

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

Ю. С. Холодняк
О. А. Костіков
Н. В. Чоста

ОПР МАТЕРІАЛІВ

Курс лекцій

**для студентів усіх механічних спеціальностей
денної і заочної прискорених форм навчання**

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № 10 від 25.05.2023 р.

Краматорськ
ДДМА
2023

УДК 539.3/.5

X 24

Рецензенти:

Зайцев Д. А., д-р техн. наук, професор кафедри інформаційних технологій Одеського державного екологічного університету;

Алієв І. С., д-р техн. наук, професор, зав. кафедри обробки металів тиском Донбаської державної машинобудівної академії.

Холодняк Ю. С.

X 24 Опір матеріалів : *курс лекцій [для студентів усіх механічних спеціальностей денної і заочної прискорених форм навчання]* / Ю. С. Холодняк, О. А. Костіков, Н. В. Чоста. – Краматорськ : ДДМА, 2023. – 259 с.

ISBN 978-617-7889-42-6

Містить теоретичний матеріал згідно з програмою прискореного курсу опору матеріалів, приклади розв'язання практичних задач і необхідні додатки.

УДК 539.3/.5

ISBN 978-617-7889-42-6

© Ю. С. Холодняк,
О. А. Костіков,
Н. В. Чоста, 2023
© ДДМА, 2023

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 ВВЕДЕННЯ В ДИСЦИПЛІНУ. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ.....	6
1.1 Основні поняття і завдання науки про опір матеріалів. Стисла історична довідка.....	6
1.2 Реальний об'єкт і розрахункова схема. Типові елементи конструкцій. Допущення опору матеріалів.....	8
1.3 Зв'язок зовнішніх сил і внутрішніх зусиль. Метод перерізів.....	14
1.4 Напруження, їх зв'язок з внутрішніми силовими факторами.....	15
2 РОЗТЯГАННЯ – СТИСКАННЯ.....	18
2.1 Внутрішні зусилля у поперечних перерізах стрижнів, побудова їх епюр.....	18
2.2 Деформації і напруження при розтяганні - стисканні. Закон Гука. Коефіцієнт Пуассона.....	20
2.3 Умови міцності й жорсткості при розтяганні – стисканні.....	23
2.4 Випробування матеріалів на розтягання і стискання.....	27
2.5 Розрахунки стрижневих систем, що працюють на розтягання і стискання.....	37
3 ГЕОМЕТРІЯ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ.....	48
3.1 Статичні моменти плоских перерізів. Визначення центрів ваги простих фігур.....	48
3.2 Моменти інерції плоских перерізів. Радіуси інерції.....	50
3.3 Моменти інерції простих фігур.....	52
3.4 Перетворення моментів інерції при паралельному переносі й повороті осей координат.....	54
3.5 Визначення напрямків головних центральних осей і величин головних моментів інерції.....	58
4 ЕПЮРИ ПРИ ПЛОСКОМУ ЗГИНАННІ.....	70
4.1 Плоске згинання, його різновиди і об'єкти. Внутрішні силові фактори, їхні епюри і правила знаків.....	70
4.2 Диференціальні залежності при згинанні.....	76
4.3 Побудова епюр для балок.....	80
4.4 Побудова епюр для плоских рам.....	86
5 ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ. ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ.....	94
5.1 Напружений стан у точці тіла, його компоненти і задавання. Закон парності дотичних напружень.....	94
5.2 Головні площадки, головні напруження і головні напрямки. Види напружених станів. Основні задачі теорії напруженого стану.....	96
5.3 Напружений стан прямих стрижнів при простому розтяганні – стисканні.....	97
5.4 Плоский напружений стан. Розв'язання прямої і оберненої задач теорії цього стану.....	100

5.5 Об'ємний напружений стан. Головні деформації. Узагальнений закон Гука. Питома потенційна енергія пружної деформації, її складові.....	109
5.6 Теорії міцності, їх призначення. Критерії міцності та еквівалентні напруження.....	115
5.7 Класичні теорії міцності, їх області застосування і недоліки, умови міцності.....	116
6 НАПРУЖЕННЯ ПРИ ПЛОСКОМУ ЗГИНАННІ.....	121
6.1 Чисте згинання. Визначення нормальних напружень, умова міцності.....	121
6.2 Поперечне згинання. Визначення дотичних напружень, формула Журавського. Умова міцності за дотичними напруженнями	129
6.3 Еквівалентні напруження при поперечному згинанні. Повний розрахунок балок на міцність.....	137
6.4 Спрощена методика повного розрахунку на міцність двотаврових балок.....	143
7 ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ ПЛОСКОМУ ЗГИНАННІ.....	153
7.1 Потенційна енергія балок і плоских рам.....	153
7.2 Теорема Кастільяно.....	156
7.3 Метод Мора.....	159
7.4 Чисельне обрахування інтегралів Мора.....	163
7.5 Розрахунки статично невизначуваних балок і плоских рам. Метод сил.....	180
8 ЗСУВ.....	200
8.1 Чистий зсув, його особливості та напружений стан.....	200
8.2 Деформація і закон Гука при чистому зсуві.....	201
8.3 Розрахунки на міцність при зсуві.....	203
9 КРУЧЕННЯ.....	209
9.1 Загальні положення. Побудова епюр крутних моментів.....	209
9.2 Напруження і деформації при крученні вала.....	211
9.3 Умови міцності й жорсткості при крученні.....	216
10 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТРИЖНІВ.....	220
10.1 Подовжній згин, його сутність.....	220
10.2 Визначення критичної сили. Задача Ейлера.....	221
10.3 Межі застосування формули Ейлера для критичного напруження. Формула Ясинського.....	224
10.4 Розрахунки на стійкість з використанням коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження.....	226
ЛІТЕРАТУРА.....	233
ДОДАТОК А. Основні параметри катаних профілів.....	235
ДОДАТОК Б. Параметри безпечного факторного простору двотаврів.....	241
ДОДАТОК В. Креслення безпечного факторного простору двотаврів.....	242
ДОДАТОК Г. Комп'ютерні розрахунки.....	253
ДОДАТОК Д. Основні параметри стиснутих стрижнів.....	259

ВСТУП

Опір матеріалів є обов'язковою навчальною дисципліною всіх технічних ВНЗ. Вона закладає основи інженерних розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд. Ця дисципліна базується на попередніх навчальних дисциплінах: вищій математиці, фізиці, теоретичній механіці, технології конструкційних матеріалів. У свою чергу, вона служить фундаментом для низки подальших технічних дисциплін: деталей машин, конструювання механічного обладнання за напрямками інженерної підготовки тощо.

Цей курс є скороченим варіантом повного курсу даної дисципліни, який викладається в ДДМА протягом цілого навчального року випускникам середніх шкіл, які ще не мають попередніх знань з опору матеріалів.

Скорочений курс опору матеріалів (або прискорений, як його ще називають) викладається випускникам ЗВО 1-го рівня – технікумів і коледжів, які вже мають певну технічну підготовку і навчаються за денною і заочною прискореними формами навчання. Згідно з робочою програмою до скороченого курсу включені лише ті теми повного курсу, які мають найбільше значення для подальшої бакалаврської підготовки і майбутньої інженерної практики.

Викладання скороченого курсу опору матеріалів, як і повного, в ДДМА ведеться за базовим підручником [1], розробленим групою викладачів Національного технічного університету «Київська політехніка». Зважаючи на те, що цей підручник призначений у першу чергу для університетських курсів, на його основі викладачами ДДМА був підготовлений у 2007–2008 роках дещо спрощений і адаптований до навчання в Академії курс лекцій у двох томах для повного курсу опору матеріалів [2], [3]. Користуються цим посібником і студенти, що вивчають скорочений курс, хоча таке користування для них є досить незручним. У цьому посібнику тематична послідовність не відповідає робочій програмі скороченого курсу. До того ж він значно перевантажений матеріалами, не передбаченими цією програмою. Зазначені обставини створюють певні складнощі у пошуку потрібної студентам інформації, особливо в умовах дистанційного навчання. До того ж, у цьому посібнику відсутні вкрай необхідні для кращого сприйняття наведених прикладів довідкові матеріали (насамперед, таблиці сортаменту катаної сталі). Є також зауваження до деяких аспектів висвітлення теоретичних питань. Усе це робить чинний посібник малопридатним для скороченого курсу.

Для цього курсу потрібен інший курс лекцій, максимально адаптований до навчальної програми і який відповідає новітнім тенденціям розвитку дисципліни. Саме таким і є цей підготовлений курс, метою якого є створення для студентів найліпших умов успішного навчання.

1 ВВЕДЕННЯ В ДИСЦИПЛІНУ. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ

1.1 Основні поняття і завдання науки про опір матеріалів. Стисла історична довідка

У процесі своєї виробничої діяльності людина створює і використовує безліч різних конструкцій. До них відносяться всілякі машини і механізми, прилади, будівельні споруди і т. д. Усі вони в процесі проектування розраховуються так, щоб при дії заданих навантажень забезпечувалася їх міцність, жорсткість і стійкість.

Опір матеріалів – це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд.

Під міцністю розуміють здатність конструкції і її деталей витримувати певне навантаження, не руйнуючись.

Під жорсткістю розуміють здатність конструкції і її елементів протистояти зовнішнім навантаженням відносно деформації (тобто зміни форми і розмірів). При заданих навантаженнях деформації не повинні перевищувати певної величини, що встановлюється відповідно до вимог, які висуваються до конструкції.

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

Щоб конструкція в цілому відповідала вимогам міцності, жорсткості і стійкості, а, отже, була надійною в експлуатації, необхідно надати її елементам найбільш раціональної форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вони виготовлятимуться, визначати відповідні розміри залежно від величини і характеру діючих сил.

За допомогою методів опору матеріалів інженери практично розраховують і визначають необхідні (надійні) розміри деталей машин і різних будівельних споруд. Одночасно з умовами надійності до конструкції висуваються вимоги її економічності. Ці вимоги часто суперечать одна одній. Перша зазвичай потребує збільшення витрат матеріалу, друга ж, навпаки, вимагає зниження цих витрат. Така суперечність є найважливішим елементом наукових методик, які обумовлюють розвиток науки «Опір матеріалів».

Ця наука має дві частини – теоретичну і практичну. У своїй теоретичній частині вона базується на вищій математиці і теоретичній механіці, в практичній – на фізиці твердого тіла і матеріалознавстві.

Із вищої математики в опорі матеріалів використовуються елементи диференціального і інтегрального числень, векторної алгебри і аналітичної геометрії.

Із теоретичної механіки широко задіяне вчення про сили із розділу «Статика», також низки положень динаміки. Взагалі, без знань теоретичної механіки вивчення опору матеріалів є неможливим.

Фізика насамперед вводить в обіг поняття потенційної і кінетичної енергій, роботи сил різної природи.

Матеріалознавство надає знань про реальну структуру і властивості конструкційних матеріалів, їх характерні дефекти, закладає фундамент механічних випробувань.

На відміну від теоретичної механіки, в якій вивчаються закони руху і силової взаємодії абсолютно твердих тіл, в опорі матеріалів розглядаються задачі, пов'язані з визначенням внутрішніх зусиль у деформованих тілах, які є джерелами їх руйнування і надмірних деформацій під дією зовнішніх навантажень.

Опір матеріалів не вичерпує всіх питань розрахунку на міцність. Він межує з такими розділами фундаментальної науки, як теорія пружності і теорія пластичності.

Методи опору матеріалів не залишаються постійними. Вони змінюються разом з виникненням нових завдань і нових вимог практики. При веденні інженерних розрахунків слід пам'ятати, що успіх практичного розрахунку лежить не стільки в застосуванні складного математичного апарату, скільки в умінні вникати в істоту досліджуваного об'єкта, знайти найбільш вдалі припущення і довести розрахунок до простих числових результатів.

Опір матеріалів, як і всяка інша наука, має свою історію, витоки якої йдуть із глибини століть. Уже в найдавніші часи людство створювало різні споруди, шедеври архітектури, деякі з яких дійшли до наших днів. Виробнича діяльність того часу заклала потреби у конструюванні технічних засобів, машин і механізмів. Зрозуміло, що це потребувало певних знань, не тільки емпіричних, а й теоретичних.

На базі цих первинних знань поступово стала складатися наука про міцність. Основи її були сформульовані в працях великого італійського вченого Г. Галілея (1564–1642), який першим провів і описав досліди щодо згинання балок. Він вперше поставив питання про необхідність аналітичних розрахунків для оцінювання здібності тіл чинити опір дії зовнішніх сил.

Наступною віхою розвитку науки про міцність було відкриття основного закону деформації пружних тіл (деформація пружного тіла пропорційна діючим на нього зусиллям), опублікованого в 1678 році англійським ученим Р. Гуком. Ця залежність відома під назвою закону Гука, який має виключно важливе значення в опорі матеріалів.

У царській Росії перші дослідження у сфері міцності були проведені в 40-х роках XVIII століття. Найважливіший внесок у розвиток теорії згинання і стійкості стрижнів зробив академік Л. Ейлер (1707–1783).

На початку XIX століття широкої популярності набули роботи французького вченого Нав'є (1785–1836), який написав перший систематичний курс опору матеріалів. Сильний поштовх до розвитку науки про міцність одержала в період будівництва металевих мостів. До цього періоду відносяться праці видатного російського вченого Д. І. Журавського (1821–1891), які одержали визнання у всьому світі.

У кінці XIX – початку XX століття важливі дослідження у сфері міцності та стійкості були проведені Х. С. Головіним, Ф. С. Ясинським, І. Г. Бубновим, А. В. Гадоліним.

Особлива роль в розвитку науки про опір матеріалів, а також в пропаганді і розвитку ідей, що сформувалися до початку XX століття, належала вченому з українським корінням, одному з засновників першої Української академії наук (1918) С. П. Тимошенко (1878–1972). Його наукові праці і підручники здобули всесвітню популярність [4].

У всю широчінь розвернулася наука про міцність у подальші роки, в епоху науково-технічної революції, коли над питаннями міцності стали працювати вже не окремі вчені, а певні наукові школи. Провідні працівники вітчизняних шкіл: Н. Н. Давіденков, В. З. Власов, Н. З. Беляєв, С. В. Серенсен, А. А. Уманський, І. М. Рабінович, Н. У. Корноухов, Н. Н. Афанасьєв, С. Д. Пономарьов, Г. С. Писаренко і ціла низка їхніх послідовників.

Більш докладну інформацію про історичний шлях становлення опору матеріалів як науки можна знайти у публікації [5].

1.2 Реальний об'єкт і розрахункова схема. Типові елементи конструкцій. Допущення опору матеріалів

У опорі матеріалів, як і у всякій природознавчій науці, дослідження питання про міцність реального об'єкта починається з вибору розрахункової схеми. Починаючи розраховувати конструкції, слід, перш за все, встановити, що в цьому випадку є істотним, а що неістотним, необхідно провести схематизацію об'єкта і відкинути всі чинники, які не можуть помітним чином вплинути на його роботу. Такого роду спрощення при виборі розрахункової схеми у всіх випадках абсолютно необхідні, оскільки рішення з повним обліком усіх властивостей реального об'єкта є принципово неможливим через їх очевидну невичерпність. Наприклад, потрібно розрахувати міцність канату підйомника. У першу чергу треба врахувати вагу вантажу, що піднімається, прискорення, з яким він рухається, а при великій висоті підйому і вагу самого канату. Водночас очевидно треба відкинути вплив таких неістотних чинників, як аеродинамічний опір, що виникає при підйомі кліті, сили барометричного тиску на різних висотах, зміну температури і висоти та інші чинники.

Реальний об'єкт, звільнений від неістотних особливостей, називається розрахунковою схемою.

Для одного і того самого реального об'єкта може бути запропоновані декілька розрахункових схем, у першу чергу залежно від необхідної точності і від того, яка сторона явища цікавить дослідника в цьому конкретному випадку.

Так, якщо в згаданому прикладі підйомника потрібно оцінити тільки міцність канату, то вантаж і кліть допустимо розглядати як жорстке ціле і звести їх до сили, прикладеної до кінця канату (рис. 1.1, а).

Якщо ж необхідно вирішити питання про міцність самої кліті, то її не можна вважати абсолютно твердим тілом. Її конструктивні особливості треба розглядати окремо і відповідно до цього вибирати для неї іншу розрахункову схему (рис. 1.1, б).

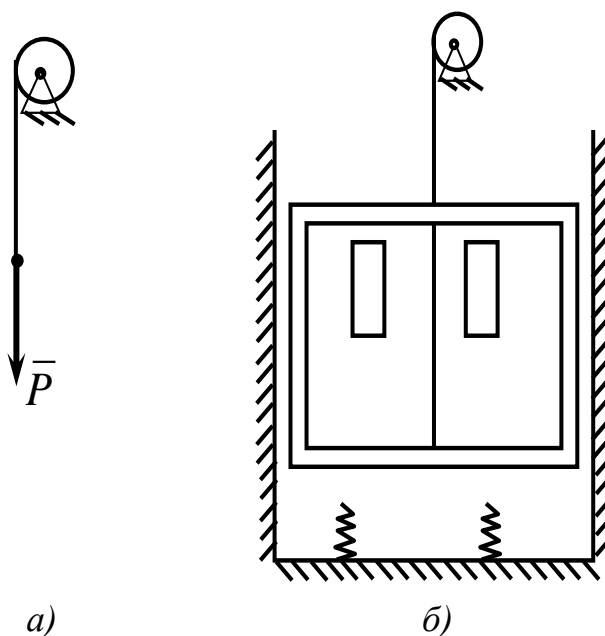


Рисунок 1.1

Якщо для одного і того самого об'єкта можуть бути запропоновані декілька розрахункових схем, то, з іншого боку, одній розрахунковій схемі може бути поставлено у відповідність багато різних об'єктів. Остання обставина є вельми важливою, оскільки, досліджуючи деяку схему, можна одержати рішення цілого класу задач, які зводяться до даної схеми.

Так, наприклад, на рисунку 1.2 наведені розрахункові схеми, які можна розглядати, як:

а) позацентрово стиснутий стрижень (колона свердлувального верстата, частина кліті прокатного стану і т. д.);

б) раму під дією навантаження (каркас поперечника цеху, кліть прокатного стану і т. д.);

в) нерозрізну балку (залізничний міст, валок прокатного стану і т. д.).

При виборі розрахункової схеми вводиться низка допущень, з яких основними є такі.

Перше допущення передбачає *схематизацію (ідеалізацію) властивостей матеріалу*, згідно з яким матеріал конструкції вважається однорідним суцільним середовищем і є ізотропним.

Суцільність (або «безперервність») означає, що весь об'єм конструкції повністю заповнений речовиною і не містить порожнеч.

Однорідність означає незалежність властивостей матеріалу від місця виділеного з тіла об'єму.

Насправді матеріал внаслідок низки причин не може бути ні суцільним, ні однорідним, як це відомо із матеріалознавства і виробничої практики.

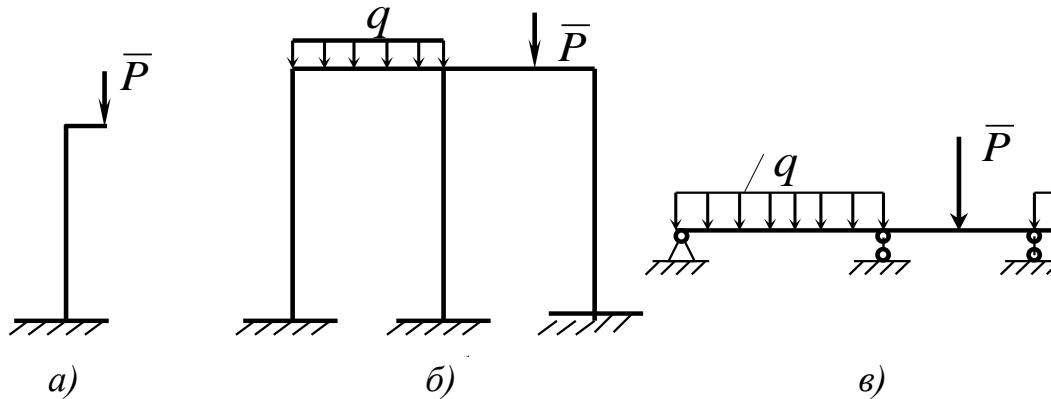


Рисунок 1.2

Ізотропним вважається суцільне середовище, якщо воно має однакові властивості у всіх його частинах і за всіма напрямками. У дійсності ж існує багато анізотропних матеріалів, у яких властивості в різних напрямках суттєво відрізняються. До таких матеріалів відносяться деревина, властивості якої вздовж і поперек волокон істотно різні, армовані матеріали, сталевий прокат та ін.

Друге допущення передбачає, що матеріал конструкції працює в межах пружності.

Пружністю при цьому називається властивість тіла відновлювати початкові розміри і форму після зняття навантажень, які викликали деформацію.

Деформації, які повністю зникають після зняття навантаження, називаються пружними. Досвід показує, що деформації є повністю пружними лише до тих пір, поки навантаження не перевищує деякого певного значення, залежного від пружних властивостей даного матеріалу. При навантаженнях, більших за цю межу, деформація зникає вже не повністю. У таких випадках повна деформація складається з пружної і залишкової (пластичної).

Третє допущення вважає деформації тіла малими в порівнянні з розмірами деформованих тіл. Це допущення дозволяє поширити рівняння статyki на тіла, що деформуються.

Четверте допущення стосується пропорційності деформацій тіл і їх навантажень, тобто відповідності матеріалу закону Гука.

Відхилення реальних матеріалів від ідеалізованої моделі в опорі матеріалів компенсуються певною мірою введенням у розрахунки так званих коефіцієнтів запасу, які занижують допустимі показники міцності

проти отриманих у серії механічних випробувань. У деяких випадках це зниження сягає декілька разів.

Окрім допущення про схематизацію властивостей матеріалу, враховують схематизацію геометрії реального об'єкта. Кожна конструкція складається з окремих деталей і елементів. З геометричної точки зору вони можуть мати вид стрижня (бруса), оболонки, пластини або масиву.

Стрижень (брус) – тіло, одне з вимірювань якого (довжина) значно більше двох інших (рис. 1.3).

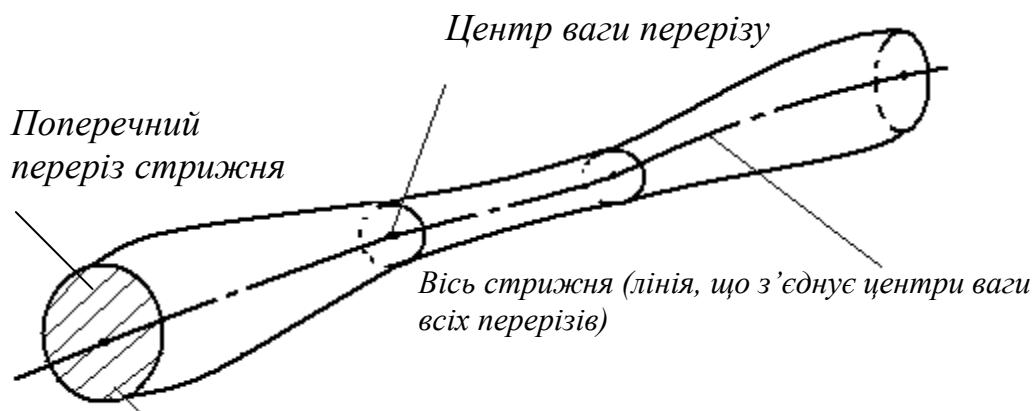


Рисунок 1.3

Серед стрижнів у свою чергу розрізняють балки, колони, стояки та ін. Це пов'язано головним чином з призначенням стрижнів і тією роллю, яку вони грають у конструкціях. Наприклад, поняття «балка» вживається для стрижнів, що працюють на згинання, а поняття «колона» і «стояк» – для вертикальних стрижнів, які працюють переважно на стискання, і т. д.

Стрижні бувають суцільні (рис. 1.4, а), тонкостінні (рис. 1.4, б) та порожнисті (рис. 1.4, в).

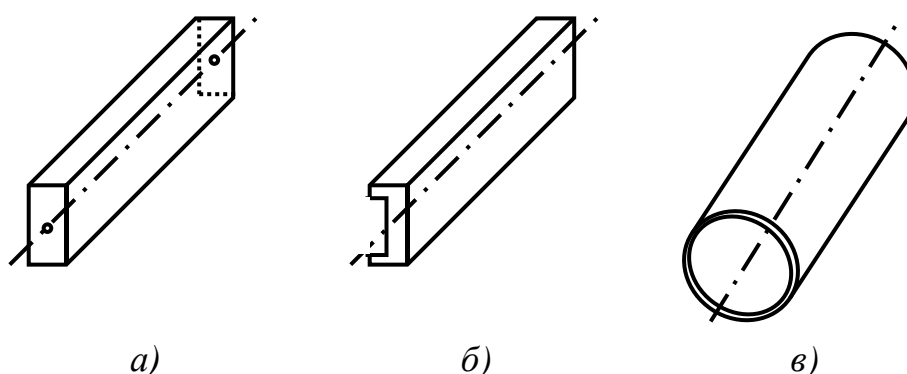


Рисунок 1.4

Оболонка – це тіло, у якого один розмір (товщина) значно менше двох інших (рис. 1.5, а).

Пластина – плоска оболонка (рис. 1.5, б).

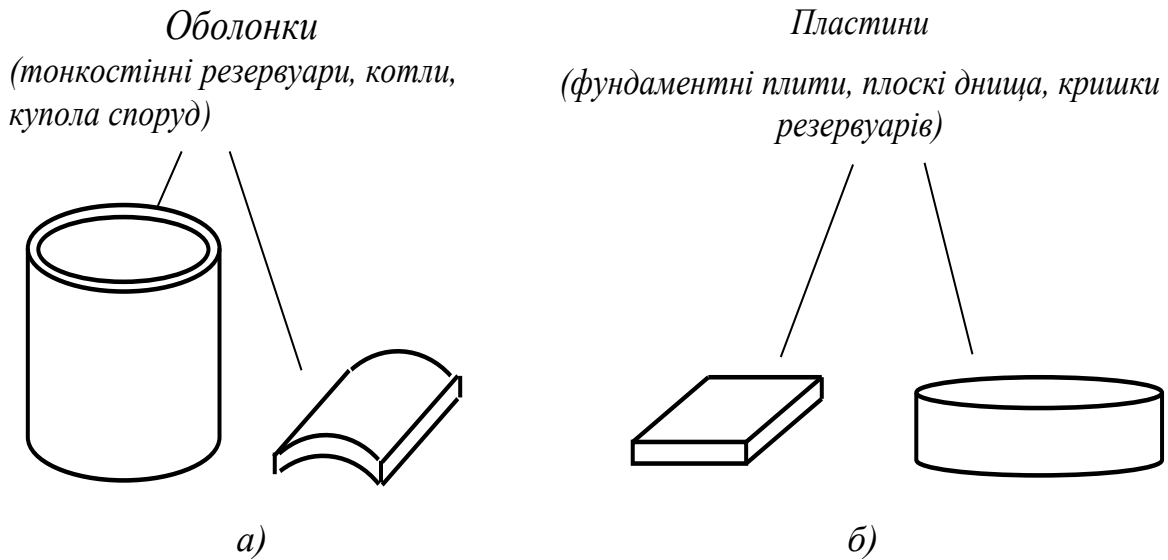


Рисунок 1.5

Масив – тіло, у якого всі три розміри порівняні (фундаменти, підпірні стінки).

Крім схематизації властивостей матеріалу і геометрії об'єктів в опорі матеріалів враховують *схематизацію систем сил*, взяту із статyki.

Усі зовнішні навантаження зводяться до зосереджених сил, пар сил і розподілених навантажень (рис. 1.6).

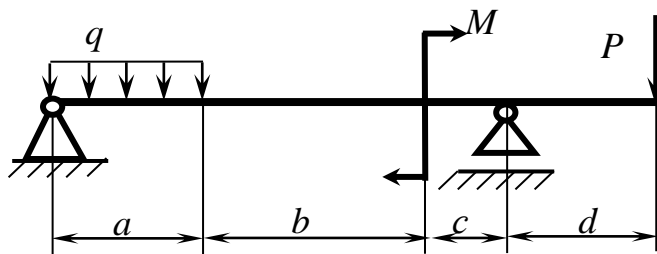


Рисунок 1.6

Поняття *зосередженої сили* означає силу, яка передається на елементи конструкції через площадку, розмірами якої можна нехтувати в порівнянні з розмірами самого елемента. Наприклад, при розрахунку бруса, показаного на рисунку 1.7, а, можна розглядати вантаж P як силу, прикладену в точці (рис. 1.7, б).

Таке спрощення є природним, оскільки розміри площадки, якою відбувається передача сили на брус, малі в порівнянні із загальними розмірами бруса. Ясно, що в реальних конструкціях передача зусиль у точці не можлива і зосереджена сила є поняттям, властивим тільки розрахунковій схемі.

Зосереджені сили вимірюють у ньютонках – Н, кілоньютонках – кН, меганьютонках – МН.

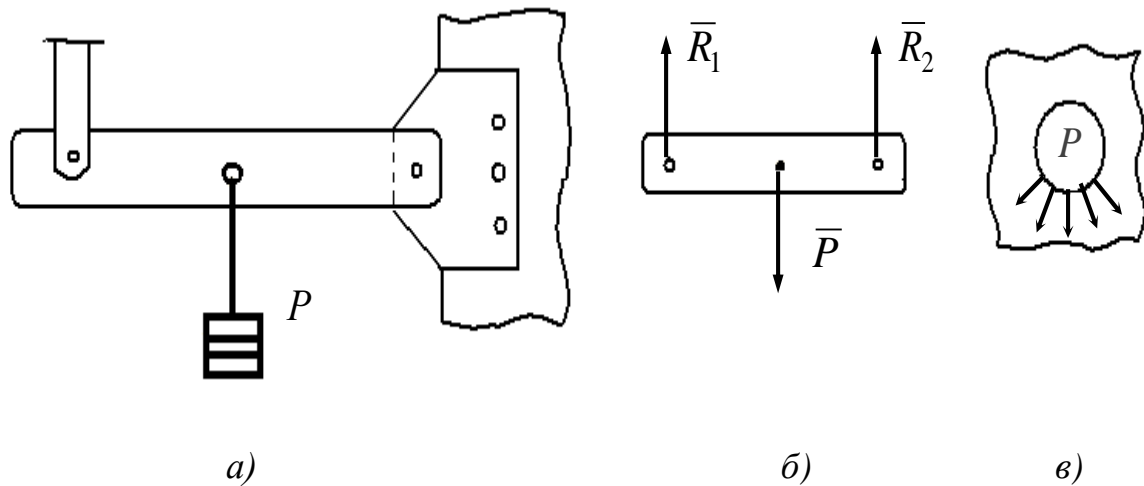


Рисунок 1.7

Розподіленими навантаженнями називають сили, прикладені безперервно впродовж деякої довжини або площі конструкції. Шар піску, насипаний на тротуар, є розподіленим навантаженням. Власна вага балки якогось перекриття є навантаженням, розподіленим за довжиною елемента. Розподілене навантаження може бути рівномірним (тобто з постійною інтенсивністю – q) або нерівномірним. В опорі матеріалів зазвичай мають місце рівномірно розподілені навантаження (див. рис. 1.6).

Заміна розподілених сил зосередженою рівнодіючою можлива тільки у тому випадку, коли аналізується брус у цілому, тобто в об'ємах, що істотно перевищують об'єм контактної зони. Якщо в розглянутому прикладі (рис. 1.7, в) необхідно розрахувати саму провусину, до якої підвішено вантаж, то використання зосередженої сили стає неприпустимим.

Розподілені навантаження виражають в одиницях сили, віднесених до одиниці площі (наприклад, $\text{кН}/\text{м}^2$) або до одиниці довжини (наприклад, $\text{кН}/\text{м}$).

Пари сил, які прикладені до тіл і створюють відповідні моменти, зображають у теоретичній механіці дуговими стрілками, не прив'язуючи їх до якогось конкретного місця прикладення, з огляду на незалежність дії сил пари на тіло в цілому від місця їх прикладення.

В опорі матеріалів ці пари зображають, як зображено на рисунку 1.6, щоб конкретизувати місце їх прикладення, бо від цього суттєво залежить характер розподілу внутрішніх сил в об'ємі тіла.

Усі зазначені види навантажень розподіляють на статичні і динамічні.

До статичних відносять навантаження, що мають невелику швидкість прикладення, при якій дія сил інерції є незначною для врахування в силових розрахунках. У таких навантажень протяжність прикладення становить мінімум декілька секунд.

Навантаження, у яких час прикладення менший, відносять до динамічних, що мають значні інерційні складові, якими не можна нехтувати в розрахунках.

1.3 Зв'язок зовнішніх сил і внутрішніх зусиль. Метод перерізів

Зовнішніми називаються сили, що діють на тіло з боку інших тіл. Зовнішні сили розподіляються на об'ємні і поверхневі.

Об'ємні сили розподілені за об'ємом тіла і прикладені до кожної його частинки (сила ваги, сила магнітного тяжіння).

Поверхневі сили прикладені до ділянок поверхні і характеризують безпосередню контактну взаємодію даного об'єкта з навколишніми тілами.

До зовнішніх сил включаються і реакції в'язей, що утримують тіла в рівновазі.

Розглянемо стрижень, який навантажений будь-якою, але взаємно урівноваженою системою сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ (рис. 1.8), яка не призводить до його руйнування.

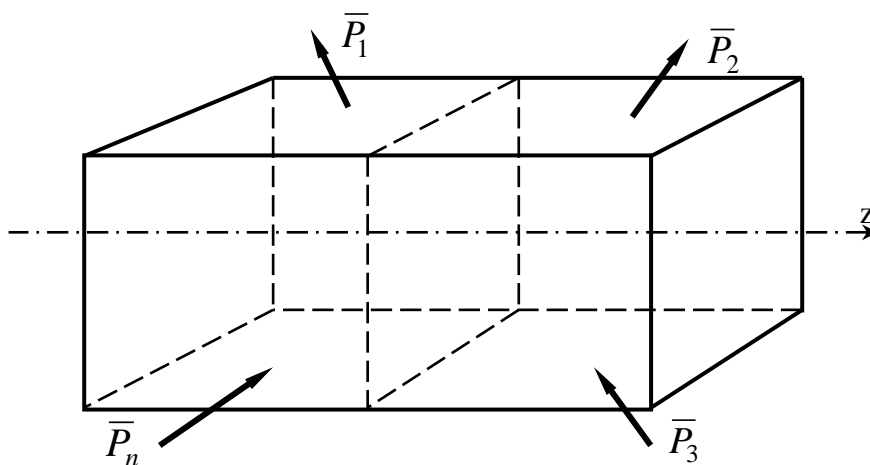


Рисунок 1.8

Величини внутрішніх зусиль у зазначеному стрижні, як і в будь-якому іншому тілі, визначаються *методом перерізів*. Суть його полягає в такому:

- **Розсікаємо** (подумки) стрижень за перерізом A , у якому слід визначити величину внутрішніх зусиль. Зазвичай стрижень розсікають площиною, перпендикулярною до осі стрижня, – z (див. рис. 1.8).

- **Відкидаємо** яку-небудь частину стрижня (зазвичай ту, до якої прикладено більше сил).

- **Заміняємо** сили, що діють на залишену частину, їх головним вектором \bar{R} і головним моментом \bar{M}_C (т. C – центр ваги перерізу: див розд. 3), розкладаємо кожен з них на три складових уздовж осей декартової системи координат (рис. 1.9). Маємо шість невідомих: три сили ($\bar{N}, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y$) і три моменти ($\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z$).

- **Врівноважуємо** залишену частину, склавши для неї шість рівнянь рівноваги як для довільної просторової системи сил. Розв'язуючи ці рівняння, визначаємо всі означені невідомі внутрішні силові фактори. Для

них прийняті такі назви: \bar{N} – подовжня сила; \bar{Q}_x і \bar{Q}_y – поперечні сили; \bar{M}_x і \bar{M}_y – згинальні моменти; \bar{M}_z – крутний момент (його часто позначають $\bar{M}_{кр.}$).

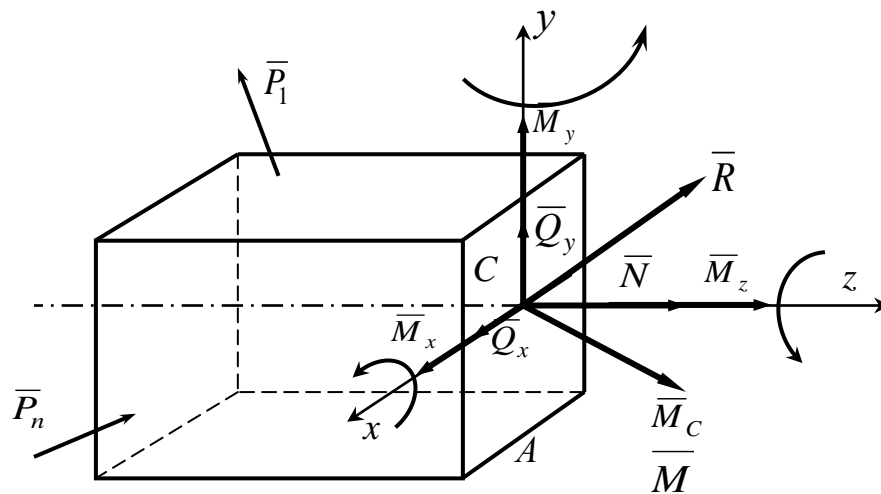


Рисунок 1.9

Указаним внутрішнім силовим факторам відповідають такі прості види деформації стрижня:

1 Розтягання (або стискання), при якому в поперечних перерізах виникає тільки подовжня сила \bar{N} .

2 Зсув, при якому в перерізах виникають тільки поперечні сили \bar{Q}_x або \bar{Q}_y .

3 Чисте згинання, при якому в перерізах виникають тільки згинальні моменти \bar{M}_x або \bar{M}_y .

4 Поперечне згинання, при якому в перерізах разом зі згинальними моментами виникають поперечні сили.

5 Кручення, при якому в поперечних перерізах виникає тільки крутний момент $\bar{M}_z \equiv \bar{M}_{кр.}$.

Слід зауважити, що шість внутрішніх силових факторів (це максимально можлива їх кількість у перерізах стрижнів) виникають при дуже складних варіантах зовнішнього навантаження. У реальних конструкціях їх зазвичай менше.

1.4 Напруження, їх зв'язок з внутрішніми силовими факторами

Щоб охарактеризувати закон розподілу внутрішніх сил за перерізом, необхідно ввести міру їх інтенсивності. За таку міру береться *напруження*.

Напруженням називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі в заданій точці перерізу.

Напруження є результатом взаємодії частинок тіла при його навантаженні. Зовнішні сили прагнуть змінити взаємне розташування частинок, а виникаюче при цьому напруження перешкоджає зсуву частинок, обмежуючи його в більшості випадків деякою малою величиною.

Розглянемо переріз A деякого тіла (рис. 1.10). Навколо довільної точки виділимо елементарну ділянку ΔF , у межах якої виявлена внутрішня сила $\Delta \bar{R}$.

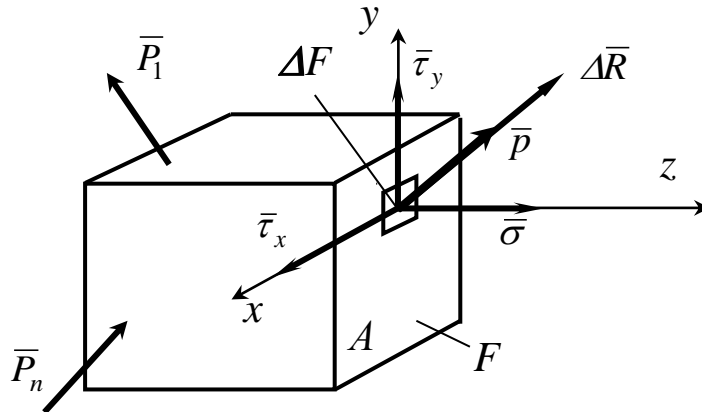


Рисунок 1.10

За середнє напруження на ділянці \bar{p}_{cp} . береться відношення

$$\frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F} = \bar{p}_{cp}. \quad (1.1)$$

Якщо зменшувати ділянку ΔF , «стягуючи» її в точку, то можна одержати повне напруження в точці:

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F} = \bar{p}. \quad (1.2)$$

Напруження має розмірність сили, що ділиться на площу ($\text{Н/м}^2 = \text{Па}$, $\text{кН/м}^2 = \text{кПа}$ або $\text{МН/м}^2 = \text{МПа}$).

Сила $\Delta \bar{R}$ може бути розкладена на три складові уздовж осей координат: нормальну $\Delta \bar{N}$ і дві дотичні – $\Delta \bar{Q}_x$ і $\Delta \bar{Q}_y$.

За їх допомогою можна визначити одне нормальне і два дотичних напруження відповідних напрямків (див. рис. 1.10).

Нормальне напруження $\bar{\sigma}$ визначається за формулою

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{N}}{\Delta F} = \frac{d\bar{N}}{dF} = \bar{\sigma}. \quad (1.3)$$

Дотичні напруження $\bar{\tau}_x$ і $\bar{\tau}_y$ визначаються таким чином:

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{Q}_x}{\Delta F} = \frac{d\bar{Q}_x}{dF} = \bar{\tau}_x, \quad \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{Q}_y}{\Delta F} = \frac{d\bar{Q}_y}{dF} = \bar{\tau}_y. \quad (1.4)$$

Хоча вказані напруження є векторними величинами, як і сили, з котрими вони пов'язані, в курсі опору матеріалів векторну символіку до них зазвичай не використовують.

Якщо через згадану точку в тілі провести іншу площину, то всі напруження набудуть інших значень.

Сукупність напружень, які діють на всіх ділянках, проведених через дану точку, називається напруженим станом в цій точці.

У результаті розрахунків потрібно одержати відповідь на питання, задовольняє чи ні конструкція тим вимогам, які до неї висуваються.

Найбільш поширеним методом розрахунку деталей машин і елементів споруд на міцність є *розрахунок за допустимим напруженням*, при якому на підставі аналізування конструкції виявляється в тілі та точка, у якій виникає найбільше (небезпечне) напруження. Останнє порівнюється з граничною величиною для даного матеріалу, і потім робиться висновок про міцність конструкції.

У деяких випадках використовується метод *розрахунку за руйнуючими навантаженнями*. У цьому методі шляхом розрахунку знаходиться граничне навантаження, яке може витримати конструкція, не руйнуючись або не змінюючи істотно свою форму. Граничне навантаження зіставляється з діючим, внаслідок чого робляться висновки про ступінь міцності конструкції в робочих умовах.

Методи розрахунку вибираються залежно від умов роботи конструкції і вимог, які до неї висуваються. Якщо, наприклад, необхідно добитися найменших змін форми конструкції, проводиться *розрахунок за переміщеннями, що допускаються (розрахунок на жорсткість)*. Це не виключає одночасної перевірки конструкції на міцність.

«Опір матеріалів» надає загальних методів визначення напружень, деформацій і переміщень. Докладніші розрахунки викладаються в інших курсах інженерної підготовки.

2 РОЗТЯГАННЯ – СТИСКАННЯ

2.1 Внутрішні зусилля у поперечних перерізах стрижнів, побудова їх епюр

Під розтяганням (або стискуванням) розуміється такий вид навантаження, при якому в поперечних перерізах стрижня виникають тільки подовжні сили N , а інші внутрішні силові чинники дорівнюють нулю.

Передача навантаження на стрижень може бути здійснена різними способами (рис. 2.1, а...в). У всіх випадках система зовнішніх сил утворює рівнодіючу P , направлену уздовж осі стрижня. Тому розрахункова схема однакова (рис. 2.1, г) і подовжня сила в будь-якому перерізі (N) дорівнює P . У цьому разі вона є додатною, бо розтягує стрижень. При зміні напрямку зовнішніх сил стрижень стає стиснутим, а подовжня сила – від'ємною.

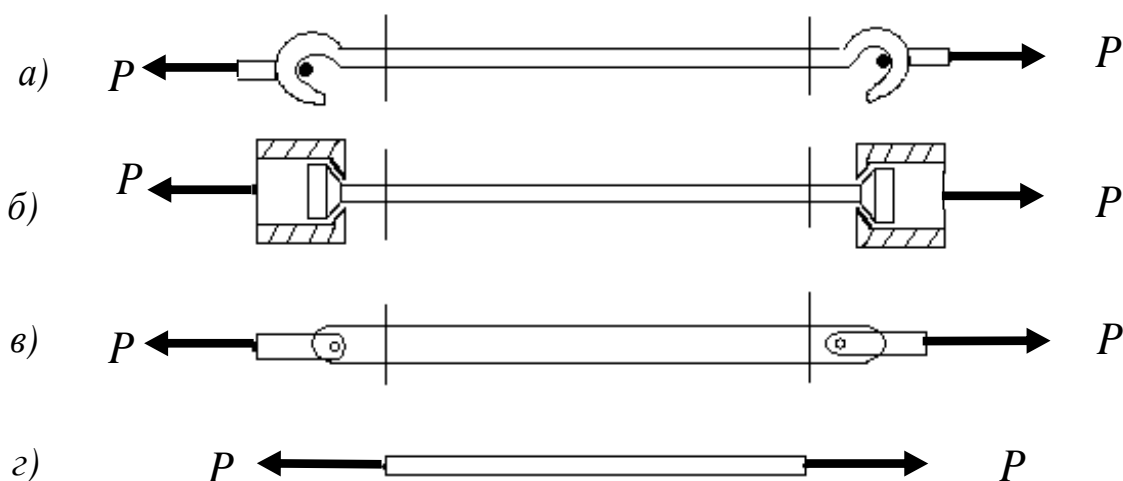


Рисунок 2.1

На стрижень можуть діяти декілька зовнішніх сил уздовж його осі. При цьому подовжня сила мінятиметься за довжиною стрижня.

Графічне зображення цієї зміни називається *епюрою* подовжніх сил.

Її будують за такими правилами:

1. Паралельно до осі стрижня проводять базу (нульову лінію).
2. Стрижень умовно поділяють на ланки між точками прикладення зовнішніх сил.

3. У межах кожної з ланок стрижень розсікають умовно на дві частини.

4. Застосовуючи метод перерізів, одну частину розсіченого стрижня відкидають, а з умов рівноваги іншої визначають величину подовжньої

сили у ланці як алгебраїчну суму зовнішніх сил, що діють на залишену частину, при цьому сили, які спрямовані від перерізу, беруться зі знаком плюс, а у його бік – зі знаком мінус.

5. Визначені величини подовжніх сил з урахуванням їх знаків відкладають від бази у вигляді окремих точок з дотриманням певного масштабу. Точки з'єднують між собою відрізками прямих.

6. Епюру заштриховують перпендикулярно до бази і помічають на ній знаки подовжніх сил на окремих ділянках.

Наведену процедуру побудови епюри подовжніх сил проілюструємо **прикладом 2.1**.

