

**Графічне розв'язання задачі
лінійного програмування на
площині.**

Постановка задачі лінійного програмування на площині

Дано лінійну функцію: $F = c_1x_1 + c_2x_2$, (1)

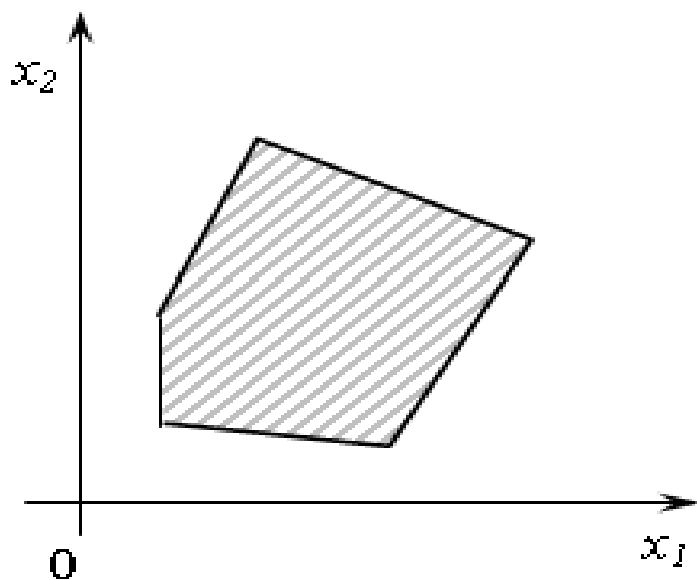
Дано систему m лінійних нерівностей із двома невідомими x_1, x_2 :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases} \quad (2)$$

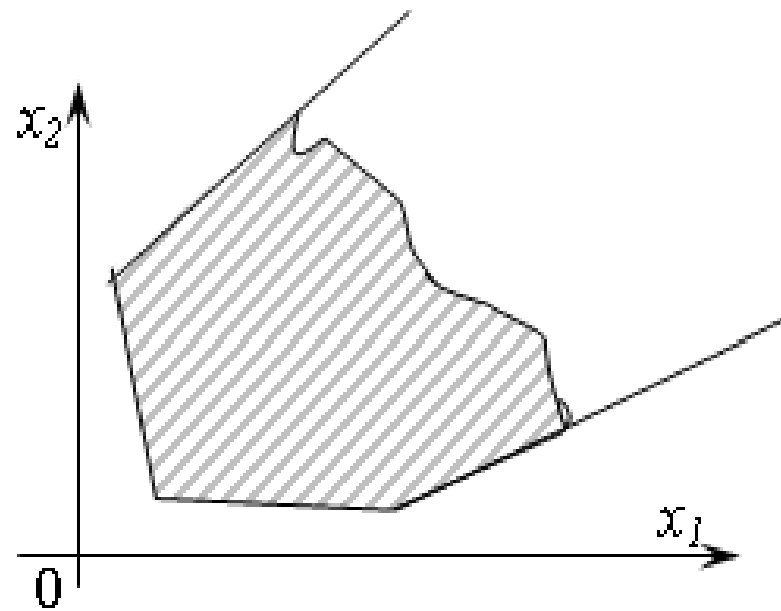
причому $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (3)

Потрібно серед усіх рішень системи (2), (3) знайти таке, котре максимізує функцію (1).

Графічні зображення ОДР.

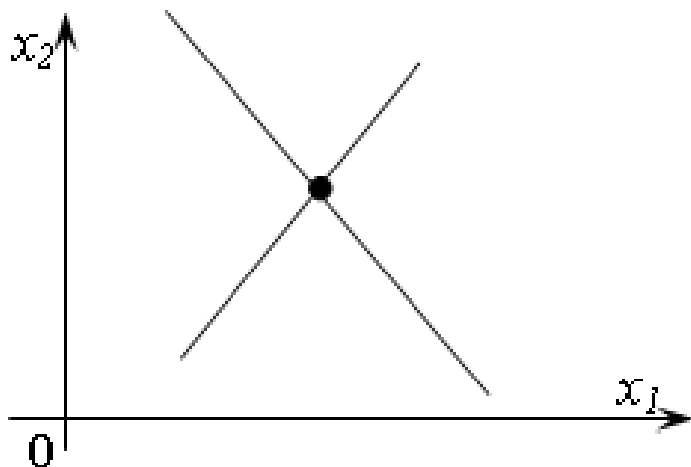


а) ОДР – опуклий багатокутник

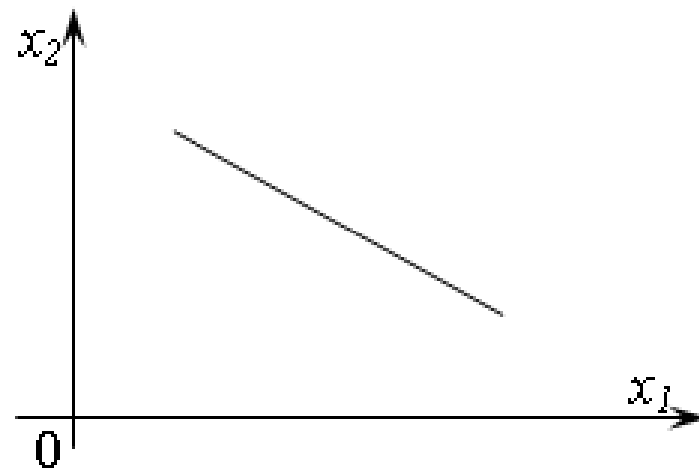


б) ОДР – необмежена опукла багатокутна область

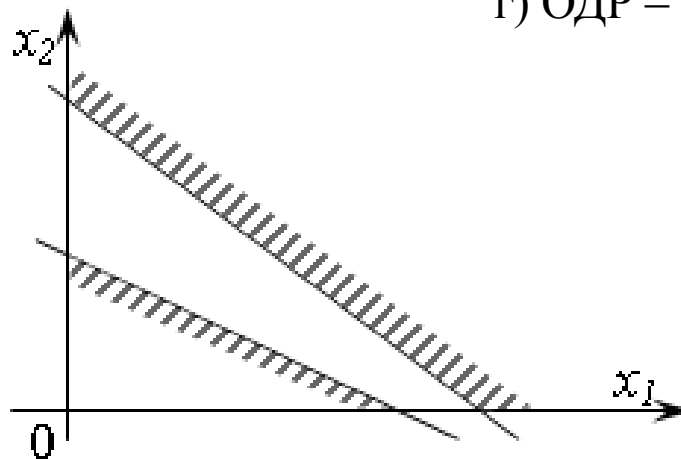
Графічні зображення ОДР.



