $O$  називають вектор  $\vec{L}$ , що дорівнює векторному добутку радіус-вектора, проведеного із точки  $O$  в точку прикладання імпульсу, на імпульс.**

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{P}], \quad L = r \cdot P \cdot \sin\alpha = l \cdot P, \quad (3.14)$$

де  $l = r \cdot \sin\alpha$  називається плечем вектора  $\vec{P}$  відносно точки  $O$ .

З'ясуємо, яка фізична величина визначає зміну вектора моменту імпульсу. Для цього візьмемо похідну за часом від вектора  $\vec{L}$ .

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{P}] = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{P} \right] + \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{P}}{dt} \right] = [\vec{v}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (3.15)$$

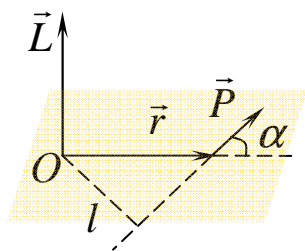


Рисунок 3.1

Перший член в (3.15) тотожно дорівнює нулю як векторний добуток двох колінеарних векторів. Другий член в (3.15) називається **моментом сили** і це є векторний добуток радіус-вектора, проведеного в точку прикладання сили, на цю силу:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (3.16)$$

У результаті для швидкості зміни моменту імпульсу ми одержимо так звані **рівняння моментів**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (3.17)$$

**Похідна за часом від моменту імпульсу частки щодо деякої точки  $O$  дорівнює моменту рівнодіючої сили відносно тієї ж точки  $O$ .**

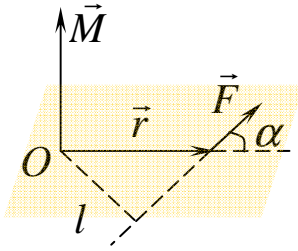


Рисунок 3.2

Тепер розглянемо систему часток. Відразу ж відзначимо, що момент імпульсу - величина адитивна. Це значить, що момент імпульсу системи часток відносно деякої точки  $O$  дорівнює сумі моментів імпульсу окремих часток системи відносно тієї ж точки  $O$  :  $L = \sum_i L_i$ .

Тоді для системи часток можна записати

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt}. \quad (3.18)$$

Тепер врахуємо, що на кожну  $i$ -у частку системи діють як внутрішні сили  $F_{ik}$ , з боку інших часток системи, так і результуюча зовнішніх сил  $F_i^{ext}$ . Тоді для кожної частки системи можна записати

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_k \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i^{ext}, \quad (3.19)$$

де  $\sum_k \vec{M}_{ik} = \sum_k [\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}]$ ,  $\vec{M}_i^{ext} = [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{ext}]$ . Зміна результуючого моменту імпульсу буде, очевидно

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{ext}. \quad (3.20)$$

Покажемо, що подвійна сума в (3.20) тотожно дорівнює нулю. Справді

$$\vec{M}_{ki} = [\vec{r}_k, \vec{F}_{ki}] = [(\vec{r}_i + \vec{r}_{ik}), (-\vec{F}_{ik})] = -[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}] = -\vec{M}_{ik}. \quad (3.21)$$

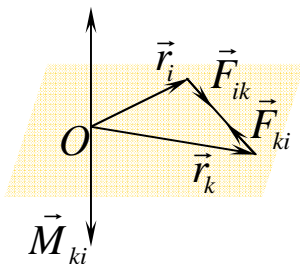


Рисунок 3.3

А так як моменти в подвійній сумі зустрічаються попарно, то вони взаємно знищуються. В (3.21) ми врахували, що на підставі 3-го закону Ньютона  $F_{jk} = -F_{kj}$ . В (3.20) замінимо суму моментів зовнішніх сил результуючим, або головним моментом зовнішніх сил відносно тієї ж точки  $O$ :

$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{ext}$ . Тоді, у результаті всіх перетворень одержимо основний закон динаміки для тіла, що обертається відносно нерухомої точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (3.22)$$

**Швидкість зміни моменту імпульсу системи відносно нерухомої точки дорівнює результуючому моменту відносно тієї ж точки всіх зовнішніх сил, що діють на систему.** Якщо система замкнута, тобто  $\vec{M} = 0$ , то  $\vec{L} = const$ . Або **момент імпульсу замкненої системи не змінюється з часом.** Закон збереження моменту імпульсу є одним із фундаментальних законів природи. Його область застосування набагато ширше, ніж область застосування класичної механіки, у рамках якої ми його одержали. У теоретичній фізиці доводиться, що він є наслідком ізотропії простору. Ізотропія простору означає, що в просторі немає виділених напрямків. Інакше кажучи, поворот системи відліку на довільний кут не змінює властивості системи й закони її руху.



## Лекція 4

# ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

## 1 Дія моменту сил на тверде тіло

На минулій лекції ми ввели величину, яку назвали моментом сили:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Коли сила прикладена до однієї із точок твердого тіла, вектор  $\vec{M}$  характеризує здатність сили обертати тіло навколо точки  $O$ , відносно якої він визначається. Тому момент сили називають також обертаючим моментом. Якщо тіло не закріплене й може обертатися навколо точки  $O$  довільним чином, то під дією сили тіло повернеться навколо осі, що збігається за напрямком з вектором  $\vec{M}$ .

Розглянемо випадок, коли тверде тіло може обертатися навколо нерухомої осі (Рис. 4.1а). Нехай на тіло діє довільно спрямована сила  $\vec{F}$ . Знайдемо проекцію моменту цієї сили на вісь обертання, яку позначимо як вісь  $z$ . Для цього розкладемо силу на три складові як показано на рисунку 4.1 і розглянемо як діють ці сили на тіло.

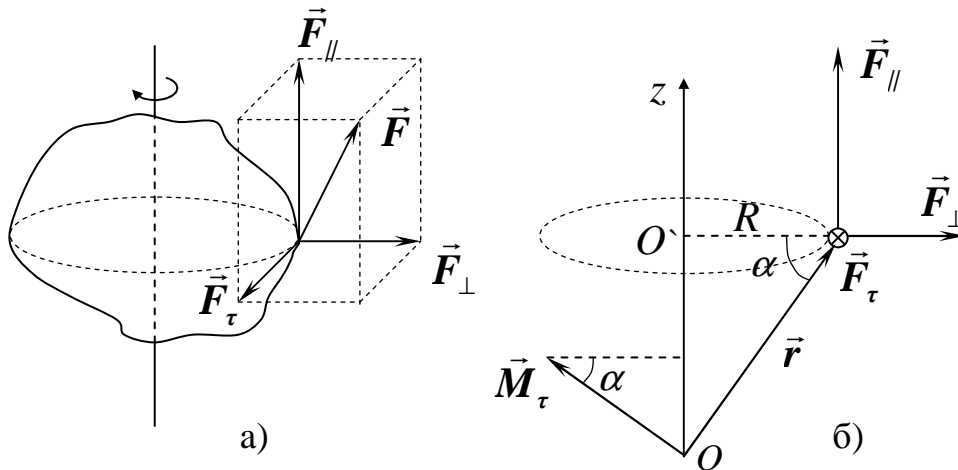


Рисунок 4.1

З рисунка видно, що сила  $\vec{F}_\perp$  - згинає вісь обертання, сила  $\vec{F}_\parallel$  - приводить до ковзання тіла уздовж осі, і, лише, дія сили  $\vec{F}_\tau$  приводить до обертального руху навколо осі. Прямим обчисленням неважко показати, що

$$M_z = [\vec{r} \times \vec{F}]_z = (\vec{M}_\tau)_z = M_\tau \cos \alpha = r F_\tau \cos \alpha = R F_\tau. \quad (4.1)$$

Отже, обертання навколо нерухомої осі (осі  $z$ ) може викликати тільки сила  $\vec{F}_\tau$ , причому вона тим вдаліше здійснить цей поворот, чим більше її плече  $R$  відносно осі обертання. Відзначимо, що величина проекції моменту сил на вісь обертання не залежить від вибору точки  $O$  (точки, відносно якої, обчислюється повний обертаючий момент  $\vec{M}$ ).

## 2 Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла

Якщо спроектувати рівняння моментів для системи матеріальних точок  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$  на виділений напрямок (вісь обертання), уздовж якого направимо координатну вісь  $Oz$ , то одержимо основний закон динаміки для тіла, що обертається навколо нерухомої осі

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (4.2)$$

**Швидкість зміни моменту імпульсу тіла відносно нерухомої осі обертання дорівнює результуючому моменту відносно цієї ж осі всіх зовнішніх сил, що діють на тіло.**

Як знаходити проекцію моменту зовнішніх сил на вісь обертання ми вже знаємо (див. формулу 4.1), визначимо тепер вираз для моменту імпульсу  $L_z$  тіла, що обертається відносно нерухомої осі обертання  $Oz$  з кутовою швидкістю  $\omega$ . Нам відома формула для моменту імпульсу матеріальної точки

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{P}], \quad (4.3)$$

і ми знаємо, що повний момент імпульсу системи матеріальних точок дорівнює

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i, \quad (4.4)$$

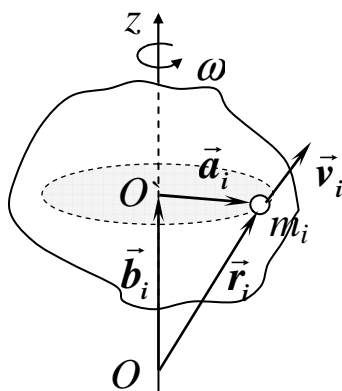


Рисунок 4.2

де  $\vec{L}_i$  - момент імпульсу  $i$ -ої матеріальної точки. Для того щоб скористатися формулами (4.3-4.4) подумки розіб'ємо тіло на досить малі області, такі щоб швидкості всіх точок такої області можна було вважати постійними (Рис. 4.2). Представимо радіус-вектор  $i$ -ої матеріальної точки у вигляді

$$\vec{r}_i = \vec{a}_i + \vec{b}_i,$$

вектор  $\vec{a}_i$  - перпендикулярний осі обертання, а вектор  $\vec{b}_i$  - паралельний їй. Тоді момент імпульсу  $i$ -ої матеріальної точки запишеться у вигляді

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = [\vec{b}_i, m_i \vec{v}_i] + [\vec{a}_i, m_i \vec{v}_i]. \quad (4.5)$$

Перший доданок в (4.5) дає вектор перпендикулярний осі обертання (див. Рис. 4.2), і його проекція на вісь  $Oz$ , дорівнює нулю. Другий доданок дає вектор, спрямований уздовж осі обертання. Таким чином, з урахуванням того, що  $\vec{v}_i \perp \vec{a}_i$  можна записати

$$L_{iz} = a_i m_i v_i = \omega m_i a_i^2. \quad (4.6)$$

У формулі (4.6) ми врахували, що лінійна швидкість матеріальної точки  $v_i$  зв'язана з кутовою швидкістю обертання формулою  $v_i = \omega a_i$  ( $a_i$  - радіус окружності, по якій рухається  $i$ -а точка твердого тіла). Кутова швидкість обертання  $\omega$  - однакова для всіх точок тіла, що обертається, тоді на підставі формули (4.4) відразу одержуємо вираз для проекції моменту імпульсу тіла на вісь обертання

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i a_i^2 = \omega J_z. \quad (4.7)$$

Тут ми ввели позначення

$$J_z = \sum_i m_i a_i^2. \quad (4.8)$$

Фізична величина, описувана формулою (4.8) називається **моментом інерції тіла** відносно осі обертання. Тепер основний закон динаміки тіла, що обертається навколо нерухомої осі (4.2) запишеться у вигляді

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon. \quad (4.9)$$

Якщо момент зовнішніх сил відсутній ( $M_z = 0$ ), то

$$\omega J_z = \text{const}. \quad (4.10)$$

Вираз (4.10) являє собою окремий випадок закону збереження моменту імпульсу, записаного для тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

### 3 Момент інерції твердого тіла. Теорема Штейнера

Момент інерції - дуже важлива характеристика тіла, що обертається. З основного закону динаміки тіла, що обертається (4.9) видно, що момент інерції описує інертність тіла в обертальному русі. Як і при поступальному русі, тіло, що обертається, "опирається" зміні своєї кутової швидкості при дії моменту сил<sup>5</sup>. Отже, момент інерції є міра інертності твердого тіла при обертальному русі.

Відзначимо деякі властивості моменту інерції, що відрізняють його від маси. По-перше, момент інерції залежить від геометричних розмірів тіла. Цю властивість моменту інерції демонструє фігурист на льоді, коли, притискаючи руки до тіла, він зменшує свій момент інерції, що приводить до збільшення швидкості обертання спортсмена відповідно до закону збереження моменту імпульсу (4.10). По-друге, значення моменту інерції залежить від вибору осі, відносно якої він обчислюється.

Момент інерції являє собою, таким чином, важливу величину й потрібно вміти визначати її відносно довільної осі обертання. Відзначимо, що у визначенні моменту інерції (4.8) обчислення будуть тим більше точними, чим на більше число матеріальних точок можна розбити суму в (4.8). У межі це означає перехід до інтегрування

$$J = \sum_i m_i a_i^2 \Rightarrow J_z = \int r^2 dm. \quad (4.11)$$

У формулі (4.10)  $r$  - це відстань від виділеного елемента тіла масою  $dm$  до осі обертання.

Як приклад, обчислимо момент інерції однорідного диска радіуса  $R$  відносно осі, що проходить через його центр та перпендикулярній площини диска. Виділимо на диску кільцевий шар товщиною  $dr$ . Всі точки цього шару будуть перебувати на однаковій відстані  $r$  від осі обертання й вираз під знаком інтеграла запишеться у вигляді

$$r^2 dm = r^2 \rho dV = r^2 \rho b 2\pi r dr. \quad (4.12)$$

Тут  $\rho$  - густина матеріалу диска,  $b$  - товщина диска (див. рис. 4.2). Підставимо (4.12) в (4.11) і проінтегруємо по  $r$ . У результаті одержимо

---

<sup>5</sup> Так само, як і для поступального руху, можна говорити про явище інерції при обертальному русі - це явище є результатом закону збереження моменту імпульсу (4.10).

$$J_z = 2\pi b\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi b\rho \frac{R^4}{4} = \pi b\rho \frac{R^4}{2}. \quad (4.13)$$

Тепер врахуємо в (4.13), що маса всього диска дорівнює добутку густини  $\rho$  на об'єм диска  $b\pi R^2$  й остаточно одержимо

$$J_z = \frac{mR^2}{2}. \quad (4.14)$$

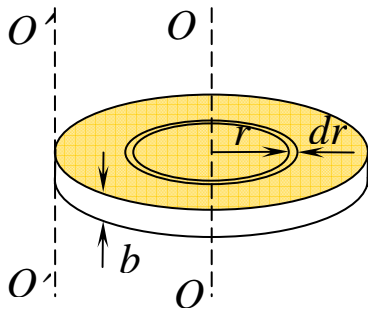


Рисунок 4.3

Обчислити момент інерції тіла відносно довільної осі, що навіть не проходить через тіло, дозволяє **теорема Штейнера**, згідно якої **момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції тіла відносно осі, що походить через центр мас тіла й пара-**

**лельній даній, і добутку маси тіла на квадрат відстані між осями:**

$$J = J_0 + ma^2. \quad (4.15)$$

Обчислимо момент інерції того ж диска відносно осі  $OO$ , що проходить через утворюючу вісь диска (Рис. 4.3). Відповідно до теореми Штейнера, момент інерції диска відносно осі  $O'O$  буде дорівнювати

$$J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Відзначимо, що пряме обчислення моменту інерції диска відносно осі  $OO$  за формулою (4.11) являє собою більш важке завдання, чим те, яке ми вирішили.

