

Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

# **ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН**

**Методичні вказівки  
до проведення практичних занять  
для студентів технічних спеціальностей  
всіх форм навчання**

Краматорськ  
ДДМА  
2018

Теорія механізмів і машин : методичні вказівки до проведення практичних занять для студентів технічних спеціальностей всіх форм навчання / уклад. Н. В. Чоста. – Краматорськ : ДДМА, 2018. – 58 с.

Наведено тему, мету й зміст кожного практичного заняття з дисципліни «Теорія механізмів і машин», вказівки до рішення задач і приклади їх рішення.

Призначені для надання допомоги студентам технічних спеціальностей всіх форм навчання при самостійному вивченні матеріалів практичних занять з дисципліни «Теорія механізмів і машин».

Укладач

Н. В. Чоста, доц.

Відповідальний за випуск

С. Г. Карнаух, доц.

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Вступ .....                                                                                                                                       | 4  |
| 1 Структурний аналіз механізмів маніпуляторів і промислових роботів .....                                                                         | 5  |
| 2 Кінематичний аналіз плоских важільних механізмів методом побудови планів швидкостей .....                                                       | 9  |
| 3 Кінематичний аналіз плоских важільних механізмів методом побудови планів прискорень, визначення інерційних навантажень на ланки механізму ..... | 15 |
| 4 Особливості побудови планів швидкостей і прискорень для кулісних механізмів .....                                                               | 22 |
| 5 Визначення зрівноважувального моменту важільного механізму методом М. Є. Жуковського .....                                                      | 28 |
| 6 Визначення коефіцієнта корисної дії машини, а також потужності двигуна для її привода .....                                                     | 33 |
| 7 Приведення сил і мас плоских важільних механізмів, визначення параметрів динамічної моделі .....                                                | 37 |
| 8 Кінематичний аналіз рядових зубчастих механізмів і простих планетарних механізмів аналітичним методом .....                                     | 46 |
| 9 Кінематичний аналіз складних багатоступінчастих зубчастих механізмів аналітичним методом .....                                                  | 54 |
| Список літератури .....                                                                                                                           | 57 |

## ВСТУП

Теорія механізмів і машин (ТММ) – це наука, що вивчає загальні методи структурного, кінематичного й динамічного аналізу та синтезу різних механізмів і машин. Ці методи придатні для проектування будь-яких механізмів і не залежать від їх призначення або від фізичної природи робочих процесів машин. Самостійне рішення на практичних заняттях індивідуальних конкретних задач із різних розділів курсу дозволяє студентам засвоїти ці методи й підготуватися до проектування або аналізу нових механізмів і машин.

Мета практикуму – навчити майбутніх інженерів застосовувати загальні методи аналізу й синтезу механізмів для створення високопродуктивних, надійних і економічних машин. У результаті виконання індивідуальних задач на практичних заняттях студенти повинні:

- вивчити основні поняття й термінологію, що використовуються в курсі теорії механізмів і машин;
- виконувати структурний аналіз механізмів;
- придбати навички в побудові й використанні кінематичних схем механізмів;
- опанувати методами кінематичного дослідження механізмів шляхом побудови планів швидкостей і прискорень;
- навчитися визначати зрівноважувальний момент методом М. Є. Жуковського;
- навчитися визначати коефіцієнт корисної дії (ККД) машин при різних способах з'єднання в них механізмів;
- засвоїти методику визначення параметрів динамічних моделей механізмів;
- вивчити параметри простих і складних зубчастих передач, навчитися виконувати їх кінематичний аналіз.

При самостійному вивченні матеріалу практичних занять необхідна наявність літератури, зазначеної до кожного практичного заняття.

# 1 СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ МАНІПУЛЯТОРІВ І ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ

*Мета практичного заняття:* навчитися за заданою схемою механізму маніпулятора визначати його будову, розраховувати основні характеристики маніпулятора й формулювати відповідні висновки.

*Література до заняття:* [1] с. 34–37, 47–52, 611–625; [2] с. 12–20, 263–267; [3] с. 12–17, 25–28, 262–272.

*Короткі теоретичні відомості й вказівки до рішення задач за темою заняття.*

Маніпулятором називають технічний пристрій, призначений для відтворення робочих функцій людини.

Промисловими роботами (ПР) називають маніпулятори, оснащені органами переміщення й системами автоматичного керування.

Основним виконавчим механізмом маніпулятора й ПР є просторовий незамкнений кінематичний ланцюг, що включає тільки кінематичні пари III, IV і V класів (рис. 1.1):



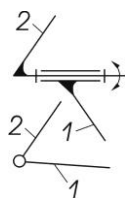
*сферичний шарнір III класу*



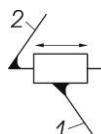
*сферичний шарнір з пальцем IV класу*



*циліндрична пара IV класу*



*обертова пара V класу*



*поступальна пара V класу*

*Рисунок 1.1 – Умовні позначення кінематичних пар*

Далі розглянемо основні характеристики маніпулятора, які можна повною мірою віднести й до ПР.

Оскільки основний виконавчий механізм просторовий, то рухомість маніпулятора визначається за формулою Сомова-Малишева:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1,$$

де  $n$  – кількість рухомих ланок;

$p_1, p_2, \dots, p_5$  – число кінематичних пар I, II, ... V класів, відповідно.

Оскільки механізм маніпулятора являє собою кінематичний ланцюг, що включає тільки кінематичні пари III, IV і V класів, то  $p_2 = p_1 = 0$ . Тому ці складові можна з формули  $W$  просто виключити, і для визначення рухомості маніпулятора використовувати скорочену формулу:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3.$$

Оскільки, по визначенню, маневреність маніпулятора – це його рухомість при закріпленій (нерухомій) вихідній ланці – захваті, то формула для визначення величини маневреності набуває такого вигляду:

$$M = 6(n - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3.$$

Якщо відкрити дужки, то можна одержати спрощену формулу для визначення маневреності маніпулятора через його рухомість:

$$M = W - 6.$$

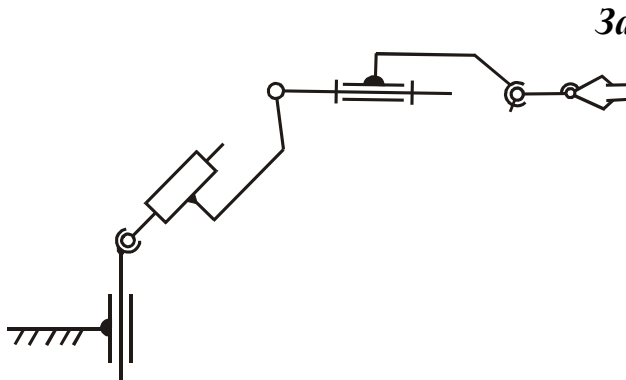
Рухомість (число  $W$ ) відповідає кількості джерел руху (тобто двигунів або приводів), необхідних для повної визначеності руху всіх ланок маніпулятора.

Маневреність (число  $M$ ) характеризує можливість обходу маніпулятором перешкод в робочій зоні і його здатність до виконання складних операцій. При цьому, якщо  $M \leq 0$ , то маніпулятор маневреності не має, а це означає, що в дану точку робочої зони його захват може потрапити тільки при одному взаємному розташуванні всіх ланок даного маніпулятора.

Якщо  $M = 1$ , то маніпулятор має можливість маневру з обходу перешкод у просторі. Якщо ж  $M \geq 2$ , то маніпулятор має високу маневреність.

При рішенні задач за темою заняття, у першу чергу, необхідно на схемі маніпулятора пронумерувати арабськими цифрами всі ланки, починаючи від нерухомої (нульової) ланки – стояка 0, і послідовно рухаючись до останньої вихідної ланки – захвату. Після цього всі кінематичні пари, що з'єднують окремі ланки, позначити великими літерами латинського ал-

фавіту, і поруч із позначенням кожної кінематичної пари указати в дужках її клас (римськими цифрами). Потім проаналізувати пари, вказавши номери ланок, що з'єднуються, клас і назву кожної пари, визначити рухомість  $W$  і маневреність  $M$  маніпулятора, зробити необхідні висновки.



### Задача.

Позначити всі ланки й кінематичні пари маніпулятора, дати назви всіх кінематичних пар і вказати їх класи. Визначити рухомість  $W$  і маневреність  $M$  маніпулятора, зробити висновок про необхідну кількість джерел руху й можливостях його маневру.

### Рішення задачі.

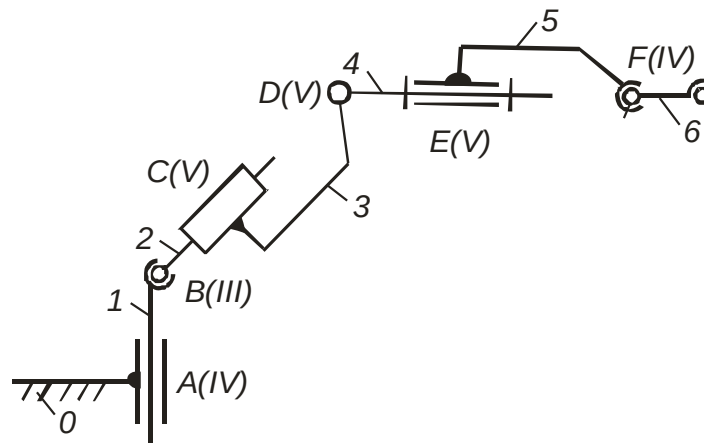


Рисунок 1.2 – Структурна схема механізму маніпулятора

Накреслимо структурну схему механізму маніпулятора й на ній пронумеруємо всі ланки та позначимо всі кінематичні пари, даючи їм прийняті в ТММ назви й указуючи їх класи (рис. 1.2).

Проаналізуємо кінематичні пари даного маніпулятора:

$A$  (0-1) – циліндрична кінематична пара IV класу (тут і далі поруч із літерним позначенням кінематичної пари, у дужках стоять номери ланок, що утворюють дану кінематичну пару);

$B$  (1-2) – сферична кінематична пара III класу;

$C$  (2-3) – поступальна кінематична пара V класу;

$D$  (3-4) – обертова кінематична пара V класу;

$E$  (4-5) – обертова кінематична пара V класу;

$F$  (5-6) – сферична з пальцем кінематична пара IV класу.

Визначимо рухомість маніпулятора за скороченою формулою Сомова-Малишева:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 10,$$

де  $n = 6$  – кількість рухомих ланок;

$p_5 = 3$  – кількість кінематичних пар V класу;

$p_4 = 2$  – кількість кінематичних пар IV класу;

$p_3 = 1$  – кількість кінематичних пар III класу.

Визначимо маневреність маніпулятора:

$$M = 6(n - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 6(6 - 1) - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4.$$

**Відповідь:**  $W = 10$ ;  $M = 4$ . Висновок: для роботи даного маніпулятора необхідно 10 джерел руху й він має високу маневреність.



## 2 КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ МЕТОДОМ ПОБУДОВИ ПЛАНІВ ШВИДКОСТЕЙ

*Мета практичного заняття:* навчитися за заданою кінематичною схемою механізму, записати векторні рівняння швидкостей, вирішити їх графічно, побудувавши план швидкостей, і визначити, в результаті, швидкості точок, а також величини й напрямки кутових швидкостей ланок механізму.

*Література до заняття:* [1] с. 79–83, 87, 92–94; [2] с. 39–51, 53–55, 60–62; [3] с. 31–38; [4] с. 67, 95–102; [5] с. 4–6, 12–24, 46–52, 56; [6] с. 4–9.

*Короткі теоретичні відомості й вказівки до рішення задач за темою заняття.*

При дослідженні руху механізмів, досить точним і зручним у практичному застосуванні є графоаналітичний метод, що базується на побудові планів швидкостей і прискорень, які представляють собою графічне рішення векторних рівнянь, відомих з курсу теоретичної механіки. Всі ці рівняння мають однакову конструкцію: зв'язують шукану швидкість (або прискорення) однієї точки механізму з відомою швидкістю (або прискоренням) іншої його точки.

Планом швидкостей (або прискорень) механізму називається масштабна побудова, в якій вектори абсолютних швидкостей (або прискорень) точок механізму виходять із однієї точки, що називається полюсом плану, а відрізки, які з'єднують кінці цих векторів, зображують відносні швидкості (або прискорення) точок. Полюс плану швидкостей прийнято позначати буквою  $p$ , а полюс плану прискорень –  $\pi$ . Полюс відображає всі нерухомі точки механізму.

При виконанні кінематичного аналізу користуються поняттям масштабного коефіцієнта, що має певну розмірність. Масштабним коефіцієнтом деякої фізичної величини називається відношення дійсного значення даної величини (у властивих їй одиницях) до довжини відрізка (у міліметрах), що зображує цю величину на кресленні. Позначається він буквою  $\mu$  з індексом тієї величини, що зображена графічно. Наприклад, при побудові кінематичних схем механізмів у ТММ застосовується масштабний коефіцієнт довжини  $\mu_l$ :

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{(AB)},$$

де  $l_{AB}$  – дійсна довжина деякої ланки  $AB$  механізму, м;  
 $(AB)$  – довжина відрізка, що зображує цю ланку на схемі, мм.

Графічне зображення кінематичної схеми механізму, що відповідає заданому положенню його вхідної ланки (кривошипа), називається планом механізму. Саме з його побудови починається рішення задачі.

Розрахунок швидкостей (або прискорень) точок механізму починають із визначення швидкості (або прискорення) тієї точки вхідної ланки, що є центром обертової кінематичної пари, яка зв'язує вхідну ланку (кривошип 1) з наступною рухомою ланкою механізму (ланкою 2).

При побудові планів швидкостей (або прискорень) виконується графічне рішення векторних рівнянь, у процесі якого застосовується геометричне додавання векторів. Кінці векторів швидкостей  $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C, \dots$  (або прискорень  $\vec{a}_A, \vec{a}_B, \vec{a}_C, \dots$ ) точок  $A, B, C, \dots$  механізму прийнято на планах швидкостей (або прискорень) позначати однойменними малими літерами  $a, b, c, \dots$ . Це дозволяє не проставляти на планах літерні позначення векторів, щоб не загроможувати креслення.

Основні векторні рівняння швидкостей складаються для внутрішніх точок структурних груп, розглянутих у порядку їхнього приєднання при утворенні механізму. При виборі точок для складання основних векторних рівнянь треба керуватися наступним:

- обрана точка механізму і якась інша його точка, із уже відомою швидкістю, повинні або належати одній й тій самій ланці, або збігатися одна з одною і належати різним ланкам, з'єднаним поступальною парою (кулісні механізми);

- швидкість обраної точки повинна бути відома за напрямком, для чого ця точка повинна належати ланці, що робить простий рух (поступальний або обертовий навколо нерухомої осі).

При побудові планів швидкостей варто пам'ятати наступні загальні положення:

- вектори абсолютних швидкостей точок (вектори, що мають однозначний індекс  $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C, \dots$ ) з'єднують на плані швидкостей його полюс  $p$  з відповідними вершинами плану (точками  $a, b, c, \dots$ );

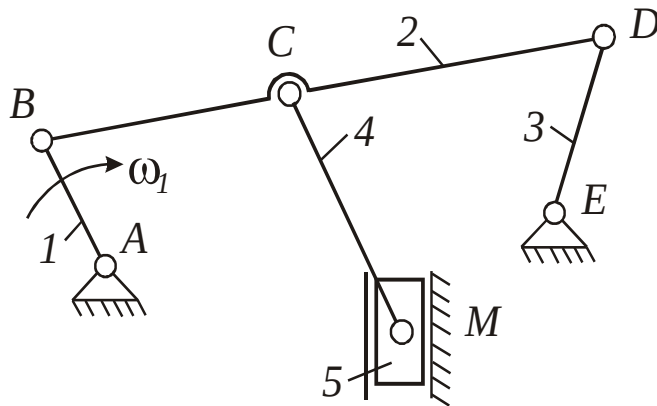
- відносні швидкості точок (швидкості, що мають двозначний індекс  $\vec{V}_{AB}, \vec{V}_{BC}, \vec{V}_{CD}, \dots$ ) зображуються на плані відрізками, що з'єднують відповідні вершини плану одну з одною, причому напрямки векторів відносних швидкостей зворотні порядку слідування індексів у їх позначеннях (наприклад, вектор  $\vec{V}_{BC}$  буде зображуватися відрізком  $(cb)$ );

- фігура, утворена прямими лініями, що з'єднують деякі точки однієї ланки на плані механізму, і фігура, утворена прямими лініями, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей цих точок на плані швидкостей, подібні й аналогічно розташовані – теорема подібності плану швидкостей;

- маючи план швидкостей, можна визначити кутову швидкість будь-якої ланки, що робить обертовий або плоский рух, як за модулем, так і за напрямком.

При рішенні задачі, у першу чергу, необхідно схему механізму перекреслити із бланка в зошит або на окремий аркуш (практично скопіювати), і після цього довжини відрізків, що зображують окремі ланки механізму (наприклад, довжини відрізків  $(AB)$ ,  $(BD)$  і т.д.), вимірювати в міліметрах вже безпосередньо із зошита або аркуша. При побудові плану швидкостей потрібно пам'ятати, що він обов'язково повинен розташовуватися поруч зі схемою механізму.

### Задача.



Методом планів швидкостей визначити в заданому положенні механізму швидкість зазначеної точки, величини й напрямки кутових швидкостей зазначених ланок при  $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\mu_l = 0,01 \text{ м/мм}$ .  
Визначити:  
 $\bar{V}_M = ?$ ,  $\omega_2 = ?$ ,  $\omega_3 = ?$ ,  $\omega_4 = ?$

### Рішення задачі.

Кінематичний аналіз плоского важільного механізму виконаємо методом побудови планів швидкостей.