в) ОДР – єдина точка



г) ОДР – пряма лінія

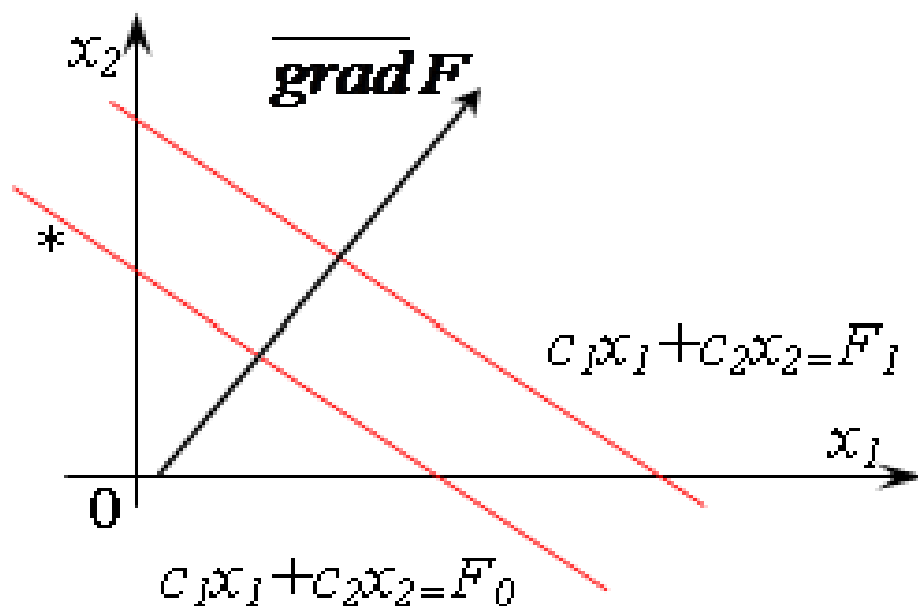


д) ОДР – пуста множина

Гradient та лінії рівня цільової функції.

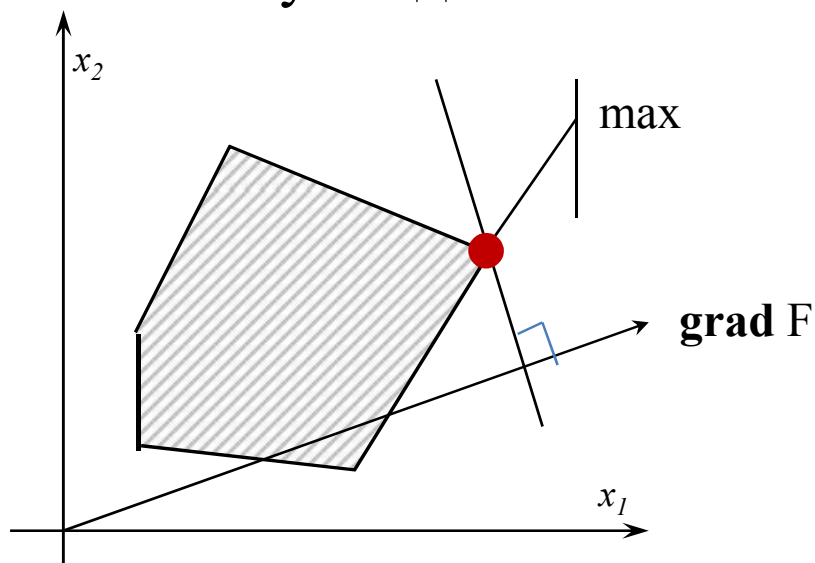
Гradient цільової функції F:

$$\overline{\text{grad}} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2)$$

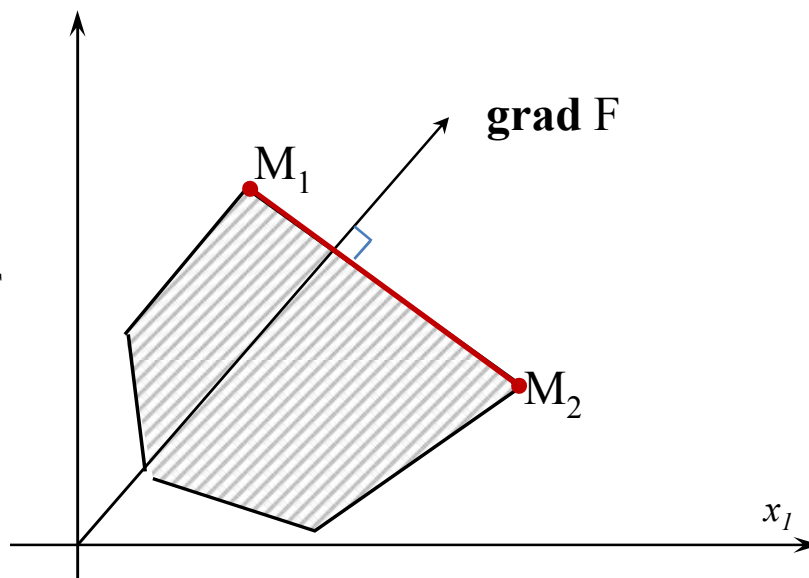


Різні випадки, що зустрічаються при рішенні задач лінійного програмування

1. Область ОДР обмежена.
Рішення існує і єдине.

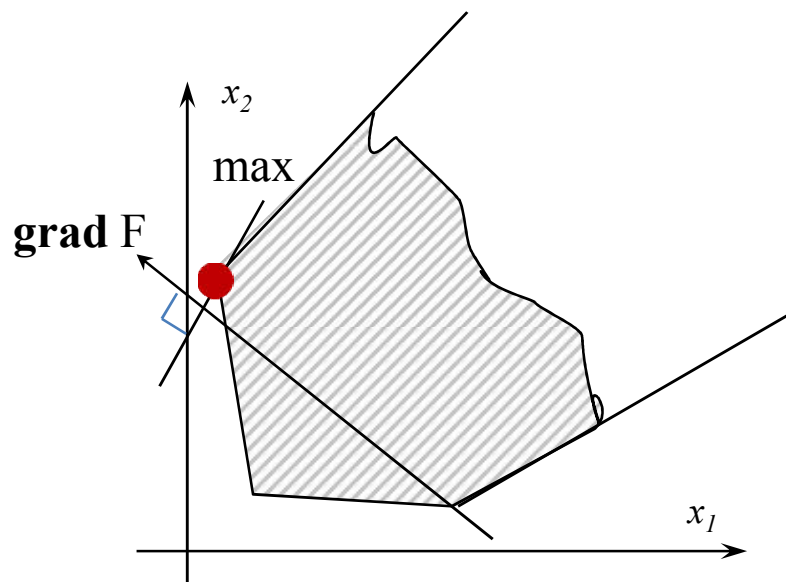


2. Область ОДР обмежена,
градієнт перпендикулярний
стороні M_1M_2 .

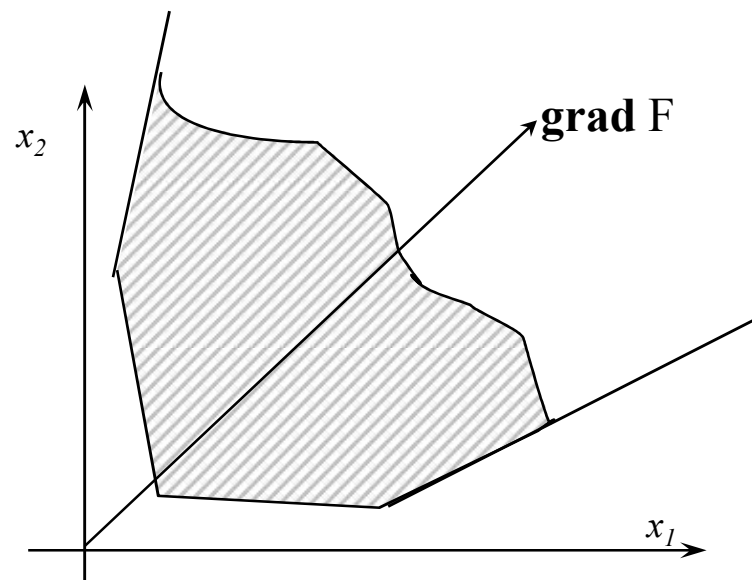


Різні випадки, що зустрічаються при рішенні задач лінійного програмування

3. Область D необмежена.
Рішення (max) існує і єдино.