#### 4 Вільні осі. Поняття про гіроскоп

Теорема Штейнера показує, яке значення має момент інерції відносно осей, що проходять через центр мас тіл. Особливо важливі так звані вільні осі або осі вільного обертання. Це осі, які зберігають своє положення в просторі при відсутності зовнішніх сил, що діють на тіло.

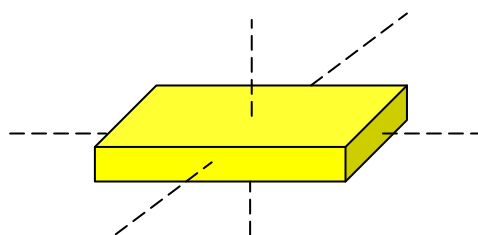


Рисунок 4.4

Виявляється, що для будь-якого тіла існують, щонайменше, три взаємно перпендикулярні осі, що проходять че-

рез центр мас тіла, які є вільними осями. Їх ще називають головними осями інерції тіла. Наприклад, для паралелепіпеда головними осями інерції є три осі, що проходять через центри протилежних граней (Рис. 4.4). Властивість вільних осей зберігати своє положення в просторі використовується в гіроскопах.

Гіроскопи являють собою масивні однорідні тіла, які з великою кутовою швидкістю обертаються навколо своєї осі симетрії, що є вільною віссю. Сила ваги не може змінити орієнтацію осі обертання, тому що сила прикладена до центра мас, і момент сили відносно центра мас дорівнює нулю. Таким чином, як не обертати гіроскоп, напрямок його осі обертання залишиться незмінним у просторі. Гіроскопи використовуються в навігації. Усі чули, імовірно, про гірокомпас, гірогоризонті й інших навігаційних пристроях, у яких використовується незмінність орієнтації в просторі осі обертання гіроскопа. Більш докладно про гіроскоп і гіроскопічний ефект можна довідатися з "Курсу фізики" Т.І.Трофімовой §20.

## Лекція 5

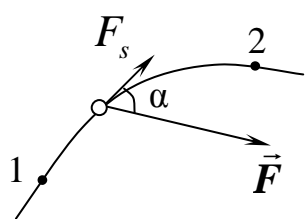
# ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МЕХАНІЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

## 1 Механічна робота. Потужність

Нехай частка під дією сили  $\vec{F}$  рухається по деякій траєкторії із точки 1 у точку 2 (Рис. 5.1). У загальному випадку сила  $\vec{F}$  може змінюватися як по величині, так і по напрямку. Розглянемо елементарне переміщення  $d\vec{r}$ , у межах якого силу  $\vec{F}$  можна вважати постійною. Елементарною роботою  $dA$  сили  $\vec{F}$  по переміщенню  $d\vec{r}$  називають величину, рівну скалярному добутку ( $\vec{F} d\vec{r}$ ):

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}), \quad \text{або} \quad dA = F \cos \alpha dr = F_s ds. \quad (5.1)$$

де  $F_s = F \cos \alpha$  - проекція сили  $\vec{F}$  на напрямок руху,  $ds = |d\vec{r}|$ .



Робота  $dA$  - величина алгебраїчна. Якщо кут  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , то робота додатна, якщо  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , то робота від'ємна. При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  робота тотожно дорівнює нулю.

Робота вимірюється в Джоулях (Дж). Розмірність Джоуля дорівнює добутку розмірності сили ( $H$ ) на розмірність переміщення:  $Дж = H \cdot м$ . Робота, здійснююча на кінцевому шляху  $s$  дорівнює сумі елементарних робіт на окремих ділянках  $ds$  або інтегралу

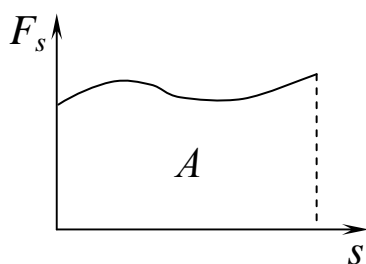


Рисунок 5.2

$$A = \int_0^s F_s ds. \quad (5.2)$$

Роботі можна надати наочний геометричний зміст. Якщо сила  $F_s$  задана як функція пройденого шляху  $s$ , то робота на цьому шляху вимірюється площею обмеженою кривою  $F_s(s)$  в координатах  $s$  й  $F_s$

(Рис. 5.2). Якщо на частку одночасно діють кілька сил, то робота результуючої сили дорівнює алгебраїчній сумі робіт, здійснюючих кожною із сил на тій же переміщенні:

$$A = \int \vec{F} d\vec{r} = \int (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) d\vec{r} = \int \vec{F}_1 d\vec{r} + \int \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots = A_1 + A_2 + \dots$$

**Величина**, що характеризує швидкість виконання роботи силою  $\vec{F}$ , і **рівна роботі, виконаній в одиницю часу, називається потужністю**:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}. \quad (5.3)$$

Величина потужності в системі СІ вимірюється в **Ваттах** ( $Вт$ ), і  $Вт = Дж/с$ . Ми також знаємо ще одну одиницю виміру потужності - кінська сила:  $1 к.с. = 736 Вт$ .

## 2 Кінетична енергія. Теорема про кінетичну енергію

Розпишемо вираз для роботи (5.1), скориставшись другим законом Ньютона:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \vec{v} d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (5.4)$$

**Фізична величина рівна**:

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad (5.5)$$

**називається кінетичною енергією**. Відзначимо, що в різних інерціальних системах відліку швидкість тіла може бути різною. Отже, кінетична енергія залежить від вибору інерціальної системи відліку. Тут же відзначимо, що **кінетична енергія - величина адитивна**. З формули (5.4) випливає, що елементарна робота рівнодіючої всіх сил дорівнює повному диференціалу від кінетичної енергії. Якщо в результаті дії сили  $\vec{F}$  швидкість тіла змінилася від  $v_1$  до  $v_2$ , то, інтегруючи (5.4), отримуємо

$$A = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1. \quad (5.6)$$

Або, **збільшення кінетичної енергії частки на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт всіх сил, під дією яких відбувалося це переміщення**. Формулу (5.6) називають теоремою про кінетичну енергію<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Підкреслимо ще раз, що в цій теоремі мова йде про роботу саме рівнодіючої всіх сил, що діють на тіло, так як при виведенні формули (5.5) ми скористалися другим законом Ньютона.



З формули (5.4) випливає, що кінетична енергія вимірюється, як і механічна робота, у Джоулях.

Тепер розглянемо тіло маси  $m$ , що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо нерухомої осі. Кінетичну енергію знайдемо, просумувавши кінетичні енергії малих часток маси  $m_i$ , на які розіб'ємо тіло

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 \rho_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i \rho_i^2 = \frac{J \omega^2}{2}.$$

Тут  $\rho_i$  - відстань від  $i$ -ої частки до осі обертання. Таким чином, кінетична енергія тіла, що обертається

$$T = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (5.7)$$

І знову відзначимо схожість формул для поступального й обертального рухів - на цей раз кінетичних енергій поступального (5.5) і обертального рухів (5.7).

Тепер можна легко знайти вираз для роботи рівнодіючої всіх сил при обертанні тіла навколо нерухомої осі. На підставі теореми про кінетичну енергію (5.6) маємо

$$dA = dT = d \left( \frac{J \omega^2}{2} \right) = J \omega d\omega = J \omega \varepsilon dt = J \varepsilon d\varphi = M d\varphi. \quad (5.8)$$

Тут ми скористалися основним законом динаміки обертального руху (4.9)  $M = J \varepsilon$ , а також врахували, що  $d\omega = \varepsilon dt$ . З формули (5.8) випливає, що при обертальному русі робота виконується моментом сил.

У випадку плоского складного руху кінетична енергія тіла буде складатися із двох частин - кінетичної енергії поступального руху його центра мас і кінетичної енергії обертання навколо центра мас із кутовою швидкістю  $\omega$

$$T = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J \omega_c^2}{2}. \quad (5.12)$$

### 3 Консервативні сили. Потенціальна енергія.

У сучасному природознавстві прийнято вважати, що взаємодія тіл здійснюється за допомогою полів. Полем сил називають область простору, у кожній точці якої на частку діє сила, що закономірно змінюється від точки до точки. Інакше кажучи, якщо в кожній точці

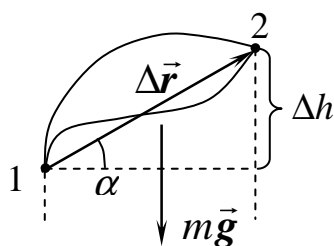


Рисунок 5.3

простору на матеріальну точку діють сили, то говорять, що в просторі визначене силове поле. Приклад силового поля - поле сили тяжіння. Нехай тіло переміщається із точки 1 у точку 2 (Рис. 5.3). Обчислимо роботу, що здійснює сила ваги при цьому переміщенні. Відповідно до визначення механічної роботи

(5.1) ми можемо записати

$$A = \int_1^2 m\vec{g} d\vec{r}. \quad (5.13)$$

Тепер скористаємося обставиною, що поблизу поверхні Землі сила ваги постійна:  $m\vec{g} = const$ . Постійну величину можна винести з під знака інтеграла й вираз (5.13) для роботи запишеться так –

$$A = m\vec{g} \int_1^2 d\vec{r}. \quad (5.14)$$

Інтеграл у виразі (5.14) являє собою суму елементарних переміщень  $d\vec{r}$ , які робить тіло при своєму русі із точки 1 у точку 2. Очевидно, що сума всіх елементарних переміщень буде дорівнювати  $\Delta\vec{r}$ . Отже, вираз (5.14) приймає вид

$$\begin{aligned} A = m\vec{g} \Delta\vec{r} &= mg |\Delta\vec{r}| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -mg |\Delta\vec{r}| \sin \alpha = \\ &= -mg \Delta h = -mg (h_2 - h_1), \end{aligned} \quad (5.15)$$

де  $h_1$  - висота, на якій перебуває тіло над поверхнею Землі в початковому положенні 1, і  $h_2$  - висота в кінцевому положенні 2. А тепер саме головне. При обчисленні роботи сили ваги ми нічого не говорили, про траєкторію, по якій рухається наше тіло. Очевидно, що для будь-якої траєкторії, що веде із точки 1 у точку 2, вектор переміщення  $\Delta\vec{r}$  буде тим самим, і, згідно (5.15), для всіх траєкторій робота сили ваги буде мати також те саме значення. Тобто, робота сили ваги не залежить від форми траєкторії, а визначається тільки початковою й кінцевою висотою тіла над поверхнею Землі.

**Сили, робота яких не залежить від форми траєкторії, за якою частка переходить із одного положення в інше, а визначається тільки початковим і кінцевим положенням частки, на-**

зиваються консервативними.<sup>7</sup> У цьому випадку кожному положенню частки в силовому полі можна зіставити деяку функцію  $U(\vec{r})$  таку, що різниця значень цієї функції в точках 1 й 2 визначає роботу сил поля по переміщенню частки між цими точками

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (5.16)$$

Функцію  $U$  називають потенціальною енергією частки. Порівнюючи формули (5.15 - 5.16), ми дійдемо до висновку, що потенціальна енергія тіла в полі сили ваги описується формулою

$$U = mgh, \quad (5.17)$$

де  $h$  - висота, на якій перебуває тіло над поверхнею Землі.

До консервативних сил відносяться й сили пружності. Знайдемо потенціальну енергію пружної деформації. Сила пружності (див. лекцію 2, формула (2.10)) дорівнює

$$F = -kx. \quad (5.18)$$

Тут  $x$  - зсув кінця пружини з положення рівноваги. Якщо ми будемо розтягувати або стискати пружину, то, на підставі 3-го закону Ньютона, робота зовнішньої сили, протилежно спрямованій силі пружності пружини, буде дорівнювати

$$A = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (5.19)$$

Ця робота зовнішньої сили була витрачена на збільшення потенціальної енергії пружини. Якщо вважати, що енергія пружини в недеформованому стані дорівнює 0, то тоді

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (5.20)$$

Потенціальну енергію часто називають енергією взаємодії. Дійсно, у першому прикладі взаємодіють тіло й Земля, у випадку пружини взаємодіють окремі частини одного тіла (нагадаємо, що сили пружності з'являються при зміні взаємного положення заряджених часток, з яких складається тіло).

Ще один приклад консервативних сил - центральні сили. Так називають сили, величина яких залежить тільки від відстані між двома частками, а спрямовані вони уздовж лінії, що з'єднує ці

---

<sup>7</sup> Інша назва цих сил - потенціальні. Ми будемо використовувати ці терміни як синоніми.

частки (Рис. 5.4). Центральними є сила Всесвітнього тяжіння й сила Кулона (2.5, 2.6). З рисунка 5.4 видно, що для центральних сил елементарна робота  $\vec{F}d\vec{r}$  буде дорівнювати

$$dA = \vec{F}(r)d\vec{r} = F(r)dr.$$

Відповідно, робота, здійснена на кінцевому шляху  $s$  дорівнює

$$A = \int \vec{F}d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr. \quad (5.21)$$

З (5.21) ясно, що повна робота залежить від початкової й кінцевої відстаней від частки до силового центра, і не залежить від форми траєкторії. Підставимо у формулу (5.21) вираз для сили Всесвітнього тяжіння (2.5)

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -GMm \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (5.22)$$

Знак "-" перед інтегралом відображує той факт, що напрямки сили й переміщення протилежні, якщо початок координат поміщений на силовому центрі. З (5.22) і (5.16) можна зробити висновок, що потенціальна енергія сил тяжіння дорівнює

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (5.23)$$

І ще кілька слів про потенціальну енергію. Згідно (5.16), робота консервативної сили буде дорівнювати зменшенню потенціальної енергії

$$\vec{F}d\vec{r} = -dU. \quad (5.24)$$

Розписуючи скалярний добуток, одержимо

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU. \quad (5.25)$$

Якщо переміщення частки відбувалося тільки уздовж  $x$ , у той час як  $y$  й  $z$  координати залишалися постійними, то  $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ . Тут значок  $\partial$  означає часткову похідну за координатою, що береться, коли інші координати залишаються незмінними. Аналогічним образом одержимо компоненти сил  $F_y$  й  $F_z$ . Таким чином

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (5.26)$$

Відповідно до (5.26) ми маємо 3 проекції сили на осі координат. Якщо помножимо їх на відповідні одиничні вектори й складемо, то одержимо вектор сили

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}, \quad (5.27)$$

або, у скороченому вигляді

$$\vec{F} = -gradU. \quad (5.28)$$

Тут мається на увазі, що

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

Відповідно до (5.28)  $grad U$  є вектором (читається "градієнт  $U$ "), хоча функція  $U$  є скаляром. Поряд з (5.28) використовується позначення  $\nabla U$ :  $gradU \equiv \nabla U$ , де  $\nabla$  (набла) - диференціальний оператор, також називається оператором Гамільтона, є

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Відзначимо, що  $grad$  якої-небудь скалярної функції, як це доводиться у вищій математиці, визначає напрямок найбільш швидкого росту цієї функції. Якщо ця властивість градієнта скалярної функції застосувати до потенціальної енергії, то з рівняння (5.28) виходить, що консервативні сили завжди спрямовані у бік найбільш швидкого зменшення потенціальної енергії.<sup>8</sup>

#### 4 Закон збереження механічної енергії

Нехай на частку діють тільки консервативні сили. Тоді, з однієї сторони, робота за переміщенням частки із точки 1 у точку 2 визначається виразом (5.16):  $A_{12} = U_1 - U_2$ , а з іншого боку, ця робота визначає зміну кінетичної енергії (5.6):  $A_{12} = T_1 - T_2$ . Отже,

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \quad \text{або} \quad T_1 + U_1 = T_2 + U_2. \quad (5.28)$$

<sup>8</sup> Ілюстрацією цього твердження є положення русла рік. Вони завжди перебувають у місцях з найменшою для даної місцевості потенціальною енергією поля сили ваги.

