

Министерство образования и науки Украины  
Донбасская государственная машиностроительная академия (ДГМА)

# **ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

**Методические указания  
к проведению практических занятий**

**для студентов технических специальностей  
всех форм обучения**

Утверждено на заседании  
методического совета  
Протокол № 2 от 17.12.2015

Краматорск  
ДГМА  
2015

УДК 621.01

Теория механизмов и машин : методические указания к проведению практических занятий для студентов технических специальностей всех форм обучения / сост. Н. В. Чоста. – Краматорск : ДГМА, 2015. – 51 с.

Приведены тема, цель и содержание каждого практического занятия по дисциплине «Теория механизмов и машин», указания к решению задач и примеры их решения.

Предназначены для оказания помощи студентам технических специальностей всех форм обучения при самостоятельном изучении материалов практических занятий по дисциплине «Теория механизмов и машин».

Составитель

Н. В. Чоста, доц.

Ответственный за выпуск

С. Г. Карнаух, доц.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1 СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ МАНИПУЛЯТОРОВ И ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ .....	5
2 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ПЛАНОВ СКОРОСТЕЙ .....	8
3 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ПЛАНОВ УСКОРЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ НАГРУЗОК НА ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМА.....	13
4 ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ПЛАНОВ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ДЛЯ КУЛИСНЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	20
5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНОВЕШИВАЮЩЕГО МОМЕНТА РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА МЕТОДОМ Н. Е. ЖУКОВСКОГО .....	26
6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ МАШИНЫ, А ТАКЖЕ МОЩНОСТИ ДВИГАТЕЛЯ ДЛЯ ЕЁ ПРИВОДА .....	31
7 ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ И МАСС ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ .....	34
8 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЯДОВЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ И ПРОСТЫХ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ .....	41
9 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ .....	48
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	51

## ВВЕДЕНИЕ

Теория механизмов и машин (ТММ) – это наука, изучающая общие методы структурного, кинематического и динамического анализа и синтеза различных механизмов и машин. Эти методы пригодны для проектирования любых механизмов и не зависят от их назначения или от физической природы рабочих процессов машин. Самостоятельное решение на практических занятиях индивидуальных конкретных задач из различных разделов курса позволяет студентам освоить эти методы и подготовиться к проектированию или анализу новых механизмов и машин

Цель практикума – научить будущих инженеров применять общие методы анализа и синтеза механизмов для создания высокопроизводительных, надежных и экономичных машин. В результате выполнения индивидуальных заданий на практических занятиях студенты должны:

- изучить основные понятия и терминологию, которые используются в курсе теории механизмов и машин;

- приобрести навыки в построении и использовании кинематических схем механизмов;

- овладеть методами кинематического исследования механизмов путем построения планов скоростей и ускорений;

- приобрести навыки выполнения силового расчета механизмов;

- освоить методику определения параметров динамических моделей механизмов;

- научиться определять коэффициент полезного действия (КПД) машин при различных способах соединения в них механизмов;

- изучить параметры простых и сложных зубчатых передач, научиться выполнять их кинематический анализ.

При самостоятельном изучении материала практических занятий необходимо наличие литературы, указанной к данному практическому занятию.

# 1 СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ МАНИПУЛЯТОРОВ И ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ

*Цель практического занятия:* научиться по заданной схеме механизма манипулятора, определять его строение, рассчитывать основные характеристики манипулятора и формулировать соответствующие выводы.

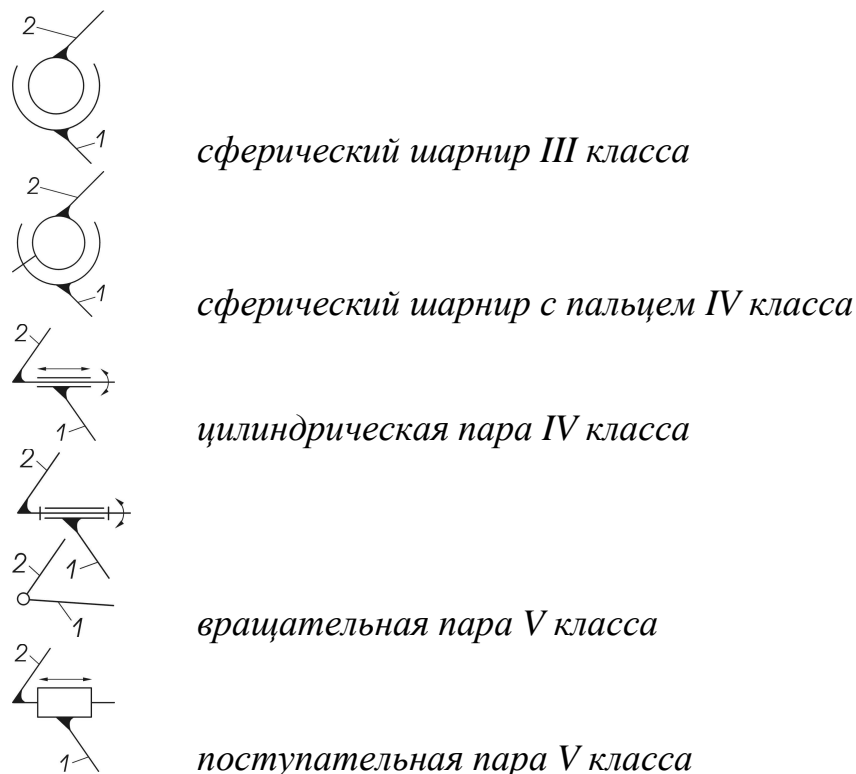
*Литература к занятию:* [1, с. 34–37, 47–52, 611–625; 2, с. 12–20, 263–267; 3, с. 12–17, 25–28, 262–272].

*Краткие теоретические сведения и указания к решению задач по теме занятия*

Манипулятором называют техническое устройство, предназначенное для воспроизведения рабочих функций человека.

Промышленными роботами (ПР) называют манипуляторы, снабженные органами перемещения и системами автоматического управления.

Основным исполнительным механизмом манипулятора и ПР является пространственная незамкнутая кинематическая цепь, включающая только кинематические пары (КП) III, IV и V классов (рис. 1.1):



*Рисунок 1.1 – Условные обозначения кинематических пар*

Далее рассмотрим основные характеристики манипулятора, которые можно в полной мере отнести и к ПР.

Так как основной исполнительный механизм пространственный, то подвижность манипулятора определяется по формуле Сомова–Малышева:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1,$$

где  $n$  – количество подвижных звеньев;

$p_1, p_2, \dots, p_5$  – число КП I, II, ... V классов, соответственно.

Поскольку механизм манипулятора представляет собой кинематическую цепь, включающую только КП III, IV и V классов, то  $p_2 = p_1 = 0$  и их можно из формулы  $W$  просто исключить.

Так как по определению маневренность манипулятора – это его подвижность при закреплённом (неподвижном) схвате, то формула для определения величины маневренности имеет следующий вид:

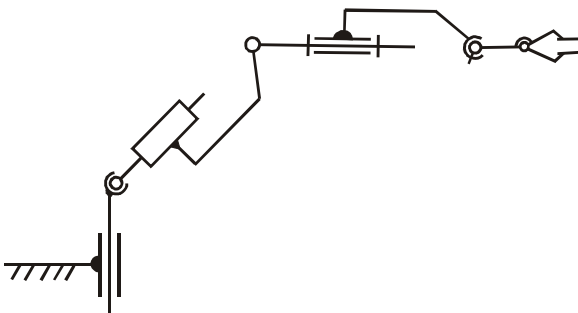
$$M = 6(n - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3.$$

Число  $W$  соответствует количеству источников движения (т.е. двигателей или приводов), необходимых для полной определенности движения всех звеньев манипулятора. При этом если  $M \leq 0$ , то манипулятор маневренности не имеет, а это означает, что в данную точку пространства, центр его схвата (захвата) может попасть только при одном и том же взаимном расположении всех звеньев данного манипулятора.

Если  $M = 1$ , то манипулятор имеет возможность манёвра по обходу препятствий в пространстве. Если же  $M \geq 2$ , то манипулятор имеет высокую маневренность.

При решении задач по теме занятия, в первую очередь, необходимо на схеме манипулятора пронумеровать арабскими цифрами все звенья, начиная от неподвижного (нулевого) звена – стойки 0, и последовательно продвигаясь к последнему звену – схвату. После этого все КП, соединяющие отдельные звенья, обозначить большими буквами латинского алфавита, и рядом с обозначением каждой КП указать в скобках её класс (римскими цифрами). Затем проанализировать пары, указав номера соединяемых звеньев, класс и название каждой пары, определить подвижность  $W$  и маневренность  $M$  манипулятора, сделать необходимые выводы.

### Задача



Обозначить все звенья и кинематические пары (КП) манипулятора, дать названия всех КП и указать их классы. Определить подвижность  $W$  и маневренность  $M$  манипулятора, сделать вывод о необходимом количестве источников движения и возможностях его манёвра.

### Решение задачи

Вычертим структурную схему механизма манипулятора и на ней пронумеруем все звенья и обозначим все КП, давая им принятые в ТММ названия и указывая их классы (рис. 1.2).

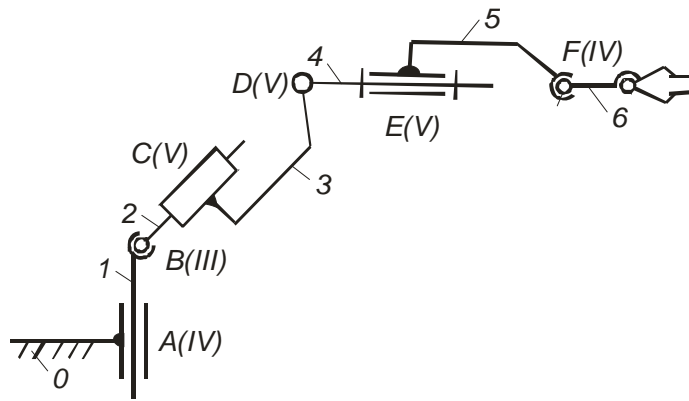


Рисунок 1.2 – Структурная схема механизма манипулятора

Проанализируем КП данного манипулятора:

$A(0-1)$  – цилиндрическая КП IV класса (здесь и далее рядом с буквенным обозначением КП, в скобках стоят номера звеньев, образующих данную КП);

$B(1-2)$  – сферическая КП III класса;

$C(2-3)$  – поступательная КП V класса;

$D(3-4)$  – вращательная КП V класса;

$E(4-5)$  – вращательная КП V класса;

$F(5-6)$  – сферическая с пальцем КП IV класса.

Рассчитаем подвижность манипулятора по формуле Сомова–Малышева:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 36 - 26 = 10,$$

где  $n = 6$  – количество подвижных звеньев;

$p_5 = 3$  – количество кинематических пар V-го класса;

$p_4 = 2$  – количество кинематических пар IV-го класса;

$p_3 = 1$  – количество кинематических пар III-го класса.

Определим маневренность манипулятора:

$$M = 6(n - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 6(6 - 1) - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4.$$

**Ответ:**  $W = 10$ ;  $M = 4$ . Вывод: для работы данного манипулятора необходимо 10 источников движения, и он имеет высокую маневренность.

## 2 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ПЛАНОВ СКОРОСТЕЙ

*Цель практического занятия:* научиться по заданной кинематической схеме механизма, записать векторные уравнения скоростей, решить их графически, построив план скоростей, и определить, в результате, скорости точек, а также величины и направления угловых скоростей звеньев механизма.

*Литература к занятию:* [1, с. 79–83, 87, 88, 92–94; 2, с. 39–51, 53–55, 60–62; 3, с. 31–38; 4, с. 67, 95–102; 5, с. 4–6, 12–24, 46–52, 56; 6, с. 4–9].

*Краткие теоретические сведения и указания к решению задач по теме занятия*

При исследовании движения механизмов, довольно точным и удобным в практическом применении является графоаналитический метод, который базируется на построении планов скоростей и ускорений, представляющих собой графическое решение векторных уравнений, известных из курса теоретической механики. Все эти уравнения имеют одинаковую конструкцию: связывают искомую скорость (или ускорение) одной точки механизма с известной скоростью (или ускорением) другой его точки.

Планом скоростей (или ускорений) механизма называется масштабное построение, в котором векторы абсолютных скоростей (или ускорений) точек механизма выходят из одной точки, называемой полюсом плана, а отрезки, соединяющие концы этих векторов, изображают относительные скорости (или ускорения) точек. Полюс плана скоростей принято обозначать буквой  $p$ , а полюс плана ускорений –  $\pi$ .

При выполнении кинематического анализа пользуются понятием масштабного коэффициента, имеющего определенную размерность. Масштабным коэффициентом некоторой физической величины называется отношение действительного значения данной величины (в свойственных ей единицах) к длине отрезка (в миллиметрах), изображающего эту величину на чертеже. Обозначается он буквой  $\mu$  с индексом той величины, которая изображена графически. Например, при построении кинематических схем механизмов в ТММ применяется масштабный коэффициент длины  $\mu_l$ :

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{(AB)},$$

где  $l_{AB}$  – действительная длина некоторого звена  $AB$  механизма, м;  
 $(AB)$  – изображение этого звена на схеме, мм.

Графическое изображение кинематической схемы механизма, соответствующее заданному положению его входного звена, называется планом механизма. Именно с его построения начинается решение задачи.



Расчет скоростей (или ускорений) точек механизма начинают с определения скорости (или ускорения) той точки входного звена, которая является центром вращательной кинематической пары, связывающей входное звено со следующим подвижным звеном механизма.

При построении планов скоростей (или ускорений) выполняется графическое решение векторных уравнений, в процессе которого применяется геометрическое сложение векторов. Концы векторов скоростей  $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C, \dots$  (или ускорений  $\vec{a}_A, \vec{a}_B, \vec{a}_C, \dots$ ) точек  $A, B, C, \dots$  механизма принято на планах скоростей (или ускорений) обозначать одноименными малыми буквами  $a, b, c, \dots$ . Это позволяет не проставлять на планах исходные обозначения векторов, чтобы не загромождать чертеж.

Основные векторные уравнения скоростей составляются для внутренних точек структурных групп, рассматриваемых в порядке их присоединения при образовании механизма. При выборе точек для составления основных векторных уравнений можно руководствоваться следующим:

- выбранная точка механизма и какая-то другая его точка, с уже известной скоростью, должны либо принадлежать одному и тому же звену, либо совпадать друг с другом и принадлежать разным звеньям, соединенным поступательной парой (кулисные механизмы);

- скорость выбранной точки должна быть известна по направлению, для чего эта точка должна принадлежать звену, совершающему простое движение (поступательное или вращательное вокруг неподвижной оси).

При построении планов скоростей следует помнить следующие общие положения:

- векторы абсолютных скоростей точек соединяют на плане скоростей его полюс  $p$  с соответствующими вершинами плана;

- относительные скорости точек изображаются на плане отрезками, соединяющими соответствующие вершины плана друг с другом, причем направления векторов относительных скоростей обратны порядку следования индексов в их обозначениях;

- фигура, образованная прямыми линиями, соединяющими некоторые точки одного звена на плане механизма, и фигура, образованная прямыми линиями, соединяющими концы векторов абсолютных скоростей этих точек на плане скоростей, подобны и сходственно расположены – теорема подобия плана скоростей;

- имея план скоростей, можно найти угловую скорость любого звена, совершающего вращательное или плоское движение, как по модулю, так и по направлению.

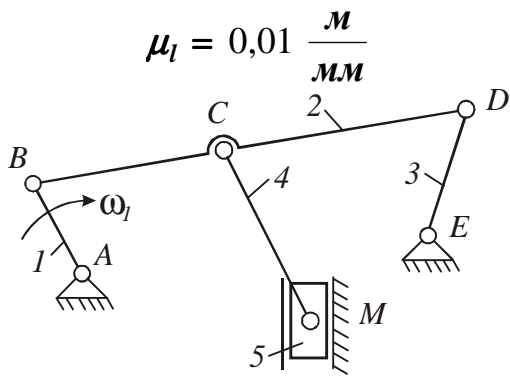
При решении задачи, в первую очередь, необходимо схему механизма перечертить с бланка задания в тетрадь или на отдельный лист (практически скопировать), и после этого длины отрезков, изображающих отдельные звенья механизма (например, длины отрезков  $(AB)$ ,  $(BC)$  и т.д.), измерять в миллиметрах уже непосредственно с тетради или листа. При построении плана скоростей нужно помнить, что он обязательно должен располагаться рядом со схемой механизма.