4. Область D необмежена, цільова функція необмежена. Рішення не існує



Задача. Визначення оптимального асортименту продукції

Підприємство виготовляє два види продукції - P_1 і P_2 , яка надходить до оптового продажу. Для виробництва продукції використовується два види сировини - А і В. Максимально можливі запаси сировини в добу становлять 9 і 13 одиниць відповідно. Витрата сировини на виробництво одиниці продукції виду P_1 і P_2 дано в таблиці.

Сировина (борошно)	Витрата сировини на виробництво одиниці продукції		Запас сировини, од.
	P_1 хліб білий	P_2 хліб сірий	
А-2-й сорт	2	3	9
В-1-й сорт	3	2	13

Досвід роботи показав, що добовий попит на продукцію P_1 ніколи не перевищує попиту на продукцію P_2 більш ніж на 1 од. Крім того, відомо, що попит на продукцію P_2 ніколи не перевищує 2 од. на добу. Оптові ціни одиниці продукції дорівнюють: 3 гр.од. - для P_1 і 4 гр.од. - для P_2 .

Яку кількість продукції кожного виду має виробляти підприємство, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним?

Математична модель задачі

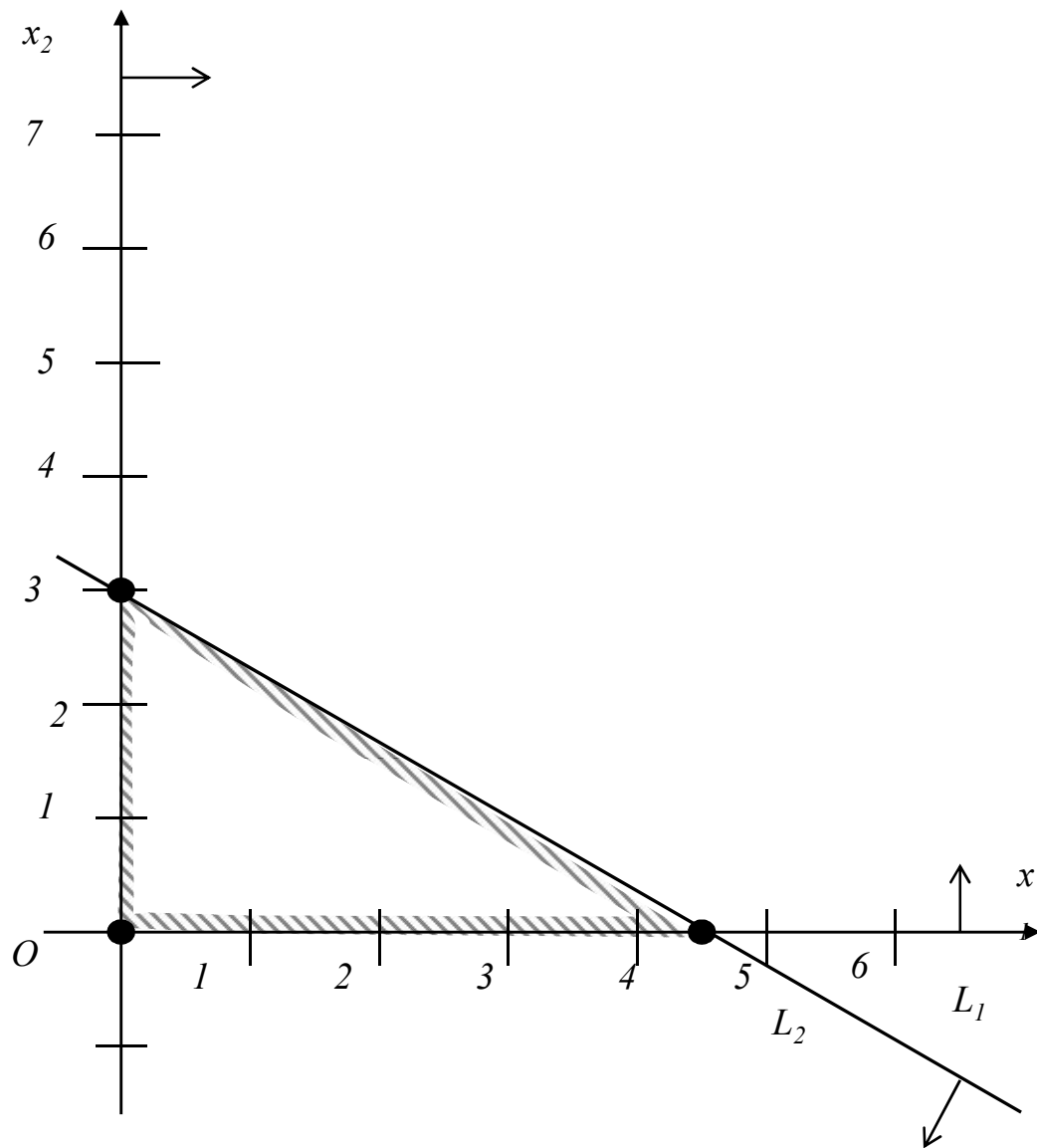
Цільова функція $F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

Область
допустимих
рішень (ОДР)