Таким чином, ми одержали, що величина  $E=T+U$ , для частки, що перебуває в полі дії консервативних сил, залишається постійною

$$E = T+U = const. \quad (5.29)$$

**Фізична величина  $E$ , рівна сумі кінетичної і потенціальної енергій частки, називається повною механічною енергією частки.** Відповідно до (5.16) можна сказати, що робота відбувається за рахунок зменшення потенціальної енергії частки в полі консервативних сил, при цьому ця робота, згідно (5.6), іде на збільшення кінетичної енергії частки  $dT = -dU$ .

Нехай, крім потенціальних сил, що результуюча якої дорівнює  $F$ , на частку діє також і неконсервативна сила  $F^*$ . Тоді, при переході частки з положення 1 у положення 2 на неї буде здійснюватися робота

$$A_{12} = \int F ds + \int F^* ds = A_{\text{конс}} + A^*.$$

Відповідно до теореми про збільшення кінетичної енергії  $A_{12}=dT$  і, таким чином

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A^*,$$

або

$$E_2 - E_1 = A^*. \quad (5.30)$$

Таким чином, ми одержали, що робота неконсервативних сил затрачується на збільшення повної механічної енергії частки.

Розглянемо тепер систему часток (тіл), між якими діють консервативні сили та ця система перебуває в зовнішньому силовому полі консервативних сил<sup>9</sup>, і, крім того, нехай на частки системи діють неконсервативні сили. Тоді, як ми вже знаємо, збільшення кінетичної енергії кожної частки дорівнює алгебраїчній сумі робіт, які здійснюють всі сили

$$dT_i = (dA_{\text{вз}}^{\text{ном}} + dA_{\text{внешн}}^{\text{ном}} + dA^*)_i, \quad (5.31)$$

де індекс  $i$  означає номер частки. З урахуванням того, що роботу потенціальних сил можна представити як зміну потенціальної енергії частки у відповідному силовому полі

$$dA_{\text{вз}}^{\text{ном}} = -dU_{\text{вз}}, \quad dA_{\text{внешн}}^{\text{ном}} = -dU_{\text{внешн}}.$$

<sup>9</sup> Наприклад, електрично заряджені тіла, які перебувають у зовнішньому електричному полі.

вираз (5.31) можна переписати у вигляді

$$(dT + dU_{вз} + dU_{внешн})_i = dA_i^*. \quad (5.32)$$

Введемо поняття повної механічної енергії системи, як суми кінетичної і потенціальної енергій всіх часток системи

$$E = \sum_i (T + U_{вз} + U_{внешн})_i.$$

Тепер, підсумовуючи вираз (5.32) по всіх частках розглянутої системи, одержимо

$$dE = \sum_i dA_i^*. \quad (5.33)$$

Тобто, як і для однієї частки (5.30), повна механічна енергія системи часток змінюється за рахунок роботи тільки неконсервативних сил, які діють на окремі частки системи. Якщо неконсервативні сили відсутні, то з (5.33) одержуємо

$$E = \sum_i (T + U_{вз} + U_{внешн}) = const. \quad (5.34)$$

Отже, повна механічна енергія системи тіл, на які діють тільки консервативні сили, залишається постійною. Це і є закон збереження повної механічної енергії.

У теоретичній фізиці доводиться, що закон збереження механічної енергії є наслідком однорідності часу. Однорідність часу означає незалежність фізичних законів від початку відліку часу, тобто говорить про рівнозначність всіх моментів часу.

Особливий випадок неконсервативних сил представляють сили тертя. Робота сил тертя завжди негативна, тому що сили тертя спрямовані проти вектора швидкості

$$dA_{mp} = \vec{F}_{mp} d\vec{r} = \vec{F}_{mp} \vec{v} dt = -F_{mp} v dt < 0.$$

Відповідно до рівняння (5.33) повна механічна енергія системи при наявності тертя зменшується. Такий процес називається дисипацією, або розсіюванням енергії, а сили, які приводять до втрати механічної енергії, називаються дисипативними. Крім розглянутої нами повної механічної енергії в природі існують інші види енергії. Як Ви знаєте з повсякденного досвіду, при терті тіла нагріваються, а це значить, що повна механічна енергія переходить

у внутрішню енергію ("теплову" енергію) взаємодіючих тіл. У цьому смислі рівняння

$$\Delta E = A^*$$

також є законом збереження енергії, якщо відомо, у які форми переходить механічна енергія системи. Для енергії, як єдиної характеристики різних форм руху матерії справедливий закон збереження енергії, що може бути сформульований таким чином: **енергія ніколи не зменшується й не збільшується, не зникає й не з'являється знову, вона лише перетворюється з одного виду в інший.** Але це вже питання іншого розділу фізики - термодинаміки, який ми будемо вивчати пізніше.

## 5 Потенціальна яма. Умови рівноваги механічної системи

Нехай на частку діють тільки консервативні сили. Як ми вже знаємо, у цьому випадку повна механічна енергія частки зберігається

$$E = T + U = const.$$

Оскільки кінетична енергія за своїм визначенням завжди додатна, то це значить, що повна механічна енергія не може бути меншою, чим потенціальна

$$E \geq U. \quad (5.35)$$

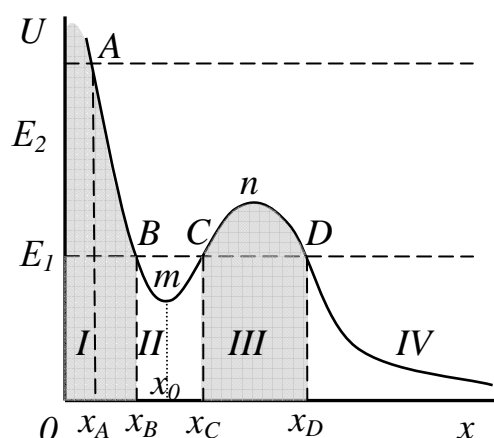


Рисунок 5.5

Так як потенціальна енергія залежить тільки від координат частки, то відношення (5.35) визначає область простору, у межах якої може перебувати частка із заданою енергією  $E$ . Частка не може проникнути в область, де  $U > E$ , оскільки потенціальна енергія не може бути більше повної енергії.

Як приклад розглянемо частку, здатну здійснювати тільки одномірний рух, наприклад, уздовж осі  $Ox$ . Тоді залежність потенціальної енергії від координат зведеться до залежності від  $x$ :  $U=U(x)$ . І, нехай, ця залежність має вигляд, зображена на рисунку 5.5. Пряма  $E_1$  на цьому рисунку відповідає руху частки з повною енергією



рівній  $E_1$ . З рисунка видно, що частка може перебувати тільки в області II або в області IV, і не може перебувати в областях I й III, у яких її потенціальна енергія більше, ніж повна. Якщо, наприклад, частка перебуває в області II, то вона не може потрапити в область IV, оскільки для цього їй треба здолати потенціальний бар'єр  $CnD$ , що неможливо без надання частці додаткової механічної енергії. Таким чином, частка може робити тільки **фінітний**, тобто обмежений в межах області II рух. Частка як би замкнена в області II в межах потенціальної ями  $BmC$  і може рухатися тільки між **точками повороту**  $x_B$  і  $x_C$ . Якщо ж частка перебуває в області IV, то вона має можливість піти на нескінченність, якщо вона рухається вправо. У цьому випадку рух називається **інфінітним**. Якщо ж частка рухається ліворуч, то, досягнувши точки повороту  $x_D$ , вона поверне назад, і знову буде йти на нескінченність. Якщо повна енергія частки дорівнює  $E_2$ , то доступною для руху буде вся область  $x > x_A$ .

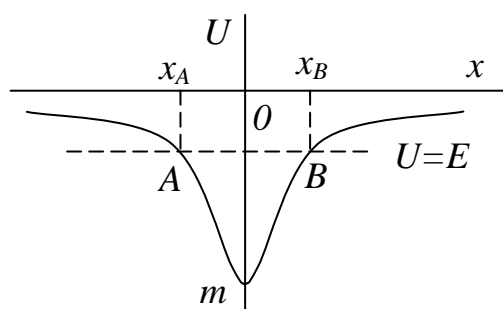


Рисунок 5.6

Ще один цікавий приклад зображений на рисунку 5.6. Тут частка має негативну потенціальну енергію, що перетворюється в нуль при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Рух буде фінітним, якщо повна енергія негативна - частка може робити тільки коливальний рух між точками  $x_A$  і  $x_B$  у межах потенціальної ями  $AmB$ . І рух буде інфінітним, якщо повна енергія

частки позитивна - у цьому випадку частці доступна область від  $-\infty$  до  $+\infty$ .

За допомогою потенціальної енергії можна сформулювати умову рівноваги механічної системи. Як ми вже знаємо, кінетична енергія може збільшуватися тільки за рахунок зменшення потенціальної енергії. Отже, щоб система перебувала в рівновазі, її потенціальна енергія повинна бути мінімальною. Щоб знайти мінімум потенціальної енергії, необхідно досліджувати функцію  $U(x)$  на екстремум. Як відомо, для цього потрібно першу похідну по координаті прирівняти до нуля

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (5.36)$$

При координаті  $x_0$ , що відповідає умові (5.36), сили, що діють на частку, відповідно до (5.26), дорівнюють нулю. Але, як ми знаємо, умова (5.36) також відповідає максимуму функції  $U(x)$ . І це теж буде точка рівноваги механічної системи. Однак це буде точка нестійкої рівноваги, на відміну від точки, що відповідає  $x_0$  (Рис. 5.5). Якщо систему вивести з положення рівноваги, що відповідає мінімуму потенціальної енергії, то виникають сили, які прагнуть повернути систему в положення рівноваги. І, навпаки, при виведенні системи з положення нестійкої рівноваги в ній з'являються сили, які будуть віддаляти систему від положення хиткої рівноваги. Таким чином, можна сформулювати наступний принцип мінімуму потенціальної енергії: у замкнутій системі мимовільно протікають тільки ті процеси, при яких потенціальна енергія системи прагне до мінімуму.

# ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ І ТЕРМОДИНАМІКИ.

## Лекція 6

### ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ

#### 1 Статистичний та термодинамічний методи

Вивчаючи механіку, ми з Вами не зачіпали таких питань, як побудовані різні тіла, які процеси в них протікають, чим обумовлені перетворення цих тіл, які ми спостерігаємо на досвіді. Всі ці питання розглядаються в розділах фізики, які називаються термодинаміка й молекулярної фізика. Молекулярна фізика й термодинаміка взаємно доповнюють один одного, відрізняючись різними методами дослідження.

Молекулярна фізика вивчає будову й властивості речовини виходячи з молекулярно-кінетичних уявлень. В основі цього підходу лежать три положення, які сформульовані як результат узагальнення багато чисельних досвідчених даних. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії (МКТ) зводяться до наступного:

- 1 Всі тіла складаються з атомів або молекул;
- 2 Атоми (молекули) хаотично рухаються (інтенсивність цього руху залежить від температури, тому хаотичний рух атомів (молекул) називають тепловим);
- 3 Атоми (молекули) взаємодіють між собою із силами притягання й відштовхування.

Основне завдання молекулярної фізики - пояснення, спостережуваних на досвіді, властивостей макроскопічних тіл як сумарний результат дії великої кількості молекул. Оскільки молекул дуже багато, то МКТ використовує статистичний метод. У рамках цього методу опис систем, що складаються із великої кількості часток, проводиться за допомогою усереднених по всьому ансамблю характеристик, таких як середня швидкість руху, середня енергія й т.д.. Необхідність використання усереднених величин обумовлена не тільки тим, що неможливо простежити за рухом окремої молекули, але й тим, що більша сукупність молекул виявляє нові властивості, відсутні в однієї окремо взятій молекулі. Наприклад, не має змісту говорити про тиск, що надано однією молекулою на стінки посудини. У той же час велика кількість молекул, що утворюють газ, характеризується тиском, що надає цей газ на стінки по-

судини. Можна сказати, що тут ми спостерігаємо прояв відомого філософського закону про перехід кількості в нову якість.

**Термодинаміка** вивчає загальні властивості макроскопічних тіл, що знаходяться в стані рівноваги й процеси переходу між цими станами безвідносно до внутрішньої мікроскопічної будови речовини. Завдяки цьому область застосування термодинаміки значно ширша, ніж молекулярно-кінетичної теорії. Термодинаміка заснована на 2-х досвідчених законах, які називаються **початками** термодинаміки.

Сукупність макроскопічних тіл, які взаємодіють й обмінюються енергією, як між собою, так і з навколишнім середовищем називають термодинамічною системою. Опис властивостей макроскопічних тіл у термодинаміці ведеться за допомогою термодинамічних параметрів, таких як тиск  $P$ , об'єм  $V$ , температура  $T$  і т.д. Термодинамічні параметри стану характеризують систему в положенні рівноваги, коли із часом ці параметри не змінюються. Такий стан системи називається **рівноважним**. Рівноважний стан системи можна зобразити точкою на графіку, по осях якого відкладені параметри системи, наприклад тиск й об'єм. Якщо система не перебуває в рівновазі, то який-небудь із термодинамічних параметрів не визначений для всієї системи. Наприклад, якщо швидко стиснути газ у циліндрі з поршнем, то в різних точках циліндру тиск буде різним - більшим поблизу поршня й меншим у протилежній стінці циліндра. Такий стан уже не можна зобразити точкою на діаграмі. Однак із часом система повернеться в положення рівноваги, і її знову можна буде описувати параметрами стану. Перехід системи з не рівноважного стану в рівноважний називається **релаксацією**.