### Задача

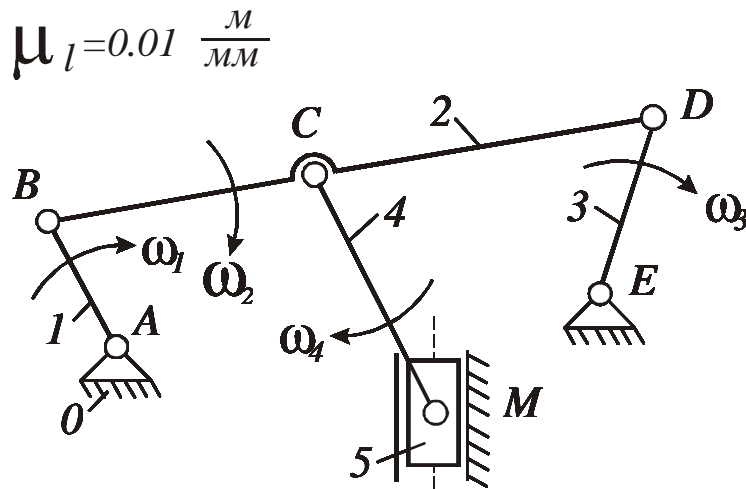
Способом планов скоростей определить в заданном положении механизма скорость указанной точки, величины и направления угловых скоростей указанных звеньев при

$$\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}, \mu_l = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$$

$$\bar{V}_M = ?, \omega_2 = ?, \omega_3 = ?, \omega_4 = ?$$



### Решение задачи



### План скоростей

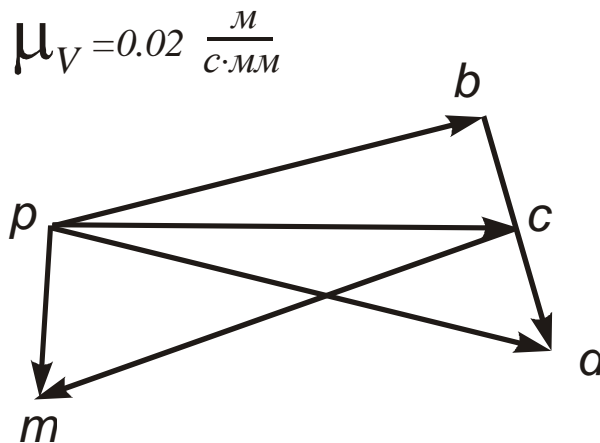


Рисунок 2.1 – Планы механизма и скоростей

Кинематический анализ плоского рычажного механизма выполним способом построения планов скоростей.

Исходя из того, что схема в задании изображена в масштабе  $M 1:10$  ( $\mu_l = 0,01 \text{ м / мм}$ ), определим действительные размеры звеньев (рис. 2.1):

$$\begin{aligned}
l_{AB} &= (AB) \cdot \mu_l = 20 \cdot 0,01 = 0,20 \text{ м}; \\
l_{BD} &= (BD) \cdot \mu_l = 80 \cdot 0,01 = 0,80 \text{ м}; \\
l_{BC} &= (BC) \cdot \mu_l = 35 \cdot 0,01 = 0,35 \text{ м}; \\
l_{DE} &= (DE) \cdot \mu_l = 25 \cdot 0,01 = 0,25 \text{ м}; \\
l_{CM} &= (CM) \cdot \mu_l = 35 \cdot 0,01 = 0,35 \text{ м}.
\end{aligned}$$

Определим скорость конца кривошипа:

$$V_B = \omega_l \cdot l_{AB} = 10 \cdot 0,20 = 2,0 \text{ м / с},$$

где  $\omega_l = 10 \text{ с}^{-1}$  – заданная угловая скорость кривошипа  $l$ .

Вектор скорости конца кривошипа (точки  $B$ ) направлен перпендикулярно оси кривошипа в сторону его вращения, т. е.  $\overline{V_B} = \overline{pb} \perp AB$ .

При длине отрезка  $(pb) = 60 \text{ мм}$ , масштабный коэффициент плана скоростей будет равен:

$$\mu_v = V_B / (pb) = 2,0 / 60 = 0,033 \text{ м / (с} \cdot \text{мм)}.$$

Далее будем искать скорость точки  $D$ , так как она кроме звена 2, совершающего плоское движение, принадлежит ещё и звену 3, которое совершает простое вращательное движение (в отличие от точки  $C$ , которая принадлежит звеньям 2 и 4, совершающим плоское движение).

Скорость точки  $D$  определим, решив графически векторное уравнение:

$$\overline{V_D}_{\perp DE} = \overline{V_B}_{\perp AB} + \overline{V_{DB}}_{\perp DB}.$$

Для этого через точку  $b$  плана скоростей проводим прямую линию, перпендикулярную звену  $DB$  плана механизма, а из полюса  $p$  – линию, перпендикулярную звену  $DE$ . Пересечение этих прямых дает точку  $d$ .

Скорость точки  $C$  определим, воспользовавшись теоремой подобия, из пропорции:

$$\frac{l_{BD}}{l_{BC}} = \frac{(bd)}{(bc)}. \text{ Следовательно: } (bc) = \frac{l_{BC} \cdot (bd)}{l_{BD}} = \frac{0,35}{0,80} \cdot 32 = 14 \text{ мм}.$$

Тогда скорость точки  $C$ :  $V_C = (pc) \cdot \mu_v = 62 \cdot 0,033 = 2,05 \text{ м / с}$ .

Скорость точки  $M$  определим, решив графически следующее векторное уравнение:

$$\overline{V_M}_{\parallel x-x} = \overline{V_C} + \overline{V_{MC}}_{\perp MC}.$$

Для этого через точку  $c$  плана скоростей проводим прямую линию, перпендикулярную звену  $MC$  плана механизма, а из полюса  $p$  – вертикальную прямую, то есть линию, параллельную направляющей  $x-x$ . Пересечение этих прямых дает точку  $m$ .

Из построенного плана скоростей определим скорость точки  $M$ :

$$V_M = (pm) \cdot \mu_V = 22 \cdot 0,033 = 0,73 \text{ м / с.}$$

Определим величины и направления угловых скоростей звеньев:

$$\omega_2 = V_{DB} / l_{BD} = 1,06 / 0,80 = 1,33 \text{ с}^{-1},$$

где  $V_{DB} = (bd) \cdot \mu_V = 32 \cdot 0,033 = 1,06 \text{ м / с.}$

Направление  $\omega_2$  находится мысленным переносом вектора  $\vec{V}_{DB}$  с плана скоростей в соответствующую точку  $D$  плана механизма и определением возможного поворота звена 2 вокруг точки  $B$  при данном направлении скорости  $\vec{V}_{DB}$ . Аналогично определяются направления и всех остальных угловых скоростей звеньев механизма.

$$\omega_3 = V_D / l_{DE} = 2,24 / 0,25 = 8,96 \text{ с}^{-1},$$

где  $V_D = (pd) \cdot \mu_V = 68 \cdot 0,033 = 2,24 \text{ м / с;}$

$$\omega_4 = V_{MC} / l_{CM} = 2,18 / 0,35 = 6,23 \text{ с}^{-1},$$

где  $V_{MC} = (cm) \cdot \mu_V = 66 \cdot 0,033 = 2,18 \text{ м / с.}$

Направления угловых скоростей звеньев показаны на схеме механизма.

**Ответ:**  $V_M = 0,73 \text{ м/с; } \omega_2 = 1,33 \text{ с}^{-1}; \omega_3 = 8,96 \text{ с}^{-1}; \omega_4 = 6,23 \text{ с}^{-1}.$

### 3 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ПЛАНОВ УСКОРЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ НАГРУЗОК НА ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМА

*Цель практического занятия:* научиться составлять векторные уравнения ускорений, решать их графически путём построения плана ускорений, и получив, в результате, линейные ускорения точек, величины и направления угловых ускорений звеньев механизма, уметь их использовать для определения инерционных нагрузок на звенья механизма.

*Литература к занятию:* [1, с. 83–87, 88–90, 93–96, 238–241; 2, с. 51–53, 55, 56, 62, 63, 72–74; 3, с. 38, 39, 57, 58; 4, с. 100–102, 172; 5, с. 30–38, 52–54, 62; 6, с. 10–18].

*Краткие теоретические сведения и указания к решению задач по теме занятия*

Знание ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизмов необходимо для решения ряда вопросов кинематики этих механизмов, для определения динамических нагрузок на звенья, для выяснения неравномерности движения, уравновешивания машин и т. д.

Наиболее универсальным, простым и наглядным методом определения ускорений в механизмах является метод планов ускорений, позволяющий найти ускорение любой точки механизма в рассматриваемом его положении.

Исходными данными для построения плана ускорений являются:

- план механизма в заданном его положении;
- истинные размеры всех звеньев механизма;
- закон движения его входного звена;
- план скоростей для заданного положения механизма.

Входное звено в механизмах обычно совершает вращательное движение относительно стойки. Принимают угловую скорость входного звена (кривошипа) постоянной ( $\omega_1 = const$ , что является наиболее распространённым и рациональным видом движения в реальных механизмах).

План ускорений строится аналогично плану скоростей, общие положения, которые следует помнить при построении планов скоростей, в полной мере можно отнести и к планам ускорений (см. раздел 2). Порядок рассмотрения точек звеньев механизма при построении плана ускорений остается таким же, что и при построении плана скоростей. Вначале рассматривают ту точку входного звена, которая является центром вращательной кинематической пары, связывающей входное звено со следующим подвижным звеном механизма, затем рассматривают точки первой присоединенной к входному звену и стойке структурной группы, потом второй структурной группы и т. д.

Найденные в результате построения плана ускорений линейные ускорения центров масс звеньев и угловые ускорения звеньев могут быть использованы для определения инерционных нагрузок на звенья механизма, к которым относятся силы и моменты сил инерции.

Силы и моменты сил инерции, действующие на звенья, определяются по формулам:

$$\overline{F}_{u_i} = -m_i \overline{a}_{S_i}; \quad \overline{M}_{u_i} = -I_{S_i} \overline{\varepsilon}_i,$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го звена, кг;

$a_{S_i}$  – ускорение центра масс  $i$ -го звена, м / с<sup>2</sup>;

$\varepsilon_i$  – угловое ускорение  $i$ -го звена, с<sup>-2</sup>;

$I_{S_i}$  – центральный момент инерции  $i$ -го звена, кг·м<sup>2</sup>.

Минусы в формулах говорят о направлениях  $\overline{F}_{u_i}$  и  $\overline{M}_{u_i}$ : сила инерции  $\overline{F}_{u_i}$  направлена параллельно вектору  $\overline{a}_{S_i}$ , но в противоположную сторону, а момент сил инерции  $\overline{M}_{u_i}$  имеет направление, противоположное направлению  $\overline{\varepsilon}_i$ .

При решении задачи по определению инерционных нагрузок на звенья механизма, в первую очередь, необходимо схему механизма перечертить с бланка задания в тетрадь или на отдельный лист, после чего длины отрезков, изображающих отдельные звенья механизма, измерять в миллиметрах уже непосредственно с тетради или листа. Затем рядом со схемой механизма нужно построить план скоростей, определив при этом линейные скорости точек и угловые скорости звеньев (см. раздел 2). После этого, используя полученные данные, также рядом со схемой механизма построить план ускорений, определив при этом линейные ускорения точек (в том числе ускорения центров масс звеньев) и угловые ускорения звеньев. Эти кинематические параметры позволяют найти инерционные нагрузки на звенья механизма, как по направлению, так и по модулю (если будут заданы массы звеньев и их центральные моменты инерции).

Рассмотрим решение задачи в общем виде (без расчетов), считая при этом, что план скоростей для заданного положения механизма уже построен, а, следовательно, определены длины звеньев, линейные скорости точек и угловые скорости звеньев.

### **Задача**

Способом планов ускорений определить в заданном положении механизма (рис. 3.1) ускорения точек, величины и направления угловых ускорений звеньев при  $\omega_l = const = \dots \cdot c^{-1}$ ,  $\mu_l = \dots \frac{M}{mM}$ . На плане механизма показать направления сил и моментов сил инерции, действующих на звенья механизма.

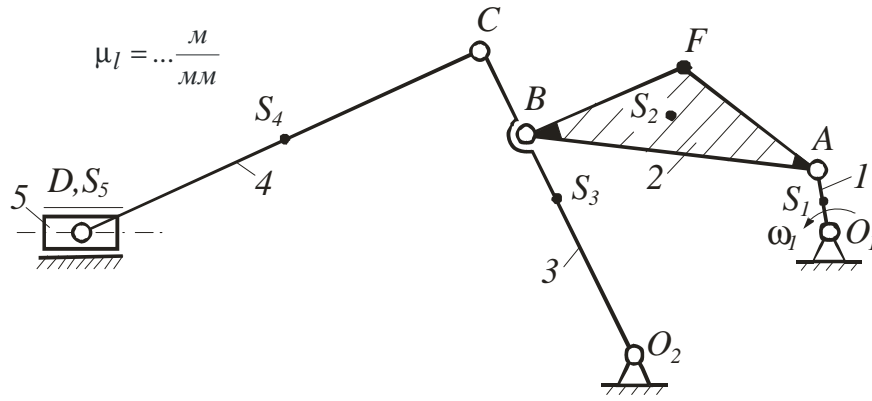


Рисунок 3.1 – План механизма

### Решение задачи

Построим план ускорений для заданного положения механизма. Расчёт ускорений (как и скоростей) начнём с определения ускорения точки  $A$  входного звена, являющейся общей точкой кривошипа  $1$  и шатуна  $2$ .

Ускорение точки  $A$  кривошипа  $1$ , совершающего вращательное движение, определяется геометрической суммой нормального и касательного ускорений:

$$\bar{a}_A = \underbrace{\bar{a}_A^n}_{//AO_1} + \underbrace{\bar{a}_A^\tau}_{\perp AO_1}.$$

Поскольку принято  $\omega_1 = const$ , то  $\varepsilon_1 = 0$  и  $a_A^\tau = \varepsilon_1 l_{O_1A} = 0$ . Тогда  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$ , и их модули  $a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{O_1A} = \dots \frac{M}{c^2}$ . Направлен вектор  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$  вдоль звена  $O_1A$  от точки  $A$  к центру его вращения  $O_1$ .

Выбрав полюс  $\pi$  (рис. 3.2) плана ускорений, изображаем вектор  $\bar{a}_A$  отрезком  $(\pi a)$ , направленным  $//O_1A$  от  $A$  к  $O_1$ . Тогда масштабный коэффициент  $\mu_a$  плана ускорений будет равен:

$$\mu_a = \frac{a_A}{(\pi a)} = \dots \frac{M}{c^2 \cdot мм}.$$

Ускорение точки  $B$ , общей для звеньев  $2$  и  $3$ , определяется из двух условий:

1 Рассматриваем точку  $B$ , принадлежащую звену  $2$ , совершающему плоское движение. Как и в случае определения скоростей, раскладываем плоское движение звена  $2$  на переносное поступательное движение вместе с точкой, выбранной за полюс, и относительное вращательное движение вокруг этого полюса. Тогда полное ускорение какой-либо точки звена  $2$  будет равно геометрической сумме переносного ускорения полюса и относительного ускорения точки в её движении вокруг полюса. Выбрав за полюс точку  $A$  звена  $2$ , ускорение которой уже известно, запишем уравнение для определения ускорения точки  $B$ :

$$\bar{a}_B = \underbrace{\bar{a}_A}_{//AO_1} + \underbrace{\bar{a}_{BA}^n}_{//BA} + \underbrace{\bar{a}_{BA}^\tau}_{\perp BA},$$

где  $\bar{a}_{BA}^n$  и  $\bar{a}_{BA}^\tau$  – нормальная и касательная составляющие относительного ускорения  $\bar{a}_{BA}$  ( $\bar{a}_{BA}^n \perp \bar{a}_{BA}^\tau$ ).