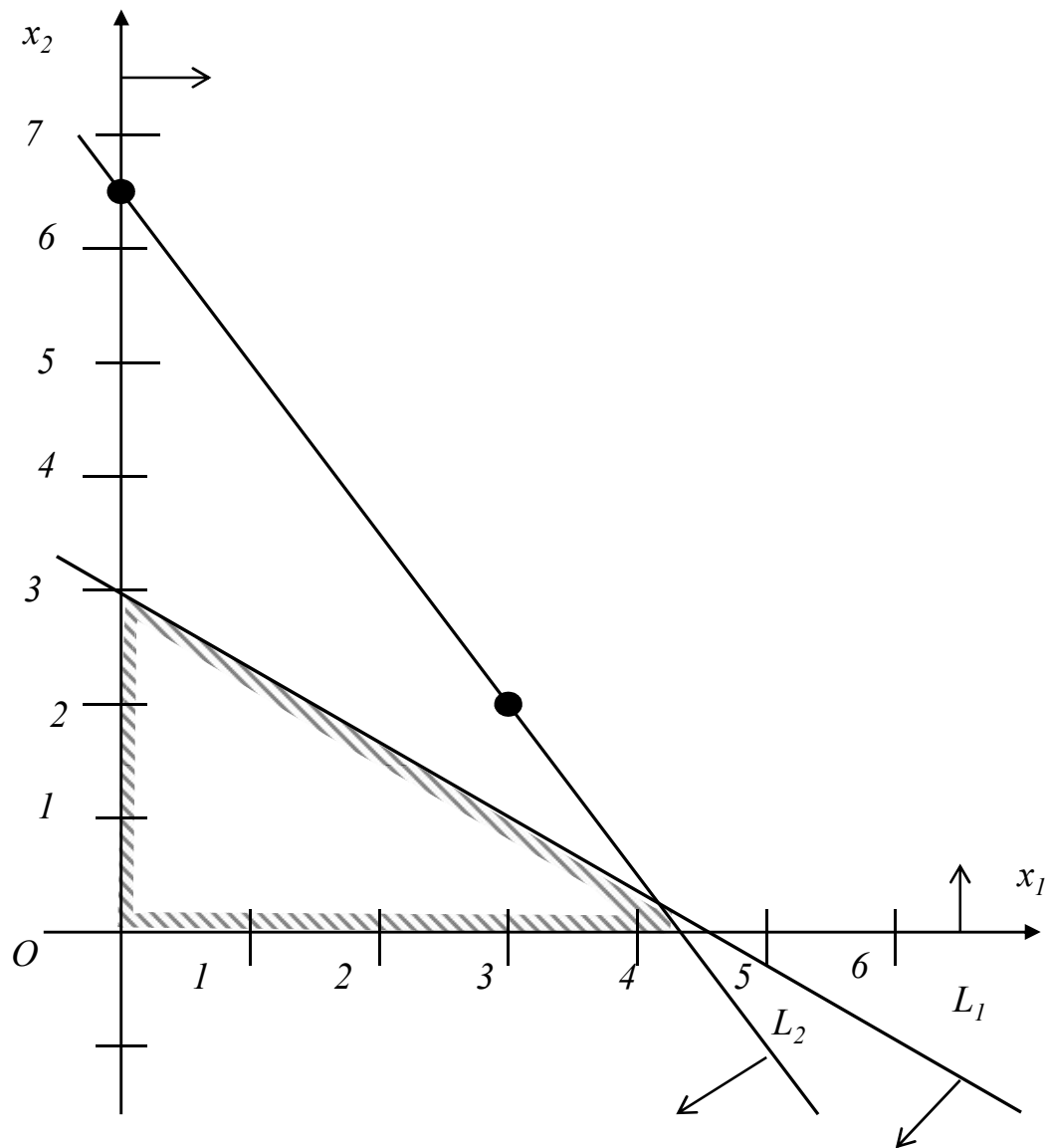
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 9, & L_1 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13, & L_2 \\ x_1 - x_2 \leq 1, & L_3 \\ x_2 \leq 2, & L_4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