Перекресливши схему механізму і враховуючи, що схема в завданні зображена в масштабі  $M 1:10$  ( $\mu_l = 0,01 \text{ м/мм}$ ), визначимо дійсні розміри ланок (рис. 2.1):

$$\begin{aligned} l_{AB} &= (AB) \cdot \mu_l = 20 \cdot 0,01 = 0,20 \text{ м}; \\ l_{BD} &= (BD) \cdot \mu_l = 80 \cdot 0,01 = 0,80 \text{ м}; \\ l_{BC} &= (BC) \cdot \mu_l = 35 \cdot 0,01 = 0,35 \text{ м}; \\ l_{DE} &= (DE) \cdot \mu_l = 25 \cdot 0,01 = 0,25 \text{ м}; \\ l_{CM} &= (CM) \cdot \mu_l = 35 \cdot 0,01 = 0,35 \text{ м}. \end{aligned}$$

Визначимо швидкість кінця кривошипа:

$$V_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 10 \cdot 0,20 = 2,0 \text{ м/с},$$

де  $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$  – задана кутова швидкість кривошипа 1.

Вектор швидкості кінця кривошипа (точки  $B$ ) спрямований перпендикулярно осі кривошипа у бік його обертання, тобто  $\bar{V}_B \perp AB$ . Задаємося довжиною відрізка, що зображує вектор  $\bar{V}_B$ :  $(pb) = 60 \text{ мм}$ . Цей відрізок і відкладаємо з довільно обраного полюса  $p$  так, щоб вектор  $\overline{pb}$  був спрямований перпендикулярно  $AB$  в даному положенні кривошипа у бік його обертання (див. рис. 2.1).

При довжині відрізка  $(pb) = 60 \text{ мм}$ , масштабний коефіцієнт плану швидкостей буде дорівнювати:

$$\mu_v = V_B / (pb) = 2,0 / 60 = 0,033 \text{ м / (с·мм)}.$$

Далі будемо шукати швидкість точки  $D$ , оскільки вона, крім ланки 2, що робить плоский рух, належить ще й ланці 3, яка робить простий обертовий рух, а отже напрямок швидкості точки  $D$  відомий (на відміну від точки  $C$ , напрямок швидкості якої не відомий, оскільки вона належить, крім ланки 2, ще й ланці 4, яка теж робить плоский рух).

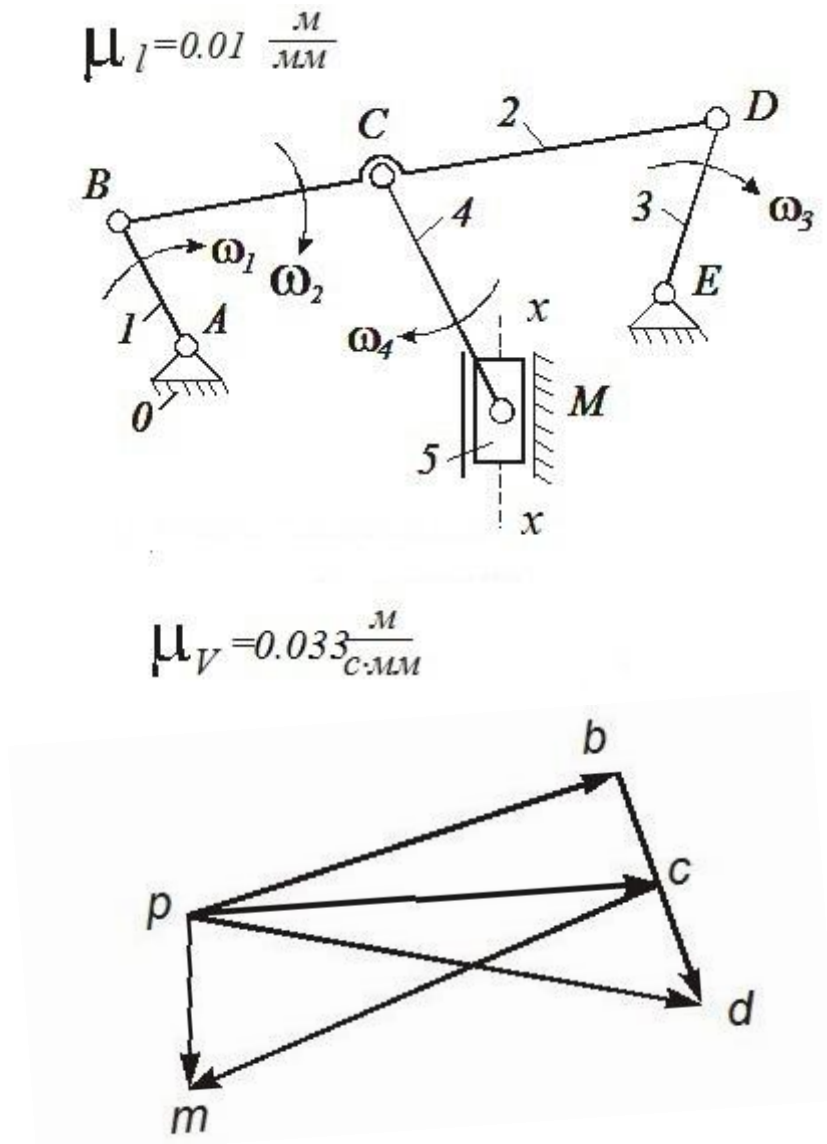


Рисунок 2.1 – План механізму і план швидкостей

Швидкість точки  $D$  визначається з таких умов:

1 Розглянемо точку  $D$ , що належить ланці 2 (точка  $D$  є загальною для ланок 2 і 3), що здійснює плоский рух. З кінематики твердого тіла відомо,

що плоский рух тіла може бути представлений таким, що складається з переносного поступального руху тіла разом із довільно обраною точкою (полюсом) і відносного обертання навколо полюса. Тому швидкість будь-якої точки ланки, що здійснює плоский рух, може бути виражена геометричною сумою швидкості полюса і швидкості її руху навколо цього полюса. У даному випадку, обравши за полюс точку  $B$ , швидкість якої вже відома, можемо записати векторне рівняння:

$$\vec{V}_{D \perp DE} = \vec{V}_{B \perp AB} + \vec{V}_{DB \perp DB}$$

де  $\vec{V}_{DB}$  – вектор відносної швидкості точки  $D$  у її обертовому русі навколо полюса  $B$ , і тому вектор  $\vec{V}_{DB} \perp DB$ . Модуль  $\vec{V}_{DB}$  поки невідомий.

У цьому рівнянні і далі вектор, відомий за розміром і напрямком, підкреслений двома лініями, а вектор, відомий тільки за напрямком, підкреслений однією лінією. Нижче підкреслюючих ліній зазвичай вказуються напрямки відповідних векторів, оскільки це зручно для виконання побудов.

2 Тепер розглянемо точку  $D$ , що належить ланці 3. Ця ланка здійснює простий обертовий рух навколо осі  $E$ , і тому вектор абсолютної швидкості будь-якої її точки спрямований перпендикулярно радіусу обертання  $DE$ , отже,  $\vec{V}_D \perp DE$ . Модуль  $\vec{V}_D$  теж поки невідомий.

Швидкість точки  $D$  визначимо, вирішивши графічно розглянуте векторне рівняння. Для цього через точку  $b$  плану швидкостей проводимо пряму лінію, перпендикулярну ланці  $DB$  плану механізму, а з полюса  $p$  – лінію, перпендикулярну ланці  $DE$ . Перетинання цих прямих дає точку  $d$ . Вектори  $\overrightarrow{pd}$  і  $\overrightarrow{bd}$  спрямовують відповідно до правил додавання векторів (вони в прийнятому масштабі  $\mu_v$  зображують шукані швидкості  $\vec{V}_D$  і  $\vec{V}_{DB}$ ).

Швидкість точки  $C$  визначимо, скориставшись теоремою подібності, із пропорції:

$$\frac{l_{BD}}{l_{BC}} = \frac{(bd)}{(bc)}. \text{ Отже: } (bc) = \frac{l_{BC} \cdot (bd)}{l_{BD}} = \frac{0,35}{0,80} \cdot 32 = 14 \text{ мм.}$$

Оскільки точка  $C$  на механізмі лежить на ланці 2 між точками  $B$  і  $D$ , то і на плані швидкостей відрізок  $(bc)$  будемо відкладати від точки  $b$  в напрямку точки  $d$ , тобто так, щоб точка  $c$  також лежала між точками  $b$  і  $d$ .

Тоді абсолютна швидкість точки  $C$  визначається відрізком  $(pc)$  і обчислюється за формулою:

$$V_C = (pc) \cdot \mu_v = 62 \cdot 0,033 = 2,05 \text{ м/с.}$$

Швидкість точки  $M$ , загальної для ланок 4 і 5, знайдемо з таких умов:

1 Розглянемо точку  $M$ , що належить ланці 4, яка здійснює плоский рух. Обравши за полюс точку  $C$ , швидкість якої вже відома, можемо записати векторне рівняння:

$$\frac{\bar{V}_M}{//x-x} = \frac{\bar{V}_C}{=} + \frac{\bar{V}_{MC}}{\perp MC}.$$

2 З іншого боку, точка  $M$  належить повзуну 5, що поступально рухається в вертикальних напрямках і здійснює разом із ним прямолінійний зворотно-поступальний рух уздовж лінії  $x-x$  (див. рис. 2.1). Отже, абсолютна швидкість точки  $M$   $\bar{V}_M // x-x$ .

Швидкість точки  $M$  визначимо, вирішивши графічно розглянуте векторне рівняння. Для цього через точку  $c$  плану швидкостей проводимо пряму лінію, перпендикулярну ланці  $MC$  плану механізму, а з полюса  $p$  – вертикальну пряму, тобто лінію, паралельну напрямної  $x-x$ . Перетинання цих прямих дає точку  $m$ .

З побудованого плану швидкостей визначимо швидкість точки  $M$ :

$$V_M = (pm) \cdot \mu_V = 22 \cdot 0,033 = 0,73 \text{ м/с}.$$

Визначимо величини й напрямки кутових швидкостей ланок:

$$\omega_2 = V_{DB} / l_{BD} = 1,06 / 0,80 = 1,33 \text{ с}^{-1},$$

$$\text{де } V_{DB} = (bd) \cdot \mu_V = 32 \cdot 0,033 = 1,06 \text{ м/с}.$$

Напрямок  $\omega_2$  знаходиться уявним переносом вектора  $\bar{V}_{DB}$  з плану швидкостей у відповідну точку  $D$  плану механізму, й визначенням можливого повороту ланки 2 навколо точки  $B$  при даному напрямку швидкості  $\bar{V}_{DB}$ . Аналогічно визначаються напрямки й всіх інших кутових швидкостей ланок механізму.

$$\omega_3 = V_D / l_{DE} = 2,24 / 0,25 = 8,96 \text{ с}^{-1},$$

$$\text{де } V_D = (pd) \cdot \mu_V = 68 \cdot 0,033 = 2,24 \text{ м/с};$$

$$\omega_4 = V_{MC} / l_{CM} = 2,18 / 0,35 = 6,23 \text{ с}^{-1},$$

$$\text{де } V_{MC} = (cm) \cdot \mu_V = 66 \cdot 0,033 = 2,18 \text{ м/с}.$$

Напрямки кутових швидкостей ланок показано на схемі механізму.

**Відповідь:**  $V_M = 0,73 \text{ м/с}$ ;  $\omega_2 = 1,33 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_3 = 8,96 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_4 = 6,23 \text{ с}^{-1}$ .

### **3 КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ МЕТОДОМ ПОБУДОВИ ПЛАНІВ ПРИСКОРЕНЬ, ВИЗНАЧЕННЯ ІНЕРЦІЙНИХ НАВАНТАЖЕНЬ НА ЛАНКИ МЕХАНІЗМУ**

*Мета практичного заняття:* навчитися складати векторні рівняння прискорень, вирішувати їх графічно шляхом побудови плану прискорень, і одержавши, у результаті, лінійні прискорення точок, величини й напрямки кутових прискорень ланок механізму, вміти їх використовувати для визначення інерційних навантажень на ланки механізму.

*Література до заняття:* [1] с. 83–87, 88–90, 93–96, 238–241; [2] с. 51–53, 55, 56, 62, 63, 72–74; [3] с. 38, 39, 57, 58; [4] с. 100–102, 172; [5] с. 30–38, 52–54, 62; [6] с. 10–18.

*Короткі теоретичні відомості й вказівки до рішення задач за темою заняття.*

Знання прискорень точок і кутових прискорень ланок механізмів необхідно для рішення ряду питань кінематики цих механізмів, для визначення динамічних навантажень на ланки, для з'ясування нерівномірності руху, зрівноважування машин і т.п.

Найбільш універсальним, простим і наочним методом визначення прискорень у механізмах є метод планів прискорень, що дозволяє знайти прискорення будь-якої точки механізму в розглянутому його положенні.

Вихідними даними для побудови плану прискорень є:

- план механізму в заданому його положенні;
- дійсні розміри всіх ланок механізму;
- закон руху його вхідної ланки;
- план швидкостей для заданого положення механізму.

Вхідна ланка в механізмах звичайно робить обертовий рух відносно стояка. Приймають кутову швидкість вхідної ланки (кривошипа) постійною ( $\omega_1 = \text{const}$ ), що є найпоширенішим і раціональним видом руху в реальних механізмах.

План прискорень будується аналогічно плану швидкостей, загальні положення, які варто пам'ятати при побудові планів швидкостей, повною мірою можна віднести й до планів прискорень (див. розділ 2). Порядок розгляду точок ланок механізму при побудові плану прискорень залишається таким самим, що й при побудові плану швидкостей. Спочатку розглядають ту точку вхідної ланки, що є центром обертової кінематичної пари, що зв'язує вхідну ланку (кривошип) з наступною рухомою ланкою механізму, потім розглядають точки першої приєднаної до вхідної ланки й стояка структурної групи, потім другої структурної групи й т.д.

Знайдені в результаті побудови плану прискорень лінійні прискорення центрів мас ланок і кутові прискорення ланок можуть бути використані

для визначення інерційних навантажень на ланки механізму, до яких відносяться сили та моменти сил інерції.

Сили та моменти сил інерції, що діють на ланки, визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}\overline{F}_{in_i} &= -m_i \overline{a}_{S_i}; \\ \overline{M}_{in_i} &= -I_{S_i} \overline{\varepsilon}_i,\end{aligned}$$

де  $m_i$  – маса  $i$ -ої ланки, кг;

$a_{S_i}$  – прискорення центра мас  $i$ -ої ланки, м/с<sup>2</sup>;

$\varepsilon_i$  – кутове прискорення  $i$ -ої ланки, с<sup>-2</sup>;

$I_{S_i}$  – центральний момент інерції  $i$ -ої ланки, кг · м<sup>2</sup>.

Мінуси у формулах говорять про напрямки  $\overline{F}_{in_i}$  й  $\overline{M}_{in_i}$ : сила інерції  $\overline{F}_{in_i}$  спрямована паралельно вектору  $\overline{a}_{S_i}$ , але в протилежну сторону, а момент сил інерції  $\overline{M}_{in_i}$  має напрямок, протилежний напрямку  $\overline{\varepsilon}_i$ .

При рішенні задачі з визначення інерційних навантажень на ланки механізму, в першу чергу, необхідно схему механізму перекреслити з бланка задачі в зошит або на окремий аркуш, після чого довжини відрізків, що зображують окремі ланки механізму, вимірювати в міліметрах вже безпосередньо із зошита або аркуша. Потім поруч зі схемою механізму потрібно побудувати план швидкостей, визначивши при цьому лінійні швидкості точок і кутові швидкості ланок (див. розділ 2). Після цього, використовуючи отримані дані, також поруч зі схемою механізму побудувати план прискорень, визначивши при цьому лінійні прискорення точок (у тому числі прискорення центрів мас ланок) і кутові прискорення ланок. Ці кінематичні параметри дозволяють знайти інерційні навантаження на ланки механізму, як за напрямком, так і за модулем (якщо будуть задані маси ланок і їх центральні моменти інерції).

Розглянемо рішення задачі в загальному вигляді (без розрахунків), вважаючи при цьому, що план швидкостей для заданого положення механізму вже побудований, а, отже, визначені довжини ланок, лінійні швидкості точок і кутові швидкості ланок.

### Задача.

Методом планів прискорень визначити в заданому положенні механізму (рис. 3.1) прискорення точок, величини й напрямки кутових прискорень ланок при  $\omega_1 = \text{const} = \dots \cdot c^{-1}$ ,  $\mu_1 = \dots \frac{M}{mM}$ . На плані механізму показати напрямки сил і моментів сил інерції, що діють на ланки механізму.



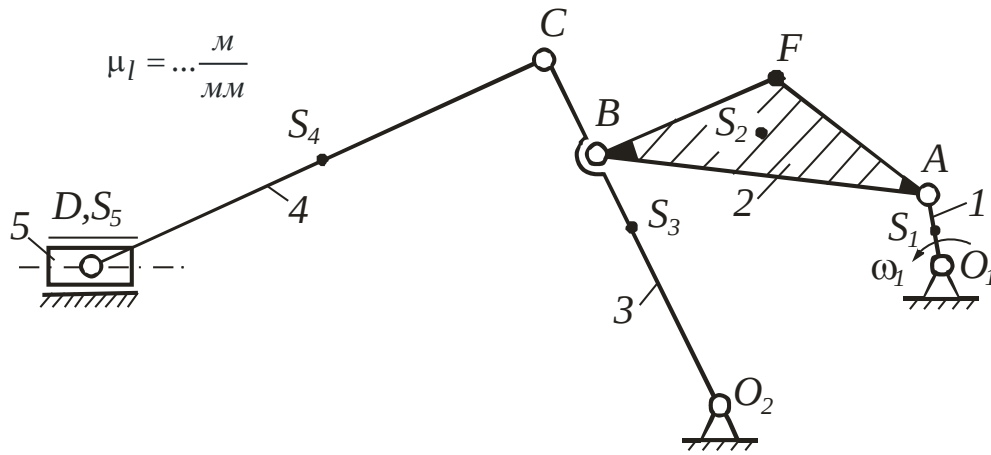


Рисунок 3.1 – План механізму

### Рішення задачі.

Побудуємо план прискорень для заданого положення механізму. Розрахунок прискорень (як і швидкостей) почнемо з визначення прискорення точки  $A$  вхідної ланки, що є загальною точкою кривошипа 1 і шатуну 2.