Розглянемо стрижень, навантажений кількома зовнішніми силами (рис. 2.2, а). Він має три ділянки: AB , BC і CD .

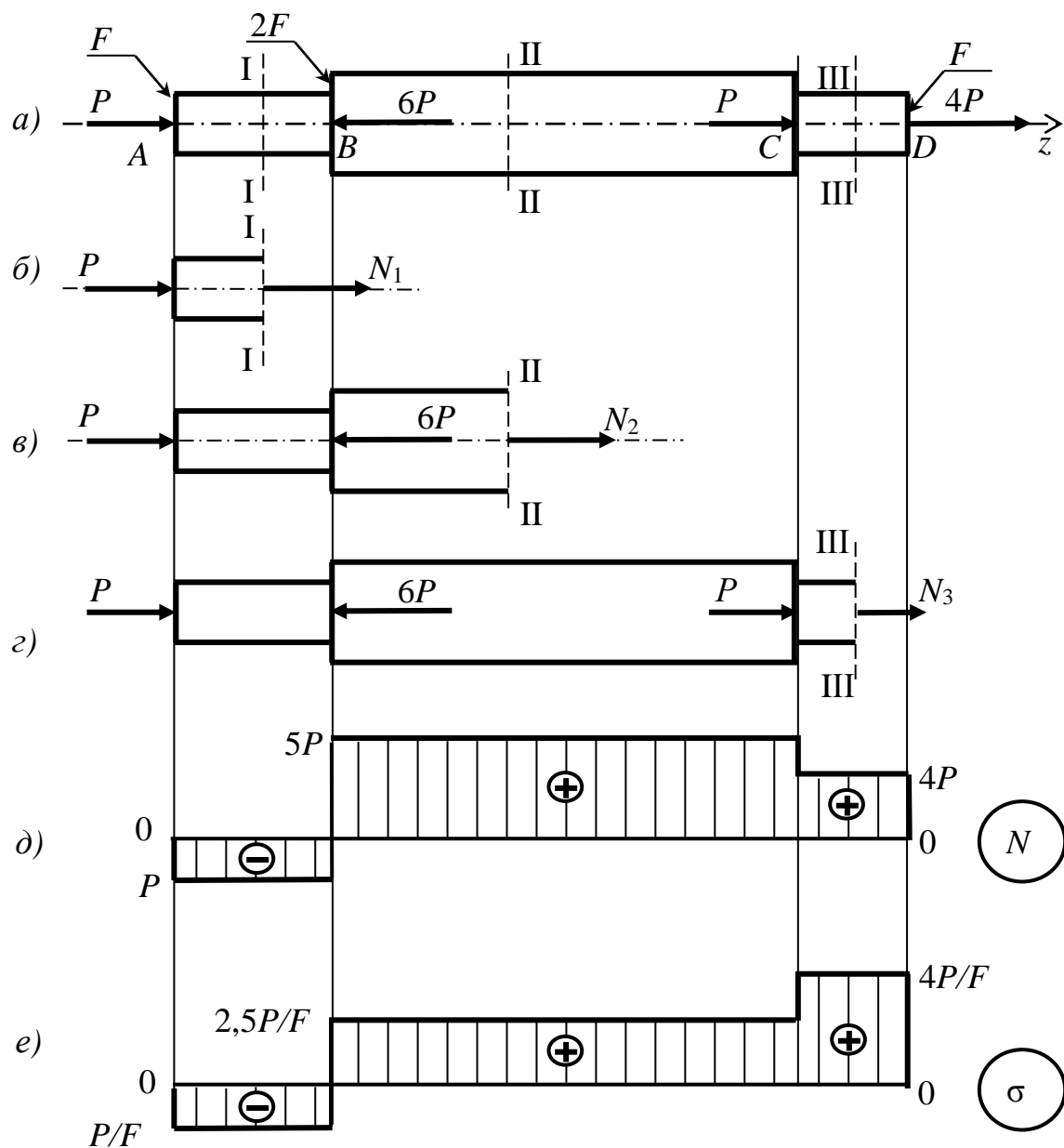


Рисунок 2.2

Визначимо величину подовжньої сили на ділянці AB (рис. 2.2, б). Для цього у її межах довільним перерізом I-I розсічемо стрижень. Праву його частину відкинемо, а до залишеної лівої прикладемо подовжню силу N_1 , спрямувавши її від перерізу (тобто вважаючи її додатною).

З умови рівноваги залишеної частини ($\Sigma P_z = 0$) визначимо величину N_1 :

$$P + N_1 = 0, \text{ звідки } N_1 = -P \text{ (ділянка } AB \text{ стиснута).}$$

Аналогічно визначимо величини подовжніх сил на інших ділянках. На ділянці BC (рис. 2.2, в):

$$P - 6P + N_2 = 0, \text{ звідки } N_2 = 5P \text{ (ділянка } BC \text{ розтягнута).}$$

На ділянці CD (рис. 2.2, г):

$$P - 6P + P + N_3 = 0, \text{ звідки } N_3 = 4P \text{ (ділянка } CD \text{ розтягнута).}$$

За знайденими значеннями побудуємо епюру N (рис. 2.2, д).

Слід зауважити, що побудова епюр подовжніх сил не є самоціллю. На їх основі будуються епюри нормальних напружень, які дозволяють виявляти небезпечні перерізи стрижнів при їх розрахунках на міцність. У цьому прикладі епюра нормальних напружень має вигляд, зображений на рисунку 2.2, е. Процедура її побудови буде розглянута в підрозділі 2.2.

2.2 Деформації і напруження при розтяганні – стисканні. Закон Гука. Коефіцієнт Пуассона

Розміри стрижнів при розтяганні – стисканні змінюються залежно від величини і напрямку прикладених сил.

Розглянемо розтягнутий стрижень (рис. 2.3).

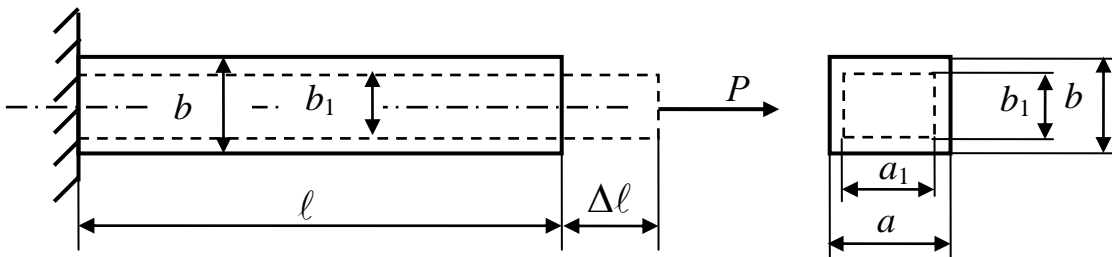


Рисунок 2.3

Якщо початкова довжина стрижня дорівнювала l , то в результаті навантаження вона зросте і дорівнюватиме $l + \Delta l$. Величина Δl

називається *абсолютною подовжньою деформацією стрижня*. У цьому разі вона є додатною. Її відношення до початкової довжини стрижня позначається літерою ε і зветься *відносною подовжньою деформацією стрижня*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}. \quad (2.1)$$

Разом зі збільшенням довжини зазначеного стрижня його поперечні розміри зменшуються (див. рис. 2.3). Абсолютні величини цих зменшень дорівнюють $\Delta a = a - a_1$, $\Delta b = b - b_1$ і зветься *абсолютними поперечними деформаціями стрижня*. Відносні деформації в цьому разі однакові в усіх напрямках. Вони зветься *поперечними відносними деформаціями* і позначаються символом ε' :

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}. \quad (2.2)$$

Знаки ε і ε' завжди протилежні: при розтяганні $\varepsilon > 0$ і $\varepsilon' < 0$, при стисканні $\varepsilon < 0$ і $\varepsilon' > 0$. Їх величини пов'язані між собою так званим **коефіцієнтом Пуассона**:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.3)$$

Цей коефіцієнт є однією з фізичних констант матеріалів. Його значення лежать у межах $0 \dots 0,5$. Значення $\mu = 0$ належить пробковому дереву, значення $\mu = 0,5$ – натуральному каучуку. У сталей $\mu = 0,25 \dots 0,33$, у чавуну $\mu = 0,23 \dots 0,27$, у бронзи $\mu = 0,32 \dots 0,35$.

Відносні подовжні деформації ε пов'язані з нормальними напруженнями σ , що виникають у стрижнях при розтяганні – стисканні, **законом Гука** у відносному вигляді

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (2.4)$$

де E – модуль пружності першого роду (**модуль Юнга**).

Цей модуль є ще однією фізичною константою матеріалу. Його розмірність така сама, як і у σ . Для найбільш вживаних матеріалів він має такі значення:

$$\begin{array}{ll} \text{сталь} - E = (2,0 \div 2,1) \cdot 10^5 \text{ МПа}; & \text{чавун} - E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \\ \text{мідь} - E = 1,0 \cdot 10^5 \text{ МПа}; & \text{дерево} - E = 1,0 \cdot 10^4 \text{ МПа}. \end{array}$$

Згідно з гіпотезою плоских перерізів (*гіпотезою Бернуллі*), поперечні перерізи стрижня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і під час неї. Тому плоскі поперечні перерізи стрижня при розтяганні – стисканні переміщуються поступально, паралельно собі, й усі волокна (тобто уявні подовжні елементи стрижня безкінечно малого перерізу) подовжуються або скорочуються однаково: $\varepsilon = \text{const}$.

Таким чином, згідно з (2.4) σ є константою в межах одного перерізу як добуток двох констант – E і ε . Інакше кажучи, нормальні напруження в усіх точках одного перерізу однакові.

Подовжня сила N , що діє в перерізі (рис. 2.4), є рівнодійною елементарних подовжніх сил у точках перерізу – dN . Її величина пов'язана з σ залежністю (1.3). Тоді, з урахуванням $\sigma = \text{const}$, маємо:

$$N = \int_F \sigma \cdot dF = \sigma \cdot \int_F dF = \sigma \cdot F,$$

і остаточно
$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (2.5)$$

З цієї формули витікає, що знак σ такий самий, як і у N : плюс – при розтяганні, мінус – при стисканні.

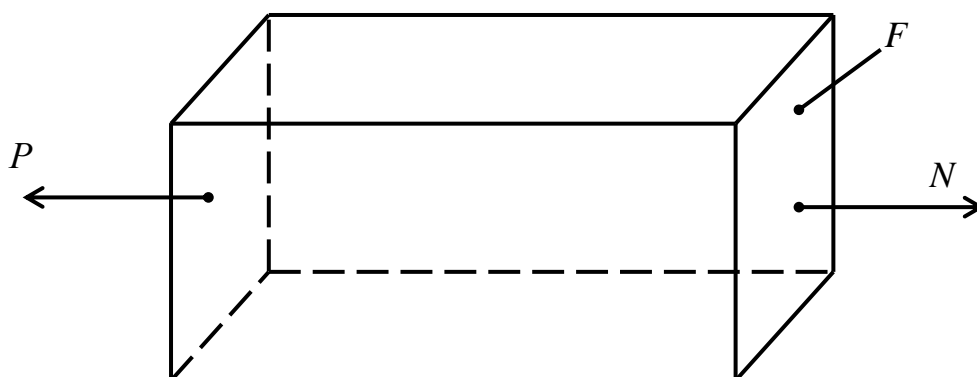


Рисунок 2.4

Залежність (2.5) дозволяє, побудувавши епюру σ , визначити небезпечні перерізи ступінчастого стрижня (див. рис. 2.2). Для визначеності будемо вважати площі перерізів цього стрижня на ділянках AB і CD рівними, а на ділянці BC вдвічі більше за них: $F_1 = F_3 = F$, $F_2 = 2F$. З урахуванням значень N на вказаних ділянках (див. рис. 2.2, д) маємо: $\sigma_1 = -P/F$, $\sigma_2 = 5P/2F = 2,5P/F$, $\sigma_3 = 4P/F$.

Побудована епюра σ з указаними значеннями зображена на рисунку 2.2, е. На неї видно, що небезпечними з точки зору розтягуючих напружень є перерізи ділянки CD , а стискаючих – перерізи ділянки AB .

Об'єднавши формулу (2.1) з формулами (2.4) і (2.5), одержимо:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}. \quad (2.6)$$

З формули (2.6) виходить, що чим більше величина $E \cdot F$, тим менше деформація, тобто тим жорсткіше стрижень. Тому цю величину називають *жорсткістю перерізу стрижня при розтяганні – стисканні*.

Формулу (2.6) часто називають **законом Гука** в абсолютній формі. Цією формулою користуються в разі прикладення зовнішніх сил до кінцівок стрижнів (див. рис. 2.1). Коли ж стрижень ступінчастий і (або) величина N змінюється за довжиною стрижня (див. рис. 2.2), зазначену формулу слід застосувати для кожної ділянки окремо, а потім скласти отримані результати з урахуванням їх знаків.

2.3 Умови міцності й жорсткості при розтяганні – стисканні

Як уже зазначалося, деталі машин й інших конструкцій повинні відповідати умовам міцності й жорсткості. Розміри деталей необхідно підібрати так, щоб під дією прикладених навантажень вони не руйнувалися і не одержали деформацій, які перевищують допустимі. Зокрема, в машинобудівних деталях, як правило, не допускаються залишкові деформації.

Як руйнування деталі, так і її деформації пов'язані з величиною діючих у ній напружень. Для деталей, виготовлених з пластичного матеріалу, небезпечним напруженням слід вважати межу текучості σ_T , а з крихкого – межу міцності або тимчасовий опір σ_B , величини яких визначаються за результатами механічних випробувань матеріалів на розтягання і стискання.

Вибір допустимих напружень, покладений в основу розрахунку на міцність, виявляється досить складним. Це пояснюється необхідністю врахувати такі обставини:

- неоднорідність характеристик матеріалу, одержаних на різних зразках при їх механічних випробуваннях;
- величина і характер найбільших навантажень на елемент конструкції, який розраховується, зазвичай точно невідомі;
- результати розрахунку є наближеними, оскільки розрахункові схеми спрощено відображають характер роботи конструкцій.

Тому допустимі напруження повинні мати деякий запас, щоб забезпечити міцність навіть у разі найбільш несприятливого поєднання перелічених чинників.

Допустиме напруження $[\sigma]$ у загальному випадку визначається за формулою

$$[\sigma] = \frac{\sigma^o}{n}, \quad (2.7)$$

де σ^o – небезпечне напруження для матеріалу;
 n – коефіцієнт запасу міцності.

Пластичні матеріали однаково чинять опір розтягання і стисканню, тому величини σ_T у них вважаються однаковими для цих варіантів навантаження.

Для пластичних матеріалів існує одна величина $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (2.8)$$

де $n_T = 1, 3 \dots 1, 5$.

Крихкі матеріали краще чинять опір стисканню, ніж розтягання. Для них існує дві величини $[\sigma]$:

$$[\sigma_+] = \frac{\sigma_B^+}{n_B}, \quad (2.9)$$

$$[\sigma_-] = \frac{\sigma_B^-}{n_B}, \quad (2.10)$$

де $[\sigma_+]$ – допустиме напруження при розтяганні;

$[\sigma_-]$ – допустиме напруження при стисканні;

σ_B^+ – тимчасовий опір при розтяганні;

σ_B^- – тимчасовий опір при стисканні;

$n_B = 2, 5 \dots 3, 0$.

Враховуючи викладене, умови міцності стрижнів при розтяганні – стисканні можна записати таким чином:

- для пластичних матеріалів

$$|\sigma|_{\max} = \max \left| \frac{N}{F} \right| \leq [\sigma]; \quad (2.11)$$

- для крихких матеріалів

$$\sigma_{\max}^+ = \max \left(\frac{N_+}{F} \right) \leq [\sigma_+], \quad (2.12)$$

$$|\sigma|_{\max} = \max \left| \frac{N}{F} \right| \leq [\sigma], \quad (2.13)$$

де $|\sigma|_{\max}$ – максимальне за модулем напруження в зонах розтягання і стискання;

σ_{\max}^+ – максимальне напруження в зоні розтягання;

$|\sigma|_{\max}$ – максимальне за модулем напруження в зоні стискання.

Умова жорсткості накладає обмеження на деформації і має такий вигляд

$$\Delta \ell \leq [\Delta \ell], \quad (2.14)$$

де $\Delta \ell$ – абсолютна подовжня деформація елемента конструкції;

$[\Delta \ell]$ – допустима величина $\Delta \ell$, яка встановлюється, виходячи з досвіду експлуатації подібних виробів.

Умови міцності й жорсткості (2.15)...(2.18) дозволяють проводити розрахунки трьох типів:

1. На визначення потрібної площі поперечного перерізу стрижня (проектний розрахунок).
2. На визначення максимального навантаження стрижня при відомій площі його перерізу (проектний розрахунок).
3. На оцінювання міцності й жорсткості стрижнів (перевірочний розрахунок).

Приклад 2.2. Підібрати з умови міцності діаметр стрижня, на якому висить вантаж вагою $P = 100$ кН (рис. 2.5), якщо $[\sigma] = 160$ МПа.

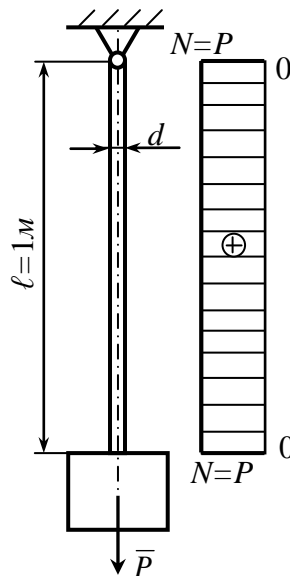


Рисунок 2.5

Розв'язання

Визначаємо потрібну площу поперечного перерізу стрижня і його діаметр:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{P}{[\sigma]} = \frac{100 \cdot 10^3}{160} = 625 \text{ мм}^2;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 625}{3,14}} = 28,2 \text{ мм}.$$

Приймаємо з нормального ряду (дод. А): $d = 32 \text{ мм}$.

Приклад 2.3. Для стрижня, зображеного на рисунку 2.5, визначити максимально допустиму вагу вантажу, якщо $d = 40 \text{ мм}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Розв'язання

$$P_{\max} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot [\sigma] = \frac{3,14}{4} \cdot 40^2 \cdot 160 = 200960 \text{ Н} = 200,96 \text{ кН}.$$

Приклад 2.4. Перевірити виконання умов міцності й жорсткості сталевго стрижня (див. рис. 2.5), якщо $P = 250 \text{ кН}$, $d = 45 \text{ мм}$, $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$, $[\Delta\ell] = 1 \text{ мм}$.

Розв'язання

1. Перевіряємо виконання умови міцності:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F} = \frac{P \cdot 4}{\pi \cdot d^2} = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 45^2} = 157,27 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Ця умова виконується.

2. Перевіряємо виконання умови жорсткості:

$$\Delta\ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot F} = 250 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 4 / 2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 45^2 = 0,79 \text{ мм} < [\Delta\ell].$$

Тож, і ця умова виконується.

Приклад 2.5. Перевірити на міцність і жорсткість ступінчастий стрижень (див. рис. 2.2), прийнявши: $P = 100 \text{ кН}$, $F = 20 \text{ см}^2$, $\ell_1 = AB = 1 \text{ м}$, $\ell_2 = BC = 2 \text{ м}$, $\ell_3 = CD = 0,8 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\Delta\ell] = 2 \text{ мм}$.

Розв'язання

1. Перевіряємо виконання умови міцності:

$$|\sigma_{\max}| = 4P / F = 4 \times 100 \times 10^3 / 20 \times 10^2 = 200 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Умова не виконується.

2. Перевіряємо виконання умови жорсткості:

$$\Delta l_1 = N_1 \cdot l_1 / E \cdot F = -100 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2 = -0,25 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = N_2 \cdot l_2 / E \cdot 2F = 5 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^2 = 1,25 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = N_3 \cdot l_3 / E \cdot F = 4 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0,8 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2 = 0,8 \text{ мм};$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,25 + 1,25 + 0,8 = 1,8 \text{ мм} < [\Delta l].$$

Ця умова виконується.

3. Зважаючи на **невиконання** умови міцності, визначимо додатково потрібну величину F :

$$F \geq 4P / [\sigma] = 4 \cdot 100 \cdot 10^3 / 160 = 2500 \text{ мм}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

2.4 Випробування матеріалів на розтягання і стискання

Ці випробування є найбільш важливими і масовими в промисловості й наукових організаціях. Вони дозволяють отримати цілий комплекс механічних характеристик, які є основою конструювання різних виробів.

Для випробувань на розтягання виготовляють спеціальні зразки, з яких найчастіше використовують циліндричні (рис. 2.6, а).

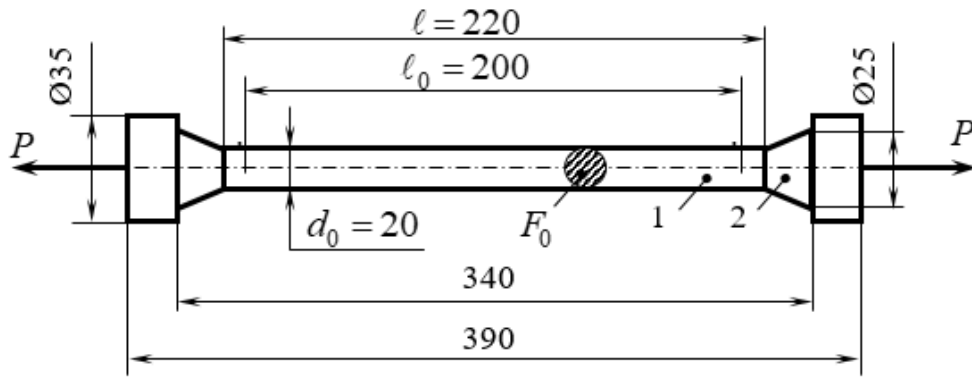
Зразок повинен мати таку форму, щоб у межах заданої ділянки напружений стан був однорідним. Ця ділянка зразка називається робочою частиною. Вона являє собою стрижень 1 з прямолінійною віссю і перерізом круглої (рис. 2.6, а) чи прямокутної (рис. 2.6, б) форми постійної площі F_0 . У разі необхідності застосовують зразки менших розмірів.

Розтягуюча сила P з обох кінців зразка повинна бути направлена точно вздовж його осі. Для здійснення зазначеної умови у випробувальній машині містяться два захоплювача, а на зразку – дві головки 2 (див. рис. 2.6).

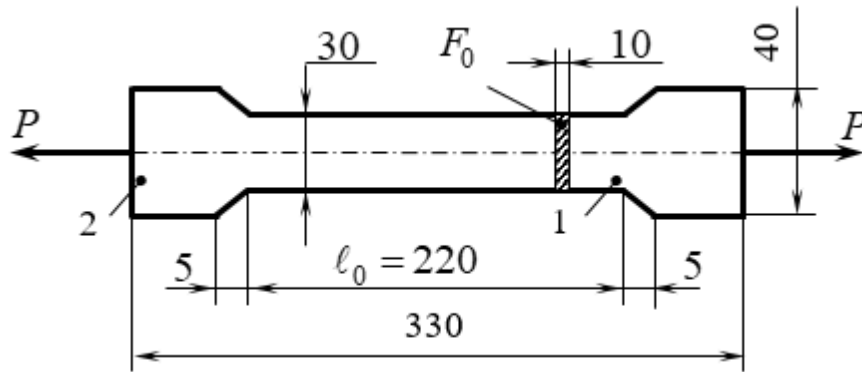
Розтягання робочої частини зразка довжиною l_0 надає змоги використати найпростішу формулу для розрахунку напруження:

$$\sigma = \frac{P}{F_0}. \quad (2.15)$$

Стандартний циліндричний зразок (див. рис. 2.6, а) для випробування на розтягання має довжину робочої частини $l = 11 d_0$, де d_0 – початковий діаметр зразка.



a)



б)

Рисунок 2.6

Довжина $l_0 = 10 d_0$ називається розрахунковою (базовою) довжиною зразка. При випробуванні плоского зразка варто мати на увазі, що для циліндричного зразка

$$l_0 = 10 d_0 = 10 \cdot \sqrt{\frac{4F_0}{\pi}} = 11,3 \cdot \sqrt{F_0}, \quad (2.16)$$

тому розрахункову довжину плоского зразка приймають такою самою:

$$l'_0 = 11,3 \cdot \sqrt{F_0}. \quad (2.17)$$

Як основні використовують також зразки з діаметром $d_0 = 10$ мм з робочою довжиною $l_0 = 100$ мм. Дозволяється застосування зразків інших діаметрів за умови, що їхня робоча довжина $l_0 = 10 d_0$ або $l_0 = 5 d_0$. Такі зразки називають *пропорційними*.

Випробування на розтягання проводиться при статичному навантаженні, тобто збільшення навантаження проводиться від нуля до кінцевого значення поступово, без поштовхів та ударів.

При статичному випробуванні встановлюється функціональна залежність діючого на зразок навантаження та його абсолютною подовжньою деформацією. Випробувальна машина надає зразку подовження та показує навантаження, яке відповідає цьому подовженню.

Схема випробувальної машини зображена на рисунку 2.7. Тип машини – ВМГ-30, максимальне зусилля – 300 кН. Машина є універсальною і призначена для статичних випробувань матеріалів на розтягання, стискання, згинання, зріз та сколювання.

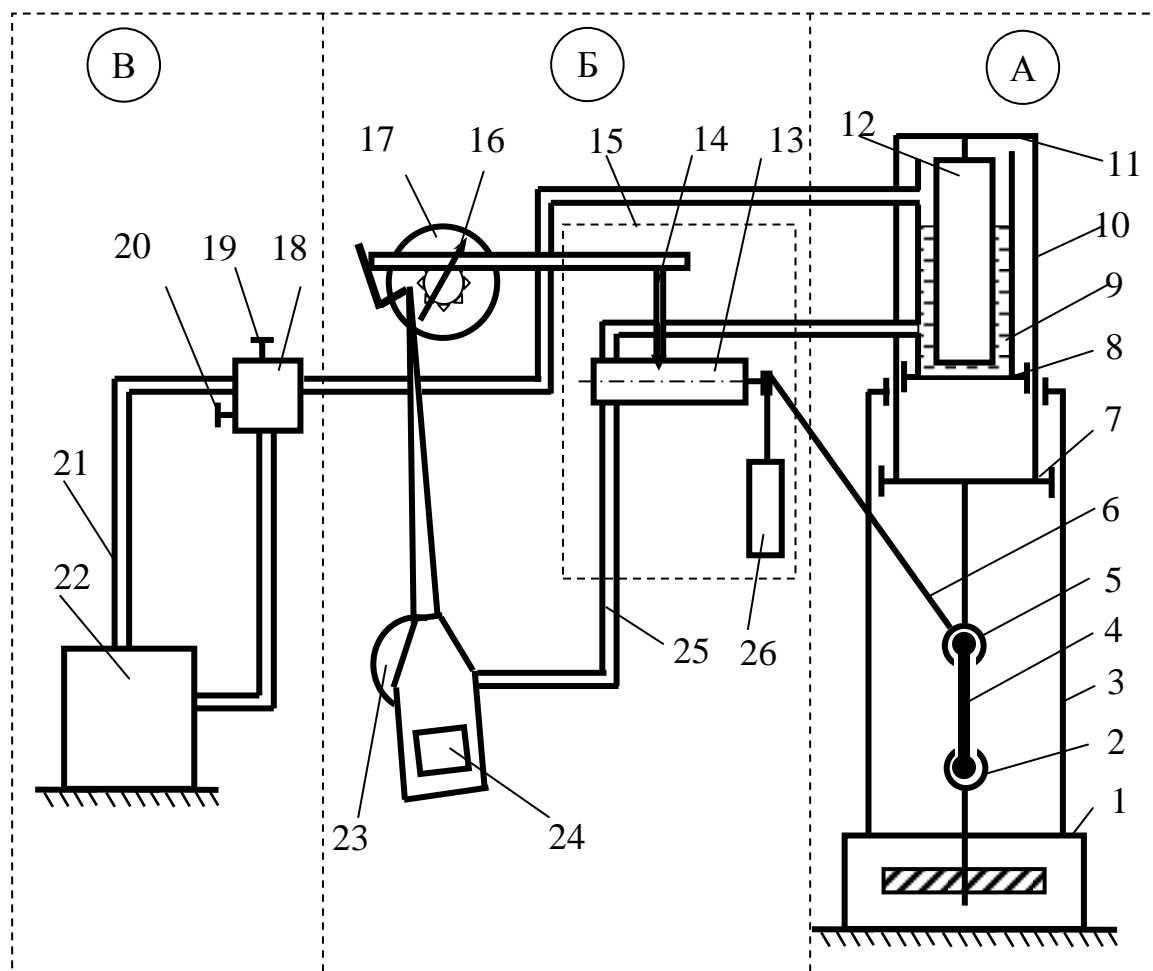


Рисунок 2.7

Машина складається з випробувального агрегату А, сило-вимірального механізму Б і насосної установки В.

Випробувальний агрегат А являє собою гідравлічний прес з верхнім розташуванням робочого циліндра і має дві рами. Нерухома рама складається з опори 1 із закріпленням на ній нерухомих захоплювачем 2, двох стояків 3, траверси 7 і робочого циліндра 9. Рухома рама складається з робочої траверси 8 із закріпленням на ній захоплювачем 5, двох тяг 10, траверси 11 і робочого поршня 12. Прикладення навантаження здійснюється робочим циліндром через раму і робочу траверсу 7. Під час робочого ходу поршень 12 переміщує нагору рухома раму.

При випробовуванні на розтягання зразки 4 закріплюють в захоплювачах 2 і 5, а при випробуваннях на стиск (зріз, згинання, сколювання) – розміщують між траверсами 7 і 8.

Силівимірювальний механізм Б гідравліко-маятникового типу складається з вимірювального циліндра 24, шкали 17 з маятником 23 і діаграмного пристрою 15. Останній складається з пишучого вузла 14 і барабана 13, на якому закріплюють папір.

Приєднання силівимірювального механізму до робочого циліндра машини здійснюється трубопроводом 25. Під час випробування тиск рідини з робочого циліндра 9 передається трубопроводом 25 у верхню порожнину циліндра 9, що викликає обертальний рух указівної стрілки 16 шкали 17 і поступальний – пишучого вузла 14. Барабан 13 обертається за допомогою вантажу 26 нитки 6, яка закріплена на рухомому захоплювачі 5.

Насосна установка В служить для силового живлення робочого циліндра 9 випробувальної машини і складається з триплунжерного насосу високого тиску, резервуара для оливи з фільтром і електродвигуна. Усе це розміщено в корпусі 22. Олива від насоса трубопроводом 21 подається в розподільну коробку 18, що служить для керування робочим поршнем 12 рухомою рамою випробувальної машини. Верхній клапан 19 на розподільній коробці 18 служить для впуску, тобто для підйому поршня 12 (хід навантаження). Лівий клапан 20 призначений для випуску оливи, тобто для опускання поршня 12 (хід розвантаження). У корпусі коробки 18 розташований стабілізатор швидкості руху робочого поршня.

Характер діаграм розтягання залежить від властивостей випробуваного матеріалу. На рисунку 2.8 показана типова діаграма розтягання для маловуглецевої сталі.

Наведена діаграма умовно може бути поділена на 5 ділянок:

- ділянка пропорційності (OA);
- ділянка пружності (OB);
- ділянка загальної текучості (CD);
- ділянка зміцнення (DE);
- ділянка місцевої текучості (EF).

Від початку навантаження до деякого значення, яке відповідає точці A на діаграмі, функціональна залежність зусилля розтягання P від деформації $\Delta\ell$ окреслюється прямою OA . На цій стадії розтягання є справедливим закон Гука. Зазначена залежність характеризується величиною $\operatorname{tg}\alpha$, де α – кут між прямою OA і віссю $\Delta\ell$.

Точка A , в якій закон пропорційності припиняє свою дію, відповідає силі P_{nc} , яка використовується для визначення *границі пропорційності*. *Границею пропорційності* σ_{nc} називається напруження, після якого порушується закон Гука.

Границя пропорційності обчислюється за формулою

$$\sigma_{нц.} = \frac{P_{нц.}}{F_0}, \quad (2.18)$$

де F_0 – початкова площа перерізу зразка.

Деформація називається пружною, якщо вона повністю зникає після розвантаження зразка (деталі, конструкції).

У стані пружності деформації зникають при розвантаженні. При цьому процес розвантаження зображується тією самою лінією, що й навантаження.

Позначимо через $P_{пр.}$ найбільше значення розтягуючої сили, при якому зразок ще не дає при розвантаженні залишкової деформації. Ця сила використовується для визначення *границі пружності*. Їй на діаграмі відповідає точка B , а ділянка OB є ділянкою пружної стадії розтягання зразка.

Границею пружності $\sigma_{пр}$ називається найбільше напруження, до якого залишкових деформацій при розвантаженні не виявляється:

$$\sigma_{пр} = \frac{P_{пр}}{F_0}. \quad (2.19)$$

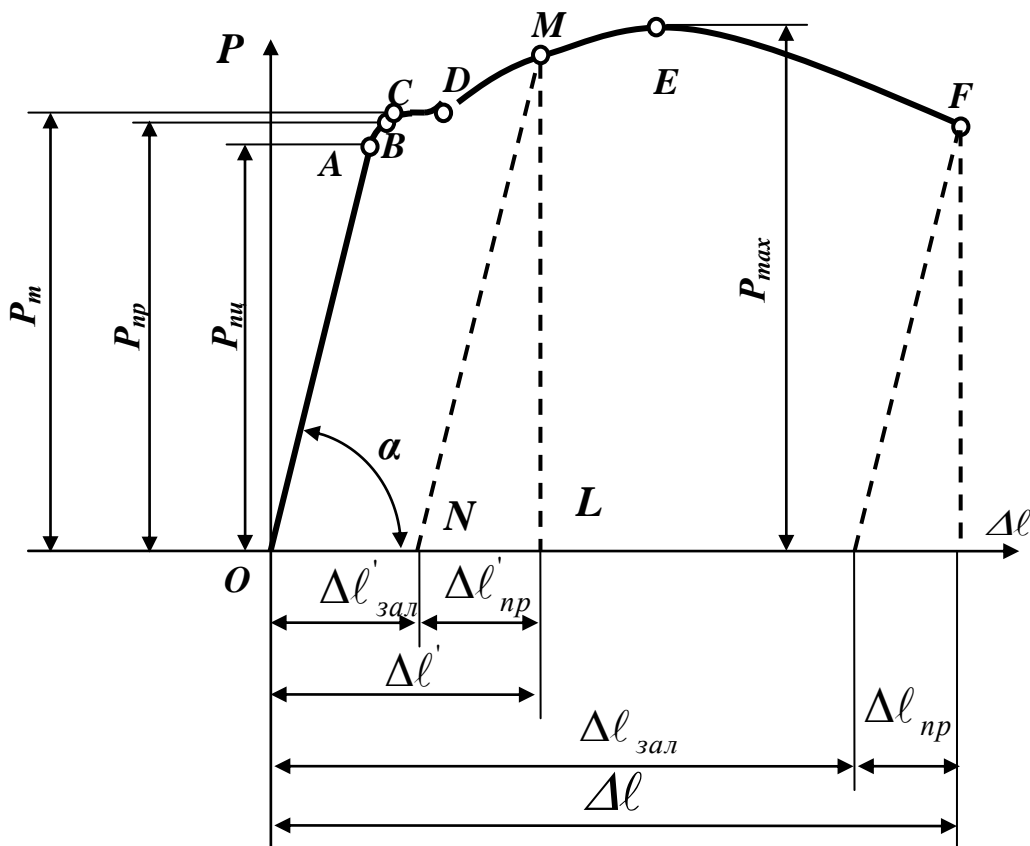


Рисунок 2.8

Границя пружності є характеристикою, не пов'язаною із законом Гука. Точки A і B діаграми, які відповідають границям пропорційності $\sigma_{пц.}$ і пружності $\sigma_{пр.}$, близькі одна до одної, і різницею між ними зазвичай нехтують.

При розтяганні після точки A діаграма розтягання стає криволінійною і плавно підіймається до точки C , де спостерігається перехід до горизонтальної ділянки CD , яка називається *полочкою плинності*. На цій стадії розтягання подовження зразка зростає при постійному значенні розтягуючої сили, яку позначають P_T . Такий процес деформації називають текучістю матеріалу. Він супроводжується залишковими (пластичними) деформаціями, які не зникають після розвантаження.

Отже, *границею текучості σ_T зветься напруження, при якому деформація зразка відбувається при постійному розтягуючому зусиллі*. Границя текучості визначається за формулою

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}. \quad (2.20)$$

Полочка плинності CD є характерною тільки для маловуглецевої сталі та деяких сплавів, однак вона не властива більшості металів і сплавів. Для матеріалів, які не мають полочки плинності, границя текучості приймається відповідно напруженню, при якому залишкове подовження зразка становить 0,2 % чи 0,5 % від його початкової довжини і позначається відповідно $\sigma_{0,2}$ та $\sigma_{0,5}$. Це – умовні границі текучості.

Після стадії текучості матеріал збільшує опір подальшому деформуванню і сприймає зусилля, що зростає, до певної межі. Цьому відповідає ділянка DE , що зветься ділянкою зміцнення. Точка E відповідає найбільшому зусиллю P_{max} , яке може сприймати зразок.

Напруження, що відповідає максимальній силі P_{max} , називається тимчасовим опором, або границею міцності, і позначається σ_B .

Границя міцності обчислюється за формулою

$$\sigma_B = \frac{P_{max}}{F_0}. \quad (2.21)$$

До точки C (див. рис. 2.8) подовження зразка розподіляються рівномірно за всією довжиною робочої частини зразка, а площі її поперечних перерізів змінюються неістотно. Тому для обчислення величин $\sigma_{пц.}$, $\sigma_{пр.}$, σ_T та σ_B у розрахункових формулах використовується початкове значення площі перерізу – F_0 .

Після досягнення зусилля P_{\max} деформація відбувається в основному на невеликій довжині зразка. Це призводить до утворення місцевого звуження у вигляді «шийки» (рис. 2.9) і зменшення сили P (див. рис. 2.8), незважаючи на те, що напруження у перерізі «шийки» безперервно зростає.

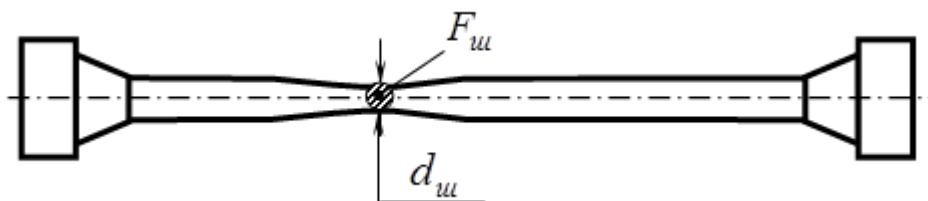


Рисунок 2.9

Позначивши через $P_{роз.}$ силу в момент розриву (точка F на рис. 2.8), можемо знайти умовне напруження в момент розриву:

$$\sigma_{роз.}^{ум.} = \frac{P_{роз.}}{F_0}. \quad (2.22)$$

Це напруження є умовним, тому що дійсна площа поперечного перерізу шийки $F_{ш.}$ (див. рис. 2.9) менша, ніж розрахункова площа F_0 .

Дійсне напруження в момент розриву $\sigma_{роз.}^д.$ є тим найбільшим нормальним напруженням у перерізі «шийки», яке зразок може витримати до руйнування.

Таким чином, дійсне напруження в момент розриву можна знайти за формулою

$$\sigma_{роз.}^д. = \frac{P_{роз.}}{F_{ш.}}. \quad (2.23)$$

Як уже зазначалось, якщо розвантажити зразок при напруженнях, які не перевищують границю пружності $\sigma_{пр.}$, то процес розвантаження зобразиться на діаграмі лінією, яка збігається з лінією навантаження. Повторне навантажування піде тією самою лінією OB , яку одержали при першому навантажуванні зразка (див. рис. 2.8).

Коли зразок навантажити до напруження в точці M на ділянці зміцнення DE , то лінія розвантаження MN пройде паралельно прямолінійній ділянці OA . При розвантаженні подовження $\Delta l'$ зразка зникає не повністю. Воно зменшується на величину пружної частини подовження $\Delta l'_{пр.}$. Відрізок ON являє собою залишкову деформацію $\Delta l'_{зал.}$ (див. рис. 2.8).

Подовження $\Delta l'_{зал.}$ називають *пластичним подовженням*.

Таким чином, повне подовження зразка за границею пружності складається із двох частин – пружної та пластичної:

$$\Delta l' = \Delta l'_{пр.} + \Delta l'_{зал.} . \quad (2.24)$$

Границі пропорційності та текучості при повторному навантаженні підвищуються. Це явище має назву *зміцнення* або *наклепу*.

Після розриву пружна складова повного подовження зразка $-\Delta l'_{пр.}$ зникає. Подовження, яке залишилось, зображується відрізком $\Delta l'_{зал.}$ (див. рис. 2.8) .

Відносне подовження зразка після розриву позначають δ і визначають у відсотках за формулою

$$\delta = \frac{\Delta l'_{зал.}}{l_0} \cdot 100. \quad (2.25)$$

Величина δ характеризує пластичність матеріалу. Залежно від нього матеріали поділяють на *пластичні* (для яких $\delta \geq 5\%$) та *крихкі* (для яких $\delta < 5\%$).

До пластичних матеріалів відносяться кольорові метали і їх сплави, також маловуглецеві сталі, до крихких – чавуни, загартовані сталі, спеціальні сплави, скло, бетон, цегла.

Відносне звуження зразка після розриву позначається ψ і визначається (у відсотках) відношенням абсолютного зменшення площі перерізу в шийці до початкової площі перерізу зразка:

$$\psi = \left(1 - \frac{F_{ш.}}{F_0} \right) \cdot 100. \quad (2.26)$$

Величина ψ є другою (після δ) характеристикою пластичності матеріалу.

Діаграми розтягання крихких матеріалів істотно відрізняються від розглянутої діаграми розтягання пластичної маловуглецевої сталі (див. рис. 2.8). На них можна визначити лише величину P_{max} (рис. 2.10) і розрахувати відповідне значення σ_B , використовуючи формулу (2.21).

Випробування матеріалів на стискання проводять значно рідше, ніж на розтягання. Для випробувань використовують циліндричні зразки діаметром $d_0 = 20$ мм і висотою $h_0 = 20...40$ мм (рис. 2.11).

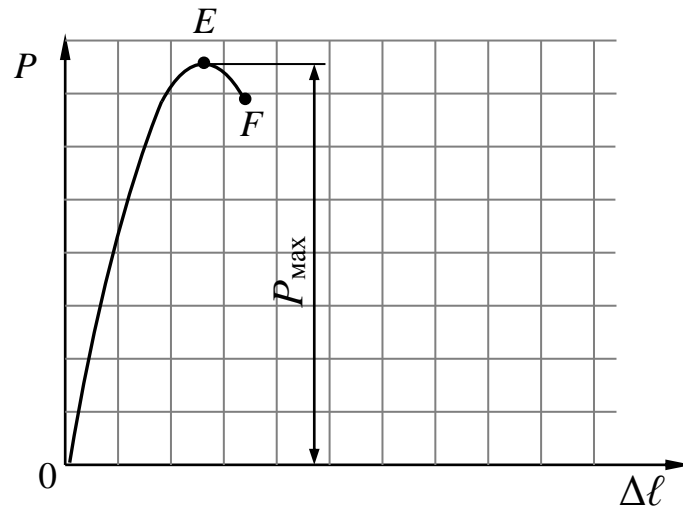


Рисунок 2.10

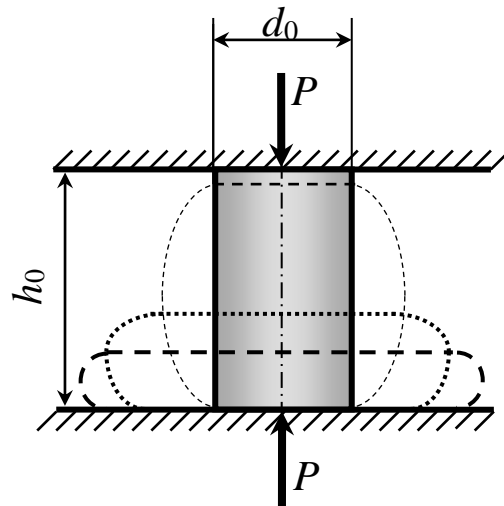


Рисунок 2.11

Зразки встановлюють між плитами випробувальної машини (див. рис. 2.11) і повільно навантажують. Пишучий пристрій машини викреслює діаграму стискання.

На рисунку 2.12 зображена діаграма стискання зразка із м'якої (пластичної) сталі. З цієї діаграми можна побачити, що в початковій стадії навантаження (ділянка OA) залежність між P і Δh прямолінійна. Тож, точка A відповідає границі пропорційності матеріалу – $\sigma_{пц.}$. Потім деформація збільшується і на ділянці AB (див. рис. 2.12) діаграма стискання набуває криволінійної форми. Це пояснюється швидким зростанням пластичної деформації і безперервним збільшенням поперечного перерізу зразка. На цій діаграмі нема ділянки текучості.

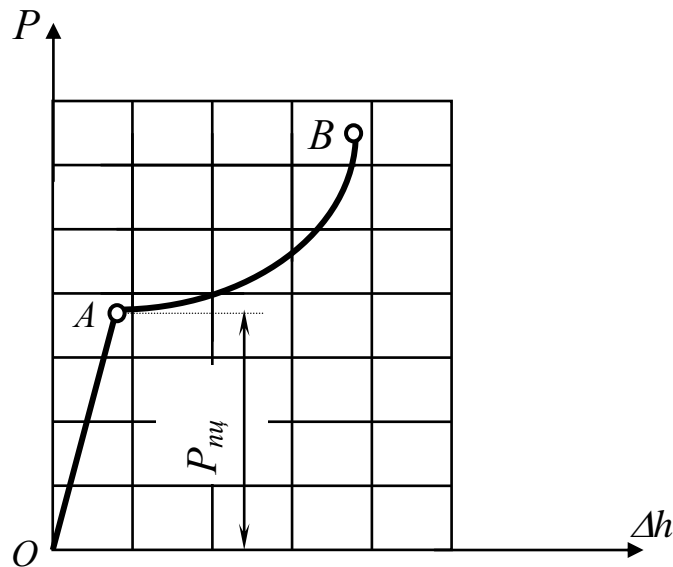


Рисунок 2.12

Унаслідок тертя між торцями зразка та опорними плитами деформація зразка відбувається не однакою за його висотою, внаслідок чого зразок набуває бочкоподібної форми (див. рис. 2.11) і може бути сплющений у диск без руйнування.

Таким чином, величина *границі міцності* пластичного матеріалу σ_B не може бути визначена. Єдина механічна характеристика, яка може бути знайдена з досліду, – це границя пропорційності матеріалу $\sigma_{пц}$, яка розраховується за формулою (2.18).