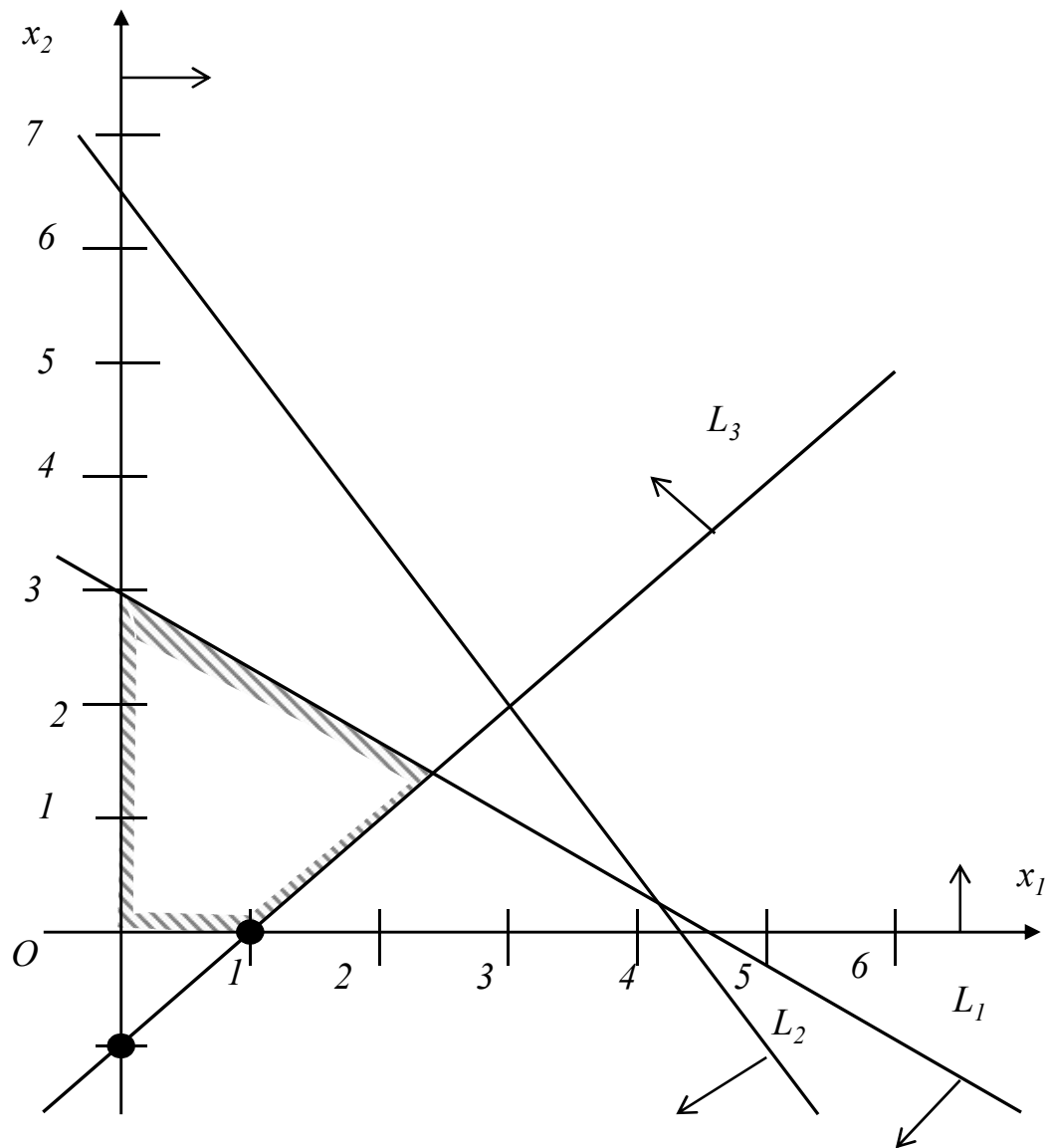
Побудова ОДР



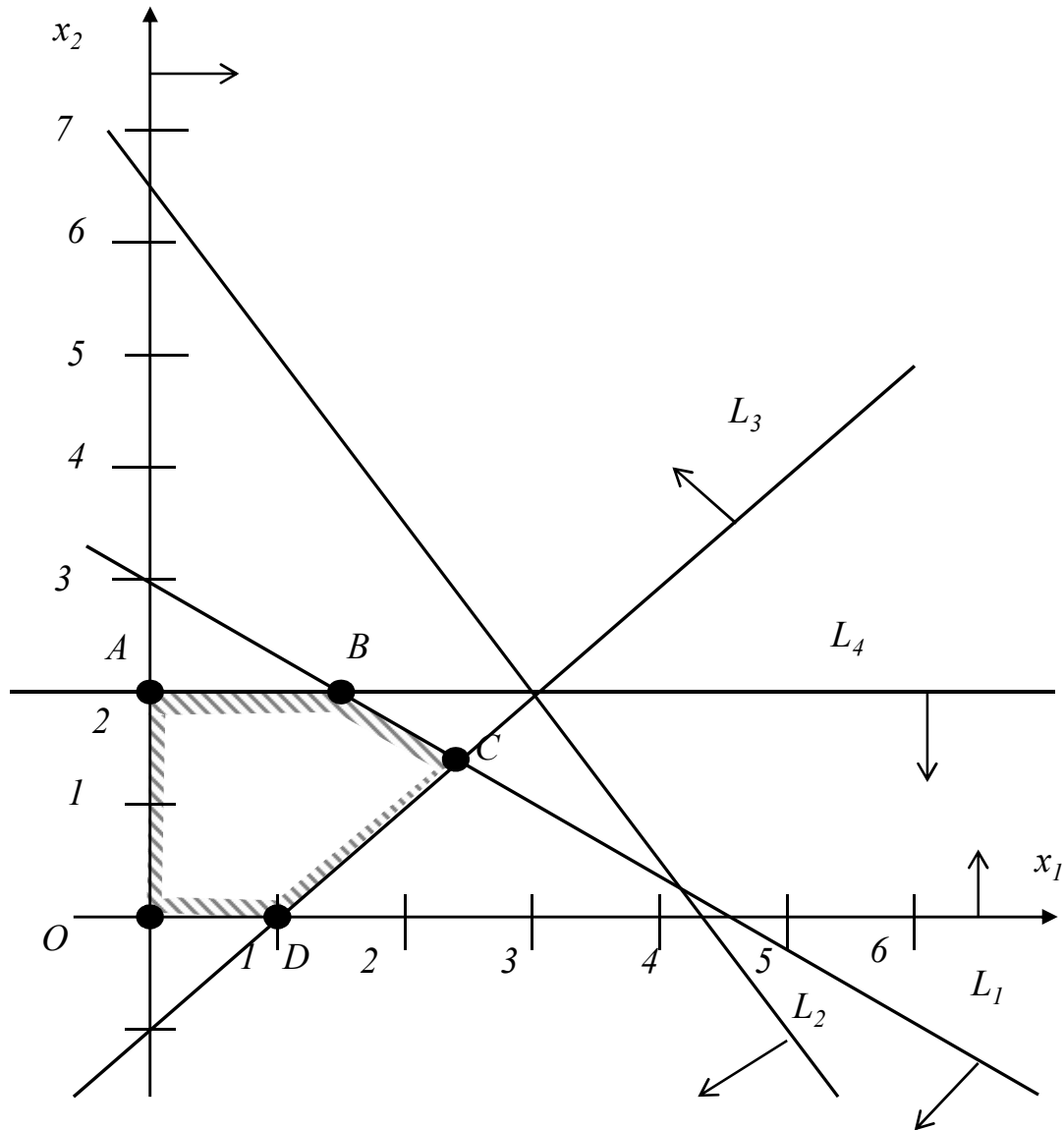
Побудова ОДР



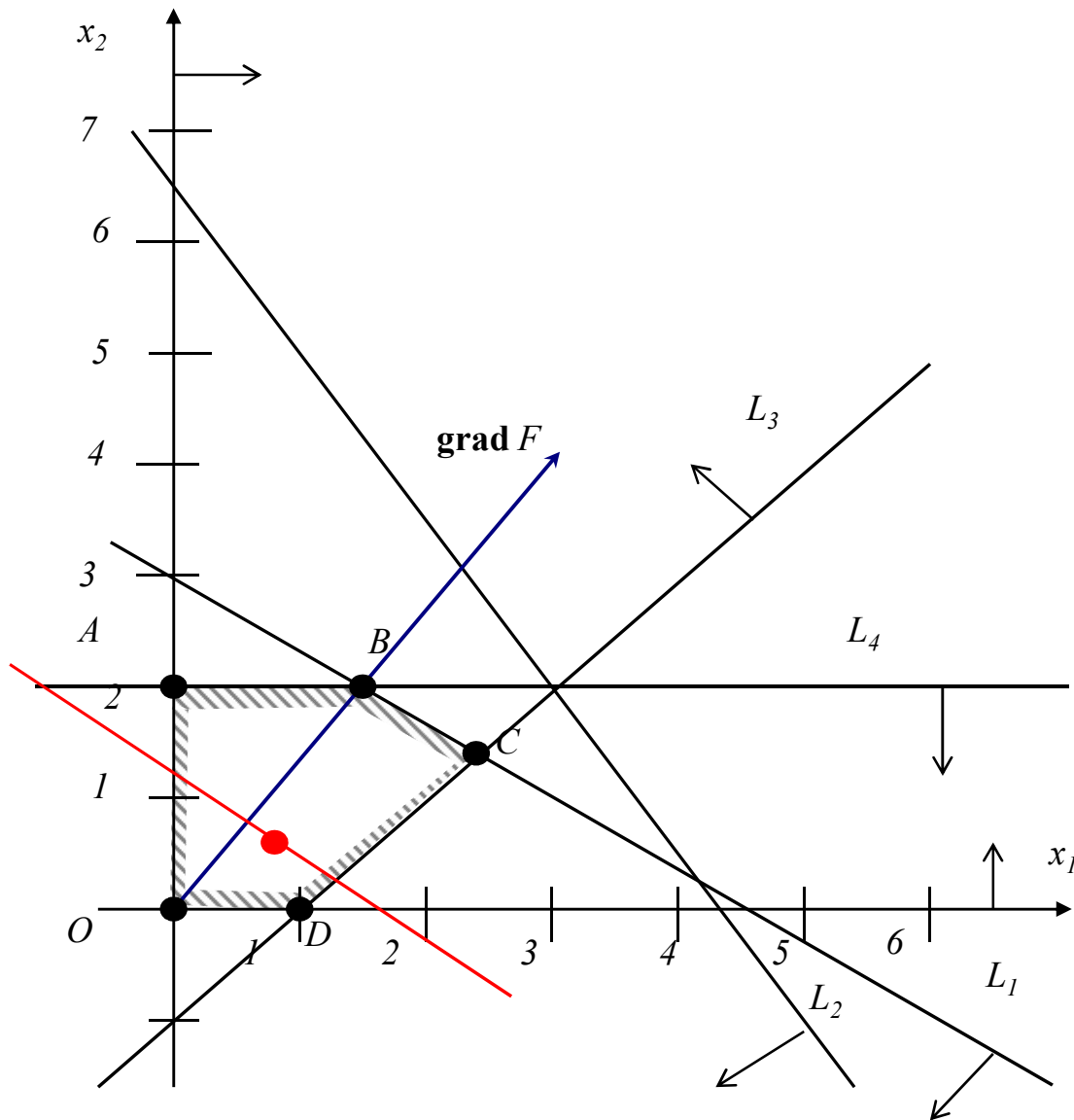
Побудова ОДР