Вектор  $\bar{a}_{BA}^n$  направлен вдоль линии  $AB$  плана механизма от точки  $B$  к центру относительного вращения  $A$ , а вектор  $\bar{a}_{BA}^\tau \perp AB$ . Значение  $a_{BA}^n$  определяем по формулам:  $a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}}$  или  $a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB} = \dots \frac{M}{c^2}$ .

Угловая скорость  $\omega_2$  и относительная скорость  $V_{BA}$  определены из плана скоростей.

Принято концы векторов всех нормальных составляющих относительных ускорений обозначать на планах ускорений буквой  $n$  с цифровыми индексами, соответствующими номеру рассматриваемого звена.

Тогда длина отрезка, изображающего нормальную составляющую  $\bar{a}_{BA}^n$  на плане, будет равна  $(an_2) = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \dots \text{мм}$ .

2 Рассматриваем точку  $B$ , принадлежащую звену 3, которое совершает вращательное движение вокруг оси  $O_2$ . В этом случае полное ускорение точки  $B$  будет:

$$\bar{a}_B = \underbrace{\bar{a}_B^n}_{//BO_2} + \underbrace{\bar{a}_B^\tau}_{\perp BO_2}.$$

Вектор нормального ускорения  $\bar{a}_B^n$  направлен вдоль линии  $O_2B$  на плане механизма от  $B$  к  $O_2$ , а его модуль  $a_B^n = \omega_3^2 l_{O_2B} = \dots \frac{M}{c^2}$ . Длина отрезка, изображающего вектор  $\bar{a}_B^n$  на плане ускорений, будет равна  $(\pi n_3) = \frac{a_B^n}{\mu_a} = \dots \text{мм}$ . Вектор  $\bar{a}_B^\tau \perp O_2B$ .

Решим графически систему двух векторных уравнений для точки  $B$ . Согласно первому уравнению из точки  $a$  плана ускорений откладываем отрезок  $(an_2) // BA$  по направлению от  $B$  к  $A$ , и через конец вектора  $an_2$  проводим линию  $\perp AB$ . По второму уравнению из полюса  $\pi$  откладываем отрезок  $(\pi n_3) // BO_2$  по направлению от  $B$  к  $O_2$ , и через точку  $n_3$  проводим прямую  $\perp BO_2$ . Пересечение этой прямой с линией, проведённой через точку  $n_2 \perp AB$ , даёт точку  $b$ , которая и является решением системы уравнений. Тогда из плана:

$$a_B = (\pi b) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; \quad a_{BA}^\tau = (n_2 b) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; \quad a_B^\tau = (n_3 b) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}.$$



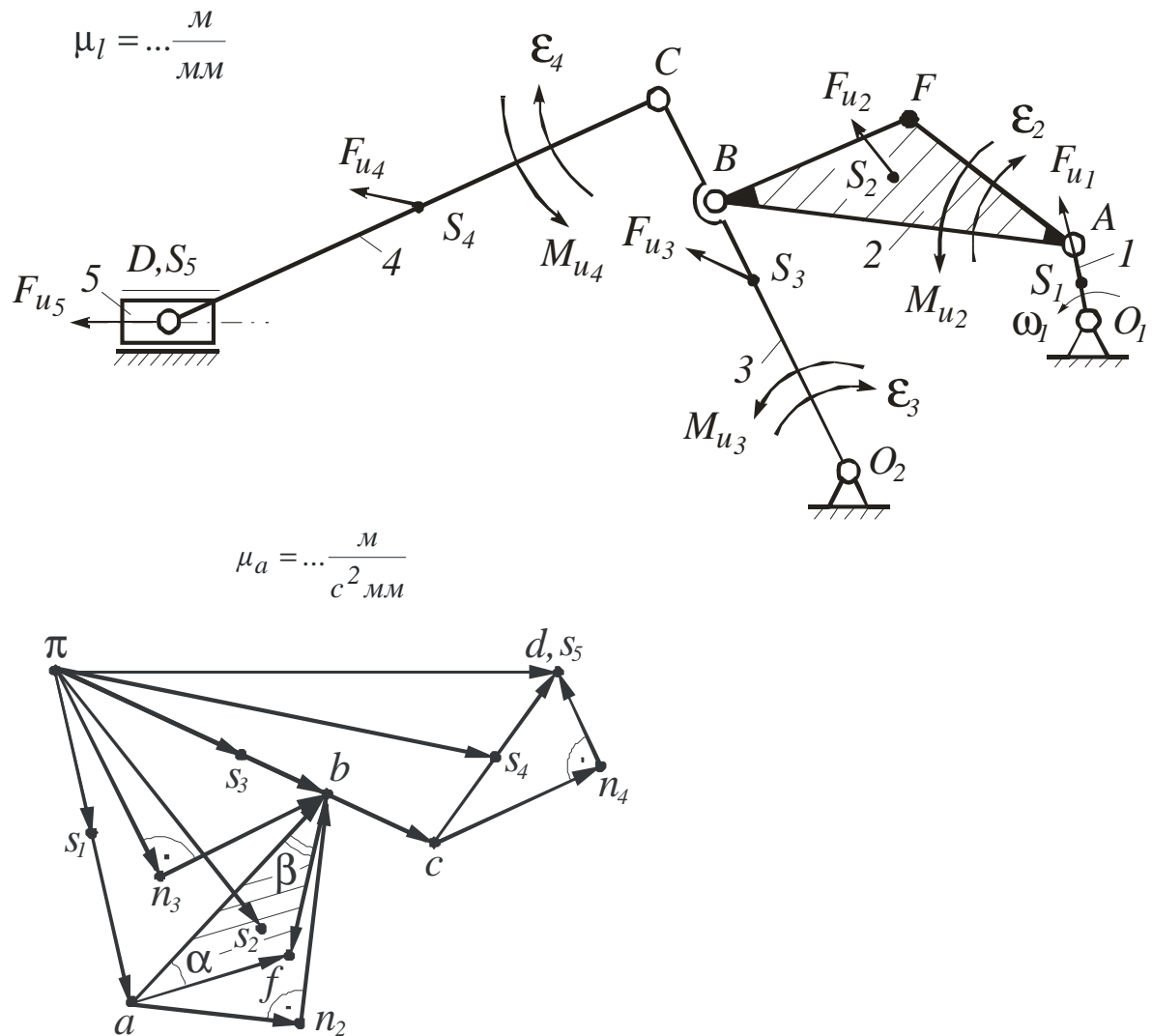


Рисунок 3.2 – План механизма с инерционными нагрузками и план ускорений

Из теоремы подобия плана ускорений следует, что на плане ускорений  $\Delta abf$  пропорционален  $\Delta ABF$  на плане механизма, и ускорение точки  $F$  звена 2 можно найти, построив на стороне  $ab$   $\Delta abf$ , подобный  $\Delta ABF$  и сходственно с ним расположенный. Для этого на плане механизма нужно измерить углы  $\alpha$  и  $\beta$  при вершинах  $A$  и  $B$   $\Delta ABF$ , а затем на плане ускорений провести лучи под этими углами из точек  $a$  и  $b$ , соответственно. Пересечение этих лучей даёт точку  $f$ , которая является концом вектора  $\overline{\pi f}$ , изображающего в масштабе ускорение  $\bar{a}_F$ . Его величина  $a_F = (\overline{\pi f}) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}$ .

Точку  $f$  также можно было бы найти, составив две пропорции для сторон  $\Delta ABF$  и  $\Delta abf$ .

Ускорение точки  $C$  звена 3 определится на основании положения теоретической механики о том, что ускорения всех точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в дан-

ный момент времени один и тот же угол с радиусами вращения. Следовательно, можно записать пропорцию:

$$\frac{O_2C}{O_2B} = \frac{a_c}{a_b} = \frac{(\pi c)}{(\pi b)}, \text{ откуда } (\pi c) = (\pi b) \frac{O_2C}{O_2B} = \dots \text{ мм.}$$

Значение ускорения  $a_C = (\pi c) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}$  Направлен вектор  $\overline{a_C} // \overline{a_B}$  и в ту же сторону, поэтому из полюса откладываем  $\overline{\pi c}$  на продолжении  $\overline{\pi b}$ .

Ускорение точки  $D$ , общей для звеньев 4 и 5, определится из уравнения:

$$\overline{a_D}_{//x-x} = \overline{a_C} + \overline{a_{DC}^n}_{//DC} + \overline{a_{DC}^\tau}_{\perp DC}.$$

Величина нормального ускорения  $a_{DC}^n = \omega_4^2 l_{CD} = \dots \frac{M}{c^2}$ ; его изображение на плане ускорений  $(cn_4) = \frac{a_{DC}^n}{\mu_a} = \dots \text{ мм.}$  Направлен вектор  $\overline{cn_4} // DC$  от  $D$  к  $C$ , а вектор  $\overline{a_{DC}^\tau} \perp DC$ .

Решим графически это уравнение. Из точки  $c$  откладываем вектор  $\overline{cn_4}$  в указанном направлении и через его конец  $n_4$  проводим линию  $\perp CD$ . Затем из полюса  $\pi$  проводим прямую  $//x-x$ . Пересечение этих линий даёт точку  $d$  – конец вектора  $\overline{\pi d}$ , изображающего ускорение  $\overline{a_D}$ . Тогда:

$$a_D = (\pi d) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; a_{DC}^\tau = (n_4 d) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}.$$

Имея план ускорений, можно для данного положения механизма найти угловое ускорение любого звена с вращательным или плоским движением. Так, угловое ускорение звена 2, совершающего плоское движение, в рассматриваемом положении механизма равно:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{AB}} = \dots c^{-2}.$$

Ускорение  $\varepsilon_2$  направлено в сторону действия вектора  $\overline{a_{BA}^\tau}$ , приложенного в точке  $B$  механизма и стремящегося повернуть звено 2 вокруг точки  $A$ , т.е. в данном случае по ходу часовой стрелки (см. рис. 3.2). Аналогично определяются величины и направления  $\varepsilon_3$  и  $\varepsilon_4$ :

$$\varepsilon_3 = \frac{a_B^\tau}{l_{O_2B}} = \dots c^{-2}; \varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^\tau}{l_{CD}} = \dots c^{-2}.$$

Направления угловых ускорений показаны на схеме механизма.

Используя свойство подобия планов ускорений, отмечаем на построенном плане точки, соответствующие центрам масс звеньев  $s_1, s_2, s_3, s_4$  и  $s_5$ . Если звенья 1, 3 и 4 считать однородными стержнями, то центры масс этих звеньев находятся посередине их длин. Поэтому на плане ускорений точки  $s_1, s_3$  и  $s_4$  должны быть посередине соответствующих отрезков. Центр масс звена 5 совпадает с точкой  $D$ , следовательно, на плане ускорений точки  $s_5$  и  $d$  также будут совпадать. Центр масс звена 2 расположен в точке пересечения медиан  $\triangle ABF$ , и для нахождения точки  $s_2$  на плане ускорений нужно провести медианы в  $\triangle abf$ .

Тогда ускорения центров масс звеньев:

$$a_{s_1} = (\pi s_1) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; \quad a_{s_2} = (\pi s_2) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; \quad a_{s_3} = (\pi s_3) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2};$$

$$a_{s_4} = (\pi s_4) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; \quad a_{s_5} = (\pi s_5) \mu_a = a_D.$$

Определив угловые ускорения и линейные ускорения центров масс звеньев, покажем на схеме механизма направления сил инерции и моментов сил инерции. Так, сила инерции  $\overline{F}_{u_1}$  приложена в центре масс  $S_1$  звена 1 и направлена в сторону, противоположную вектору ускорения  $\overline{a}_{s_1}$ . Аналогично направляем и все остальные силы инерции звеньев. Момент сил инерции  $\overline{M}_{u_2}$  направлен в сторону, обратную направлению углового ускорения  $\overline{\varepsilon}_2$  звена 2. Аналогично направляем и все остальные моменты сил инерции звеньев.

## 4 ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ПЛАНОВ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ДЛЯ КУЛИСНЫХ МЕХАНИЗМОВ

*Цель практического занятия:* изучить особенности составления векторных уравнений скоростей и ускорений для кулисных механизмов, научиться решать их графически, строя планы скоростей и ускорений, и определяя в результате линейные скорости и ускорения точек, а также угловые скорости и ускорения звеньев механизма.

*Литература к занятию:* [1, с. 87–90; 2, с. 57–60; 3, с. 40–43; 4, с. 101–103; 5, с. 24–30, 40–46, 57–61, 64–68].

*Краткие теоретические сведения и указания к решению задач по теме занятия*

Кулисными называют механизмы, имеющие ползуны (кулисные камни) на подвижных направляющих (кулисах) с вращательным или плоским движением. В этом случае абсолютное движение точек кулисного камня удобно рассматривать геометрически составленным из переносного движения соответствующей точки направляющей (кулисы), с которой в данный момент совпадает рассматриваемая точка камня, и относительного движения камня по направляющей (кулисе). Построение планов скоростей и, особенно, планов ускорений для таких механизмов имеет некоторые особенности.

В теоретической механике доказывается, что в случае непоступательного переносного движения (например, вращения) появляется некоторое добавочное, или кориолисово ускорение. Вектор  $\bar{a}^k$  кориолисова ускорения точки равен удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения  $\bar{\omega}_e$  на относительную скорость точки  $\bar{V}_r$ :

$$\bar{a}^k = 2 \bar{\omega}_e \bar{V}_r.$$

Модуль кориолисова ускорения будет равен  $a^k = 2\omega_e V_r \sin(\bar{\omega}_e \wedge \bar{V}_r)$ .

Для плоских механизмов угол между векторами  $\bar{\omega}_e$  и  $\bar{V}_r$  всегда равен  $90^\circ$ , и поэтому величина кориолисова ускорения  $a^k = 2\omega_e V_r$ , а направление  $\bar{a}^k$  можно найти, повернув вектор относительной скорости  $\bar{V}_r$  на  $90^\circ$  в сторону переносного вращения (по ходу или против хода часовой стрелки, в зависимости от направления  $\omega_e$ ).

В случае прямолинейной кулисы абсолютное ускорение камня  $\bar{a}$  равно геометрической сумме переносного ускорения  $\bar{a}_e$  в движении камня вместе с кулисой, кориолисова ускорения  $\bar{a}^k$  и относительного ускорения  $\bar{a}_r$  в движении камня относительно кулисы:  $\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}^k + \bar{a}_r$ .

При решении задач по кинематическому анализу кулисных механизмов необходимо базироваться на тех же основных положениях, что и при кинематическом анализе механизмов, не имеющих кулис и кулисных камней (см. разделы 2, 3). Рассмотрим построение плана скоростей и ускорений кулисного механизма в общем виде (без расчетов).

### Задача

Способом планов скоростей и ускорений определить в заданном положении механизма (рис. 4.1, а) линейные скорости и ускорения точек, величины и направления угловых скоростей и ускорений звеньев при известных  $\omega_l = const = \dots \cdot c^{-1}$ ,  $\mu_l = \dots \frac{m}{mm}$ .