Усякий процес, тобто перехід системи з одного рівноважного стану в інший, пов'язаний з порушенням рівноваги системи. Однак, якщо перехід між станами робити дуже повільно, то можна вважати, що в кожен момент часу система перебуває в рівноважному стані. Такий процес називається **рівноважним або квазістатичним**. Рівноважний процес можна провести у зворотному напрямку, причому система буде проходити через ті ж рівноважні стани. Тому рівноважні процеси називаються **оборотними**.

## 2 Маса і розміри молекул

Масу молекул прийнято виражати у відносних молекулярних одиницях. За стандарт прийнята маса ізоотопу вуглецю  $^{12}\text{C}$ . Вважається, що молекулярна маса вуглецю дорівнює 12 атомним одиницям. Тоді молекулярною масою речовини називається відношення маси молекули цієї речовини до  $1/12$  маси атома вуглецю  $^{12}\text{C}$ . Таким чином, молекулярна маса - величина безрозмірна. Кількістю речовини, в якій міститься кількість молекул, рівна числу атомів в  $0,012$  (кг) ізоотопу вуглецю  $^{12}\text{C}$ , називається молем речовини. Число молекул, що міститься в 1 *молі* називається числом Авогадро, і воно дорівнює:  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  (моль $^{-1}$ ). Масу одного моля називають молярною масою  $M$ , це величина розмірна – [кг/моль]. Наприклад, молярна маса кисню ( $\text{O}_2$ ) дорівнює  $0,032$  (кг/моль), вуглецю (C)-  $0,012$  (кг/моль). Очевидно, що молярна маса дорівнює добутку числа Авогадро на масу однієї молекули  $m_0$

$$M = N_A m_0. \quad (6.1)$$

Із співвідношення (6.1) можна розрахувати масу молекули даної речовини. Наприклад, молярна маса води ( $\text{H}_2\text{O}$ ) дорівнює  $2 \cdot 0,001 + 0,016 = 0,018$  (кг/моль), отже, маса однієї молекули води -

$$0,018 / (6,022 \cdot 10^{23}) = 3 \cdot 10^{-26} \text{ (кг)}.$$

Оцінку розмірів молекули проведемо на прикладі рідин. Приблизну величину об'єму однієї молекули можна одержати, розділивши об'єм *моля* (молярний об'єм) якої-небудь рідини на число молекул у молі  $N_A$ . Чисельну оцінку зручно провести на прикладі води, тому що густина води  $1000$  (кг/м $^3$ ). Молярний об'єм води  $0,018 / 1000 = 18 \cdot 10^{-6}$  (м $^3$ ). Отже, на одну молекулу води доводиться об'єм, рівний

$$18 \cdot 10^{-6} / (6,022 \cdot 10^{23}) = 30 \cdot 10^{-30} \text{ (м}^3\text{)}.$$

Лінійні розміри молекули води приблизно рівні

$$\sqrt[3]{30 \cdot 10^{-30}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

Такий же порядок величини мають розміри молекул й інших речовин.

### 3 Дослідні закони ідеального газу

Ідеальний газ - це ідеалізована модель реальних газів, згідно якої :

1 загальний обсяг всіх молекул газу зневажливо малий у порівнянні з обсягом посудини, у якому перебуває газ;

2 Взаємодія молекул між собою й стінками посудини зводиться до абсолютно пружних зіткнень.

З першого припущення виходить, що відстані між молекулами набагато перевищують розміри молекул, і тому молекули можна розглядати як матеріальні точки. З іншого боку, при великих відстанях між молекулами можна зневажити сили притягання й відштовхування між молекулами. Ця обставина виправдує друге припущення. Нагадаємо, що пружним називається удар, при якому механічна енергія тіл, що набувають зіткнення, залишається постійною. Виявляється, що дуже багато реальних газів при нормальних умовах (кімнатній температурі й атмосферному тиску) можна вважати ідеальними.

Термодинамічними параметрами, що описують стан даної маси газу, є тиск  $P$ , об'єм  $V$  і температура  $T^{10}$ . Ці параметри стану ідеального газу зв'язані рівнянням стану ідеального газу, що називають рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$PV = \frac{m}{M} RT. \quad (6.2)$$

У рівнянні (6.2)  $m$  - маса газу,  $M$  - його молярна маса. Таким чином, відношення  $m/M = \nu$  дорівнює числу молів газу.  $R = 8,31$  (Дж/моль\*К) - універсальна газова стала. Універсальна газова стала дорівнює добутку двох констант - числа Авогадро й сталої Больцмана  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  (Дж/К). Таким чином, (6.2) можна переписати у вигляді

$$PV = \nu N_A kT.$$

Добуток  $\nu N_A = N$  дорівнює числу молекул, що міститься в масі газу  $m$ . З урахуванням цього

$$PV = NkT. \quad (6.3)$$

---

<sup>10</sup> Ми завжди будемо користуватися термодинамічною температурою  $T$ , що вимірюється в градусах Кельвіна. Співвідношення між термодинамічною шкалою й шкалою в градусах Цельсія:  $T = 273,15 + t$ .

Тепер розділимо обидві частини рівняння (6.3) на  $V$ . З урахуванням того, що  $N/V = n$ , де  $n$  - **концентрація молекул**, тобто число молекул в одиниці об'єму, замість (6.3) одержимо

$$P = n k T. \quad (6.4)$$

Рівняння (6.2) - (6.4) також називають рівняннями стану ідеального газу, записаними в різних формах.

Рівняння Менделєєва - Клапейрона є узагальненням дослідних законів, що описують поведінку ідеального газу в різних ізопроцесах. Розглянемо ці газові закони. Перепишемо рівняння (6.2) у вигляді

$$\frac{PV}{T} = \frac{m}{M} R. \quad (6.5)$$

З рівняння (6.5) виходить, що при постійній масі газу, виконується відношення

$$\frac{PV}{T} = const, \quad (11.6)$$

яке називають *об'єднаним газовим законом*.

1 **Ізотермічний процес**:  $T=const, m=const$ .

З рівняння (6.5) одержуємо закон Бойля – Маріотта

$$PV = const,$$

для постійної маси газу при постійній температурі добуток тиску газу на його об'єм є величина стала (Рис. 6.1а).

2 **Ізохорний процес**:  $V=const, m=const$ .

При цих умовах виконується закон Гей-Люссака

$$\frac{P}{T} = const \quad \text{або} \quad P = const \cdot T,$$

тиск даної маси газу при постійному об'ємі змінюється лінійно з температурою (Рис. 6.1б).

3) **Ізобарний процес**:  $P=const, m=const$ .

У цьому випадку з (6.6) одержуємо закон Шарля

$$\frac{V}{T} = const \quad \text{або} \quad V = const \cdot T,$$

об'єм даної маси газу при постійному тиску змінюється лінійно з температурою (Рис. 6.1в).

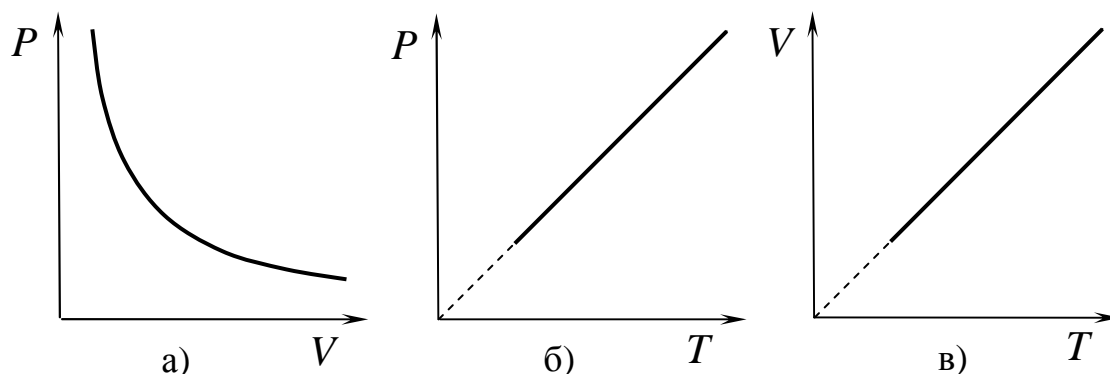


Рисунок 6.1

Для суміші газів виконується закон Дальтона: тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків газів, що входять у неї:

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_i,$$

де  $P_i$  - парціальний тиск  $i$  - ї компоненти суміші. Парціальний тиск - це тиск, що чинив би один газ при тій же об'ємі й температурі, якби інших газів не було. Парціальний тиск можна знайти з рівняння Менделєєва-Клапейрона (6.2).

#### 4 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії

Розглянемо ідеальний одноатомний газ і спробуємо визначити тиск, що чинить цей газ на стінки посудини з ідеально відбиваючими стінками (Рис. 6.2). Тобто, будемо вважати, що удари молекул об стінки - абсолютно пружні. Припустимо також, що всі молекули рухаються уздовж 3-х взаємно перпендикулярних напрямків, так що в будь-який момент часу уздовж кожного напрямку рухається 1/3 від загального числа всіх молекул, причому половина із цього числа (тобто 1/6) рухається в напрямку до стінки, а друга половина - від стінки. За час  $\Delta t$  площадки  $\Delta S$  досягнуть тільки ті молекули, які знаходяться у прямому циліндрі об'ємом  $V = \Delta S v \Delta t$ . Число таких молекул буде дорівнювати

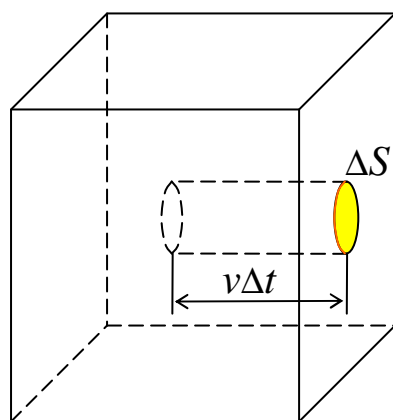


Рисунок 6.2



$$N_V = (1/6) n \Delta S v \Delta t.$$

Кожна молекула при ударі об стінку передасть їй імпульс

$$\Delta K_I = m_0 v - (-m_0 v) = 2m_0 v.$$

Загальний імпульс  $\Delta K$ , переданий площадці  $\Delta S$  за час  $\Delta t$ , буде дорівнює добутку  $\Delta K_I$  - імпульсу, отриманого при ударі однієї молекули, на число ударів молекул об стінку. Це число ударів дорівнює  $N_V$  - числу молекул, що досягла площадки  $\Delta S$  за час  $\Delta t$ . Отже,

$$\Delta K = \Delta K_I N_V = \frac{1}{3} m_0 n v^2 \Delta S \Delta t.$$

Імпульс, переданий стінці за одиницю часу, відповідно до другого закону Ньютона дорівнює силі, що діє на цю площадку

$$F = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{1}{3} n m_0 v^2 \Delta S. \quad (6.7)$$

Після того, як поділили вираз (6.7) на площу  $\Delta S$  одержимо тиск, що чинить газ на стінки посудини

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{1}{3} n m_0 v^2. \quad (6.7)$$

Отриманий вираз (6.8) вимагає уточнення. У реальному газі молекули рухаються у всіляких напрямках і з різними величинами швидкостей. Цю різницю ми врахуємо, якщо у формулу (6.8) підставимо середнє значення квадрату швидкості

$$\langle v_{кв} \rangle^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2. \quad (6.9)$$

Швидкість із співвідношення (6.9) прийнято називати середньою квадратичною швидкістю. З урахуванням (6.9) вираз для тиску (6.8) прийме вигляд

$$P = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{кв} \rangle^2. \quad (6.10)$$

Вираз (6.10) називається основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії газів. Це рівняння зв'язує макроскопічний параметр - тиск газу  $P$  - з характеристиками молекул. Відзначимо, що точний розрахунок з урахуванням усіляких напрямків руху також дає ту ж саму формулу.

## 5 Фізичний зміст термодинамічної температури

Помножимо чисельник виразу (6.10) на 2. У підсумку отримаємо

$$P = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} n \langle E \rangle, \quad (6.11)$$

де  $\langle E \rangle$  - середня кінетична енергія поступального руху молекул ідеального газу. Рівняння (6.11), точно так само як рівняння Менделєєва – Клапейрона (6.4), описує тиск газу на стінки посудини. Прирівнюючи праві частини рівнянь (6.4) і (6.11) знаходимо, що

$$nkT = \frac{2}{3} n \langle E \rangle,$$

або

$$\langle E \rangle = \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (11.12)$$

З виразу (6.12) одержуємо, що абсолютна температура є мірою середньої кінетичної енергії поступального руху молекул. От чому термодинамічна температура може приймати тільки позитивні значення. Відповідно, температуру варто було б виміряти у Джоулях. Але історично склалося так, що температура ввійшла у фізику раніше енергії, і її вимірюють у градусах. З рівняння (6.12) випливає, що стала Больцмана - це розмірний коефіцієнт, що переводить градуси в Джоулі.

Відзначимо, що енергія поступального руху молекул залежить тільки від температури й не залежить від маси молекули. Вираз (6.12) дозволяє оцінити величину швидкості теплового руху молекул. З (6.12) одержуємо, що

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Підставимо в цю формулу масу молекули води  $m=3 \cdot 10^{-26}$  (кг) і температуру  $373 \text{ K}$ <sup>11</sup>

$$\langle v_k \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{3 \cdot 10^{-26}}} \approx 717 \text{ (м/сек)}.$$

<sup>11</sup> Чисельне значення сталої Больцмана -  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  (Дж / К).

Типові значення швидкості теплового руху молекул -  $10^2 \div 10^3$  (м/сек).

## 6 Середня енергія теплового руху молекул

У моделі ідеального газу одноатомну молекулу розглядають як матеріальну точку, що одночасно може рухатися уздовж 3-х координат. У цьому випадку говорять, що молекула володіє 3-ма ступенями свободи. Взагалі, ступенями свободи називають мінімальне число незалежних координат, якими можна задати положення тіла у просторі. Так, наприклад, абсолютно тверде несиметричне тіло має 6 ступенів свободи: 3 - на поступальний рух центра мас тіла й обертальних ступенів свободи - на обертання навколо 3-х взаємно перпендикулярних осей (Рис. 6.3). Якщо ми з'єднаємо 2 матеріальні точки жорстким зв'язком, то при обертанні навколо осі, що проходить через ці точки, положення такої системи в просторі не зміниться (Рис. 6.4а), тобто число ступенів свободи буде рівним 5. Взагалі, говорять, що будь-який жорсткий зв'язок зменшує число ступенів свободи системи на 1. Нехай тепер дві матеріальні точки зв'язані не жорстким зв'язком, а пружним. У цьому випадку така система має 6 ступенів свободи: 3 поступальних, 2 обертальних й один коливальний (Рис. 6.4б).