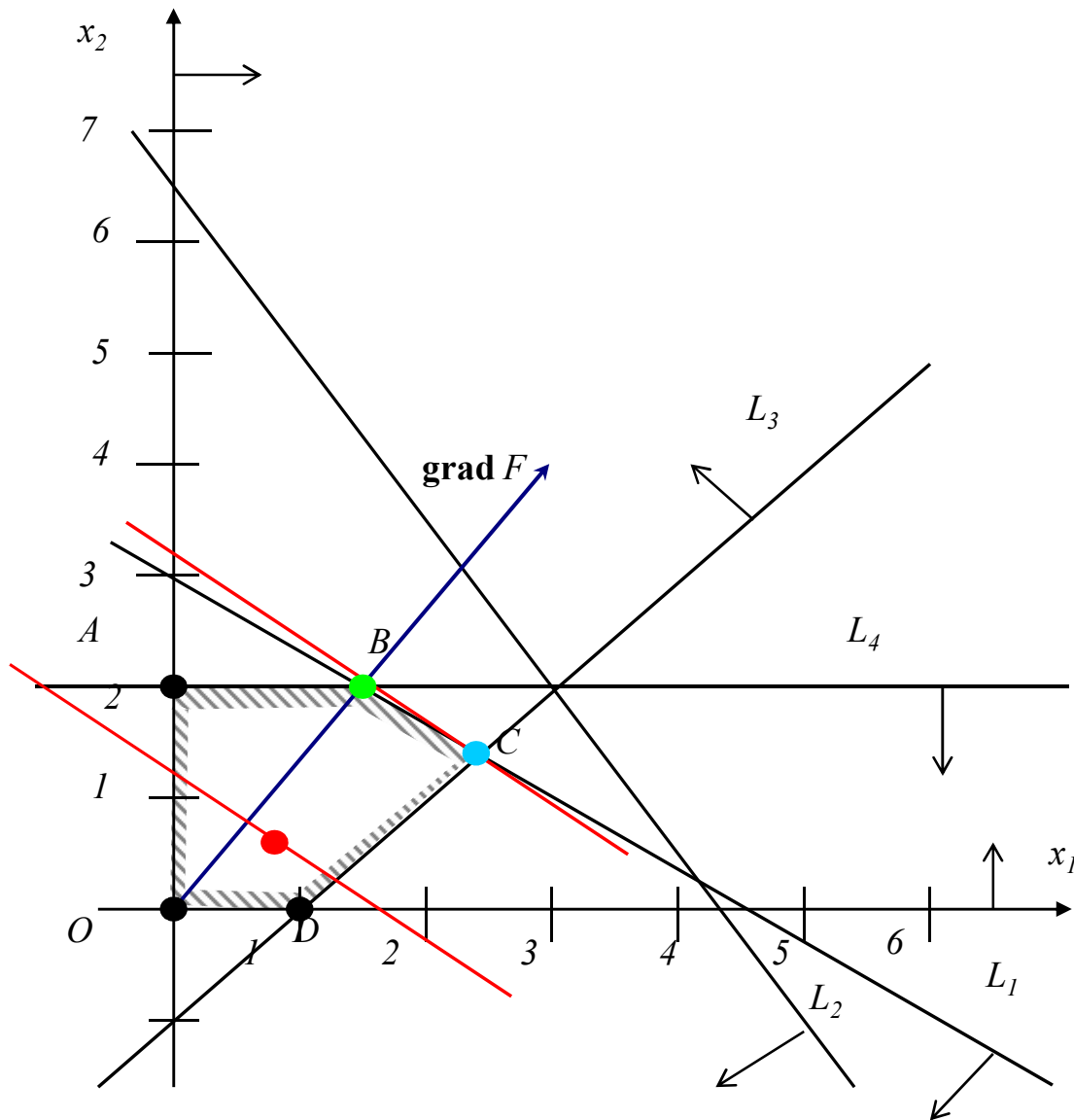
Побудова ОДР



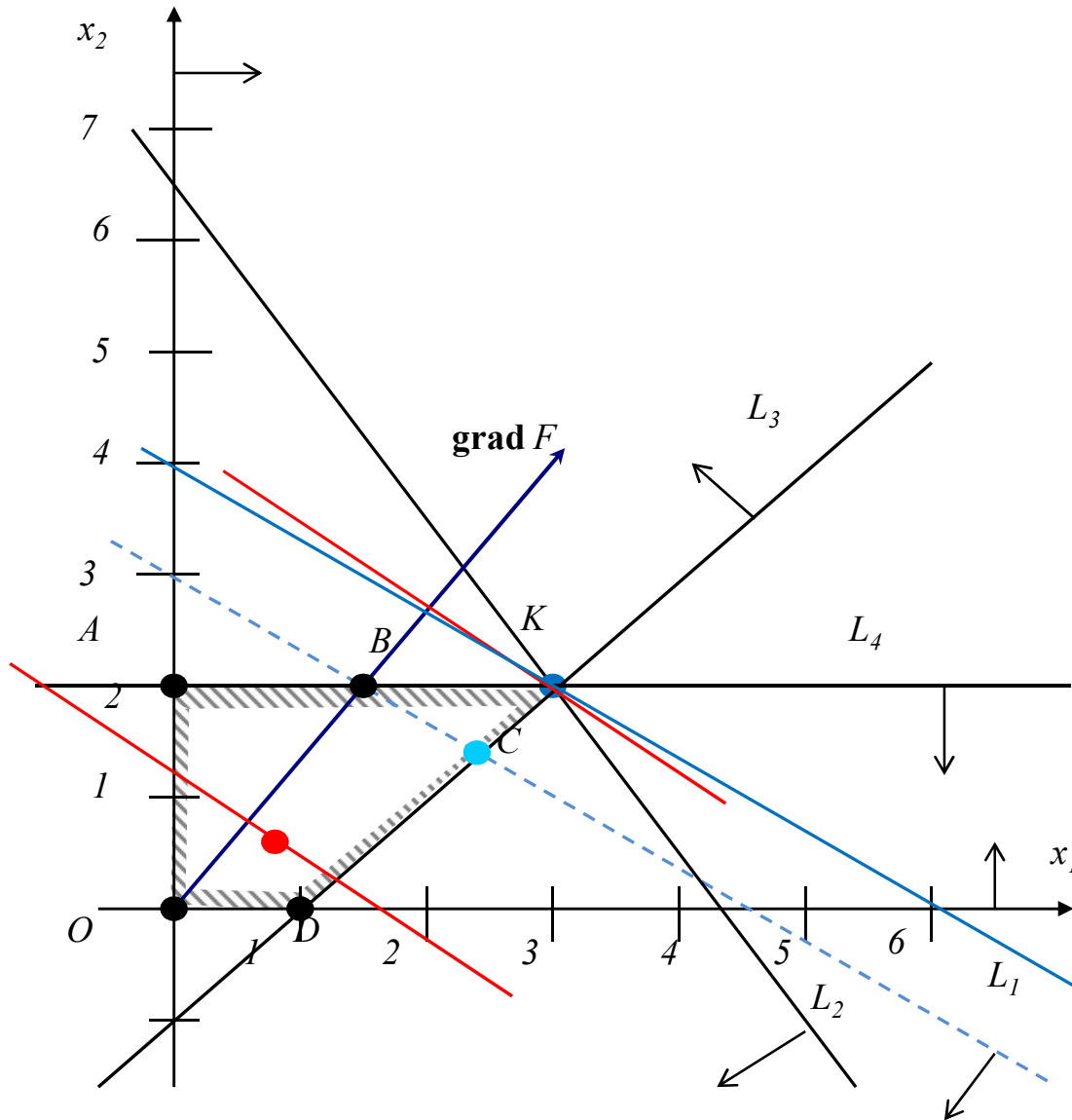
Побудова градієнта та лінії рівня



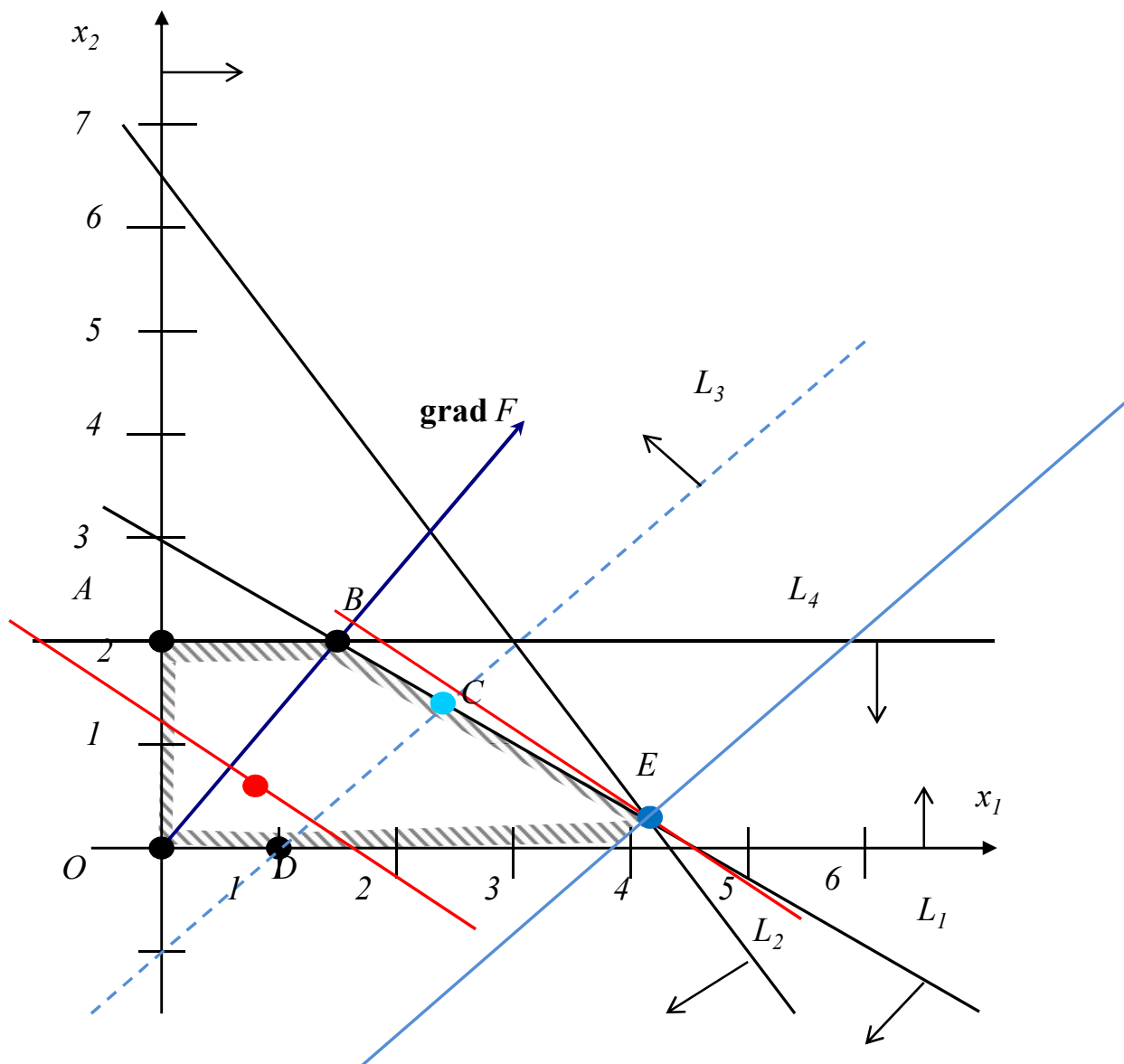