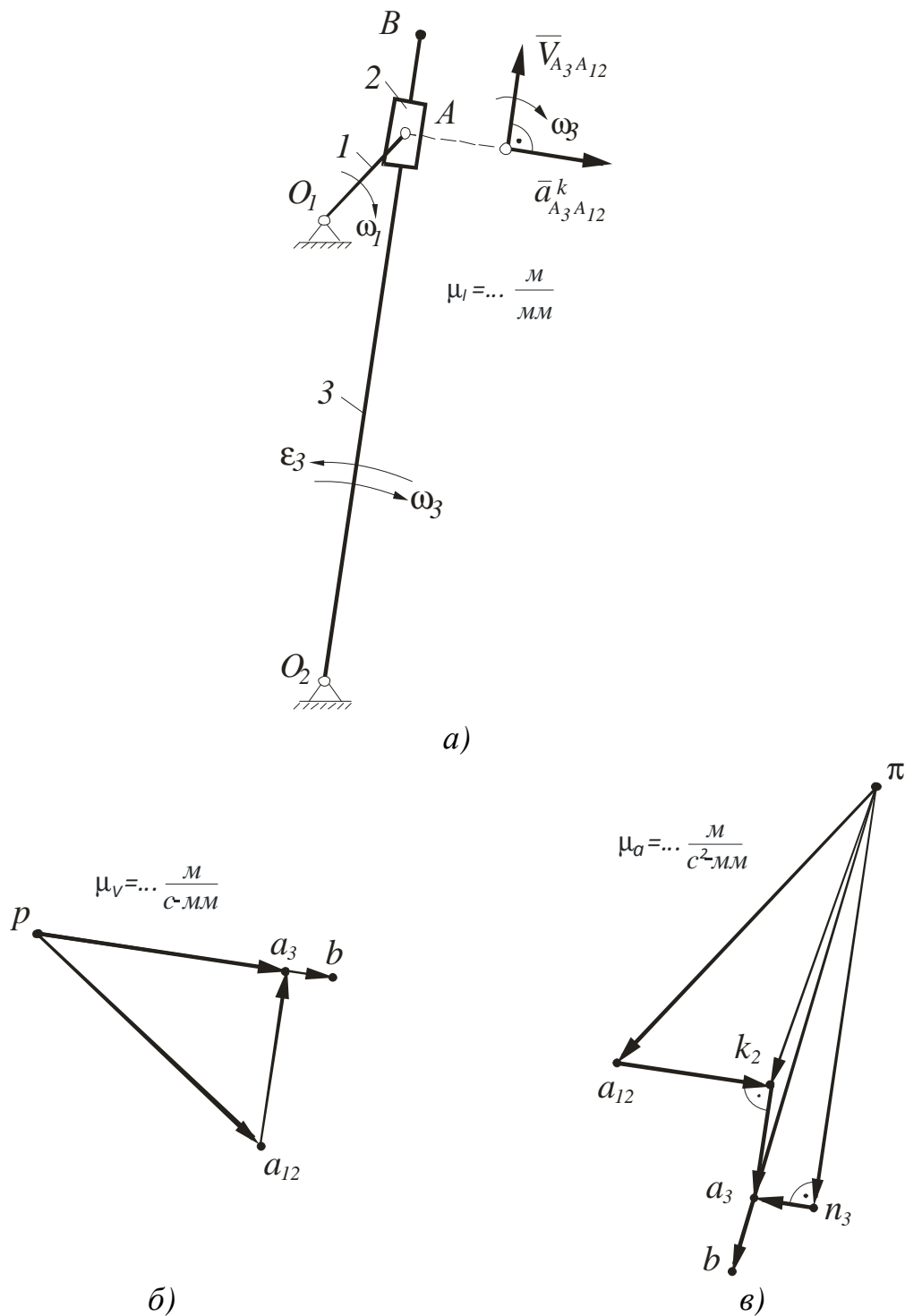
### Решение задачи

Построим план скоростей для заданного положения кулисного механизма. У таких механизмов следует различать две совпадающие на стержне, но принадлежащие разным звеньям точки  $A$ :  $A_{12}$  и  $A_3$ , которые необходимо рассматривать отдельно. Цифры при буквах соответствуют номерам звеньев, которым эти точки принадлежат, и вопрос об их цифрах решается путем внимательного анализа схемы механизма. Так, точка  $A_{12}$ , принадлежит шарниру, связывающему кривошип 1 и камень 2, и является их общей точкой (это ось вращения камня относительно кривошипа). Точка  $A_3$  принадлежит кулисе (цифры при буквах соответствуют номерам звеньев, которым эти точки принадлежат). Очевидно, что эти точки имеют разные абсолютные скорости и, следовательно, имеют относительные скорости  $\bar{V}_{A_3A_{12}}$  или  $\bar{V}_{A_{12}A_3} = -\bar{V}_{A_3A_{12}}$ , направленные вдоль звена 3.

Расчет скоростей точек механизма начинаем с определения скорости той точки входного звена, которая является центром вращательной кинематической пары, связывающей входное звено со следующим подвижным звеном механизма. В рассматриваемой задаче – это точка  $A_{12}$ , общая для звеньев 1 и 2. Так как кривошип 1 вращается вокруг оси  $O_1$ , то скорость точки  $A_{12}$  определяется по формуле:  $V_{A_{12}} = \omega_1 l_{O_1A} = \omega_1 (O_1A) \mu_l = \dots \frac{m}{c}$ .

Направлен вектор  $\bar{V}_{A_{12}} \perp O_1A$  в сторону вращения кривошипа. Выберем масштабный коэффициент плана скоростей:  $\mu_v = \frac{V_{A_{12}}}{(pa_{12})} = \dots \frac{m}{c \cdot mm}$ , где  $(pa_{12})$  – длина отрезка, изображающего скорость  $\bar{V}_{A_{12}}$  (рис. 4.1, б).

Скорость точки  $A_3$ , совпадающей в данный момент с точкой  $A_{12}$ , определим из двух условий, известных из общей механики о переносном и относительном движении точек.



*a – план механизма; б – план скоростей; в – план ускорений*  
 Рисунок 4.1 – План кулисного механизма, планы скоростей и ускорений кулисного механизма

1 Рассматривая движение точки  $A_3$  вместе с точкой  $A_{12}$  и относительно нее, запишем:

$$\frac{\bar{V}_{A_3}}{\perp O_2 A} = \frac{\bar{V}_{A_{12}}}{\perp O_1 A} + \frac{\bar{V}_{A_3 A_{12}}}{// O_2 A}.$$

2 Точка  $A_3$  вращается вместе со звеном 3 вокруг оси  $O_2$ , следовательно, вектор абсолютной скорости этой точки  $\overline{V}_{A_3} \perp O_2A$ . Реализуем графически это векторное уравнение. Для этого через точку  $a_{12}$  плана скоростей (см. рис. 4.1, б) проводим прямую  $\parallel O_2A$ , а из полюса  $p$  – линию  $\perp O_2A$ . Пересечение этих линий дает точку  $a_3$ , а вектор  $\overline{pa_3}$  изображает в выбранном масштабе скорость  $\overline{V}_{A_3}$ .

Тогда значение относительной скорости  $\overline{V}_{A_3A_{12}}$  из построенного плана скоростей будет равно:  $V_{A_3A_{12}} = (a_{12}a_3)\mu_V = \dots \frac{M}{C}$ .

Скорость точки  $B$  кулисы 3 найдем из пропорции, применяя теорему подобия:

$$\frac{(O_2B)}{(O_2A)} = \frac{V_B}{V_{A_3}} = \frac{(pb)}{(pa_3)}, \text{ откуда } (pb) = (pa_3) \frac{(O_2B)}{(O_2A)} = \dots \text{мм.}$$

Откладываем вектор  $\overline{pb} \perp O_2B$  в направлении  $\overline{pa_3}$  на его продолжении. Угловую скорость звена 3 легко определить по уравнению

$$\omega_3 = \frac{V_{A_3}}{l_{O_2A}} = \frac{(pa_3)\mu_V}{(O_2A)\mu_l} \text{ или } \omega_3 = \frac{V_B}{l_{O_2B}} = \frac{(pb)\mu_V}{(O_2B)\mu_l} = \dots c^{-1}.$$

О направлении  $\omega_3$  судим по направлению вектора скорости  $\overline{V}_{A_3}$  или  $\overline{V}_B$ .

Построим план ускорений для заданного положения механизма. Расчёт ускорений (как и скоростей) начнём с определения ускорения точки  $A_{12}$ . Ускорение точки  $A_{12}$  кривошипа 1, совершающего вращательное движение, определяется геометрической суммой нормального и касательного ускорений:

$$\overline{a}_{A_{12}} = \overline{a}_{A_{12}}^n + \overline{a}_{A_{12}}^\tau.$$

Поскольку принято  $\omega_1 = const$ , то  $\varepsilon_1 = 0$  и  $a_{A_{12}}^\tau = \varepsilon_1 l_{O_1A} = 0$ . Тогда

$\overline{a}_{A_{12}} = \overline{a}_{A_{12}}^n$ , и их модули  $a_{A_{12}} = a_{A_{12}}^n = \omega_1^2 l_{O_1A} = \dots \frac{M}{C^2}$ . Направлен вектор  $\overline{a}_{A_{12}} = \overline{a}_{A_{12}}^n$  вдоль звена  $O_1A$  от точки  $A$  к центру его вращения  $O_1$ .

Выбрав полюс  $\pi$  (рис. 4.1, в) плана ускорений, изображаем вектор  $\overline{a}_{A_{12}}$  отрезком  $(\pi a_{12})$ , направленным  $\parallel O_1A$  от  $A$  к  $O_1$ . Тогда масштабный коэффициент  $\mu_a$  плана ускорений будет равен:

$$\mu_a = \frac{a_{A_{12}}}{(\pi a_{12})} = \dots \frac{M}{C^2 \cdot \text{мм}}.$$

Ускорение точки  $A_3$ , принадлежащей кулисе 3 и совпадающей в данный момент времени с точкой  $A_2$  камня 2, определяется из двух условий:

1 Рассматриваем движение точки  $A_3$  вместе с точкой  $A_{12}$  и относительно неё. Так как переносное движение точки  $A_3$  является вращательным, то появится кориолисово ускорение. Тогда для ускорения точки  $A_3$  запишем уравнение:

$$\bar{a}_{A_3} = \underbrace{\bar{a}_{A_{12}}}_{//AO_1} + \underbrace{\bar{a}_{A_3A_{12}}^k}_{\perp O_2A} + \underbrace{\bar{a}_{A_3A_{12}}}_{//O_2A},$$

где  $\bar{a}_{A_3A_{12}}^k$  – кориолисово ускорение при движении точки  $A_3$  относительно точки  $A_{12}$ ;

$\bar{a}_{A_3A_{12}}$  – относительное ускорение в движении точки  $A_3$  относительно точки  $A_{12}$ .

Величина кориолисова ускорения определяется по формуле  $a^k = 2\omega_e V_r$ , при этом переносным движением для камня 2 является вращение звена 3, т.е.  $\omega_e = \omega_3$ , а относительным движением – перемещение камня 2 по прямолинейной направляющей 3, и, следовательно, относительная скорость  $\bar{V}_r$  точки  $A_3$  по отношению к точке  $A_{12}$  равна  $\bar{V}_{A_3A_{12}}$ . Тогда:

$$a_{A_3A_{12}}^k = 2\omega_3 V_{A_3A_{12}} = \dots \frac{M}{c^2}.$$

Численные значения  $\omega_3$  и  $V_{A_3A_{12}}$ , а также их направления определены из плана скоростей (см. рис. 4.1, *a* и 4.2, *b*).

Направление вектора  $\bar{a}_{A_3A_{12}}^k$  определяем, повернув вектор  $\bar{V}_{A_3A_{12}}$ , который на плане скоростей изображается вектором  $\overline{a_{12}a_3}$ , на  $90^\circ$  в сторону  $\omega_3$  (как показано на рис. 4.1, *a*). На плане ускорений (см. рис. 4.1, *в*) вектор  $\bar{a}_{A_3A_{12}}^k$  будем изображать вектором  $\overline{a_{12}k_2}$  (индекс при  $k$  обозначает номер камня), тогда длина отрезка  $(a_{12}k_2)$  определится из равенства:

$$(a_{12}k_2) = \frac{a_{A_3A_{12}}^k}{\mu_a} = \dots \text{ мм.}$$

Поскольку относительное движение камня является прямолинейным, то вектор относительного ускорения  $\bar{a}_{A_3A_{12}}$  направлен вдоль кулисы 3, по которой перемещается камень 2. Величина  $a_{A_3A_{12}}$  пока неизвестна.

2 Рассматриваем движение точки  $A_3$  в её вращении вместе со звеном 3 вокруг оси  $O_2$ . Тогда абсолютное ускорение точки  $A_3$  будет равно:

$$\bar{a}_{A_3} = \underbrace{\bar{a}_{A_3}^n}_{//AO_2} + \underbrace{\bar{a}_{A_3}^r}_{\perp AO_2}.$$



Вектор нормального ускорения  $\bar{a}_{A_3}^n$  направлен вдоль звена  $AO_2$  механизма от точки  $A$  и  $O_2$ . Его значение  $a_{A_3}^n = \omega_3^2 l_{O_2A} = \omega_3^2 (O_2A) \mu_l = \dots \frac{M}{c^2}$ . Длина отрезка, изображающего вектор  $\bar{a}_{A_3}^n$  на плане ускорений, определится из равенства  $(\pi n_3) = \frac{a_{A_3}^n}{\mu_a} = \dots$  мм. Вектор  $\bar{a}_{A_3}^r \perp O_2A$ .

Решим графически систему векторных уравнений для точки  $A_3$ . Для этого, согласно первому уравнению, на плане из точки  $a_{12}$  отложим вектор  $\overline{a_{12}k_2} \perp O_2A$  в указанном на рис. 4.1,  $a$  направлении. Через конец  $k_2$  этого вектора проведем прямую  $// O_2A$ . Затем по второму уравнению из полюса  $\pi$  отложим вектор  $\overline{\pi n_3} // AO_2$  по направлению от  $A$  к  $O_2$  и через точку  $n_3$  проведем прямую  $\perp O_2A$ . Пересечение этой прямой с линией, проведенной через точку  $k_2$ , дает точку  $a_3$ . Вектор  $\overline{\pi a_3}$  изображает ускорение  $\bar{a}_{A_3}$  в масштабе  $\mu_a$ . Из плана ускорений:

$$a_{A_3} = (\pi a_3) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; \quad a_{A_3A_{12}} = (a_{12} a_3) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2};$$

$$a_{A_3}^r = (n_3 a_3) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}.$$

Угловое ускорение кулисы 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{A_3}^r}{l_{O_2A}} = \frac{a_{A_3}^r}{(O_2A) \mu_l} = \dots c^{-2}.$$

Его направление определено по направлению  $\bar{a}_{A_3}^r$  (или  $\overline{n_3 a_3}$ ) и показано на рис. 4.1,  $a$ , откуда видно, что кулиса 3 в данный момент вращается замедленно, т.к. направления  $\omega_3$  и  $\varepsilon_3$  противоположны.

Ускорение точки  $B$  кулисы 3 можно найти по теореме подобия, пользуясь пропорцией:

$$\frac{O_2B}{O_2A} = \frac{a_B}{a_{A_3}} = \frac{(\pi b)}{(\pi a_3)}, \text{ откуда } (\pi b) = (\pi a_3) \frac{O_2B}{O_2A} = \dots \text{ мм.}$$

Вектор  $\bar{a}_B // \bar{a}_{A_3}$  и одинаково с ним направлен, поэтому на плане из полюса  $\pi$  откладываем вектор  $\overline{\pi b}$  по направлению  $\overline{\pi a_3}$ . Модуль ускорения точки  $B$  будет равен:  $a_B = (\pi b) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}$ .

## 5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНОВЕШИВАЮЩЕГО МОМЕНТА РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА МЕТОДОМ Н. Е. ЖУКОВСКОГО

*Цель практического занятия:* научиться строить рычаг Жуковского для заданного положения рычажного механизма и определять уравновешивающий момент, действующий на входное звено.

*Литература к занятию:* [1, с. 260–262, 326–334; 2, с. 84–90; 3, с. 59–64; 6, с. 26–29].

*Краткие теоретические сведения и указания к решению задач по теме занятия*

Задача силового анализа рычажного механизма состоит в определении сил взаимодействия (реакций) во всех кинематических парах механизма и уравновешивающего момента, который необходимо приложить к его входному звену, чтобы уравновесить действие на данный механизм всех остальных силовых факторов (сил и моментов).

Силовой анализ производят по структурным группам Ассура, так как они являются статически определимыми системами. Начинают силовой анализ с последней присоединенной структурной группы и путем последовательного перехода, в порядке структурного анализа от группы к группе, заканчивают рассмотрением первичного механизма. На кривошип 1 первичного механизма кроме внешних сил, сил инерции и реакций со стороны других звеньев, действует ещё и уравновешивающий момент  $M_{yp}$ , который приложен к валу кривошипа через передаточный механизм со стороны электродвигателя.

Физический смысл уравновешивающего момента состоит в том, что он является как бы наименьшим движущим моментом, действующим со стороны двигателя на ведущее звено, который может преодолеть силы сопротивления и заставить рассматриваемый механизм двигаться в заданном направлении.

