УДК 004.09

ФРАКТАЛЬНО-АКМЕОЛОГІЧНА ГНОСЕОЛОГІЧНА КОНЦЕПЦІЯ ПРИ ВИВЧЕННІ (ВИКЛАДАННІ) МАТЕМАТИКИ

В.М. Антонов

Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», м. Київ
e-mail: vant46@mail.ru

Фракта́л (лат. *fractus* — подрібнений, дробовий) — нерегулярна, само подібна структура. В широкому розумінні фрактал означає фігуру, малі частини якої в довільному збільшенні є подібними до неї самої. Термін *фрактал* увів 1975 року Бенуа Мандельброт.

Об'єкти, які тепер називаються фракталами, досліджувались задовго до того, як їм було дано таку назву. В ***етноматематиці***, наприклад в роботах Рона Еглаша *«Африканські Фрактали»*, задокументовано поширені фрактальні геометричні фігури в мистецтві тубільців. В 1525 році німецький митець Альбрехт Дюрер опублікував свою працю *Керівництво Художника*, один із розділів якої має назву «Черепичні шаблони, утворені пентагонами». Пентагон Дюрера багато в чому є схожим на килим Серпінського, але замість квадратів використовуються п'ятикутники. Джексон Поллок (американський експресіоніст 50-тих років) малював об'єкти, дуже схожі на фрактали.

Ідею «рекурсивної само подібності» було висунено філософом Лейбніцом, який також розробив багато з деталей цієї ідеї. В 1872 Карл Веєрштрас побудував приклад функції з не інтуїтивною особливістю, скрізь неперервної, але ніде не диференційованої — графік цієї функції тепер би називався фракталом. В 1904 Хельга Фон Кох, незадоволений занадто абстрактним та аналітичним означенням Веєрштраса, розробив більш геометричне означення схожої функції, яка тепер має назву сніжинки Коха. Ідею самоподібних кривих було далі розвинено Полєм П'єром Леві, який у своїй роботі *Криві та поверхні на площині та у просторі, які складаються із частин, схожих на ціле*, виданій 1938 року, описав нову фрактальну криву, відому тепер як Крива Леві.

Ґеорг Кантор навів приклади підмножин дійсних чисел із незвичними властивостями — ці множини Кантора тепер також визнаються як фрактали. Ітераційні функції на комплексній площині досліджувались в кінці 19 та на початку 20 століття Анрі Пуанкаре, Феліксом Кляйном, П'єром Фату та Ґастоном Жюліа. Проте за браком сучасної комп'ютерної графіки у них забракло засобів відобразити красу багатьох із відкритих ними об'єктів.

В 1960-их роках, Бенуа Мандельброт почав дослідження само подібності в своїх роботах, наприклад *Яка довжина узбережжя Британії?*

Статистична само подібність та дробова розмірність. Ця доповідь базувалась на ранніх роботах Луі Фрая Річардсона. В 1975 році Мандельброт використав слово *фрактал* як назву для об'єктів, розмірність Хаусдорфа яких є більшою за топологічну розмірність. Він проілюстрував своє математичне означення захоплюючими зображеннями, зробленими за допомогою комп'ютера. Ці зображення привернули велику увагу; багато з них базувалися на рекурсії, що призвело до появи поширеного розуміння слова *фрактал*.

Множина Жюліа, фрактал, близький до множини Мандельброта. Порівняно простий клас прикладів становлять множини Кантора, в яких короткі та ще коротші (відкриті) інтервали вилучаються з одиничного інтервалу [0; 1], залишаючи множину, яка, можливо, буде (або не буде) само подібною при збільшенні й, можливо, матиме (або не матиме) розмірність Хаусдорфа d таку, що $0 < d < 1$. Також до прикладів фракталів належить фрактал Ляпунова, трикутник Серпінського, килим Серпінського, губка Менгера, крива дракона, крива заповнення простору, межі множин груп Кліні та крива Коха. Фрактали можуть бути детермінованими або стохастичними (наприклад, не детермінованими). Хаотичні динамічні системи іноді асоціюються з фракталами (наприклад атрактор). Об'єкти в просторі параметрів родини систем також можуть бути фракталами. Цікавим прикладом є множина Мандельброта. Ця множина містить цілі диски, тому її розмірність Хаусдорфа дорівнює топологічній розмірності, яка дорівнює 2, і вона формально не є фракталом, але що насправді є дивним, це те, що розмірність Хаусдорфа межі множини Мандельброта також дорівнює 2 (а топологічна розмірність дорівнює 1). Це було доведено М. Шішікурою 1991 року.