Прискорення точки  $A$  кривошипа 1, що робить обертовий рух, визначається геометричною сумою нормального й дотичного прискорень:

$$\bar{a}_A = \underbrace{\bar{a}_A^n}_{//AO_1} + \underbrace{\bar{a}_A^\tau}_{\perp AO_1}.$$

Оскільки прийнято  $\omega_1 = \text{const}$ , то  $\varepsilon_1 = 0$  і  $a_A^\tau = \varepsilon_1 l_{O_1A} = 0$ . Тоді  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$ , і їх модулі  $a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{O_1A} = \dots \frac{M}{c^2}$ . Спрямовано вектор  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$  уздовж ланки  $O_1A$  від точки  $A$  до центру його обертання  $O_1$ .

Вибравши полюс  $\pi$  (рис. 3.2) плану прискорень, зображуємо вектор  $\bar{a}_A$  відрізком ( $\pi a$ ), спрямованим  $// O_1A$  від  $A$  к  $O_1$ . Тоді масштабний коефіцієнт  $\mu_a$  плану прискорень буде дорівнювати:

$$\mu_a = \frac{a_A}{(\pi a)} = \dots \frac{M}{c^2 \cdot \text{мм}}.$$

Прискорення точки  $B$ , загальної для ланок 2 і 3, визначається із двох умов:

1 Розглядаємо точку  $B$ , яка належить ланці 2, що робить плоский рух. Як і у випадку визначення швидкостей, розкладаємо плоский рух ланки 2 на переносний поступальний рух разом із точкою, обраною за полюс, і відносний обертовий рух навколо цього полюса. Тоді повне прискорення будь якої точки ланки 2 буде дорівнювати геометричній сумі переносного прискорення полюса й відносного прискорення точки в її русі навколо полюса.

Вибравши за полюс точку  $A$  ланки 2, прискорення якої вже відомо, запишемо рівняння для визначення прискорення точки  $B$ :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

$\parallel AO_1 \quad \parallel BA \quad \perp BA$

де  $\bar{a}_{BA}^n$  й  $\bar{a}_{BA}^\tau$  – нормальна й дотична складові відносного прискорення  $\bar{a}_{BA}$  ( $\bar{a}_{BA}^n \perp \bar{a}_{BA}^\tau$ ).

Вектор  $\bar{a}_{BA}^n$  спрямований уздовж ланки  $AB$  плану механізму від точки  $B$  до центру відносного обертання  $A$ , а вектор  $\bar{a}_{BA}^\tau \perp AB$ . Значення  $a_{BA}^n$  визначаємо за формулами:  $a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}}$  або  $a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB} = \dots \frac{M}{c^2}$ .

Кутова швидкість  $\omega_2$  і відносна швидкість  $V_{BA}$  визначені з плану швидкостей.

Прийнято кінці векторів всіх нормальних складових відносних прискорень позначати на планах прискорень буквою  $n$  із цифровими індексами, що відповідають номеру розглянутої ланки.

Тоді довжина відрізка, що зображує нормальну складову  $\bar{a}_{BA}^n$  на плані прискорень, буде дорівнювати  $(an_2) = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \dots \text{мм.}$

2 Розглядаємо точку  $B$ , яка належить ланці 3, що робить обертовий рух навколо осі  $O_2$ . У цьому випадку повне прискорення точки  $B$  буде:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau.$$

$\parallel BO_2 \quad \perp BO_2$

Вектор нормального прискорення  $\bar{a}_B^n$  спрямований уздовж ланки  $O_2B$  на плані механізму від  $B$  до  $O_2$ , а його модуль  $a_B^n = \omega_3^2 l_{O_2B} = \dots \frac{M}{c^2}$ . Довжина відрізка, що зображує вектор  $\bar{a}_B^n$  на плані прискорень, буде дорівнювати  $(\pi n_3) = \frac{a_B^n}{\mu_a} = \dots \text{мм.}$  Вектор  $\bar{a}_B^\tau \perp O_2B$ .

Вирішимо графічно систему двох векторних рівнянь для точки  $B$ . Відповідно до першого рівняння, із точки  $a$  плану прискорень відкладаємо відрізок  $(an_2) \parallel BA$  за напрямком від  $B$  до  $A$ , і через кінець вектора  $\overline{an_2}$  проводимо лінію  $\perp AB$ . За другим рівнянням, з полюса  $\pi$  відкладаємо відрізок  $(\pi n_3) \parallel BO_2$  за напрямком від  $B$  до  $O_2$ , і через точку  $n_3$  проводимо пряму  $\perp BO_2$ . Перетинання цієї прямої з лінією, проведеної через точку  $n_2 \perp AB$ , дає точку  $b$ , що і є рішенням системи рівнянь. Тоді із плану прискорень:

$$a = (\pi b) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; \quad a_{BA}^{\tau} = (n_2 b) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; \quad a_B^{\tau} = (n_3 b) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}.$$

З теореми подібності плану прискорень випливає, що на плані прискорень  $\Delta abf$  пропорційний  $\Delta ABF$  на плані механізму, і прискорення точки  $F$  ланки 2 можна знайти, побудувавши на стороні  $ab$   $\Delta abf$ , подібний  $\Delta ABF$  і аналогічно з ним розташований. Для цього на плані механізму потрібно замірити кути  $\alpha$  і  $\beta$  при вершинах  $A$  і  $B$   $\Delta ABF$ , а потім на плані прискорень провести промені під цими кутами із точок  $a$  й  $b$ , відповідно. Перетинання цих променів дає точку  $f$ , яка є кінцем вектора  $\overline{\pi f}$ , що зображує в масштабі прискорення  $\bar{a}_F$ . Його величина  $a = (\pi f) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}$ .

Точку  $f$  також можна було б знайти, склавши дві пропорції для двох сторін  $\Delta ABF$  і  $\Delta abf$ .

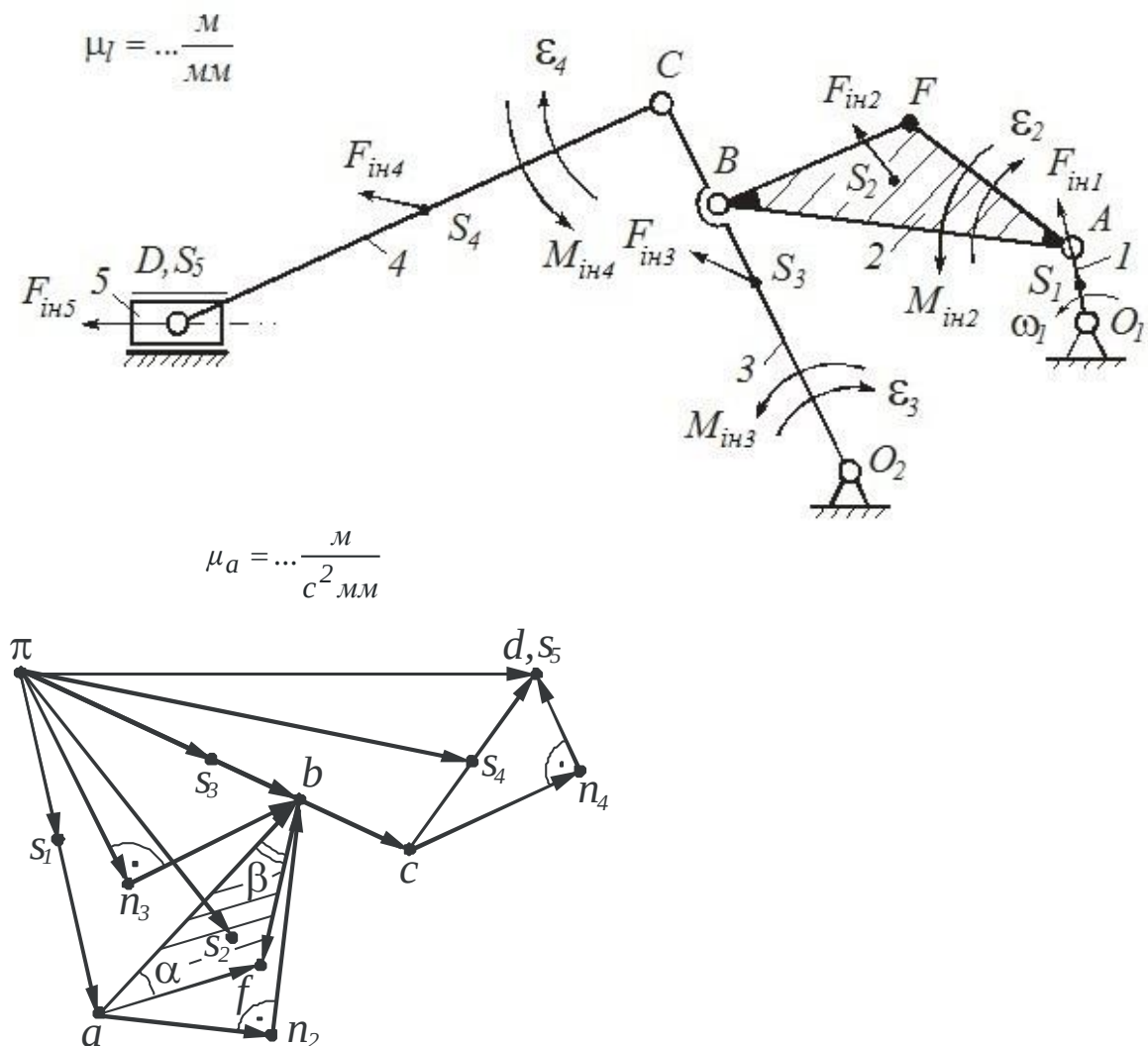


Рисунок 3.2 – План механізму з інерційними навантаженнями та план прискорень

Прискорення точки  $C$  ланки 3 визначиться на підставі положення теоретичної механіки про те, що прискорення всіх точок обертового тіла пропорційні їх відстаням від осі обертання й утворюють у цей момент часу той самий кут з радіусами обертання. Отже, можна записати пропорцію:

$$\frac{O_2C}{O_2B} = \frac{a_C}{a_B} = \frac{(\pi c)}{(\pi b)}, \text{ звідки } (\pi c) = (\pi b) \frac{O_2C}{O_2B} = \dots \text{ мм.}$$

Значення прискорення  $a_C = (\pi c) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}$ . Спрямовано вектор  $\overline{a_C} // \overline{a_B}$  і в той же бік, тому з полюса відкладаємо  $\overline{\pi c}$  на продовженні  $\overline{\pi b}$ .

Прискорення точки  $D$ , загальної для ланок 4 і 5, визначиться з рівняння:

$$\overline{a_D} = \overline{a_C} + \overline{a_{DC}^n} + \overline{a_{DC}^\tau}.$$

$//x-x \quad //DC \quad \perp DC$

Величина нормального прискорення  $a_{DC}^n = \omega_4^2 l_{CD} = \dots \frac{M}{c^2}$ ; довжина відрізка, що його зображує на плані прискорень  $(cn_4) = \frac{a_{DC}^n}{\mu_a} = \dots \text{ мм.}$  Спрямовано вектор  $\overline{cn_4} // DC$  від  $D$  до  $C$ , а вектор  $\overline{a_{DC}^\tau} \perp DC$ .

Вирішимо графічно це рівняння. Із точки  $c$  відкладаємо вектор  $\overline{cn_4}$  у зазначеному напрямку й через його кінець  $n_4$  проводимо лінію  $\perp CD$ . Потім з полюса  $\pi$  проводимо пряму  $// x-x$ . Перетинання цих ліній дає точку  $d$  – кінець вектора  $\overline{\pi d}$ , що зображує прискорення  $\overline{a_D}$ . Тоді:

$$a_D = (\pi d) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; a_{DC}^\tau = (n_4 d) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}.$$

Маючи план прискорень, можна для даного положення механізму знайти кутове прискорення будь-якої ланки з обертовим або плоским рухом. Так, кутове прискорення ланки 2, що робить плоский рух, у розглянутому положенні механізму дорівнює:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{AB}} = \dots c^{-2}.$$

Прискорення  $\varepsilon_2$  спрямовано у бік дії вектора  $\overline{a_{BA}^\tau}$ , прикладеного в точці  $B$  механізму й прагнучого повернути ланку 2 навколо точки  $A$ , тобто в

цьому випадку за ходом годинникової стрілки (див. рис. 3.2). Аналогічно визначаються величини й напрямки  $\varepsilon_3$  і  $\varepsilon_4$ :

$$\varepsilon_3 = \frac{a_B^\tau}{l_{O_2B}} = \dots c^{-2}; \quad \varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^\tau}{l_{CD}} = \dots c^{-2}.$$

Напрямки кутових прискорень показано на схемі механізму.

Використовуючи властивість подібності планів прискорень, відзначаємо на побудованому плані точки, що відповідають центрам мас ланок  $s_1, s_2, s_3, s_4$  і  $s_5$ . Якщо ланки 1, 3 і 4 вважати однорідними стрижнями, то центри мас цих ланок знаходяться посередині їх довжин. Тому на плані прискорень точки  $s_1, s_3$  і  $s_4$  повинні бути посередині відповідних відрізків. Центр мас ланки 5 збігається із точкою  $D$ , отже, на плані прискорень точки  $s_5$  та  $d$  також будуть збігатися. Центр мас ланки 2 розташований у точці перетинання медіан  $\triangle ABF$ , і для знаходження точки  $s_2$  на плані прискорень потрібно провести медіани в  $\triangle abf$ .

Тоді прискорення центрів мас ланок:

$$a_{s_1} = (\pi s_1) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; \quad a_{s_2} = (\pi s_2) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; \quad a_{s_3} = (\pi s_3) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2};$$

$$a_{s_4} = (\pi s_4) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; \quad a_{s_5} = (\pi s_5) \mu_a = a_D$$

Визначивши кутові прискорення й лінійні прискорення центрів мас ланок, покажемо на схемі механізму напрямки сил інерції й моментів сил інерції. Так, сила інерції  $\overline{F}_{in_1}$  прикладена в центрі мас  $S_1$  ланки 1 і спрямована у бік, протилежний вектору прискорення  $\overline{a}_{s_1}$ . Аналогічно напрямляємо й всі інші сили інерції ланок. Момент сил інерції  $\overline{M}_{in_2}$  спрямований у бік, зворотний напрямку кутового прискорення  $\overline{\varepsilon}_2$  ланки 2. Аналогічно напрямляємо й всі інші моменти сил інерції ланок.

## 4 ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ПЛАНІВ ШВИДКОСТЕЙ І ПРИСКОРЕНЬ ДЛЯ КУЛІСНИХ МЕХАНІЗМІВ

*Мета практичного заняття:* вивчити особливості складання векторних рівнянь швидкостей і прискорень для кулісних механізмів, навчитися вирішувати їх графічно, будуючи плани швидкостей і прискорень, і визначаючи, в результаті, лінійні швидкості й прискорення точок, а також кутові швидкості й прискорення ланок механізму.

*Література до заняття:* [1] с. 87–90; [2] с. 57–60; [3] с. 40–43; [4] с. 101–103; [5] с. 24–30, 40–46, 57–61, 64–68.

*Короткі теоретичні відомості й вказівки до рішення задач за темою заняття.*

Кулісними називають механізми, що мають повзуни (кулісні камені) на рухомих напрямних (кулісах) з обертовим або плоским рухом. У цьому випадку абсолютний рух точок кулісного каменю зручно розглядати геометрично складеним з переносного руху відповідної точки напрямної (куліси), з якою в цей момент збігається розглянута точка каменю, і відносного руху каменю вздовж напрямної (куліси). Побудова планів швидкостей і прискорень для таких механізмів має деякі особливості.

У теоретичній механіці доводиться, що у випадку непоступального переносного руху (наприклад, обертання) з'являється деяке додаткове, або, так зване, коріолісове прискорення. Вектор  $\bar{a}^k$  коріолісового прискорення точки дорівнює подвоєному векторному добутку кутової швидкості переносного руху  $\bar{\omega}_e$  на відносну лінійну швидкість точки  $\bar{V}_r$ :

$$\bar{a}^k = 2\bar{\omega}_e \bar{V}_r.$$

Модуль коріолісового прискорення буде дорівнювати  $a^k = 2\omega_e V_r \sin(\bar{\omega}_e \wedge \bar{V}_r)$ .

Для плоских механізмів кут між векторами  $\bar{\omega}_e$  й  $\bar{V}_r$  завжди дорівнює  $90^\circ$ , а  $\sin 90^\circ = 1$ , і тому величина коріолісового прискорення  $a^k = 2\omega_e V_r$ , а напрямок  $\bar{a}^k$  можна знайти, повернувши вектор відносної швидкості  $\bar{V}_r$  на  $90^\circ$  у бік переносного обертання (за ходом або проти ходу годинникової стрілки, залежно від напрямку  $\omega_e$ ).

У випадку прямолінійної куліси абсолютне прискорення каменю  $\bar{a}$  дорівнює геометричній сумі переносного прискорення  $\bar{a}_e$  в русі каменю разом з кулісою, коріолісового прискорення  $\bar{a}^k$  й відносного прискорення  $\bar{a}_r$  в русі каменю відносно куліси:  $\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}^k + \bar{a}_r$ .

При рішенні задач з кінематичного аналізу кулісних механізмів не-

обхідно базуватися на тих же основних положеннях, що й при кінематичному аналізі механізмів, що не мають куліс і кулісних каменів (див. розділи 2, 3). Розглянемо побудову планів швидкостей і прискорень кулісного механізму в загальному вигляді (без розрахунків).