Уравновешивающий момент  $M_{yp}$  может быть определён в результате выполнения полного силового расчета механизма, или с использованием, так называемого, рычага Жуковского. Определение  $M_{yp}$  методом построения рычага Жуковского применяется в тех случаях, когда требуется либо определить необходимую для привода данного механизма мощность электродвигателя, либо проверить найденное в результате силового расчета механизма значение  $M_{yp}$ .

Для построения рычага Жуковского необходимо план скоростей механизма в рассматриваемом его положении увеличить (насколько это позволяет отведенное для построения место), повернуть на  $90^0$  в любую сторону и перенести на него все действующие на механизм внешние силовые факторы.

При этом все действующие на механизм моменты сил (моменты внешних сил, сил инерции и др.) необходимо переносить на рычаг Жуковского в виде пар сил, которыми указанные моменты предварительно должны быть заменены. Рекомендуется векторы сил, составляющих пары, направлять перпендикулярно тому звену, на которое действует соответствующий момент, и прикладывать в крайних точках звена (чаще всего в шарнирах), скорости которых показаны на соответствующем плане скоростей. Разложение моментов на пары сил должно быть показано на схеме исходного механизма.

После этого векторы всех действующих сил из схемы нагруженного механизма переносятся в одноименные точки рычага строго параллельно самим себе, и составляется уравнение равновесия рычага в виде равенства нулю суммы моментов всех действующих на него сил относительно полюса  $p$  повернутого плана скоростей. При составлении уравнения равновесия рычага Жуковского, плечи сил необходимо показывать и измерять непосредственно на построенном рычаге и подставлять их в уравнение полученными значениями в миллиметрах.

В результате решения этого уравнения равновесия находят уравновешивающий момент  $M_{yp}$ . Если значение  $M_{yp}$  получится положительным, то это означает, что направление момента было выбрано правильно. При отрицательном значении  $M_{yp}$ , его направление должно быть изменено на противоположное.

Рассмотрим решение задачи по определению уравновешивающего момента методом рычага Жуковского в общем виде (без расчетов), не останавливаясь подробно на построениях планов скоростей, ускорений и определении инерционных нагрузок, поскольку эти темы уже были рассмотрены ранее (см. разделы 2–4). Кроме того, обычно при решении задач по определению  $M_{yp}$ , нагрузки на звенья механизма определять не надо, так как они задаются в условии, как по модулю, так и по направлению. В таком случае не надо строить и план ускорений. Также в задачах может быть не задана угловая скорость кривошипа  $\omega_l$ . Тогда начать решение задачи необходимо с того, что задать  $\omega_l$  по направлению, и построить план скоростей без учета  $\mu_v$  – план возможных скоростей, который и использовать затем для построения рычага Жуковского.

### **Задача**

Методом рычага Жуковского в заданном положении механизма (рис. 5.1) определить уравновешивающий момент  $M_{yp}$ , приложенный к кривошипу  $l$ , рассчитав предварительно инерционные нагрузки, действующие на звенья механизма (силы и моменты сил инерции). При этом известны:  $\omega_l = const = \dots \text{с}^{-1}$ ,  $\mu_l = \dots \frac{M}{mM}$ . Будем считать, что известны также массы звеньев  $m_i$  (кг), их центральные моменты инерции  $I_{S_i}$  ( $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ), си-

лы тяжести звеньев  $G_i$  (Н), и сила полезного (производственного) сопротивления  $\overline{F}_{n.c.}$  (Н), приложенная к выходному звену 3 и направленная против его движения.

### Решение задачи

Чтобы определить инерционные нагрузки, действующие на звенья, для заданного положения механизма построим план скоростей (см. рис. 5.1), решив графически векторное уравнение  $\overline{V}_C = \overline{V}_B + \overline{V}_{CB}$ , и рассчитав в результате линейные скорости точек, а также угловую скорость шатуна 2.

Затем построим план ускорений (см. рис. 5.1), решив графически векторное уравнение  $\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB}^n + \overline{a}_{CB}^{\tau}$ , и рассчитав в результате линейные ускорения точек (в том числе и ускорения центров масс), а также угловое ускорение шатуна 2.

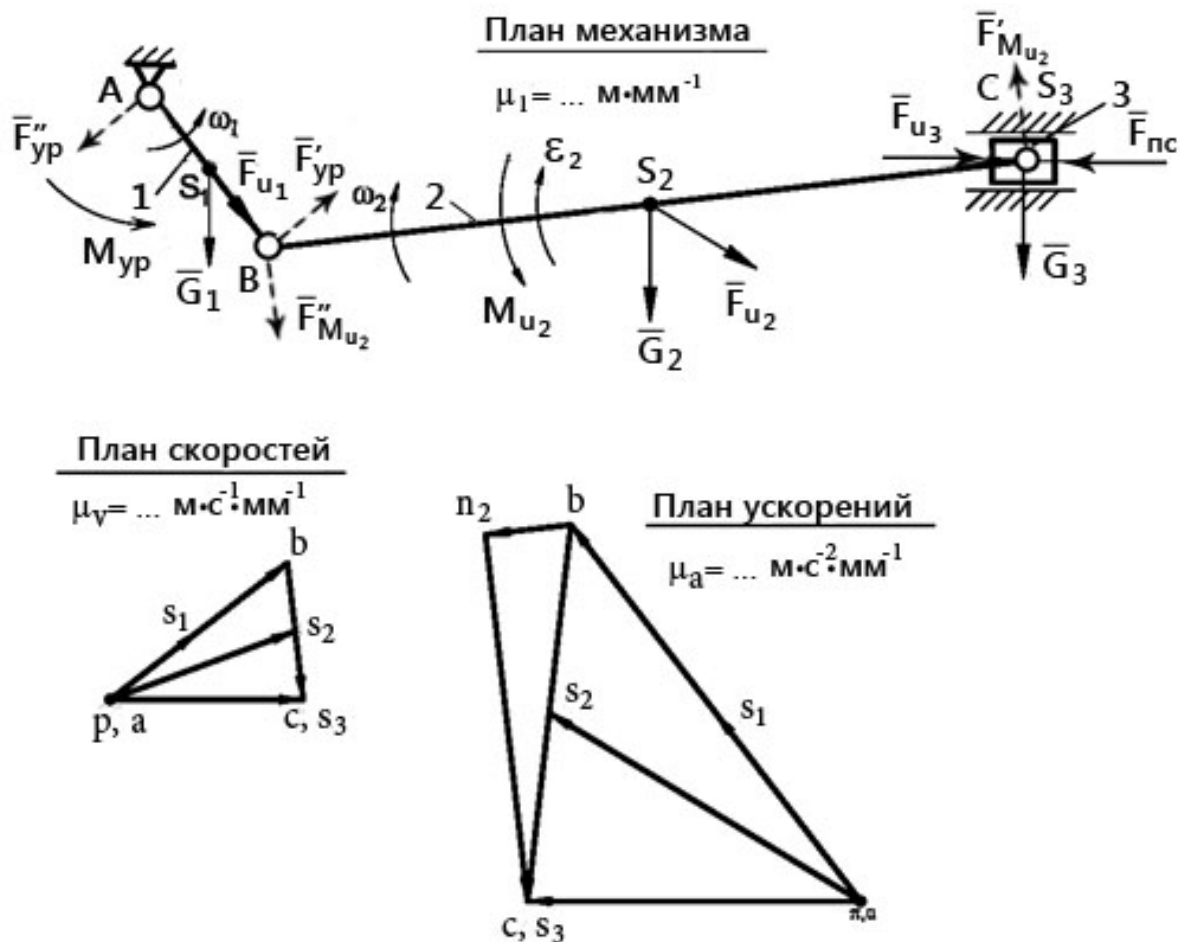


Рисунок 5.1 – План нагруженного механизма, планы скоростей и ускорений

Используя полученные данные, определим силы и моменты сил инерции, действующие на звенья механизма:  $\bar{F}_{u_i} = -m_i \bar{a}_{S_i}$ ;  $\bar{M}_{u_i} = -I_{S_i} \bar{\varepsilon}_i$  (см. раздел 3). Покажем их направления на плане механизма, а также направления известных сил тяжести и силы полезного сопротивления.

Зададимся направлением уравнивающего момента  $M_{yp}$ , приложенного к кривошипу 1. Направим  $M_{yp}$  в ту же сторону, куда направлена и угловая скорость кривошипа  $\omega_1$ .

Построим рычаг Жуковского (рис. 5.2), для чего план скоростей механизма увеличим и повернём на  $90^\circ$  по часовой стрелке. Затем перенесём на него все действующие на механизм внешние силовые факторы:

- силу полезного сопротивления  $\bar{F}_{n.c.}$ ;
- силы тяжести звеньев  $\bar{G}_i$ ;
- силы  $\bar{F}_{u_i}$  и моменты сил  $M_{u_i}$  инерции звеньев;
- уравнивающий момент  $M_{yp}$ .

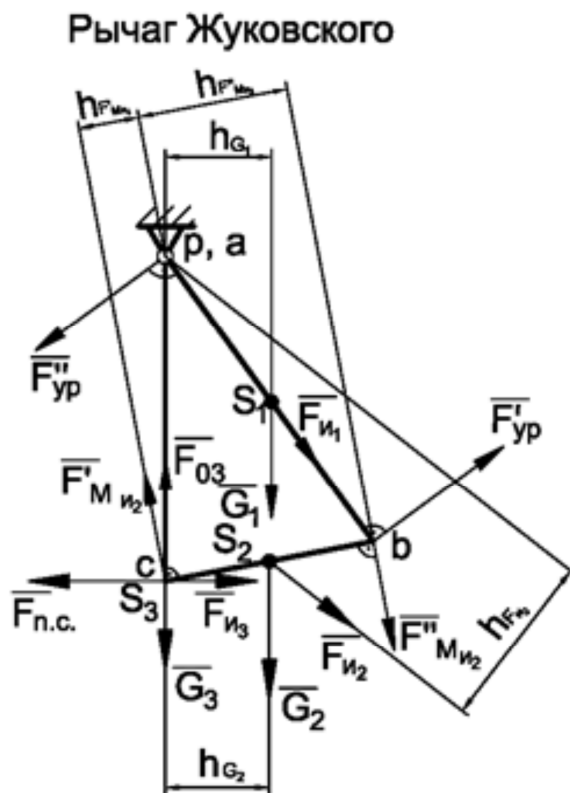


Рисунок 5.2 – Рычаг Жуковского

При этом все действующие на механизм моменты переносим на рычаг Жуковского в виде пар сил. Так, момент  $M_{u_2}$ , действующий на звено 2 рассматриваемого механизма, заменим парой сил  $\bar{F}'_{M_{u_2}} = -\bar{F}''_{M_{u_2}}$ , перпендикулярных звену 2 и приложенных к его крайним точкам B и C:

$$F'_{M_{u_2}} = F''_{M_{u_2}} = \frac{M_{u_2}}{l_{BC}} = \dots \text{Н},$$

где  $l_{BC}$  – плечо пары (длина звена 2), м.

Для учета на рычаге Жуковского  $M_{yp}$ , его также необходимо условно заменить парой сил  $\bar{F}'_{yp} = -\bar{F}''_{yp}$ , перпендикулярных кривошипу  $l$  и приложенных к его крайним точкам  $A$  и  $B$ , при этом величины сил пары  $F'_{yp} = F''_{yp} = \frac{M_{yp}}{l_{AB}}$  неизвестны, а тогда момент  $M_{yp} = F_{yp} \cdot l_{AB}$ , где  $l_{AB}$  – истинная длина кривошипа, м.

Разложение моментов на пары сил показано на схеме механизма (см. рис. 5.1).

Значение фиктивной (условной) уравновешивающей силы  $F_{yp}$  находим из уравнения равновесия рычага Жуковского:

$$\sum M_p(\bar{F}_i) = 0.$$

$$-F_{n.c.}(pc) + F_{u_3} h_{F_{u_3}} - G_2 h_{G_2} + F_{u_2} h_{F_{u_2}} - F'_{M_{u_2}} h_{F_{M_{u_2}}} -$$

$$- F''_{M_{u_2}} h_{F_{M_{u_2}}} - G_1 h_{G_1} + F'_{yp}(pb) = 0,$$

откуда:

$$F'_{yp} = (F_{n.c.}(pc) - F_{u_3} h_{F_{u_3}} + G_2 h_{G_2} - F_{u_2} h_{F_{u_2}} +$$

$$+ F'_{M_{u_2}} h_{F_{M_{u_2}}} + F''_{M_{u_2}} h_{F_{M_{u_2}}} + G_1 h_{G_1}) / (pb) = \dots \text{Н}.$$

При этом  $M_{yp} = F'_{yp} \cdot l_{AB} = \dots \text{Н} \cdot \text{м}.$

Знак полученного уравновешивающего момента  $M_{yp}$  будет свидетельствовать о правильности или ошибочности выбора его направления.

## 6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ МАШИНЫ, А ТАКЖЕ МОЩНОСТИ ДВИГАТЕЛЯ ДЛЯ ЕЁ ПРИВОДА

*Цель практического занятия:* научиться определять коэффициент полезного действия машины при смешанном соединении в ней механизмов, а также мощности двигателя для её привода по заданной мощности на выходном валу одного из механизмов машины.

*Литература к занятию:* [1, с. 304–313; 2, с. 99–106; 3, с. 75, 76; 4, с. 220, 221].

*Краткие теоретические сведения и указания к решению задач по теме занятия.*

Механизм или машина считается тем совершеннее, чем большая часть подводимой энергии (при прочих равных условиях), затрачивается на преодоление полезных сопротивлений. Эффективность использования энергии в машине характеризуется так называемым механическим коэффициентом полезного действия (КПД).

Механическим КПД называют отношение работы (или средней мощности) сил полезного сопротивления к работе (или средней мощности) движущих сил за цикл установившегося движения:

$$\eta = \frac{|A_{nc}|}{A_{\partial}} = \frac{P_{nc}}{P_{\partial}}.$$

Как правило, современные машины состоят из многих механизмов, КПД которых известны, или их можно сравнительно легко найти. Тем не менее, общий КПД машины зависит не только от КПД отдельных механизмов, входящих в её состав, но и от способа соединения этих механизмов в машине. Различают три способа соединения механизмов: последовательное, параллельное и смешанное.

Общий механический КПД последовательно соединённых механизмов равен произведению механических КПД отдельных механизмов, составляющих одну машину:

$$\eta_{\Sigma}^{nocл} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots \eta_n.$$

При параллельном соединении механизмов в машине, её общий КПД определится, как:

$$\eta_{\Sigma}^{nap} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \eta_i,$$

где  $\alpha_i$  – коэффициент, определяющий какая доля всей энергии (при распределении её по нескольким параллельным потокам) идёт на приведе-

ние в движение данного  $i$ -го механизма. При этом  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  для данного разветвления энергии.

Таким образом, при параллельном соединении механизмов общий КПД равен сумме произведений КПД каждого из них на соответствующий коэффициент распределения энергии.

При решении задач по определению КПД машины, представляющей собой смешанное соединение механизмов, необходимо выделить в ней последовательные и параллельные цепи соединенных между собою механизмов, а затем применить к ним рассмотренные выше формулы.

Кроме того, чтобы избежать ошибок при решении подобных задач, нужно всегда помнить, что КПД реальной машины находится в пределах:  $0 \leq \eta < 1$ , и не допускать ошибок при выборе последовательности выполнения арифметических действий.