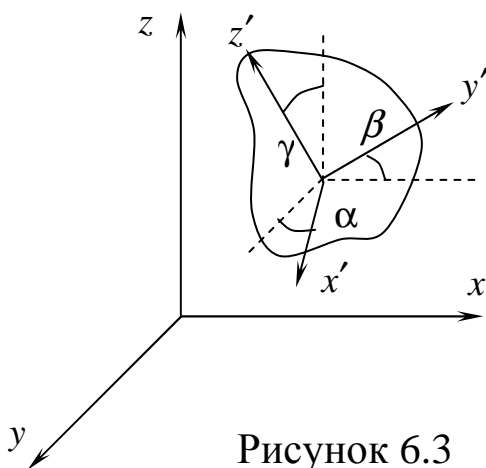


Рисунок 6.3

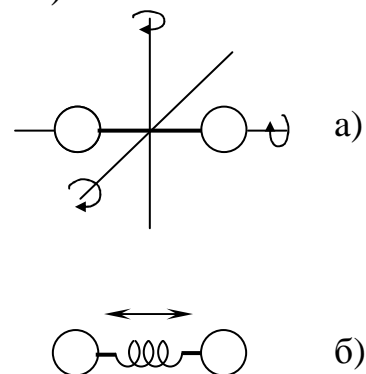


Рисунок 6.4

У класичній фізиці двохатомну молекулу розглядають як 2 матеріальні точки з'єднані або жорстким, або пружним зв'язком. Тоді двохатомна молекула може володіти або 5-ма ступенями свободи (для жорсткого зв'язку) або 6-ма - при наявності пружного зв'язку між молекулами. Але скільки б ступенів свободи не мало тіло (молекула) - 3 з них завжди поступальні й на них приходиться енергія  $\frac{3}{2} kT$ .

У статистичній фізиці доводиться закон про рівнорозподіл енергії по ступенях свободи. Відповідно до цього закону на кожен ступінь свободи приходиться в середньому однакова кінетична енергія, рівна  $\frac{3}{2}kT$ . Таким чином, середня енергія теплового руху молекули повинна дорівнювати

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT. \quad (6.16)$$

де повне число ступенів свободи  $i$  визначається як

$$i = n_{\text{нос}} + n_{\text{обер}} + 2n_{\text{кол}}. \quad (6.17)$$

Двійка в (6.17) відображує той факт, що коливальний ступінь свободи має подвосну енергетичну ємність. У той час як поступальні й обертальні ступені свободи несуть тільки кінетичну енергію, на коливальну ступінь свободи доводяться й кінетична й потенціальна енергії. Причому, як ми знаємо, у випадку коливань середні значення цих енергій рівні між собою. Отже, середня енергія, що приходиться на коливальний ступінь свободи буде дорівнювати  $\frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT$ .

## Лекція 7

### РОЗПОДІЛ МОЛЕКУЛ ЗА ШВИДКОСТЯМИ

#### 1 Зіткнення молекул і теплова рівновага

При виводі основного рівняння МКТ ми знехтували зіткненням молекул між собою та ввели середню квадратичну швидкість. Тим самим, ми замінили реальний закон розподілу молекул за швидкостями припущенням, що у всіх молекул однакові швидкості руху. Насправді це, звичайно, не так. Навіть у стані термодинамічної рівноваги молекули мають різні швидкості хоча б через зіткнення один з одним. Нагадаємо, що рівноважним станом називається такий стан, у якому термодинамічні параметри, що характеризують систему, мають певні значення, що не змінюються із часом. При більш детальному розгляді рівноважних станів нам необхідно якимсь чином враховувати зіткнення молекул між собою. Тому, що саме через зіткнення молекул встановлюється рівноважне значення термодинамічних параметрів системи. наприклад, якщо посудина з газом, що має температуру  $T_1$ , поставити на обігрівач, а потім зняти, то після закінчення деякого часу ми виявимо, що температура всього газу буде  $T_2$ , хоча ми нагрівали тільки дно посудини. Причому  $T_2 > T_1$ . У результаті зіткнень молекул одна з одною у посуді встановлюється новий рівноважний стан з температурою  $T_2$ . Більш "гарячі" молекули, які мають більшу кінетичну енергію, при зіткненнях віддають надлишок енергії іншим, "холодним" молекулам. Після серії зіткнень середнє значення кінетичної енергії молекул стане однаковим у всій посудині, а це й означає, що встановився новий рівноважний стан.

Щоб довести, що саме зіткнення молекул між собою відіграють визначальну роль при встановленні термодинамічної рівноваги, приведемо наступний чисельний приклад. При нормальному атмосферному тиску й кімнатній температурі в  $1 \text{ м}^3$  повітря міститься близько  $10^{25}$  молекул. Середня відстань між молекулами за порядком величини буде дорівнювати

$l \approx \left( \frac{1}{10^{25}} \right)^{1/3} \sim 0,3 \cdot 10^{-8} \sim 10^{-8} (\text{м})$ . Це майже на 2 порядки більше

розмірів молекул і відстаней, на яких молекули взаємодіють між собою. Інакше кажучи, повітря дійсно можна вважати ідеальним газом. Підрахуємо тепер сумарну площу всіх молекул в  $1 \text{ м}^3$ . Буде-

мо вважати молекули сферами з діаметром в  $d \sim 10^{-10}$  (м). Тоді поверхня всіх молекул, укладених в одному кубометрі повітря, буде, мабуть, дорівнювати добутку поверхні кулі  $\pi d^2$  на число всіх молекул  $10^{25}$  ( $m^{-3}$ ):  $10^{25} * \pi * 10^{-20} \approx \pi * 10^5$  ( $m^2$ ). Іншими словами, ми одержали, що сумарна поверхня молекул в 100 000 разів більше чим поверхня 1 метра кубічного! Отже, молекули зіштовхуються між собою набагато частіше, ніж зі стінками посудини. І саме зіткнення між молекулами відіграють визначальну роль при встановленні рівноважних станів. Але при цьому швидкості в молекул будуть самі різні. Тепер спробуємо знайти розподіл молекул за швидкостями.

## 2 Поняття про функцію розподілу за швидкостями

Давайте тепер уточнимо завдання. А що ми розуміємо під словами "розподіл молекул за швидкостями"? Очевидно, що ми не зможемо точно вказати, які молекули мають ті або інші швидкості. Напевно, ми можемо говорити про це тільки з якоюсь часткою ймовірності. Виходить, давайте спочатку поговоримо про ймовірності. Поставимо перед собою питання - скільки ж молекул мають швидкості, що лежать в інтервалі від  $v$  до  $v+dv$ ? Очевидно, що число таких молекул пропорційно загальному числу молекул у розглянутому об'ємі  $N$ , величині інтервалу  $dv$  і буде деякою функцією  $f(v)$ . Таким чином, шукане число може бути записане як

$$dN = Nf(v)dv. \quad (7.1)$$

Тут  $f(v)$  називається функцією розподілу молекул за швидкостями. Для з'ясування фізичного змісту функції розподілу, згадаємо, що  $dP = \frac{dN}{N}$  - є, мабуть, імовірність того, що молекули ма-

ють швидкість в інтервалі  $v$  до  $v+dv$ . Тоді величина  $f(v) = \frac{dP}{dv}$  - бу-

де називатися густиною ймовірності, і це є шукана функція розподілу молекул за швидкостями  $v$ . За допомогою функції розподілу можна визначати будь-які середні характеристики всього ансамблю молекул. Дійсно, якщо нам потрібно визначити середнє значення деякої величини  $a$ , що залежить від швидкості (наприклад, імпульсу), то для цього треба просто обчислити інтеграл

$$\langle a(v) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} a(v) f(v) dv. \quad (7.2)$$

на самому ділі,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(v) f(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} a(v) \frac{dN}{N dv} dv = \frac{1}{N} \int_0^N a(v) dN. \quad (7.3)$$

Останнє вираз в (12.3) є не що інше, як визначення середньої величини. І ще, нам знадобиться умова нормування функції розподілу. З (7.1) випливає, що

$$\int_0^N dN = \int_{-\infty}^{+\infty} N f(v) dv,$$

або

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) dv = 1. \quad (7.3)$$

Говорять, що функція розподілу нормована на одиницю. І це не дивно, оскільки функція розподілу за визначенням є густина ймовірності. А ймовірність достовірної події - знайти частку з певною швидкістю у всьому інтервалі швидкостей, дорівнює 1.

### 3 Розподіл Максвелла за напрямками швидкостей

Тепер, коли ми визначилися, яку ж величину будемо шукати, давайте скористаємося досить часто використовуваним у фізику прийомом. Ми спробуємо "вгадати" шуканий розподіл. А перевірку того, що ми вгадали правильно, ми одержимо, порівнюючи результати нашої теорії з експериментом.

Із чого ми повинні виходити при знаходженні шуканого розподілу? Виявляється, у нас є 2 відправних моменти:

1 Розподіл молекул за швидкостями повинен бути симетричним відносно початку координат. Це випливає з того, що в рівноважному стані всі напрямки в просторі рівноправні. Якби це було не так, то був би дрейф молекул - потік молекул у якому-небудь одному напрямку, пов'язаний з переносом, наприклад, енергії. У рівноважному стані ніяких потоків немає.

2 Виходячи з того, що кінетична енергія молекул, що містяться у будь-якій посудині, повинна бути кінцевою, у шукано-

му розподілі не повинно бути нескінченно великої швидкості навіть в однієї молекули.

Отже, припустимо, що функція розподілу молекул за проєкціями швидкостей має вигляд:

$$f(v_x) = A \exp(-\beta v_x^2). \quad (7.5)$$

Дійсно, такий вид функції розподілу задовольняє двом нашим вихідним вимогам:

- 1 Ця функція - парна щодо початку координат;
- 2  $f(v_x) \rightarrow 0$  при  $v_x \rightarrow \infty$ .

Тепер наше завдання - визначення коефіцієнтів  $A$  и  $\beta$ . Для визначення коефіцієнта  $A$  скористаємося умовою нормування (7.4).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\beta v_x^2} dv_x = 1. \quad (7.6)$$

Зробимо заміну змінних в інтегралі:

$$\xi = \sqrt{\beta} v_x, \quad dv_x = \frac{d\xi}{\sqrt{\beta}}. \quad (7.7)$$

Тоді замість (7.6) одержимо

$$\frac{A}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1. \quad (7.8)$$

В (7.8) ми одержали табличний інтеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}. \quad (7.9)$$

Підставляючи значення інтеграла Пуассона в (7.8) одержимо

$$A \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}. \quad (7.10)$$

Таким чином

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \exp(-\beta v_x^2). \quad (7.11)$$

Аналогічно можна одержати, що

$$f(v_y) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \exp(-\beta v_y^2),$$



$$f(v_z) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \exp(-\beta v_z^2).$$

На підставі теореми про ймовірність незалежних подій<sup>12</sup> повна функція розподілу має вигляд

$$f(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}. \quad (7.12)$$

Для визначення константи  $\beta$  за допомогою функції розподілу (7.12) обчислимо середнє значення кінетичної енергії, уже знаючи відповідь. А саме  $\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT$ . На підставі формули (7.2) ми можемо записати, що

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = \\ &= 3 \frac{m}{2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(v_y^2+v_z^2)} dv_y dv_z. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Вираз (7.13) являє собою добуток трьох однакових інтегралів, тому в (7.13) з'являється множник 3. Вираз, що залишився, також дорівнює добутку трьох інтегралів - за змінними  $v_x$ ,  $v_y$  й  $v_z$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(v_y^2+v_z^2)} dv_y dv_z &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta v_x^2} dv_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_y^2} dv_y \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_z^2} dv_z. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Обчислимо інтеграл за змінною  $v_x$ . Знову зробимо заміну змінних (7.7) і одержимо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta v_x^2} dv_x = \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta v_x^2 e^{-\beta v_x^2} \sqrt{\beta} dv_x = \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi. \quad (7.15)$$

Останній інтеграл в (7.15) також є табличним (і теж називається інтегралом Пуассона)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \quad (7.16)$$

Таким чином

<sup>12</sup> Ймовірність незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей кожної події окремо.

$$\frac{1}{\beta^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2\beta^{3/2}} \sqrt{\pi}. \quad (7.17)$$

Другий і третій інтеграли, ми фактично вже обчислювали - вони відрізняються від інтеграла в (7.6) тільки іншим позначенням змінної інтегрування. Отже, кожний із цих інтегралів дорівнює  $\sqrt{\pi/\beta}$ . Тепер зберемо весь наш потрібний інтеграл (7.14) і одержимо:

$$\frac{3m}{2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \frac{\pi^{1/2}}{2\beta^{3/2}} \frac{\pi}{\beta} = \frac{3m}{4\beta} = \frac{3}{2} kT \rightarrow \beta = \frac{m}{2kT}. \quad (7.18)$$

Остаточний вид функцій розподілу –

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}. \quad (7.19)$$

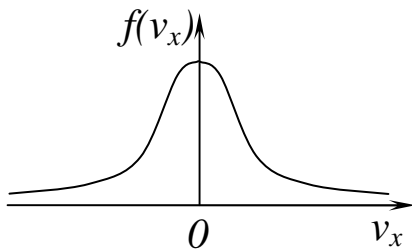


Рисунок 7.1

Вираз (7.11) називається функцією розподілу Максвелла за напрямками швидкостей. Вона має вигляд, показаний на рис.7.1. Нагадаємо, що вираз  $f(v_x) dv_x$  дає ймовірність  $dP_{v_x}$  того, що проекція швидкості молекули на вісь  $x$  лежить у межах від  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ . А якщо ми помножимо  $f(v_x) dv_x$  на число молекул у посудині  $N$ , то одержимо  $dN_{v_x}$  - число молекул, що мають проекцію швидкості на вісь  $x$  у межах від  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ . Так як рухи в позитивному й негативному напрямках осі  $Ox$  рівно-ймовірні, то ця функція симетрична. Крім того, в умовах термодинамічної рівноваги в обох напрямках осі  $Ox$  рухається в середньому однакова кількість молекул, а це значить, що середнє значення проекції швидкості  $v_x$ , обчислене для всіх молекул, буде дорівнювати 0. Тому функція  $f(v_x)$  має максимум при  $v_x = 0$ . Аналогічно, помноживши функцію (7.19) на  $dv_x dv_y dv_z$  ми одержуємо ймовірність того, що компоненти швидкості молекули лежать у межах від  $v_x, v_y, v_z$  до  $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$ . Число молекул, швидкості яких перебувають у зазначеному інтервалі буде дорівнює:

$$dN|_{v_x, v_y, v_z} = N \cdot \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z. \quad (7.20)$$

## Лекція 8

### РОЗПОДІЛ БОЛЬЦМАНА

#### 1 Розподіл молекул за величиною швидкості и за кінетичною енергією

Формулу Максвелла

$$f(v) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}. \quad (8.1)$$

можна перетворити так, щоб вона давала відповідь на питання, яка ймовірність того, що молекули мають величину швидкості від  $v$  до  $v + dv$ , незалежно від напрямку руху молекули. Це легко зробити, якщо ввести в розгляд уявлюваний простір швидкостей – (Рис. 8.1).

