УДК 514./.112.4/.122/.142
ПРО ОДНУ ЧУДОВУ ВЛАСТИВІСТЬ ПАРАЛЕЛОГРАМА

О.А. Кадубовський

ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», Слов'янськ
e-mail: kadubovs@ukr.net

Загально визнано, що одним із основних завдань в будь-якій сфері людської діяльності, зокрема математиці та дидактиці математики, є систематизація та узагальнення накопиченого досвіду. Також добре відомо, що поміркований відбір навчальних задач та засад для їх систематизації дозволяє забезпечити не лише системне засвоєння змісту навчального матеріалу, а й інтенсифікувати сам процес навчання.

Існує немало навчальних посібників з елементарної геометрії, в яких наведено яскраві геометричні факти (зокрема про паралелограм), що не ввійшли до підручників. Серед таких маємо своїм приємним обов'язком виділити посібники [1], [2] і [4]. Серед збірників задач, які містять широке коло задач (на паралелограми) різного рівня складності, зокрема теоретичного характеру, – збірники [3], [5–7].

І хоча існуючі навчальні посібники та збірники задач, зокрема із числа зазначених, «цілком закривають» тему задачників з елементарної геометрії, проте якісний аналіз змісту запропонованих в них задач саме «на паралелограми» дозволяє констатувати, що накопилася значна кількість задач зі спільними вихідними даними / умовою але різними вимогами / завданнями, які носять змістовно (та, як з'ясувалося, «по-джерельно») відокремлений характер.

Так, наприклад, для будь-якого опуклого многокутника (формально) можна визначити «медіану», як відрізок, що сполучає його вершину із серединою однієї з несуміжних сторін. В найбільш розповсюджених збірниках задач (різного рівня складності) та навчально-методичних посібниках зазначені типи задач носять доволі розрізнений характер. В схожих за змістом задачах мова ведеться про точки перетину лише декількох з «медіан». Можливо саме через це, не розглядаючи всі медіани паралелограма одночасно, зазначене нижче відношення залишалося або мало відомою, або ж взагалі невідомою властивістю паралелограма.

Твердження 1. *Нехай ABCD – довільний паралелограм, а точки* A_0, B_0, C_0, D_0 *є серединами сторін* AB, BC, CD *і* DA *відповідно. Нехай далі,* K_1, K_2, K_3, K_4 *– точки перетину «медіани»* AB_0 *з «медіанами»* DA_0, BD_0, CA_0 *і* BC_0 *відповідно. Тоді має місце відношення*

$$AK_1 : K_1K_2 : K_2K_3 : K_3K_4 : K_4B_0 = 12:3:5:4:6. \qquad (*)$$

Доведення. Нехай $ABCD$ – даний паралелограм (рис. 1).

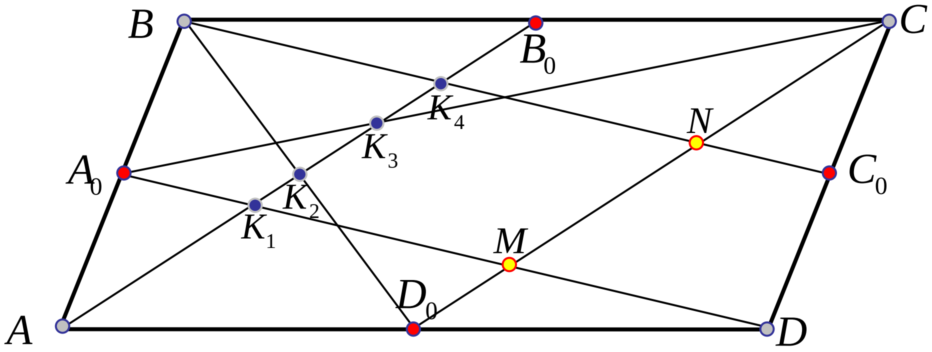

Рис. 1. Паралелограм $ABCD$

1) Оскільки ABB_0D_0 паралелограм (бо $BB_0 \parallel AD_0$ і $BB_0 = AD_0$), а K_2 – точка перетину його діагоналей, то $AK_2 = K_2B_0$. Заради зручності покладемо $AB_0 = 30x$. Тоді $AK_2 = K_2B_0 = 15x$.

2) В $\triangle ABC$ точка K_3 є точкою перетину медіан. І тому $AK_3 : K_3B_0 = 2:1$, звідки: $AK_3 = \dfrac{2}{3}AB_0 = \dfrac{2}{3}30x = 20x$, $K_3B_0 = 10x$, $K_2K_3 = 5x$.