### Задача.

Методом планів швидкостей і прискорень визначити в заданому положенні механізму (рис. 4.1, а) лінійні швидкості й прискорення точок, величини й напрямки кутових швидкостей і прискорень ланок при відомих

$$\omega_1 = \text{const} = \dots \text{с}^{-1}, \mu_1 = \dots \frac{\text{м}}{\text{мм}}.$$

### Рішення задачі.

Побудуємо план швидкостей для заданого положення кулісного механізму. У таких механізмів варто розрізняти дві співпадаючі на стрижні, але приналежним різним ланкам точки  $A$ :  $A_{12}$  і  $A_3$ , які необхідно розглядати роздільно. Цифри при буквах відповідають номерам ланок, яким ці точки належать, і питання про їх цифри вирішується шляхом уважного аналізу схеми механізму. Так, точка  $A_{12}$ , належить шарніру, що зв'язує кривошип 1 і камінь 2, і є їхньою загальною точкою (це вісь обертання каменя відносно кривошипа). Точка  $A_3$  належить кулісі 3. Очевидно, що ці точки мають різні абсолютні швидкості й, отже, мають відносні швидкості  $\bar{V}_{A_3 A_{12}}$  або  $\bar{V}_{A_{12} A_3} = -\bar{V}_{A_3 A_{12}}$ , спрямовані уздовж ланки (куліси) 3.

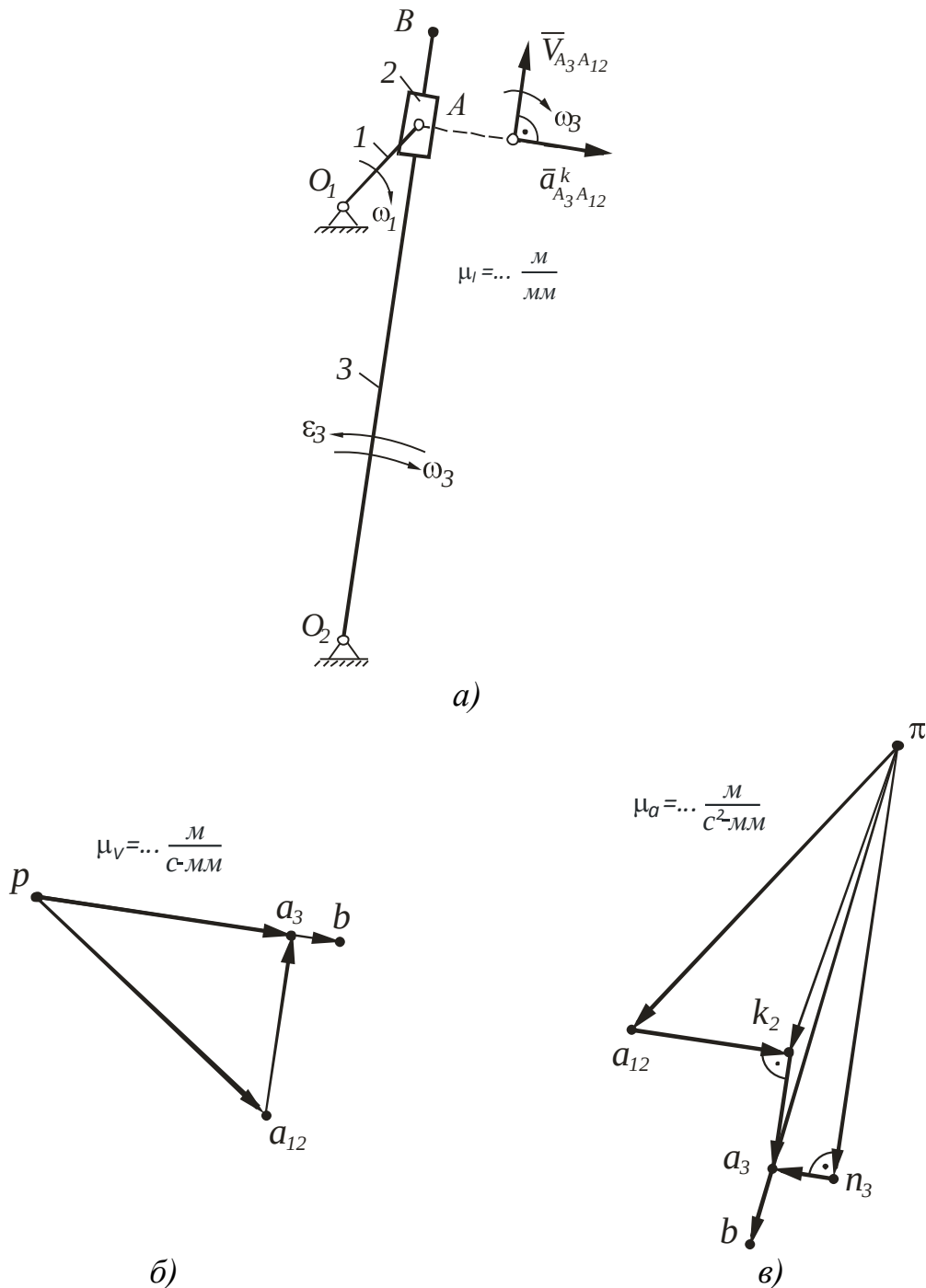
Розрахунок швидкостей точок механізму починаємо з визначення швидкості тієї точки вхідної ланки (кривошипа 1), яка є центром обертової кінематичної пари, що зв'язує вхідну ланку з наступною рухомою ланкою механізму. У розглянутій задачі – це точка  $A_{12}$ , загальна для ланок 1 і 2. Оскільки кривошип 1 обертається навколо осі  $O_1$ , то швидкість точки  $A_{12}$  визначається за формулою:  $V_{A_{12}} = \omega_1 l_{O_1 A} = \omega_1 (O_1 A) \mu_1 = \dots \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

Спрямовано вектор  $\bar{V}_{A_{12}} \perp O_1 A$  у бік обертання кривошипа. Виберемо масштабний коефіцієнт плану швидкостей:  $\mu_v = \frac{V_{A_{12}}}{(pa_{12})} = \dots \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}},$  де  $(pa_{12})$  – довжина відрізка, що зображує швидкість  $\bar{V}_{A_{12}}$  (рис. 4.1, б).

Швидкість точки  $A_3$ , що збігається в цей момент із точкою  $A_{12}$ , визначимо із двох умов, відомих із загальної механіки про переносний і відносний рух точок:

1 Розглядаючи рух точки  $A_3$  разом із точкою  $A_{12}$  і відносно неї, запишемо:

$$\frac{\bar{V}_{A_3}}{\perp O_2 A} = \frac{\bar{V}_{A_{12}}}{\perp O_1 A} + \frac{\bar{V}_{A_3 A_{12}}}{// O_2 A}.$$



*а – план механізму; б – план швидкостей; в – план прискорень  
Рисунок 4.1 – План кулісного механізму, плани швидкостей і прискорень  
кулісного механізму*

2 Точка  $A_3$  обертається разом з ланкою 3 навколо осі  $O_2$ , отже, вектор абсолютної швидкості цієї точки  $\bar{V}_{A_3} \perp O_2A$ . Реалізуємо графічно це векторне рівняння. Для цього через точку  $a_{12}$  плану швидкостей (див. рис. 4.1, б) проводимо пряму  $\parallel O_2A$ , а з полюса  $p$  – лінію  $\perp O_2A$ . Перетинання цих ліній дає точку  $a_3$ , а вектор  $pa_3$  зображує в обраному масштабі швидкість  $\bar{V}_{A_3}$ .



Тоді значення відносної швидкості  $\overline{V}_{A_3A_{12}}$  з побудованого плану швидкостей буде дорівнювати:  $V_{A_3A_{12}} = (a_{12}a_3)\mu_V = \dots \frac{M}{c}$ .

Швидкість точки  $B$  куліси 3 знайдемо із пропорції, застосовуючи теорему подібності:

$$\frac{(O_2B)}{(O_2A)} = \frac{V_B}{V_{A_3}} = \frac{(pb)}{(pa_3)}, \text{ звідки } (pb) = (pa_3) \frac{(O_2B)}{(O_2A)} = \dots \text{мм.}$$

Відкладаємо вектор  $\overline{pb} \perp O_2B$  у напрямку  $\overline{pa_3}$  на його продовженні. Кутову швидкість ланки 3 легко визначити з рівняння:

$$\omega_3 = \frac{V_{A_3}}{l_{O_2A}} = \frac{(pa_3)\mu_V}{(O_2A)\mu_l} \text{ або } \omega_3 = \frac{V_B}{l_{O_2B}} = \frac{(pb)\mu_V}{(O_2B)\mu_l} = \dots c^{-1}.$$

Напрямок  $\omega_3$  визначаємо за напрямком вектора швидкості  $\overline{V}_{A_3}$  або вектора  $\overline{V}_B$ .

Побудуємо план прискорень для заданого положення механізму. Розрахунок прискорень (як і швидкостей) почнемо з визначення прискорення точки  $A_{12}$ . Прискорення точки  $A_{12}$  кривошипа 1, що робить обертовий рух, визначається геометричною сумою нормального й дотичного прискорень:

$$\overline{a}_{A_{12}} = \overline{a}_{A_{12}}^n + \overline{a}_{A_{12}}^\tau.$$

$\overline{\overline{AO_1}}$

$\overline{\perp AO_1}$

Оскільки прийнято  $\omega_1 = \text{const}$ , то  $\varepsilon_1 = 0$  і  $a_{A_{12}}^\tau = \varepsilon_1 l_{O_1A} = 0$ . Тоді  $\overline{a}_{A_{12}} = \overline{a}_{A_{12}}^n$ , і їх модулі  $a_{A_{12}} = a_{A_{12}}^n = \omega_1^2 l_{O_1A} = \dots \frac{M}{c^2}$ . Спрямовано вектор  $\overline{a}_{A_{12}} = \overline{a}_{A_{12}}^n$  уздовж ланки  $O_1A$  від точки  $A$  до центру її обертання  $O_1$ .

Вибравши полюс  $\pi$  (рис. 4.1, в) плану прискорень, зображуємо вектор  $\overline{a}_{A_{12}}$  відрізком  $(\pi a_{12})$ , спрямованим  $\parallel O_1A$  від  $A$  к  $O_1$ . Тоді масштабний коефіцієнт  $\mu_a$  плану прискорень буде дорівнювати:

$$\mu_a = \frac{a_{A_{12}}}{(\pi a_{12})} = \dots \frac{M}{c^2 \cdot \text{мм}}.$$

Прискорення точки  $A_3$ , що належить кулісі 3 і співпадаючої в цей момент часу із точкою  $A_{12}$  каменю 2, визначається із двох умов:

1 Розглядаємо рух точки  $A_3$  разом із точкою  $A_{12}$  і відносно неї. Оскільки переносний рух точки  $A_3$  є обертовим, то з'явиться коріолісове прискорення. Тоді для прискорення точки  $A_3$  запишемо рівняння:

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{A_{12}}^{\parallel AO_1} + \bar{a}_{A_3 A_{12}}^{\perp O_2 A} + \bar{a}_{A_3 A_{12}}^{\parallel O_2 A},$$

де  $\bar{a}_{A_3 A_{12}}^k$  – коріолісове прискорення при русі точки  $A_3$  відносно точки  $A_{12}$ ;

$\bar{a}_{A_3 A_{12}}$  – відносне прискорення в русі точки  $A_3$  щодо точки  $A_{12}$ .

Величина коріолісового прискорення визначається за формулою  $a^k = 2\omega_e V_r$ , при цьому переносним рухом для каменю 2 є обертання ланки 3, тобто  $\omega_e = \omega_3$ , а відносним рухом – переміщення каменю 2 вздовж прямолінійної напрямної 3, і, отже, відносна швидкість  $\bar{V}_r$  точки  $A_3$  відносно точки  $A_{12}$  дорівнює  $\bar{V}_{A_3 A_{12}}$ . Тоді:

$$a_{A_3 A_{12}}^k = 2\omega_3 V_{A_3 A_{12}} = \dots \frac{M}{c^2}.$$

Чисельні значення  $\omega_3$  і  $V_{A_3 A_{12}}$ , а також їх напрямки визначені із плану швидкостей (див. рис. 4.1, а й 4.2, б).

Напрямок вектора  $\bar{a}_{A_3 A_{12}}^k$  визначаємо, повернувши вектор  $\bar{V}_{A_3 A_{12}}$ , що на плані швидкостей зображується вектором  $\overline{a_{12}a_3}$ , на  $90^\circ$  у бік  $\omega_3$  (як показано на рис. 4.1, а). На плані прискорень (див. рис. 4.1, в) вектор  $\bar{a}_{A_3 A_{12}}^k$  будемо зображувати вектором  $\overline{a_{12}k_2}$  (індекс при  $k$  позначає номер каменю), тоді довжина відрізка  $(a_{12}k_2)$  визначиться з рівності:  $(a_{12}k_2) = \frac{a_{A_3 A_{12}}^k}{\mu_a} = \dots \text{мм.}$

Оскільки відносний рух каменю є прямолінійним, то вектор відносного прискорення  $\bar{a}_{A_3 A_{12}}$  спрямований паралельно кулісі 3, вздовж якої переміщується камінь 2. Величина  $a_{A_3 A_{12}}$  поки невідома.

2 Розглядаємо рух точки  $A_3$  у її обертанні разом з ланкою 3 навколо осі  $O_2$ . Тоді абсолютне прискорення точки  $A_3$  буде дорівнювати:

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{A_3}^n + \bar{a}_{A_3}^\tau.$$

Вектор нормального прискорення  $\bar{a}_{A_3}^n$  спрямований уздовж ланки  $AO_2$  механізму від точки  $A$  до  $O_2$ . Його значення  $a_{A_3}^n = \omega_3^2 l_{O_2 A} = \omega_3^2 (O_2 A) \mu_l =$

$= \dots \frac{M}{c^2}$ . Довжина відрізка, що зображує вектор  $\bar{a}_{A_3}^n$  на плані прискорень,

визначиться з рівності:  $(\pi_3) = \frac{a_{A_3}^n}{\mu_a} = \dots \text{мм}$ . Вектор  $\bar{a}_{A_3}^\tau \perp O_2A$ .

Вирішимо графічно систему векторних рівнянь для точки  $A_3$ . Для цього, відповідно до першого рівняння, на плані із точки  $a_{12}$  відкладемо вектор  $\overline{a_{12}k_2} \perp O_2A$  у зазначеному на рис. 4.1,  $a$  напрямку. Через кінець  $k_2$  цього вектора проведемо пряму  $// O_2A$ . Потім, за другим рівнянням з полюса  $\pi$  відкладемо вектор  $\overline{\pi n_3} // AO_2$  в напрямку від  $A$  до  $O_2$  і через точку  $n_3$  проведемо пряму  $\perp O_2A$ . Перетинання цієї прямої з лінією, проведеної через точку  $k_2$ , дає точку  $a_3$ . Вектор  $\overline{\pi a_3}$  зображує прискорення  $\bar{a}_{A_3}$  в масштабі  $\mu_a$ . Із плану прискорень:

$$a_{A_3} = (\pi a_3) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}; a_{A_3 A_{12}} = (a_{12} a_3) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2};$$

$$a_{A_3}^\tau = (n_3 a_3) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}.$$

Кутове прискорення куліси 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{A_3}^\tau}{l_{O_2A}} = \frac{a_{A_3}^\tau}{(O_2A) \mu_l} = \dots c^{-2}.$$

Його напрямок визначений за напрямком  $\bar{a}_{A_3}^\tau$  (або  $\overline{n_3 a_3}$ ) і показаний на рис. 4.1,  $a$ , звідки видно, що куліса 3 у цей момент обертається уповільнено, оскільки напрямки  $\omega_3$  і  $\varepsilon_3$  протилежні.

Прискорення точки  $B$  куліси 3 можна знайти за теоремою подібності, користуючись пропорцією:

$$\frac{O_2B}{O_2A} = \frac{a_B}{a_{A_3}} = \frac{(\pi b)}{(\pi a_3)}, \text{ звідки } (\pi b) = (\pi a_3) \frac{O_2B}{O_2A} = \dots \text{мм}.$$

Вектор  $\bar{a}_B // \bar{a}_{A_3}$  і однакою з ним спрямований, тому на плані з полюса  $\pi$  відкладаємо вектор  $\overline{\pi b}$  за напрямком  $\overline{\pi a_3}$ . Модуль прискорення точки

$B$  буде дорівнювати:  $a_B = (\pi b) \mu_a = \dots \frac{M}{c^2}$ .

## 5 ВИЗНАЧЕННЯ ЗРІВНОВАЖУВАЛЬНОГО МОМЕНТУ ВАЖІЛЬНОГО МЕХАНІЗМУ МЕТОДОМ М. Є. ЖУКОВСЬКОГО

*Мета практичного заняття:* навчитися будувати важіль Жуковського для заданого положення важільного механізму й визначати зрівноважувальний момент, діючий на ведучу ланку.

*Література до заняття:* [1] с. 260–262, 326–334; [2] с. 84–90; [3] с. 59–64; [6] с. 26–29.

*Короткі теоретичні відомості й вказівки до рішення задач за темою заняття.*

Задача силового аналізу важільного механізму полягає у визначенні сил взаємодії (реакцій) у всіх кінематичних парах механізму та зрівноважувального моменту (або зрівноважувальної сили), що необхідно прикласти до його ведучої ланки (кривошипа), щоб зрівноважити дію на даний механізм всіх інших силових факторів (сил і моментів).

Силовий аналіз виконують за структурними групами Ассура, оскільки вони є статично визначеними системами. Починають силовий аналіз із останньої приєднаної структурної групи й шляхом послідовного переходу, у порядку структурного аналізу від групи до групи, закінчують розглядом механізму I класу (кривошипа 1). На кривошип 1 крім зовнішніх сил, сил інерції й реакцій з боку інших ланок, діє ще й зрівноважувальний момент  $M_{зр}$ , або зрівноважувальна сила  $F_{зр}$ , що прикладені до вала кривошипа із боку електродвигуна через передавальний механізм. Якщо вал кривошипа з'єднаний з валом електродвигуна за допомогою муфти, то треба прикласти до кривошипа зрівноважувальний момент  $M_{зр}$ , якщо ж вони будуть з'єднані за допомогою зубчастої передачі, то треба прикласти зрівноважувальну силу  $F_{зр}$ . Будемо далі вважати, що на кривошип діє зрівноважувальний момент  $M_{зр}$ .