Інакше поведуть себе при випробуванні на стискання крихкі матеріали (наприклад, чавун). Спочатку їх діаграма стискання являє собою пряму лінію, потім вона все більше загинається, сягає максимуму, після чого різко обривається при руйнуванні зразка (рис. 2.13). Цього разу діаграма стискання схожа на діаграму розтягання крихких матеріалів (див. рис. 2.10).

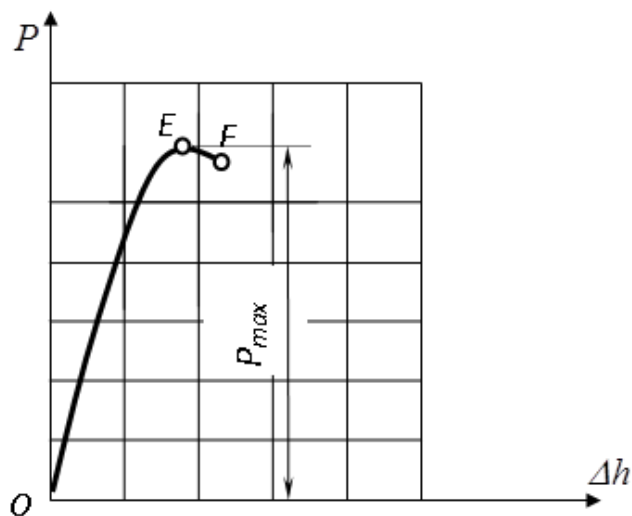


Рисунок 2.13

Чавунний зразок після стискання залишається майже циліндричним, що свідчить про відсутність значних пластичних деформацій. У ту мить, коли навантаження сягає найбільшого значення, зразок руйнується, причому на його поверхні з'являються тріщини, які нахилені під кутом, близьким до 45 % (рис. 2.14). Такий напрямок руйнування пояснюється тим, що його причиною є найбільші дотичні напруження, які діють під таким кутом. При випробуванні визначається навантаження P_{\max} , при якому відбувається руйнування зразка. Після чого можна визначити величину *границі міцності* σ_B за формулою (2.21).

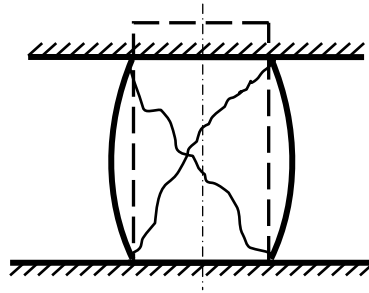


Рисунок 2.14

2.5 Розрахунки стрижневих систем, що працюють на розтягання і стискання

У всіх прикладах, які ми розглядали до цих пір, розтягуючі або стискуючі зусилля визначались у поодиноких стрижнях.

Разом з цим до складу багатьох конструкцій входять декілька стрижнів, що працюють на розтягання – стискання. Цього разу йдеться про так звані стрижневі системи.

Усі ці системи поділяються на статично визначувані (СВС) і статично невизначувані (СНС). До перших відносять системи, у яких кількість невідомих реакцій не перевищує кількості незалежних рівнянь статичної рівноваги, які можна скласти для визначення цих реакцій. До других відносяться системи, у яких кількість незалежних рівнянь рівноваги менша кількості невідомих реакцій.

Слід зауважити, що СНС завдяки «зайвим» в'язям є технічно і економічно більш досконалішими в порівнянні з СВС, бо добавляють конструкції міцності й жорсткості.

Визначення зусиль у стрижнях СВС не є проблематичним: для цього достатньо скласти і розв'язати відповідну систему рівнянь рівноваги.

Що ж стосується СНС, то тут є певна проблема, бо одних лише рівнянь статичної рівноваги для визначення зусиль у стрижнях конструкції в цьому разі не достатньо. До них треба додавати деяку кількість рівнянь,

які мають деформаційне походження. Кількість рівнянь, що додається, називають *ступенем статичної невизначуваності системи*. Вона визначається за формулою

$$S = n_R - n_{PP}, \quad (2.27)$$

де n_R – кількість невідомих реакцій в'язей;

n_{PP} – кількість рівнянь рівноваги.

Оскільки у СНС $n_R > n_{PP}$, значення S у них дорівнюють 1, 2, 3 і т. д. У СВС же $S = 0$.

Визначення всіх реакцій СНС зветься *розкриттям її статичної невизначуваності* й виконується в 4 етапи,

На першому етапі розглядається *статична сторона задачі* й складається максимально можлива кількість незалежних рівнянь рівноваги конструкції.

На другому етапі розглядається *геометрична сторона задачі* й складається S рівнянь зв'язків між абсолютними подовжніми деформаціями стрижнів ($\Delta \ell_i$).

На третьому етапі розглядається *фізична сторона задачі* й перетворюються на основі закону Гука S рівнянь з другого етапу у відповідну кількість зв'язків між зусиллями в стрижнях (N_i).

На четвертому етапі виконується *синтез*, тобто сумісне розв'язання рівнянь, отриманих на першому і третьому етапах.

Після визначення зусиль у кожному зі стрижнів СНС їх подальші розрахунки є однаковими з СВС.

Процедури розрахунків обох стрижневих систем проілюструємо такими прикладами.

Приклад 2.6. Визначити діаметр і абсолютне подовження (скорочення) найбільше навантаженого стрижня сталеві конструкції (рис. 2.15), якщо $[\sigma] = 160$ МПа. Прийняти: $a = 2$ м, $b = 3$ м, $c = 4$ м, $P = 200$ кН, $M = 250$ кН·м, $q = 300$ кН/м.

Розв'язання

1. Враховуючи, що у конструкції 3 невідомих реакції стрижнів і 3 рівняння рівноваги плоскої довільної системи сил (рис. 2.16), визначаємо за формулою (2.27) ступінь її статичної невизначуваності: $S = 3 - 3 = 0$. Таким чином, конструкція є **статично визначуваною**.

2. Позначаємо осі координат і номери стрижнів. Стрижні відкидаємо, а їхню дію на тіло, яке є заштрихованим, замінюємо силами N_1 , N_2 і N_3 , котрі спрямовані уздовж відповідних стрижнів (від тіла, якщо вважати стрижні розтягнутими) і дорівнюють подовжнім силам у цих стрижнях. Позначаємо також потрібні точки і кут α (див. рис. 2.16).

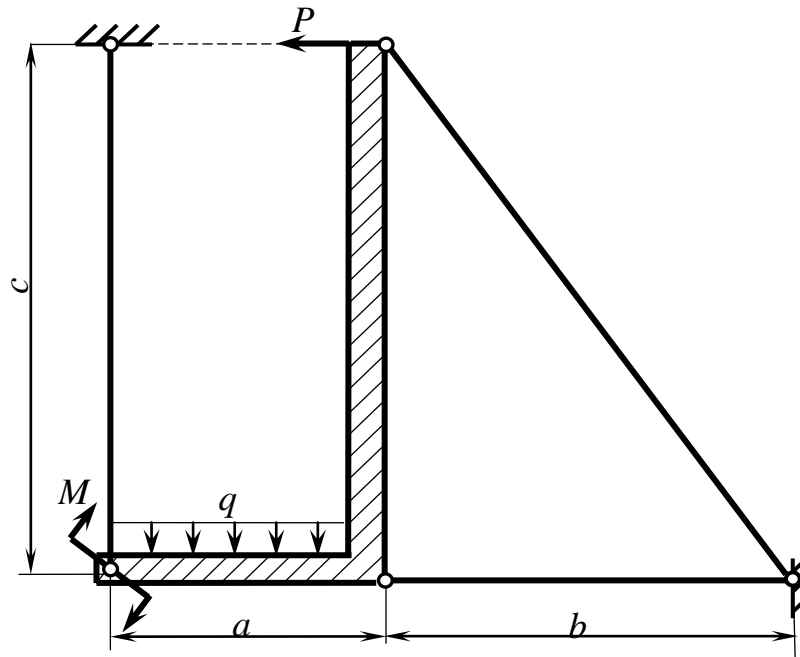


Рисунок 2.15

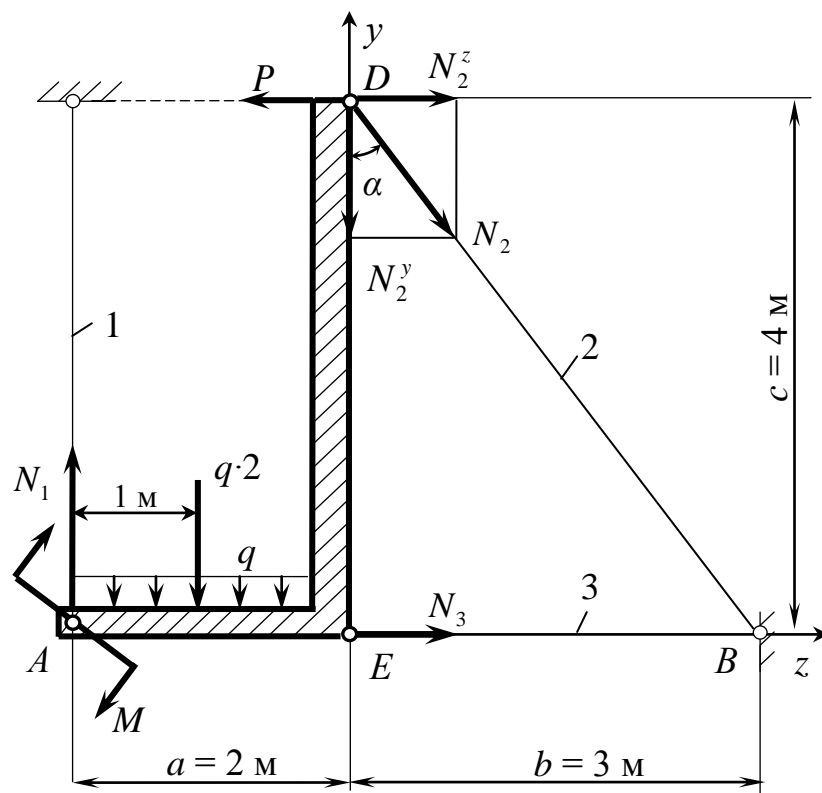


Рисунок 2.16

3. Спростуємо систему сил. Розподілене навантаження замінюємо його рівнодійною, яка дорівнює площі епюри цього навантаження і прикладена посередині навантаженої ділянки тіла. Силу N_2 розкладаємо

на складові уздовж осей координат – N_2^y і N_2^z (див. рис. 2.16). Значення цих складових визначаємо таким чином:

$$N_2^y = N_2 \cdot \cos \alpha, \quad (2.28)$$

$$N_2^z = N_2 \cdot \sin \alpha. \quad (2.29)$$

Значення $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ підраховуємо, використовуючи прямокутний трикутник DBE :

$$\sin \alpha = \frac{BE}{BD} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} = 0,6, \quad (2.30)$$

$$\cos \alpha = \frac{DE}{BD} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5} = 0,8. \quad (2.31)$$

4. Складаємо рівняння рівноваги конструкції. З усіх можливих варіантів вибираємо такі, які забезпечують найбільш просте розв'язання рівнянь рівноваги, а саме:

$$\sum m_A = -M - q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 4 - N_2 \cdot \cos \alpha \cdot 2 - N_2 \cdot \sin \alpha \cdot 4 = 0; \quad (2.32)$$

$$\sum m_B = -M + q \cdot 2 \cdot 4 + P \cdot 4 - N_1 \cdot 5 = 0; \quad (2.33)$$

$$\sum P_z = N_3 + N_2 \cdot \sin \alpha - P = 0. \quad (2.34)$$

5. Розв'язуємо систему рівнянь рівноваги.

З рівняння (2.32) знаходимо значення N_2 :

$$N_2 = \frac{-M - q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 4}{2 \cdot \cos \alpha + 4 \cdot \sin \alpha} = \frac{-250 - 300 \cdot 2 \cdot 1 + 200 \cdot 4}{2 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,6} = -12,5 \text{ кН.}$$

З рівняння (2.33) знаходимо значення N_1 :

$$N_1 = \frac{1}{5} \cdot (-M + q \cdot 2 \cdot 4 + P \cdot 4) = \frac{1}{5} \cdot (-250 + 2400 + 800) = 590 \text{ кН.}$$

З рівняння (2.34) знаходимо значення N_3 :

$$N_3 = -N_2 \cdot \sin \alpha + P = -(-12,5) \cdot 0,6 + 200 = 207,5 \text{ кН.}$$

6. Виконуємо перевірку розв'язання системи рівнянь (2.32)...(2.34). Для цього складаємо додаткове рівняння рівноваги і підставляємо в нього знайдені величини зусиль у стрижнях конструкції:

$$\sum P_y = N_1 - q \cdot 2 - N_2 \cdot \cos \alpha = 590 - 600 - (-12,5) \cdot 0,8 = 600 - 600 = 0.$$

Оскільки і ця умова рівноваги виконується, робимо висновок про вірність знайдених зусиль. Їхні знаки вказують на те, що стрижні 1 і 3 розтягнуті (бо N_1 і N_3 – додатні), а стрижень 2 – стиснутий (бо N_2 – від'ємне).

7. Визначаємо найбільше навантажений стрижень конструкції, тобто такий, в якому діє максимальне за модулем зусилля. Ним є стрижень 1:

$$|N_{max}| = N_1 = 590 \text{ кН.}$$

8. Зважаючи на те, що площа перерізу стрижня 1 дорівнює

$$F_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2, \quad (2.35)$$

із умови міцності (2.11) визначаємо діаметр цього стрижня:

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot N_1}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 590 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160}} = 68,5 \text{ мм.}$$

З нормального ряду (див. од. А) приймаємо: $d_1 = 71$ мм.

9. Визначаємо абсолютне подовження стрижня 1:

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot F_1} = \frac{590 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,785 \cdot 71^2} = 3,0 \text{ мм,}$$

де $\ell_1 = c = 4$ м – довжина стрижня 1 (див. рис. 2,15),

$E = 2 \times 10^5$ МПа – модуль пружності першого роду для сталі.

Приклад 2.7. Визначити з умови міцності діаметри стрижнів сталеві конструкції (рис. 2.17), якщо площа поперечного перерізу стрижня 1 вдвічі більша, ніж у стрижня 2. Визначити також абсолютні подовження або скорочення кожного зі стрижнів. Прийняти: $a = 2$ м, $b = 3$ м, $c = 4$ м, $P = 160$ кН, $M = 200$ кН·м, $q = 100$ кН/м.

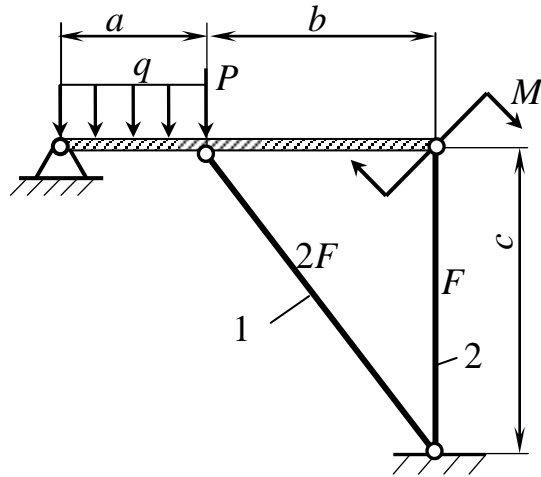


Рисунок 2.17

Розв'язання

1. Враховуючи, що в цієї конструкції 4 невідомих реакції і 3 рівняння рівноваги плоскої довільної системи сил (рис. 2.18), визначаємо за формулою (2.27) ступінь її статичної невизначуваності:

$$S = 4 - 3 = 1.$$

Тож, цього разу конструкція є **1 раз статично невизначуваною**.

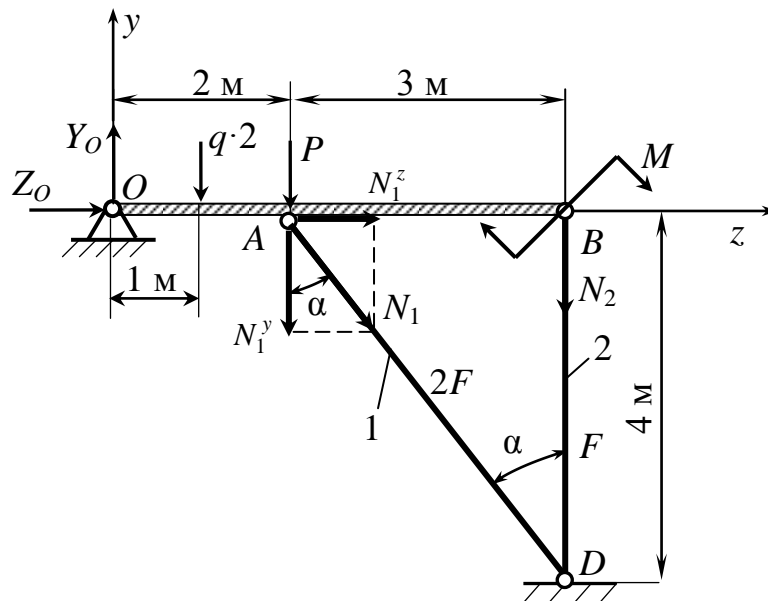


Рисунок 2.18

2. Розглядаємо статичну сторону задачі. Складаємо максимальну кількість незалежних рівнянь рівноваги конструкції (див. рис. 2.18):

$$\sum m_o = -q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M - N_1^y \cdot 2 - N_2 \cdot 5 = 0; \quad (2.36)$$

$$\sum P_y = Y_o - q \cdot 2 - P - N_1^y - N_2 = 0; \quad (2.37)$$

$$\sum P_z = Z_o + N_1^z = 0. \quad (2.38)$$

3. Спростимо рівняння (2.36)...(2.38), виражаючи N_1^y і N_1^z через N_1 :

$$\begin{cases} N_1^y = N_1 \cdot \cos \alpha; & \cos \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5} = 0,8; \\ N_1^y = 0,8 \cdot N_1. \\ N_1^z = N_1 \cdot \sin \alpha; & \sin \alpha = \frac{AB}{AD} = \frac{3}{5} = 0,6; \\ N_1^z = 0,6 \cdot N_1. \end{cases} \quad (2.39)$$

Підставивши рівняння (2.39) разом з заданими навантаженнями в рівняння (2.36)...(2.38), після перетворень остаточно отримаємо:

$$-720 - 1,6 \cdot N_1 - 5 \cdot N_2 = 0; \quad (2.40)$$

$$Y_o - 360 - 0,8 \cdot N_1 - N_2 = 0; \quad (2.41)$$

$$Z_o + 0,6 \cdot N_1 = 0. \quad (2.42)$$

4. Розглядаємо геометричну сторону задачі. Віртуально повертаємо заштриховане тіло OB на малий кут $d\varphi$ (рис. 2.19) і визначаємо співвідношення між абсолютними подовжніми деформаціями стрижнів.

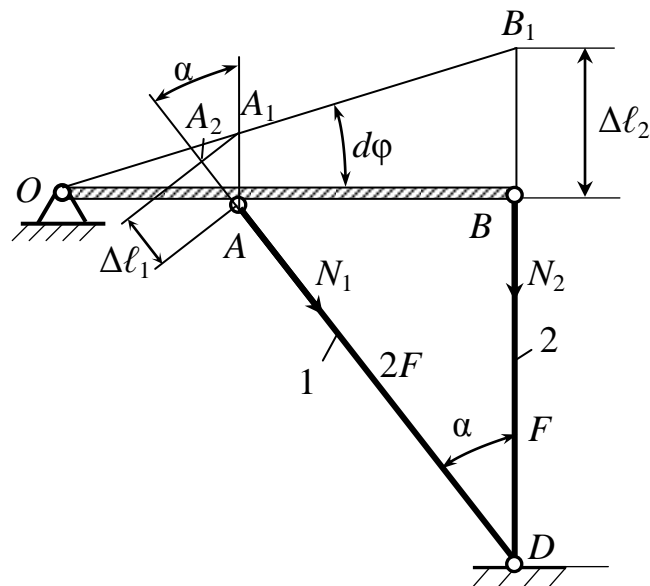


Рисунок 2.19

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta l_1 = AA_2 = AA_1 \cdot \cos \alpha = AA_1 \cdot \frac{BD}{AD} = \\ = AA_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8 \cdot AA_1; \\ \Delta l_2 = BB_1; \\ \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{BB_1}{0,8 \cdot AA_1} = 1,25 \cdot \frac{OB}{OA} = 1,25 \cdot \frac{5}{2} = 3,125. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Таким чином, із системи рівнянь (2.43) маємо:

$$\Delta l_2 = 3,125 \cdot \Delta l_1. \quad (2.44)$$

4. Розглядаємо фізичну сторону задачі. Із закону Гука при розтяганні – стисканні визначаємо співвідношення між зусиллями у стрижнях конструкції:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot F_1} = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{2 \cdot E \cdot F}; \quad (2.45)$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot F_2} = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot F}. \quad (2.46)$$

Підставивши вирази (2.45) і (2.46) у рівняння (2.44), маємо:

$$\frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot F} = 3,125 \cdot \frac{N_1 \cdot \ell_1}{2 \cdot E \cdot F},$$

або після перетворень і з урахуванням значень $\ell_1 = 5\text{ м}$ та $\ell_2 = 4\text{ м}$:

$$N_2 = 3,125 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} N_1 = 1,953 \cdot N_1. \quad (2.47)$$

5. Виконуємо синтез. Підставляємо в рівняння (2.40) вираз для N_2 (2.47) і після перетворень знаходимо зусилля в стрижні 1: $N_1 = -63,352\text{ кН}$.

Потім із (2.47) знаходимо зусилля в стрижні 2: $N_2 = -123,726\text{ кН}$.

6. Виконуємо перевірку, складаючи рівняння моментів відносно точки D . Оскільки до цього рівняння входять невідомі реакції шарніра O , попередньо визначимо їх значення.

Із рівняння (2.41) знаходимо Y_O :

$$\begin{aligned}
 Y_o &= 360 + 0,8 \cdot (-63,352) + (-123,726) = \\
 &= 360 - 50,682 - 123,726 = 185,592 \text{ кН.}
 \end{aligned}$$

Із рівняння (2.42) знаходимо Z_o :

$$Z_o = -0,6 \cdot (-63,352) = 38,011 \text{ кН.}$$

Перевірочне рівняння:

$$\begin{aligned}
 \sum m_D &= -Y_o \cdot 5 - Z_o \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 4 - M + P \cdot 3 = \\
 &= -185,592 \cdot 5 - 38,011 \cdot 4 + 100 \cdot 2 \cdot 4 - 200 + 160 \cdot 3 = \\
 &= -927,960 - 152,044 + 800 - 200 + 480 = \\
 &= -1280,004 + 1280 \approx 0.
 \end{aligned}$$

Таким чином, реакції конструкції знайдені правильно.

7. Визначаємо з умови міцності потрібні площі поперечних перерізів стрижнів.

З огляду на міцність стрижня 1:

$$F_1 = 2 \cdot F \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{63,352 \cdot 10^3}{160} = 396 \text{ мм}^2; \quad F \geq \frac{396}{2} = 198 \text{ мм}^2.$$

З огляду на міцність стрижня 2:

$$F_2 = F \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{123,726 \cdot 10^3}{160} = 773 \text{ мм}^2.$$

Щоб забезпечити міцність обох стрижнів, приймаємо більше з двох визначених значень F , а саме $F \geq 773 \text{ мм}^2$. Тоді:

$$F_1 = 2 \cdot F \geq 1546 \text{ мм}^2; \quad F_2 = F \geq 773 \text{ мм}^2.$$

8. Визначаємо потрібні діаметри стрижнів конструкції:

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1546}{3,14}} = 44,4 \text{ мм};$$

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 773}{3,14}} = 31,4 \text{ мм}.$$

Приймаємо з нормального ряду (див. дод. А): $d_1 = 45$ мм;
 $d_2 = 32$ мм.

9. Визначаємо абсолютні скорочення стрижнів конструкції:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot \ell}{E \cdot F_1} = -\frac{63,352 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,785 \cdot 45^2} = -1,0 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot F_2} = -\frac{123,726 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,785 \cdot 32^2} = -3,1 \text{ мм}.$$

Зазначимо, що статично невизначуваними можуть бути не тільки стрижневі системи, але й окремі стрижні. На завершення наведемо приклад розрахунку одного з таких стрижнів.

Приклад 2.8. Сталевий стрижень діаметром $d = 32$ мм встановлено без зазору між двома плитами (рис. 2.20). Визначити подовжню силу N і нормальне напруження σ , які виникають у стрижні при його нагріванні на $\Delta t = 50$ градусів. Коефіцієнт лінійного розширення $\alpha = 1.25 \times 10^{-5}$ град $^{-1}$.

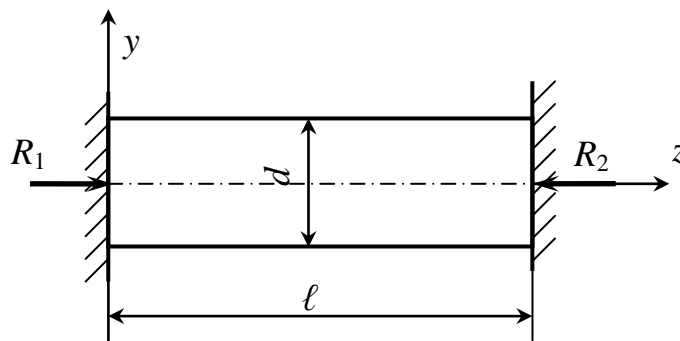


Рисунок 2.20

Розв'язання

1. У нагрітого стрижня дві реакції – R_1 і R_2 , а рівняння рівноваги для їх визначення тільки одне : $\sum P_z = 0$ (див. рис. 2.20). Тож стрижень є **раз статично невизначуваним**, бо $S = 2 - 1 = 1$.

2. Статична сторона задачі:

$$\sum P_z = R_1 - R_2 = 0.$$

Звідси $R_1 = R_2 = R.$ (2.48)

3. Геометрична сторона задачі:

$$\Delta l = \Delta l_R + \Delta l_t = 0, \quad (2.49)$$

де Δl_R – абсолютна подовжня деформація стрижня від дії однієї з опорних реакцій;

Δl_t – абсолютна подовжня деформація стрижня від нагріву.

Рівняння (2.49) відображає умову незмінності довжини стрижня при нагріванні (подовження стрижня стримують опорні плити).

4. Фізична сторона задачі:

$$\Delta l_R = -\frac{R \cdot \ell}{E \cdot F}, \quad (2.50)$$

$$\Delta l_t = \alpha \cdot \ell \cdot \Delta t. \quad (2.51)$$

5. Синтез.

Підставляємо вирази (2.50) і (2.51) у рівняння (2.49), і отримуємо значення реакцій:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\alpha \cdot \ell \cdot \Delta t \cdot E \cdot F}{\ell} = \alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot F = 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,785 \cdot 32^2 = \\ &= 100480 \text{ Н} = 100,480 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Величина подовжньої сили: $N = -P = -100,480$ кН.

Величини нормальних напружень у стрижні:

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{P}{F} = -\frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot F}{F} = -\alpha \cdot \Delta t \cdot E = \\ &= -1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^5 = -125 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Як бачимо, подовжня сила не залежить від довжини стрижня, а нормальні напруження в стрижні є незалежними не тільки від його довжини, але й від площі його поперечного перерізу.

3 ГЕОМЕТРІЯ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

3.1 Статичні моменти плоских перерізів. Визначення центрів ваги простих фігур

При розтяганні – стисканні єдиною характеристикою перерізу стрижня, що впливає на величини напружень і деформацій, є його площа – F . При згинанні ж і ряді інших видів навантаження стрижнів є важливою також форма їх перерізу. У цих випадках для визначення напружень і деформацій використовують комплексні геометричні характеристики перерізу, які одночасно враховують і величину його площі, і його форму. Такими характеристиками є статичні моменти перерізів і їх моменти інерції.

Розглянемо плоску фігуру довільної форми, яка має площу F і моделює відповідний переріз стрижня (рис. 3.1), і введемо поняття її статичних моментів відносно довільних координатних осей x і y :

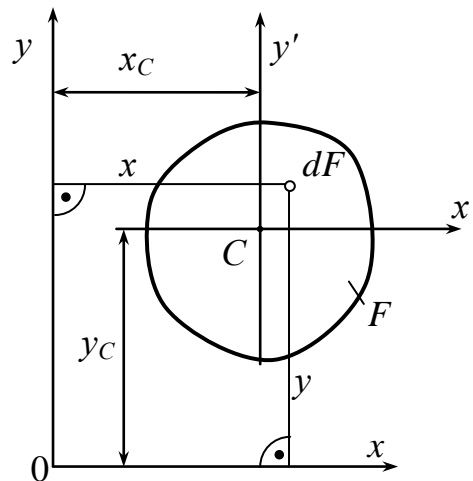


Рисунок 3.1

$$S_x = \int_F y \cdot dF, \quad (3.1)$$

$$S_y = \int_F x \cdot dF. \quad (3.2)$$

Знаки S_x і S_y залежно від розташування осей координат можуть бути додатними, від'ємними і такими, що дорівнюють нулю. Статичні моменти мають розмірності мм^3 , см^3 , м^3 .

Осі координат, відносно яких статичні моменти дорівнюють нулю, звуться *центральними осями* плоскої фігури, а точка їх перетину – *центром ваги* цієї фігури.

Центр ваги позначається великою літерою C (див. рис. 3.1). Центральні осі позначають по-різному залежно від сутності задачі. На рисунку 3.1 ці осі мають позначення x' і y' .

Якщо координати центра ваги відомі, то величини статичних моментів S_x і S_y можна визначити таким чином:

$$S_x = F \cdot y_C, \quad (3.3)$$

$$S_y = F \cdot x_C. \quad (3.4)$$

При відомих величинах статичних моментів з формул (3.3) і (3.4) можна визначити координати центра ваги фігури:

$$x_C = S_y / F, \quad (3.5)$$

$$y_C = S_x / F. \quad (3.6)$$

У ряді простих фігур положення центрів ваги є відомим і розрахунку не потребує. Так, у кола центр ваги – це його геометричний центр, у прямокутника він знаходиться в точці перетину діагоналей або осей симетрії, у довільного трикутника – в точці перетину медіан, у прямокутного трикутника ця точка має координати, пов'язані з довжиною катетів (рис. 3.2). У довідковій літературі наведено багато даних про положення центрів ваги інших фігур, які також можна вважати простими.

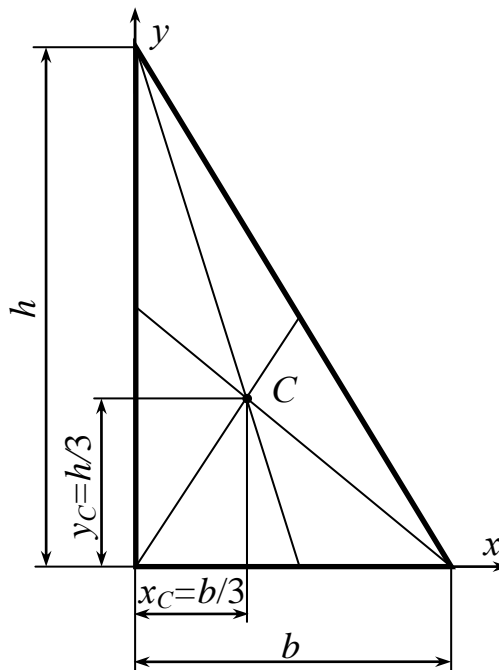


Рисунок 3.2

У фігур складної конфігурації положення центрів ваги знаходять, застосовуючи *метод поділу на частини* і *метод «від'ємних площ»*.

Сутність першого методу – в поділі складної фігури на такі прості частини, у кожній з котрих відомі площа і положення центра ваги. У цьому разі координати центра ваги обчислюють за формулами:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i / \sum_{i=1}^n F_i, \quad (3.7)$$

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i / \sum_{i=1}^n F_i, \quad (3.8)$$

де $i = 1 \dots n$ – номери простих частин;

F_i – площі цих частин;

x_i, y_i – координати центрів ваги простих частин у вибраній системі координат.

Метод «від'ємних площ» застосовують до складних фігур з внутрішніми порожнинами. Цього разу координати центра ваги складної фігури також визначають за допомогою формул (3.7) і (3.8), але за частину 1 приймають усю фігуру без порожнин, а площі інших частин (порожнин) вважають від'ємними.

При визначенні положення центрів ваги складних фігур треба мати на увазі, що вони завжди лежать на осях симетрії, якщо фігури є симетричними. Якщо фігура має одну вісь симетрії, то, прийнявши її за одну з координатних осей, можна суттєво спростити пошук центра ваги: цього разу достатньо розрахувати тільки одну з його координат. За наявності у фігури двох осей симетрії ніяких розрахунків не треба, бо центр ваги лежить на перетині цих осей.

3.2 Моменти інерції плоских перерізів. Радіуси інерції

Існують три види моментів інерції: осьові (J_x і J_y), полярний (J_p) і відцентровий (J_{xy}). Введемо ці поняття (рис. 3.3).

$$J_x = \int_F y^2 \cdot dF, \quad (3.9)$$

$$J_y = \int_F x^2 \cdot dF, \quad (3.10)$$

$$J_p = \int_F \rho^2 \cdot dF, \quad (3.11)$$

$$J_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF. \quad (3.12)$$

Усі моменти інерції мають розмірність мм⁴, см⁴, м⁴.

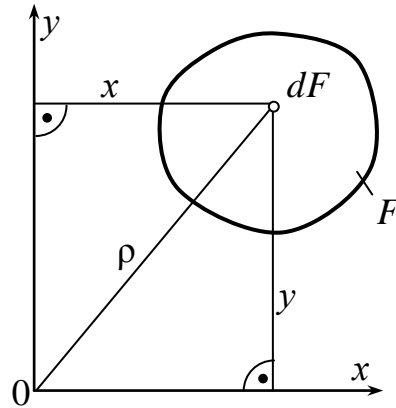


Рисунок 3.3

Осьові й полярний моменти інерції фігури завжди є додатними. Між ними існує зв'язок:

$$J_p = \int_F \rho^2 \cdot dF = \int_F (x^2 + y^2) \cdot dF = \int_F x^2 \cdot dF + \int_F y^2 \cdot dF = J_y + J_x, \quad (3.13)$$

тобто *полярний момент інерції дорівнює сумі осьових.*

Відцентровий момент інерції залежно від розташування осей координат може бути додатним (рис. 3.4, а), від'ємним (рис. 3.4, б), а також дорівнювати нулю (рис. 3.4, в).

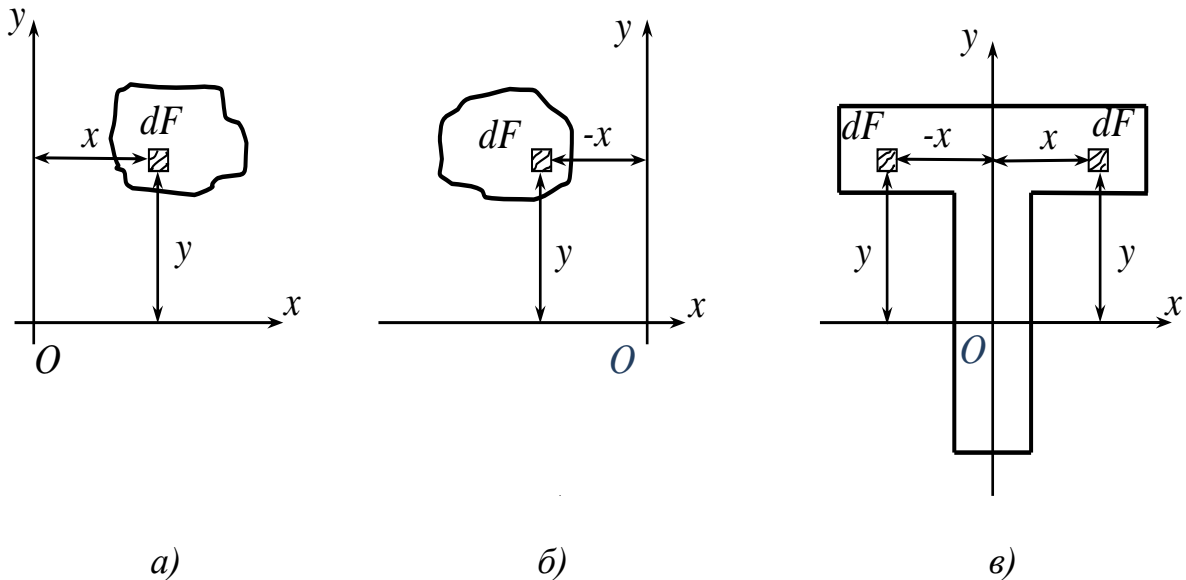


Рисунок 3.4

Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називаються *головними осями інерції* плоскої фігури.

Вісь симетрії фігури завжди є головною віссю інерції, оскільки в цьому разі кожній додатній величині $x \cdot y \cdot dF$ в першому і третьому квадрантах відповідає така сама за модулем, але від'ємна в другому і четвертому квадрантах (див. рис. 3.4, в), що призводить до $J_{xy} = 0$. Другою головною віссю у симетричній фігури є будь-яка інша вісь, перпендикулярна до осі симетрії.

При розв'язанні задач опору матеріалів разом з моментами інерції використовують характеристики, які зветься радіусами інерції. Вони пов'язують між собою площу перерізу і його осеві моменти інерції:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}, \quad (3.14)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (3.15)$$

З формул (3.14) і (3.15) слідує, що

$$J_x = F \cdot i_x^2, \quad (3.16)$$

$$J_y = F \cdot i_y^2. \quad (3.17)$$

3.3 Моменти інерції простих фігур

До простих фігур зазвичай відносять прямокутник, круг і прямокутний трикутник.

Моменти інерції прямокутника (рис. 3.5):

$$J_x = \frac{1}{12} b \cdot h^3, \quad J_y = \frac{1}{12} h \cdot b^3, \quad J_{xy} = 0. \quad (3.18)$$

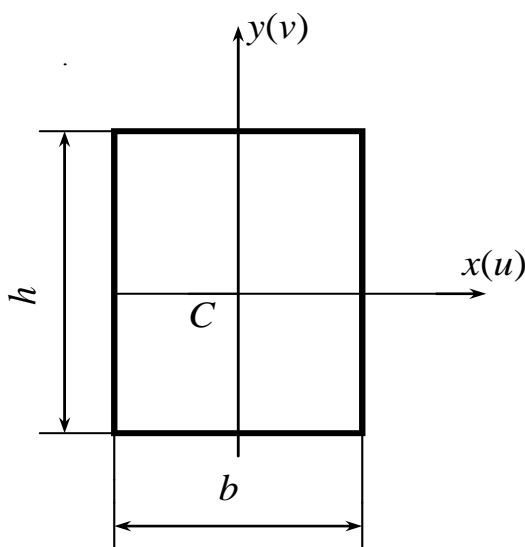


Рисунок 3.5

Моменти інерції круга (рис. 3.6):

$$J_x = J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}, \quad J_{xy} = 0. \quad (3.19)$$

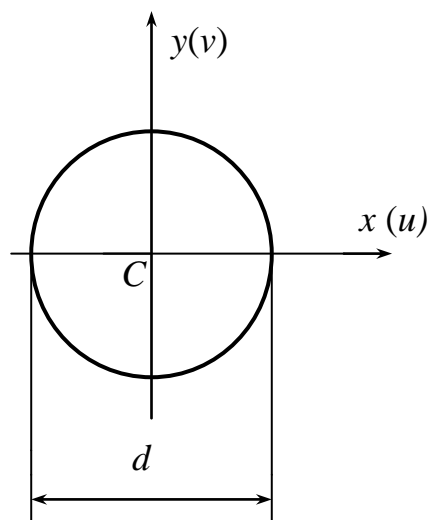


Рисунок 3.6

Моменти інерції прямокутного трикутника (рис. 3.7):

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{36}, \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{36}, \quad J_{xy} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}. \quad (3.20)$$

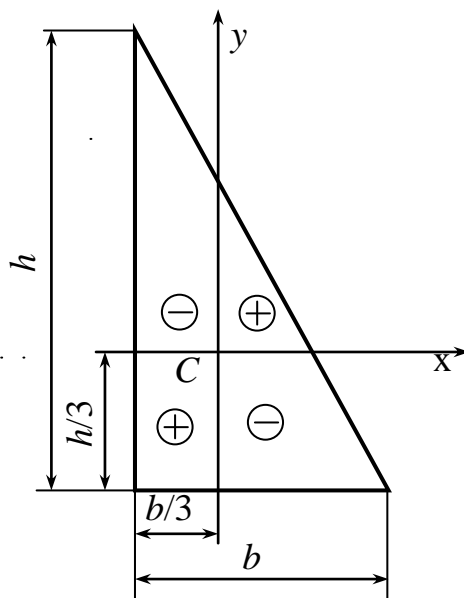


Рисунок 3.7

Відцентровий момент інерції цього трикутника не дорівнює нулю, тому що осі x і y не є осями симетрії. Його знак (плюс або мінус) залежить від напрямків цих осей.

У разі, зображеному на рисунку 3.7, координати x і y елементарних площадок у другому і четвертому квадрантах цього трикутника мають протилежні знаки, а в першому і третьому квадрантах вони однакові за знаком. Тож, у квадрантах 2 і 4 величини J_{xy} є від'ємними, а в квадрантах 1 і 3 вони додатні. Оскільки ж сумарна площа частин трикутника з від'ємними значеннями J_{xy} явно більша, ніж у частин з додатними J_{xy} , відцентровий момент інерції всього трикутника має знак «мінус».

Слід зауважити, що зміна напрямку однієї з осей координат зазначеного трикутника призводить до зміни знака його відцентрового моменту інерції. Одночасна ж зміна напрямків обох осей не призводить до такої зміни.

Повертаючись до рисунків 3.5...3.7, слід зазначити, що у прямокутника і кола осі x і y є не тільки центральними, але й головними осями інерції, бо ці фігури симетричні. Такі осі зветься *головними центральними осями фігури* і спеціально позначаються літерами u і v . У трикутника ж осі x і y є тільки центральними, бо вони не є осями симетрії. Назвемо їх *довільними центральними осями фігури*. Перехід від них до головних центральних осей буде розглянуто далі.

Стрижневі елементів конструкцій часто виготовляються з двотаврів, швелерів, кутиків й інших профілів прокату. Їхні перерізи є фігурами більш складної конфігурації, ніж розглянуті вище. Але і їх також можна віднести до простих фігур з огляду на те, що всі необхідні для розрахунків характеристики зазначених профілів містяться у відповідних таблицях сортаменту (див. дод. А).

3.4 Перетворення моментів інерції при паралельному переносі й повороті осей координат

Виведемо формули перетворення моментів інерції плоскої фігури при паралельному перенесенні осей.

Нехай відомі моменти інерції фігури відносно центральних осей x , y і відстані від цих осей до нових, паралельних ним осей x_1 , y_1 (рис. 3.8). Треба визначити моменти інерції фігури відносно осей x_1 , y_1 .

Згідно з визначенням:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 \cdot dF; \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 \cdot y_1 \cdot dF. \quad (3.21)$$

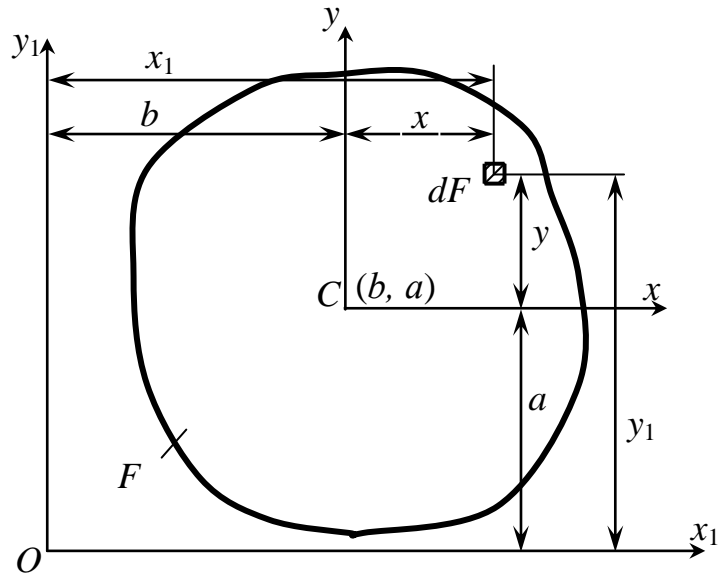


Рисунок 3.8

Координати будь-якої точки в новій системі координат x_1, y_1 можна виразити через її координати в центральних осях x, y (див. рис. 3.8):

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a. \quad (3.22)$$

Підставимо значення (3.22) у першу з формул (3.21), одержимо:

$$J_{x_1} = \int_F (y + a)^2 \cdot dF = \int_F y^2 \cdot dF + 2a \cdot \int_F y \cdot dF + a^2 \cdot \int_F dF.$$

Другий інтеграл у цій формулі є статичним моментом фігури відносно центральної осі x , і тому він дорівнює нулю, тобто

$$\int_F y \cdot dF = S_x = 0.$$

Тоді з урахуванням (3.9) остаточно маємо :

$$J_{x_1} = J_x + a^2 \cdot F. \quad (3.23)$$

Аналогічно:

$$J_{y_1} = J_y + b^2 \cdot F, \quad (3.24)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + a \cdot b \cdot F. \quad (3.25)$$

Формули (3.23) і (3.24) дозволяють зробити такий висновок: *осьові моменти інерції фігури відносно осі, яка паралельна центральній,*

дорівнюють моменту інерції відносно центральної осі плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між цими осями.

Слід зауважити, що величини a і b у формулі (3.25), на відміну від формул (3.23) і (3.24), не є відстанями між паралельними осями. У загальному випадку вони є координатами точки C у системі осей x_1, y_1 і підставляти їх у формулу (3.25) треба зі своїми знаками. Таким чином, відцентровий момент інерції фігури відносно осей, які паралельні центральним, дорівнює відцентровому моменту відносно центральних осей плюс добуток площі фігури на координати її центра ваги в нових осях.

Розглянемо тепер варіант повороту осей координат навколо довільної точки O (рис. 3.9).