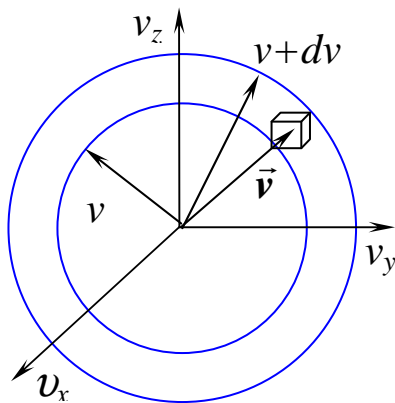


Рисунок 8.1

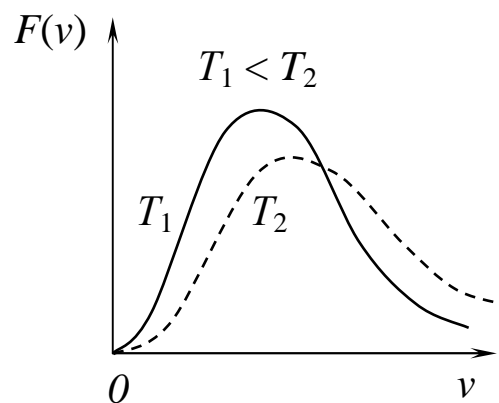


Рисунок 8.2

По осях системи координат у цьому просторі ми будемо відкладати проєкції вектора швидкості  $v_x, v_y, v_z$ . Роль радіуса-вектора в цьому просторі відіграє вектор швидкості молекули  $\vec{v}$ . Неважко зміркувати, що кожній молекулі в реальному просторі відповідає строго свій вектор швидкості  $\vec{v}$  в просторі швидкостей. Як ми вже знаємо, вираз  $Nf(v)dv_x dv_y dv_z$  дає число молекул, проєкції швидкості яких лежать у межах від  $v_x, v_y, v_z$  до  $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$ . Стосовно до простору швидкостей цей вираз дає число векторів, кінці яких попадають у прямокутний паралелепіпед об'ємом  $dv_x dv_y dv_z$ . Положення цього паралелепіпеда в просторі швидкостей задається вектором  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  (Рис. 8.1). Однаковим значенням модуля швидкості  $v$  в просторі швидкостей

відповідає сфера радіуса  $v$ , а значенням модуля  $v+dv$  - сфера радіуса  $v+dv$  (Рис. 8.1). Тепер ми можемо сказати, що число молекул, величина швидкості яких лежить в інтервалі від  $v$  до  $v+dv$ , дорівнює числу векторів  $\vec{v}$ , кінці яких попадають у кульовий шар, обмежений зазначеними сферами. Число таких векторів прямо пропорційно об'єму кульового шару -  $4\pi v^2 dv$ . Отже, число молекул, величина швидкості яких лежить в інтервалі від  $v$  до  $v+dv$ , описується виразом

$$dN|_{dv} = N \cdot \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv, \quad (8.2)$$

а функція розподілу по модулях швидкостей буде мати вигляд

$$F(v) = 4\pi \cdot \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2. \quad (8.3)$$

Графік цієї функції показаний на рисунку 8.2. Площа під кривою на цьому рисунку дорівнює 1 відповідно до умови нормування. При збільшенні температури максимум кривої на рисунку 8.2 зменшується й зміщується вправо, але площа, обмежена кривою, залишається незмінною.

Виходячи з розподілу молекул за швидкостями (8.3) можна перейти до розподілу за енергіями кінетичного руху молекул. Для цього в (8.3) потрібно від змінної  $v$  потрібно перейти до кінетичної енергії поступального руху молекули  $E_k = \frac{mv^2}{2}$ . Зробимо заміну

$v = \left( \frac{2E_k}{m} \right)^{1/2}$  й  $dv = \frac{dE_k}{\sqrt{2mE_k}}$  у формулі (8.3). У результаті одержимо

$$F(E_k) = A e^{-\frac{E_k}{kT}} \sqrt{E_k},$$

де  $A = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2}$ . І, відповідно, кількість молекул, що мають кінетичну енергію в інтервалі від  $E_k$  до  $E_k+dE_k$ , описується виразом

$$dN = NF(E_k)dE_k = NA e^{-\frac{E_k}{kT}} \sqrt{E_k} dE_k. \quad (8.4)$$

## 2 Барометрична формула

Дотепер, розглядаючи ідеальний газ, ми не враховували вплив поля сили ваги. На Землі, однак, сила ваги діє на будь-які тіла, у тому числі й на молекули газу. І, як ми знаємо, саме земне тяжіння обумовлює зміну густини газу з висотою над поверхнею Землі.

Розглянемо вертикальний стовп газу (Рис. 8.3). Нехай у поверхні Землі, де  $h=0$ , тиск дорівнює  $P_0$ , а на висоті  $h$  дорівнює  $P$ . При зміні висоти на  $dh$  тиск змінюється на  $dP$ . Тиск газу на деякій висоті дорівнює, як відомо, вазі вертикального стовпа газу, що перебуває на цій висоті над площею, рівній одиниці. Тому  $dP$  дорівнює різниці ваг стовпів газу на висотах  $h$  й  $h+dh$ , тобто дорівнює вазі стовпа газу висотою  $dh$  із площею підстави, рівній одиниці:

$$dP = -\rho g dh, \quad (8.5)$$

де  $\rho$  - густина газу, а  $g$  - прискорення вільного падіння. Знак мінус відображає той факт, що тиск зі збільшенням висоти зменшується. Густина газу знайдемо з рівняння стану ідеального газу

$$PV = \frac{m}{M} RT,$$

одержимо, що

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}. \quad (8.6)$$

Підставимо (8.6) в (8.5)

$$dP = -\frac{PM}{RT} g dh, \quad \text{або} \quad \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dh.$$

Взагалі ж кажучи, температура змінюється з висотою. Якщо відомо закон зміни температури, то останнє співвідношення можна проінтегрувати. Ми розглянемо простий випадок, коли  $T = \text{const}$ . Тоді інтегруючи останнє співвідношення, одержимо, що

$$\ln P = -\frac{Mgh}{RT} + \ln C. \quad (8.7)$$

де  $C$  - постійна інтегрування. Тоді, потенціюючи (8.7) отримаємо, що

$$P = C \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right). \quad (8.8)$$

Константу  $C$  можна знайти з умови, що при  $h=0$  (на рівні моря), тиск дорівнює  $P_0$ . Тоді остаточно одержимо

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right). \quad (8.9)$$

Вираз (8.9) називається **барометричною формулою**. Із цієї формули випливає, що тиск газу убиває з висотою за експоненціальним законом. Цим законом користуються для визначення висоти над Землею шляхом виміру тиску на даній висоті й на рівні моря (звичайно, останнє досить виміряти один раз). Прилади, що служать для виміру гірських вершин, польоту літака й т.д., являють собою спеціальні барометри, шкала яких проградуєвана в метрах. Для цих цілей, однак, необхідно в рівнянні (8.9) внести виправлення на температуру, що, як відомо, знижується з ростом висоти, у той час як барометрична формула отримана нами в припущенні сталості температури на всіх висотах.

Рівняння стану ідеального газу можна, як ми знаємо, записати у вигляді  $P = nkT$ . Підставимо цей вираз в (8.9), у підсумку одержимо (температуру як і раніше вважаємо постійною)

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right). \quad (8.10)$$

У виразі (8.10)  $n(h)$  - концентрація молекул газу на висоті  $h$ , а  $n_0$  - на рівні моря. З формули (8.10) виходить, що причиною падіння тиску з ростом висоти над рівнем моря є зменшення концентрації молекул газу. Причому концентрація молекул найбільш швидко зменшується для важких газів (великі  $M$ ).

### 3 Розподіл Больцмана

Перетворимо показник експоненти у формулі (8.10), враховуючи, що

$$\frac{Mgh}{RT} = \frac{m N_A gh}{k N_A T} = \frac{mgh}{kT} = \frac{U}{kT}. \quad (8.11)$$

У виразі (8.11)  $U=mgh$  - потенціальна енергія однієї молекули в полі сили ваги. У результаті замість (8.10) одержимо

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right). \quad (8.12)$$

Саме цікаве полягає в тім, що формула (8.12) справедлива не тільки у випадку потенціального поля сили ваги, але й у будь-якому потенціальному полі сил для сукупності будь-яких однакових ча-

сток, що перебувають у стані теплового хаотичного руху. Формулу (8.12) називають **розподілом Больцмана**.

Відповідно до формули (8.12) кількість молекул, що попадають у паралелепіпед, розташований у точці з координатами  $x, y, z$ , і об'єм, рівний,  $dV = dx dy dz$ , дорівнює

$$dN_{x,y,z} = n_0 \exp\left(-\frac{U(x, y, z)}{kT}\right) dx dy dz.$$

І, отже, вираз

$$W = A \exp\left(-\frac{U(x, y, z)}{kT}\right) \quad (8.13)$$

є ймовірність того, що частка має потенціальну енергію  $U(x, y, z)$ . У формулі (8.13)  $A$  - нормувальний множник<sup>13</sup>. Події, що полягають у тім, що молекула має кінетичну енергію  $E_k$  і потенціальну енергію  $U(x, y, z)$ , є статистично незалежними. Тому ймовірність того, що частка має повну енергію  $E = E_k + U(x, y, z)$ , на підставі (8.4) і (8.13) може бути записана у вигляді

$$W(E) = A \exp\left(-\frac{E_k + U(x, y, z)}{kT}\right) = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right). \quad (8.14)$$

Підкреслимо, що у формулі (8.14), що також називають розподілом Больцмана,  $E$  - це **повна енергія** частки, відповідно формула (8.14) описує розподіл часток за енергіями. У формі (8.14) розподіл Больцмана має універсальний характер - він застосовується й для опису квантових систем. У цьому випадку повна енергія частки може приймати тільки дискретний ряд значень:  $E_1, E_2, \dots$ , як це має місце, наприклад для енергії атома, то розподіл Больцмана має вигляд

$$N_i = A \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right). \quad (8.15)$$

де  $N_i$  - число часток, що перебувають у стані з енергією  $E_i$ ,  $A$  - нормувальний множник, що знаходиться з умови

$$\sum_i N_i = A \sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) = N, \quad (8.16)$$

де  $N$  - повне число часток у розглянутій системі. Виражаючи постійну  $A$  з рівняння (8.15), одержуємо остаточне вираз розподілу Больцмана для випадку дискретних значень енергії:

<sup>13</sup> Нагадаємо, що функція розподілу нормується так, щоб сума ймовірностей всіх можливих подій рівнялася одиниці (Див. лекцію 7).



$$N_i = \frac{N \exp(-\frac{E_i}{kT})}{\sum_i \exp(-\frac{E_i}{kT})}.$$

## Лекція 9

### ПЕРШИЙ ПОЧАТОК ТЕРМОДИНАМІКИ

#### 1 Внутрішня енергія

Під внутрішньою енергією тіла розуміють суму кінетичної енергії хаотичного руху молекул і потенціальної енергії взаємодії молекул, що складають це тіло. При обчисленні внутрішньої енергії не повинні враховуватися кінетична енергія руху всього тіла й потенціальна енергія тіла в зовнішньому силовому полі. Також у внутрішню енергію не входить внутрішньоатомна енергія.

Внутрішня енергія системи тіл складається із суми внутрішніх енергій кожного з тіл окремо й енергії міжмолекулярної взаємодії між тілами системи. Для макроскопічних тіл кількість молекул на поверхнях, через які відбувається взаємодія тіл, набагато менше числа молекул усередині об'єму цих тіл. Тому енергією взаємодії можна знехтувати, і вважати, що внутрішня енергія системи тіл дорівнює сумі внутрішніх енергій кожного з тіл. Таким чином, внутрішня енергія системи - адитивна функція.

Розрахунок внутрішньої енергії довільного тіла є дуже складним завданням, що вдається вирішити тільки для деяких простих окремих випадків. Це зв'язано, з одного боку, з неповнотою наших знань про сили міжмолекулярної взаємодії, а, з іншого боку, з величезною кількістю часток, з яких складаються реальні тіла. Дуже просто обчислюється внутрішня енергія ідеального газу. Нагадаємо, що для ідеального газу можна знехтувати потенціальною енергією взаємодії молекул. Тому внутрішня енергія ідеального газу складається з кінетичних енергій окремих молекул. Середня кінетична енергія однієї молекули дорівнює (формула (6.16))

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

де  $i$  - число ступенів свободи молекули,  $k$  - стала Больцмана й  $T$  - температура газу. Якщо в газі міститься  $N$  молекул, то внутрішня енергія ідеального газу буде дорівнювати

$$U = N \langle E \rangle = \frac{i}{2} N kT = \frac{i}{2} \frac{m}{M} N_A kT = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT. \quad (9.1)$$

При записі формули (9.1) ми скористалися рівністю

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M},$$

і врахували, що універсальна газова стала дорівнює  $R=N_A k$ . З формули (9.1) виходить, що внутрішня енергія ідеального газу визначається тільки одним термодинамічним параметром - температурою  $T$ . У загальному випадку внутрішня енергія залежить від всіх термодинамічних параметрів, що характеризують стан тіла. Але з формули (9.1) виходить один практичний висновок. Так як кінетичною енергією теплового руху володіють молекули будь-якого тіла, а температура є мірою кінетичної енергії теплового руху молекул, то ознакою зміни внутрішньої енергії для будь-якого тіла є зміна температури тіла. Підкреслимо, що не завжди зміна внутрішньої енергії супроводжується зміною температури. Приклад цього - фазові переходи (плавлення - кристалізація, випаровування - конденсація), при яких внутрішня енергія змінюється при постійній температурі. Але крім цих особливих випадків ця ознака виявляється справедливою.

Внутрішня енергія є функцією стану системи. Це означає, що внутрішня енергія однозначно характеризує систему в положенні рівноваги й що завжди в даному стані, незалежно від того, як система прийшла в цей стан, її внутрішня енергія та сама.

## 2 Кількість тепла

Давайте проведемо такий уявний експеримент: помістимо два тіла з різними температурами у вакуумну тепло-ізольовану оболонку (Рис. 9.1а) і надамо їх самим собі. Будемо вважати, що в нас є можливість контролювати температури обох тіл. Результат цього експерименту очевидний - через деякий час ми виявимо, що температури наших тіл стали однаковими (Рис. 9.1б), причому виконується нерівність

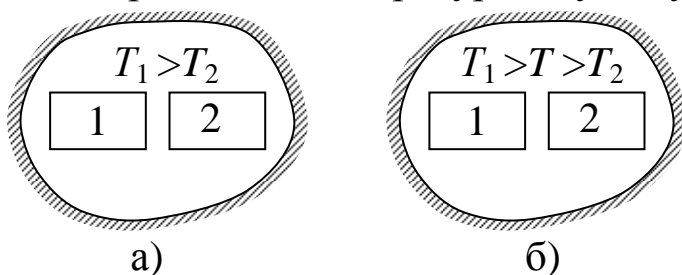


Рисунок 9.1

температури наших тіл стали однаковими (Рис. 9.1б), причому виконується нерівність

$$T_1 > T > T_2.$$

$T_1$  й  $T_2$  - початкові температури тіл (припустимо, що температура першого тіла вище чим другого),  $T$  - кінцева температура.