Само подібні множини з незвичайними властивостями в математиці. Починаючи з кінця XIX століття, в математиці з'являються приклади само подібних об'єктів з патологічними з точки зору класичного аналізу властивостями. До них можна віднести наступні (1-14):

- множина Кантора — ніде не щільну незліченну досконалу множину. Модифікувавши процедуру, можна також отримати ніде не щільну множину позитивної довжини;
- трикутник Серпінського («скатертина») і килим Серпінського — аналоги множини Кантора на площині;
- губка Менгера[en] — аналог множини Кантора в тривимірному просторі;
- приклади Вейерштраса і Ван дер Вардена ніде не диференційованої неперервної функції;
- крива Коха — неперервна крива, що не перетинається, нескінченної довжини, яка не має дотичній ні в одній точці;
- крива Пеано — неперервна крива, що проходить через всі точки квадрата;

- траєкторія броунівської частинки також з імовірністю 1 ніде не диференційована. Її хаусдорфова розмірність дорівнює двом.

Класифікація фракталів. Фрактали можна класифікувати відповідно до їхньої само подібності. Розрізняють три типи само подібності у фрак талах.

- Точна само подібність — Це найсильніший тип само подібності; фрактал виглядає однаково при різних збільшеннях. У фракталів, згенерованих з використанням ітераційних функцій, часто виявляється точна само подібність.
- Майже само подібність — Слабка форма само подібності; фрактал виглядає приблизно (але не точно) само подібним при різних збільшеннях. Майже само подібні фрактали містять малі копії цілого фракталу у перекручених та вироджених формах. Фрактали, згенеровані з використанням рекурентних відношень, зазвичай є майже (але не точно) само подібними.
- Статистична само подібність — Це найслабкіша форма само подібності; фрактал має чисельні або статистичні міри, що зберігаються при збільшенні. Найприйнятніші означення «фракталів» просто містять в собі деякий вид статистичної само подібності (розмірність фракталу, саме по собі, є чисельною мірою, що зберігається при збільшенні). Ймовірнісні фрактали є прикладами фракталів, які є статистично, але не майже й не точно само подібними.

Слід зазначити, що не всі само подібні об'єкти є фракталами; наприклад, числова вісь (евклідова пряма) є точно само подібною, але, оскільки її розмірність Гаусдорфа та топологічна розмірність дорівнюють одиниці, вона е є фракталом.

Фрактальна Акмеологія. Відомо, про якісний потужний вплив фракталів на процеси сприйняття - усвідомлення - запам’ятовування необхідної інформації людиною (1-14). Фрактали використовують для моделювання нових алгоритмів розпізнання, вивчення фізіологічних процесів впливу на людину. Існує індивідуальний фрактальний інтерес, стимул, мотивація особистості. Досліджено, що фрактальні зображення мають ***«гедонічний» позитивний ефект*** та впливають на формування позитивних емоцій при засвоєнні нових знань. ***Автор*** *досліджує* ***вплив*** *фракталів на:* функціональний стан людини, її працездатність; розвиток та саморозвиток Людини як суб’єкта діяльності при вивченні природних дисциплін, зокрема математики та досягненні особою «акме» - свого життя. Відомо, що фрактальні об’єкти: мистецтво, дизайн тощо *викликають*: підвищений інтерес людини у направленні позитивних емоцій. Авторський колектив проектує. ***Кібернетично акмеологічну математично-праксеологічну інформаційну систему*** для дослідження впливу фракталів на людину.