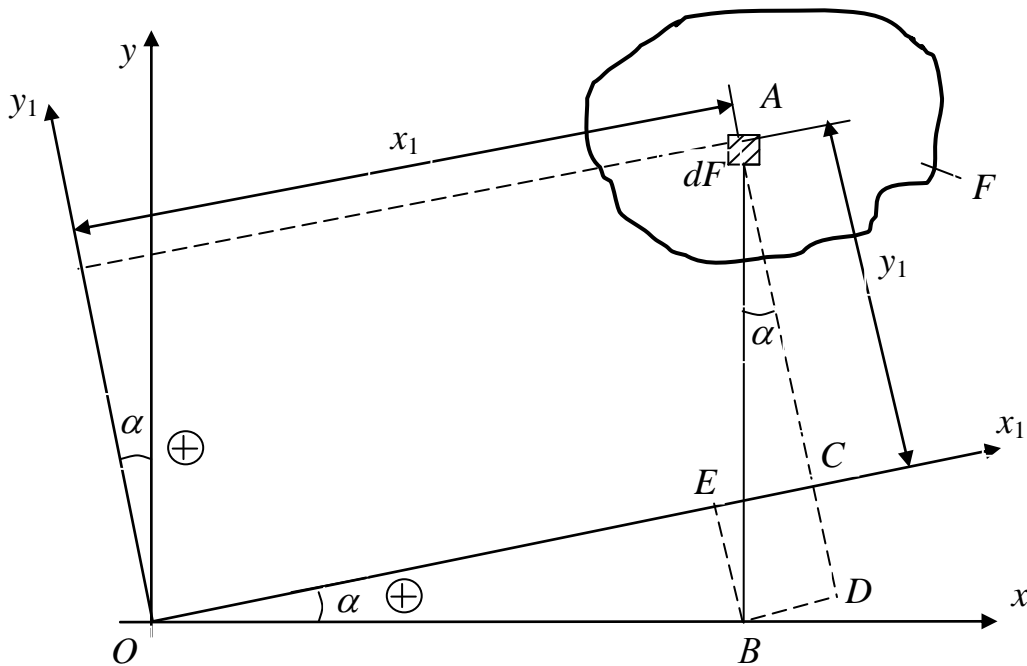


Рисунок 3.9

Нехай відомі моменти інерції фігури відносно вихідних координатних осей x і y (не обов'язково центральних). Потрібно визначити моменти інерції цієї фігури відносно осей x_1, y_1 , повернених щодо осей x, y на деякий кут α , який вважається додатним при повороті проти напрямку ходу стрілок годинника і від'ємним при повороті в протилежному напрямку.

Виокремимо у фігурі яку-небудь елементарну ділянку з площею dF і центром у точці A (див. рис. 3.9). Координати цієї точки у вихідній системі координат:

$$x = OB, \quad y = AB, \quad (3.26)$$

у поверненій:

$$x_1 = OC, \quad y_1 = AC. \quad (3.27)$$

Виразимо нові координати x_1, y_1 через старі x, y і кут α , проводячи допоміжні лінії CD і BE паралельно осі Oy_1 , а лінію BD – паралельно осі Ox_1 :

$$\begin{cases} x_1 = OC = OE + BD = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha, \\ y_1 = AC = AD - CD = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha. \end{cases} \quad (3.28)$$

Вирази для моментів інерції фігури відносно осей x_1, y_1 в цьому разі такі ж, як і у випадку паралельних осей (див. формули (3.21)).

Підставивши вирази (3.28) у (3.21), після перетворень одержимо:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_F (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dF = \cos^2 \alpha \cdot \int_F y^2 \cdot dF - \sin 2\alpha \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF + \sin^2 \alpha \cdot \int_F x^2 \cdot dF; \\ J_{y_1} &= \int_F (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dF = \cos^2 \alpha \cdot \int_F x^2 \cdot dF + \sin 2\alpha \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF + \sin^2 \alpha \cdot \int_F y^2 \cdot dF; \\ J_{x_1 y_1} &= \int_F (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha) \cdot (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha) \cdot dF = \\ &= \cos 2\alpha \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \left(\int_F y^2 \cdot dF - \int_F x^2 \cdot dF \right). \end{aligned}$$

Враховуючи вирази (3.9, 3.10, 3.12), остаточно маємо:

$$J_{x_1} = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha; \quad (3.29)$$

$$J_{y_1} = J_x \cdot \sin^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \alpha + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha; \quad (3.30)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} \cdot \cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (3.31)$$

Вирази (3.29) і (3.30) справедливі для будь-якої системи осей, у тому числі і для осей центральних.

Складаючи ці вирази, знаходимо:

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p. \quad (3.32)$$

Таким чином, при будь-якому повороті системи координат сума моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей не змінюється і дорівнює полярному моменту інерції відносно точки перетину цих осей.

3.5 Визначення напрямків головних центральних осей і величин головних моментів інерції

Головними моментами інерції фігури зуться її моменти інерції відносно головних центральних осей – u і v (рис. 3.10), тобто центральних осей, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю: $J_{uv} = 0$.

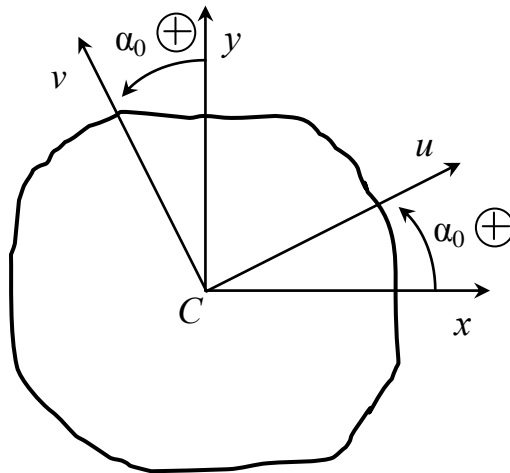


Рисунок 3.10

Головні моменти інерції перерізу J_u , J_v є важливими показниками опору стрижнів згинанню й іншим, комбінованим видам навантаження з елементами згинання.

Перед визначенням величин J_u , J_v треба розглянути питання про напрямки головних центральних осей.

Формула (3.31) встановлює зв'язок відцентрового моменту інерції від кута повороту фігури навколо фіксованої точки. Узявши цю формулу за основу, визначимо кут α_0 , при якому відцентровий момент інерції дорівнює нулю, і довільні центральні осі (x і y) перетворюються на головні (див. рис. 3.10):

$$J_{xy} \cdot \cos 2\alpha_0 + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 = 0, \quad (3.33)$$

звідки

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (3.34)$$

Слід зауважити, що саме при такому куті α_0 осьові моменти інерції стануть екстремальними: один – максимальним, другий – мінімальним, в

чому можна пересвідчитись, дослідивши на екстремум залежності (3.29) або (3.30). Ця обставина дозволяє внести суттєве доповнення у характеристики головних центральних осей. Надалі *такими осями будемо вважати осі координат, які проходять через центр ваги фігури і відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, а осьові моменти інерції досягають своїх екстремумів.*

Оскільки функція $\operatorname{tg} 2\alpha_0$ має період 180° , формула (3.34) дає перші 2 значення α_0 , які відрізняються один від одного на 90° і вказують напрямки головних центральних осей. Як легко бачити, менший з цих кутів за абсолютною величиною не перевищує $\pi/4$ або 45° . Надалі ми будемо користуватись саме цим меншим кутом.

Значення головних моментів інерції можна одержати із загальних формул переходу до повернених осей (3.29) і (3.30), взявши $\alpha = \alpha_0$:

$$J_u = J_x \cdot \cos^2 \alpha_0 + J_y \cdot \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0, \quad (3.35)$$

$$J_v = J_x \cdot \sin^2 \alpha_0 + J_y \cdot \cos^2 \alpha_0 + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0. \quad (3.36)$$

Взявши за основу вирази (3.35) та (3.36) і виконавши низку тригонометричних перетворень, отримаємо вирази для J_u і J_v без кута α_0 :

$$J_{u,v} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (3.37)$$

У формулі (3.37) перед радикалом стоять знаки «плюс» і «мінус», тож формула дає два значення головних моментів інерції – J_u , J_v . Щоб визначити, який з них менший, а який більший, треба порівняти між собою значення J_x і J_y . Якщо, наприклад, $J_x > J_y$, то $J_u > J_v$. і в розрахунку J_u треба перед радикалом мати знак «плюс», а в розрахунку J_v – «мінус».

Процедуру визначення положень головних центральних осей складних перерізів стрижнів і розрахунків величин їх головних моментів інерції проілюструємо такими прикладами.

Приклад 3.1. Визначити положення головних центральних осей і величини головних моментів інерції несиметричного перерізу стрижня (рис. 3.11).

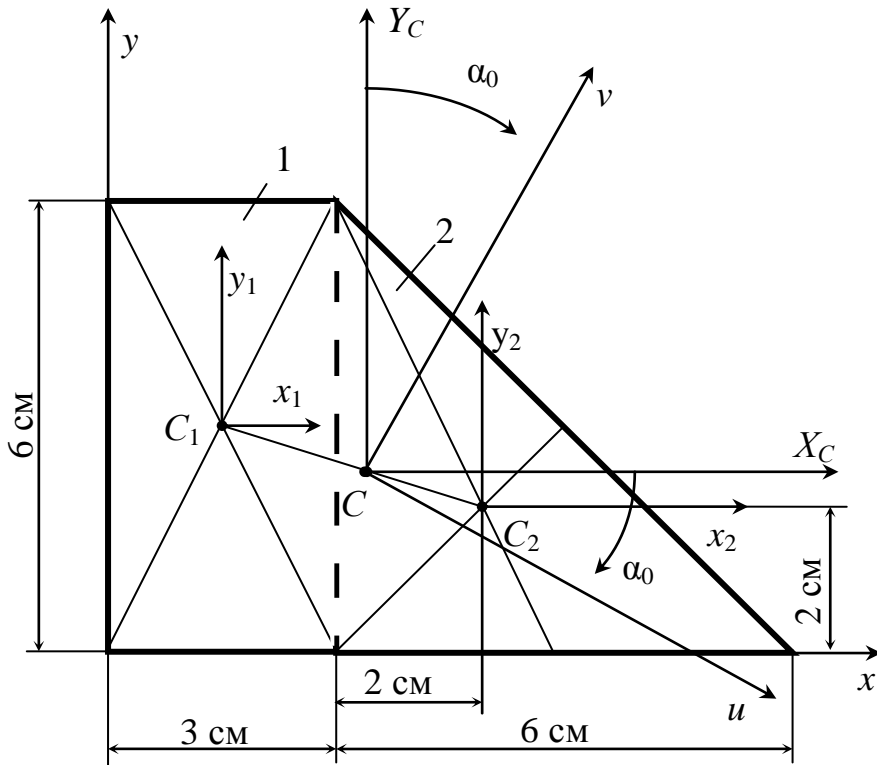


Рисунок 3.11

Розв'язання

1. Вибираємо вихідну систему координат x, y і, застосувавши метод поділу на частини, знаходимо за формулами (3.7) і (3.8) координати центра ваги перерізу:

$$x_c = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2}{F_1 + F_2}, \quad y_c = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2},$$

де F_1 і F_2 – площі частин перерізу: $F_1 = 3 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2$, $F_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2$;

x_1, x_2, y_1, y_2 – координати центрів ваги частин перерізу (точок C_1 і C_2):

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ см}, \quad x_2 = 3 + 2 = 5 \text{ см}; \quad y_1 = \frac{6}{2} = 3 \text{ см}; \quad y_2 = \frac{6}{3} = 2 \text{ см}.$$

Тоді:

$$x_c = \frac{18 \cdot 1,5 + 18 \cdot 5}{18 + 18} = \frac{117}{36} = 3,25 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{18 \cdot 3 + 18 \cdot 2}{18 + 18} = \frac{90}{36} = 2,5 \text{ см}.$$

2. Позначаємо центр ваги перерізу (точку C) і проводимо через неї паралельно до вихідної системи координат довільні центральні осі X_C, Y_C .

3. Підраховуємо за формулами (3.23)...(3.25) моменти інерції перерізу відносно осей X_C, Y_C :

$$J_{X_C} = J_{x_1} + F_1 \cdot (y_1 - y_C)^2 + J_{x_2} + F_2 \cdot (y_C - y_2)^2,$$

$$J_{Y_C} = J_{y_1} + F_1 \cdot (x_C - x_1)^2 + J_{y_2} + F_2 \cdot (x_2 - x_C)^2,$$

$$J_{X_C Y_C} = J_{x_1 y_1} + F_1 \cdot a_1 \cdot b_1 + J_{x_2 y_2} + F_2 \cdot a_2 \cdot b_2,$$

де $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1 y_1}, J_{x_2}, J_{y_2}, J_{x_2 y_2}$ – моменти інерції частин перерізу відносно своїх центральних осей:

$$J_{x_1} = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 6^3 = 54 \text{ см}^4; \quad J_{y_1} = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 3^3 = 13,5 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_1 y_1} = 0 \text{ (тому, що частина 1 має осі симетрії);}$$

$$J_{x_2} = \frac{1}{36} \cdot 6 \cdot 6^3 = 36 \text{ см}^4; \quad J_{y_2} = J_{x_2} = 36 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_2 y_2} = -\frac{1}{72} \cdot 6^2 \cdot 6^2 = -18 \text{ см}^4;$$

де $a_1; b_1; a_2; b_2$ – відповідно горизонтальні та вертикальні координати точок C_1 і C_2 у системі координат X_C, Y_C :

$$a_1 = -(x_C - x_1) = -(3,25 - 1,5) = -1,75 \text{ см};$$

$$b_1 = y_1 - y_C = 3 - 2,5 = 0,5 \text{ см};$$

$$a_2 = x_2 - x_C = 5 - 3,25 = 1,75 \text{ см};$$

$$b_2 = -(y_C - y_2) = -(2,5 - 2) = -0,5 \text{ см}.$$

З урахуванням цих числових даних маємо:

$$\begin{aligned} J_{X_C} &= 54 + 18 \cdot (3 - 2,5)^2 + 36 + 18 \cdot (2,5 - 2)^2 = \\ &= 54 + 4,5 + 36 + 4,5 = 99 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{Y_C} &= 13,5 + 18 \cdot (3,25 - 1,5)^2 + 36 + 18 \cdot (5 - 3,25)^2 = \\ &= 13,5 + 55,125 + 36 + 55,125 = 159,75 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{X_C Y_C} &= 0 + 18 \cdot (-1,75) \cdot 0,5 + (-18) + 18 \cdot 1,75 \cdot (-0,5) = \\ &= 0 - 15,75 - 18 - 15,75 = -49,5 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

4. Визначаємо за формулою (3.34) кут повороту α_0 , при якому осі X_C , Y_C стають головними центральними осями перерізу:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= \frac{2 \cdot J_{X_C Y_C}}{J_{Y_C} - J_{X_C}} = \frac{2 \cdot (-49,5)}{159,75 - 99} = -\frac{99}{60,75} = -1,63; \\ \alpha_0 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-1,63) = -29,24^\circ. \end{aligned}$$

5. Визначаємо головні моменти інерції перерізу, користуючись формулою (3.37).

Оскільки $J_{Y_C} > J_{X_C}$, повинно бути: $J_v > J_u$. Тоді

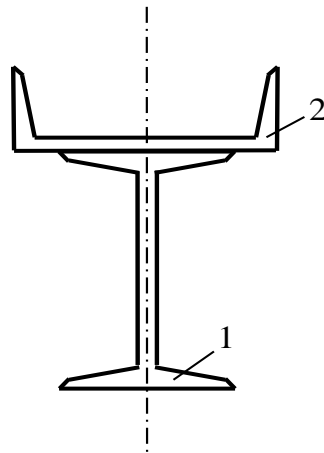
$$\begin{aligned} J_u &= \frac{J_{X_C} + J_{Y_C}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{X_C} - J_{Y_C}}{2}\right)^2 + J_{X_C Y_C}^2} = \\ &= \frac{99 + 159,75}{2} - \sqrt{\left(\frac{99 - 159,75}{2}\right)^2 + (-49,5)^2} = \\ &= 129,375 - \sqrt{922,641 + 2450,25} = \\ &= 129,375 - 58,077 = 71,298 \text{ см}^4; \\ J_v &= \frac{J_{X_C} + J_{Y_C}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{X_C} - J_{Y_C}}{2}\right)^2 + J_{X_C Y_C}^2} = \\ &= 129,375 + 58,077 = 187,452 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} J_v + J_u &= 71,298 + 187,452 = 258,75 \text{ см}^4; \\ J_{X_C} + J_{Y_C} &= 99 + 159,75 = 258,75 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Оскільки сума осьових моментів інерції незмінна, розрахунок виконано вірно.

Приклад 3.2. Визначити положення головних центральних осей і величини головних моментів інерції симетричного перерізу стрижня із стандартних профілів прокату (рис. 3.12).



1 – двотавр 20; 2 – швелер 18

Рисунок 3.12

Розв'язання

1. Застосувавши метод поділу на частини, позначаємо на схемі перерізу центри ваги двотавра і швелера – точки C_1 та C_2 . Для спрощення розрахунку початок вихідної системи координат x, y розміщуємо в точці C_1 , а вісь y суміщуємо з віссю симетрії перерізу (рис. 3.13).

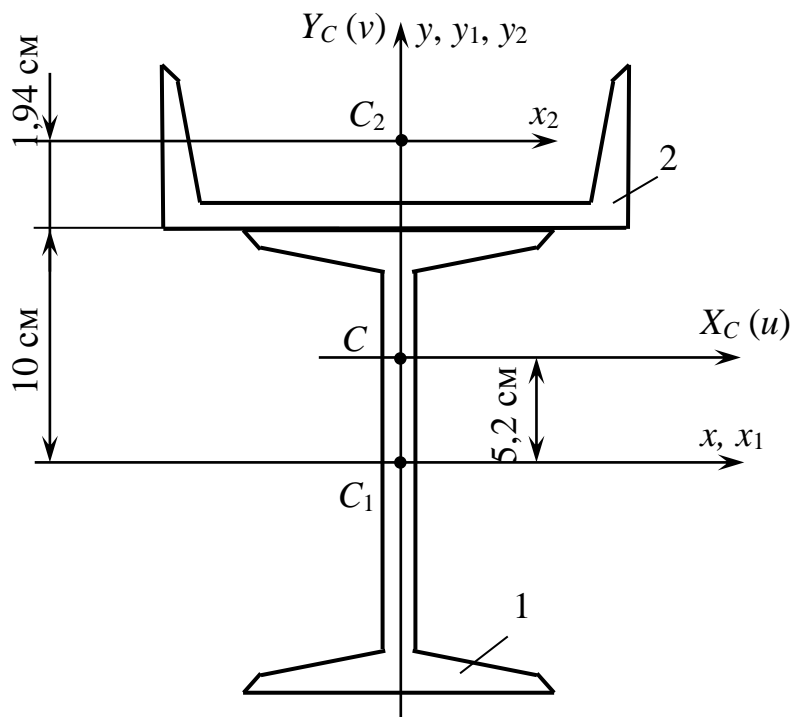


Рисунок 3.13

2. Визначаємо координати центра ваги всього перерізу – точки C , беручи необхідні дані з відповідних таблиць сортаменту (див. дод. А).

Оскільки переріз є симетричним відносно осі y , маємо: $x_C = 0$.
Значення y_C визначимо за формулою (3.8):

$$y_C = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2}{F_1 + F_2},$$

де $y_1 = 0$ – ордината точки C_1 ;
 $y_2 = 10 + 1,94 = 11,94$ см – ордината точки C_2 ;
 $F_1 = 26,8$ см² – площа двотавра;
 $F_2 = 20,7$ см² – площа швелера.

Підраховуємо:
$$y_C = \frac{0 \cdot 26,8 + 11,94 \cdot 20,7}{26,8 + 20,7} = 5,2 \text{ см.}$$

3. Позначаємо точку C на розрахунковій схемі перерізу (див. рис. 3.13) і проводимо через неї осі X_C і Y_C паралельно вихідним осям x, y .

4. Визначаємо за формулами (3.23) і (3.24) осьові моменти інерції перерізу відносно осей X_C і Y_C :

$$J_{X_C} = J_{x_1} + F_1 \cdot y_C^2 + J_{x_2} + F_2 \cdot (y_2 - y_C)^2,$$

$$J_{Y_C} = J_{y_1} + J_{y_2},$$

де x_1, y_1, x_2, y_2 – власні центральні осі двотавра і швелера (див. рис. 3.13);
 $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_2}, J_{y_2}$ – моменти інерції двотавра і швелера відносно своїх центральних осей (див. дод. А):

$$J_{x_1} = 1840 \text{ см}^4; \quad J_{y_1} = 115 \text{ см}^4; \quad J_{x_2} = 86 \text{ см}^4; \quad J_{y_2} = 1090 \text{ см}^4.$$

Підраховуємо :

$$J_{X_C} = 1840 + 26,8 \cdot 5,2^2 + 86 + 20,7 \cdot (11,94 - 5,2)^2 \approx 3591 \text{ см}^4;$$

$$J_{Y_C} = 115 + 1090 = 1205 \text{ см}^4.$$

5. Оскільки переріз має симетрію відносно осі Y_C , $J_{X_C Y_C} = 0$.

Тоді з виразу (3.34) виходить, що $\alpha_0 = 0$, тобто що головні центральні осі перерізу u і v співпадають з осями X_C і Y_C . Унаслідок цього остаточно маємо:

$$J_u = J_{X_C} = 3591 \text{ см}^4; \quad J_v = J_{Y_C} = 1205 \text{ см}^4.$$

Приклад 3.3. Визначити положення головних центральних осей і величини головних моментів інерції симетричного перерізу стрижня, виготовленого із смуг прямокутного перерізу 20×2 см (рис. 3.14).

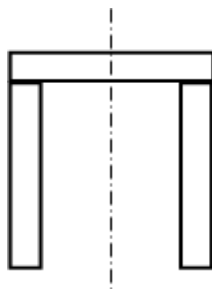


Рисунок 3.14

Розв'язання

1. Застосувавши метод поділу на частини, позначаємо на схемі всього перерізу центри ваги кожної із його частин – точки C_1 , C_2 , C_3 . Для спрощення розрахунку вісь y вихідної системи координат x, y суміщуємо з віссю симетрії перерізу, а вісь x проводимо через точки C_1 і C_2 (рис. 3.15).

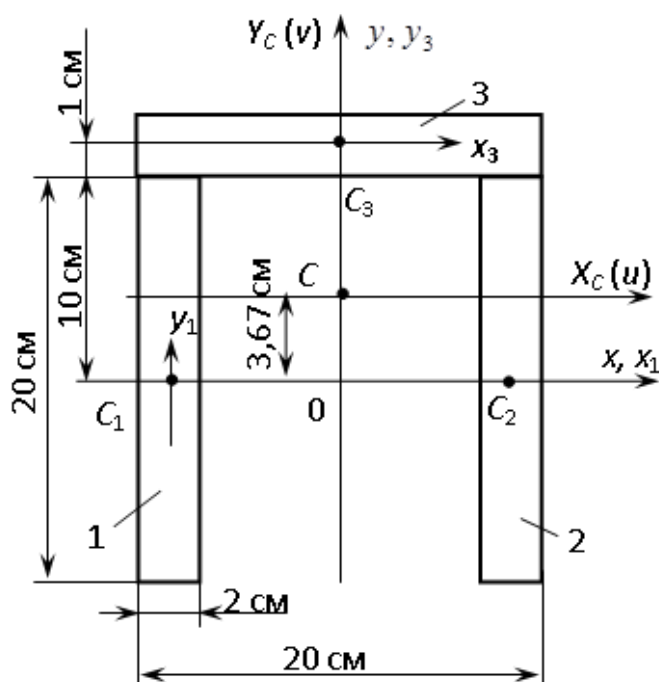


Рисунок 3.15

2. Визначаємо координати центру ваги всього перерізу – точки C . Оскільки переріз є симетричним відносно осі y (див. рис. 3.15), маємо: $x_C = 0$. Значення y_C визначимо за формулою (3.8)

$$y_C = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2 + y_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3},$$

де $y_1 = 0$ – ордината точки C_1 ;
 $y_2 = 0$ – ордината точки C_2 ;
 $y_3 = 10 + 1 = 11$ см – ордината точки C_3 ;
 $F_1 = F_2 = F_3 = 20 \times 2 = 40$ см² – площа перерізу кожної із смуг.

Підраховуємо:
$$y_C = \frac{0 \cdot 40 + 0 \cdot 40 + 11 \cdot 40}{40 + 40 + 40} = 3,67 \text{ см.}$$

3. Позначаємо точку C на розрахунковій схемі перерізу (див. рис. 3.15) і проводимо через неї осі X_C і Y_C паралельно вихідним осям x і y .

4. Визначаємо за формулами (3.23) і (3.24) осьові моменти інерції всього перерізу відносно осей X_C і Y_C :

$$J_{X_C} = [J_{x_1} + F_1 \cdot (y_C)^2] \cdot 2 + J_{x_3} + F_3 \cdot (y_3 - y_C)^2,$$

$$J_{Y_C} = [J_{y_1} + F_1 \cdot (x_{C_1})^2] \cdot 2 + J_{y_3},$$

де x_1, y_1, x_3, y_3 , – власні центральні осі перерізів смуг 1 і 3 (див. рис. 3.15);

$x_{C_1} = -9$ см – абсциса точки C_1 ;

$J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_3}, J_{y_3}$ – моменти інерції перерізів смуг 1 і 3 відносно своїх центральних осей (див. формули (3.18)):

$$J_{x_1} = J_{y_3} = \frac{2 \cdot 20^3}{12} = 1333,33 \text{ см}^4; \quad J_{y_1} = J_{x_3} = \frac{20 \cdot 2^3}{12} = 13,33 \text{ см}^4.$$

Підраховуємо:

$$J_{X_C} = [1333,33 + 40 \cdot 3,67^2] \cdot 2 + 13,33 + 40 \cdot (11 - 3,67)^2 \approx 5907 \text{ см}^4;$$

$$J_{Y_C} = [13,33 + 40 \cdot (-9)^2] \cdot 2 + 1333,33 \approx 7840 \text{ см}^4.$$

5. Оскільки переріз має симетрію відносно осі Y_C , $J_{X_C Y_C} = 0$.

Тоді з виразу (3.34) виходить, що $\alpha_0 = 0$, тобто що головні центральні осі перерізу u і v співпадають з осями X_C і Y_C . Унаслідок цього остаточно маємо:

$$J_u = J_{X_C} = 5907 \text{ см}^4; \quad J_v = J_{Y_C} = 7840 \text{ см}^4.$$

Приклад 3.4. Визначити положення головних центральних осей і величини головних моментів інерції симетричного перерізу стрижня з порожниною (рис. 3.16).

Розв'язання

1. Застосовуючи метод «від'ємних площ», позначаємо на схемі перерізу номери його частин: 1 – суцільного прямокутника і 2 – порожнини у вигляді круглого отвору. Позначаємо також центри ваги цих частин – точки C_1 та C_2 . Для спрощення розрахунку початок вихідної системи координат x, y розміщуємо в точці C_1 , а вісь y суміщуємо з віссю симетрії перерізу.

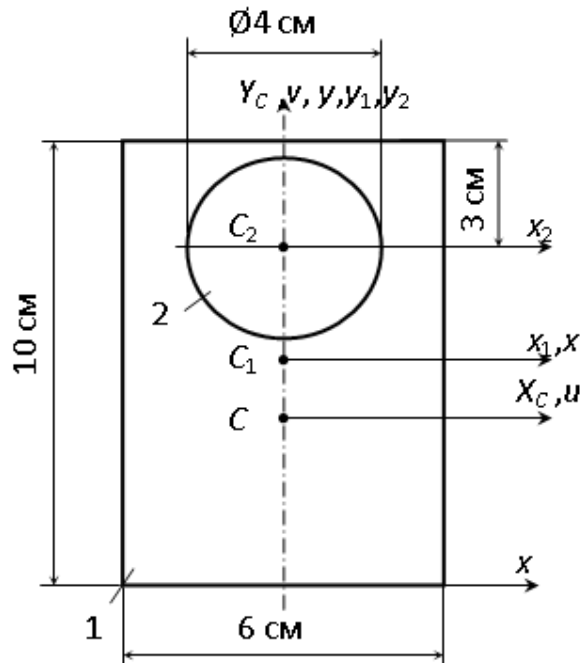


Рисунок 3.16

Розв'язання

1. Застосовуючи метод «від'ємних площ», позначаємо на схемі перерізу номери його частин: 1 – суцільного прямокутника і 2 – порожнини у вигляді круглого отвору. Позначаємо також центри ваги цих частин – точки C_1 та C_2 . Для спрощення розрахунку початок вихідної системи координат x, y розміщуємо в точці C_1 , а вісь y суміщуємо з віссю симетрії перерізу.

2. Визначаємо координати центра ваги всього перерізу – точки C . Оскільки переріз є симетричним відносно осі y , маємо: $x_C = 0$. Значення y_C визначимо за формулою (3.8)

$$y_C = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2}{F_1 + F_2},$$

де $F_1 = 10 \cdot 6 = 60 \text{ см}^2$ – площа прямокутника без отвору;

F_2 – «від'ємна» площа отвору діаметром 4 см,

$$F_2 = -\frac{\pi \cdot 4^2}{4} = -12,566 \text{ см}^2;$$

y_1 і y_2 – вертикальні координати точок C_1 і C_2 ,

$$y_1 = \frac{10}{2} = 5 \text{ см}; \quad y_2 = 10 - 3 = 7 \text{ см}.$$

Підраховуємо:
$$y_C = \frac{60 \cdot 5 + (-12,566) \cdot 7}{60 + (-12,566)} = \frac{212,038}{47,434} = 4,470 \text{ см}.$$

3. Позначаємо точку C на розрахунковій схемі перерізу (див. рис. 3.16) і проводимо через неї осі X_C і Y_C паралельно вихідним осям x, y .

4. Визначаємо за формулами (3.23) і (3.24) осьові моменти інерції перерізу відносно осей X_C і Y_C :

$$J_{X_C} = J_{x_1} + F_1 \cdot (C_1 C)^2 + J_{x_2} + F_2 \cdot (C_2 C)^2,$$

$$J_{Y_C} = J_{y_1} + J_{y_2},$$

де J_{x_1} , J_{x_2} , J_{y_1} , J_{y_2} – моменти інерції частин перерізу відносно своїх центральних осей (див. формули (3.18), (3.19)):

$$J_{x_1} = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 10^3 = 500 \text{ см}^4; \quad J_{x_2} = -\frac{\pi \cdot 4^4}{64} = -12,566 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 6^3 = 180 \text{ см}^4; \quad J_{y_2} = J_{x_2} = -12,566 \text{ см}^4;$$

$$C_1 C = y_1 - y_C = 5 - 4,470 = 0,53 \text{ см};$$

$$C_2 C = y_2 - y_C = 7 - 4,470 = 2,53 \text{ см};$$

З урахуванням цих числових даних маємо:

$$J_{X_C} = 500 + 60 \cdot 0,53^2 + (-12,566) + (-12,566) \cdot 2,53^2 =$$

$$= 500 + 16,854 - 12,566 - 80,434 \approx 424 \text{ см}^4;$$

$$J_{Y_C} = 180 + (-12,566) \approx 167 \text{ см}^4.$$

5. Оскільки переріз має симетрію відносно осі Y_C , $J_{X_C Y_C} = 0$.

Тоді з виразу (3.34) виходить, що $\alpha_0 = 0$, тобто що головні центральні осі перерізу u і v співпадають з осями X_C і Y_C . Унаслідок цього остаточно маємо:

$$J_u = J_{X_C} = 424 \text{ см}^4; \quad J_v = J_{Y_C} = 167 \text{ см}^4.$$

4 ЕПЮРИ ПРИ ПЛОСКОМУ ЗГИНАННІ

4.1 Плоске згинання, його різновиди і об'єкти. Внутрішні силові фактори, їхні епюри і правила знаків

Під згинанням (або згином) розуміють такий вид навантаження стрижня, при якому в його поперечних перерізах виникають згинальні моменти.

Згинання буває плоским і просторовим (складним).

При плоскому згинанні всі сили, що діють на стрижень, лежать в одній площині, яка проходить через одну з головних центральних осей перерізу – u або v (див. підрозд. 3.5). Це ствердження буде детально обґрунтоване в підрозділі 6.1.

На відміну від плоского, при просторовому згинанні зовнішні навантаження лежать у різних площинах, що проходять через подовжню вісь стрижня (z). До просторового відносять також так зване косе згинання, при якому всі зовнішні навантаження діють в одній площині, котра проходить через вісь z , але не співпадає ні з однією з головних центральних осей перерізу. Складні згинання зазвичай розглядають як комбінацію двох плоских згинань у площинах uz і vz .

Надалі буде розглядатись лише плоске згинання, при якому площина дії всіх сил, прикладених до стрижня (так звана силова площина), буде позначатись uz і вважатись вертикальною. У цьому разі в поперечних перерізах стрижня діятимуть згинальні моменти M_x , а разом з ними (що не є обов'язковим) і поперечні сили Q_y (рис. 4.1), які для спрощення будуть позначатись просто M і Q .

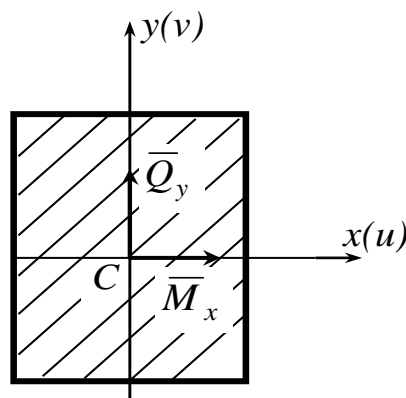


Рисунок 4.1

У випадку, коли в перерізах стрижня діють обидва з зазначених силових факторів, плоске згинання називають *поперечним*, а коли тільки один згинальний момент – *чистим*.

При плоскому згинанні величини M і Q можуть змінюватись за довжиною стрижня. *Графічні зображення законів таких змін зветься епюрами зазначених факторів.*

Побудова епюр M і Q є важливим етапом розрахунків на міцність балок і плоских рам, які працюють в умовах плоского згинання. Ці епюри дозволяють встановити небезпечні (найбільше навантажені) перерізи згаданих об'єктів. Крім того, вони є обов'язковими і в розрахунках на жорсткість.

Тут слід зауважити, що плоскі рами до об'єктів плоского згинання відносяться умовно, бо в деяких із їх стрижнів окрім M і Q додатково виникають ще подовжні сили N , якими в зазначених розрахунках зазвичай нехтують, оскільки їхній вплив на міцність і жорсткість є незначним.

З балками і плоскими рамами студенти вже працювали в курсі теоретичної механіки при засвоєнні прийомів визначення опорних реакцій. Тож, вони мають певні уяви про ці об'єкти. Додамо до них ще декілька важливих доповнень.

В опорі матеріалів *балками називають прямі стрижні, які сприймають поперечні навантаження і працюють на згинання.*

Статично визначувані балки (тобто такі, у яких кількість опорних реакцій не перевищує кількості рівнянь статичної рівноваги) бувають двох видів – одноопорні (рис. 4.2, а) і двоопорні (рис. 4.2, б).

Ділянки балок, які виступають за опори, називають консолями, а ті, що лежать між опорами, – прогонами.

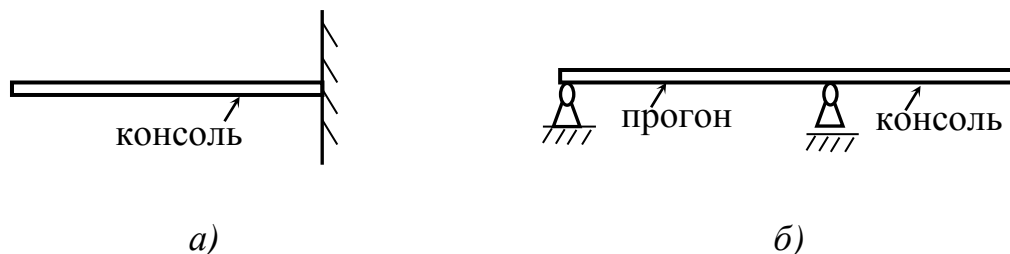


Рисунок 4.2

Оскільки одноопорна балка вся виступає за опору (див. рис. 4.2, а), вона зветься *консольною*. Її опору називають *жорстким кріпленням, защемленням або затисненням*.

Двоопорні балки мають різні комбінації опор. Найчастіше одна з опор – шарнірна нерухома (див. ліву опору на рис. 4.2, б), друга – шарнірна рухома (див. праву опору на рис. 4.2, б). Така комбінація опор дозволяє зафіксувати положення балки на фундаменті і запобігти можливому руйнуванню фундаменту і самої балки від температурних змін. Аналогами шарнірної нерухомої опори є опори у вигляді пари двоопорних невагомих стрижнів (рис. 4.3, а, б), а шарнірної рухомої – у вигляді одного такого стрижня (рис. 4.3, в, г).

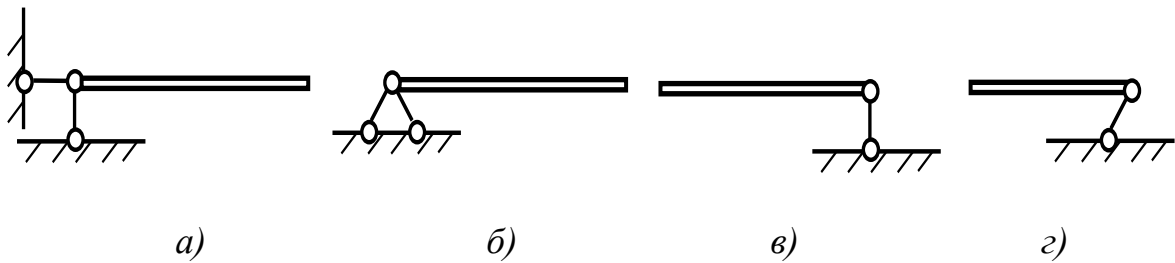


Рисунок 4.3

У загальному випадку на балку можуть діяти як поперечні, так і подовжні навантаження. У цьому разі реакції шарнірної нерухомої опори і її аналогів будуть мати вертикальні й горизонтальні складові (рис. 4.4. а), а жорсткого защемлення – складатися із двох сил і реактивного моменту (рис. 4.4, б). Реакції ж шарнірної рухомої опори і її аналогів завжди складаються із однієї сили (рис. 4.4, в, г, д).

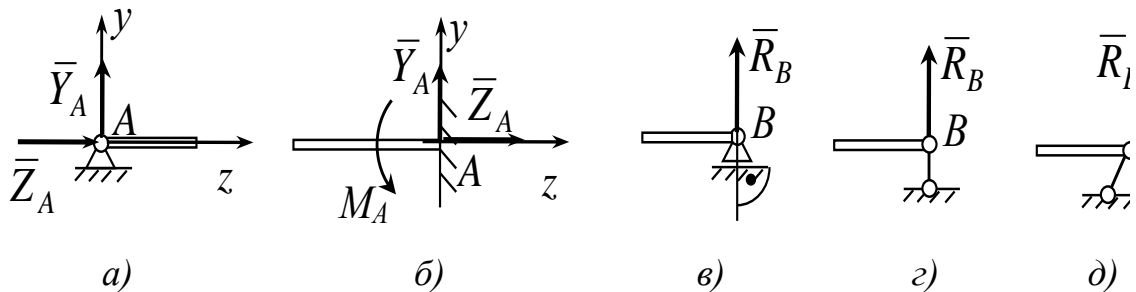


Рисунок 4.4

В опорі матеріалів, як правило, розглядаються балки з поперечним (вертикальним) навантаженням у вигляді зосереджених сил – P , моментів пар сил – M і розподілених навантажень з постійною інтенсивністю q . Приклади таких балок зображені на рисунку 4.5.

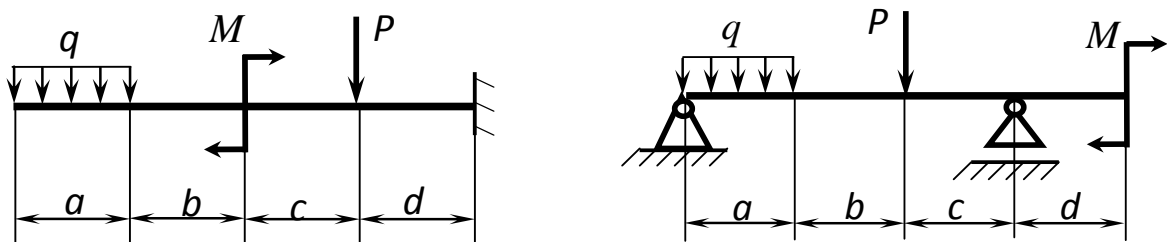


Рисунок 4.5

У всіх зазначених балках подовжні навантаження відсутні. Через це горизонтальні складові реакцій шарнірних нерухомих опор (див. рис. 4.4, а), як і жорстких кріплень (див. рис. 4.4, б), дорівнюють нулю. Саме такі балки будуть розглядатись надалі. У всіх із них – по дві невідомі реакції, для визначення яких треба скласти і розв'язати 2 незалежних рівняння статичної рівноваги.

На відміну від балок *плоскі рами складаються з декількох прямих стрижнів, жорстко (тобто не шарнірно) скріплених між собою і розташованих у одній площині з навантаженням*. Вертикальні стрижні рам називають *стійками*, а горизонтальні – *ригелями*.

Статично визначувані плоскі рами бувають одно-, дво-, або триопорними.

Варіанти опор в одноопорних (консольних) і двоопорних плоских рамах (рис. 4.6) – такі ж, як і у відповідних статично визначуваних балок (див. рис. 4.5).

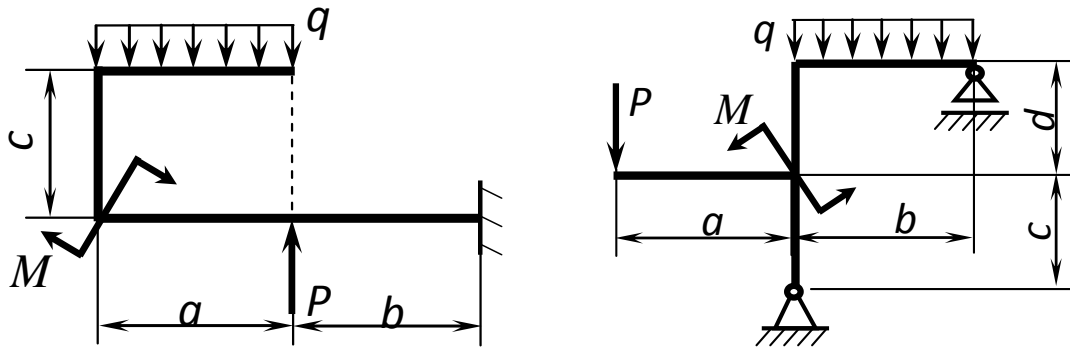


Рисунок 4.6

У триопорних плоских рамах у ряді випадків замість шарнірних нерухомих опор встановлюють по два не пов'язаних між собою опорних стрижня (див. рис. 4.3, а, б). Третя опора у цих рамах – шарнірна рухома (див. рис. 4.4, в) або ще один опорний стрижень (див. рис. 4.4, г, д).

У всіх означених варіантах статично визначуваних плоских рамах – по 3 опорні реакції. Для їх визначення достатньо скласти і розв'язати 3 незалежних рівняння статичної рівноваги.

При побудові епюри будь-якого внутрішнього силового фактора його значення відкладаються від базової (нульової) лінії в той чи інший бік залежно від напрямку його дії в кожному з перерізів стрижня. Щоб відрізнити ці напрямки, для кожного з факторів вводять відповідне правило знаків.

Поперечні сили в перерізах балок вважаються додатними, якщо вони намагаються обернути обидві частини розсіченої балки за ходом стрілок годинника, а від'ємними – коли вони намагаються створити такий поворот у протилежному напрямку.

Згинальні моменти в перерізах балок вважаються додатними, якщо вони стискають волокна у верхній (у відношенні до осі z) половині балки, а від'ємними – при стисканні волокон у нижній.

Як вже відмічалось, в плоских рамах на відміну від балок виникають 3 внутрішніх силових фактора – подовжня сила N , поперечна сила Q і згинальний момент M .

Правило знаків для N у перерізах плоских рам – подібне прийнятому для окремих стрижнів при розтяганні – стисканні: *подовжня сила вважається додатною при розтяганні стрижня, по котрому проходить переріз (тобто при спрямуванні N від перерізу), і від'ємною – при стисканні цього стрижня (тобто при спрямуванні N у бік перерізу).*

Правило знаків для Q у перерізах рам – подібне встановленому для балок: *тут додатними вважаються ті із поперечних сил, що намагаються обертати обидві частини розсіченої рами за ходом стрілок годинника, а від'ємними – котрі намагаються створити такий поворот у протилежному напрямку.*

Загально ж визнаного **правила знаків для M у перерізах рам не існує**, тому при побудові відповідних епюр визначають їх величини (модулі) і напрямки дії, використовуючи різні методичні підходи, часом не дуже зрозумілі для студентів. В опорі матеріалів загально прийнятим є лише те, що значення M на епюрах для рам завжди відкладаються з боку стиснутих волокон.

Надалі пропонується новий, достатньо простий і зрозумілий методичний підхід у визначенні величин і напрямків згинальних моментів у перерізах плоских рам. Він базується на загальновідомому з теоретичної механіки понятті алгебраїчних моментів, введеному для плоских систем сил. Це поняття означає взятий зі знаком «плюс» або «мінус» добуток модуля сили на її плече відносно конкретної точки (центра моменту).

Алгебраїчний момент пари сил є сумою алгебраїчних моментів сил пари відносно довільної точки тіла, до якого пара прикладена. Ця сума однакова для всіх точок тіла і дорівнює взятому з тим чи іншим знаком добутку модуля однієї із сил пари на її плече.

Алгебраїчні моменти зображують на схемах у вигляді дугових стрілок, що вказують напрямки повороту тіла під дією окремих сил чи їх пар. *Прийнято вважати алгебраїчні моменти додатними (це – класичне правило знаків), коли напрямок їх дії є протилежним напрямку ходу стрілок годинника. В іншому разі вони вважаються від'ємними.*

Якщо вважати згинальні моменти алгебраїчними, їх модулі й напрямки дії в плоских рамах можна легко визначити за таким правилом, яке витікає з методу перерізів: *алгебраїчне значення згинального моменту в довільному перерізі рами дорівнює взятій зі знаком «мінус» сумі алгебраїчних моментів відносно центра ваги перерізу від дії зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини рами.*

Застосування запропонованого правила проілюструємо таким прикладом.

Приклад 4.1. Визначити і зобразити алгебраїчні значення згинальних моментів, що діють у позначених перерізах рами (рис. 4.7).

Розв'язання

1. Визначаємо алгебраїчні значення згинальних моментів у позначених перерізах рами (див. рис. 4.7):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = M_4 = -(-q \cdot 3 \cdot 1,5) = +45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = -(-q \cdot 3 \cdot 1,5 - M) = -(-45 - 12) = +57 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = -(+q \cdot 3 \cdot 1,5 - M) = -(+45 - 12) = -33 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_7 = -(+q \cdot 3 \cdot 1,5 - M - P \cdot 0) = -(+45 - 12 - 0) = -33 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_8 = -(+q \cdot 3 \cdot 4,5 - M - P \cdot 3) = -(+135 - 12 - 60) = -63 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

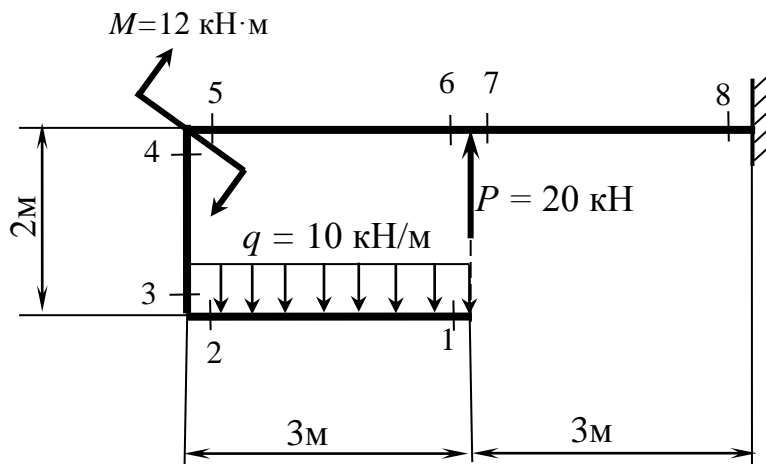


Рисунок 4.7

2. Зображуємо отримані результати (рис. 4.8). Звертаємо увагу на дугові стрілки: всі вони вказують, з якого боку від бази треба відкладати на епюрі модулі відповідних згинальних моментів.