Фізичний зміст зрівноважувального моменту полягає в тому, що він є як би найменшим рушійним моментом, який діє з боку двигуна на ведучу ланку, що може перебороти сили опору й змусити розглянутий механізм рухатися в заданому напрямку за заданим законом.

Зрівноважувальний момент  $M_{зр}$  може бути визначений у результаті виконання повного силового розрахунку механізму, або з використанням, так званого, важеля Жуковського. Визначення  $M_{зр}$  методом побудови важеля Жуковського застосовується в тих випадках, коли нема потреби робити повний силовий розрахунок з визначенням реакцій в кінематичних парах, а лише потрібно або визначити необхідну для привода даного механізму потужність електродвигуна, або перевірити знайдене в результаті силового розрахунку механізму значення  $M_{зр}$ .

Для побудови важеля Жуковського необхідно план швидкостей механізму в розглянутому його положенні збільшити (наскільки це дозволяє відведене для побудови місце), повернути на  $90^0$  у будь-який бік й перенести на нього всі діючі на механізм зовнішні силові фактори.

При цьому всі діючі на механізм моменти сил (моменти зовнішніх сил, сил інерції й ін.) необхідно переносити на важіль Жуковського у вигляді пар сил, якими зазначені моменти попередньо повинні бути замінені. Рекомендується вектори сил, що становлять пари, направляти перпендикулярно тій ланці, на яку діє відповідний момент, і прикладати в крайніх точках ланки (найчастіше в шарнірах), швидкості яких показані на відповідному плані швидкостей. Розкладання моментів на пари сил повинне бути показане на схемі механізму.

Після цього вектори всіх діючих сил зі схеми навантаженого механізму переносяться в однойменні точки важеля строго паралельно самим собі, і складається рівняння рівноваги важеля у вигляді рівності нулю суми моментів всіх діючих на нього сил щодо полюса  $p$  поверненого плану швидкостей. При складанні рівняння рівноваги важеля Жуковського, плечі сил необхідно показувати й вимірювати безпосередньо на побудованому важелі й підставляти їх у рівняння отриманими значеннями в міліметрах.

В результаті рішення цього рівняння рівноваги знаходять зрівноважувальний момент  $M_{zp}$ . Якщо значення  $M_{zp}$  вийде додатним, то це означає, що напрямок моменту було обрано правильно. При від'ємному значенні  $M_{zp}$ , його напрямок треба буде змінити на протилежний.

Розглянемо рішення задачі з визначення зрівноважувального моменту методом важеля Жуковського в загальному вигляді (без розрахунків), не зупиняючись докладно на побудовах планів швидкостей, прискорень і визначенні інерційних навантажень, оскільки ці теми вже були розглянуті раніше (див. розділи 2–4). Крім того, звичайно при рішенні задач з визначення  $M_{zp}$ , навантаження на ланки механізму визначати не треба, оскільки вони задаються, як за модулем, так і за напрямком. У такому випадку не треба будувати й план прискорень. Також у задачі може бути не задана кутова швидкість кривошипа  $\omega_1$ . Тоді почати рішення задачі необхідно з того, що задати  $\omega_1$  за напрямком, і побудувати план швидкостей без урахування  $\mu_v$  – план можливих швидкостей, який і використовувати потім для побудови важеля Жуковського.

### Задача.

Методом важеля Жуковського в заданому положенні механізму (рис. 5.1) визначити зрівноважувальний момент  $M_{zp}$ , прикладений до кривошипа 1, розрахувавши попередньо інерційні навантаження, що діють на ланки механізму (сили й моменти сил інерції). При цьому відомі:

$\omega_1 = \text{const} = \dots c^{-1}$ ,  $\mu_1 = \dots \frac{M}{mm}$ . Будемо вважати, що відомі також маси ланок

$m_i$  (кг), їх центральні моменти інерції  $I_{S_i}$  (кг·м<sup>2</sup>), сили ваги ланок  $G_i$  (Н), і сила корисного (виробничого) опору  $\bar{F}_{ко}$  (Н), що прикладена до вихідної ланки 3 і спрямована проти її руху.

### Рішення задачі.

Щоб визначити інерційні навантаження, що діють на ланки, для заданого положення механізму побудуємо план швидкостей (див. рис. 5.1), вирішивши графічно векторне рівняння  $\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}$ , і розрахувавши в результаті лінійні швидкості точок, а також кутову швидкість шатуна 2.

Потім побудуємо план прискорень (див. рис. 5.1), вирішивши графічно векторне рівняння  $\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t$ , і розрахувавши в результаті лінійні прискорення точок (у тому числі й прискорення центрів мас), а також кутове прискорення шатуна 2.

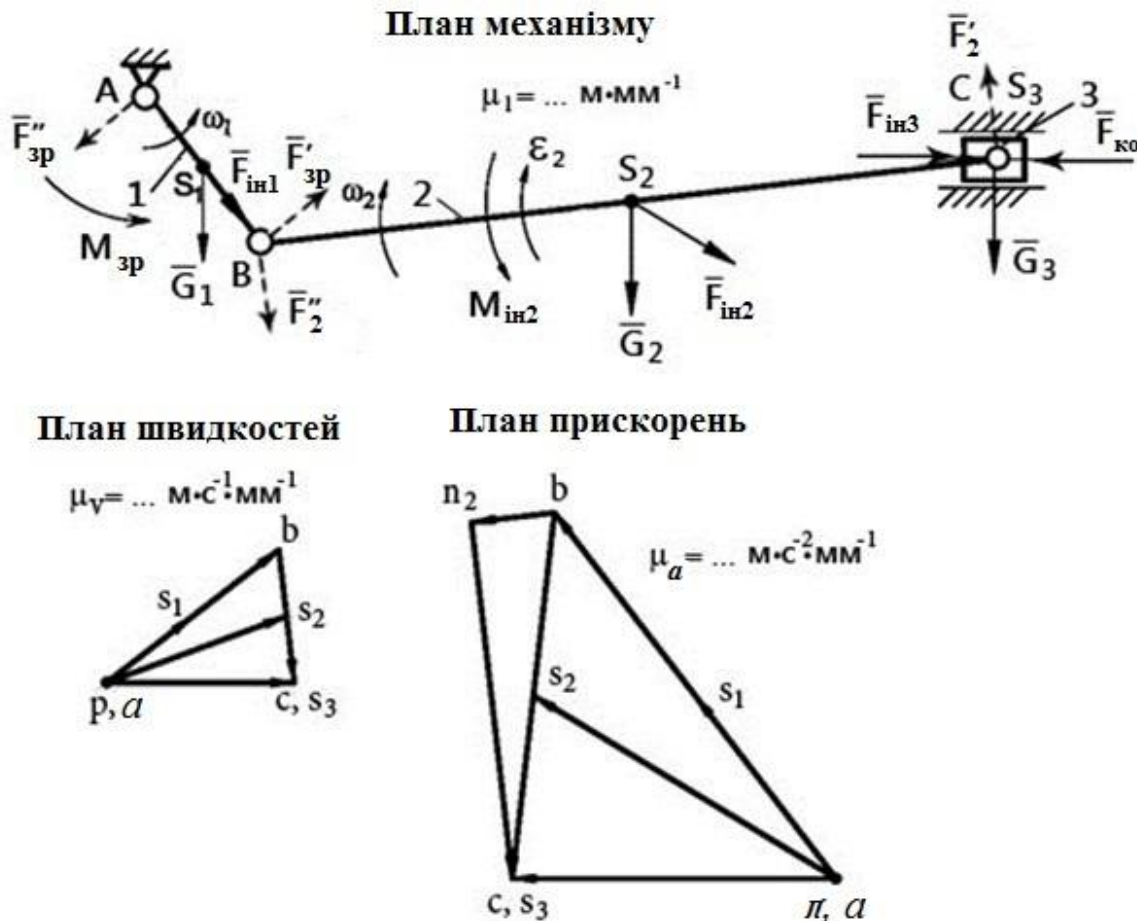


Рисунок 5.1— План навантаженого механізму, плани швидкостей і прискорень

Використовуючи отримані дані, визначимо сили й моменти сил інер-

Побудуємо важіль Жуковського (рис. 5.2), для чого план швидкостей механізму збільшимо й повернемо на  $90^0$  за годинниковою стрілкою. Потім перенесемо на нього всі діючі на механізм зовнішні силові фактори:

- силу корисного опору  $\overline{F}_{\kappa o}$ ;
- сили ваги ланок  $\overline{G}_i$ ;
- сили  $\overline{F}_{in_i}$  й моменти сил  $M_{in_i}$  інерції ланок;
- зрівноважувальний момент  $M_{зр}$ .

The diagram illustrates a three-link mechanism. Link 1 is the fixed frame. Link 2 is a vertical link of length  $h_{G_2}$  with a center of mass  $S_2$  at a distance  $h_{G_2}$  from the base joint  $c$ . Link 3 is a link of length  $h_{F_2}$  pivoted at joint  $b$  on Link 2 and joint  $p, a$  on Link 1. The distance from joint  $p, a$  to joint  $b$  is  $h_{G_1}$ . The center of mass of Link 3 is  $S_1$  at a distance  $h_{F_2}$  from joint  $p, a$ . External forces  $\vec{F}_{K0}$  and  $\vec{F}_2$  are applied at joints  $c$  and  $b$  respectively. Internal forces  $\vec{F}_{iH1}$ ,  $\vec{F}_{iH2}$ , and  $\vec{F}_{iH3}$  are shown at joints  $p, a$ ,  $b$ , and  $c$  respectively. Gravity forces  $\vec{G}_1$ ,  $\vec{G}_2$ , and  $\vec{G}_3$  act downwards at centers of mass  $S_1$ ,  $S_2$ , and  $S_3$ . Reaction forces  $\vec{F}'_{3p}$  and  $\vec{F}''_{3p}$  are shown at joint  $p, a$ . The diagram is labeled with various symbols for forces, dimensions, and joints.

При цьому всі діючі на механізм моменти переносимо на важіль Жуковського у вигляді пар сил. Так, момент  $M_{iH_7}$ , що діє на ланку 2 розгляну-

того механізму, замінимо парою сил  $\bar{F}'_2 = -\bar{F}''_2$ , перпендикулярних ланці 2 і прикладених до його крайніх точок  $B$  і  $C$ :

$$F'_2 = F''_2 = \frac{M_{i_{h_2}}}{l_{BC}} = \dots H,$$

де  $l_{BC}$  – плече пари сил (довжина ланки 2),  $m$ .

Для урахування  $M_{zp}$  на важелі Жуковського, його також необхідно умовно замінити парою сил  $\bar{F}'_{zp} = -\bar{F}''_{zp}$ , перпендикулярних кривошипу 1 і прикладених до його крайніх точок  $A$  і  $B$ , при цьому величини сил пари  $F'_{zp} = F''_{zp} = \frac{M_{zp}}{l_{AB}}$  невідомі, і після їх знаходження зрівноважувальний момент визначиться, як  $M_{zp} = F_{zp} \cdot l_{AB}$ , де  $l_{AB}$  – дійсна довжина кривошипа 1,  $m$ .

Розкладання моментів на пари сил показано на схемі механізму (див. рис. 5.1).

Значення фіктивної (умовної) зрівноважувальної сили  $F'_{zp}$ , знаходимо з рівняння рівноваги важеля Жуковського:

$$\begin{aligned} \sum M_p(\bar{F}_i) &= 0. \\ -F_{ko}(pc) + F_{i_{h_3}}(pc) - G_2 h_{G_2} + F_{i_{h_2}} h_{F_2} - F'_2 h_{F'_2} - \\ &- F''_2 h_{F''_2} - G_1 h_{G_1} + F'_{zp}(pb) = 0, \end{aligned}$$

звідки:

$$\begin{aligned} F'_{zp} &= (F_{ko}(pc) - F_{i_{h_3}}(pc) + G_2 h_{G_2} - F_{i_{h_2}} h_{F_2} + \\ &+ F'_2 h_{F'_2} + F''_2 h_{F''_2} + G_1 h_{G_1}) / (pb) = \dots H. \end{aligned}$$

При цьому  $M_{zp} = F'_{zp} \cdot l_{AB} = \dots H m$ .

Знак отриманого зрівноважувального моменту  $M_{zp}$  буде свідчити про правильність або помилковість вибору його напрямку.



## 6 ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА КОРИСНОЇ ДІЇ МАШИНИ, А ТАКОЖ ПОТУЖНОСТІ ДВИГУНА ДЛЯ ЇЇ ПРИВОДА

*Мета практичного заняття:* навчитися визначати коефіцієнт корисної дії машини при змішаному (комбінованому) з'єднанні в ній механізмів, а також потужність двигуна для її привода за заданою потужністю на вихідному валу одного з механізмів машини.

*Література до заняття:* [1] с. 304–313; [2] с. 99–106; [3] с. 75, 76; [4] с. 220, 221.

*Короткі теоретичні відомості й вказівки до рішення задач за темою заняття.*

Механізм або машина вважається тим досконаліше, чим більша частина енергії (за інших рівних умов), що підводиться до них, витрачається на подолання корисних опорів. Ефективність використання енергії в механізмі або машині характеризується, так званим, механічним коефіцієнтом корисної дії (ККД).

Механічним ККД називають відношення роботи (або середньої потужності) сил корисного опору до роботи (або середньої потужності) рушійних сил за цикл усталеного руху:

$$\eta = \frac{|A_{\text{ко}}|}{A_p} = \frac{P_{\text{ко}}}{P_p}.$$

Як правило, сучасні машини складаються з багатьох механізмів, ККД яких відомі, або їх можна порівняно легко знайти. Проте, загальний ККД машини залежить не тільки від ККД окремих механізмів, що входять у її состав, але й від способу з'єднання цих механізмів у машині. Розрізняють три способи з'єднання механізмів: послідовне (рис. 6.1), паралельне (рис. 6.2) й змішане (комбіноване).



Рисунок 6.1 – Послідовне з'єднання механізмів

Загальний механічний ККД послідовно з'єднаних механізмів (див. рис. 6.1) дорівнює добутку механічних ККД окремих механізмів, що становлять одну машину:

$$\eta_{\Sigma}^{\text{посл}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots \eta_n.$$

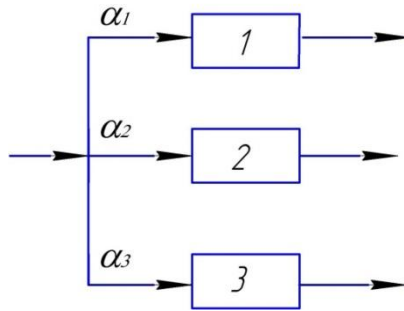


Рисунок 6.2 – Паралельне з'єднання механізмів

При паралельному з'єднанні механізмів у машині (див. рис. 6.2), її загальний ККД визначиться, як:

$$\eta_{\Sigma}^{nap} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \eta_i,$$

де  $\alpha_i$  – коефіцієнт розподілу енергії, що визначає яка частка всієї енергії (при розподілі її по декількох паралельних потоках) іде на надання руху даного  $i$ -го механізму. При цьому  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  для даного розподілу енергії.

Таким чином, при паралельному з'єднанні механізмів загальний ККД дорівнює сумі добутків ККД кожного з них на відповідний коефіцієнт розподілу енергії.

При рішенні задач по визначенню ККД машини, що представляє собою змішане (комбіноване) з'єднання механізмів, необхідно виділити в ній послідовні й паралельні ланцюги з'єднаних між собою механізмів, а потім застосувати до них розглянуті вище формули.

Крім того, щоб уникнути помилок при рішенні подібних задач, потрібно завжди пам'ятати, що ККД реальної машини перебуває в межах:  $0 \leq \eta < 1$ , і не допускати помилок при виборі послідовності виконання арифметичних дій.