### Задача

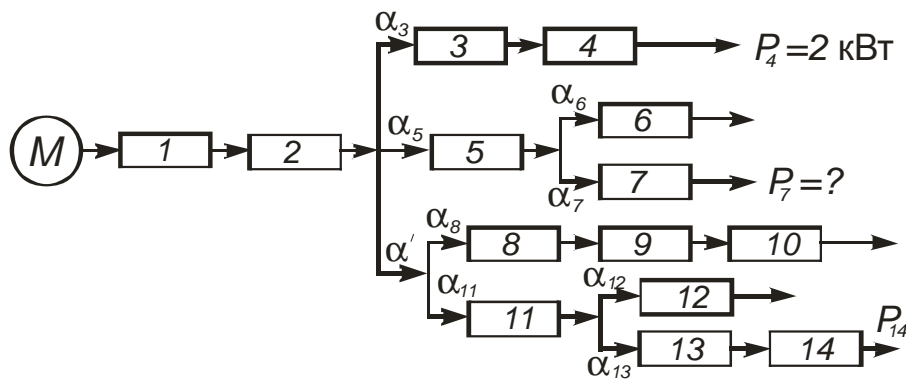


Рисунок 6.1 – Схема машины

$$\eta_1 = \eta_5 = \eta_{10} = 0,8; \eta_2 = \eta_4 = \eta_7 = \eta_{12} = 0,7; \eta_3 = \eta_6 = \eta_9 = 0,9;$$

$$\eta_8 = \eta_{13} = 0,6; \eta_{11} = \eta_{14} = 0,85; \alpha_3 = \alpha_6 = 0,2; \alpha_5 = \alpha_8 = 0,3; \alpha_{12} = 0,4.$$

Определить общий КПД машины  $\eta_{\Sigma}$  при комбинированном способе соединения механизмов в ней, потребную мощность двигателя  $P_{дв}$  и мощности на выходных валах 7-го и 14-го механизмов ( $P_7$  и  $P_{14}$ ).

### Решение задачи

Прежде всего, определим недостающие коэффициенты  $\alpha_i$ , составив следующие равенства:

$$\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha' = 1, \text{ отсюда } \alpha' = 1 - \alpha_3 - \alpha_5 = 1 - 0,2 - 0,3 = 0,5;$$

$$\alpha_6 + \alpha_7 = 1, \text{ тогда } \alpha_7 = 1 - \alpha_6 = 1 - 0,2 = 0,8;$$

$$\alpha_8 + \alpha_{11} = 1, \text{ отсюда } \alpha_{11} = 1 - \alpha_8 = 1 - 0,3 = 0,7;$$

$$\alpha_{12} + \alpha_{13} = 1, \text{ тогда } \alpha_{13} = 1 - \alpha_{12} = 1 - 0,4 = 0,6.$$



Определим общий КПД данной машины (рис. 6.1), используя формулы для последовательного и параллельного соединения механизмов:

$$\begin{aligned}\eta_{\Sigma} &= \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot (\alpha_3 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 + \alpha_5 \cdot \eta_5 (\alpha_6 \cdot \eta_6 + \alpha_7 \cdot \eta_7) + \alpha' (\alpha_8 \cdot \eta_8 \cdot \eta_9 \cdot \eta_{10} + \alpha_{11} \cdot \eta_{11} (\alpha_{12} \cdot \eta_{12} + \alpha_{13} \cdot \eta_{13} \cdot \eta_{14}))) = \\ &= 0,8 \cdot 0,7 \cdot (0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot (0,2 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,7) + 0,5 \cdot (0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,85 \cdot (0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,85))) = \\ &= 0,56 \cdot (0,126 + 0,24 \cdot (0,18 + 0,56) + 0,5 \cdot (0,1296 + 0,595 \cdot (0,28 + 0,306))) = \\ &= 0,56 \cdot (0,126 + 0,1776 + 0,5 \cdot (0,1296 + 0,3487)) = 0,56 \cdot (0,126 + 0,1776 + 0,239) = 0,304 \approx 0,3.\end{aligned}$$

Определим потребную мощность двигателя, используя базовую формулу механического КПД и мощность на выходном валу 4-го механизма:

$$\frac{P_4}{P_{\text{дв}}} = \eta' = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \alpha_3 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,07056 \approx 0,07.$$

Из этого равенства:  $P_{\text{дв}} = \frac{P_4}{\eta'} = \frac{2}{0,07} = 28,57 \text{ кВт}.$

Аналогично составим равенство для определения  $P_7$ :

$$\frac{P_7}{P_{\text{дв}}} = \eta'' = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \alpha_5 \cdot \eta_5 \cdot \alpha_7 \cdot \eta_7 = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,075,$$

отсюда мощность на выходном валу 7-го механизма:

$$P_7 = P_{\text{дв}} \cdot \eta'' = 28,57 \cdot 0,075 = 2,14 \text{ кВт}.$$

Аналогично составим равенство для определения  $P_{14}$ :

$$\frac{P_{14}}{P_{\text{дв}}} = \eta''' = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \alpha' \cdot \alpha_{11} \cdot \eta_{11} \cdot \alpha_{13} \cdot \eta_{13} \cdot \eta_{14} = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,85 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,85 = 0,051,$$

отсюда мощность на выходном валу 14-го механизма:

$$P_{14} = P_{\text{дв}} \cdot \eta''' = 28,57 \cdot 0,051 = 1,46 \text{ кВт}.$$

**Ответ:**  $\eta_{\Sigma} = 0,3$ ;  $P_{\text{дв}} = 28,57 \text{ кВт}$ ;  $P_7 = 2,14 \text{ кВт}$ ;  $P_{14} = 1,46 \text{ кВт}.$

## 7 ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ И МАСС ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

*Цель практического занятия:* научиться для заданного положения механизма определять приведенный к кривошипу его момент инерции, а также приведенный момент внешних нагрузок, действующих на механизм.

*Литература к занятию:* [1, с. 324–326, 334–340; 2, с. 90–95; 3, с. 70–73; 4, с. 131–140].

*Краткие теоретические сведения и указания к решению задач по теме занятия*

Механизмы обычно являются многозвенными системами, нагруженными большим количеством силовых факторов. Определение закона движения такой системы представляют собой трудную задачу. Однако у механизмов с подвижностью равной единице ( $W=1$ ), прежде всего надо определить закон движения одного звена – входного, а затем, используя обычные кинематические методы, найти характер движения остальных звеньев. Такая постановка задачи привела к мысли заменить многозвенный механизм с вращающимся входным звеном его условной динамической моделью в виде механизма рычага, состоящего из кривошипа (так называемого звена приведения) и стойки (рис. 7.1).



Рисунок 7.1 – Динамическая модель механизма с вращающимся входным звеном

Обозначим угловую скорость кривошипа модели (звена приведения)  $\omega_M$ , а угловую скорость входного звена рассматриваемого механизма  $\omega_1$ . Чтобы кривошип модели и входное звено механизма имели одинаковые законы движения ( $\omega_M = \omega_1$  для любого момента времени), параметры, определяющие закон движения кривошипа модели, должны быть эквивалентны всей нагрузке на рассматриваемый механизм и инертности всех его звеньев. Такими параметрами являются силовое нагружение кривошипа модели, за которое принимают момент  $M_{\Sigma}^{np}$ , и его момент инерции относительно оси вращения  $I_{\Sigma}^{np}$ .

Таким образом, при построении модели механизма все силы и моменты, приложенные к нему, оказываются приведенными к одному звену (звену приведения) и замененными суммарным приведенным моментом  $M_{\Sigma}^{np}$ . Равным образом, массы всех звеньев (точнее говоря, их инертности) оказываются также приведенными к одному звену и замененными суммарным приведенным моментом инерции  $I_{\Sigma}^{np}$ . Следовательно, построение динамической модели состоит в приведении сил и моментов (определении  $M_{\Sigma}^{np}$ ) и в приведении масс (определении  $I_{\Sigma}^{np}$ ).

Рассмотрим условие приведения сил и моментов.

Суммарный приведенный момент  $M_{\Sigma}^{np}$ , приложенный к звену приведения, в том случае эквивалентен всем приводимым силовым факторам, если он сможет развить мощность, равную сумме мощностей, развиваемых всеми приводимыми силами и моментами, действующими на звенья механизма:

$$P_{M_{\Sigma}^{np}} = \sum_{i=1}^n P_i,$$

где  $P_{M_{\Sigma}^{np}}$  – мощность, развиваемая суммарным приведенным моментом  $M_{\Sigma}^{np}$ , Вт;

$P_i$  – мощности, развиваемые силами и моментами, действующими на  $i$ -ое звено механизма и подлежащими приведению, Вт.

Мощность силы  $F_i$ :

$$P_{F_i} = F_i V_k \cos(\bar{F}_i \wedge \bar{V}_k),$$

где  $\bar{V}_k$  – скорость точки приложения силы  $\bar{F}_i$ , м / с;

$(\bar{F}_i \wedge \bar{V}_k)$  – меньший угол между направлениями  $\bar{F}_i$  и  $\bar{V}_k$ .

Мощность момента  $M_i$ :

$$P_{M_i} = \pm M_i \omega_i,$$

где  $\omega_i$  – угловая скорость звена механизма, на которое действует момент  $M_i$ , с<sup>-1</sup>.

Мощности приписывают знак. Знак мощности силы определяет знак косинуса. Знаки мощности момента: знак плюс – если  $M_i$  и  $\omega_i$  имеют одинаковое направление, знак минус – если противоположное.

Подставив выражения для мощностей силовых факторов в условие приведения сил и моментов, получим формулу для вычисления суммарного приведенного момента:

$$M_{\Sigma}^{np} = \sum_{i=1}^n \left( F_i \frac{V_k}{\omega_i} \cos(\bar{F}_i \wedge \bar{V}_k) \pm M_i \frac{\omega_i}{\omega_1} \right).$$

Рассмотрим условие приведения масс.

Приведенный момент инерции  $I_{\Sigma}^{np}$ , которым должен обладать кривошип модели относительно оси его вращения, в том случае является эквивалентом общей инертности рассматриваемого механизма, если кинетическая энергия модели равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма:

$$T_{mod} = \sum_{i=1}^n T_i,$$

где  $T_{mod}$  – кинетическая энергия модели, Дж;

$T_i$  – кинетическая энергия  $i$ -го звена механизма, Дж.

Кинетическая энергия модели, то есть звена приведения, совершающего вращательное движение с угловой скоростью  $\omega_M = \omega_1$ , определяется

следующим образом:  $T_{mod} = \frac{I_{\Sigma}^{np} \omega_1^2}{2}$ .

Звенья в плоских механизмах могут совершать три вида движения: поступательное, вращательное и плоское. Кинетическая энергия звена при поступательном движении:

$$T_i = \frac{m_i \cdot V_i^2}{2},$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го звена, кг;

$V_i$  – скорость  $i$ -го звена или любой его точки, м / с.

В случае вращательного движения вокруг оси  $A$ , кинетическая энергия звена:

$$T_i = \frac{I_{iA} \omega_i^2}{2},$$

где  $I_{iA}$  – момент инерции  $i$ -го звена относительно его оси вращения, кг · м<sup>2</sup>;

$\omega_i$  – угловая скорость  $i$ -го звена, с<sup>-1</sup>.

Если же будет задан центральный момент инерции звена  $I_{S_i}$ , то есть момент инерции звена относительно оси, проходящей через его центр масс, то кинетическая энергия вращающегося звена определится, как:

$$T_i = \frac{m_i V_{S_i}^2}{2} + \frac{I_{S_i} \omega_i^2}{2},$$

где  $V_{S_i}$  – линейная скорость центра масс  $i$ -го звена, м / с.

По этой же формуле определяется и кинетическая энергия звена, совершающего плоское движение. А на основании того, что простые движения (поступательное и вращательное) можно рассматривать как частные случаи плоского, формула может быть использована для всех трех случаев движения звена в плоскости. Подставив её в условие приведения масс, получим формулу для вычисления суммарного приведенного момента инерции:

$$I_{\Sigma}^{np} = \sum_{i=1}^n \left( m_i \left( \frac{V_{Si}}{\omega_1} \right)^2 + I_{Si} \left( \frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 \right).$$

Очевидно, что приведенный момент  $M_{\Sigma}^{np}$  и приведенный момент инерции  $I_{\Sigma}^{np}$  не зависят от угловой скорости звена приведения, так как в формулы для их определения входят только отношения скоростей. Отсюда следует, что приведение сил и масс можно выполнить, не зная угловой скорости звена приведения, а отношения скоростей могут быть представлены через соответствующие отрезки плана возможных скоростей, то есть плана скоростей, построенного без учета  $\mu_v$ .

Рассмотрим решения задач по приведению сил и масс плоских рычажных механизмов в общем виде (без расчетов), не останавливаясь подробно на построениях планов скоростей, поскольку эта тема уже была рассмотрена ранее (см. разделы 2, 4).

### **Задача 1**

На звенья рычажного механизма действуют силы  $\bar{F}_2, \bar{F}_3$  (Н) и момент сил  $M_2$  (Н·м), известные и по модулю и по направлению. Для заданного положения механизма ( $\mu_1 = \dots \frac{M}{mm}$ ) определить приведенный к входному звену (кривошипу I) момент от указанных силовых факторов (рис. 7.2).

### **Решение задачи 1**

Для решения этой задачи будем использовать условие приведения сил и моментов. Зададимся произвольно направлениями угловой скорости кривошипа  $\omega_1$  и приведенного момента  $M_{\Sigma}^{np}$  (см. рис. 7.2). Направим их в одну сторону (по часовой стрелке), чтобы знак мощности, развиваемой приведенным моментом  $M_{\Sigma}^{np}$ , был положительным. Если в результате решения задачи значение  $M_{\Sigma}^{np}$  получится положительным, то это означает, что направление момента было выбрано правильно. При отрицательном значении  $M_{\Sigma}^{np}$ , его направление должно быть изменено на противоположное.

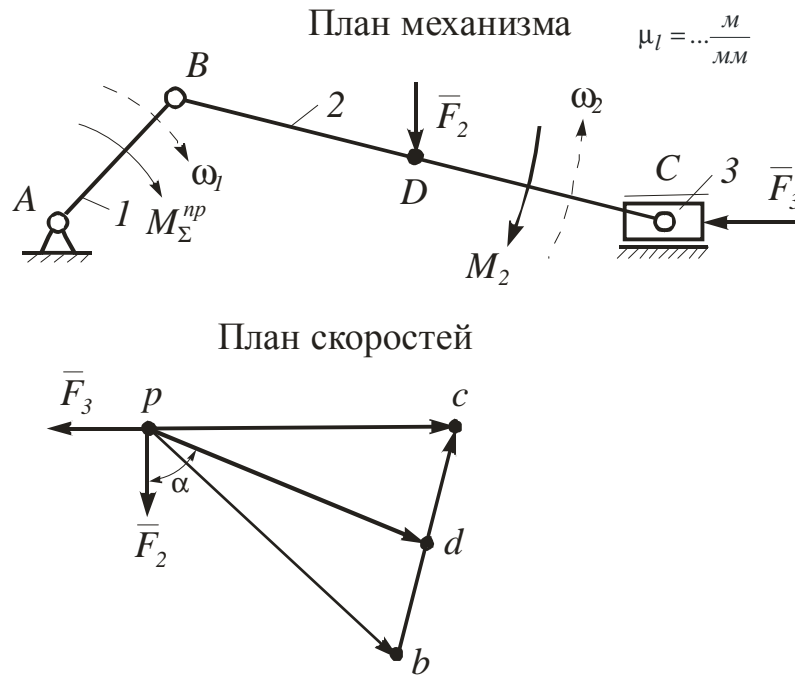


Рисунок 7.2 – План нагруженного механизма и план возможных скоростей

Запишем условие приведения сил и моментов:

$$P_{M_{\Sigma}^{np}} = P_{F_2} + P_{M_2} + P_{F_3}.$$

Подставив формулы мощностей сил и моментов, получим:

$$M_{\Sigma}^{np} \omega_1 = F_2 V_D \cos(\bar{F}_2 \wedge \bar{V}_D) \pm M_2 \omega_2 + F_3 V_C \cos(\bar{F}_3 \wedge \bar{V}_C).$$

Обозначив угол  $(\bar{F}_2 \wedge \bar{V}_D)$ , как  $\alpha$ , а угол  $(\bar{F}_3 \wedge \bar{V}_C)$ , как  $\beta$ , и разделив все слагаемые на  $\omega_1$ , получим формулу для определения приведенного момента:

$$M_{\Sigma}^{np} = F_2 \frac{V_D}{\omega_1} \cos \alpha \pm M_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} + F_3 \frac{V_C}{\omega_1} \cos \beta.$$

Чтобы найти неизвестные параметры в этой формуле (скорости, углы, знак мощности момента  $M_2$ ), построим план возможных скоростей (без учета  $\mu_v$ ), решив графически векторное уравнение  $\bar{V}_c = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}$  (см. рис. 7.2) и изобразив скорость  $\bar{V}_B$ , значение которой при неизвестном значении  $\omega_1$  также неизвестно, отрезком произвольной длины ( $pb$ ).