Слід зауважити, що запропонований підхід повною мірою може бути застосованим і при побудові епюр згинальних моментів у балок. Так, наприклад, у перерізі 8 балки, яка зображена на рисунку 4.9, алгебраїчне значення згинального моменту згідно з цим підходом становить

$$M_8 = -(-M + P_1 \cdot 4 + q \cdot 1 \cdot 2,5 - P_2 \cdot 1) = \\ -(-10 + 12 \cdot 4 + 16 \cdot 1 \cdot 2,5 - 20 \cdot 1) = -58 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначене значення слід відкладати на епюрі M униз від бази, тобто в бік, куди вказує його дугова стрілка і де розташовані стиснуті волокна (рис. 4.10).

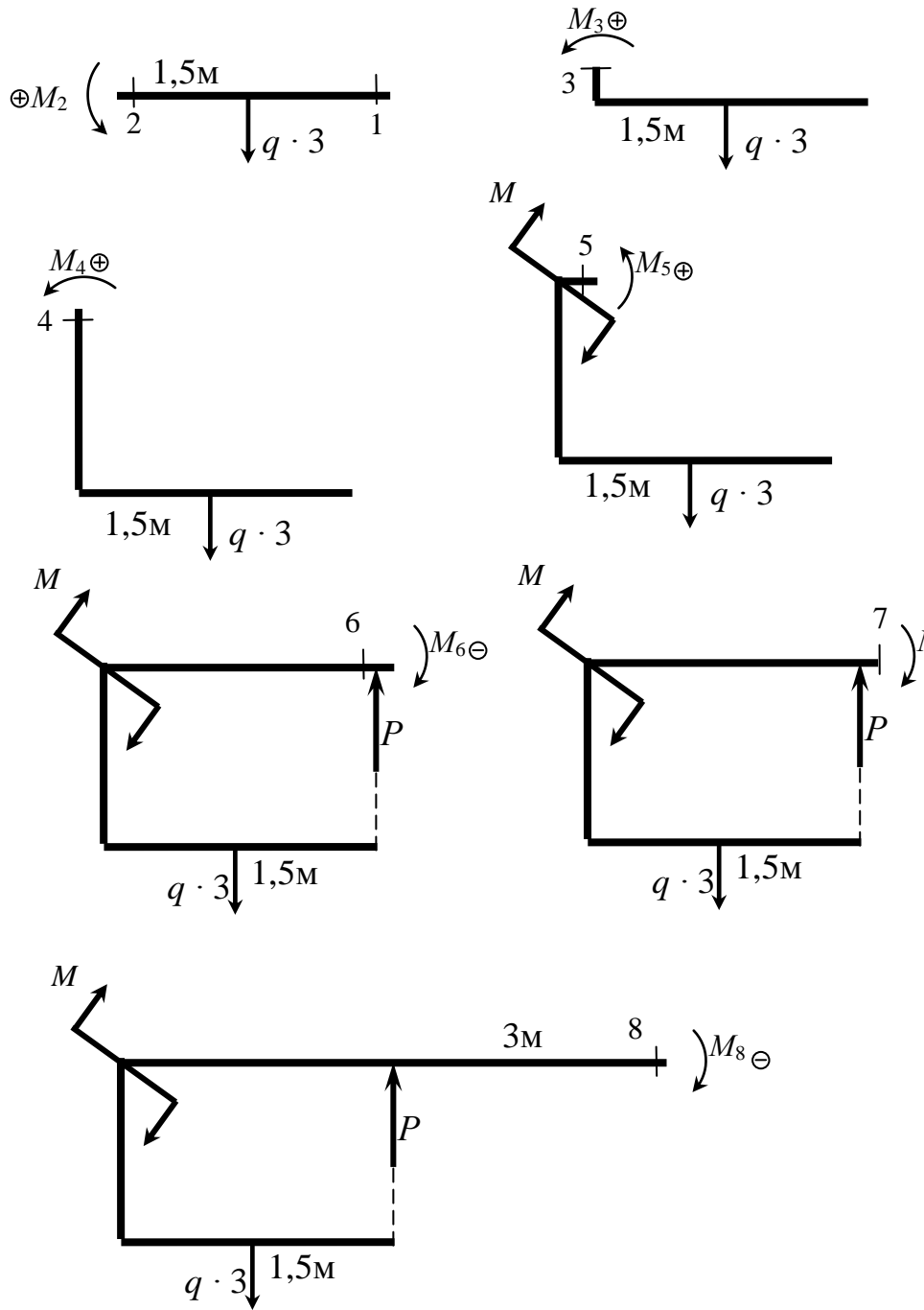


Рисунок 4.8

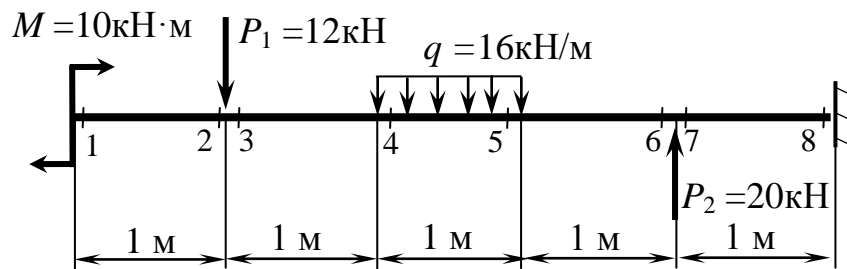


Рисунок 4.9

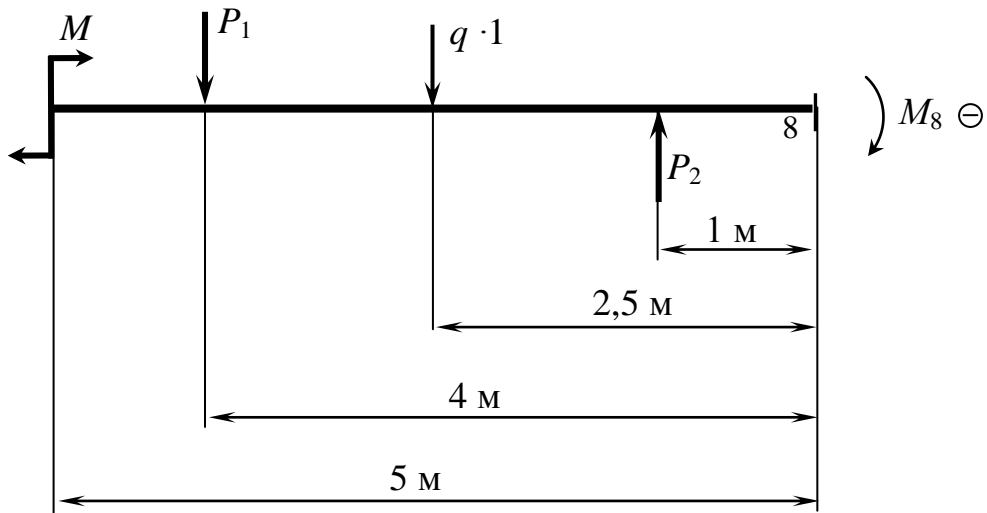


Рисунок 4.10

4.2 Диференціальні залежності при згинанні

При побудові епюр внутрішніх силових факторів балок і плоских рам широко застосовуються так звані диференціальні залежності при згинанні, які встановлюють зв'язок між інтенсивністю розподіленого навантаження q , поперечною силою Q і згинальним моментом M .

Щоб отримати ці залежності, розглянемо балку з розподіленим навантаженням довільної інтенсивності $q = q(z)$ (рис. 4.11). При цьому зображений напрямок q вважатимемо додатним.

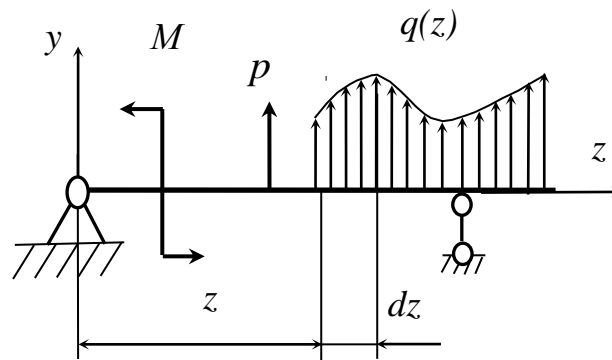


Рисунок 4.11

Виділимо на ділянці, де немає зосереджених сил і моментів, малий відрізок O_1O_2 довжиною dz (рис. 4.12). Він знаходиться в рівновазі під дією зовнішнього навантаження, а також поперечних сил і згинальних моментів, прикладених у перерізах O_1 і O_2 .

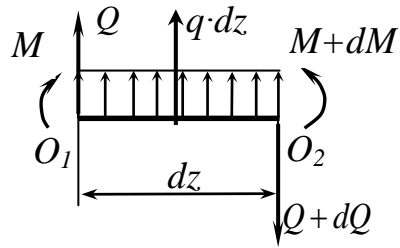


Рисунок 4.12

Оскільки в загальному випадку внутрішні зусилля змінюються уздовж осі балки, то в перерізі O_1 візьмемо їх рівними Q і M , а в перерізі O_2 декілька більшими: $Q+dQ$, $M+dM$. Внутрішні зусилля з урахуванням раніше наведених правил знаків (див. підрозд. 4.1) зобразимо як додатні. У межах малого відрізка dz вважатимемо інтенсивність розподіленого навантаження q постійною. Складемо рівняння рівноваги елемента dz :

$$\sum P_y = Q + q \cdot dz - (Q + dQ) = 0; \quad (4.1)$$

$$\sum m_{O_2} = -Q \cdot dz - M - q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} + (M + dM) = 0. \quad (4.2)$$

З рівняння (4.1) одержимо:

$$q = \frac{dQ}{dz}. \quad (4.3)$$

З рівняння (4.2), нехтуючи членом $q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2}$ як величиною другого порядку малості, знайдемо:

$$Q = \frac{dM}{dz}. \quad (4.4)$$

Підставивши (4.4) в (4.3), одержимо:

$$q = \frac{d^2 M}{dz^2}. \quad (4.5)$$

Таким чином, інтенсивність розподіленого навантаження q є першою похідною за довжиною балки від поперечної сили Q і другою похідною від згинального моменту M . Поперечна ж сила Q є першою похідною за довжиною балки від згинального моменту M .

Із залежностей (4.3)...(4.5) можна зробити деякі загальні висновки про характер епюр Q і M .

У випадку, коли на ділянці балки розподілене навантаження відсутнє ($q=0$), згідно з формулами (4.3) і (4.4) одержуємо:

$$Q = \text{const} = C_1, \quad M = C_1 \cdot z + C_2.$$

Отже, на ділянках без розподіленого навантаження епюри Q є прямими, паралельними базовій лінії, а епюри M – прямими, тангенс кутів нахилу яких до осі z дорівнюють Q (рис. 4.13).

Якщо на ділянці $Q > 0$ ($\text{tg } \alpha > 0$), то епюра M зростає при побудові її уздовж позитивного напрямку осі z (рис. 4.13, а). Якщо ж $Q < 0$ ($\text{tg } \alpha < 0$), то епюра моментів M убуває (рис. 4.13, б).

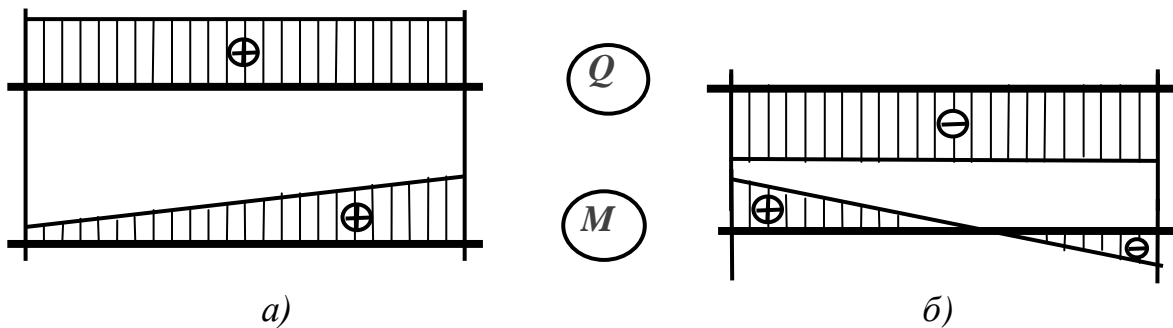


Рисунок 4.13

На ділянці, де діє рівномірно розподілене навантаження $q = \text{const} = C < 0$ (рис. 4.14,а), епюра Q згідно з (4.3) є похилою прямою

$$Q = C \cdot z + C_1,$$

а епюра згинальних моментів, згідно з (4.5), – квадратичною параболою

$$M = C \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 \cdot z + C_2,$$

опуклість якої спрямована назустріч дії розподіленого навантаження (за так званим правилом «парасольки»).

Коли ж $q = \text{const} = C > 0$, характер обох епюр змінюється на протилежний (рис. 4.14, б).

У перерізах, де епюра Q перетинає базу, значення M – екстремальні, тобто є максимальними (рис. 4.14, а), або мінімальними (рис. 4.14, б).

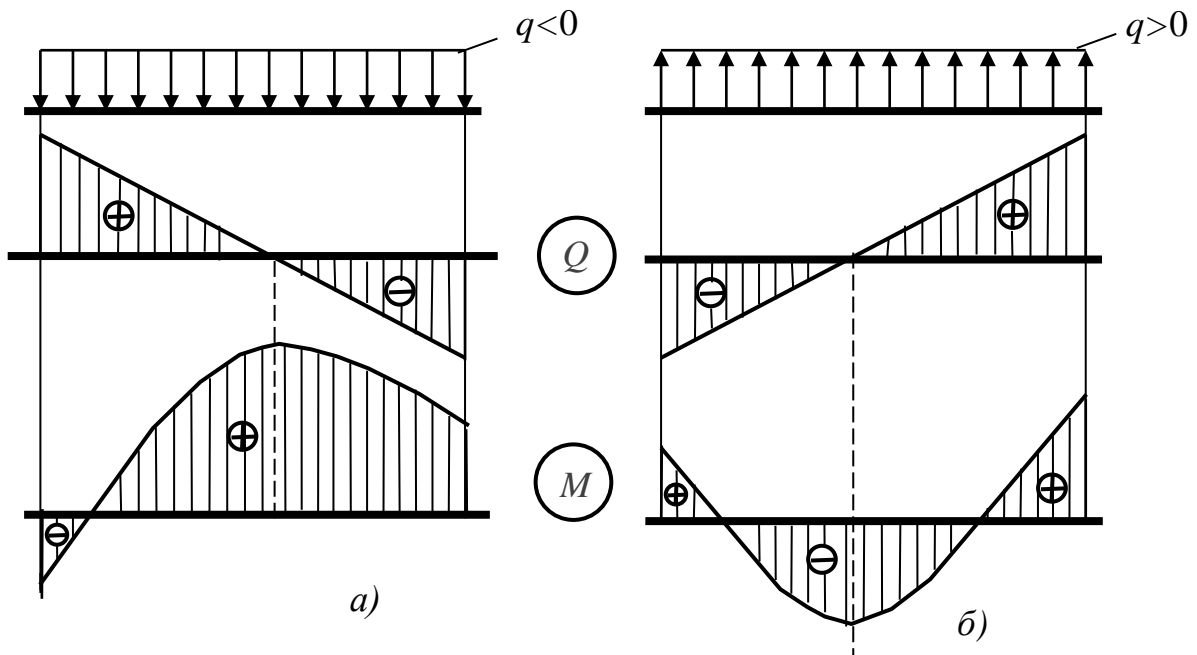


Рисунок 4.14

При побудові зазначених епюр слід звернути увагу на їх особливості в місцях прикладання до балки зосереджених сил і моментів.

У перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили (рис. 4.15), на епюрі Q повинні бути стрибки на величину цих сил, причому в разі її побудови зліва направо напрямки стрибків повинні співпадати з напрямками зосереджених сил. На епюрі ж M повинні бути злами, вістря яких спрямовані проти напрямків зосереджених сил.

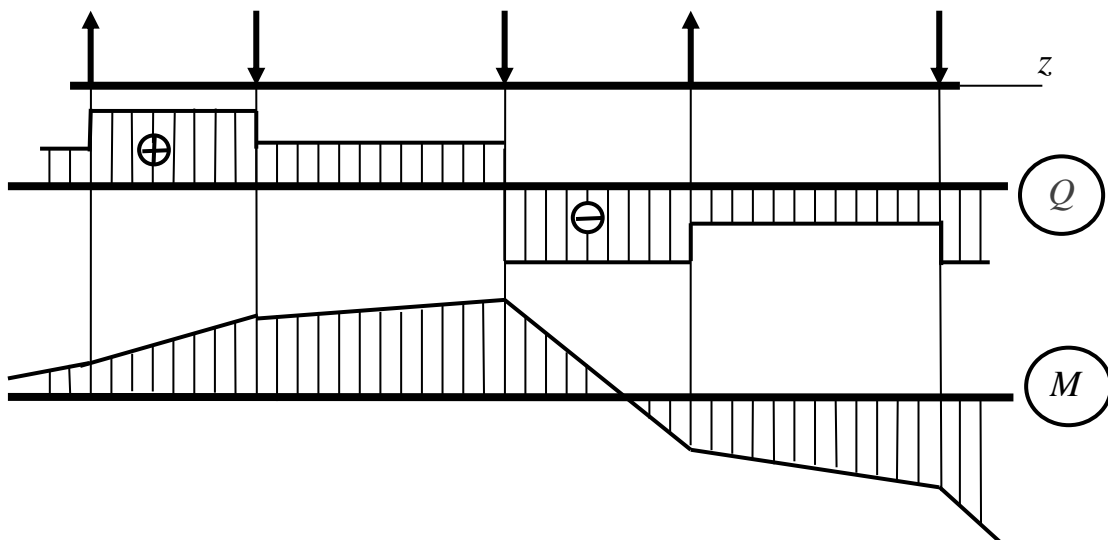


Рисунок 4.15

У перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти (рис. 4.16), на епюрі M повинні бути стрибки відповідних напрямків на величини цих моментів, а на епюрі Q це ніяк не повинно позначитись. У разі, коли епюра

M прямолінійна, її лінії до і після стрибка повинні бути паралельними, якщо в одному перерізі з моментом не прикладена сила, котра викликає злам і порушує паралельність.

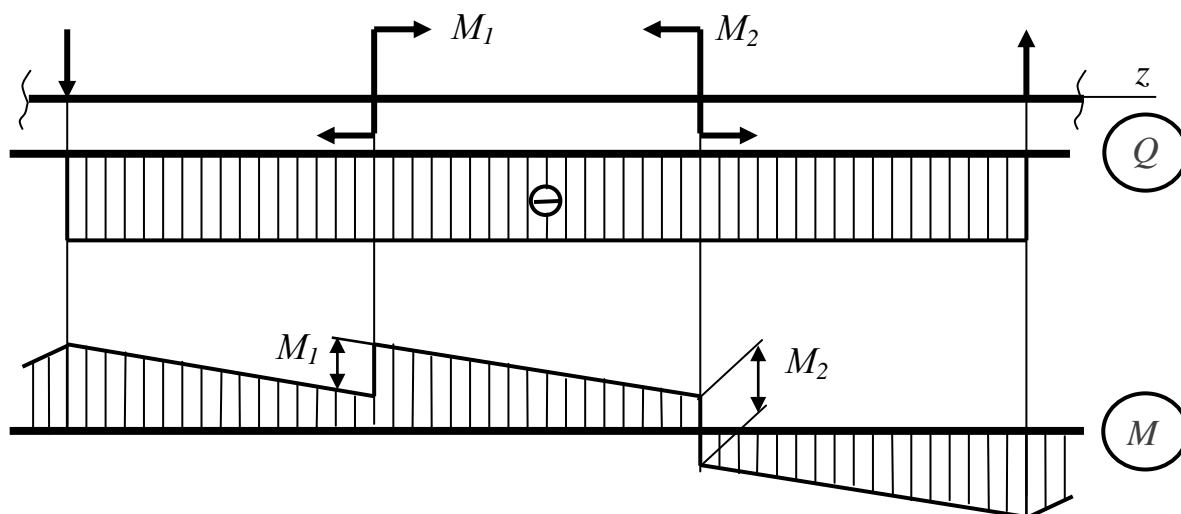


Рисунок 4.16

4.3 Побудова епюр для балок

В інженерній практиці епюри внутрішніх силових факторів балок і плоских рам будують, як правило, за так званими характерними перерізами.

У балках до характерних відносять перерізи, які розташовані в безпосередній близькості до діючих на балку зосереджених сил і моментів, також перерізи на початку і в кінці ділянок з розподіленими навантаженнями.

Правила визначення Q і M у кожному із характерних перерізів балки базуються на методі перерізів (підрозд. 1.1), правилах знаків означених факторів (підрозд. 4.1) і диференціальних залежностях при згинанні (підрозд. 4.2). Сформулюємо ці правила таким чином.

Поперечна сила в кожному із характерних перерізів балки дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини балки, причому ті із сил, що намагаються обернути залишену частину за ходом стрілок годинника, беруться зі знаком плюс, а інші – зі знаком мінус.

Згинальний момент у кожному із характерних перерізів балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центра ваги перерізу від зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини балки, причому ті із моментів, що стискають волокна у її верхній половині, беруться зі знаком «плюс», а інші – зі знаком «мінус».

Побудова епюр обох зазначених силових факторів складається із таких послідовних дій:

1. Позначаються на схемі балки і нумеруються всі характерні перерізи.
2. Підраховуються згідно з наведеними вище правилами значення Q і M у кожному з характерних перерізів.
3. Зображуються в проєкційному зв'язку з балкою базові (нульові) лінії кожної із епюр.
4. Відкладаються від своїх базових ліній у вигляді окремих точок і з дотриманням певних масштабів визначені значення Q і M .
5. Проводяться через відкладені точки безперервні лінії, характер яких витікає із диференціальних залежностей при згинанні (див. підрозд. 4.2).
6. Позначаються на епюрах знаками «плюс» та «мінус» області з додатними і від'ємними значеннями Q і M .
7. Робляться позначення епюр літерами Q або M у супроводі з розмірностями відповідних величин.

Перевірка правильності побудованих епюр зводиться в основному до повторного підрахунку значень Q і M при русі у зворотному напрямку (наприклад, справа наліво, якщо епюри будувались зліва направо).

Перевіряються також лінії на обох епюрах на їх відповідність вище означеним нормам (див. підрозд. 4.2).

Приклад 4.2. Для консольної балки (рис. 4.17) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, виконати їх перевірку.

Розв'язання

1. На схемі балки зображаємо систему координат, помічаємо і нумеруємо характерні перерізи, рухаючись від вільного кінця до жорсткого кріплення (зліва направо). Такий напрямок руху є більш привабливим, бо не потребує попереднього визначення опорних реакцій. Що ж стосується останніх, то їх зображення на схемі балки не випадкове: вони будуть потрібні при перевірці.

2. Підраховуємо значення поперечних сил у кожному із характерних перерізів:

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = +q \cdot 2 = +20 \text{ кН}; \quad Q_3 = Q_4 = Q_2 - P = +20 - 24 = -4 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру Q (див. рис. 4.17).

3. Підраховуємо значення згинальних моментів у кожному з характерних перерізів:

$$M_1 = -M = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = M_3 = -M + q \cdot 2 \cdot 1 = -16 + 20 = +4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_4 = -M + q \cdot 2 \cdot 3 - P \cdot 2 = -16 + 60 - 48 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру M (див. рис. 4.17).

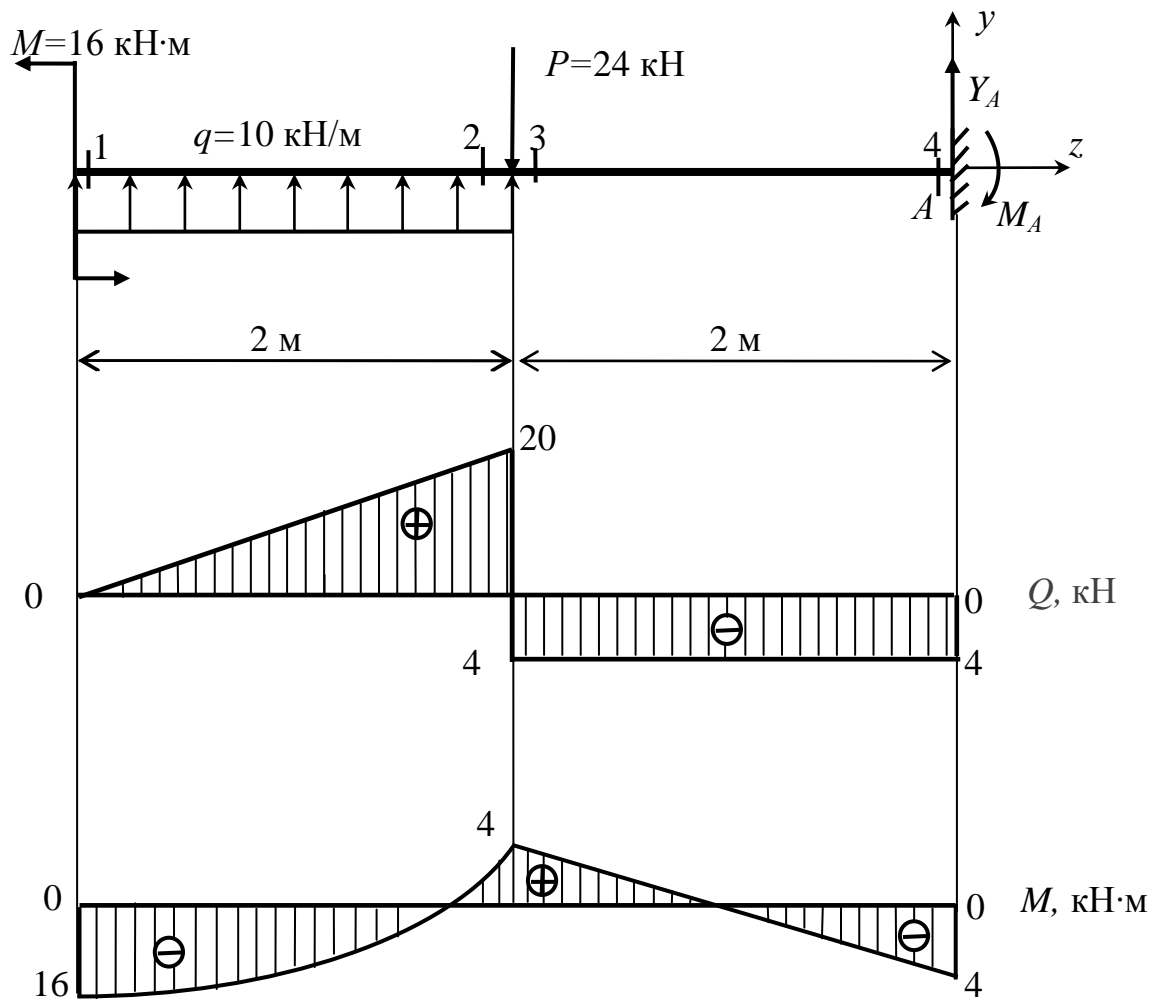


Рисунок 4.17

4. Обчислюємо опорні реакції балки і значення Q і M у кожному із її характерних перерізів, рухаючись у зворотному напрямку (справа наліво):

$$\sum P_y = q \cdot 2 - P + Y_A = 0, \quad (4.6)$$

$$\sum m_A = +M - q \cdot 2 \cdot 3 + P \cdot 2 - M_A = 0. \quad (4.7)$$

Із (4.6) отримуємо:

$$Y_A = -q \cdot 2 + P = -20 + 24 = +4 \text{ кН},$$

Із (4.7) маємо:

$$M_A = +M - q \cdot 2 \cdot 3 + P \cdot 2 = +16 - 60 + 48 = +4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знаки «плюс» у знайдених величин Y_A і M_A підтверджують напрямки цих величин, зображених на рисунку 4.17.

Значення Q при русі справа наліво:

$$Q_4 = Q_3 = -Y_A = -4 \text{ кН}; \quad Q_2 = Q_3 + P = -4 + 24 = +20 \text{ кН}; \\ Q_1 = Q_2 - q \cdot 2 = +20 - 10 \cdot 2 = 0.$$

Значення M при русі в цьому напрямку:

$$M_4 = -M_A = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_2 = M_4 + Y_A \cdot 2 = -4 + 4 \cdot 2 = +4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_1 = -M_A + Y_A \cdot 4 - P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 = -4 + 4 \cdot 4 - 24 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = \\ = -4 + 16 - 48 + 20 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Порівнюючи значення Q і M при прямому і зворотному напрямках руху, бачимо, що вони повністю збігаються. Лінії на обох побудованих епюрах відповідають усім вище означеним нормам (див. підрозд. 4.2). З цього робимо висновок про правильність виконаних побудов.

Приклад 4.3. Для двоопорної балки (рис. 4.18) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, виконати їх перевірку.

Розв'язання

1. На схемі балки зображаємо систему координат і опорні реакції, помічаємо і нумеруємо характерні перерізи, рухаючись зліва направо.
2. Обчислюємо опорні реакції балки:

$$\sum m_B = -R_A \cdot 6 + P \cdot 5 + q \cdot 2 \cdot 4 + M = 0, \quad (4.8)$$

$$\sum m_A = R_B \cdot 6 + M - q \cdot 2 \cdot 2 - P \cdot 1 = 0. \quad (4.9)$$

Із (4.8) отримуємо:

$$R_A = \frac{P \cdot 5 + q \cdot 2 \cdot 4 + M}{6} = \frac{30 \cdot 5 + 18 \cdot 2 \cdot 4 + 12}{6} = 51 \text{ кН}.$$

Із (4.9) маємо:

$$R_B = \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 2 + P \cdot 1}{6} = \frac{-12 + 18 \cdot 2 \cdot 2 + 30 \cdot 1}{6} = 15 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = R_A - P - q \cdot 2 + R_B = 51 - 30 - 18 \cdot 2 + 15 = 0.$$

Таким чином, реакції балки знайдені вірно.

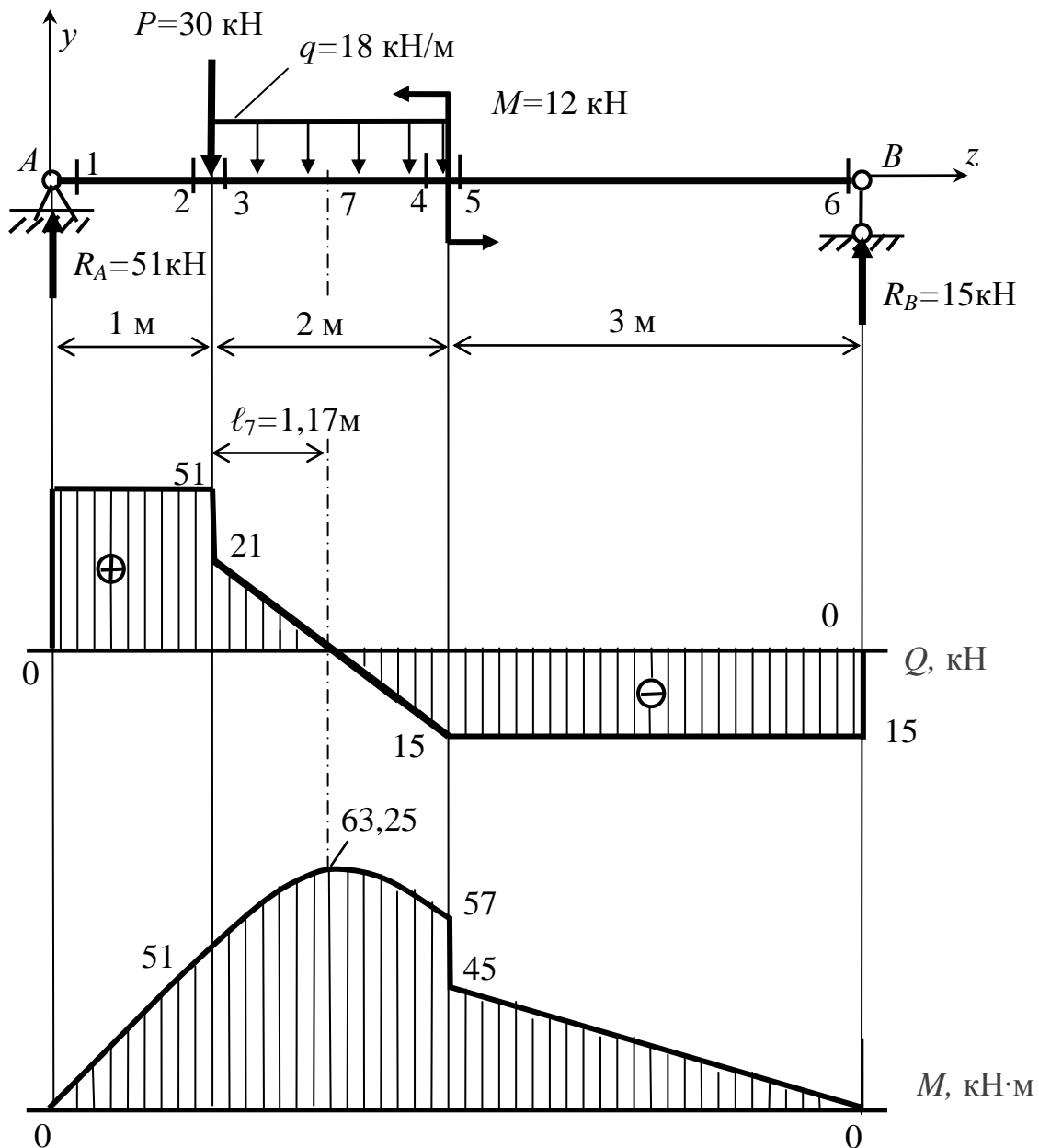


Рисунок 4.18

3. Підраховуємо значення поперечних сил у кожному із характерних перерізів:

$$Q_1 = Q_2 = +R_A = +51 \text{ кН}; \quad Q_3 = Q_2 - P = +51 - 30 = +21 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_3 - q \cdot 2 = +21 - 36 = -15 \text{ кН}.$$

4. Будуємо епюру Q (див. рис. 4.18). Бачимо, що на ділянці між перерізами 3 і 4 ця епюра перетинає базову лінію. Місце перетину позначимо як переріз 7, а його відстань від сили P – як ℓ_7 . У цьому перерізі на епюрі M буде максимум (див. підрозд. 4.2). Для визначення максимального значення згинального моменту необхідно попередньо визначити величину ℓ_7 . Знайдемо її із умови:

$$Q_7 = Q_3 - q \cdot \ell_7 = 0. \quad (4.10)$$

Із (4.10) маємо:

$$\ell_7 = \frac{Q_3}{q} = \frac{21}{18} = 1,17 \text{ м.}$$

5. Підраховуємо значення згинальних моментів у кожному із характерних перерізів:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = +R_A \cdot 1 = +51 \text{ кН} \cdot \text{ м};$$

$$M_4 = +R_A \cdot 3 - P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = +51 \cdot 3 - 30 \cdot 2 - 18 \cdot 2 \cdot 1 = +57 \text{ кН} \cdot \text{ м};$$

$$M_5 = M_4 - M = +57 - 12 = +45 \text{ кН} \cdot \text{ м}; \quad M_6 = 0;$$

$$\begin{aligned} M_7 &= +R_A \cdot (1 + \ell_7) - P \cdot \ell_7 - q \cdot \ell_7 \cdot 0,5 \cdot \ell_7 = \\ &= +51 \cdot 2,17 - 30 \cdot 1,17 - 18 \cdot 1,17 \cdot 0,5 \cdot 1,17 = + 63,25 \text{ кН} \cdot \text{ м.} \end{aligned}$$

Будуємо епюру M (див. рис. 4.18).

6. Для перевірки підраховуємо значення Q і M у кожному із характерних перерізів балки, рухаючись у зворотному напрямку (справа наліво):

$$Q_6 = Q_5 = Q_4 = -R_B = -15 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_4 + q \cdot 2 = -15 + 18 \cdot 2 = +21 \text{ кН};$$

$$Q_2 = Q_1 = Q_3 + P = +21 + 30 = +51 \text{ кН};$$

$$M_6 = 0; \quad M_5 = +R_B \cdot 3 = +15 \cdot 3 = + 45 \text{ кН} \cdot \text{ м};$$

$$M_4 = M_5 + M = +45 + 12 = + 57 \text{ кН} \cdot \text{ м};$$

$$M_3 = M_2 = +R_B \cdot 5 + M - q \cdot 2 \cdot 1 = + 15 \cdot 5 + 12 - 18 \cdot 2 \cdot 1 = +51 \text{ кН} \cdot \text{ м};$$

$$\begin{aligned} M_1 &= 0; \quad M_7 = +R_B \cdot [3 + (2 - \ell_7)] + M - q \cdot (2 - \ell_7) \cdot 0,5 \cdot (2 - \ell_7) = \\ &= + 15 \cdot 3,83 + 12 - 18 \cdot 0,83 \cdot 0,5 \cdot 0,83 = 63,25 \text{ кН} \cdot \text{ м} . \end{aligned}$$

Порівнюючи значення Q і M при прямому і зворотному напрямках руху, бачимо, що вони повністю збігаються. Лінії на обох побудованих епюрах відповідають усім вище означеним нормам (див. підрозд. 4.2). З цього робимо висновок про правильність виконаних побудов.

4.4 Побудова епюр для плоских рам

У перерізах плоских рам, як уже відмічалось (див. підрозд. 4.1), діють 3 силових фактори – подовжня сила N , поперечна сила Q і згинальний момент M . Тож, для рам будуються 3 відповідні епюри, проєкційно не зв'язані ні з рамою, ні між собою. Процедура побудови цих епюр багато в чому схожа з процедурою побудови епюр для балок (див. підрозд. 4.3), але і має від неї ряд суттєвих відмінностей, наведених нижче.

Епюри для рам, як і для балок, будуються за характерними перерізами. Однак у рам до характерних перерізів, означених для балок, відносяться також перерізи на початку і в кінці кожного зі стрижнів.

При побудові епюр для рам значення відповідних силових факторів відкладаються від так званого *каркасу рами*, тобто від з'єднаних між собою за аналогією зі стрижнями базових ліній кожного із її стрижнів.

Правила визначення подовжніх і поперечних сил у рамах базуються на методі перерізів (див. підрозд. 1.1) і прийнятих правилах знаків для N і Q (див. підрозд. 4.1). Ці правила формулюються таким чином.

Подовжня сила в кожному з характерних перерізів рами дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини рами і спрямованих уздовж стрижня, по якому проходить переріз, або паралельно йому, причому сили, спрямовані від перерізу, беруться зі знаком «плюс», а в бік перерізу – зі знаком «мінус».

Поперечна сила в кожному з характерних перерізів рами дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини рами і спрямованих перпендикулярно до стрижня, по якому проходить переріз, причому сили, які намагаються обертати залишену частину за ходом стрілок годинника, беруться зі знаком «плюс», а проти такого ходу – зі знаком «мінус».

Величини N і Q , визначені за цими правилами, відкладаються з будь-якого боку каркасу рами і позначаються знаками «плюс» або «мінус».

Правило визначення алгебраїчних значень згинальних моментів в перерізах плоских рам наведене в пункті 4.1. Модулі згинальних моментів, визначені за цим правилом, відкладаються на відповідних епюрах з боку стиснутих волокон, тобто з того боку каркасів рам, на які вказують дугові стрілки цих моментів.

У рам, на відміну від балок, при перевірці побудованих епюр основним критерієм їх правильності є виконання умов статичної рівноваги всіх вузлів рами (тобто місць з'єднання її стрижнів) як твердих тіл безкінечно малих розмірів.

Процедуру побудови епюр внутрішніх силових факторів для плоских рам проілюструємо такими прикладами.

Приклад 4.4. Для плоскої консольної рами (рис. 4.19) побудувати і перевірити епюри внутрішніх силових факторів, якщо : $q = 10 \text{ кН/м}$; $P = 12 \text{ кН}$; $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $a = 3 \text{ м}$; $b = 3 \text{ м}$; $c = 2 \text{ м}$; $d = 2 \text{ м}$.

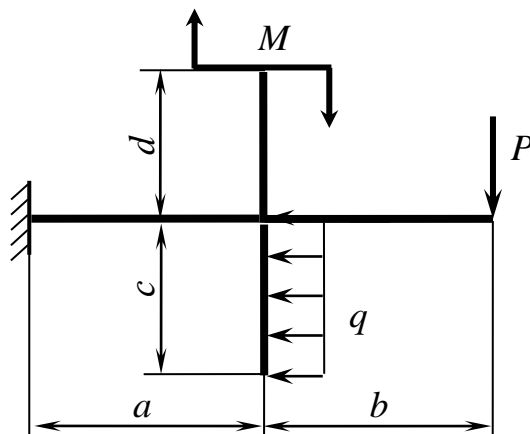


Рисунок 4.19

Розв'язання

1. Позначаємо характерні перерізи рами, рухаючись у напрямку від її вільних кінців до жорсткого кріплення: в цьому разі попереднє визначення опорних реакцій не потрібне (рис. 4.20, а).

2. Підраховуємо значення подовжніх сил у характерних перерізах рами:

$$N_1 = N_2 = 0; \quad N_3 = N_4 = -q \cdot 2 = -20 \text{ кН};$$

$$N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = 0.$$

Будуємо епюру N (рис. 4.20, б).

3. Підраховуємо значення поперечних сил у характерних перерізах рами:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = P = 12 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_7 = Q_8 = 0; \quad Q_6 = q \cdot 2 = 20 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру Q (рис. 4.20, в).

4. Підраховуємо алгебраїчні значення згинальних моментів у характерних перерізах рами:

$$M_1 = M_5 = 0; \quad M_2 = -(-P \cdot 3) = -(-12 \cdot 3) = 36 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = -(-M - P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1) = -(-8 - 12 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 1) = 64 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = -(-M - P \cdot 6 - q \cdot 2 \cdot 1) = -(-8 - 12 \cdot 6 - 10 \cdot 2 \cdot 1) = 100 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_6 = -(-q \cdot 2 \cdot 1) = -(-10 \cdot 2 \cdot 1) = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_7 = M_8 = -(-M) = -(-8) = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 4.20, г). Модулі M відкладаємо від баз з боку стиснутих волокон, тобто у відповідності до напрямків дугових стрілок алгебраїчних значень M (див. підрозд. 4.1).

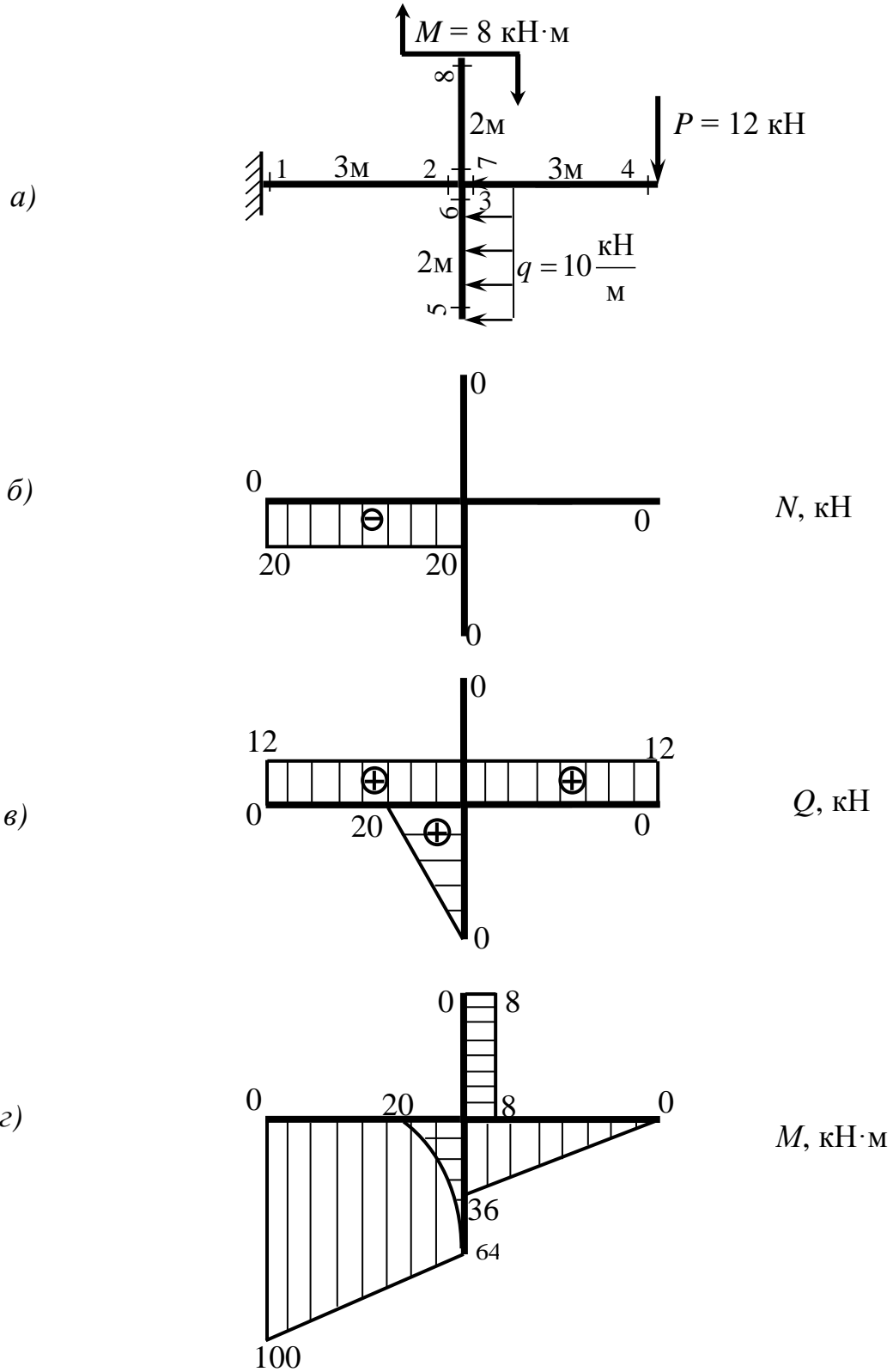


Рисунок 4.20

5. Виконуємо перевірку правильності побудованих епюр. Для цього вирізаємо з рами вузол, обмежений перерізами 2, 3, 6 і 8 (для короткості назвемо його вузол A), і прикладаємо до нього всі внутрішні силові фактори, що діють в означених перерізах (рис. 4.21). Напрямки цих факторів позначаємо стрілками у відповідності до їх знаків (див. підрозд. 4.1).