### Задача.

Визначити загальний ККД машини  $\eta_{\Sigma}$  при комбінованому способі з'єднання механізмів у ній (рис. 6.3), потрібну потужність двигуна  $P_{об}$  за заданою потужністю на вихідному валу 4-го механізму  $P_4 = 2 \text{ кВт}$  та потужності на вихідних валах 7-го й 14-го механізмів ( $P_7$  і  $P_{14}$ ). При цьому відомі ККД всіх механізмів, з яких складається машина і окремі значення коефіцієнтів розподілу енергії:

$$\eta_1 = \eta_5 = \eta_{10} = 0,8; \eta_2 = \eta_4 = \eta_7 = \eta_{12} = 0,7; \eta_3 = \eta_6 = \eta_9 = 0,9; \\ \eta_8 = \eta_{13} = 0,6; \eta_{11} = \eta_{14} = 0,85; \alpha_3 = \alpha_6 = 0,2; \alpha_5 = \alpha_8 = 0,3; \alpha_{12} = 0,4.$$

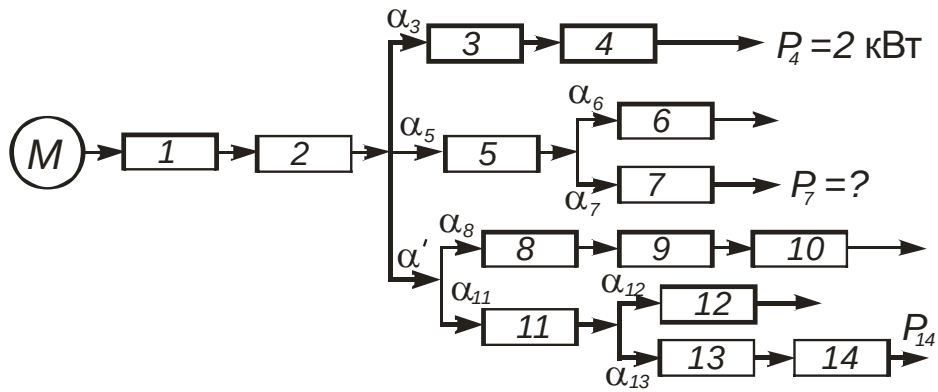


Рисунок 6.3 – Схема машини

### Рішення задачі.

Насамперед, визначимо відсутні коефіцієнти  $\alpha_i$ , склавши наступні рівняння:

$$\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha' = 1, \text{ звідси } \alpha' = 1 - \alpha_3 - \alpha_5 = 1 - 0,2 - 0,3 = 0,5;$$

$$\alpha_6 + \alpha_7 = 1, \text{ тоді } \alpha_7 = 1 - \alpha_6 = 1 - 0,2 = 0,8;$$

$$\alpha_8 + \alpha_{11} = 1, \text{ звідси } \alpha_{11} = 1 - \alpha_8 = 1 - 0,3 = 0,7;$$

$$\alpha_{12} + \alpha_{13} = 1, \text{ тоді } \alpha_{13} = 1 - \alpha_{12} = 1 - 0,4 = 0,6.$$

Визначимо загальний ККД даної машини (див. рис. 6.3), використовуючи формули для послідовного й паралельного з'єднання механізмів:

$$\begin{aligned} \eta_{\Sigma} &= \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot (\alpha_3 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 + \alpha_5 \cdot \eta_5 (\alpha_6 \cdot \eta_6 + \alpha_7 \cdot \eta_7) + \alpha' (\alpha_8 \cdot \eta_8 \cdot \eta_9 \cdot \eta_{10} + \alpha_{11} \cdot \eta_{11} (\alpha_{12} \cdot \eta_{12} + \alpha_{13} \cdot \eta_{13} \cdot \eta_{14}))) = \\ &= 0,8 \cdot 0,7 \cdot (0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot (0,2 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,7) + 0,5 \cdot (0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,85 \cdot (0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,85))) = \\ &= 0,56 \cdot (0,126 + 0,24 \cdot (0,18 + 0,56) + 0,5 \cdot (0,1296 + 0,595 \cdot (0,28 + 0,306))) = \\ &= 0,56 \cdot (0,126 + 0,1776 + 0,5 \cdot (0,1296 + 0,3487)) = 0,56 \cdot (0,126 + 0,1776 + 0,239) = 0,304 \approx 0,3. \end{aligned}$$

Визначимо потрібну потужність двигуна, використовуючи базову формулу механічного ККД і потужність на вихідному валу 4-го механізму:

$$\frac{P_4}{P_{\text{дв}}} = \eta' = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \alpha_3 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,07056 \approx 0,07.$$

$$\text{Із цього рівняння: } P_{\text{дв}} = \frac{P_4}{\eta'} = \frac{2}{0,07} = 28,57 \text{ кВт.}$$

Аналогічно складемо рівняння для визначення  $P_7$ :

$$\frac{P_7}{P_{\text{дв}}} = \eta'' = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \alpha_5 \cdot \eta_5 \cdot \alpha_7 \cdot \eta_7 = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,075,$$

звідси потужність на вихідному валу 7-го механізму:

$$P_7 = P_{\partial 6} \cdot \eta'' = 28,57 \cdot 0,075 = 2,14 \text{ кВт}.$$

Аналогічно складемо рівняння для визначення  $P_{14}$ :

$$\frac{P_{14}}{P_{\partial 6}} = \eta''' = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \alpha' \cdot \alpha_{11} \cdot \eta_{11} \cdot \alpha_{13} \cdot \eta_{13} \cdot \eta_{14} = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,85 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,85 = 0,051,$$

звідси потужність на вихідному валу 14-го механізму:

$$P_{14} = P_{\partial 6} \cdot \eta''' = 28,57 \cdot 0,051 = 1,46 \text{ кВт}.$$

**Відповідь:**  $\eta_{\Sigma} = 0,3$ ;  $P_{\partial 6} = 28,57 \text{ кВт}$ ;  $P_7 = 2,14 \text{ кВт}$ ;  $P_{14} = 1,46 \text{ кВт}$ .

## 7 ПРИВЕДЕННЯ СИЛ І МАС ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ, ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ

*Мета практичного заняття:* навчитися для заданого положення механізму визначати параметри його динамічної моделі: приведений до кривошипа його момент інерції, а також приведений момент зовнішніх навантажень, що діють на механізм.

*Література до заняття:* [1] с. 324–326, 334–340; [2] с. 90–95; [3] с. 70–73; [4] с. 131–140.

*Короткі теоретичні відомості й вказівки до рішення задач за темою заняття.*

Механізми звичайно є багатоланковими системами, навантаженими великою кількістю силових факторів. Визначення закону руху такої системи являє собою важку задачу. Однак у механізмів з рухомістю, що дорівнює одиниці ( $W=1$ ), насамперед треба визначити закон руху однієї ланки – вхідної, а потім, використовуючи звичайні кінематичні методи, знайти характер руху інших ланок. Така постановка задачі привела до висновку замінити багатоланковий механізм із обертовою вхідною ланкою його умовною динамічною моделлю у вигляді механізму важеля, що складається із кривошипа (так званої ланки приведення) і стояка (рис. 7.1).



Рисунок 7.1 – Динамічна модель механізму з обертовою вхідною ланкою

Позначимо кутову швидкість кривошипа моделі (ланки приведення)  $\omega_M$ , а кутову швидкість вхідної ланки розглянутого механізму  $\omega_1$ . Щоб кривошип моделі й вхідна ланка механізму мали однакові закони руху, тобто  $\omega_M = \omega_1$  для будь-якого моменту часу, параметри, що визначають закон руху кривошипа моделі, повинні бути еквівалентні всьому навантаженню на розглянутий механізм і інертності всіх його ланок. Такими па-

раметрами є силові навантаження кривошипа моделі, за яке приймають момент  $M_{\Sigma}^{np}$ , і його момент інерції щодо осі обертання  $I_{\Sigma}^{np}$ .

Таким чином, при побудові моделі механізму всі сили й моменти, прикладені до нього, виявляються приведеними до однієї ланки (ланки приведення) і заміненими сумарним приведеним моментом  $M_{\Sigma}^{np}$ . Так само, маси всіх ланок (точніше кажучи, їх інертності) виявляються також приведеними до однієї ланки й заміненими сумарним приведеним моментом інерції  $I_{\Sigma}^{np}$ . Отже, побудова динамічної моделі полягає в приведенні сил і моментів (визначенні  $M_{\Sigma}^{np}$ ) і в приведенні мас (визначенні  $I_{\Sigma}^{np}$ ).

Розглянемо умову приведення сил і моментів.

Сумарний приведений момент  $M_{\Sigma}^{np}$ , прикладений до ланки приведення, у тому випадку еквівалентний всім силовим факторам, які діють на ланки механізму, якщо він зможе розвинути потужність, рівну сумі потужностей, що розвиваються всіма силами і моментами, які діють на ланки механізму:

$$P_{M_{\Sigma}^{np}} = \sum_{i=1}^n P_i,$$

де  $P_{M_{\Sigma}^{np}}$  – потужність, що розвивається сумарним приведеним моментом  $M_{\Sigma}^{np}$ , Вт;

$P_i$  – потужності, що розвиваються силами  $F_i$  й моментами  $M_i$ , які діють на  $i$ -у ланку механізму і які підлягають приведенню, Вт.

Потужність сили  $F_i$ :

$$P_{F_i} = F_i V_k \cos(\bar{F}_i \wedge \bar{V}_k),$$

де  $\bar{V}_k$  – швидкість точки прикладання сили  $\bar{F}_i$ , м/с;

$(\bar{F}_i \wedge \bar{V}_k)$  – менший кут між напрямками  $\bar{F}_i$  й  $\bar{V}_k$ .

Потужність моменту  $M_i$ :

$$P_{M_i} = \pm M_i \omega_i,$$

де  $\omega_i$  – кутова швидкість ланки механізму, на яку діє момент, с<sup>-1</sup>.

Потужності приписують знак. Знак потужності сили визначає знак косинуса. Знаки потужності моменту: знак плюс – якщо  $M_i$  й  $\omega_i$  мають однаковий напрямок, знак мінус – якщо протилежне.

Підставивши вирази для потужностей силових факторів в умову приведення сил і моментів, одержимо формулу для визначення сумарного приведенного моменту:

$$M_{\Sigma}^{np} = \sum_{i=1}^n \left( F_i \frac{V_k}{\omega_1} \cos(\bar{F}_i \wedge \bar{V}_k) \pm M_i \frac{\omega_i}{\omega_1} \right).$$

Розглянемо умову приведення мас.

Приведений момент інерції  $I_{\Sigma}^{np}$ , який повинен мати кривошип моделі щодо осі його обертання, у тому випадку є еквівалентом загальної інертності розглянутого механізму, якщо кінетична енергія моделі дорівнює сумі кінетичних енергій всіх ланок механізму:

$$T_{mod} = \sum_{i=1}^n T_i,$$

де  $T_{mod}$  – кінетична енергія моделі, Дж;

$T_i$  – кінетична енергія  $i$ -ої ланки механізму, Дж.

Кінетична енергія моделі, тобто ланки приведення, що робить обертотий рух з кутовою швидкістю  $\omega_M = \omega_1$ , визначається таким чином:

$$T_{mod} = \frac{I_{\Sigma}^{np} \omega_1^2}{2}.$$

Ланки в плоских механізмах можуть робити три види руху: поступальний, обертовий та плоский. Кінетична енергія ланки при поступальному русі:

$$T_i = \frac{m_i \cdot V_i^2}{2},$$

де  $m_i$  – маса  $i$ -ої ланки, кг;

$V_i$  – швидкість  $i$ -ої ланки або будь-якої її точки, м/с.

У випадку обертового руху навколо осі  $A$ , кінетична енергія ланки:

$$T_i = \frac{I_{iA} \omega_i^2}{2},$$

де  $I_{iA}$  – момент інерції  $i$ -ої ланки щодо його осі обертання,  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ;

$\omega_i$  – кутова швидкість  $i$ -ої ланки,  $\text{с}^{-1}$ .

Якщо ж буде заданий центральний момент інерції ланки  $I_{Si}$ , тобто момент інерції ланки щодо осі, яка проходить через його центр мас, то кінетична енергія обертової ланки визначиться, як:

$$T_i = \frac{m_i V_{Si}^2}{2} + \frac{I_{Si} \omega_i^2}{2},$$

де  $V_{Si}$  – лінійна швидкість центра мас  $i$ -ої ланки,  $\text{м/с}$ .

За цією ж формулою визначається й кінетична енергія ланки, що робить плоский рух. А на підставі того, що прості рухи (поступальний і обертовий) можна розглядати як окремі випадки плоского, ця формула може бути використана для всіх трьох випадків руху ланки в площині. Підставивши її в умову приведення мас, одержимо формулу для визначення сумарного приведенного моменту інерції:

$$I_{\Sigma}^{np} = \sum_{i=1}^n \left( m_i \left( \frac{V_{Si}}{\omega_1} \right)^2 + I_{Si} \left( \frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 \right).$$

Очевидно, що приведенний момент  $M_{\Sigma}^{np}$  і приведенний момент інерції  $I_{\Sigma}^{np}$  не залежать від кутової швидкості ланки приведення, тому що в формули для їх визначення входять тільки відношення швидкостей. Звідси випливає, що приведення сил і мас можна виконати, не знаючи кутової швидкості ланки приведення, а відношення швидкостей можуть бути представлені через відповідні відрізки плану можливих швидкостей, тобто плану швидкостей, побудованого без урахування  $\mu_v$ .

Розглянемо рішення задач по приведенню сил і мас плоских важільних механізмів у загальному вигляді (без розрахунків), не зупиняючись докладно на побудовах планів швидкостей, оскільки ця тема вже була розглянута раніше (див. розділи 2, 4).



### Задача № 1.

На ланки важільного механізму діють сили  $\bar{F}_2, \bar{F}_3$  (H) і момент сил  $M_2$  (H·м), відомі й за модулем й за напрямком. Для заданого положення механізму ( $\mu_l = \dots \frac{M}{MM}$ ) визначити приведений до вхідної ланки (кривошипу 1) момент від зазначених силових факторів (рис. 7.2).

### Рішення задачі № 1.

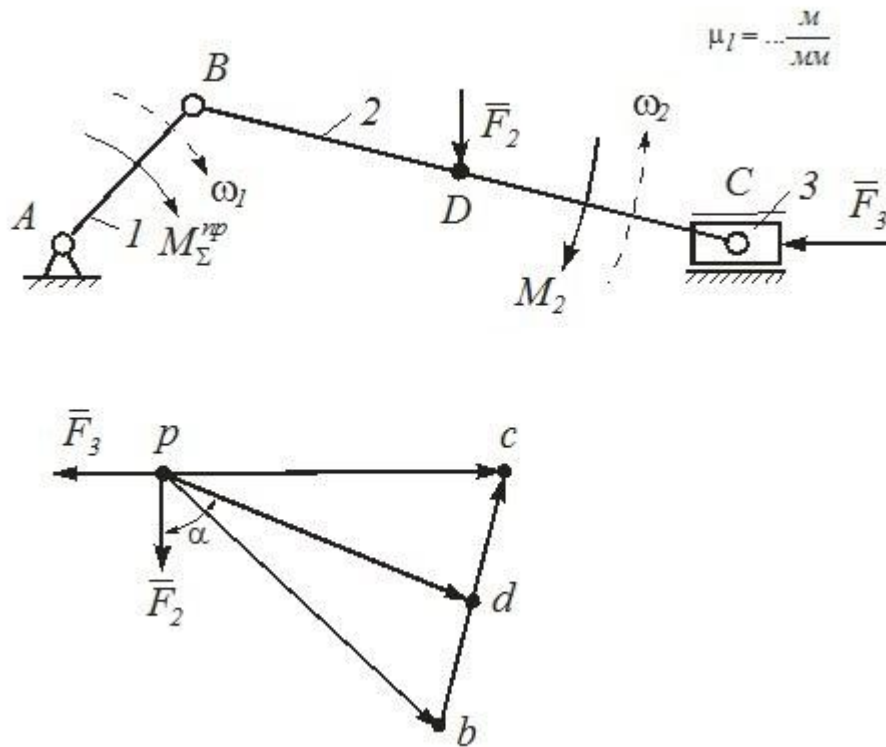


Рисунок 7.2 – План навантаженого механізму й план можливих швидкостей

Для рішення цієї задачі будемо використовувати умову приведення сил і моментів. Задамося довільно напрямками кутової швидкості кривошипа  $\omega_1$  й приведенного моменту  $M_{\Sigma}^{np}$  (див. рис. 7.2). Направимо їх в один бік (за годинниковою стрілкою), щоб знак потужності, яка розвивається приведеним моментом  $M_{\Sigma}^{np}$ , був додатним.

Якщо в результаті рішення задачі значення  $M_{\Sigma}^{np}$  буде мати додатний знак, то це буде означати, що напрямок моменту було обрано правильно. При від'ємному значенні  $M_{\Sigma}^{np}$ , його напрямок повинен бути змінений на протилежний.

Запишемо умову приведення сил і моментів:

$$P_{M_{\Sigma}^{np}} = P_{F_2} + P_{M_2} + P_{F_3}.$$

Підставивши формули потужностей сил і моментів, одержимо:

$$M_{\Sigma}^{np} \omega_1 = F_2 V_D \cos(\bar{F}_2 \wedge \bar{V}_D) \pm M_2 \omega_2 + F_3 V_C \cos(\bar{F}_3 \wedge \bar{V}_C).$$

Позначивши кут  $(\bar{F}_2 \wedge \bar{V}_D)$ , як  $\alpha$ , а кут  $(\bar{F}_3 \wedge \bar{V}_C)$ , як  $\beta$ , і розділивши всі складові на  $\omega_1$ , одержимо формулу для визначення приведенного моменту:

$$M_{\Sigma}^{np} = F_2 \frac{V_D}{\omega_1} \cos \alpha \pm M_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} + F_3 \frac{V_C}{\omega_1} \cos \beta.$$

Щоб знайти невідомі параметри в цій формулі (швидкості, кути, знак потужності моменту  $M_2$ ), побудуємо план можливих швидкостей (без урахування  $\mu_v$ ), вирішивши графічно векторне рівняння  $\bar{V}_c = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}$

(див. рис. 7.2) і зобразивши швидкість  $\bar{V}_B$ , значення якої при невідомому значенні  $\omega_1$  також невідомо, відрізком довільної довжини ( $pb$ ).

Використовуючи побудований план можливих швидкостей, запишемо формули шуканих кінематичних параметрів:

$$V_D = (pd)\mu_v; V_C = (pc)\mu_v; \omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{(bc)\mu_v}{(CB)\mu_l}; \omega_1 = \frac{V_B}{l_{AB}} = \frac{(pb)\mu_v}{(AB)\mu_l}$$

Потужність моменту  $M_2$  від'ємна, оскільки  $M_2$  й  $\omega_2$  мають протилежний напрямок (див. рис. 7.2). Для одержання кутів між векторами сил і швидкостями точок їх прикладання (кутів  $\alpha$  і  $\beta$ ), треба сили зі схеми механізму перенести в полюс плану швидкостей  $p$  (див. рис. 7.2), після чого замірити відповідні кути транспортиром (кут  $\beta$  можна й не заміряти, оскільки очевидно, що  $\beta = 180^\circ$ ).

Підставивши отримані результати й скоротивши масштабні коефіцієнти, одержимо остаточну формулу для приведенного моменту:

$$M_{\Sigma}^{np} = F_2 \frac{(pd)(AB)\mu_l}{(pb)} \cos \alpha - M_2 \frac{(bc)(AB)}{(pb)(CB)} + F_3 \frac{(pc)(AB)\mu_l}{(pb)} \cos \beta = \\ = \dots H \cdot m.$$

Довжини відрізків, що зображують ланки й швидкості, необхідно вимірювати безпосередньо на побудованих планах механізму й швидкостей, відповідно, і підставляти їх у рівняння отриманими значеннями в міліметрах.