Давайте, пояснимо результат нашого досліду. З того факту, що температура першого тіла понизилася ( $T_1 > T$ ) виходить, що внутрішня енергія цього тіла зменшилася. У другого тіла температура, навпаки зросла, а це значить, що його внутрішня енергія збільшилася. Отже, у ході досліду відбувався обмін внутрішньою енергією між тілами. Цей процес прийнято називати **теплообміном**. Процес теплообміну може відбуватися, як шляхом міжмолекулярних взаємодій (зіткнення молекул) при безпосередньому контакті тіл, так і за допомогою випромінювання, якщо тіла не стикаються.

Тепер ми можемо сформулювати ще одне визначення: **кількості тепла - це частина внутрішньої енергії одного тіла, переданої іншому тілу в процесі теплообміну.**

Досліди, подібні розглянутому нами, проводять у спеціальних пристроях, названих калориметрами, які виготовляються таким чином, щоб теплообмін з навколишнім середовищем був мінімальним. Ретельні виміри, проведені в таких пристроях, показують, що для тіл, що беруть участь у теплообміні, кількість відданого тепла, у межах точності вимірів, дорівнює кількості отриманого тепла. А це значить, що сумарна внутрішня енергія тіл, що беруть участь у теплообміні, не змінюється.

Кількість тепла, отриманого або відданого тілом у процесі теплообміну, розраховують по емпіричній формулі

$$dQ = cm dT, \quad (9.2)$$

у якій  $m$  - маса тіла,  $dT$  - зміна температури тіла. Якщо  $dT > 0$ , то тіло одержує тепло, у протилежному випадку - віддає. Коефіцієнт пропорційності  $c$  у формулі (9.2) називається **питомою теплоємністю** речовини. З (9.2) одержуємо, що

$$c = \frac{dQ}{m dT}.$$

Отже, **питома теплоємність, це кількість тепла, яку потрібно надати тілу масою 1 (кг), щоб підвищити його температуру на 1 градус.** Теплоємність визначають експериментально. Вона залежить від роду речовини й, як правило, від температури.

### 3 Робота, що виконується тілом при зміні об'єму

Взаємодія тіл, що стикаються, супроводжується зміною об'єму цих тіл. Отже, робота, що виконується даним тілом над зовнішніми тілами, може бути виражена через тиск і зміну об'єму. Розглянемо газ у посудині з рухомим поршнем (Рис. 9.2). Якщо з яких-небудь причин газ почне розширюватися, то він буде переміщати поршень і виконувати над ним роботу. Елементарна робота, що виконується газом, буде дорівнювати

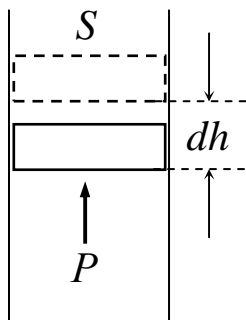


Рисунок 9.2

$$dA = Fdh,$$

де  $F$  - сила, з якої газ діє на поршень. Врахуємо, що сила дорівнює добутку тиску  $P$  на площу поверхні поршня  $S$ . Тоді одержимо

$$dA = PSdh.$$

Але добуток  $Sdh$  дорівнює збільшенню об'єму газу  $dV$ . Тому, елементарна робота, що виконується газом, дорівнює

$$dA = PdV. \quad (9.3)$$

Робота, що виконується газом, є величиною алгебраїчною: при розширенні газу  $dV > 0$  і робота позитивна, при стисканні  $dV < 0$  і робота негативна. Відзначимо, що отриманий вираз (9.3) для роботи справедливий при будь-яких змінах об'єму не тільки газоподібних, але й рідких і твердих тіл. Із третього закону Ньютона маємо, що сила, з якої поршень діє на газ, дорівнює за величиною силі тиску газу на поршень і протилежна їй за напрямком. Отже, робота зовнішніх сил над даним тілом буде описуватися виразом

$$d'A = -PdV. \quad (9.4)$$

Якщо тиск газу залишається постійним, то тоді повна робота, здійснена внаслідок переміщення поршня між положеннями 1 й 2, буде дорівнювати

$$A_{12} = P(V_2 - V_1). \quad (9.5)$$

Якщо ж при зміні об'єму тиск змінюється, то робота, що виконана газом буде дорівнювати

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV. \quad (9.6)$$

Роботі можна додати наочний геометричний зміст. Зобразимо процес зміни об'єму в координатах  $(P, V)$ . На рисунку 9.3 елементарна робота - це затінена смужка, а повна робота, що виконана газом при розширенні, дорівнює заштрихованій площі.

#### 4 Перший початок термодинаміки

Дослід показує, що внутрішня енергія термодинамічної системи може змінюватися 2-ма способами: шляхом здійснення над тілами системи роботи й шляхом надання їй теплоти. Сказане можна записати у вигляді формули

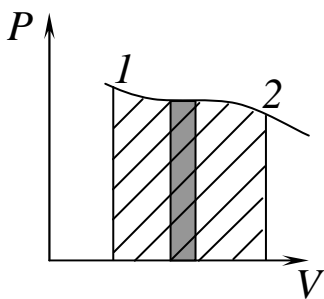


Рисунок 9.3

$$dU = d'Q + d'A. \quad (9.7)$$

Якщо врахувати, що робота зовнішніх сил пов'язана з роботою, що виконується термодинамічною системою, співвідношенням  $dA = -d'A$ , то вираз (9.7) можна переписати у вигляді

$$d'Q = dU + dA. \quad (9.8)$$

Рівняння (9.8) виражає закон збереження енергії й представляє собою перший початок термодинаміки: **кількість теплоти, наданій системі ( $dQ$ ) витрачається на збільшення внутрішньої енергії системи ( $dU$ ) і на здійснення системою роботи проти зовнішніх сил ( $dA$ )**. Історично перший закон (перше початок) термодинаміки був сформульований як заборона на можливість створення вічного двигуна першого роду. Дійсно, якщо система періодично повертається у вихідний стан, то зміна внутрішньої енергії в такому процесі (його називають циклом) дорівнює нулю  $dU=0$ . У цьому випадку, як це виходить із формули (9.8)

$$d'Q = dA.$$

Тобто періодично діючий двигун, що виконував би роботу більшу, ніж надана йому енергія, неможливий.

Розглянемо застосування першого початку термодинаміки для різних процесів, що виконуються ідеальним газом.

1 Ізотермічний процес проходить при постійній температурі газу:  $T=const$ . Відповідно до рівняння (9.1) у цьому випадку  $dU=0$  й рівняння (9.8) запишеться у вигляді

$$d'Q = dA.$$

Отже, в ізотермічному процесі вся підведена газу теплота йде на здійснення роботи проти зовнішніх сил.

2 В ізохорному процесі залишається постійним об'єм:  $dV=0$ . Згідно рівнянню (9.3) у цьому випадку не відбувається робота проти зовнішніх сил:  $dA=0$ . Отже, перший початок термодинаміки (9.8) прийме вид

$$d'Q = dU.$$

В ізохорному процесі вся підведена газу теплота витрачається на зміну внутрішньої енергії.

3 В ізобарному процесі змінюються як об'єм, так і температура при постійному тиску:  $P=const$ . Отже, в ізобарному процесі кількість теплоти, що надано газу, витрачається на збільшення внутрішньої енергії системи й на здійснення системою роботи проти зовнішніх сил.

4 Адіабатний процес. Так називають процес, що відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем. У цьому процесі  $dQ=0$ . Отже, рівняння (9.8) запишеться у вигляді

$$dA = -dU.$$

Тобто, в адіабатному процесі термодинамічна система здійснює роботу проти зовнішніх сил за рахунок зменшення внутрішньої енергії. Можна показати, що адіабатичний процес описується рівнянням Пуассона

$$PV^\gamma = const,$$

де  $\gamma = (i + 1)/i$ ,  $i$  - число ступенів свободи молекул газу.

## 5 Теплоємність ідеального газу

Теплоємністю тіла називається кількість тепла, яку треба надати тілу, щоб підвищити його температуру на 1 К. Розрізняють молярну теплоємність, тобто теплоємність одного моля речовини,

$$C_m = \frac{dQ}{\nu dT}, \quad (9.9)$$

і питому теплоємність - теплоємність одиниці маси речовини

$$c = \frac{dQ}{mdT}. \quad (9.10)$$

З (9.9) і (9.10) видно, що молярна й питома теплоємності зв'язані між собою співвідношенням

$$c = \frac{C}{M},$$

де  $M$  - молярна маса.

Розрізняють теплоємність при постійному об'ємі  $C_V$  і теплоємність при постійному тиску  $C_P$ . Якщо  $V = const$ , то з 1-го початку термодинаміки виходить, що  $dQ = dU$  і тоді

$$C_V = \frac{dU}{dT}. \quad (9.11)$$

З (9.11) виходить, що внутрішня енергія одного моля  $U = C_V T$ , та для довільного числа молів

$$U = \frac{m}{M} C_V T.$$

Оскільки внутрішня енергія ідеального газу визначається числом ступенів свободи  $U = \frac{i}{2} RT$ , то

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (9.12)$$

З першого початку термодинаміки (9.8) для газу, що нагрівають при постійному тиску, виходить, що

$$C_P = \frac{dU}{dT} + \frac{PdV}{dT}. \quad (9.13)$$

Продиференціював рівняння Менделєєва-Клапейрона за температурою (при постійному тиску), одержимо

$$\frac{PdV}{dT} = R. \quad (9.14)$$

Підставимо (9.14) в (9.13) і врахуємо (13.17). В результаті одержимо Рівняння Майєра, що зв'язує теплоємності при постійному тиску й об'ємі

$$C_P = C_V + R. \quad (9.15)$$



Із цього рівняння видно, що  $C_P$  завжди більше  $C_V$  на величину газової сталої  $R$ . Це пояснюється тим, що при постійному об'ємі все тепло витрачається тільки на збільшення внутрішньої енергії газу, у той час, як при постійному об'ємі підведене тепло витрачається на збільшення внутрішньої енергії газу й на здійснення газом роботи. Підставляючи в рівняння (9.15) вираз для молярної теплоємності при постійному об'ємі (9.12) получимо, що

$$C_P = \frac{i}{2}R + R = \frac{(i+2)}{2}R. \quad (9.16)$$

З (9.12) виходить, що  $C_V$  (а, отже, і  $C_P$ ) не повинна залежати від температури. Цей закон виконується досить непогано для одноатомних газів. Однак уже для двохатомних газів, як показує експеримент,  $C_V$  залежить від температури як показано на рисунку 9.4. Такий хід залежності теплоємності від температури можна пояснити тим, що при низьких температурах молекули мають тільки кінетичну енергію поступального руху. При більш високій температурі додається процес обертання молекул. Говорять, що при більш високій температурі збуджуються обертальні ступені свободи. Якщо ще піднімати температуру, то будуть збуджуватися коливальні ступені свободи.

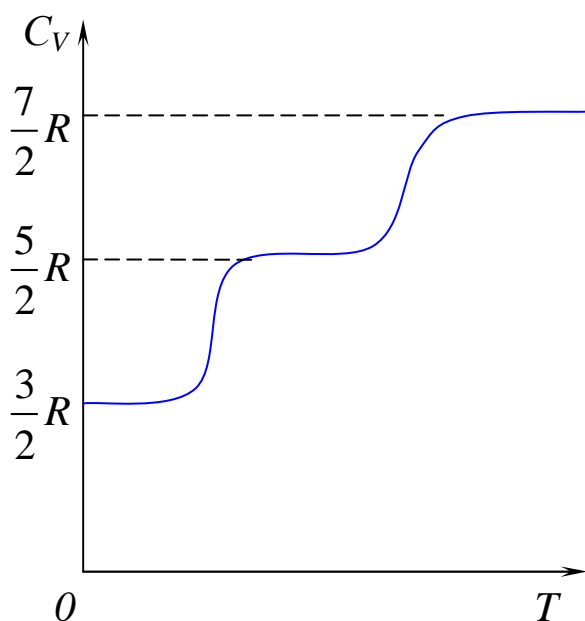


Рисунок 9.4

Послідовну теорію теплоємності газів змогла дати тільки квантова механіка. Виявляється, що енергія обертання й коливань не може приймати будь-які значення, а тільки дискретні, або квантовані. Відповідно до цього, при низьких температурах не вистачає енергії поступального руху, щоб при зіткненнях молекул збудити обертальні ступені свободи. Говорять, що вони (також як і коливальні ступені свободи) заморожені.

## Лекція 10

### ДРУГИЙ ПОЧАТОК ТЕРМОДИНАМІКИ

#### 1 Кругові процеси. Теплові двигуни

Процес, при якому система, пройшовши через ряд станів, повертається у вихідний стан, називається круговим процесом, або циклом. Цикл, що здійснюється ідеальним газом, можна представити як **розширення або стискання**. У процесі розширення, робота, що виконується газом, вважається позитивною, а робота, що здійснюється газом у процесі стискання, - негативною. Як ми вже знаємо, робота на діаграмі  $P$ - $V$  визначається площею під кривою, що описує процес. Відповідно, робота, що виконується газом за цикл, буде позитивною, якщо робота розширення більше, ніж робота при стисканні (Рис.10.1а). Такий цикл називається прямим. І навпаки, - робота буде негативною, якщо робота стискання менше, ніж робота розширення (Рис.10.1б). Цей цикл називається зворотною. Циклічні процеси використовуються в теплових двигунах - пристроях виконуючих механічну роботу за рахунок отриманої ззовні теплоти.

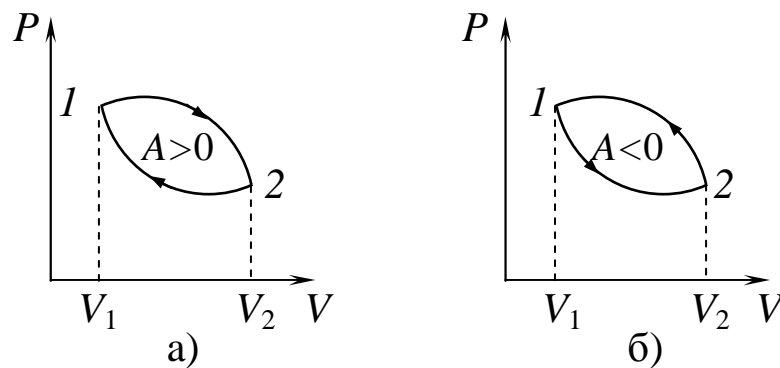


Рисунок 10.1

При вивченні теплових двигунів виникає важливе питання: чи можна при циклічному процесі одержати роботу, рівну кількості тепла, отриманого від джерела? Відповідь на це питання дає принцип Томсона: *неможливо здійснити циклічний процес, єдиним результатом якого було б перетворення в механічну роботу теплоти, взятої в якого-небудь тіла, без того, щоб відбулися які-небудь зміни в іншому тілі або тілах*. Відповідно до цього принципу (заснованому на численних досвідчених даних), у процесі перетворення теплоти в роботу крім джерела теплоти (**нагрівача**), від якого теплота віднімається, і тіла, що чинить роботу (**робоче тіло**), якому

теплота безпосередньо передається, повинне брати участь ще якесь третє тіло (або тіла). Яка роль цього третього тіла в процесі перетворення теплоти в роботу?