Визначення оптимального рішення



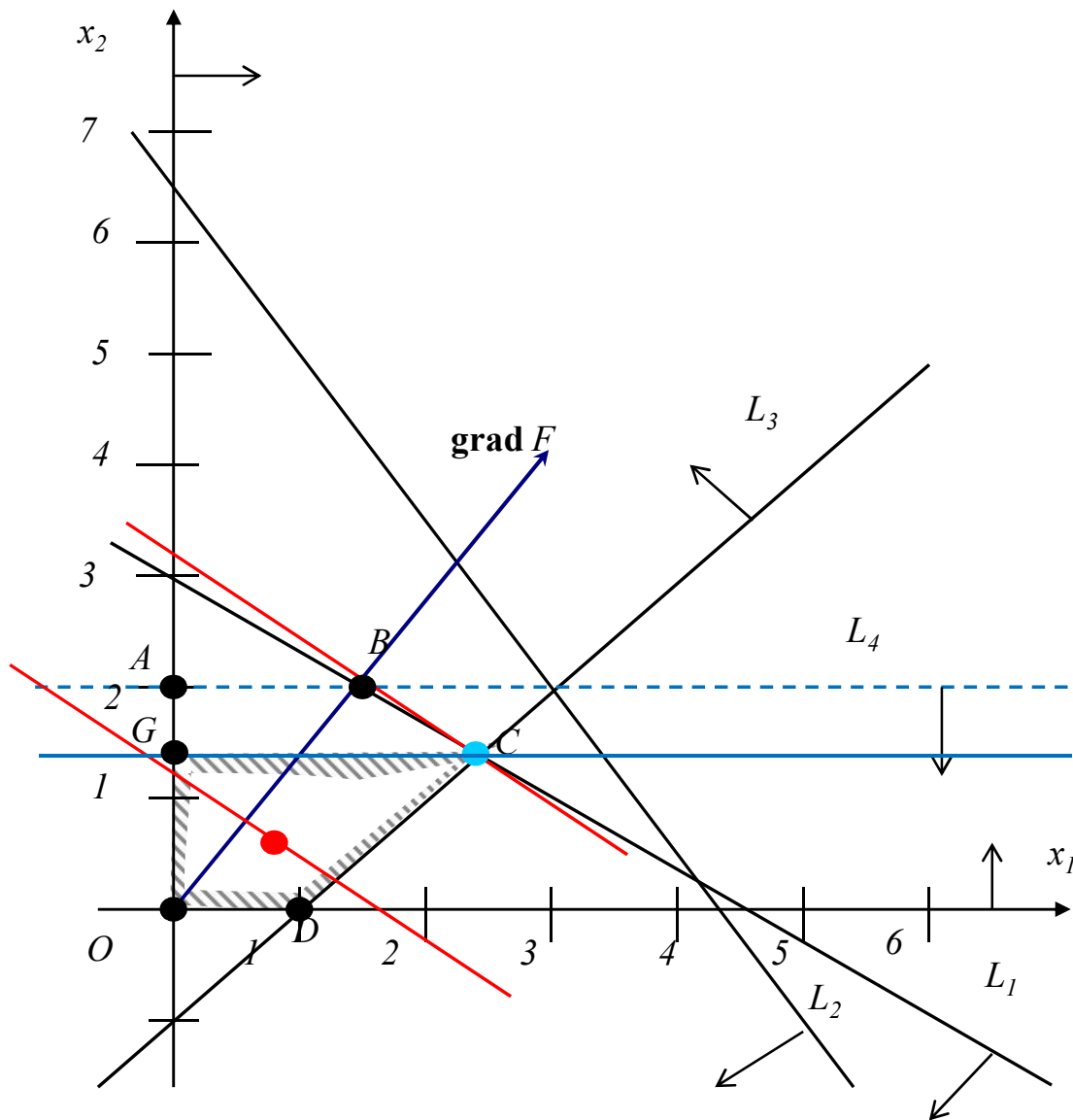
Визначення оптимального рішення при збільшенні запасу сировини А