Знак одержаного приведенного моменту  $M_{\Sigma}^{np}$  буде свідчити про правильність або помилковість вибору його напрямку.

### Задача № 2.

Для заданого положення механізму (рис. 7.3) ( $\mu_l = \dots \frac{M}{мм}$ ) визначити приведений до вхідної ланки (кривошипу 1) момент інерції, якщо відомі маси ланок  $m_i$  (кг) і їх центральні моменти інерції  $I_{S_i}$  ( $кг \cdot м^2$ ).

### Рішення задачі № 2.

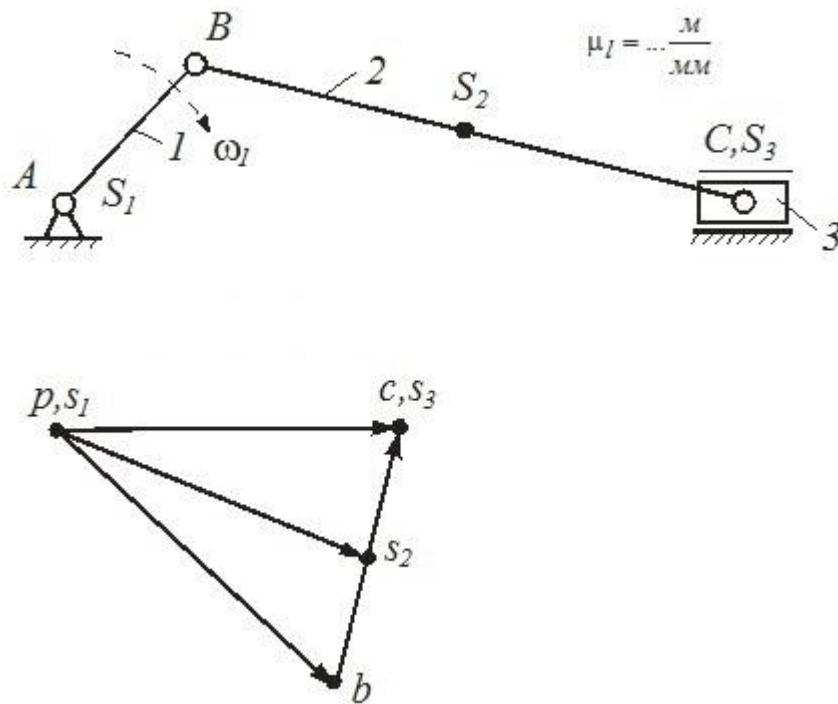


Рисунок 7.3 – План механізму й план можливих швидкостей

Для рішення цієї задачі будемо використовувати умову приведення мас:

$$T_{mod} = \sum_{i=1}^3 T_i = T_1 + T_2 + T_3,$$

де  $T_{mod} = \frac{I_{\Sigma}^{np} \omega_1^2}{2}$  – кінетична енергія моделі (ланки приведення)  
(див. рис. 7.1);

$T_1 = \frac{I_{S_1} \omega_1^2}{2}$  – кінетична енергія кривошипа (ланки 1) механізму, що робить обертовий рух;

$T_2 = \frac{m_2 V_{S_2}^2}{2} + \frac{I_{S_2} \omega_2^2}{2}$  – кінетична енергія шатуна (ланки 2), що робить плоский рух;

$T_3 = \frac{m_3 \cdot V_{S_3}^2}{2}$  – кінетична енергія повзуна (ланки 3), що робить поступальний рух.

Підставивши ці формули в умову приведення мас, одержимо:

$$\frac{I_{\Sigma}^{np} \omega_1^2}{2} = \frac{I_{S_1} \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_{S_2}^2}{2} + \frac{I_{S_2} \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_{S_3}^2}{2}.$$

Розділивши всі члени цієї рівності на  $\omega_1^2$ , і помноживши на 2, одержимо формулу для визначення приведенного моменту інерції:

$$I_{\Sigma}^{np} = I_{S_1} + m_2 \left( \frac{V_{S_2}}{\omega_1} \right)^2 + I_{S_2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left( \frac{V_{S_3}}{\omega_1} \right)^2.$$

Невідомими в цій формулі є кінематичні параметри, і для їх знаходження побудуємо план можливих швидкостей (без урахування  $\mu_v$ ), довільно задавшись напрямком кутової швидкості кривошипа  $\omega_1$  й вирішивши графічно векторне рівняння  $\overline{V_c} = \overline{V_B} + \overline{V_{CB}}$  (див. рис. 7.3). Швидкість кінця

кривошипа  $\overline{V_B}$ , величина якої при невідомому значенні  $\omega_1$  також невідома, зобразимо відрізком довільної довжини ( $pb$ ).

Використовуючи побудований план швидкостей, запишемо формули шуканих кінематичних параметрів:

$$V_{S_2} = (ps_2)\mu_v; V_{S_3} = (ps_3)\mu_v; \omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{(bc)\mu_v}{(CB)\mu_l}; \omega_1 = \frac{V_B}{l_{AB}} = \frac{(pb)\mu_v}{(AB)\mu_l}.$$

Підставивши отримані вирази й скоротивши масштабні коефіцієнти, одержимо остаточну формулу для приведеного моменту інерції:

$$I_{\Sigma}^{np} = I_{S_1} + m_2 \left( \frac{(ps_2)(AB)\mu_l}{(pb)} \right)^2 + I_{S_2} \left( \frac{(bc)(AB)}{(pb)(CB)} \right)^2 + m_3 \left( \frac{(ps_3)(AB)\mu_l}{(pb)} \right)^2 = \\ = \dots \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Довжини відрізків, що зображують ланки й швидкості, необхідно вимірювати безпосередньо на побудованих планах механізму й швидкостей, відповідно, і підставляти їх у рівняння отриманими значеннями в міліметрах.

## 8 КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ РЯДОВИХ ЗУБЧАСТИХ МЕХАНІЗМІВ І ПРОСТИХ ПЛАНЕТАРНИХ МЕХАНІЗМІВ АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ

*Мета практичного заняття:* навчитися визначати передаточні відношення рядових і планетарних зубчастих механізмів, та використовуючи їх, розраховувати величини й напрямки частот обертання ланок механізмів, а також навчитися визначати рухомість зубчастих механізмів і міжосьові відстані передач.

*Література до заняття:* [1] с. 137, 138, 145–158; [2] с. 167–171, 207–214; [3] с. 52–55; [4] с. 334, 335, 362, 379–387.

*Короткі теоретичні відомості й вказівки до рішення задачі № 1 за темою заняття.*

Основним кінематичним параметром зубчастого механізму будь-якої складності є його передаточне відношення, що визначається як відношення частоти обертання (або кутової швидкості) вхідного вала до частоти обертання (або кутової швидкості) вихідного вала.

Найпростішим зубчастим механізмом є триланковий механізм, що складається із двох зубчастих коліс та стояка, і називається одноступінчастим механізмом або одноступінчастою передачею. Одноступінчасті циліндричні передачі зовнішнього й внутрішнього зачеплення (рис. 8.1) відносяться до плоских зубчастих механізмів, призначених для передачі обертання між паралельними валами.

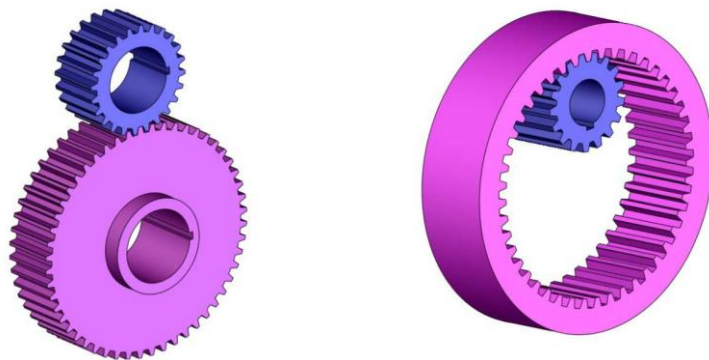


Рисунок 8.1 – Циліндричні передачі зовнішнього й внутрішнього зачеплення

До просторових механізмів відноситься одноступінчаста конічна передача, у якій осі валів перетинаються (рис. 8.2).

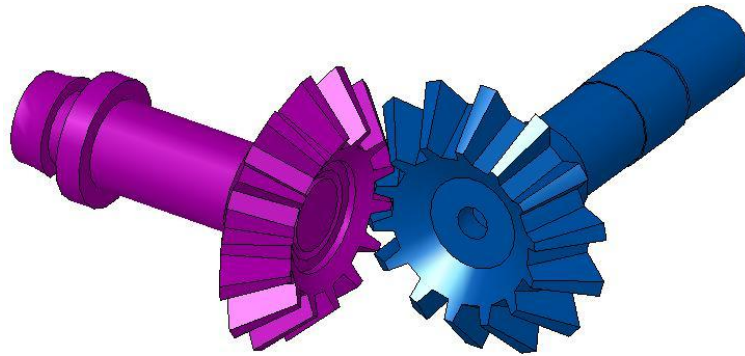
Передаточне відношення одноступінчастого зубчастого механізму (одного ступеня) можна визначити не тільки через частоти обертання або кутові швидкості пари коліс, що входять до його складу, але й через їх числа зубів:

$$U_{1-2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1},$$

де  $n_1$  і  $n_2$  – частоти обертання коліс 1 і 2,  $\text{хв}^{-1}$ ;

$\omega_1$  і  $\omega_2$  – кутові швидкості коліс 1 і 2,  $\text{с}^{-1}$ ;

$z_1$  і  $z_2$  – числа зубів коліс 1 і 2.



*Рисунок 8.2 – Просторова конічна передача*

Знак передаточного відношення залежить від напрямку обертання коліс. Оскільки при зовнішньому зачепленні кутові швидкості коліс мають різний напрямок, то в передачі зовнішнього зачеплення передаточне відношення завжди від'ємне. У передачі ж внутрішнього зачеплення колеса обертаються в один бік, тому знак передаточного відношення – додатний. Передаточне відношення конічної передачі знака не має, тому що він втрачає сенс через перетинання осей коліс.

Розглянуті одноступінчасті зубчасті механізми не можуть забезпечити великі передаточні відношення, і тому, коли виникає потреба в такому забезпеченні, застосовують багатоступінчасті рядові механізми. Рядовими називаються механізми, у яких осі обертання коліс нерухомі в просторі. Передаточне відношення багатоступінчастого рядового зубчастого механізму визначається, як добуток передаточних відношень його окремих ступенів.

Рухомість рядового зубчастого механізму визначається за формулою Чебишева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4,$$

де  $n$  – кількість рухомих ланок (при цьому потрібно враховувати, що число  $n$  не дорівнює числу зубчастих коліс, оскільки два колеса, з'єднані загальною віссю, утворюють одну рухому ланку);

$p_5$  – кількість кінематичних пар V класу (всі вони обертові і являють собою з'єднання стояка з зубчастими колесами);

$p_4$  – кількість кінематичних пар IV класу (це вищі пари і вони мають

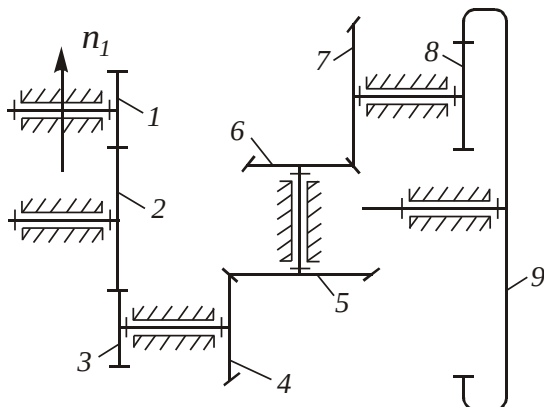
місце в зачепленні зубчастих коліс).

При рішенні задачі з кінематичного аналізу багатоступінчастого рядового зубчастого механізму, необхідно вміти визначати напрямки обертання коліс, використовуючи правило стрілок: пряма стрілка на бічній проекції колеса показує напрямок руху зубів колеса, видимих спостерігачеві. Тому при зовнішньому зачепленні, коли кутові швидкості коліс мають різний напрямок, прямі стрілки на бічній проекції коліс повинні бути напрямлені в різні боки. При внутрішньому зачепленні, коли колеса обертаються в один бік, стрілки будуть напрямлені в один бік. В кіничній передачі стрілки повинні чи сходитись під прямим кутом, чи розходитись.

Крім того, необхідно вміти визначати міжосьові відстані для плоских циліндричних передач зовнішнього й внутрішнього зачеплення через радіуси коліс, що утворюють ці передачі. При цьому колеса потрібно вважати некоригованими, тобто нарізаними без зміщення різального інструменту, а це означає, що радіуси початкових і ділільних кіл у них збігаються й будуть дорівнювати:  $r_{wi} = r_i = \frac{mz_i}{2}$ . Очевидно, що для циліндричної передачі

зовнішнього зачеплення міжосьова відстань дорівнює сумі радіусів коліс, а для передачі внутрішнього зачеплення – різниці радіусів коліс, що входять до складу передачі.

### Задача № 1.



$z_1 = 17; z_2 = 20; z_3 = 51; z_4 = 25;$   
 $z_5 = 50; z_6 = 20; z_7 = 40; z_8 = 15; z_9 = 60$

Визначити величини й напрямки частот обертання вала 5-го колеса й вихідного вала 9 зубчастого механізму, якщо частота обертання вхідного вала  $n_1 = 1000 \text{ хв}^{-1}$  (напрямки обертання коліс показати за правилом стрілок). Визначити рухомість механізму  $W$  і міжосьові відстані  $a_{w1-2}$  та  $a_{w8-9}$ , якщо модуль всіх зубчастих коліс  $m = 4 \text{ мм}$ . Числа зубів всіх коліс відомі.

### Рішення задачі № 1.

Багатоступінчастий рядовий зубчастий механізм має п'ять ступенів. З них два ступеня зовнішнього зачеплення (1–2 та 2–3), один ступінь внутрішнього зачеплення (8–9), і дві кіничні передачі (4–5 та 6–7).

Визначимо передаточне відношення багатоступінчастого рядового зубчастого механізму  $U_{1-9}$ , як добуток передаточних відношень його окремих ступенів. При цьому не будемо враховувати знаки цих передаточних відношень (оскільки в розглянутому механізмі є ступені з кіничними коле-



сами, а, отже, знаки втрачають сенс), а напрямки обертання всіх коліс визначимо за правилом стрілок (рис. 8.3).

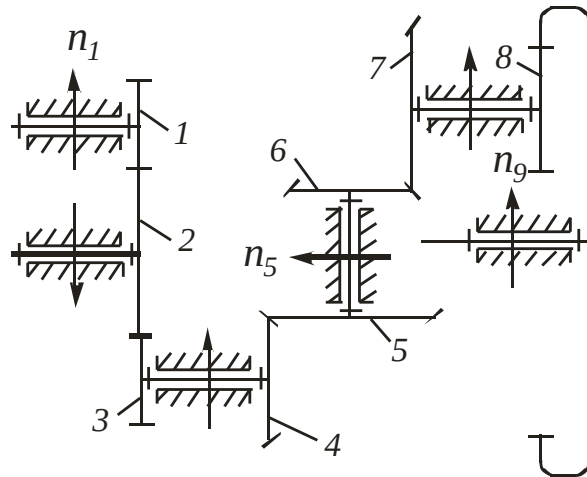


Рисунок 8.3 – Схема багатоступінчастого рядового зубчастого механізму

За визначенням передаточного відношення  $U_{1-9} = \frac{n_1}{n_9}$ ,

де, як видно зі схеми механізму,

$$U_{1-9} = U_{1-2} \cdot U_{2-3} \cdot U_{4-5} \cdot U_{6-7} \cdot U_{8-9} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_5}{z_4} \cdot \frac{z_7}{z_6} \cdot \frac{z_9}{z_8} = \frac{20}{17} \cdot \frac{51}{20} \cdot \frac{50}{25} \cdot \frac{40}{20} \cdot \frac{60}{15} = 48$$

Тоді частота обертання вихідного вала 9:

$$n_9 = \frac{n_1}{U_{1-9}} = \frac{1000}{48} = 20,83 \text{ хв}^{-1}.$$

Аналогічно визначимо передаточне відношення від вхідного вала 1-го колеса до вала 5-го зубчастого колеса:

$$U_{1-5} = \frac{n_1}{n_5},$$

$$\text{де } U_{1-5} = U_{1-2} \cdot U_{2-3} \cdot U_{4-5} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_5}{z_4} = \frac{20}{17} \cdot \frac{51}{20} \cdot \frac{50}{25} = 6.$$

Тоді частота обертання вала 5-го колеса:

$$n_5 = \frac{n_1}{U_{1-5}} = \frac{1000}{6} = 166,7 \text{ хв}^{-1}.$$

Напрямки обертання коліс показано на схемі механізму прямими стрілками.

Визначимо міжосьову відстань  $a_{w_{1-2}}$  для циліндричного ступеня зовнішнього зачеплення 1–2:

$$a_{w_{1-2}} = r_{w1} + r_{w2} = r_1 + r_2 = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{4 \cdot 17}{2} + \frac{4 \cdot 20}{2} = 74 \text{ мм.}$$

Міжосьова відстань  $a_{w_{8-9}}$  для циліндричного ступеня внутрішнього зачеплення 8–9:

$$a_{w_{8-9}} = r_{w9} - r_{w8} = r_9 - r_8 = \frac{mz_9}{2} - \frac{mz_8}{2} = \frac{4 \cdot 60}{2} - \frac{4 \cdot 15}{2} = 90 \text{ мм.}$$

Рухомість зубчастого механізму визначимо за формулою Чебишева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 5 = 1,$$

де  $n = 6$  – кількість рухомих ланок;

$p_5 = 6$  – кількість кінематичних пар V класу;

$p_4 = 5$  – кількість кінематичних пар IV класу.