3) Оскільки $A_0B \parallel C_0D$, $A_0B = C_0D$, то чотирикутник A_0BC_0D є паралелограмом.

3.1) За умовою A_0 є серединою AB. Тому за теоремою Фалеса має місце рівність $AK_1 = K_1K_4$. Заради зручності покладемо $AK_1 = K_1K_4 = 2y$.

3.2) Нехай далі, M і N – точки перетину медіани CD_0 з медіанами DA_0 та BC_0 відповідно. Оскільки C_0 є серединою CD, то за теоремою Фалеса має місце рівність $CN = NM$.

3.3) Чотирикутник AB_0CD_0 є паралелограмом (бо $AB_0 \parallel CD_0$ і $AB_0 = CD_0$). Оскільки у чотирикутнику K_1K_4NM протилежні сторони паралельні, то він також є паралелограмом. Звідки $MN = K_1K_4 = 2y = CN$.

3.4) В $\triangle BCN$ K_4B_0 є середньою лінією. Звідки $K_4B_0 = \dfrac{1}{2}NC = y$. Таким чином, має місце рівність $AK_1 + K_1K_4 + K_4B_0 = 2y + 2y + y = 30x$, звідки $y = 6x$. Тому, з урахуванням введених позначень, маємо, що $AK_1 = 12x$. Звідки:

$$K_1K_2 = AK_2 - AK_1 = 15x - 12x = 3x,$$
$$K_4B_0 = AB_0 - AK_4 = 30x - 24x = 6x,$$
$$K_3K_4 = K_3B_0 - K_4B_0 = 10x - 6x = 4x.$$

Таким чином, з урахуванням введених позначень та рівностей, одержаних в пунктах 1), 2) та підпункті 3.4), остаточно маємо, що

$$AK_1 : K_1K_2 : K_2K_3 : K_3K_4 : K_4B_0 = 12:3:5:4:6.$$

Зауваження 1. *Для медіан* AC_0, BD_0 *і* BC_0 *паралелограма* $ABCD$ *справедливість зазначеного відношення* $(*)$ *не важко встановити шляхом покрокового повторення міркувань (з відповідними очевидними змінами), використаних при доведенні Твердження 1.*

Оскільки паралелограми CDAB і ABCD є рівними, то медіани CA_0, CD_0, DB_0 *і* DA_0 *(паралелограма* $CDAB$*) є відповідними елементами до медіан* AC_0, AB_0, BD_0 *і* BC_0 *(паралелограма* $ABCD$*). А тому для медіан* CA_0, CD_0, DB_0 *і* DA_0 *відношення* $(*)$ *також справджується.*

Таким чином, має місце твердження

Теорема [«Чудова властивість медіан паралелограма»]. *Кожна з восьми медіан паралелограма перетинає точно чотири інших його медіан. Кожна з восьми із зазначених четвірок точок (перетину медіан) ділить відповідну медіану (рухаючись від вершини паралелограма) у сталому відношенні* 12:3:5:4:6.

Зауваження 2. *«Чудовість» наведеної властивості полягає навіть не стільки у сталості зазначеного відношення, скільки у його застосуваннях, зокрема до: «виявлення» паралелограмів та обчислення площ фігур, які виникають при перетині медіан паралелограма.*

Є щирі сподівання, що популяризація зазначеного відношення в якості однієї з основних властивостей паралелограма, принаймні в контексті укрупнення дидактичних одиниць, дозволить:

з одного боку – систематизувати доволі широке коло задач зазначеного типу, зокрема з векторної алгебри;

з іншого боку – озброїти альтернативним та (на думку автора) більш раціональним способом їх розв’язання.

Література

1. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. – 3-е изд., испр. – М. : МЦНМО, 2006. – 416 с.
2. Кушнир И.А. Геометрия: теоремы и задачи : учебное пособие. Т. 1. Планиметрия / И. А. Кушнир. – Киев : Астарта, 1996. – 475 с.
3. Кушнир И., Финкельштейн Л. Геометрия 7–9. Школа боевого искусства. Сборник задач. – Киев: Факт, 2000. – 384 с.
4. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. – М.: МЦНМО, 2004. – 312 с.
5. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. – 5-е изд., испр. и доп. – М. : МЦНМО, 2006. – 640 с.
6. Сборник задач по математике для поступающих во втузы (с решениями). В 2-х книгах. Кн. 2. Геометрия / Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др. Под ред. М.И. Сканави. – 7-е изд., пер. и доп. – М. : Высш. шк., 1995. – 368 с.
7. Шарыгин И. Ф. Геометрия. 7-9 кл. : учеб. для общеобразовательных учреждений / И. Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 2012. – 462 с.