Справа в тому, що при циклічному процесі робоче тіло, після того як воно, розширившись, виконає роботу за рахунок теплоти

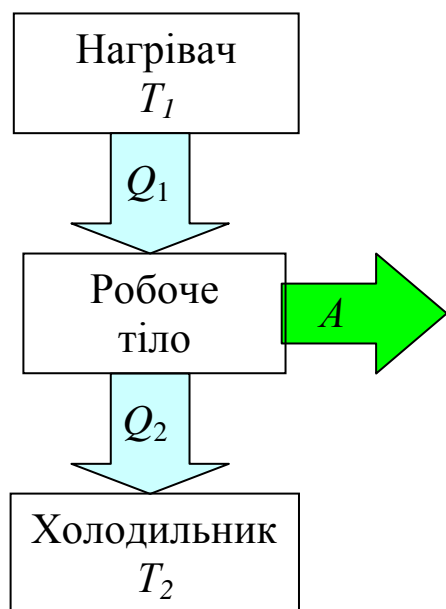


Рисунок 10.2

отриманої від нагрівача, повинне бути повернуте до вихідного стану. А для цього його необхідно стиснути, тобто виконати над ним роботу. Але робота ця повинна бути меншою, ніж робота, виконана робочим тілом при розширенні. Інакше ціль нашого циклу не буде досягнута. Це можливо, якщо крива стискання лежить нижче кривої розширення на діаграмі  $P-V$  (Рис.10.1а). Але більш низька крива на діаграмі  $P-V$  відповідає більш низькій температурі. Значить перед стисканням робоче тіло повинне бути охолоджене. Отже, від нього потрібно відняти деяку кількість теплоти й передати його третьому

тілу - холодильнику. От чому ніяка циклічно працююча машина не може обійтися тільки джерелом тепла й робочим тілом (Рис. 10.2).

Оскільки в циклі робоче тіло повертається у вихідне положення, то зміна внутрішньої енергії в циклі дорівнює нулю. Таким чином, перший початок термодинаміки, записаний для циклу теплової машини, буде мати вигляд

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (10.1)$$

де  $A$  - робота, що виконується робочим тілом,  $Q_1$  - кількість теплоти, отриманої робочим тілом від нагрівача,  $Q_2$  - кількість тепла переданого холодильнику. Ефективність теплової машини характеризується коефіцієнтом корисної дії (ККД), що визначається як відношення виконаної за цикл роботи до отриманої енергії (у вигляді тепла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (10.2)$$

З формули (10.2) виходить, що ККД теплових двигунів завжди менше 1.

Машина, що працює за зворотним циклом, називають холодильними. У холодильних машинах, крім переносу тепла від менш нагрітого тіла, до більше нагрітого, відбуваються ще й зміни в зовнішній середовищі, які пов'язані із здійсненням над системою роботи. Ефективність холодильної машини характеризують холодильним коефіцієнтом, що визначається як відношення віднятого в охолоджуваного тіла тепла  $Q_2$  до роботи в циклі, що виконується зовнішніми силами

$$\eta^* = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}.$$

## 2 Цикл Карно

Розглянемо тепер круговий процес, за допомогою якого тепло, відняте від нагрівача, можна перетворити в роботу, причому таким чином, щоб отримана робота була максимальною. Уперше такий процес проаналізував французький інженер С. Карно, і тому він називається циклом Карно.

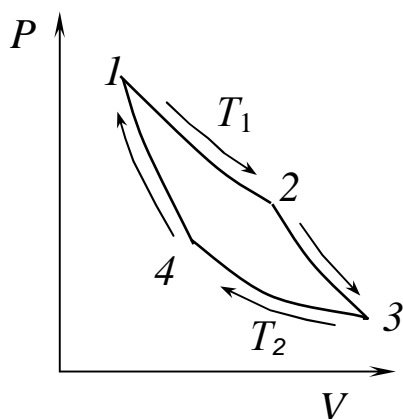


Рисунок 10.3

Почнемо круговий процес над робочим тілом з того, що воно перебуває в контакті з нагрівачем й, отже має таку ж температуру  $T_1$  (точка 1 на рисунку 10.3). Процес теплопровідності при цьому не відбувається, тому що немає різниці температур, а виходить, і немає передачі тепла без здійснення механічної роботи.

Надамо тепер робочому тілу можливість розширюватися, виконуючи роботу, не перериваючи контакту з нагрівачем. Розширення, отже, буде ізотермічним (крива 1-2 на рисунку 10.3). Робота відбувається за рахунок тепла, отриманого від нагрівача, що завдяки своїй великій теплоємності не змінює своєї температури.

Отримане робочим тілом тепло тепер потрібно віддати холодильнику. Такий процес не можна здійснювати шляхом прямого контакту робочого тіла й холодильника, тому що температура робочого тіла вище температури холодильника й передача тепла не

буде супроводжуватися здійсненням корисної роботи. Тому робоче тіло треба остудити до температури холодильника. Для охолодження робочого тіла його ізолюють від нагрівача й дають можливість адіабатно розширюватися (крива 2-3 на рисунку 10.3) доти, поки воно не прийме температуру холодильника. Тільки після цього робоче тіло приводять у контакт із холодильником. На цьому закінчується перша половина циклу, під час якої робоче тіло зробило корисну роботу за рахунок тепла, отриманого від нагрівача.

Повернення робочого тіла до вихідного стану теж проводять у два етапи. Спочатку робоче тіло стискають, не перериваючи його контакту з холодильником, тобто ізотермічно (крива 3-4 на рисунку 10.3). Потім, ізолювавши робоче тіло від холодильника, його додатково стискають адіабатно, так щоб воно нагрілося до температури нагрівача (крива 4-1 на рисунку 10.3). Після цього робоче тіло приводять у контакт із нагрівачем, і цикл на цьому завершується.

Описаний круговий процес складається із двох ізотермічних і двох адіабатних розширень і стискань. При розширенні робоче тіло виконує корисну роботу, а стискання відбуваються за рахунок роботи, що виконується над робочим тілом. На всіх стадіях розглянутого циклу ніде не допускається контакту двох тіл з різними температурами, і, отже, відсутній необоротний процес теплопровідності. Тому цикл Карно є оборотним.

Тепер розрахуємо КПД циклу Карно.

Отже, перший процес 1-2- ізотермічний. Зміна внутрішньої енергії дорівнює нулю. Робота в ізотермічному процесі дорівнює

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1. \quad (10.3)$$

Другий процес 2-3- адіабатний (без теплообміну з навколишнім середовищем) і робота дорівнює втраті внутрішньої енергії

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1). \quad (10.4)$$

Третій процес 3-4 - ізотермічне стискання і кількість теплоти, віддане холодильнику, дорівнює роботі стискання

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2. \quad (10.5)$$

І четвертий, завершальний процес 4-1 - робота адіабатичного стискання

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2). \quad (10.6)$$

Повна робота, що виконана за цикл, як і слід було сподіватися дорівнює

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2. \quad (10.7)$$

Відповідно до (10.2), ККД циклу дорівнює

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (10.8)$$

Тепер врахуємо, що стани 2 й 3 перебувають на одній і тій же адіабаті

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (10.9)$$

Для станів 4 й 1, які також перебувають на одній адіабаті, одержимо, що

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (10.10)$$

Розділимо тепер (10.9) на (10.10) і одержимо, що

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (10.11)$$

З урахуванням (10.11), одержуємо остаточний вираз для ККД циклу Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (10.12)$$

При виводі формули (10.12) ми не робили ніяких припущень про властивості робочого тіла й пристрій теплової машини. Таким чином, можна зробити висновок, який вперше зробив С. Карно й цей висновок зараз називається теоремою Карно, що **ККД всіх оборотних машин, що працюють при однакових температурах**

нагрівача й холодильника, однаковий і визначається тільки температурами нагрівача й холодильника. Оскільки ми розглядали оборотний цикл Карно, то буде справедливим і наступне твердження: ККД циклу Карно завжди більше ККД реальної теплової машини.

### 3 Ентропія. Другий початок термодинаміки

Запишемо ККД\_циклу Карно у вигляді рівняння

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

з якого виходить, що

$$\frac{|Q_1|}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2}. \quad (10.13)$$

Якщо розглядати цикл Карно з погляду змін, що відбуваються з робочим тілом, то  $Q_1$  й  $Q_2$  треба приписати різні знаки, тому що  $Q_1$  - це отримане робчим тілом кількість теплоти, а  $Q_2$  - віддане. З урахуванням цього зауваження рівняння (10.13) можна переписати у вигляді

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (10.14)$$

Величину, рівну відношенню теплоти  $Q$ , отриманої в ізотермічному процесі, до температури тіла  $T$ , називають наведеною кількістю теплоти. Співвідношення (10.14) означає, що в ході циклу Карно надана кількість теплоти не змінюється. Нагадаємо, що цикл Карно є оборотним. Строгий теоретичний аналіз показує, що *наведена кількість теплоти, надана тілу в будь-якому оборотному круговому процесі, дорівнює нулю:*

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (10.15)$$

Рівність (10.15) дозволяє затверджувати, що існує деяка величина, - позначимо її буквою  $S$ , - є функцією стану системи. Величину  $S$  називають ентропією, і обчислюють за формулою

$$S = \int \frac{dQ}{T}.$$

З формули (10.15) виходить, що для оборотних процесів зміна ентропії

$$dS=0. \quad (10.16)$$

У термодинаміці доводиться, що ентропія системи, що здійснює необоротний цикл, зростає

$$dS > 0. \quad (10.17)$$

Співвідношення (10.16) і (10.17) відносяться тільки до замкнутих систем, якщо ж система обмінюється теплотою з навколишнім середовищем, то її ентропія може поводитися будь-яким чином. Співвідношення (10.16) і (10.17) можна представити у вигляді нерівності Клаузиса

$$dS \geq 0. \quad (10.18)$$

Нерівність (10.18) лежить в основі другого початку термодинаміки: у процесах, що відбуваються в замкнутій системі, ентропія не убиває.

Другий початок термодинаміки займає у фізиці дуже важливе місце, тому що визначає спрямованість всіх процесів. Замітимо, що всі реальні процеси, що відбуваються в природі, є необоротними. Для необоротних процесів у замкнутих системах ентропія, як показує дослід і теорія, завжди зростає. І ця властивість так само властива ентропії, як енергії властиво зберігатися при будь-яких процесах у замкнутих системах.

Саме тому, що енергія має властивість зберігатися, вона не може служити функцією, що показує, у якому напрямку йдуть процеси в замкнутій системі. Адже при будь-якій зміні стану енергія на початку й кінці процесу та сама, і тому вона не дає можливість відрізнити друг від друга початковий й кінцевий стан. Ентропія ж, у процесах, що природно відбуваються, завжди зростає, що дозволяє судити, який напрямок процесу можливий а який ні, який стан є початковим а який кінцевим.

Ріст ентропії в будь-якому процесі триває не безмежно, а лише до певного максимального значення, характерного для даної системи. Це максимальне значення ентропії відповідає стану рівноваги, і після того, як воно досягнуто, будь-які зміни в стані системи припиняються.



#### 4. Статистичний зміст ентропії

Стан термодинамічної системи може бути заданий декількома способами. Ми будемо говорити, що нам заданий **макростан**, якщо відомі термодинамічні параметри (тиск  $P$ , об'єм  $V$ , температура  $T$ , тощо), що характеризують всю систему в цілому. З точки зору молекулярно-кінетичної теорії стан системи є заданим, якщо відомі координати і швидкості руху всіх молекул, з яких складається система. Настільки детально охарактеризований стан системи називається **мікростаном**.

Якщо система перебуває в стані термодинамічної рівноваги, то всі параметри будуть постійними, а макростан не змінюється з часом. У той час молекули, що утворюють систему, перебувають у стані хаотичного теплового руху - їхні положення й швидкості руху постійно змінюються через взаємодію молекул одна з одною. У відповідності із цим мікростани системи весь час змінюються. Отже, даний макростан здійснюється різними способами, кожному з яких відповідає певний мікростан системи. Наприклад, ми одержимо один й той же макростан, якщо попарно поміняємо молекули місцями. Але така перестановка молекул відповідає вже іншому мікростану. Число різних мікростанів, за допомогою якого може бути реалізований даний макростан, називається **статистичною вагою** макростану. Статистичну вагу позначають буквою  $\Omega$ . Відзначимо, що статистична вага звичайно виражається величезними числами.

Згідно Л. Больцману, ентропія й статистична вага пов'язані між собою формулою

$$S = k \ln \Omega, \quad (10.19)$$

де  $k$  – стала Больцмана. В основі статистичної фізики лежить гіпотеза, відповідно до якої всі мікростани даної термодинамічної системи рівноймовірні (ергодична гіпотеза). Звідси виходить, що ймовірність реалізації даного макростану пропорційна його статистичній вазі. При статистичному тлумаченні ентропії (10.19) із другого початку термодинаміки виходить, що процеси у замкнутій системі йдуть у напрямку збільшення числа мікростанів. Іншими словами замкнута термодинамічна система увесь час переходить від менш імовірних макростанів до більш ймовірних, доти, поки ймовірність не стане максимальною. Але той факт, що всякий сам собою про-

цес, що протікає, веде до стану з більшою ймовірністю, не означає, що інший напрямок процесу неможливий. Чому ж тоді всі процеси в природі необоротні? Ми неодноразово підкреслювали, що реальні тіла складаються з величезного числа часток. Для таких колективів імовірнісні закони статистики набувають характер об'єктивних законів природи. Пояснимо сказане прикладом. Жоден закон збереження не забороняє каменю, що впав на землю, злетіти й повернутися у точку, з якої він був кинутий. Для цього необхідно, щоб молекули всіх тіл, до яких перейшла механічна енергія каменя, що впав, починаючи з деякого моменту часу, почали рухатися "погоджено". Причому настільки "погоджено", щоб в остаточному підсумку штовхнути камінь так, щоб він злетів і почав рухатися по своїй первісній траєкторії. Імовірність такої події настільки мала, що таку подію *ніхто(!) і ніколи(!) не спостерігав(!)*, і ми із упевненістю говоримо, що така подія ніколи не відбудеться. Хоча, у принципі, така подія *можлива!*