Используя построенный план скоростей, запишем формулы искомых кинематических параметров:

$$V_D = (pd)\mu_v; V_C = (pc)\mu_v; \omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{(bc)\mu_v}{(CB)\mu_l}; \omega_1 = \frac{V_B}{l_{AB}} = \frac{(pb)\mu_v}{(AB)\mu_l}$$

Мощность момента  $M_2$  отрицательна, т. к.  $M_2$  и  $\omega_2$  имеют противоположное направление (см. рис. 7.2). Для получения углов между векторами сил и скоростями точек их приложения (углов  $\alpha$  и  $\beta$ ), можно силы со схемы механизма перенести в полюс плана скоростей (см. рис. 7.2), после чего замерить соответствующие углы транспортиром (угол  $\beta$  можно и не замерять, так как очевидно, что  $\beta = 180^\circ$ ).

Подставив полученные результаты и сократив масштабные коэффициенты, получим окончательную формулу для приведенного момента:

$$M_{\Sigma}^{np} = F_2 \frac{(pd)(AB)\mu_l}{(pb)} \cos \alpha - M_2 \frac{(bc)(AB)}{(pb)(CB)} + F_3 \frac{(pc)(AB)\mu_l}{(pb)} \cos \beta = \dots H \cdot m.$$

Длины отрезков, изображающих звенья и скорости, необходимо измерять непосредственно на построенных планах механизма и скоростей, соответственно, и подставлять их в уравнение полученными значениями в миллиметрах.

Знак полученного приведенного момента будет свидетельствовать о правильности или ошибочности выбора его направления.

### Задача 2

Для заданного положения механизма (рис. 7.3) ( $\mu_l = \dots \frac{m}{mm}$ ) определить приведенный к входному звену (кривошипу 1) момент инерции, если известны массы звеньев  $m_i$  (кг) и их центральные моменты инерции  $I_{S_i}$  ( $кг \cdot м^2$ ).

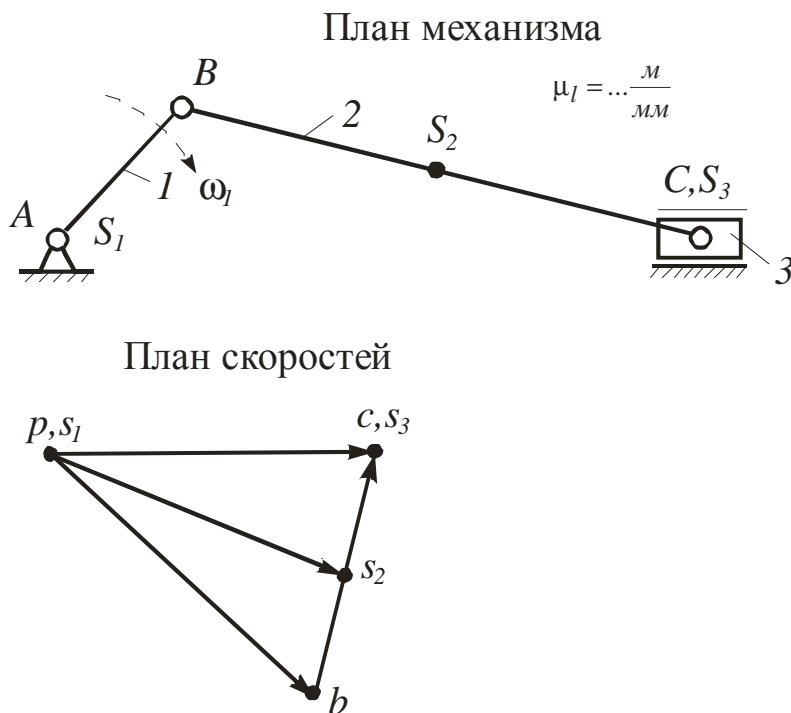


Рисунок 7.3 – План механизма и план возможных скоростей

## Решение задачи 2

Для решения этой задачи будем использовать условие приведения масс:

$$T_{\text{мод}} = \sum_{i=1}^3 T_i = T_1 + T_2 + T_3,$$

где  $T_{\text{мод}} = \frac{I_{\Sigma}^{np} \omega_1^2}{2}$  – кинетическая энергия модели (звена приведения);

$T_1 = \frac{I_{S_1} \omega_1^2}{2}$  – кинетическая энергия кривошипа (звена 1), совершающего вращательное движение;

$T_2 = \frac{m_2 V_{S_2}^2}{2} + \frac{I_{S_2} \omega_2^2}{2}$  – кинетическая энергия шатуна (звена 2), совершающего плоское движение;

$T_3 = \frac{m_3 \cdot V_{S_3}^2}{2}$  – кинетическая энергия ползуна (звена 3), совершающего поступательное движение.

Подставив эти формулы в условие приведения масс, получим:

$$\frac{I_{\Sigma}^{np} \omega_1^2}{2} = \frac{I_{S_1} \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_{S_2}^2}{2} + \frac{I_{S_2} \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_{S_3}^2}{2}.$$

Разделив все члены этого равенства на  $\omega_1^2$ , и помножив на 2, получим формулу для определения приведенного момента инерции:

$$I_{\Sigma}^{np} = I_{S_1} + m_2 \left( \frac{V_{S_2}}{\omega_1} \right)^2 + I_{S_2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left( \frac{V_{S_3}}{\omega_1} \right)^2.$$

Неизвестными в этой формуле являются кинематические параметры, и для их нахождения построим план возможных скоростей (без учета  $\mu_V$ ), произвольно задавшись направлением угловой скорости кривошипа  $\omega_1$  и решив графически векторное уравнение  $\overline{V_c}_{\parallel x-x} = \overline{V_B}_{\perp AB} + \overline{V_{CB}}_{\perp CB}$  (см. рис. 7.3). Скорость конца кривошипа  $\overline{V_B}$ , величина которой при неизвестном значении  $\omega_1$  также неизвестна, изобразим отрезком произвольной длины ( $pb$ ).

Используя построенный план скоростей, запишем формулы искомых кинематических параметров:

$$V_{S_2} = (ps_2)\mu_V; V_{S_3} = (ps_3)\mu_V; \omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{(bc)\mu_V}{(CB)\mu_1}; \omega_1 = \frac{V_B}{l_{AB}} = \frac{(pb)\mu_V}{(AB)\mu_1}.$$



Подставив полученные выражения и сократив масштабные коэффициенты, получим окончательную формулу для приведенного момента инерции:

$$I_{\Sigma}^{np} = I_{S_1} + m_2 \left( \frac{(ps_2)(AB)\mu_l}{(pb)} \right)^2 + I_{S_2} \left( \frac{(bc)(AB)}{(pb)(CB)} \right)^2 + m_3 \left( \frac{(ps_3)(AB)\mu_l}{(pb)} \right)^2 = \dots \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$$

Длины отрезков, изображающих звенья и скорости, необходимо измерять непосредственно на построенных планах механизма и скоростей, соответственно, и подставлять их в уравнение полученными значениями в миллиметрах.

## **8 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЯДОВЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ И ПРОСТЫХ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

*Цель практического занятия:* научиться определять передаточные отношения рядовых и планетарных зубчатых механизмов, и используя их, определять величины и направления частот вращения звеньев механизмов, а также научиться рассчитывать подвижность зубчатых механизмов и межосевые расстояния передач.

*Литература к занятию:* [1, с. 137, 138, 145–158; 2, с. 167–171, 207–214; 3, с. 52–55; 4, с. 334, 335, 362, 379–387].

*Краткие теоретические сведения и указания к решению задачи 1 по теме занятия*

Основным кинематическим параметром любого зубчатого механизма является его передаточное отношение, которое определяется как отношение частоты вращения (или угловой скорости) входного вала к частоте вращения (или угловой скорости) выходного вала.

Простейший трехзвенный зубчатый механизм, состоящий из двух зубчатых колес и стойки, называется одноступенчатым механизмом или одноступенчатой передачей. Одноступенчатые цилиндрические передачи внешнего и внутреннего зацепления относятся к плоским зубчатым механизмам, предназначенным для передачи вращения между параллельными валами. К пространственным механизмам относится одноступенчатая коническая передача, у которой оси валов пересекаются. Передаточное отношение одноступенчатого зубчатого механизма можно определить и через числа зубьев колёс:

$$U_{1-2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – частоты вращения колёс 1 и 2,  $\text{мин}^{-1}$ ;

$\omega_1$  и  $\omega_2$  – угловые скорости колёс 1 и 2,  $\text{с}^{-1}$ ;

$z_1$  и  $z_2$  – числа зубьев колёс 1 и 2.

Знак передаточного отношения зависит от направления вращения колёс. Так как при внешнем зацеплении угловые скорости колёс имеют различное направление, то у передачи внешнего зацепления передаточное отношение всегда отрицательное. У передачи же внутреннего зацепления колёса вращаются в одну сторону, поэтому знак передаточного отношения – положительный. Передаточное отношение конической передачи знака не имеет, так как он теряет смысл из-за пересечения осей колёс.

Рассмотренные одноступенчатые зубчатые механизмы не могут обеспечить большие передаточные отношения, если же необходимо воспроизвести значительные передаточные отношения, то применяются многоступенчатые рядовые механизмы. Рядовыми называются механизмы, у которых оси вращения колёс неподвижны в пространстве. Передаточное отношение многоступенчатого рядового зубчатого механизма определяется, как произведение передаточных отношений его отдельных ступеней.

Подвижность рядового зубчатого механизма определяется по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4,$$

где  $n$  – количество подвижных звеньев (при этом нужно учитывать, что число  $n$  не равно числу зубчатых колёс, т. к. два колеса, соединенные общей осью, образуют одно подвижное звено);

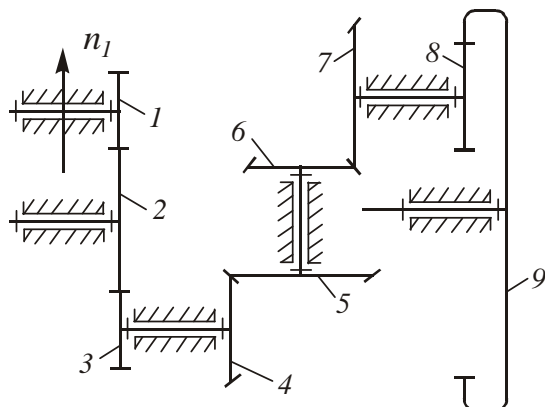
$p_5$  – количество кинематических пар (КП) V класса (все они вращательные);

$p_4$  – количество КП IV класса (эти пары имеют место в зацеплении зубчатых колёс).

При решении задачи по кинематическому анализу многоступенчатого рядового зубчатого механизма, необходимо уметь определять направления вращения колёс используя правило стрелок: прямая стрелка на боковой проекции колеса показывает направление движения зубьев колеса, видимых наблюдателю.

Кроме того, необходимо уметь определять межосевые расстояния для цилиндрических передач внешнего и внутреннего зацепления через радиусы колёс, образующих эти передачи. При этом колёса нужно считать нулевыми, т. е. нарезанными без смещения режущего инструмента, а это означает, что радиусы начальных и делительных окружностей у них совпадают и будут равны:  $r_{wi} = r_i = \frac{mz_i}{2}$ .

### Задача 1



$$z_1 = 17; z_2 = 20; z_3 = 51; z_4 = 25;$$

$$z_5 = 50; z_6 = 20; z_7 = 40; z_8 = 15; z_9 = 60 \text{ зубчатых колес } m = 4 \text{ мм.}$$

Определить величины и направления частот вращения вала 5-го колеса и выходного вала 9 зубчатого механизма, если частота вращения входного вала  $n_1 = 1000 \text{ мин}^{-1}$  (направления вращения колёс показать по правилу стрелок). Определить подвижность механизма  $W$  и межосевые расстояния  $a_{w_{1-2}}$  и  $a_{w_{8-9}}$ , если модуль всех

### Решение задачи 1

Механизм имеет пять ступеней. Из них две ступени внешнего зацепления (1–2, 2–3), одна ступень внутреннего зацепления (8–9), и две конические передачи (4–5, 6–7).

Определим передаточное отношение многоступенчатого рядового зубчатого механизма  $U_{1-9}$ , как произведение передаточных отношений его отдельных ступеней. При этом не будем учитывать знаки этих передаточных отношений (т. к. в рассматриваемом механизме имеются ступени с коническими колёсами, то, следовательно, знаки теряют смысл), а направления вращения всех колёс определим по правилу стрелок (рис. 8.1).

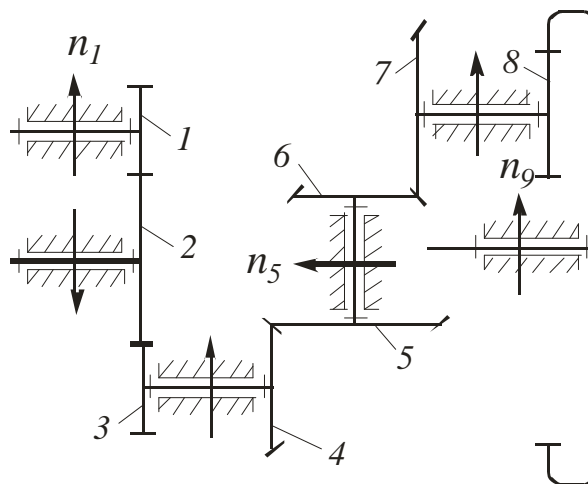


Рисунок 8.1 – Схема многоступенчатого рядового зубчатого механизма

По определению передаточного отношения  $U_{1-9} = \frac{n_1}{n_9}$ ,

где, как видно из схемы механизма,

$$U_{1-9} = U_{1-2} \cdot U_{2-3} \cdot U_{4-5} \cdot U_{6-7} \cdot U_{8-9} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_5}{z_4} \cdot \frac{z_7}{z_6} \cdot \frac{z_9}{z_8} = \frac{20}{17} \cdot \frac{51}{20} \cdot \frac{50}{25} \cdot \frac{40}{20} \cdot \frac{60}{15} = 48$$

Тогда частота вращения выходного вала 9:

$$n_9 = \frac{n_1}{U_{1-9}} = \frac{1000}{48} = 20,83 \text{ мин}^{-1}.$$

Аналогично определим передаточное отношение от входного вала 1-го колеса к валу 5-го зубчатого колеса:

$$U_{1-5} = \frac{n_1}{n_5},$$

$$\text{где } U_{1-5} = U_{1-2} \cdot U_{2-3} \cdot U_{4-5} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_5}{z_4} = \frac{20}{17} \cdot \frac{51}{20} \cdot \frac{50}{25} = 6.$$

Тогда частота вращения вала 5-го колеса:

$$n_5 = \frac{n_1}{U_{1-5}} = \frac{1000}{6} = 166,7 \text{ мин}^{-1}.$$

Направления вращения колёс показаны на схеме механизма прямыми стрелками.

Определим межосевое расстояние  $a_{w1-2}$  для цилиндрической ступени внешнего зацепления:

$$a_{w1-2} = r_{w1} + r_{w2} = r_1 + r_2 = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{4 \cdot 17}{2} + \frac{4 \cdot 20}{2} = 74 \text{ мм}.$$

Межосевое расстояние  $a_{w8-9}$  для цилиндрической ступени внутреннего зацепления:

$$a_{w8-9} = r_{w9} - r_{w8} = r_9 - r_8 = \frac{mz_9}{2} - \frac{mz_8}{2} = \frac{4 \cdot 60}{2} - \frac{4 \cdot 15}{2} = 90 \text{ мм}.$$

Подвижность зубчатого механизма определим по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 5 = 1,$$

где  $n = 6$  – количество подвижных звеньев;

$p_5 = 6$  – количество КП V класса;

$p_4 = 5$  – количество КП IV класса.

**Ответ:**  $n_9 = 20,83 \text{ мин}^{-1}$ ;  $n_5 = 166,7 \text{ мин}^{-1}$ ;  $a_{w1-2} = 74 \text{ мм}$ ;

$a_{w8-9} = 90 \text{ мм}$ ;  $W = 1$ .

*Краткие теоретические сведения и указания к решению задачи 2 по теме занятия*

Если возникает необходимость в передаче вращения с большим передаточным отношением, но при малых габаритах передачи, то применяют планетарные механизмы.