Як бачимо (див. рис. 4.21), на вузол A , як на тверде тіло, діє плоска довільна системи сил. Ця система є врівноваженою, бо для неї виконуються 3 незалежних умови рівноваги:

$$\begin{cases} \sum P_y = 12 - 12 = 0, \\ \sum P_z = 20 - 20 = 0, \\ \sum m_A = 64 - 8 - 36 - 20 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, вузол A перебуває у стані статичної рівноваги. До того ж, усі лінії на побудованих епюрах відповідають встановленим нормам (див. підрозд. 4.2). З цього робимо висновок про правильність виконаних побудов.

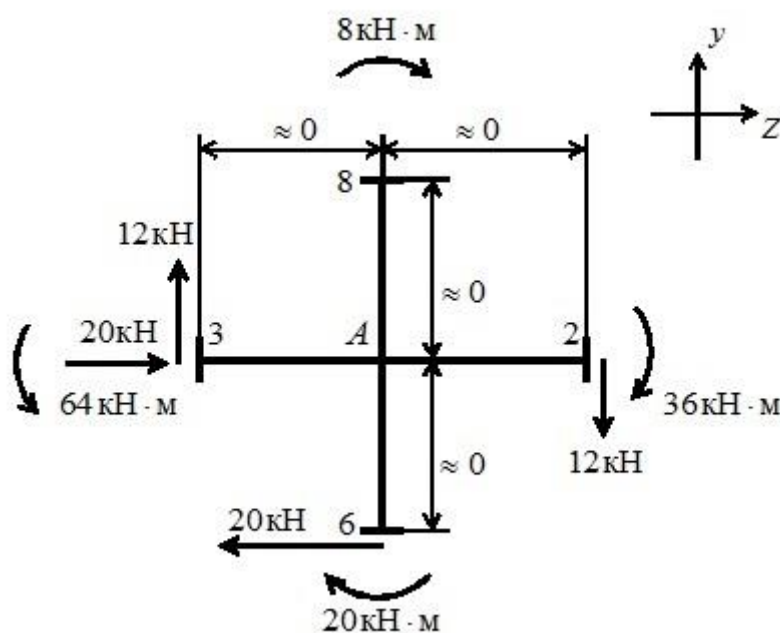


Рисунок 4.21

Приклад 4.5. Для плоскої двоопорної рами (рис. 4.22) побудувати і перевірити епюри внутрішніх силових факторів, якщо:
 $q = 10 \text{ кН/м}$; $P = 18 \text{ кН}$; $M = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $a = 2 \text{ м}$; $b = 3 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$.

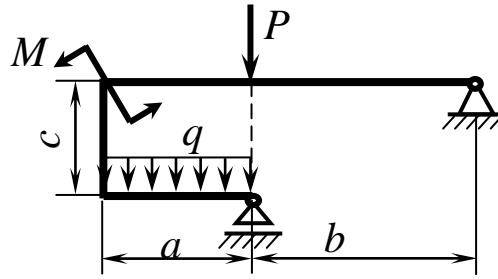


Рисунок 4.22

Розв'язання

1. Формуємо розрахункову схему рами і визначаємо її опорні реакції (рис. 4.23). Рівняння рівноваги рами:

$$\sum m_B = P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 4 + M - R_A \cdot 3 = 0, \quad (4.11)$$

$$\sum P_y = -q \cdot 2 - P + R_A + Y_B = 0, \quad (4.12)$$

$$\sum P_z = Z_B = 0. \quad (4.13)$$

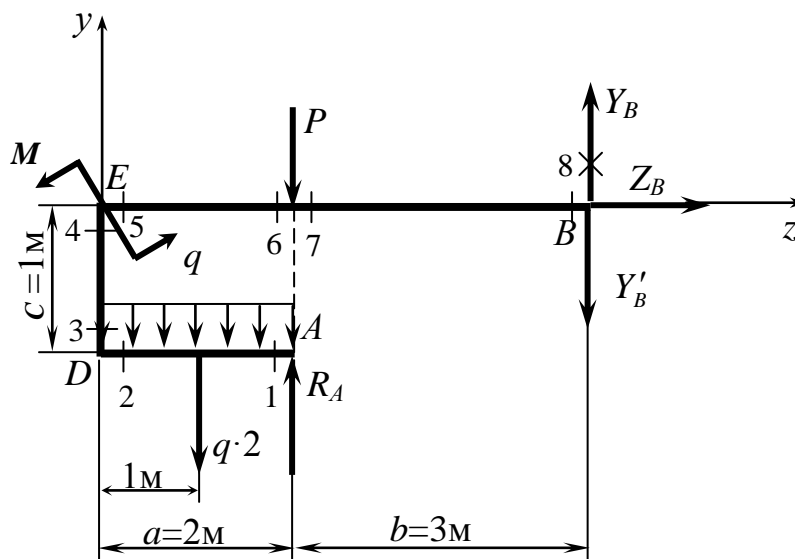


Рисунок 4.23

Із рівняння (4.11) знаходимо:

$$R_A = \frac{1}{3} \cdot (P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 4 + M) = \frac{1}{3} \cdot (54 + 80 + 16) = 50 \text{ кН.}$$

Із рівняння (4.12) отримуємо:

$$Y_B = q \cdot 2 + P - R_A = 20 + 18 - 50 = -12 \text{ кН.}$$

Із рівняння (4.13) маємо: $Z_B = 0$.

Перевірка:

$$\sum m_A = q \cdot 2 \cdot 1 + M + Y_B \cdot 3 - Z_B \cdot 1 = 20 + 16 - 36 - 0 = 0.$$

Реакції рами визначені правильно.

Оскільки значення Y_B виявилось від'ємним, замінюємо його для зручності на Y'_B (див. рис. 4.23): $Y'_B = |Y_B| = 12$ кН.

2. Підраховуємо значення подовжніх сил у характерних перерізах рами:

$$N_1 = N_2 = 0; \quad N_3 = N_4 = -R_A + q \cdot 2 = -50 + 10 \cdot 2 = -30 \text{ кН}; \\ N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = Z_B = 0.$$

Будуємо епюру N (рис. 4.24).

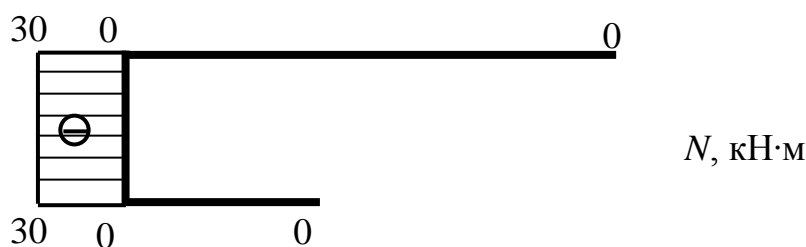


Рисунок 4.24

3. Підраховуємо значення поперечних сил у характерних перерізах рами:

$$Q_1 = -R_A = -50 \text{ кН}; \quad Q_2 = -R_A + q \cdot 2 = -50 + 10 \cdot 2 = -30 \text{ кН}; \\ Q_3 = Q_4 = 0; \quad Q_5 = Q_6 = y'_B + P = 12 + 18 = 30 \text{ кН}; \\ Q_7 = Q_8 = y'_B = 12 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру Q (рис. 4.25).

4. Підраховуємо алгебраїчні значення згинальних моментів у характерних перерізах рами:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = M_4 = -(R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1) = -(50 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1) = \\ = -80 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5 = -(-Y'_B \cdot 5 - P \cdot 2) = -(12 \cdot 5 - 18 \cdot 2) = 96 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_6 = M_7 = -(-Y'_B \cdot 3) = -(12 \cdot 3) = 36 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_8 = 0.$$

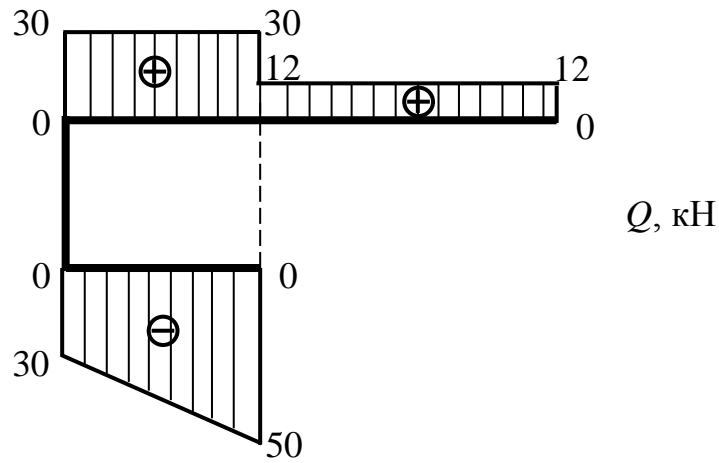


Рисунок 4.25

Будуємо епюру M (рис. 4.26).

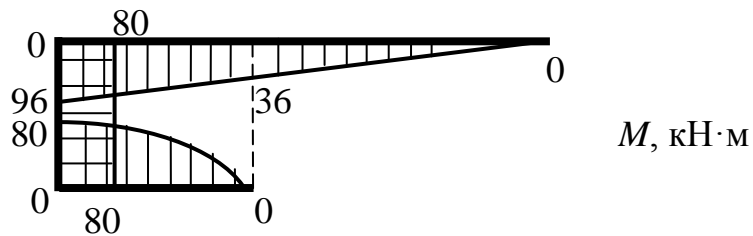


Рисунок 4.26

5. Виконуємо перевірку правильності побудованих епюр.

Для цього вирізаємо з рами вузли D та E (див. рис. 4.25) і прикладаємо до них усі зовнішні навантаження і внутрішні силові фактори, що діють на ці вузли (рис. 4.27, 4.28). Напрямки всіх прикладених сил і моментів позначаються відповідними стрілками.

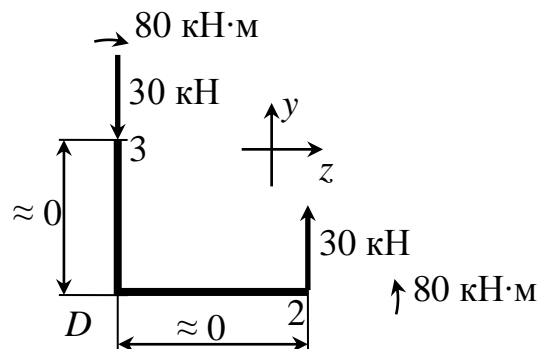


Рисунок 4.27

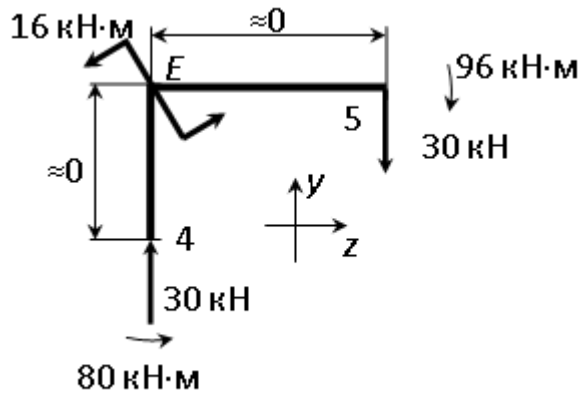


Рисунок 4.28

Як бачимо (див. рис. 4.27), вузол D перебуває під дією плоскої довільної системи сил. Ця система є врівноваженою, бо для неї виконуються 3 незалежних умови рівноваги:

$$\begin{cases} \sum P_y = -30 + 30 = 0, \\ \sum P_z = 0, \\ \sum m_D = 80 - 80 = 0. \end{cases}$$

Те саме маємо і для вузла E (див. рис. 4.28):

$$\begin{cases} \sum P_y = -30 + 30 = 0, \\ \sum P_z = 0, \\ \sum m_E = 80 + 16 - 96 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, обидва вузли рами перебувають у стані статичної рівноваги. До того ж, усі лінії на побудованих епюрах відповідають встановленим нормам (див. підрозд. 4.2). З цього робимо висновок про правильність виконаних побудов.

5 ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ. ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ

Вивчаючи метод перерізів (див. підрозд. 1.3), ми пересвідчилися у тому, що в точках навантажених тіл неминуче виникають напруження, величини яких залежать не тільки від зовнішніх навантажень, а ще і від розташування в просторі ділянок дії цих напружень.

Розглядаючи просте розтягання – стискання прямих стрижнів (тобто їх розтягання або стискання подовжніми центрально прикладеними зовнішніми силами), ми дійшли висновку, що в точках поперечних перерізів цих стрижнів, перпендикулярних до подовжньої осі, діють тільки нормальні напруження, а дотичні відсутні. Для визначення нормальних напружень

і пов'язаних з ними деформацій отримані відповідні формули (див. підрозд. 2.2).

Зазначеного обсягу теоретичних знань явно недостатньо для отримання повної уяви про напруження в стрижнях при розтяганні – стисканні, не кажучи вже про більш складні випадки навантажень, що розглядаються надалі. Саме надолуженню цієї нестачі і присвячений цей розділ.

5.1 Напружений стан у точці тіла, його компоненти і задавання. Закон парності дотичних напружень

Напруженим станом у точці тіла називають сукупність напружень будь-яких напрямків, що діють на цю точку.

Напружений стан вважається відомим або заданим, коли є відомими напруження на якихось трьох взаємно перпендикулярних ділянках навколо точки. Ділянки з відомими напруженнями називають вихідними. Методи теорії напруженого стану, які розглядаються далі, дозволяють зробити перехід від напружень на вихідних ділянках до напружень на будь-яких інших ділянках, що проходять через точку.

Вихідними ділянками частіше за все служать грані прямокутного паралелепіпеда безкінечно малих розмірів, усередені якого перебуває точка. Паралелепіпед з приєднаними до нього декартовими осями координат x , y , z називається довільним.

На гранях довільного паралелепіпеда в загальному випадку діють одне нормальне і два дотичних напруження. Кожне з них має два можливих напрямки: такий, як зображений на рисунку 5.1, і протилежний йому.

Нормальні напруження (σ) наділяють індексами осей, котрим вони паралельні. Дотичним напруженням (τ) надають по два індекси. Перший

із них вказує на вісь, перпендикулярну площадці дії того чи іншого дотичного напруження, другий – на вісь, якій паралельне це напруження (див. рис. 5.1).

У зв'язку з безкінечно малими розмірами довільного паралелепіпеда (dx, dy, dz) напруження на протилежних (видимих і невидимих) його гранях вважаються однаковими за величиною і протилежними за напрямком.

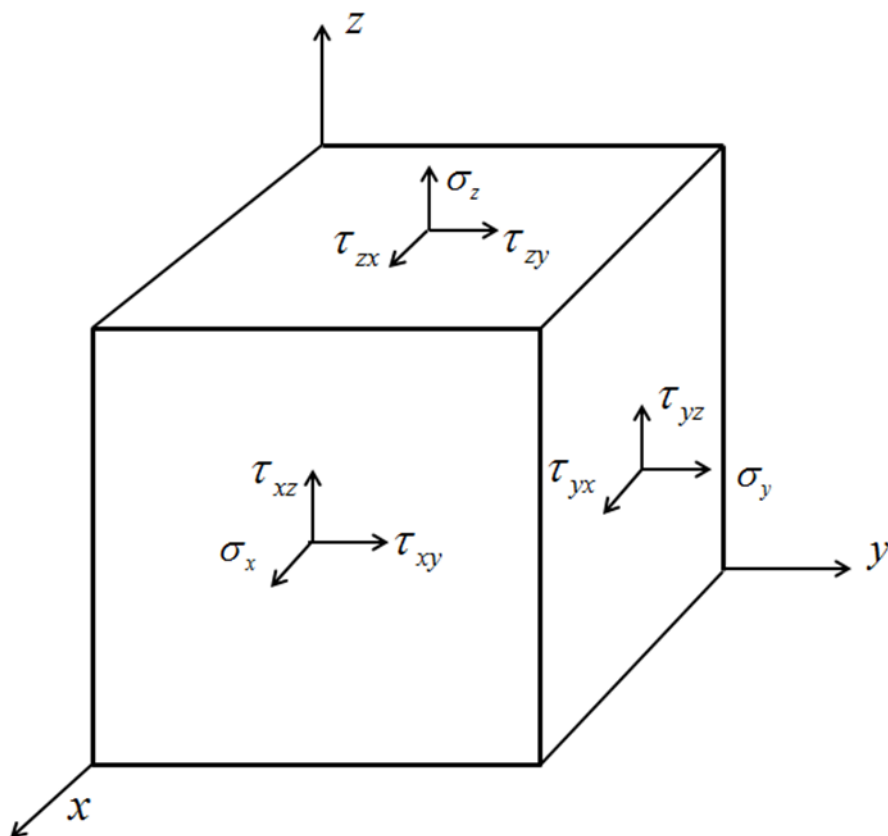


Рисунок 5.1

Напруження на гранях довільного паралелепіпеда зуться компонентами напруженого стану в точці тіла.. Усього їх дев'ять (див. рис. 5.1), а незалежних із них – тільки шість, бо дотичні напруження, що мають однотипні індекси, попарно рівні за величиною:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (5.1)$$

Вирази (5.1) є математичною формою запису так званого закону парності дотичних напружень. Вони отримані з рівнянь статичної рівноваги довільного паралелепіпеда, зокрема з рівнянь моментів відносно осей x, y і z (див. рис. 5.1).

Звернемо увагу на напрямки пар дотичних напружень. На рисунку 5.1 усі ці пари зображені спрямованими до відповідних ребер паралелепіпеда, котрі є лініями перетину ділянок дії парних напружень. У

разі ж протилежного спрямування парні напруження стануть спрямованими від зазначених ребер.

На завершення зазначимо, що для задавання напруженого стану в точці тіла достатньо мати в якості його компонентів 3 нормальних напруження на гранях довільного паралелепіпеда і 3 дотичних, по одному з їх пар.

5.2 Головні ділянки, головні напруження і головні напрямки. Види напружених станів. Основні задачі теорії напруженого стану

При обертанні в просторі довільного паралелепіпеда всі напруження на його гранях (див. рис. 5.1) змінюються як за величиною, так і за напрямком. У якийсь момент на всіх гранях цього паралелепіпеда дотичні напруження зникають і залишаються лише нормальні. Відповідне положення паралелепіпеда гарантовано існує для будь-якого вихідного напруженого стану. Таких положень може бути і декілька.

Введемо нові поняття, які стосуються означеного положення. *Ділянки, на яких відсутні дотичні напруження, називаються головними ділянками. Нормальні напруження, які діють на цих ділянках, називаються головними напруженнями, а осі координат, паралельні головним напруженням, зветься головними напрямками.*

Головні напрямки позначаються цифрами 1, 2 і 3, а головні напруження – буквами σ з відповідними цифровими індексами (рис. 5.2).

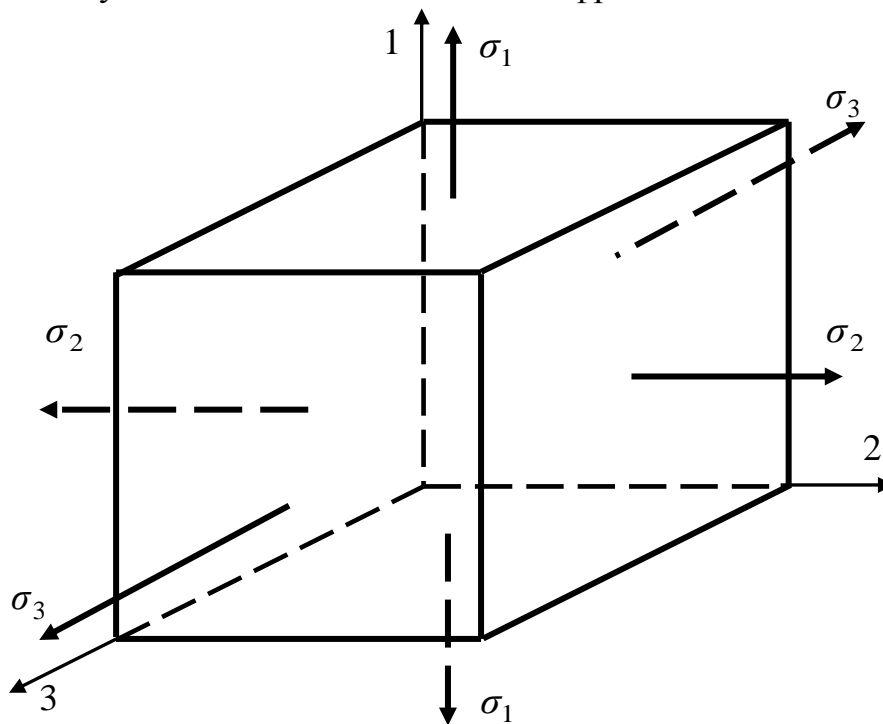


Рисунок 5.2

У загальному випадку матеріал елементарного паралелепіпеда, створеного головними ділянками, може розтягуватись (або стискатись) трьома головними напруженнями – σ_1, σ_2 і σ_3 (див. рис. 5.2). В цьому разі напружений стан називається об'ємним.

У разі ж, коли в точці навантаженого тіла діють два головних напруження, а третє дорівнює нулю, напружений стан називається плоским.

У випадку, коли в точці діє тільки одне головне напруження, а два інших дорівнюють нулю, напружений стан називається лінійним.

Нумерацію головних напружень встановлено так, щоб виконувалась (в алгебраїчному розумінні) умова:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (5.2)$$

У теорії напруженого стану розв'язують дві основні задачі – пряму і обернену.

Пряма задача ставить за мету визначення нормальних і дотичних напружень на довільних площадках навколо точки залежно від головних напружень у цій точці, величини і напрямки яких є відомими.

Обернена задача, навпаки, переслідує мету визначення напрямків і величин головних напружень за відомими нормальними і дотичними напруженнями на двох (при плоскому напруженому стані) або трьох (при об'ємному напруженому стані) взаємно перпендикулярних ділянках навколо точки.

5.3 Напружений стан прямих стрижнів при простому розтяганні – стисканні

Як уже зазначалось, при простому розтяганні – стисканні прямих стрижнів у їх перерізах, перпендикулярних до подовжньої осі (назвемо їх поперечними), діють тільки нормальні напруження, а дотичні відсутні. Стосовно інших перерізів подібної інформації нема.

Щоб отримати узагальнену інформацію про напруження в розтягнутих (або стиснутих) стрижнях, розглянемо випадок похилих перерізів.

Розділимо розтягнутий стрижень, зображений на рисунку 5.3, а, на дві частини перерізом mn , який утворює кут α з поперечним перерізом mk . Додатний напрямок відліку цього кута – проти ходу стрілок годинника.

Позначимо площу перерізу mk через F_0 , а перерізу mn – через F_α . При цьому зазначені площі пов'язані між собою залежністю

$$F_\alpha = \frac{F_0}{\cos \alpha}. \quad (5.3)$$

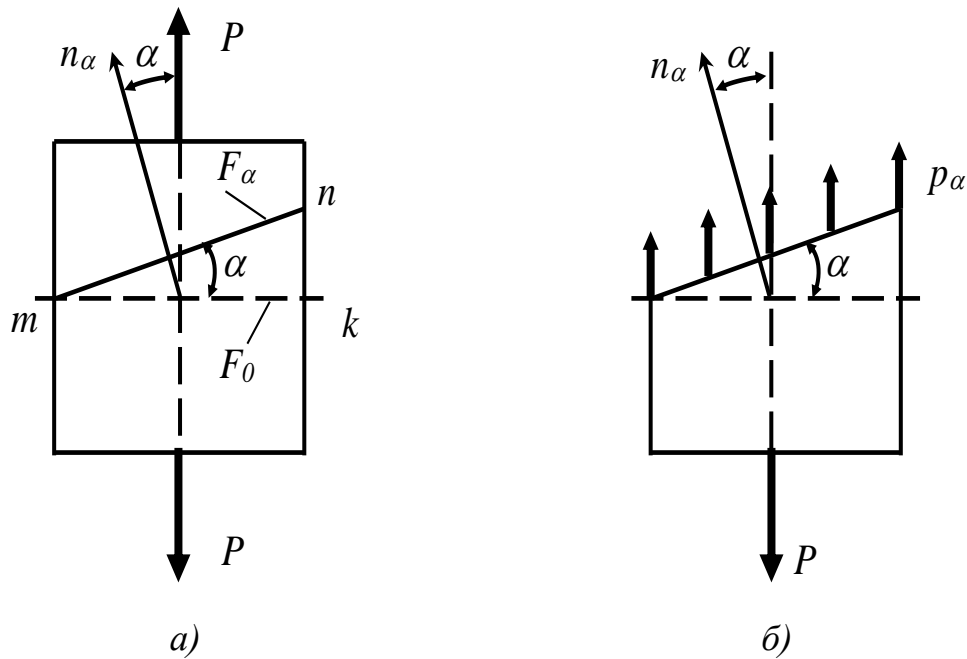


Рисунок 5.3

Для знаходження повних напружень у перерізі mn відкинемо верхню частину стрижня (рис. 5.3, б) і замінимо її дію на нижню частину шуканими напруженнями, які дорівнюють

$$p_\alpha = \frac{P}{F_\alpha} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{F_0} = \sigma_0 \cdot \cos \alpha, \quad (5.4)$$

де $\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$ – нормальні напруження в перерізі mk .

Розкладемо повне напруження p_α на дві взаємно перпендикулярні складові: *нормальне напруження* σ_α і *дотичне* τ_α (рис. 5.4, а). Величини цих напружень мінатимуться залежно від зміни кута α :

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma_0 \cdot \cos^2 \alpha, \quad (5.5)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin \alpha = \sigma_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sigma_0 \cdot \sin 2\alpha. \quad (5.6)$$

Правило знаків для нормальних напружень уже введено в підрозділі 2.2. Згідно з ним *нормальні напруження вважаються додатними при розтяганні елемента, і від'ємними – при його стисканні*.

Введемо подібне правило і для дотичних напружень: *дотичні напруження вважаються додатними, якщо вони, як сили, прагнуть повернути залишену частину елемента відносно будь-якої його*

внутрішньої точки за ходом стрілок годинника, і від'ємними – при намаганні здійснити такий поворот у протилежному напрямку.

Додатні напрямки напружень σ_α і τ_α показані на рисунку 5.4, б.

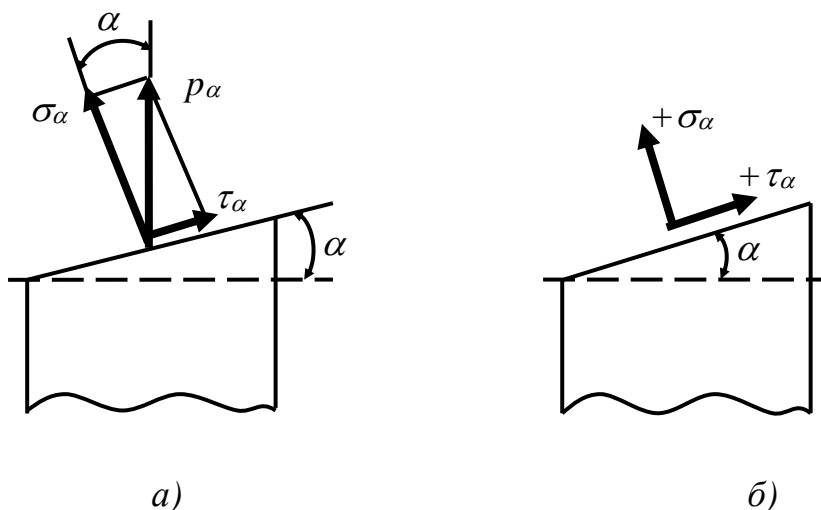


Рисунок 5.4

Формули (5.5) і (5.6) показують, що елементарні ділянки, які співпадають з похилими перерізами, не є головними, бо в них діють і нормальні, і дотичні напруження.

Разом з цим із зазначених формул виходить, що в поперечних перерізах розтягнутого стрижня ($\alpha = 0^\circ$), виникають тільки нормальні напруження (бо $\tau = 0$), а в перерізах подовжнього спрямування ($\alpha = 90^\circ$), не виникає ні нормальних, ні дотичних напружень ($\sigma = 0$ і $\tau = 0$).

На підставі сказаного робимо висновок про те, що головними при простому розтяганні (або стисканні) прямих стрижнів є елементарні ділянки, які співпадають з поперечними і подовжніми перерізами цих стрижнів і що напружений стан в усіх їх точках є лінійним.

Нормальні й дотичні напруження викликають появу різних видів деформації матеріалу стрижня.

Виділимо з розтягнутого стрижня двома похилими і паралельними перерізами 1 – 1 та 2 – 2 тонкий шар матеріалу (рис. 5.5).

На кожен його площину діють нормальні напруження, які розтягують елемент, і дотичні, які викликають зсув названих перерізів паралельно один одному.

Таким чином, у перерізах стрижнів, де одночасно діють нормальні і дотичні напруження, виникають подовжня деформація і деформація зсуву, котрі, в свою чергу, зумовлюють два види руйнування матеріалу – шляхом відриву і шляхом зсуву.

Щоб запобігти названим видам руйнування, необхідно встановити максимальні значення σ_α і τ_α .

Із формули (5.5) витікає, що максимум σ_α має місце при $\alpha = 0^\circ$. Згідно ж з формулою (5.6) τ_α досягає максимуму при $\sin 2\alpha = 1$, тобто при $2\alpha = 90^\circ$ і $\alpha = 45^\circ$. Максимальні значення цих напружень такі:

$$\max \sigma_\alpha = \sigma_0 = \frac{P}{F_0}; \quad \max \tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_0. \quad (5.7)$$

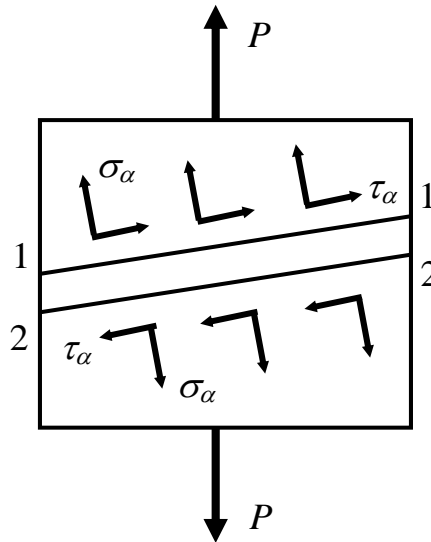


Рисунок 5.5

5.4 Плоский напружений стан. Розв'язання прямої і оберненої задач теорії цього стану

Обидві основні задачі теорії плоского напруженого стану розв'язують як аналітичним, так і графічним методами.

Розглянемо **аналітичне розв'язання прямої задачі** для плоского напруженого стану (рис. 5.6).

Нехай у деякій точці тіла діють головні напруження σ_1 і σ_2 , а $\sigma_3 = 0$. Треба знайти нормальні і дотичні напруження, що діють на двох взаємно перпендикулярних ділянках, нормалі яких складають кути α і β з першим головним напрямком (див. рис. 5.6), причому кут α будемо вважати дотичним, а кут β – від'ємним:

$$\beta = -(90^\circ - \alpha). \quad (5.8)$$

Для розв'язання задачі розглянемо умови рівноваги кожного з клинів, похилі поверхні яких мають нормалі n_α і n_β (рис. 5.7) і площі dF .

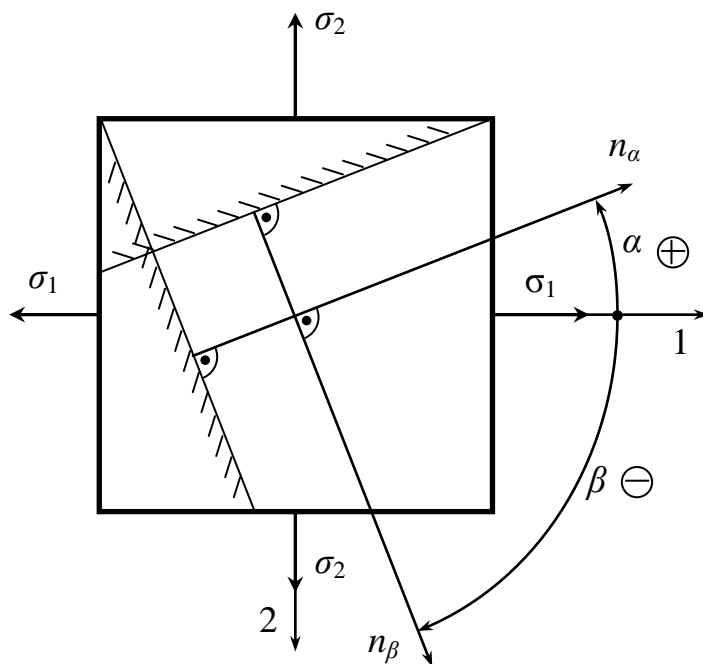


Рисунок 5.6

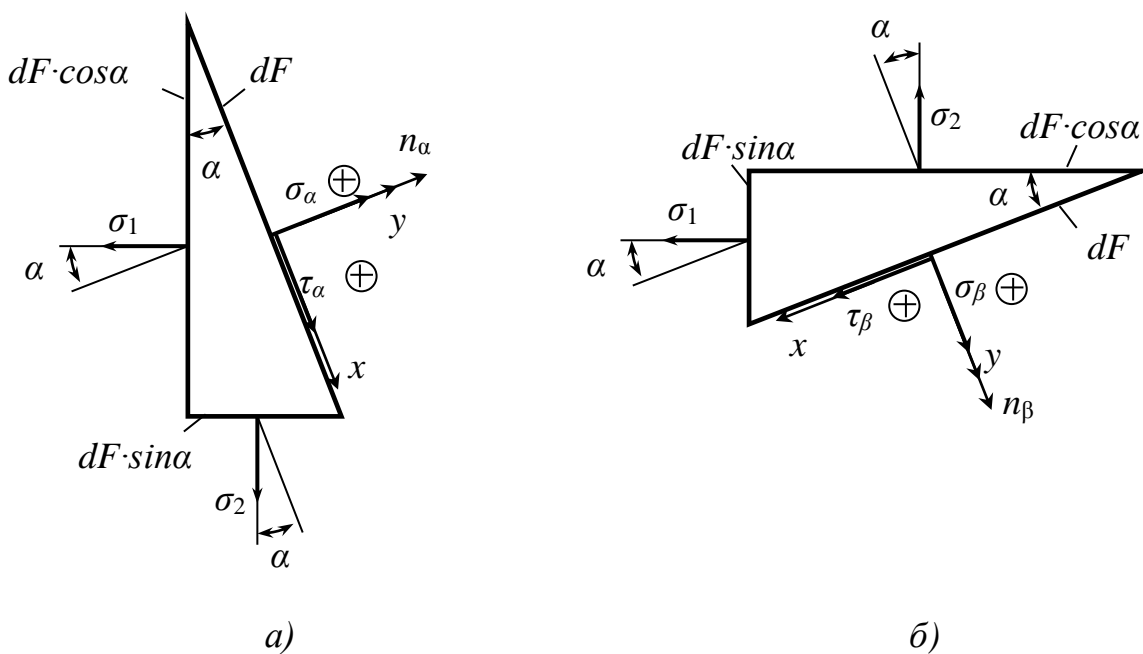


Рисунок 5.7

Для первого клина (див. рис. 5.6, а):

$$\sum P_x = -\sigma_1 \cdot \sin \alpha \cdot dF \cdot \cos \alpha + \sigma_2 \cdot \cos \alpha \cdot dF \cdot \sin \alpha + \tau_\alpha \cdot dF = 0,$$

або
$$\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (-\sigma_1 + \sigma_2) + \tau_\alpha = 0; \quad (5.9)$$

$$\sum P_y = \sigma_\alpha \cdot dF - \sigma_1 \cdot \cos \alpha \cdot dF \cdot \cos \alpha - \sigma_2 \cdot \sin \alpha \cdot dF \cdot \sin \alpha = 0,$$

або
$$\sigma_\alpha - \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha - \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha = 0. \quad (5.10)$$

Для другого клина (див. рис. 5.6, б):

$$\sum P_x = \sigma_1 \cdot \cos \alpha \cdot dF \cdot \sin \alpha - \sigma_2 \cdot \sin \alpha \cdot dF \cdot \cos \alpha + \tau_\beta \cdot dF = 0,$$

або
$$\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) + \tau_\beta = 0. \quad (5.11)$$

$$\sum P_y = 0: \quad \sigma_\beta \cdot dF - \sigma_1 \cdot \sin \alpha \cdot dF \cdot \sin \alpha - \sigma_2 \cdot \cos \alpha \cdot dF \cdot \cos \alpha = 0,$$

або
$$\sigma_\beta - \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha - \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha = 0. \quad (5.12)$$

З рівнянь (5.9)...(5.12) знаходимо:

$$\begin{cases} \tau_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (\sigma_1 - \sigma_2), \\ \sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha. \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\begin{cases} \tau_\beta = -\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) = -\tau_\alpha, \\ \sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha. \end{cases} \quad (5.14)$$

Оскільки $\sigma_1 > \sigma_2$ за означенням (див. формулу (5.2)), величина τ_α є додатною, а τ_β – від'ємною. Таким чином, *дотичні напруження по двох взаємно перпендикулярних ділянках однакові за величиною і протилежні за знаком*. Цю властивість зазвичай називають *законом парності дотичних напружень*.

Склавши між собою значення σ_α і σ_β з виразів (5.13) і (5.14), отримаємо:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}. \quad (5.15)$$

Ця властивість може бути сформульована так: *сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних ділянках постійна і дорівнює сумі головних напружень*.

Дослідивши на екстремум вираз для σ_α із формули (5.13), бачимо, що найбільше і найменше нормальні напруження в точці – це головні напруження σ_1 і σ_2 :

$$\begin{cases} \max \sigma_\alpha = \sigma_1 & (\text{при } \alpha = 0^\circ), \\ \min \sigma_\alpha = \sigma_2 & (\text{при } \alpha = 90^\circ). \end{cases} \quad (5.16)$$

Що ж стосується дотичного напруження τ_α , то його максимальне значення згідно з (5.13) має місце при $\alpha = 45^\circ$:

$$\max \tau_\alpha = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (5.17)$$

Розглянемо тепер **аналітичне розв’язання оберненої задачі** для плоского напруженого стану.

Нехай відомі нормальні й дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних ділянках навколо точки тіла. Треба знайти величини і напрямки головних напружень в цій точці (рис. 5.8).

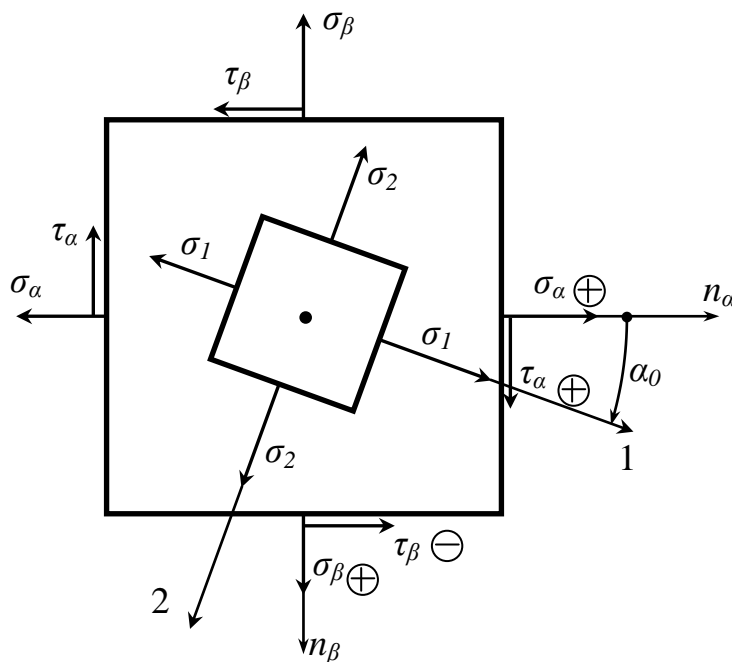


Рисунок 5.8

Будемо вважати величини σ_α , σ_β , τ_α додатними, а величину τ_β від’ємною, як це витікає з рівнянь (5.13), (5.14), отриманих при розв’язанні прямої задачі, в якій кут α між першим головним напрямком і n_α відкладався проти ходу стрілок годинника (див. рис. 5.6).

Тепер, щоб визначити напрямок σ_1 , треба відкласти такий самий за модулем, але протилежний за знаком кут $\alpha_0 = -\alpha$.

Для визначення цього кута, також величин σ_1 і σ_2 скористуємося рівняннями (5.13) і (5.14). З них після низки перетворень маємо:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}, \quad (5.18)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}, \quad (5.19)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}. \quad (5.20)$$

Графічний метод розв'язання прямої й оберненої задач для плоского напруженого стану був запропонований німецьким вченим **О. Х. Мором** (1835–1918). Розглянемо його сутність.

Для розв'язання **прямої задачі** будується круг напружень (**круг Мора**), який зображений на рисунку 5.9. Він будується в координатах σ, τ з дотриманням певного масштабу.

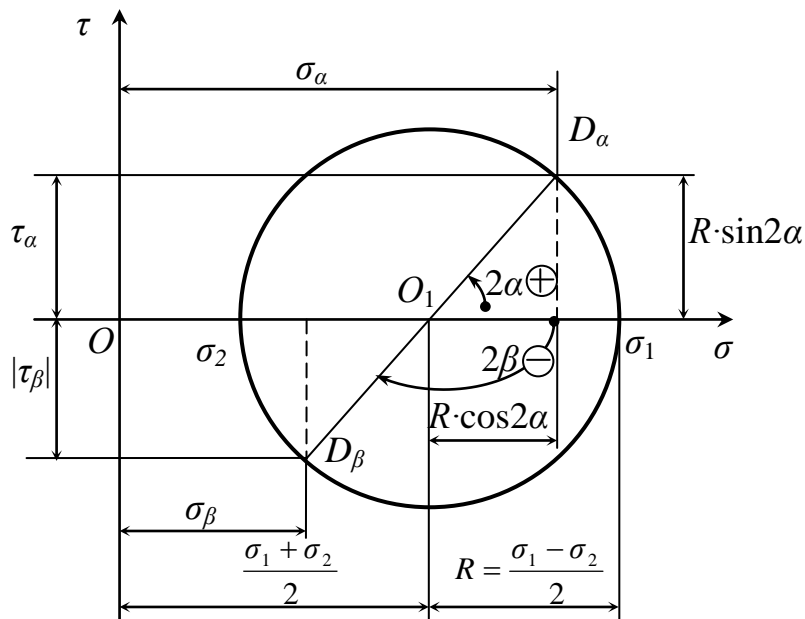


Рисунок 5.9

Уздовж осі σ відкладаються відрізки, які дорівнюють σ_1 і σ_2 , після чого визначаються центр круга (точка O_1) і його радіус R :

$$OO_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad (5.21)$$

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (5.22)$$

Із центра круга під кутами 2α і 2β до осі σ проводяться прямі до перетину з колом радіуса R . Так визначаються точки D_α і D_β , координати яких є нормальними і дотичними напруженнями на ділянках з нормальми n_α і n_β (див. рис. 5.9). Ці координати достатньо просто підрахувати або виміряти з урахуванням прийнятого масштабу. Слід зауважити, що вказані точки лежать на кінцях одного діаметра, бо на підставі формули (5.8) виходить:

$$2\alpha + |2\beta| = 2\alpha + 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 180^\circ.$$

Легко пересвідчитись, що графічний метод дає такі самі результати, що і аналітичний. Так, з рисунка 5.8 виходить:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= OO_1 + R \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ &= \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \frac{\sigma_2}{2} \cdot (1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \\ &= \frac{\sigma_1}{2} \cdot 2 \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_2}{2} \cdot 2 \cdot \sin^2 \alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha; \end{aligned}$$

$$\sigma_\beta = OO_1 - R \cdot \cos 2\alpha = \dots = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = R \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha;$$

$$\tau_\beta = -R \cdot \sin 2\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha = -\tau_\alpha.$$

Порівнюючи отримані результати з виразами (5.13) і (5.14), бачимо, що вони повністю збігаються.

Круг Мора для **оберненої задачі** (рис. 5.10) будується дещо інакше.

Оскільки величини σ_α , τ_α , σ_β , τ_β цього разу відомі, то спершу зображуємо точки D_α і D_β , координати яких є вказані величини, а вже через них проводимо діаметр круга, визначаємо його центр (точку O_1) і радіус, головні напруження і кут α_0 :

$$OO_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}; \quad (5.23)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}; \quad (5.24)$$

$$\sigma_1 = OA = OO_1 + R = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}; \quad (5.25)$$

$$\sigma_2 = OB = OO_1 - R = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}; \quad (5.26)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{\tau_\alpha}{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)/2} = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}. \quad (5.27)$$

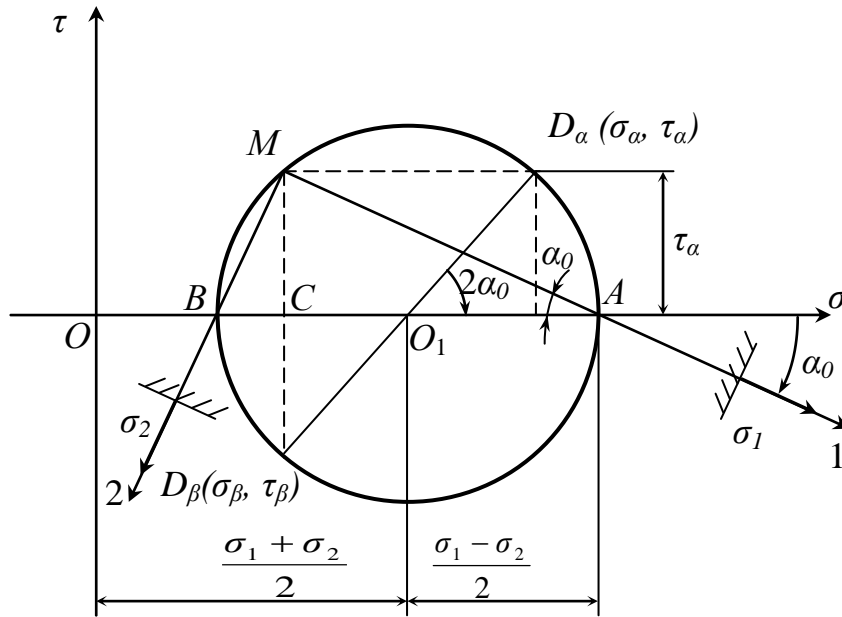


Рисунок 5.10

Є ще один спосіб визначення кута α_0 . Згідно з ним слід побудувати полюс M (див. рис. 5.10) і провести з нього прямі через точки A і B , які вкажуть дійсні напрямки σ_1 і σ_2 , бо вісь σ співпадає з напрямком σ_α (див. рис. 5.8). Цього разу вписаний кут AMB і центральний кут AO_1D_α спираються на однакові дуги BM і AD_α , тому AMB кут вдвічі менший кута AO_1D_α і дорівнює α_0 .

Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{MC}{AC} = -\frac{\tau_\alpha}{OA - OC} = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta} = \frac{\tau_\beta}{\sigma_1 - \sigma_\beta}. \quad (5.28)$$

Порівнявши вирази (5.25)...(5.27) з виразами (5.18)...(5.20), що були отримані аналітичним методом, бачимо їх повну ідентичність.

Слід зауважити, що всі наведені вище формули стосуються випадку, коли в точці діють головні напруження σ_1 і σ_2 , а $\sigma_3 = 0$. На практиці ж можливі й інші комбінації головних напружень. У цих випадках треба

замінити σ_1 на більше із двох головних напружень, задіяних в задачі, а σ_2 – на менше із них. Процедуру такої заміни проілюструємо прикладами, у яких діють σ_2 і σ_3 , а $\sigma_1 = 0$.

Приклад 5.1. Визначити нормальні й дотичні напруження на площадках з нормаллями n_α і n_β (рис. 5.11) при таких вихідних даних: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -20$ МПа, $\sigma_3 = -100$ МПа, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = -60^\circ$.

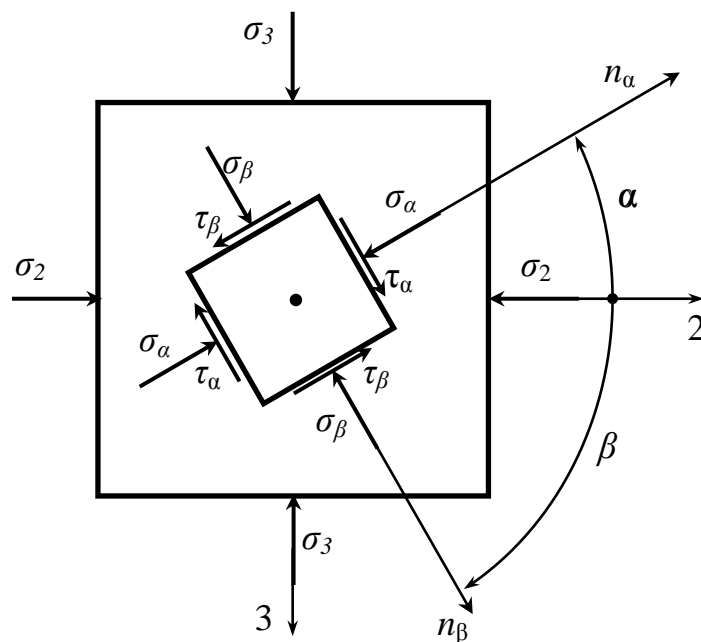


Рисунок 5.11

Розв'язання

У цьому прикладі запропонована пряма задача теорії плоского напруженого стану. Для її розв'язання побудуємо відповідний круг Мора (рис. 5.12).

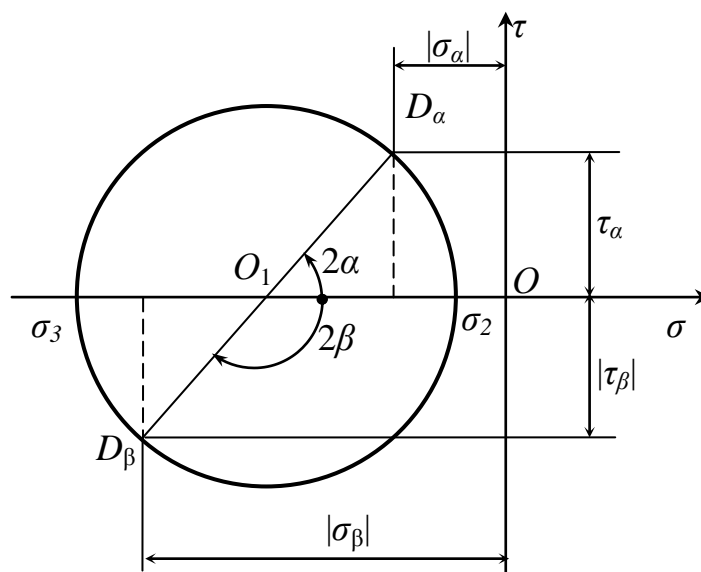


Рисунок 5.12

З цього круга отримуємо:

1. Координата точки O_1 (центра круга):

$$OO_1 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{2} \cdot (-20 - 100) = -60 \text{ МПа.}$$

2. Радіус круга:

$$R = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{1}{2} \cdot (-20 + 100) = 40 \text{ МПа.}$$

3. Напруження на площадках:

$$\sigma_\alpha = OO_1 + R \cdot \cos 2\alpha = -60 + 40 \cdot 0,5 = -40 \text{ МПа;}$$

$$\tau_\alpha = R \cdot \sin 2\alpha = 40 \cdot 0,866 = 34,64 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_\beta = OO_1 - R \cdot \cos 2\alpha = -60 - 40 \cdot 0,5 = -80 \text{ МПа;}$$

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha = -34,64 \text{ МПа.}$$

Приклад 5.2. Визначити величини і напрямки головних напружень в точці тіла, якщо $\sigma_\alpha = -60$ МПа; $\tau_\alpha = 40$ МПа; $\sigma_\beta = -140$ МПа; $\tau_\beta = -40$ МПа (рис. 5.13).

Розв'язання

У цьому прикладі пропонується обернена задача теорії плоского напруженого стану. Круг Мора для неї зображений на рисунку 5.14.

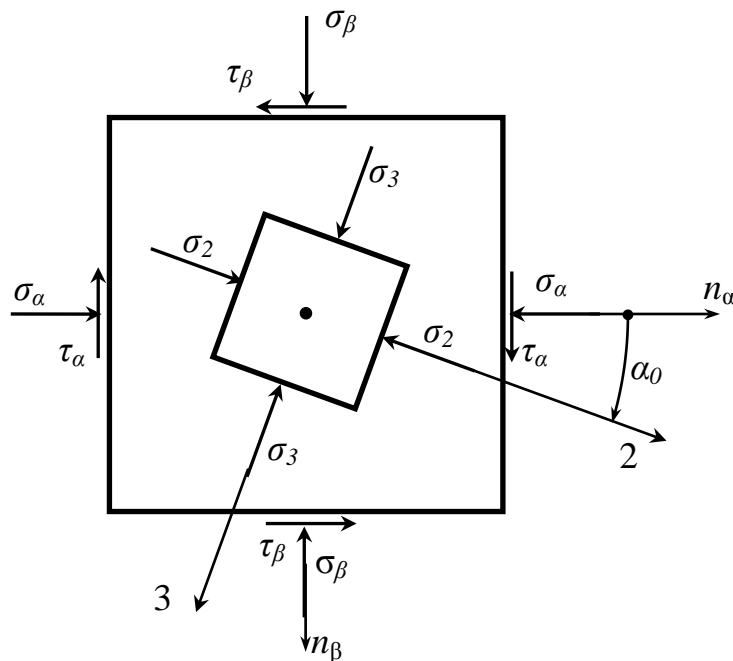


Рисунок 5.13

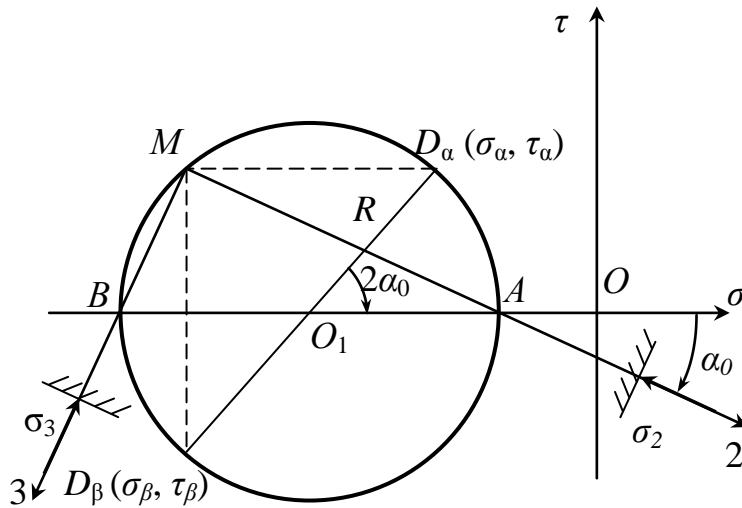


Рисунок 5.14

З цього круга знаходимо:

1. Координата точки O_1 (центра круга):

$$OO_1 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) = \frac{1}{2} \cdot (-60 - 140) = -100 \text{ МПа.}$$

2. Радіус круга:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2} = \sqrt{\left(\frac{-60 + 140}{2}\right)^2 + 40^2} = 56,57 \text{ МПа.}$$

3. Головні напруження:

$$\sigma_2 = OO_1 + R = -100 + 56,57 = -43,43 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_3 = OO_1 - R = -100 - 56,57 = -156,57 \text{ МПа;}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\tau_\beta}{\sigma_2 - \sigma_\beta} = \frac{-40}{-43,43 + 140} = \frac{-40}{96,57} = -0,414;$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}(-0,414) = -22,49^\circ.$$

5.5 Об'ємний напружений стан. Головні деформації. Узагальнений закон Гука. Питома потенційна енергія пружної деформації, її складові

У випадку об'ємного напруженого стану розв'язання обох основних задач можливе тільки аналітичним методом: застосування кругів Мора

в цьому разі є неприйнятним, бо вони враховують тільки два із трьох головних напружень. Аналітичний же метод через його складність до програми даного курсу не включений. Цей метод зазвичай застосовують в університетських курсах.

В окремих випадках, коли ділянка паралельна якомусь одному із головних напружень, напружений стан на цій ділянці можна дослідити за допомогою круга Мора, побудованого на двох інших головних напруженнях, бо головне напруження, яке паралельне площадці, не впливає на її напружений стан. Оскільки головних напружень в точці тіла три, то за допомогою кругів Мора можна дослідити напружений стан на трьох площадках, паралельних головним напруженням (рис. 5.15).

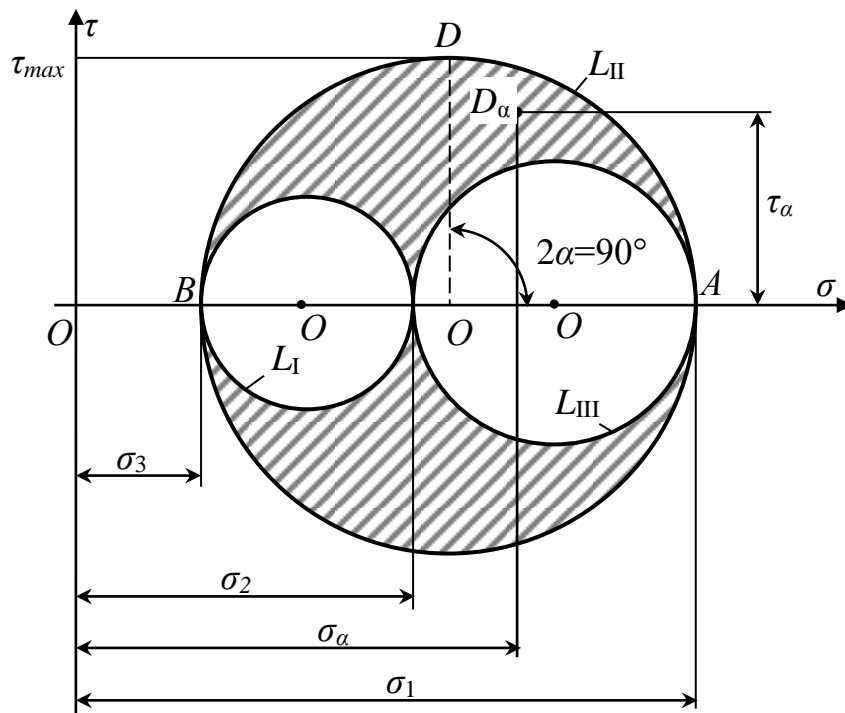


Рисунок 5.15

Так, напружений стан площадки, паралельної σ_1 , визначають точки круга L_I з центром O_1 , паралельних σ_2 – точками круга L_{II} з центром O_2 , паралельних σ_3 – точками круга L_{III} з центром O_3 (див. рис. 5.15).

У разі, коли площадка перетинає три головних напрями, точка D_α , що характеризує напружений стан на цій ділянці, вже не лежить ні на одному з кругів. Вона розташована десь у заштрихованій зоні, де саме, може встановити лише додатковий теоретичний аналіз. Круги ж Мора, зображені на рисунку 5.15, не в змозі відповісти на це питання. Але вони дозволяють встановити межі, в яких можуть знаходитись величини σ_α і τ_α на площадці D_α .

Нормальне напруження на згаданій площадці не може бути меншим за σ_3 і більшим за σ_1 :

$$\sigma_3 \leq \sigma_\alpha \leq \sigma_1.$$

Дотичне напруження τ_α може змінюватись у межах

$$-R_{\max} \leq \tau_\alpha \leq R_{\max}, \quad (5.29)$$

де R_{\max} – радіус найбільшого круга, побудованого на σ_1 і σ_3 :

$$R_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3). \quad (5.30)$$

Таким чином, максимальне дотичне напруження в точці дорівнює

$$\tau_{\max} = R_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3). \quad (5.31)$$

Воно діє на площадці D (див. рис. 5.15), яка розташована під кутом $2\alpha = 90^\circ$ і $\alpha = 45^\circ$ до σ_1 .

Напруження на гранях елемента, виділеного навколо точки тіла, спричиняють зміну його об'єму і форми. Якщо цей елемент є довільним паралелепіпедом (див. рис. 5.1), то нормальні напруження на його гранях змінюють довжину ребер, а дотичні – спотворюють прямі кути. Якщо ж він створений головними площадками (див. рис. 5.2), то напруження на них (σ_1 , σ_2 , σ_3) викликають тільки зміну довжини ребер, не спотворюючи при цьому прямих кутів. Але зміна форми і в цьому разі має місце, бо змінюються співвідношення розмірів елемента (так, зокрема, паралелепіпед стає кубиком).

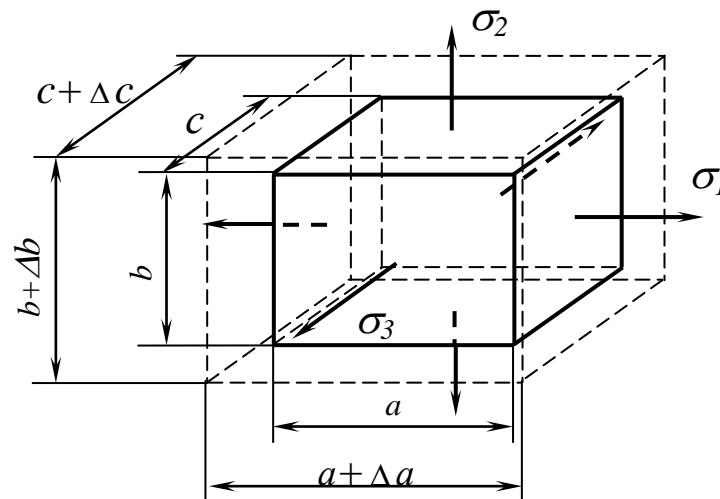


Рисунок 5.16

Відносні деформації ребер елемента, гранями якого є головні ділянки, звуться головними деформаціями в точці тіла і позначаються ε_1 , ε_2 , ε_3 (рис. 5.16):

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}. \quad (5.32)$$

Індекси головних деформацій – такі ж, як і головних напружень, що діють на гранях паралелепіпеда. Зв'язок головних деформацій з головними напруженнями встановлює узагальнений закон Гука:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)], \end{cases} \quad (5.33)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона; E – модуль пружності I роду.

З рівнянь (5.33) видно, що величина того чи іншого головного напруження визначає відповідну головну деформацію не сама, а за участю двох інших головних напружень, які виливають на цю деформацію через коефіцієнт Пуассона, зменшуючи її, коли головні напруження додатні, або збільшуючи її, коли головні напруження від'ємні.

Головні деформації, у свою чергу, визначають відносну зміну об'єму паралелепіпеда навколо точки – ε_V :

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0}. \quad (5.34)$$

До деформації цей елемент мав об'єм

$$V_0 = a \cdot b \cdot c. \quad (5.35)$$

У деформованому стані його об'єм зміниться і дорівнюватиме

$$V = (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \cdot (c + \Delta c). \quad (5.36)$$

Підставивши вирази (5.35) і (5.36) у вираз (5.34) і виконавши перетворення з урахуванням виразів (5.33), отримаємо:

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3.$$

Враховуючи незначну величину головних деформацій, останніми чотирма членами нехтуємо. Тоді маємо:

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (5.37)$$

Виразивши головні деформації через головні напруження за допомогою формул (5.33), після перетворень остаточно одержимо:

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (5.38)$$

У випадках рівномірного всебічного розтягання або стискання:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = P. \quad (5.39)$$

Тоді формула (5.38) набуде вигляду

$$\varepsilon_V = \frac{(1-2\mu) \cdot 3P}{E} = \frac{P}{K}, \quad (5.40)$$

де K – так званий модуль об'ємної деформації:

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1-2\mu)}. \quad (5.41)$$

У разі, коли $\mu = 0,5$ (натуральний каучук), величина ε_V дорівнює нулю, тобто об'єм матеріалу при деформації не змінюється.

Разом з величинами ε_1 , ε_2 , ε_3 і ε_V деформований стан матеріалу навколо точки характеризує величина питомої потенційної енергії пружної деформації – u , тобто такої, що накопичується в одиниці об'єму елемента:

$$u = \frac{\Pi}{V_0}. \quad (5.42)$$

При розтяганні зразка діаграма розтягання на ділянці пружності має вигляд, наближений до прямої лінії (див. рис. 2.8). У цьому разі згідно з теоремою **Клапейрона**, відомою з курсу фізики, величина потенційної енергії пружної деформації зразка – Π дорівнює площі діаграми розтягання:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta\ell, \quad (5.43)$$

де P – величина сили, що розтягує зразок;

$\Delta\ell$ – абсолютне подовження зразка при цій силі.

Виразимо V_0 через площу поперечного перерізу F_0 і довжину ℓ_0 зразка:

$$V_0 = F_0 \cdot \ell_0. \quad (5.44)$$

Напружений стан у об'ємі зразка – лінійний і однорідний, тобто в усіх його точках діє однакове головне напруження σ_1 . Тому з урахуванням (5.43) і (5.44) вираз (5.42) набуває вигляду

$$u = \frac{\Pi}{V_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot \Delta \ell}{F_0 \cdot \ell_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{F_0} \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \varepsilon_1. \quad (5.45)$$

За аналогією з (5.45) у разі об'ємного напруженого стану:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_3 \cdot \varepsilon_3. \quad (5.46)$$

Замінивши в (5.46) головні деформації ε_1 , ε_2 і ε_3 їх виразами із узагальненого закону Гука (5.33), після перетворень отримуємо:

$$u = \frac{1}{2E} \cdot \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3) \right]. \quad (5.47)$$

Зважаючи на те, що при об'ємному напруженому стані змінюються і об'єм елемента, і його форма, величину u можна розкласти на дві складові, пов'язані відповідно зі зміною об'єму елемента (u_O) і зміною його форми (u_ϕ):

$$u = u_O + u_\phi. \quad (5.48)$$

Визначимо спочатку величину u_O . Для цього розкладемо реальний об'ємний напружений стан (рис. 5.17, а) на об'ємне рівномірне розтягання (рис. 5.17, б), при якому змінюються тільки об'єм елемента, і додатковий до нього об'ємний напружений стан (рис. 5.17, в), при якому змінюється лише форма елемента. При цьому:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - P; \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - P; \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - P. \quad (5.49)$$

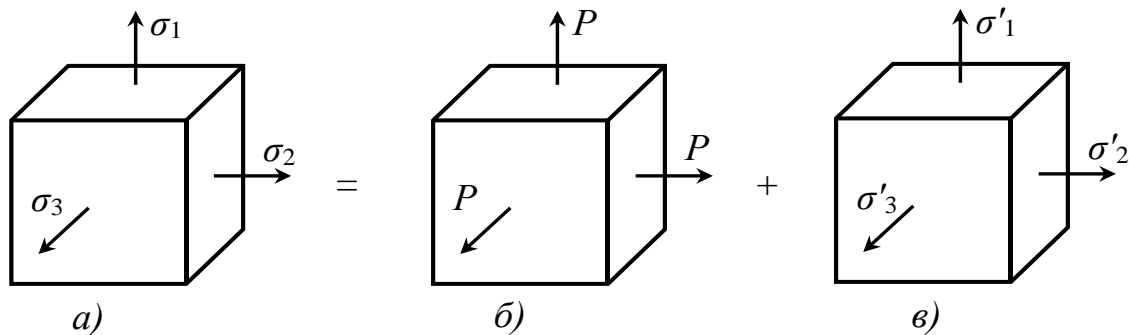


Рисунок 5.17

Значення P при такому підході визначимо за допомогою формули (5.38) з урахуванням відсутності зміни об'єму елемента в додатковому напруженому стані (див. рис. 5.17, в):

$$\varepsilon'_V = \frac{(1-2\mu)}{E} \cdot (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = 0,$$

або

$$\begin{aligned} \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 &= (\sigma_1 - P) + (\sigma_2 - P) + (\sigma_3 - P) = \\ &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3P = 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Звідси

$$P = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (5.51)$$

Тепер запишемо на підставі формули (5.47) вираз для u_0 стосовно рівномірного об'ємного розтягання (див. рис. 5.17, б):

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2E} \cdot [P^2 + P^2 + P^2 - 2\mu \cdot (P \cdot P + P \cdot P + P \cdot P)] = \\ &= \frac{3P^2}{2E} \cdot (1 - 2\mu). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Підставивши в (5.52) вираз для P (5.51), остаточно отримаємо:

$$u_0 = \frac{(1 - 2\mu)}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (5.53)$$

Величину u_ϕ визначимо як різницю між u і u_0 , використовуючи вирази (5.47) і (5.53). Після перетворень отримаємо:

$$u_\phi = \frac{(1 + \mu)}{6E} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]. \quad (5.54)$$

5.6 Теорії міцності, їх призначення. Критерії міцності та еквівалентні напруження

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінювання міцності елемента конструкції за відомим напруженим станом, тобто за відомими головними напруженнями в кожній його точці. Найпростіше це завдання вирішується при лінійному напруженому стані, який має місце,

зокрема, при простому розтяганні – стисканні прямих стрижнів. У цьому разі легко встановити експериментальні значення небезпечних (або граничних) напружень і сформулювати відповідні умови міцності.

Так, для пластичних матеріалів при простому розтяганні – стисканні небезпечним є напруження, що дорівнює межі текучості σ_T , яка вважається однаковою при розтяганні і стисканні.

Для крихких матеріалів небезпечними є напруження, які дорівнюють межі міцності (або тимчасовому опору) σ_B , яка має різні значення при розтяганні (σ_B^+) і стисканні (σ_B^-). Відповідні значення допустимих напружень встановлюють, поділивши величини вказаних характеристик матеріалу на коефіцієнт запасу міцності (n_T або n_B).

У разі складного напруженого стану (плоского або об'ємного), коли в точках конструкції діють два або три головних напруження, небезпечний стан (текучість або руйнування) для одного і того ж матеріалу може мати місце при різних значеннях головних напружень залежно від співвідношень між ними. У цьому випадку експеримент не дозволяє отримати необхідні дані, бо важко, а то і зовсім неможливо, експериментально здійснити бажаний напружений стан. Вихід із такого тупикового становища надають так звані теорії міцності.

У кожній з таких теорій є той чи інший критерій міцності, тобто умова настання руйнування або переходу матеріалу в пластичне стан, при цьому цей критерій вважається незалежним від виду напруженого стану, що надає змоги встановити його значення, базуючись на даних експерименту з простого розтягання або стискання.

Критерії міцності базуються на двох різних уявленнях про причину втрати матеріалом працездатності. Одні теорії пов'язують це з дією нормальних напружень, які спричиняють розрив матеріалу, інші – з дією дотичних напружень, що призводять його перехід у пластичний стан (див. підрозд. 5.3). При такому підході з'являється можливість оцінювати міцність матеріалу за величиною еквівалентного напруження – $\sigma_{екв.}$, яка є тією чи іншою комбінацією головних напружень ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), різною в різних теоріях міцності.

На даний час винайдено багато теорій міцності. Більшість із них не пройшли достатньої перевірки практикою і залишились на рівні гіпотез. Ряд інших отримали підтвердження в тій чи іншій області застосування і використовуються в практиці інженерних розрахунків. До них, в першу чергу, слід віднести так звані класичні (тобто загально визнані) теорії міцності, які розглядаються далі.

5.7 Класичні теорії міцності, їх області застосування і недоліки, умови міцності

Перша теорія міцності, яка називається ще теорією найбільших розтягуючих напружень, була створена великим ученим середньовіччя **Галілеєм**.

Вона вбачає причину руйнування матеріалу в дії нормальних розтягуючих напружень. Згідно з нею небезпечний стан матеріалу (початок руйнування) настає тоді, коли найбільше розтягуюче напруження в точці тіла досягає свого небезпечного значення – σ_+^o , тобто

$$\sigma_+^{\max} = \sigma_+^o. \quad (5.55)$$

У загальному випадку напруженого стану (див. підрозд 5.2):

$$\sigma_+^{\max} = \sigma_1. \quad (5.56)$$

При лінійному напруженому стані (при простому розтяганні):

$$\sigma_+^o = \sigma_T, \quad \text{або} \quad \sigma_+^o = \sigma_B^+, \quad (5.57)$$

залежно від типу матеріалу (пластичний чи крихкий).

Підставивши (5.56) і (5.57) в (5.55), отримаємо:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_T, \\ \sigma_1 = \sigma_B^+. \end{cases} \quad (5.58)$$

Умови міцності за цією теорією:

$$\sigma_{екв}^I = \sigma_1 \leq [\sigma], \quad (5.59)$$

або

$$\sigma_{екв}^I = \sigma_1 \leq [\sigma_+], \quad (5.60)$$

де $[\sigma] = \sigma_T / n_T$, $[\sigma_+] = \sigma_B^+ / n_B$ (див. формули (2.8), (2.9)).

Таким чином, перша теорія міцності з трьох головних напружень враховує лише одне – σ_1 , вважаючи, що два інших не впливають на міцність матеріалу. Експериментальна перевірка показує, що ця теорія міцності не придатна для більшості матеріалів і дає задовільні результати лише для вельми крихких матеріалів (камінь, цеглина, кераміка, інструментальна сталь і т. п.). Використання її для визначення розмірів деталей при складному напруженому стані дає завищені результати. Тому нею уникають користуватися.

Оскільки дана теорія не працює з пластичними матеріалами, умова міцності (5.59) не має практичного застосування.

Друга теорія міцності, яку називають ще теорією найбільших відносних подовжень, створена французьким ученим **Маріоттом**.

Вона, як і перша теорія міцності, базується на уяві про руйнування матеріалу розривом. Згідно з нею небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли найбільша відносна деформація розтягання в точці тіла (див. підрозд 5.5) досягає свого небезпечного значення – ε_+^o :

$$\varepsilon_+^{\max} = \varepsilon_+^o. \quad (5.61)$$

У загальному випадку напруженого стану:

$$\varepsilon_+^{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (5.62)$$

При лінійному напруженому стані (при простому розтяганні, коли $\sigma_1 = \sigma_+^o$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$):

$$\varepsilon_+^o = \frac{1}{E} \cdot \sigma_+^o. \quad (5.63)$$

З урахуванням (5.62) і (5.63) умова (5.61) після спрощення набуває вигляду

$$\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_+^o. \quad (5.64)$$

Відповідні умова міцності:

$$\sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma], \quad (5.65)$$

або
$$\sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma_B^+]. \quad (5.66)$$

Експериментальна перевірка цієї теорії дає позитивні результати лише для деяких крихких матеріалів (високоміцні сталі, легований чавун і т. п.). Її застосування неприпустимо для матеріалів, що не підкоряються закону Гука.

Оскільки друга теорія непридатна для пластичних матеріалів, умова міцності (5.65) на практиці не застосовується.

Третя теорія міцності, яка ще називається теорією найбільших дотичних напружень, була запропонована англійським ученим **Кулоном**.

Вона вбачає причину появи пластичного стану матеріалу в дії дотичних напружень. Згідно з нею пластичний стан матеріалу настає тоді, коли найбільше дотичне напруження досягає свого небезпечного значення:

$$\tau_{\max} = \tau^o. \quad (5.67)$$

У загальному випадку напруженого стану (див. формулу (5.31)):

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3).$$

При лінійному напруженому стані (при простому розтяганні, коли $\sigma_1 = \sigma_+^o$; $\sigma_3 = 0$):

$$\tau^o = \frac{1}{2} \cdot \sigma_+^o. \quad (5.68)$$

Підставивши (5.31) і (5.68) в (5.67), після спрощення отримаємо:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_+^o. \quad (5.69)$$

Відповідна умова міцності має вигляд

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (5.70)$$

або
$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma_+]. \quad (5.71)$$

Третя теорія міцності задовільно прогнозує появу пластичності у багатьох конструкційних матеріалів, віднесених до пластичних (див. підрозд. 2.4) і тому має розповсюдження в машинобудуванні й інших галузях промисловості. *Недолік цієї теорії полягає в тому, що вона не враховує середніх за величиною головних напружень σ_2 і тим самим децю переоцінює величини еквівалентних напружень.*

Ця теорія непридатна для крихких матеріалів. Тому умова міцності (5.71) на практиці не застосовується.

Четверта теорія міцності, яку називають також енергетичною теорією формозміни, належить німецькому вченому **Губеру**.

Вона, як і третя теорія міцності, призначена для пластичних (тобто не крихких) матеріалів. *Згідно з нею небезпечний стан (пластичність) у точці тіла виникає тоді, коли питома потенційна енергія пружної деформації u_{ϕ} досягає свого небезпечного значення u_{ϕ}^o :*

$$u_{\phi} = u_{\phi}^o. \quad (5.72)$$

У загальному випадку напруженого стану (див. формулу (5.54)):

$$u_{\phi} = \frac{(1 + \mu)}{6E} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2].$$

При лінійному напруженому стані (при простому розтяганні, коли $\sigma_1 = \sigma_+^o$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) маємо:

$$u_{\phi}^o = \frac{(1 + \mu)}{3E} \cdot (\sigma_+^o)^2. \quad (5.73)$$

Підставивши (5.54) і (5.73) у (5.72), після перетворень отримаємо:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = \sigma_+^o. \quad (5.74)$$

Умова міцності за IV теорією:

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma_+]. \quad (5.75)$$

Досліди добре підтверджують застосування четвертої теорії міцності для пластичних матеріалів. Вона більш точно, ніж третя теорія міцності,

прогнозує появу в матеріалі пластичних деформацій. За четвертою теорією текучість настає в цілому при менших еквівалентних напруженнях, ніж за третьою. Тому використання четвертої теорії замість третьої призводить до зниження витрат матеріалу або підвищення несучої спроможності конструкцій.

Четверта теорія придатна тільки для пластичних матеріалів. Тому при користуванні нею в практичних розрахунках слід замінити в умові (5.75) загальну величину $[\sigma_+]$ на $[\sigma]$.

Теорія міцності Мора, яка отримала таку назву в честь свого творця – вже відомого нам з розділу 5.4 німецького вченого О. Х. Мора – є п'ятою в ряду класичних теорій міцності.

З наведеного вище огляду чотирьох інших класичних теорій виходить, що ні одна з них не спроможна прогнозувати втрату міцності одночасно і крихких, і пластичних матеріалів.

Так, перша і друга теорії міцності задовільно прогнозують (з певними обмеженнями) умови руйнування крихких матеріалів, тоді як третя і четверта в цілому непогано визначають появу залишкових деформацій у пластичних матеріалів. Тому є потреба у створенні надійних універсальних теорій міцності, які б були придатними до широкого спектра матеріалів. Відомі роботи різних авторів у цьому напрямку. Однією з таких теорій і є теорія міцності Мора.

Ця теорія виходить з припущення, що міцність матеріалів у загальному випадку напруженого стану залежить, головним чином, від комбінації величин і знаків найбільшого σ_1 і найменшого σ_3 головних напружень. Середнє ж за величиною головне напруження σ_2 слабо впливає на міцність матеріалу.

Детальне викладення теорії міцності Мора виходить за рамки цього курсу через громіздкість її обґрунтування.

Умова міцності за цією теорією має вигляд

$$\sigma_{екв}^M = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_+]. \quad (5.76)$$

у разі, коли $[\sigma_+] = [\sigma_-] = [\sigma]$, що притаманно пластичним матеріалам, умова міцності (5.76) збігається з умовою (5.70) за третьою теорією. Тому теорію міцності Мора можна вважати такою, що поширює застосування третьої теорії на крихкі матеріали. У цьому її безперечна перевага.

Основним недоліком теорії міцності Мора, який залишився від третьої теорії, є неврахування дії σ_2 , а також те, що вона обґрунтована лише для напружених станів, у яких $\sigma_1 \geq 0$, а $\sigma_3 \leq 0$. У зв'язку з цим ця теорія має обмежене застосування в практиці інженерних розрахунків.

6 НАПРУЖЕННЯ ПРИ ПЛОСКОМУ ЗГИНАННІ

6.1 Чисте згинання. Визначення нормальних напружень, умова міцності

Розглянемо випадок чистого згинання, при якому в усій балці (рис. 6.1, а), або на її частині (рис. 6.1, б) діє тільки згинальний момент постійної величини ($M = \text{const}$), а поперечна сила відсутня ($Q = 0$). У цьому разі в точках балки виникають тільки нормальні напруження – σ , пов'язані зі згинальним моментом M .

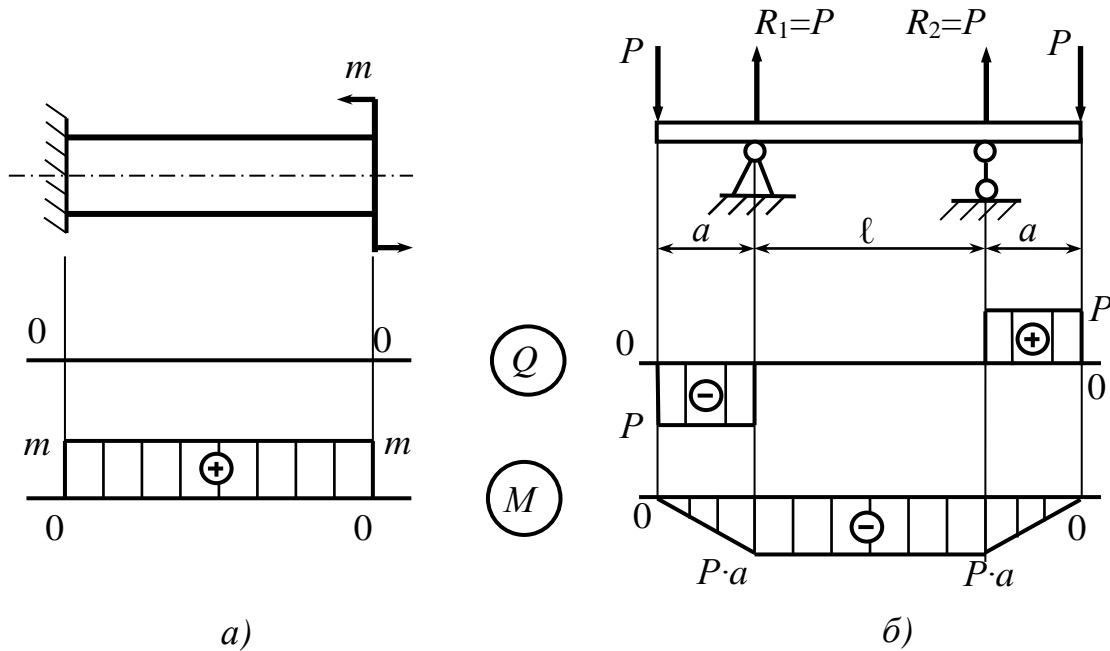


Рисунок 6.1

Перед встановленням зв'язку між величинами σ і M введемо деякі нові поняття.

Сукупність волокон, що не міняють своєї довжини при згинанні балки, називається *нейтральним шаром*. Волокна, які належать нейтральному шару, до деформації лежать в одній площині, а в деформованому стані утворюють деяку неплоску поверхню. Кожен поперечний переріз балки перетинається з нейтральним шаром за прямою, яка називається *нейтральною лінією перерізу (н. л.)*. Площина дії зовнішнього навантаження зветься *силовою площиною*, а лінія її перетину з поперечним перерізом балки – *силовою лінією (с.л.)*. Нейтральна і силова лінії перпендикулярні одна до одної.

На рисунку 6.2 зображений відокремлений елемент балки довільної довжини, до якого не прикладені зовнішні сили, з усіма необхідними позначеннями. Силова лінія на ньому (вісь y) є віссю симетрії перерізу. Положення ж нейтральної лінії (осі x) за висотою перерізу поки що невідоме і потребує свого визначення.

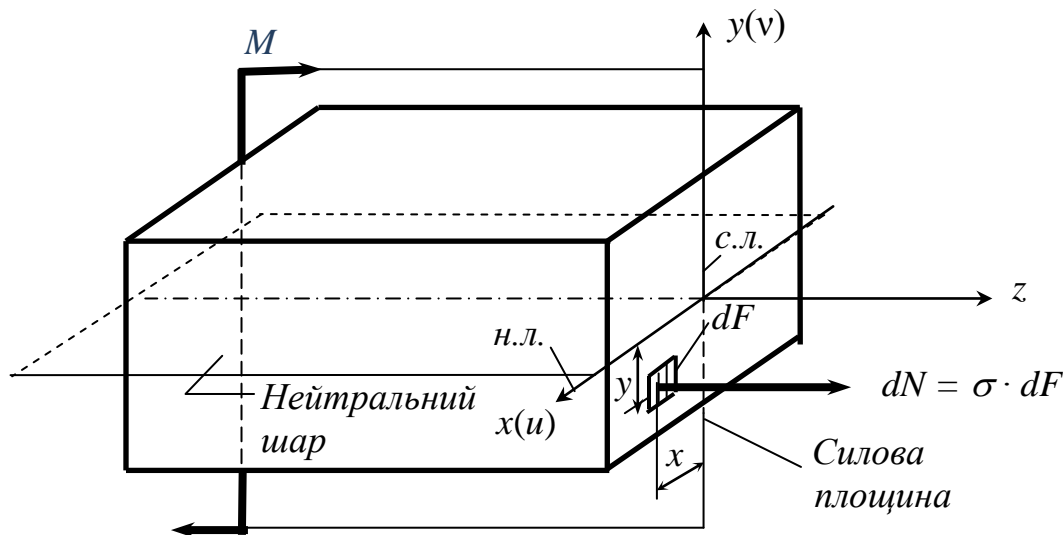


Рисунок 6.2

Виділимо навколо довільної точки перерізу з координатами x і y (див. рис. 6.2) елементарну площадку dF і позначимо діючу на неї силу: $dN = \sigma \cdot dF$.

Зазначений елемент балки знаходиться в рівновазі під дією двох рівних і протилежно направлених згинальних моментів M , прикладених до його торцевих поверхонь, тому що $M = \text{const}$. Один з цих моментів зображено на рисунку 6.2, другий (не показаний) створюють розподілені сили dN .

Запишемо рівняння рівноваги вказаного елемента:

$$\sum m_x = -M + \int_F y \cdot \sigma \cdot dF = 0; \quad (6.1)$$

$$\sum m_y = \int_F x \cdot \sigma \cdot dF = 0; \quad (6.2)$$

$$\sum P_z = \int_F \sigma \cdot dF = 0. \quad (6.3)$$

Розглянемо тепер, виходячи з гіпотези плоских перерізів, деформацію елемента балки, обмежену двома суміжними поперечними перерізами $m-m$ і $n-n$, які розташовані один від одного на відстані dz (рис. 6.3, а).

На рисунку 6.3, б видно, що перерізи $m-m$ і $n-n$ у деформованому елементі залишаються плоскими і повертаються на кут $d\varphi$. Прямолінійний елемент a_0b_0 нейтрального шару перетворюється на дугу кола такої ж довжини з радіусом ρ , а волокно a_1b_1 , що знаходиться на відстані y від нейтрального шару, – на дугу кола з радіусом кривизни $(\rho + y)$. Відносне подовження цього волокна дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab}. \quad (6.4)$$

При цьому

$$a_1 b_1 = (\rho + y) \cdot d\varphi, \quad (6.5)$$

$$ab = \rho \cdot d\varphi. \quad (6.6)$$

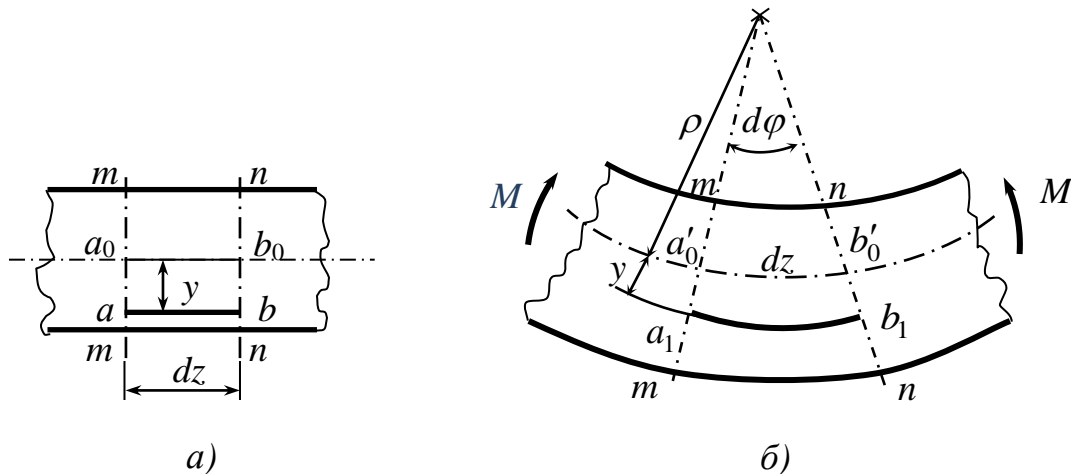


Рисунок 6.3

Підставляємо вирази (6.5) і (6.6) у формулу (6.4), отримуємо:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (6.7)$$

Кожне волокно балки отримує деформацію розтягування або стискання. Отже, за законом Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho}. \quad (6.8)$$

Підставимо вираз (6.8) у рівняння (6.3), отримаємо:

$$\int_F \frac{E}{\rho} \cdot y \cdot dF = 0, \quad \text{або} \quad \frac{E}{\rho} \cdot \int_F y \cdot dF = 0.$$

Звідки

$$\int_F y \cdot dF = 0. \quad (6.9)$$

Інтеграл (6.9) є статичним моментом перерізу відносно осі x (див. розд. 3). Оскільки він дорівнює нулю, вісь x (нейтральна лінія) проходить через центр ваги перерізу і є центральною. Також є центральною і вісь y як вісь симетрії перерізу (див. рис. 6.2).

Підставимо вираз (6.8) у рівняння (6.2), отримаємо:

$$\frac{E}{\rho} \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF = 0,$$

або
$$\int_F x \cdot y \cdot dF = 0. \quad (6.10)$$

Інтеграл (6.10) є відцентровим моментом інерції перерізу відносно осей x і y (див. розд. 3). Оскільки він дорівнює нулю, то осі x і y є не тільки центральними, а ще і головними (u і v).

Таким чином, якщо силова площина співпадає з однією з головних центральних осей перерізу, то згинання буде плоским, і нейтральний шар перерізу співпадає з іншою головною центральною віссю.

Підставимо вираз (6.8) у рівняння (6.1), отримаємо:

$$\frac{E}{\rho} \cdot \int_F y^2 \cdot dF = M.$$

Звідки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_x}, \quad (6.11)$$

де $J_x = \int_F y^2 \cdot dF$ – момент інерції перерізу щодо осі x (нейтральної лінії).

Формула (6.11) у наведеному розрахунку є допоміжною, проте вона має і велике самостійне значення. Її можна трактувати як закон Гука при згинанні, оскільки вона пов'язує деформацію (кривизну нейтрального шару $1/\rho$) з діючим у перерізі згинальним моментом. Добуток $E \cdot J_x$ має назву жорсткості перерізу при згинанні. З формули (6.11) виходить, що якщо балка виготовлена з однорідного матеріалу ($E = \text{const}$) і має постійний переріз ($J_x = \text{const}$), то при чистому згинанні ($M = \text{const}$) вісь балки стає дугою кола ($1/\rho = \text{const}$, і, значить $\rho = \text{const}$).

Підставимо вираз (6.11) у рівняння (6.8), одержимо формулу для визначення величини нормальних напружень у довільній точці перерізу:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_x}. \quad (6.12)$$

Вираз (6.12) показує, що *нормальні напруження при згинанні змінюються за висотою перерізу за лінійним законом..* При цьому вони постійні за шириною перерізу. Окрім цього, з формули (6.12) виходить, що напруження в точках нейтральної лінії ($y = 0$) дорівнюють нулю. Отже, епюра для будь-яких перерізів, що мають горизонтальну вісь симетрії, завжди матиме вигляд, показаний на рисунку 6.4.

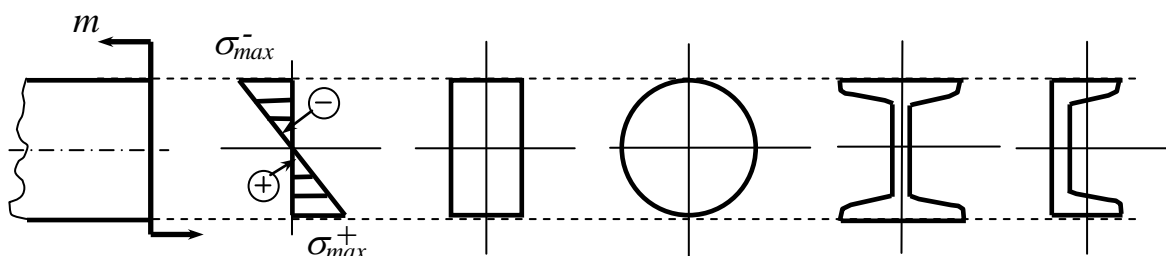


Рисунок 6.4

У наведених перерізах максимальні за модулем нормальні напруження у зонах розтягання (+) і стискування (-) однакові:

$$\sigma_{\max}^+ = |\sigma_{\max}^-| = \sigma_{\max} = \frac{M}{J_x} \cdot y_{\max}, \quad (6.13)$$

де величини M і y_{\max} беруться без урахування знаків.