**Відповідь:**  $n_9 = 20,83 \text{ хв}^{-1}$ ;  $n_5 = 166,7 \text{ хв}^{-1}$ ;  $a_{w_{1-2}} = 74 \text{ мм}$ ;

$a_{w_{8-9}} = 90 \text{ мм}$ ;  $W = 1$ .

*Короткі теоретичні відомості й вказівки до рішення задачі № 2 за темою заняття.*

Якщо виникає необхідність у передачі обертання з великим передаточним відношенням, але при малих габаритах передачі, то застосовують планетарні механізми.

Планетарними називають зубчасті механізми з рухомістю  $W=1$ , які містять колеса з геометричними осями, що переміщуються в просторі, на відміну від рядових зубчастих механізмів, до складу яких входять тільки колеса з нерухомими осями.

Всі планетарні механізми містять:

– одне або два жорстко з'єднаних колеса з рухомою в просторі геометричною віссю, які називають у першому випадку – сателітом, у другому – сателітним блоком;

– спеціальний важіль  $H$ , на якому розташовуються рухомі осі сателітів або сателітних блоків, і який називається водилом;

– два колеса з осями, що збігаються з віссю обертання водила, і які називають центральними або сонячними. Одне із центральних коліс у планетарних механізмів – нерухоме.

Сателіти й сателітні блоки беруть участь у двох обертових рухах – обертання навколо власної осі відносно водила, і разом з водилом навколо центральної осі механізму. Обидва центральних колеса входять в зачеплення із сателітом або з колесами сателітного блоку. При цьому всі планетарні механізми містять два зачеплення коліс (два ступеня).

Для визначення передаточного відношення планетарного механізму застосовують метод оберненого руху, що полягає в наступному: всім ланкам механізму умовно надається додаткове обертання навколо центральної осі із частотою обертання водила, але протилежного напрямку ( $n = -n_H$ ). Відносний рух ланок при цьому не зміниться, але водило зупиниться, а центральне колесо, що було нерухомим, стане рухомим, тобто механізм перетвориться у двоступінчастий рядовий механізм, який називають оберненим механізмом.

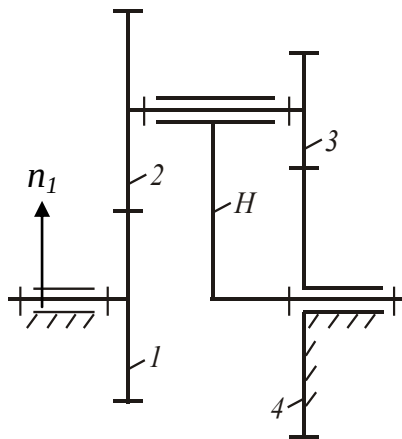
Щоб розрізнити, до якого з механізмів (вихідного планетарного або відповідного йому оберненого) відносяться ті чи інші параметри, прийнято приписувати їм верхній індекс, що дорівнює номеру або позначенню нерухомої ланки. Передаточне відношення оберненого механізму має індекс ( $H$ ), що показує, що водило  $H$  умовно нерухомо. Для вихідних планетарних механізмів зазначені індекси часто опускають.

Передаточне відношення планетарного механізму від рухомого центрального колеса до водила дорівнює різниці між одиницею й передатним відношенням відповідного оберненого механізму від цього ж центрального колеса до того колеса, що у планетарному механізмі було нерухомим. При цьому, визначаючи передаточне відношення оберненого механізму, необхідно обов'язково враховувати знаки передаточних відношень ступенів, що входять до складу планетарного механізму.

При рішенні задачі з кінематичного аналізу планетарного механізму, необхідно також вміти визначати його рухомість за формулою Чебишева й пам'ятати, що прямі стрілки, які показують на бічній проекції коліс напрямки їх обертання, всередині планетарного механізму зображувати не можна, а напрямок обертання вихідної ланки треба визначати знаком передатного відношення планетарного механізму, враховуючи напрямок обертання вхідної ланки.

Крім того, необхідно вміти визначати відсутнє число зубів коліс планетарного механізму, використовуючи умову співвісності, яка полягає в тому, що геометричні осі центральних коліс і водила повинні збігатися, для чого повинні бути рівними міжосьові відстані обох ступенів планетарного механізму. Ці ступені можуть бути або зовнішнього, або внутрішнього зачеплення. Отже, необхідно вміти визначати міжосьові відстані для циліндричних передач зовнішнього й внутрішнього зачеплення через радіуси коліс, що утворюють ці передачі, вважаючи їх при цьому некоригова-

ними.



### Задача № 2.

Визначити величину й напрямок частоти обертання вихідної ланки планетарного механізму, якщо частота обертання вхідного вала  $n_1 = 1000 \text{ хв}^{-1}$ .

Визначити рухомість механізму  $W$  і число зубів колеса 2, якщо відомі числа зубів усіх інших коліс механізму:  
 $z_1 = 25$ ;  $z_3 = 19$ ;  $z_4 = 38$ .

### Рішення задачі № 2.

Планетарний механізм містить центральні колеса 1, 4, одне з яких (колесо 4) нерухоме, сателітний блок коліс 2, 3 і водило  $H$ . Вхідною ланкою механізму є центральне колесо 1, а вихідною – водило  $H$ .

Рухомість планетарного механізму визначимо за формулою Чебишева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1,$$

де  $n = 3$  – кількість рухомих ланок;

$p_5 = 3$  – кількість кінематичних пар V класу;

$p_4 = 2$  – кількість кінематичних пар IV класу.

Відсутнє число зубів колеса 2 визначимо з умови співвісності планетарного механізму, порівнявши міжосьові відстані обох ступенів механізму:  $a_{w_{1,2}} = a_{w_{3,4}}$ .

Оскільки обидва ступеня планетарного механізму являють собою циліндричні передачі зовнішнього зачеплення, то умова співвісності набуває вигляду:  $r_{w_2} + r_{w_1} = r_{w_4} + r_{w_3}$ .

Всі колеса механізму нарізані без зміщення різального інструменту (некориговані) і мають однаковий модуль. При цьому початкові кола коліс зубчастих пар збігаються з ділильними:  $r_{w_i} = r_i = mz_i/2$ . Після підстановки і скорочень, умова співвісності набуває вигляду:  $z_2 + z_1 = z_4 + z_3$ .

Звідси, відсутнє число зубів колеса 2:

$$z_2 = z_4 + z_3 - z_1 = 38 + 19 - 25 = 32.$$

Визначимо передаточне відношення планетарного механізму, використовуючи метод оберненого руху:

$$U_{1-H} = 1 - U_{1-4}^{(H)},$$

де  $U_{1-4}^{(H)}$  – передаточне відношення відповідного оберненого механізму. Обернений механізм являє собою рядовий двоступінчастий механізм, обидва ступеня якого – циліндричні передачі зовнішнього зачеплення. Отже:

$$U_{1-H} = 1 - U_{1-4}^{(H)} = 1 - U_{1-2}^{(H)} U_{3-4}^{(H)} = 1 - \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \left( -\frac{z_4}{z_3} \right) = 1 - \left( -\frac{32}{25} \right) \left( -\frac{38}{19} \right) = -1,56.$$

За визначенням передаточного відношення:  $U_{1-H} = \frac{n_1}{n_H}$ . Отже, частота обертання вихідної ланки планетарного механізму – водила  $H$ :

$$n_H = \frac{n_1}{U_{1-H}} = \frac{1000}{-1,56} = -641 \text{ хв}^{-1}.$$

Оскільки знак передаточного відношення  $U_{1-H}$  від’ємний, то це означає, що вихідна ланка планетарного механізму (водило  $H$ ) обертається у бік, протилежний напрямку обертання вхідної ланки (колеса 1). Зобразимо напрямок обертання водила на схемі механізму прямою стрілкою (рис. 8.4).

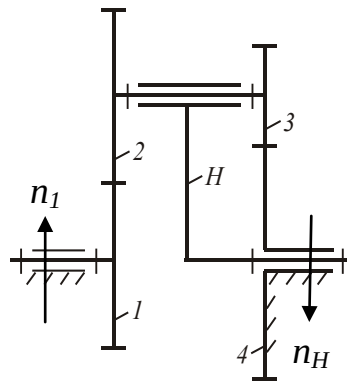


Рисунок 8.4 – Схема планетарного зубчастого механізму

**Відповідь:**  $W = 1$ ;  $z_2 = 32$ ;  $n_H = -641 \text{ хв}^{-1}$ .

## 9 КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СКЛАДНИХ БАГАТОСТУПІНЧАСТИХ ЗУБЧАСТИХ МЕХАНІЗМІВ АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ

*Мета практичного заняття:* навчитися визначати передаточні відношення складних (комбінованих) багатоступінчастих зубчастих механізмів, і використовуючи їх, визначати величини й напрямки частот обертання вихідних ланок механізмів за заданими параметрами вхідних.

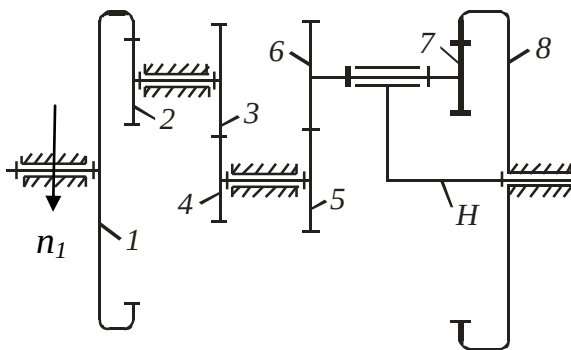
*Література до заняття:* [1] с. 158,159; [2] с. 215,216.

*Короткі теоретичні відомості й вказівки до рішення задач за темою заняття.*

Складні (комбіновані) багатоступінчасті зубчасті механізми – це механізми, до складу яких входять різні види зубчастих передач. Будемо розглядати механізми, що складаються з послідовно з'єднаних планетарних і рядових передач.

Для визначення передаточного відношення складного багатоступінчастого механізму необхідно спочатку проаналізувати його структуру, виділивши при цьому планетарні передачі й окремі ступені рядової передачі, а потім розрахувати передаточне відношення механізму, як добуток передаточних відношень ступенів рядової передачі й передаточних відношень планетарних передач.

При рішенні задачі з кінематичного аналізу складного багатоступінчастого зубчастого механізму, необхідно також вміти визначати його рухомість за формулою Чебишева, використовувати умову співвісності для визначення відсутнього числа зубів коліс планетарної передачі, і вміти показати напрямки обертання коліс. При цьому напрямок обертання вихідної ланки планетарної передачі визначається напрямком обертання вхідної ланки й знаком передаточного відношення передачі, а напрямки обертання коліс рядової передачі можна визначити, використовуючи правило стрілок.



### Задача.

Визначити величину й напрямки частоти обертання вихідної ланки складного зубчастого механізму, якщо частота обертання вхідного вала  $n_1 = 1500 \text{ хв}^{-1}$ . Визначити рухомість механізму  $W$  і відсутнє число зубів колеса 7, якщо відомі числа зубів коліс:  $z_1 = 80$ ;  $z_2 = 20$ ;  $z_3 = 25$ ;  $z_4 = 30$ ;  $z_5 = 40$ ;  $z_6 = 60$ ;  $z_8 = 120$ .

### ***Рішення задачі.***

Механізм складається із двоступінчастої рядової передачі, що містить колеса 1, 2, 3, 4, і послідовно з'єднаної з нею планетарної передачі, що містить центральні колеса 5, 8, одне з яких (колесо 8) нерухоме, сателітний блок коліс 6, 7 і водило  $H$ . Вхідною ланкою механізму є колесо 1, а вихідною – водило  $H$ .

Рухомість складного зубчастого механізму визначимо за формулою Чебишева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 4 = 1,$$

де  $n = 5$  – кількість рухомих ланок;

$p_5 = 5$  – кількість кінематичних пар V класу;

$p_4 = 4$  – кількість кінематичних пар IV класу.

Відсутнє число зубів колеса 7 визначимо з умови співвісності планетарної передачі, порівнявши міжосьові відстані її обох ступенів:

$$a_{w_{5,6}} = a_{w_{7,8}}.$$

Оскільки ступінь 5–6 планетарного механізму являє собою циліндричну передачу зовнішнього зачеплення, а ступінь 7–8 – циліндричну передачу внутрішнього зачеплення, то:  $r_{w_5} + r_{w_6} = r_{w_8} - r_{w_7}$ .

Всі колеса механізму нарізані без зміщення різального інструменту (некориговані) і мають однаковий модуль, отже, після підстановки і скорочень, умова співвісності набуває вигляду:  $z_5 + z_6 = z_8 - z_7$ .

Звідси, відсутнє число зубів колеса 7:

$$z_7 = z_8 - z_5 - z_6 = 120 - 40 - 60 = 20.$$

Визначимо передаточне відношення планетарної передачі, використовуючи метод оберненого руху:

$$U_{5-H} = 1 - U_{5-8}^{(H)},$$

де  $U_{5-8}^{(H)}$  – передаточне відношення відповідного оберненого механізму. Обернений механізм являє собою рядовий двоступінчастий механізм, один ступінь якого (5–6) – циліндрична передача зовнішнього зачеплення, а другий (7–8) – внутрішнього. Отже:

$$U_{5-H} = 1 - U_{5-8}^{(H)} = 1 - U_{5-6}^{(H)} U_{7-8}^{(H)} = 1 - \left( -\frac{z_6}{z_5} \right) \left( \frac{z_8}{z_7} \right) = 1 - \left( -\frac{60}{40} \right) \left( \frac{120}{20} \right) = 10.$$

Оскільки знак передаточного відношення  $U_{5-H}$  додатний, то це означає, що вихідна ланка планетарної передачі (води́ло  $H$ ) обертається в той же бік, що й вхідна ланка (ко́лесо 5).

Загальне передаточне відношення складного багатоступінчастого механізму визначимо, як добуток передаточних відношень двох ступенів рядової передачі й планетарної передачі. При цьому, оскільки до складу механізму не входять конічні передачі, то будемо враховувати знаки передаточних відношень ступенів рядової передачі:

$$U_{1-H} = U_{1-2} \cdot U_{3-4} \cdot U_{5-H} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \cdot U_{5-H} = \frac{20}{80} \cdot \left(-\frac{30}{25}\right) \cdot 10 = -3.$$

Від'ємний знак передаточного відношення  $U_{1-H}$  свідчить про те, що вихідна ланка складного багатоступінчастого механізму (води́ло  $H$ ) обертається у бік, протилежний напрямку обертання вхідної ланки механізму (ко́лесо 1). Це можна перевірити, використовуючи правило стрілок (рис. 9.1).

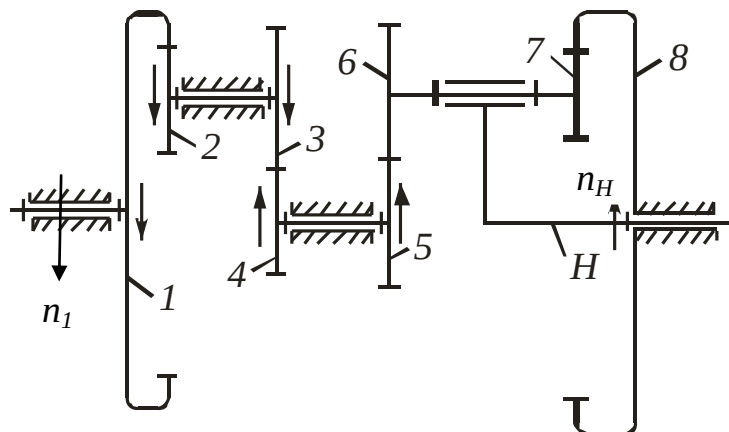


Рисунок 9.1 – Схема складного багатоступінчастого зубчастого механізму

За визначенням передаточного відношення:  $U_{1-H} = \frac{n_1}{n_H}$ . Отже, частота обертання вихідної ланки складного багатоступінчастого механізму – води́ла  $H$ :

$$n_H = \frac{n_1}{U_{1-H}} = \frac{1500}{-3} = -500 \text{ } x\text{с}^{-1}.$$

**Відповідь:**  $W = 1$ ;  $z_7 = 20$ ;  $n_H = -500 \text{ } x\text{с}^{-1}$ .



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 **Артоболевский, И. И.** Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1988. – 640 с.
- 2 **Кіницький, Я. Т.** Короткий курс теорії механізмів і машин / Я. Т. Кіницький. – Львів : Афіша, 2004. – 272 с.
- 3 **Левитская, О. Н.** Курс теории механизмов и машин / О. Н. Левитская, Н. И. Левитский. – М. : Высшая школа, 1985. – 280 с.
- 4 Теория механизмов и машин / К. В. Фролов [и др.] ; под ред. К. В. Фролова. – М. : Высшая школа, 2001. – 496 с.
- 5 Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних і контрольних робіт із дисциплін «Теорія механізмів і машин» і «Прикладна механіка» для студентів усіх спеціальностей денного і заочного навчання. Кінематичний аналіз важільних механізмів методом планів / уклад.: В. О. Загудаєв, Н. В. Чоста, В. Є. Шолєнінов. – Краматорськ : ДДМА, 2005. – 64 с.
- 6 Кинематический и силовой анализ рычажного механизма : методическое пособие к выполнению курсовой работы по дисциплине «Прикладная механика и основы конструирования» для студентов всех форм обучения / сост. : В. А. Загудаев, С. Н. Зинченко, Н. И. Кинденко, Д. В. Завгородний. – Краматорск : ДГМА, 2009. – 52 с.

*Навчальне видання*

## **ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН**

**Методичні вказівки  
до проведення практичних занять**

**для студентів технічних спеціальностей  
всіх форм навчання**

Укладач

ЧОСТА Наталія Вікторівна

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання

Н. В. Чоста

\_\_\_/2018.                      Формат 60 x 84/16.                      Ум. друк. арк. \_\_\_\_.  
Обл.-вид. арк. \_\_\_\_\_.                      Тираж \_\_\_\_ прим.                      Зам. № \_\_\_\_

Видавець і виготівник  
Донбаська державна машинобудівна академія  
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК №1633 від 24.12.2003