Планетарными называют зубчатые механизмы с подвижностью  $W = 1$ , содержащие колёса с перемещающимися в пространстве геометрическими осями, в отличие от рядовых зубчатых механизмов, которые содержат только колёса с неподвижными осями.

Все простейшие планетарные механизмы содержат:

- одно или два колеса, жестко соединённых друг с другом, с подвижной геометрической осью, которые называют в первом случае сателлитом, во втором – сателлитным блоком;
- специальный рычаг  $H$ , на котором располагаются подвижные оси сателлитов или сателлитных блоков, и который называется водилом;
- два колеса с осями, совпадающими с осью вращения водила, которые называют центральными. Одно из центральных колёс в планетарных механизмах – неподвижное.

Сателлиты и сателлитные блоки участвуют в двух вращениях – вокруг собственной оси относительно водила, и вместе с водилом вокруг центральной оси механизма. Оба центральных колеса зацепляются с сателлитом или с колёсами сателлитного блока. При этом все рассматриваемые механизмы содержат два зацепления колёс (две ступени).

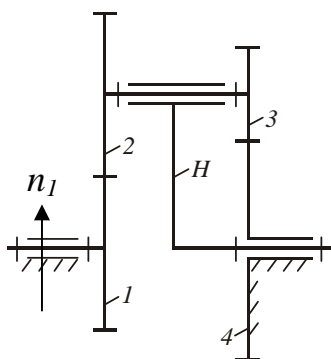
Для определения передаточного отношения планетарного механизма применяют метод обращения движения, заключающийся в следующем: всем звеньям механизма условно сообщают дополнительное вращение вокруг центральной оси с частотой вращения водила, но противоположного направления ( $n = -n_H$ ). Относительное движение звеньев при этом не нарушится, но водило остановится, а центральное колесо, которое было неподвижным, станет подвижным, то есть механизм превратится в двухступенчатый рядовой, который называют обращенным.

Чтобы различать, к какому из механизмов (исходному планетарному или соответствующему ему обращенному) относятся соответствующие параметры, принято приписывать им верхний индекс, равный номеру или обозначению неподвижного звена. Передаточное отношение обращенного механизма имеет индекс ( $H$ ), который показывает, что водило  $H$  условно неподвижно. Для исходных планетарных механизмов указанные индексы часто опускают.

Передаточное отношение планетарного механизма от подвижного центрального колеса к водилу равно разности между единицей и передаточным отношением соответствующего обращенного механизма от этого же центрального колеса к тому колесу, которое в планетарном механизме было неподвижным. При этом, определяя передаточное отношение обращенного механизма, необходимо обязательно учитывать знаки передаточных отношений ступеней, входящих в состав планетарного механизма.

При решении задачи по кинематическому анализу планетарного механизма, необходимо также уметь определять его подвижность по формуле Чебышева и помнить, что прямые стрелки, показывающие направления вращения звеньев, внутри планетарного механизма изображать нельзя, а направление вращения выходного звена определять знаком передаточного отношения планетарного механизма в зависимости от направления вращения входного звена.

Кроме того, необходимо уметь определять недостающее число зубьев колёс планетарного механизма, используя условие соосности, заключающееся в том, что геометрические оси центральных колёс и водила должны совпадать, для чего должны быть равны межосевые расстояния обеих ступеней планетарного механизма. Эти ступени могут быть либо внешнего, либо внутреннего зацепления. Следовательно, необходимо уметь определять межосевые расстояния для цилиндрических передач внешнего и внутреннего зацепления через радиусы колёс, образующих эти передачи, считая их при этом нулевыми.



### Задача 2

Определить величину и направление частоты вращения выходного звена планетарного механизма (водила), если частота вращения входного вала  $n_1 = 1000 \text{ мин}^{-1}$ .

Определить подвижность механизма  $W$  и недостающее число зубьев колеса 2.

$$z_1 = 25; z_3 = 19; z_4 = 38.$$

### Решение задачи 2

Планетарный механизм содержит центральные колёса 1, 4, одно из которых (колесо 4) неподвижно, сателлитный блок колёс 2, 3 и водило  $H$ . Входным звеном механизма является центральное колесо 1, а выходным – водило  $H$ .

Подвижность планетарного механизма определим по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1,$$

где  $n = 3$  – количество подвижных звеньев;

$p_5 = 3$  – количество КП V-го класса;

$p_4 = 2$  – количество КП IV-го класса.

Недостающее число зубьев колеса 2, определим из условия соосности планетарного механизма, приравняв межосевые расстояния обеих ступеней механизма:  $a_{w_{1,2}} = a_{w_{3,4}}$ .

Так как обе ступени планетарного механизма представляют собой цилиндрические передачи внешнего зацепления, то  $r_{w_2} + r_{w_1} = r_{w_4} + r_{w_3}$ .

Все колёса механизма нарезаны без смещения режущего инструмента (нулевые) и имеют одинаковый модуль. При этом начальные окружности колес зубчатых пар совпадают с делительными  $r_{w_i} = r_i = mz_i/2$ , и условие соосности принимает вид:  $z_2 + z_1 = z_4 + z_3$ .

Отсюда недостающее число зубьев колеса 2:

$$z_2 = z_4 + z_3 - z_1 = 38 + 19 - 25 = 32.$$

Определим передаточное отношение планетарного механизма, используя метод обращения движения:  $U_{1-H} = 1 - U_{1-4}^{(H)}$ , где  $U_{1-4}^{(H)}$  – передаточное отношение соответствующего обращенного механизма. Обращенный механизм представляет собой рядовой двухступенчатый механизм, обе ступени которого – цилиндрические передачи внешнего зацепления. Следовательно:

$$U_{1-H} = 1 - U_{1-4}^{(H)} = 1 - U_{1-2}^{(H)} U_{3-4}^{(H)} = 1 - \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \left( -\frac{z_4}{z_3} \right) = 1 - \left( -\frac{32}{25} \right) \left( -\frac{38}{19} \right) = -1,56.$$

По определению передаточного отношения  $U_{1-H} = \frac{n_1}{n_H}$ . Следовательно, частота вращения выходного звена планетарного механизма – водила:

$$n_H = \frac{n_1}{U_{1-H}} = \frac{1000}{-1,56} = -641 \text{ мин}^{-1}.$$

Поскольку знак передаточного отношения  $U_{1-H}$  отрицательный, то это означает, что выходное звено планетарного механизма (водило  $H$ ) вращается в сторону, противоположную направлению вращения входного звена (колеса  $1$ ). Покажем направление вращения водила на схеме механизма прямой стрелкой (рис. 8.2).

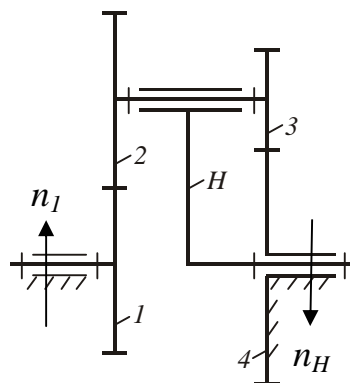


Рисунок 8.2 – Схема планетарного зубчатого механизма

**Ответ:**  $W = 1$ ;  $z_2 = 32$ ;  $n_H = -641 \text{ мин}^{-1}$ .

## 9 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

*Цель практического занятия:* научиться определять передаточные отношения сложных многоступенчатых зубчатых механизмов, и используя их, определять величины и направления частот вращения выходных звеньев механизмов по заданным параметрам входных.

*Литература к занятию:* [1, с. 158,159; 2, с. 215, 216].

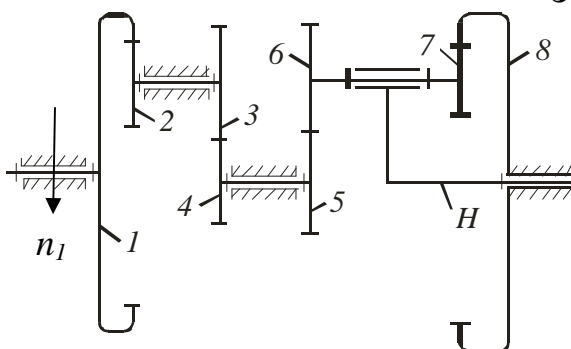
*Краткие теоретические сведения и указания к решению задач по теме занятия*

Сложные многоступенчатые зубчатые механизмы – это механизмы, в состав которых входят различные виды зубчатых передач. Будем рассматривать механизмы, состоящие из последовательно соединенных планетарных и простых рядовых передач.

Для определения передаточного отношения сложного многоступенчатого механизма необходимо сначала проанализировать его структуру, выделив при этом планетарную передачу и отдельные ступени рядовой передачи, а затем рассчитать передаточное отношение механизма, как произведение передаточных отношений ступеней рядовой передачи и планетарной передачи.

При решении задачи по кинематическому анализу сложного многоступенчатого зубчатого механизма, необходимо также уметь определять его подвижность по формуле Чебышева, использовать условие соосности для определения недостающего числа зубьев колёс планетарной передачи, и уметь показать направления вращения колёс. При этом направление вращения выходного звена планетарной передачи определяется направлением вращения входного звена и знаком передаточного отношения передачи, а направления вращения колёс рядовой передачи можно определить, используя правило стрелок.

### Задача



Определить величину и направление частоты вращения выходного звена сложного зубчатого механизма, если частота вращения входного вала  $n_1 = 1500 \text{ мин}^{-1}$ . Определить подвижность механизма  $W$  и недостающее число зубьев колеса 7.

$$z_1 = 80; z_2 = 20; z_3 = 25; z_4 = 30;$$

$$z_5 = 40; z_6 = 60; z_8 = 120.$$



### Решение задачи

Механизм состоит из двухступенчатой рядовой передачи, содержащей колёса 1, 2, 3, 4, и последовательно соединенной с ней планетарной передачи, содержащей центральные колёса 5, 8, одно из которых (колесо 8) неподвижно, сателлитный блок колёс 6, 7 и водило  $H$ . Входным звеном механизма является колесо 1, а выходным – водило  $H$ .

Подвижность сложного зубчатого механизма определим по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 4 = 1,$$

где  $n = 5$  – количество подвижных звеньев;

$p_5 = 5$  – количество КП V-го класса;

$p_4 = 4$  – количество КП IV-го класса.

Недостающее число зубьев колеса 7, определим из условия соосности планетарной передачи, приравняв межосевые расстояния её обеих ступеней:

$$a_{w_{5,6}} = a_{w_{7,8}}.$$

Так как ступень 5–6 планетарного механизма представляет собой цилиндрическую передачу внешнего зацепления, а ступень 7–8 цилиндрическую передачу внутреннего зацепления, то:  $r_{w_5} + r_{w_6} = r_{w_8} - r_{w_7}$ .

Все колёса механизма нарезаны без смещения режущего инструмента (нулевые) и имеют одинаковый модуль, следовательно, условие соосности принимает вид:  $z_5 + z_6 = z_8 - z_7$ .

Отсюда недостающее число зубьев колеса 7:

$$z_7 = z_8 - z_5 - z_6 = 120 - 40 - 60 = 20.$$

Определим передаточное отношение планетарной передачи, используя метод обращения движения:

$$U_{5-H} = 1 - U_{5-8}^{(H)},$$

где  $U_{5-8}^{(H)}$  – передаточное отношение соответствующего обращенного механизма. Обращенный механизм представляет собой рядовой двухступенчатый механизм, одна ступень которого – цилиндрическая передача внешнего зацепления, а другая – внутреннего. Следовательно:

$$U_{5-H} = 1 - U_{5-8}^{(H)} = 1 - U_{5-6}^{(H)} U_{7-8}^{(H)} = 1 - \left( -\frac{z_6}{z_5} \right) \left( \frac{z_8}{z_7} \right) = 1 - \left( -\frac{60}{40} \right) \left( \frac{120}{20} \right) = 10.$$

Поскольку знак передаточного отношения  $U_{5-H}$  положительный, то это означает, что выходное звено планетарной передачи (водило) вращается в ту же сторону, что и входное звено (колесо 5).

Общее передаточное отношение сложного многоступенчатого механизма определим, как произведение передаточных отношений двух ступеней рядовой передачи и планетарной передачи. При этом так как в состав механизма не входят конические передачи, то будем учитывать знаки передаточных отношений ступеней рядовой передачи:

$$U_{1-H} = U_{1-2} \cdot U_{3-4} \cdot U_{5-H} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \cdot U_{5-H} = \frac{20}{80} \cdot \left(-\frac{30}{25}\right) \cdot 10 = -3.$$

Отрицательный знак передаточного отношения  $U_{1-H}$  свидетельствует о том, что выходное звено сложного многоступенчатого механизма (водило  $H$ ) вращается в сторону, противоположную направлению вращения входного звена механизма (колеса  $1$ ). Это можно проверить, используя правило стрелок (рис. 8.2).

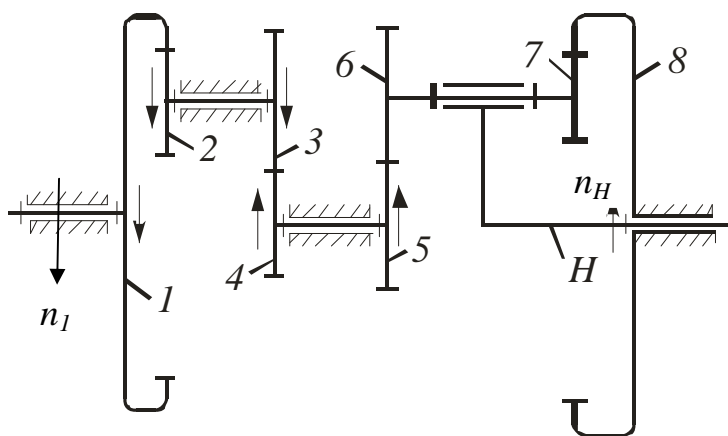


Рисунок 8.2 – Схема сложного многоступенчатого зубчатого механизма

По определению передаточного отношения  $U_{1-H} = \frac{n_1}{n_H}$ . Следовательно, частота вращения выходного звена сложного многоступенчатого механизма – водила  $H$ :

$$n_H = \frac{n_1}{U_{1-H}} = \frac{1500}{-3} = -500 \text{ мин}^{-1}.$$

**Ответ:**  $W = 1$ ;  $z_7 = 20$ ;  $n_H = -500 \text{ мин}^{-1}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Артоболевский, И. И.** Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1988. – 640 с.
- 2 **Кіницький, Я. Т.** Короткий курс теорії механізмів і машин / Я. Т. Кіницький. – Львів : Афіша, 2004. – 272 с.
- 3 **Левитская, О. Н.** Курс теории механизмов и машин / О. Н. Левитская, Н. И. Левитский. – М. : Высшая школа, 1985. – 280 с.
- 4 Теория механизмов и машин / К. В. Фролов [и др.] ; под ред. К. В. Фролова. – М. : Высшая школа, 2001. – 496 с.
- 5 Методические указания к выполнению расчетно-графических и контрольных работ по дисциплинам «Теория механизмов и машин» и «Прикладная механика» для студентов всех специальностей дневного и заочного обучения. Кинематический анализ рычажных механизмов методом планов / сост. : В. А. Загудаев, В. Е. Шоленинов. – Краматорск : ДГМА, 2007. – 68 с.
- 6 Кинематический и силовой анализ рычажного механизма : методическое пособие к выполнению курсовой работы по дисциплине «Прикладная механика и основы конструирования» для студентов всех форм обучения / сост. : В. А. Загудаев, С. Н. Зинченко, Н. И. Кинденко, Д. В. Завгородний. – Краматорск : ДГМА, 2009. – 52 с.

*Навчальне видання*

## **ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН**

**Методичні вказівки  
до проведення практичних занять**

**для студентів технічних спеціальностей  
всіх форм навчання**

*(Російською мовою)*

Укладач

ЧОСТА Наталія Вікторівна

За авторським редагуванням

Комп'ютерне верстання

О. М. Болкова

26/2015. Формат 60 × 84/16. Ум. друк. арк. 1,56.  
Обл.-вид. арк. 1,14. Тираж 2 пр.

Видавець і виготівник  
Донбаська державна машинобудівна академія  
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК №1633 від 24.12.2003