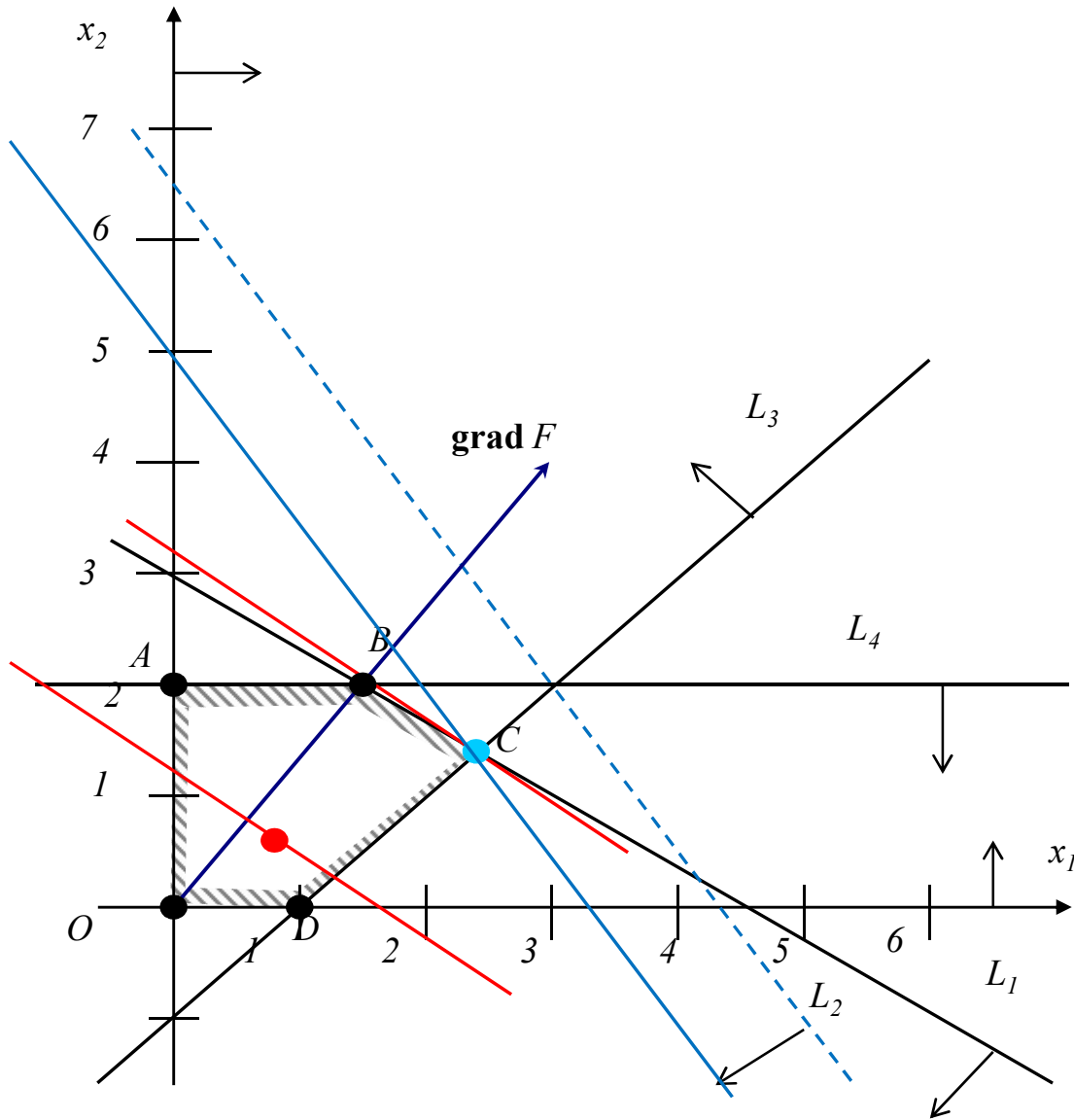
Визначення оптимального рішення при зміні співвідношення попиту на продукцію Π_1 і Π_2 .



Границі зміни обмеження (4) що не впливають на оптимальність



Границі зміни обмеження (2) що не впливають на оптимальність



Результати проведеного аналізу та висновки:

Ресурс	Тип ресурсу	Максимальна зміна запасу ресурсу, од.	Максимальне збільшення доходу від зміни ресурсу, гр. од.
1(А)	Дефіцитний	$12 - 9 = 3$	$17 - 12,8 = 4,2$
2(В)	Недефіцитний	$10 - 13 = -3$	$12,8 - 12,8 = 0$
3	Дефіцитний	$4 - 1 = 3$	$13,4 - 12,8 = 0,6$
4	Недефіцитний	$1,4 - 2 = -0,6$	$12,8 - 12,8 = 0$

Висновок: для досягнення максимального доходу потрібно виробляти 2.4 ум. од. продукції P_1 і 1.4 ум. од. продукції P_2 . При цьому максимальний дохід складе 12.8 гр. од.

Витрата борошна А: 9 од. (ресурс дефіцитний).

Витрата борошна В: 10 од. (ресурс недефіцитний)

При збільшенні запасу сировини А до 12 од. можна збільшити дохід до 17 гр. од. (+4,2 гр. од.)

При зміні співвідношення попиту на продукцію P_1 і P_2 до 4 од. ($P_1 > P_2$) можна збільшити дохід до 13,4 гр. од. (+0,6 гр. од.)

Без зміни оптимально рішення можна зменшити: запас сировини В до 10 од. (-3 од.); попит на продукцію P_2 до 1,4 од. (-0,6 од.)

Задача про оптимальну суміш

З двох видів сировини необхідно скласти суміш, до складу якої повинні входити не менше 26 одиниць хімічної речовини А, 30 одиниць - речовини В і 27 одиниць - речовини С. Кількість одиниць хімічної речовини, що міститься в 1 кг сировини кожного виду, зазначено в таблиці. У ній же наведена ціна 1 кг сировини кожного виду.

Скласти суміш, потрібного складу, що має мінімальну вартість.

Речовина	К-сть од. речовини	
	Сировина 1	Сировина 2
А	1	1
В	2	0
С	1	2
Ціна	5	6

Слайди можна закачати:

сайт ДДМА, кафедра вищої математики, методичні основи викладання:

<http://www.dgma.donetsk.ua/metodicheskie-osnovyi-prepodavaniya-v-vuze.html>

Центр ДЗО, курс «Економіко-математичне моделювання»:

<http://moodle.dgma.donetsk.ua/>