У випадках, коли вісь x не є віссю симетрії, наприклад, в разі таврового перерізу (рис. 6.5), максимальні напруження в зонах розтягання і стискування різні. Тоді за σ_{\max} приймають більше за модулем з означених напружень – σ_{\max}^+ або $|\sigma_{\max}^-|$, а за y_{\max} – відстань від осі x до шару волокон з $\sigma = \sigma_{\max}$.

Вираз (6.14) для σ_{\max} зазвичай перетворюють таким чином:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J_x} \cdot y_{\max} = \frac{M}{W_x}, \quad (6.14)$$

де W_x – осьовий момент опору перерізу стрижня:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}. \quad (6.15)$$

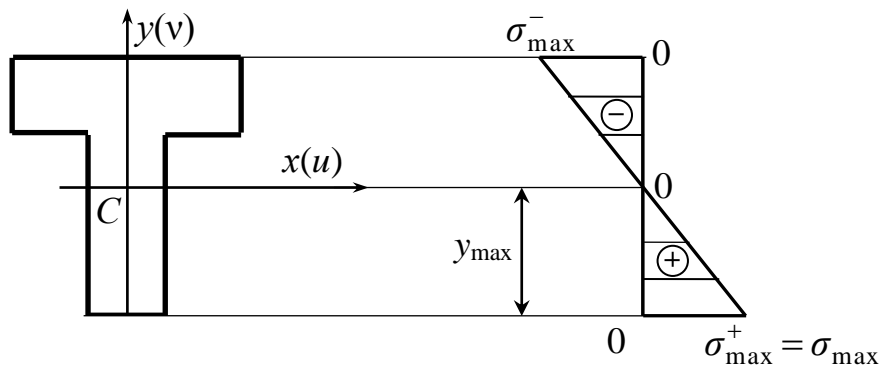


Рисунок 6.5

Найбільш економічними є такі форми поперечних перерізів стрижнів, у яких поєднуються найменша витрата матеріалу з найбільшою величиною осевого моменту опору W_x .

З цього виходить, що для раціонально працюючої балки необхідно, якщо можливо, розмістити масивні частини поперечних перерізів подалі від нейтральної осі. Так виникли двотаври, швелери й інші тонкостінні профілі. При згинанні у вертикальній площині (відносно осі x) такі профілі дають істотний вигаш у вазі в порівнянні з ранніми формами поперечного перерізу – кругом і прямокутником.

Моменти опору стандартних профілів прокату наведені в таблицях сортаменту (див. дод. А). Для простих фігур (прямокутник, круг, кільце) формули для визначення осевих моментів опору наводяться далі.

Прямокутник (рис. 6.6):

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{b \cdot h^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{1}{6} b \cdot h^2. \quad (6.16)$$

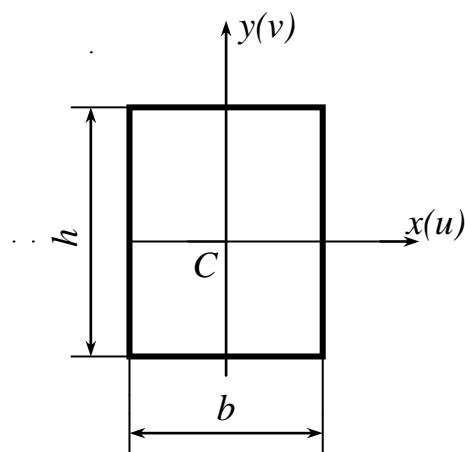


Рисунок 6.6

Круг (рис. 6.7):

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}. \quad (6.17)$$

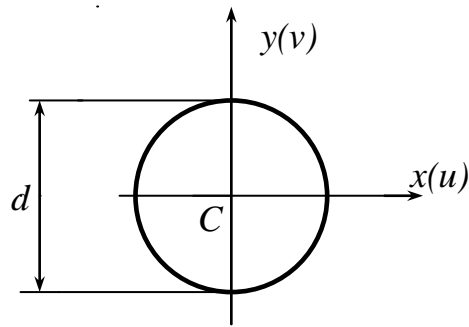


Рисунок 6.7

Кільце (рис. 6.8):

$$W_x = \frac{\pi \cdot (d^4 - d_o^4)}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \cdot (1 - c^4), \quad (6.18)$$

де

$$c = d_o / d. \quad (6.19)$$

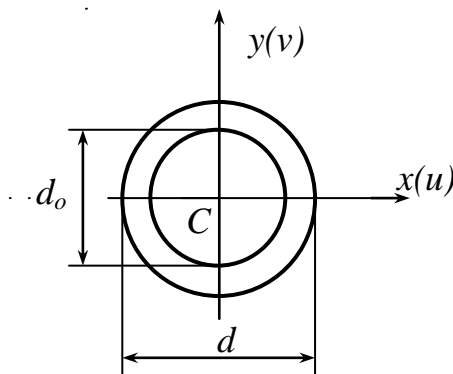


Рисунок 6.8

З формули (6.14) витікають умови міцності балок при чистому згинанні.

У разі, коли балка виготовлена з пластичного матеріалу (наприклад, із маловуглецевої сталі), умова міцності має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (6.20)$$

де σ_{\max} – максимальне за модулем нормальне напруження в балці;

M_{\max} – максимальний за модулем згинальний момент у балці;

$[\sigma]$ – допустиме напруження для матеріалу балки на розтягання і стискання (див. підрозд. 2.3).

Переважає кількість балок у техніці виготовляється із пластичних матеріалів, бо крихкі матеріали (наприклад, чавуни) для виготовлення балок вкрай небажані: вони погано опираються розтяганням, яке при згинанні є неминучим.

У разі, коли балку все ж виготовляють із крихкого матеріалу і до того ж вона має несиметричний профіль, умови міцності для розтягуючих і стискаючих напружень різні:

$$\begin{cases} \sigma_{\max}^+ = \frac{M_{\max}^+}{J_x} \cdot y_{\max}^+ \leq [\sigma_+], \\ |\sigma_{\max}^-| = \frac{M_{\max}^-}{J_x} \cdot y_{\max}^- \leq [\sigma_-], \end{cases} \quad (6.21)$$

де M_{\max}^+ – максимальний за модулем згинальний момент, що розтягує волокна балки;

M_{\max}^- – максимальний за модулем згинальний момент, що стискає волокна балки;

y_{\max}^+ – відстань від нейтральної лінії до шару волокон з максимальним розтягуючим напруженням у перерізі дії M_{\max}^+ ;

y_{\max}^- – відстань від нейтральної лінії до шару волокон з максимальним стискаючим напруженням у перерізі дії M_{\max}^- ;

$[\sigma_+]$ і $[\sigma_-]$ – допустимі напруження для матеріалу балки відповідно при розтяганні і стисканні (див. підрозд. 2.3).

У разі ж, коли профіль балки із крихкого матеріалу симетричний, $y_{\max}^+ = y_{\max}^- = y_{\max}$ і умови міцності набувають вигляду

$$\begin{cases} \sigma_{\max}^+ = \frac{M_{\max}^+}{W_x} \leq [\sigma_+], \\ |\sigma_{\max}^-| = \frac{M_{\max}^-}{W_x} \leq [\sigma_-]. \end{cases} \quad (6.22)$$

Значення M_{\max}^+ і M_{\max}^- беруться (без урахування знаків) з епюр згинальних моментів.

6.2 Поперечне згинання. Визначення дотичних напружень, формула Журавського. Умова міцності за дотичними напруженнями

При чистому згинанні в поперечних перерізах стрижнів виникають лише згинальні моменти M , які викликають нормальні напруження σ . У разі поперечного згинання в перерізах стрижнів виникають не тільки

згинальні моменти, але і поперечні сили Q , котрі є причиною появи дотичних напружень τ (рис. 6.9).

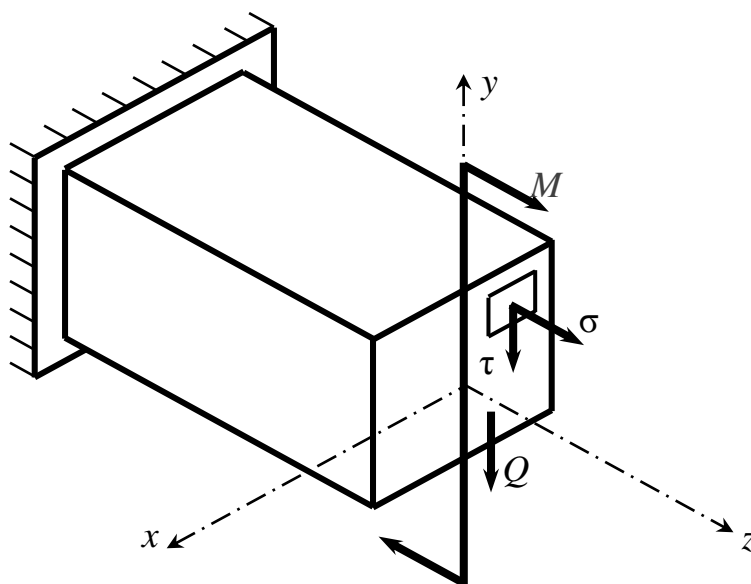


Рисунок 6.9

При чистому згинанні напружений стан стрижня лінійний, а при поперечному – плоский. Зрозуміло, що поява дотичних напружень впливає на величини нормальних напружень і для визначення останніх потрібні дещо інші формули, аніж ті, які були отримані для чистого згинання. Однак, як свідчить практика силового розрахунку балок, застосування отриманих формул (див. підрозд. 6.1) і в разі поперечного згинання є припустимим, оскільки величини τ зазвичай у рази менші, ніж величини σ , і тому суттєво не впливають на показники міцності й жорсткості.

Цей факт, як основне припущення, було покладено в основу формули для визначення дотичних напружень при плоскому згинанні, запропонованої **Д. І. Журавським** (1821–1891) і якою до теперішнього часу користуються в інженерних розрахунках.

Друге припущення, на якому базується формула Журавського, – про незмінність τ за шириною перерізу балки – також має емпіричне походження. У дійсності на одному й тому ж горизонтальному рівні дотичні напруження збільшуються в напрямку від периферії до центра перерізу, але це збільшення, як правило, невелике і їм нехтують. Так, в разі прямокутного перерізу при відношенні його висоти до ширини ≥ 1 відхил значень τ від їх середніх значень становить лише декілька відсотків.

Процедуру виводу формули Журавського розглянемо на прикладі двоопорної балки (рис. 6.10).

Двома близькими поперечними перерізами A_1B_1 і A_2B_2 виділимо елемент балки довжиною dz (рис. 6.10, а). Як виводить з наведених епюр Q і M , поперечні сили в обох цих перерізах однакові, а згинальні моменти різні: в перерізі A_2B_2 згинальний момент більший, ніж у перерізі A_1B_1 , на

величину dM . Напрямки дії поперечних сил і згинальних моментів у перерізах A_1B_1 і A_2B_2 показані на рисунку 6.10, б.

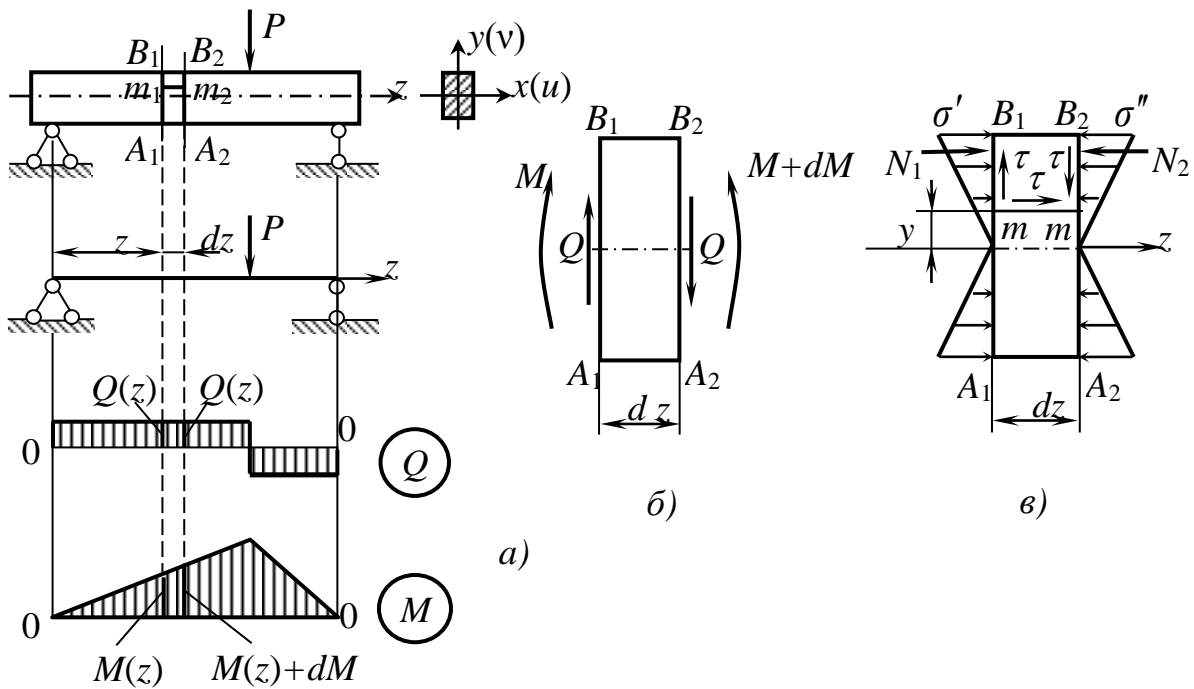


Рисунок 6.10

Подовжнім горизонтальним перерізом, проведеним на відстані y від нейтрального шару (рис. 6.10, в), розділимо елемент на дві частини і розглянемо умови рівноваги верхньої частини (рис. 6.11).

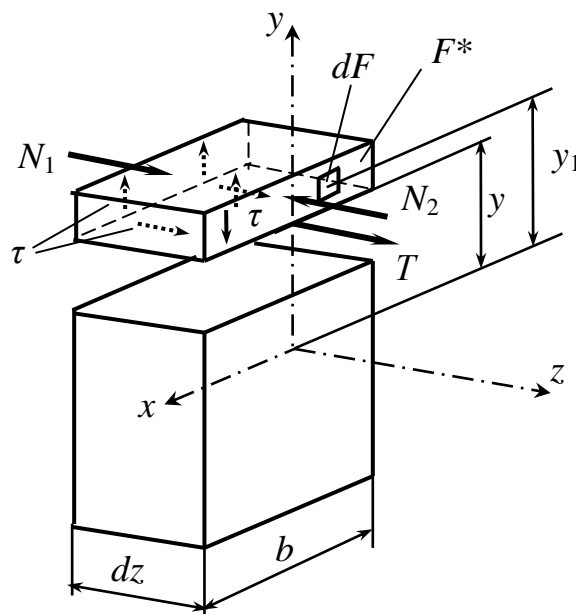


Рисунок 6.11

Рівнодійна нормальних сил, що діють на ліву грань виділеного паралелепіпеда, дорівнює

$$N_1 = \int_{F^*} \sigma \cdot dF, \quad (6.23)$$

де F^* – площа частини поперечного перерізу від рівня y до верхніх волокон балки (так звана відсічена частина перерізу).

Підставимо у формулу (6.23) відповідний вираз для σ :

$$\sigma = \frac{M}{J_x} \cdot y_1, \quad (6.24)$$

де y_1 – поточна ордината площадки dF (рис. 6.11);

J_x – момент інерції всього перерізу відносно осі x .

Зважаючи на те, що величини M і J_x в даному разі є постійними, одержимо:

$$N_1 = \frac{M}{J_x} \cdot \int_{F^*} y_1 \cdot dF. \quad (6.25)$$

Інтеграл у виразі (6.25) є статичним моментом відносно осі x площі F^* . Позначимо його як S_x^* :

$$S_x^* = \int_{F^*} y_1 \cdot dF. \quad (6.26)$$

З урахуванням (6.26) формула (6.25) набуває вигляду

$$N_1 = \frac{M \cdot S_x^*}{J_x}. \quad (6.27)$$

Аналогічно знайдемо рівнодійну нормальних сил, що діють на праву грань виділеного паралелепіпеда (див. рис. 6.11):

$$N_2 = \frac{(M + dM)}{J_x} \cdot \int_{F^*} y_1 \cdot dF = \frac{(M + dM) \cdot S_x^*}{J_x}. \quad (6.28)$$

Різниця між цими силами:

$$N_2 - N_1 = \frac{dM \cdot S_x^*}{J_x}. \quad (6.29)$$

Зазначена різниця повинна врівноважуватися дотичною силою T на нижній грані паралелепіпеда (див. рис. 6.11). Вважаючи, що дотичні

напруження, рівнодійною яких є сила T , розподілені за шириною перерізу рівномірно, маємо:

$$T = \tau \cdot b \cdot dz. \quad (6.30)$$

Проектуючи на вісь z усі сили, що діють на паралелепіпед, одержимо:

$$\sum P_z = N_1 + T - N_2 = 0. \quad (6.31)$$

Підставивши в умову рівноваги (6.31) формули (6.29) і (6.30), знаходимо:

$$N_2 - N_1 = T,$$

або

$$\frac{dM \cdot S_x^*}{J_x} = \tau \cdot b \cdot dz, \quad (6.32)$$

звідки дотичні напруження:

$$\tau = \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S_x^*}{b \cdot J_x}. \quad (6.33)$$

Враховуючи, що згідно з залежністю (4.4)

$$\frac{dM}{dz} = Q,$$

остаточно знаходимо із (6.33):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^*}{b \cdot J_x}. \quad (6.34)$$

Вираз (6.34) і є **формулою Журавського**, яка дозволяє визначити величину дотичних напружень, що виникають не тільки в поперечних, але і в подовжніх перерізах балки, бо перші і другі однакові як парні.

Залежність τ від y визначається через статичний момент S_x^* . У крайніх за висотою перерізах шарах волокон $S_x^* = 0$, тому $\tau = 0$. При наближенні до нейтрального шару величина S_x^* зростає, а разом з нею зростають і величини τ .

Встановимо закони зміни дотичних напружень за висотою найбільш поширених перерізів балок.

Почнемо з прямокутника (рис. 6.12).

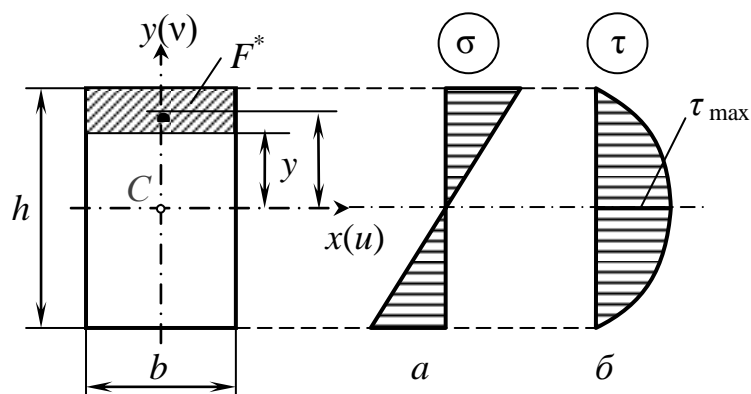


Рисунок 6.12

Статичний момент відсіченої площі:

$$S_x^* = F^* \cdot y_c^*, \quad (6.35)$$

де F^* – площа відсіченої частини,

$$F^* = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right); \quad (6.36)$$

y_c^* – координата центра ваги відсіченої площі,

$$y_c^* = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y \right). \quad (6.37)$$

Підставивши вирази (6.36) і (6.37) у формулу (6.35), маємо:

$$S_x^* = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{1}{2} b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right). \quad (6.38)$$

Момент інерції прямокутника (див. формулу (3.18)):

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Отже, підставивши вирази (6.38) і (3.18) у формулу Журавського (6.34), отримаємо залежність τ від y

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^*}{b \cdot J_x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \quad (6.39)$$

Із залежності (6.39) при $y = 0$ маємо:

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}, \quad (6.40)$$

де F – площа всього прямокутника.

Для круглого перерізу (рис. 6.13) формули для τ і τ_{\max} , які одержані подібним чином, мають вигляд

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot R^2} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right), \quad (6.41)$$

При $y = 0$:
$$\tau = \tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}. \quad (6.42)$$

Як виходить з формул (6.39) і (6.41), залежності τ від y в обох випадках – квадратичні, тобто мають вигляд парабол другого ступеня (див. рис. 6.12, б, 6.13, б), тоді як залежності σ від y є прямолінійними (див. рис. 6.12, а, 6.13, а).

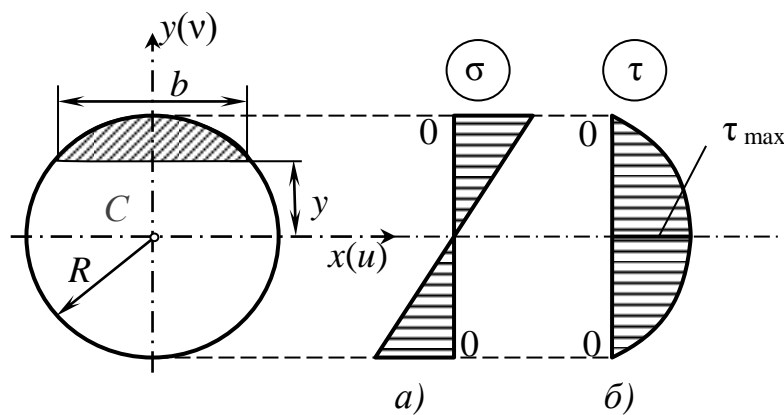


Рисунок 6.13

Розглянемо тепер двотавровий переріз, який спрощено можна вважати складеним з трьох прямокутників – двох полиць і стінки (рис. 6.14).

Щоб будувати епюру τ , необхідно визначити дотичні напруження в точках 1, 2, 2', 3 (див. рис. 6.14).

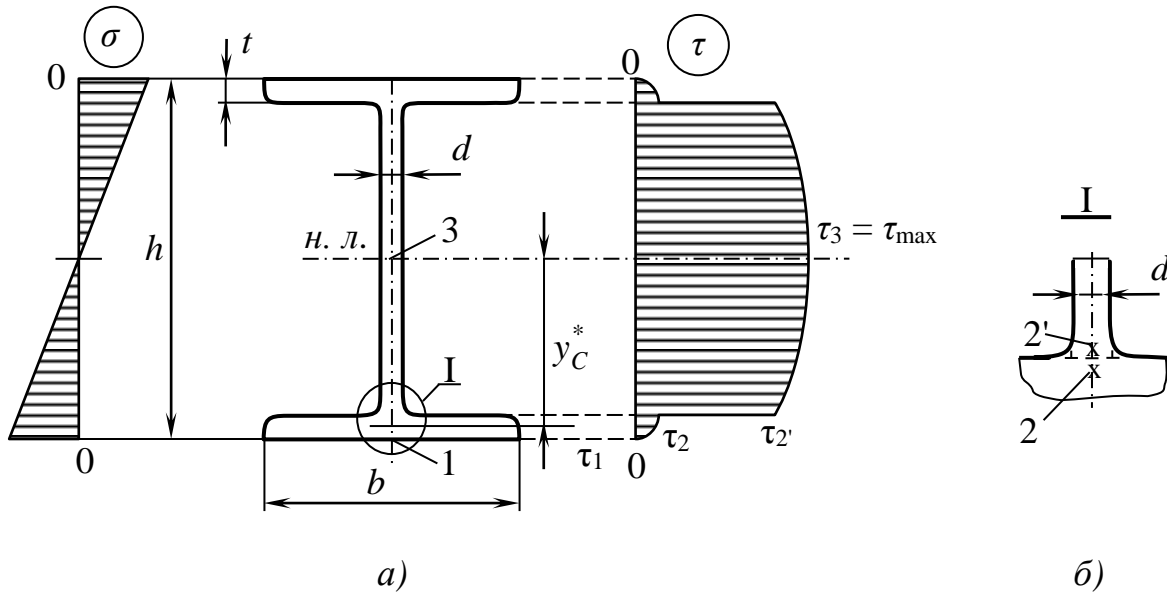


Рисунок 6.14

Точка 1 знаходиться на зовнішній поверхні полиці двотавра (рис. 6.14, а); для неї $S_x^* = 0$. Тоді

$$\tau_1 = 0. \quad (6.43)$$

Точка 2 розташована трохи нижче за лінію переходу від полиці до стінки (рис. 6.14, б), тому

$$\tau_2 = \frac{Q \cdot S_{x(2)}^*}{b \cdot J_x} = \frac{Q \cdot \left[b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \right]}{b \cdot J_x}. \quad (6.44)$$

Точка 2' розташована трохи вище за цю лінію (див. рис. 6.14, б); для неї

$$\tau_{2'} = \frac{Q \cdot S_{x(2')}^*}{d \cdot J_x} = \frac{Q \cdot \left[b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \right]}{d \cdot J_x} \gg \tau_2. \quad (6.45)$$

Точка 3 знаходиться на нейтральній лінії; для неї

$$\tau_3 = \frac{Q \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \tau_{\max}, \quad (6.46)$$

де S_x – статичний момент відносно осі x половини площі двотавра (див. дод. А).

Епюра τ має вигляд, показаний на рисунку 6.14, а. Її особливість – стрибок у місці переходу від полиці до стінки. До і після цього місця τ змінюється за відповідними параболічними законами.

Слід зауважити, що всі викладки, наведені для двотаврів, повністю справедливі й для швелерів, які також мають дві полиці і стінку й однакові з двотаврами позначення геометричних параметрів.

Формули (6.40), (6.42) і (6.46) дозволяють визначати максимальні дотичні напруження в довільних перерізах балок розглянутих профілів залежно від величин діючих у них поперечних сил. Очевидно, що небезпечними з точки зору дотичних напружень будуть перерізи зазначених балок, у яких поперечні сили найбільші. З урахуванням цього, замінивши в наведених формулах величини Q на Q_{\max} , отримаємо відповідні вирази для τ_{\max} у всьому об'ємі цих балок:

прямокутник –
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{F}, \quad (6.47)$$

круг –
$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{\max}}{F}, \quad (6.48)$$

двотавр і швелер –
$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x}. \quad (6.49)$$

На практиці бувають випадки, коли балки мають інші форми поперечних перерізів. У таких випадках величини τ_{\max} визначають шляхом аналізування, подібного наведеному для двотавра, попередньо визначивши положення осі x (вона завжди проходить через центр ваги перерізу) і розрахувавши величини S_x і J_x .

Умова міцності балки за дотичними напруженнями має вигляд

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad (6.50)$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, яке визначається в частках від допустимого нормального напруження – $[\sigma]$ за третьою або четвертою теоріями міцності:

$$[\tau]_{III} = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot [\sigma] = 0,5 \cdot [\sigma], \quad (6.51)$$

$$[\tau]_{IV} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot [\sigma] \approx 0,6 \cdot [\sigma]. \quad (6.52)$$

Обґрунтування залежностей (6.51) і (6.52) подається в розділі 8.

6.3 Еквівалентні напруження при поперечному згинанні. Повний розрахунок балок на міцність

Як видно на рисунках 6.12...6.14, місця дії максимальних нормальних і максимальних дотичних напружень у межах одного перерізу балки не співпадають. Найбільші за модулем нормальні напруження діють у крайніх і нижніх шарах волокон, саме там, де дотичні напруження відсутні. Максимальні ж дотичні напруження діють у нейтральних шарах наведених перерізів, де нормальні напруження дорівнюють нулю.

У проміжних шарах волокон одночасно діють і нормальні, і дотичні напруження. Їх сумісна дія може бути більш небезпечною, аніж дія σ_{\max} або τ_{\max} . Для оцінювання сумісної дії σ і τ в перерізах балок використовують зазвичай третю або четверту теорії міцності (див. підрозд. 5.7), визначаючи відповідні еквівалентні напруження через головні напруження σ_1 , σ_2 і σ_3 .

При поперечному згинанні балки всі зовнішні навантаження, поперечні сили Q і згинальні моменти M , також відповідні напруження діють у одній площині – уз (будемо вважати її вертикальною). Тож, у точках балки має місце плоский напружений стан, при якому одне з трьох зазначених головних напружень дорівнює нулю.

Величини двох інших головних напружень залежать не тільки від величин M і Q , що діють у тому чи іншому перерізі, але й від комбінації знаків цих факторів. Таких комбінацій чотири: $M > 0, Q > 0$; $M > 0, Q < 0$; $M < 0, Q > 0$; $M < 0, Q < 0$. Зважаючи на те, що в кожній з означених комбінацій знаків M і Q формули для підрахунку головних напружень у зонах розтягання і стискання різні, маємо усього вісім варіантів плоских напружених станів.

Розглянемо детально варіанти напружених станів у зонах стискання і розтягання балки, в перерізах якої $M > 0$ і $Q > 0$ (рис. 6.15).

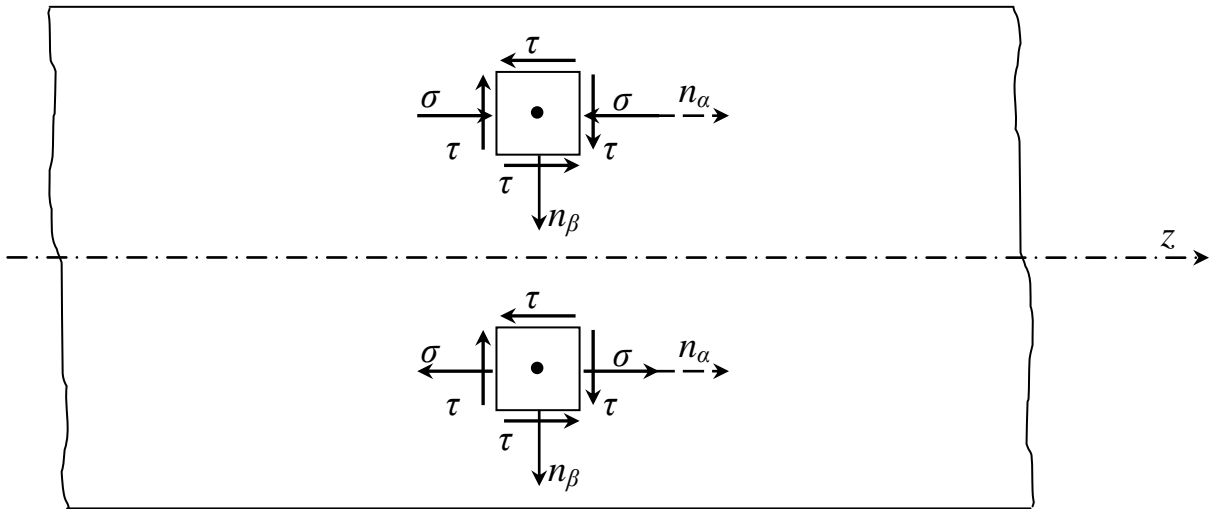


Рисунок 6.15

Для визначення головних напружень у зонах стискання і розтягання побудуємо відповідні кола Мора (рис. 6.16).

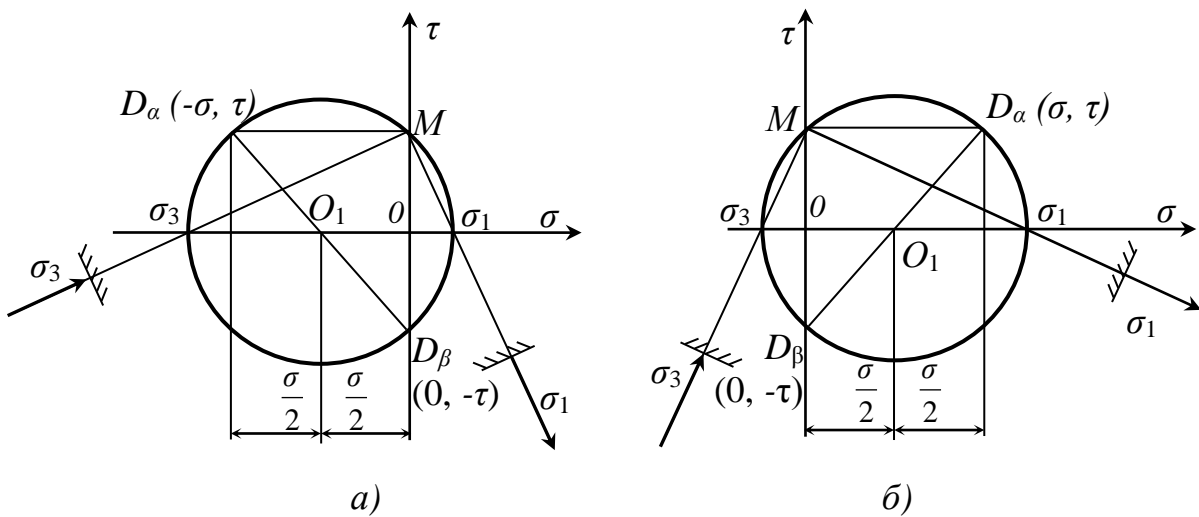


Рисунок 6.16

У зоні стискання (рис. 6.16, а):

$$\begin{cases} \sigma_1 = -\frac{\sigma}{2} + R, \\ \sigma_3 = -\frac{\sigma}{2} - R, \\ \sigma_2 = 0, \end{cases} \quad (6.53)$$

де R – радіус кола Мора:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (6.54)$$

У зоні розтягання (рис. 6.16, б):

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + R, \\ \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - R, \\ \sigma_2 = 0. \end{cases} \quad (6.55)$$

Значення R у зоні розтягання таке саме, як і у зоні стискання.

Еквівалентні напруження в зоні стискання за третьою теорією міцності (див. формулу (5.71)):

$$\begin{aligned} \sigma_{екв}^{III} &= \sigma_1 - \sigma_3 = -\frac{\sigma}{2} + R + \frac{\sigma}{2} + R = \\ &= 2R = 2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Ці напруження за четвертою теорією міцності (див. формулу (5.75)):

$$\begin{aligned} \sigma_{екв}^{IV} &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(-\frac{\sigma}{2} + R \right)^2 + (2R)^2 + \left(\frac{\sigma}{2} + R \right)^2 \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\sigma^2}{4} - \sigma \cdot R + R^2 \right) + 4R^2 + \left(\frac{\sigma^2}{4} + \sigma \cdot R + R^2 \right) \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sigma^2}{2} + 6R^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sigma^2}{2} + 6 \cdot \left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2 \right) \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [2\sigma^2 + 6\tau^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Підрахувавши аналогічно значення $\sigma_{екв}^{III}$ і $\sigma_{екв}^{IV}$ для зони розтягання, отримаємо такі самі результати, як і для зони стискання. Слід зауважити, що формули (6.56) і (6.57) справедливі для всіх можливих комбінацій знаків σ і τ .

Для зручності подальших викладок об'єднаємо ці формули:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + \alpha \cdot \tau^2}, \quad (6.58)$$

де $\alpha = 3$ – при підрахунку за четвертою теорією міцності;

$\alpha = 4$ – при використанні третьої теорії міцності.

Умова міцності за еквівалентними напруженнями має вигляд

$$\sigma_{екв}^{max} \leq [\sigma], \quad (6.59)$$

де $\sigma_{екв}^{max}$ – найбільше у всій балці еквівалентне напруження, визначене за допомогою формули (6.58).

Умова (6.59) разом з умовами міцності за нормальними (6.20)...(6.22) і дотичними (6.50) напруженнями створює комплекс умов для повного розрахунку балок на міцність.

Так, у випадку, коли розміри поперечного перерізу балки відомі, всі зазначені умови міцності використовуються для їх перевірки.

У разі ж, коли треба визначити потрібні розміри стандартних профілів балок – прямокутного, круглого, двотаврового та інших, у яких відомі значення осевого моменту опору – W_x , розрахунок ведеться дещо інакше. Спочатку з умови міцності за нормальними напруженнями (6.20) визначається потрібна величина W_x :

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}, \quad (6.60)$$

за якою підбираються відповідні розміри профілю, а вже потім вибраний профіль перевіряється на виконання умов міцності за дотичними (6.50) і еквівалентними (6.59) напруженнями.

Зрозуміло, що перевірка міцності за еквівалентними напруженнями потребує чіткої уяви про характер розподілу цих напружень за висотою перерізів балок. Зважаючи на те, що в загальному плані це питання не є достатньо вивченим, звернемось до результатів відповідних досліджень, проведених кафедрою технічної механіки ДДМА стосовно балок найбільше поширених профілів – прямокутного, круглого і двотаврового.

Зазначені дослідження показали, що в **прямокутному і круглому перерізах** балок максимальні еквівалентні напруження можуть діяти в нейтральному шарі ($y = 0$), в крайніх за висотою шарах волоко

($y = \pm \frac{h}{2}$, або $y = \pm R$), також в обох названих місцях одночасно [6].

У першому випадку (коли $\tau = \tau_{max}$, $\sigma = 0$) вони згідно з формулою (6.58) дорівнюють:

$$\sigma_{екв}^{max} = \tau_{max} \cdot \sqrt{\alpha}, \quad (6.61)$$

у другому (коли $\sigma = \sigma_{max}$, $\tau = 0$):

$$\sigma_{екв}^{max} = \sigma_{max}, \quad (6.62)$$

у третьому (коли $\sigma_{\max} = \tau_{\max} \cdot \sqrt{\alpha}$):

$$\sigma_{\text{екв}}^{\max} = \sigma_{\max} = \tau_{\max} \cdot \sqrt{\alpha}. \quad (6.63)$$

У проміжних же шарах волокон еквівалентні напруження ніколи не перевищують їх максимальних значень, вказаних у виразах (6.61)...(6.63).

Якщо підставити вираз (6.61) в умову міцності (6.59), не важко побачити, що вона перетворюється в умову міцності за дотичними напруженнями (6.50):

$$\tau_{\max} \cdot \sqrt{\alpha} \leq [\sigma], \text{ або } \tau_{\max} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot [\sigma], \text{ або } \tau_{\max} \leq [\tau].$$

Підстановка виразу (6.62) в умову міцності (6.59) вочевидь перетворює її на умову міцності за нормальними напруженнями (6.20):

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Таким чином, при виконанні умов міцності за нормальними і дотичними напруженнями у балок з прямокутним або круглим перерізами автоматично виконується і умова міцності за еквівалентними напруженнями, тому перевірка цієї умови у цьому випадку є зайвою.

Подібні дослідження, проведені відносно **двотаврових балок**, підтвердили існуючу точку зору, згідно з якою небезпечними місцями цього профілю з точки зору еквівалентних напружень є місця стику полиць і стінки двотавра (точки K на рисунку 6.17), в яких величини σ і τ хоча і не максимальні в перерізі, але достатньо великі одночасно. Разом з цим така точка зору під час досліджень була суттєво доповнена [7]–[9].

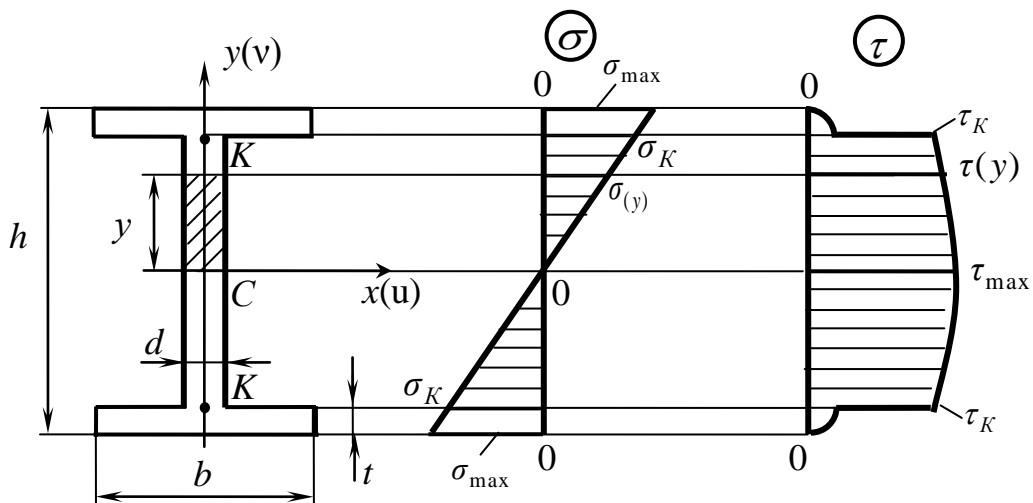


Рисунок 6.17

Дослідження базувались на залежності $\sigma_{екв}$ у межах стінки двотавра від координати y (див. рис. 6.17). Ця залежність на підставі формул (6.58), (6.12), (6.34) і сортаменту двотаврів (див. дод. А) має вигляд

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\left(\frac{M}{J_x} \cdot y\right)^2 + \alpha \cdot \left[\frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y^2\right)\right]^2}, \quad (6.64)$$

де M і Q – відповідно згинальний момент і поперечна сила, що діють в перерізі;

J_x – момент інерції перерізу відносно осі x ;

S_x – статичний момент половини перерізу відносно осі x ;

$\frac{1}{2} \cdot d \cdot y^2 = d \cdot y \cdot \frac{1}{2} y$ – статичний момент відносно осі x заштрихованої

частини стінки (див. формулу (3.3));

d – товщина стінки двотавра.

Дослідження залежності (6.64) на екстремум і низка подальших перетворень дозволили визначити так зване граничне відношення величин M і Q , при якому небезпечними за еквівалентними напруженнями є одночасно шари волокон двотавра на рівнях $y = 0$ та $y = y_K$ (див. рис. 6.17):

$$\left(\frac{M}{Q}\right)_{гр} = \frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot y_K} \cdot \sqrt{S_x^2 - \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2\right)^2}, \quad (6.65)$$

де $y_K = \frac{h}{2} - t$. (6.66)

При $\frac{M}{Q} < \left(\frac{M}{Q}\right)_{гр}$ небезпечним з точки зору $\sigma_{екв}$ є нульовий рівень ($y=0$). У цьому разі при виконанні в перерізі умови міцності за дотичними напруженнями умова міцності за еквівалентними напруженнями виконується автоматично (як і в прямокутному або круглому перерізах).

При $\frac{M}{Q} > \left(\frac{M}{Q}\right)_{гр}$ небезпечним з точки зору $\sigma_{екв}$ стає рівень точки K ($y = y_K$), при якому вираз (6.64) набуває вигляду

$$\sigma_{екв}^K = \sqrt{\left(\frac{M \cdot y_K}{J_x}\right)^2 + \alpha \cdot \left[\frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2\right)\right]^2}. \quad (6.67)$$

Умова міцності за еквівалентними напруженнями в цьому разі має вигляд

$$\sigma_{екв}^{\max} = \sigma_{екв}^K \leq [\sigma]. \quad (6.68)$$

6.4 Спрощена методика повного розрахунку на міцність двотаврових балок

Результати дослідження щодо еквівалентних напружень у двотаврових балках (див. підрозд. 6.3) дозволили створити спрощену (графоаналітичну) методику повного розрахунку на міцність цих балок, у якій залишились від традиційної (аналітичної) методики лише дії з визначення опорних реакцій і побудови епюр Q і M , а інші замінені певними графічними побудовами. Розглянемо її суть.

Основу цієї методики складають формули (6.67) і (6.68) з попереднього пункту.

Якщо підставити в умову міцності (6.68) вираз для $\sigma_{екв}^K$ (6.67), то, дещо перетворивши цей вираз, можна знайти межу виконання в точці K умови міцності за еквівалентними напруженнями:

$$[\sigma] \cdot \sqrt{M^2 \cdot \left(\frac{y_K}{J_x \cdot [\sigma]} \right)^2 + Q^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right) \right]^2} = [\sigma],$$

$$\text{або} \quad \sqrt{M^2 \cdot \left(\frac{y_K}{J_x \cdot [\sigma]} \right)^2 + Q^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right) \right]^2} = 1. \quad (6.69)$$

Рівність одиниці радикала у виразі (6.69) тягне за собою рівність одиниці його підкореневого виразу:

$$M^2 \cdot \left(\frac{y_K}{J_x \cdot [\sigma]} \right)^2 + Q^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right) \right]^2 = 1. \quad (6.70)$$

Не важко побачити, що рівняння (6.70) є рівнянням еліпса з півосями β і γ :

$$\frac{M^2}{\beta^2} + \frac{Q^2}{\gamma^2} = 1, \quad (6.71)$$

де
$$\beta = \frac{J_x \cdot [\sigma]}{y_K}, \quad (6.72)$$

$$\gamma = \frac{d \cdot J_x \cdot [\sigma]}{\sqrt{\alpha} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right)}. \quad (6.73)$$

Таким чином, виконання умови міцності (6.68) обмежене дугою зазначеного еліпса, побудованого в координатах $M - Q$ (рис. 6.18).

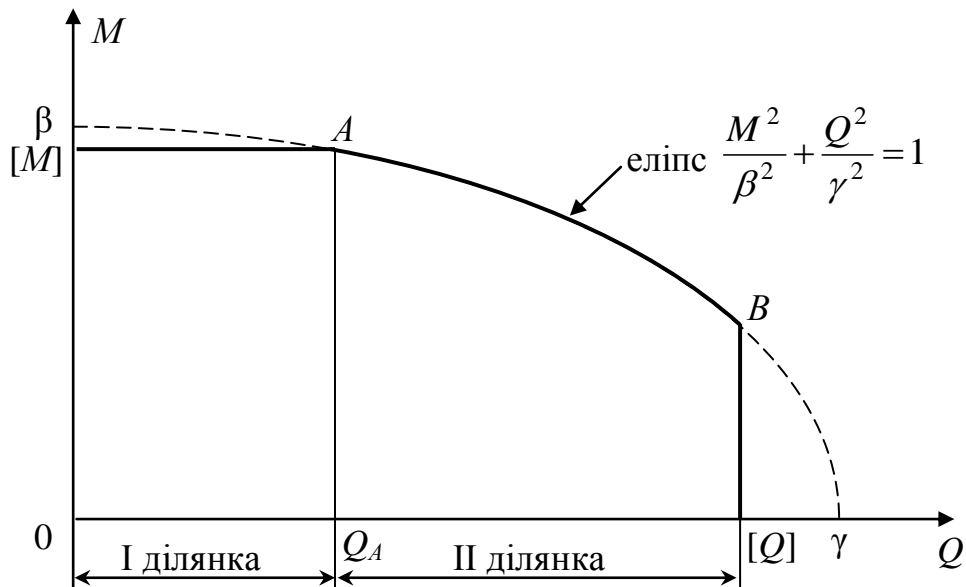


Рисунок 6.18

Частина координатної площини, яка обмежена осями координат і дугою еліпса (див. рис. 6.18), є геометричним місцем точок, в яких виконується умова міцності за еквівалентними напруженнями. Тут координатами кожної точки є величини (модулі) згинального моменту M і поперечної сили Q в тому чи іншому перерізі балки.

Щоб зробити зазначену область універсальною, тобто такою, де виконуються також умови міцності за нормальними і дотичними напруженнями, в неї внесені обмеження щодо величин згинальних моментів і поперечних сил. На рисунку 6.18 вони подані у вигляді відрізків прямих $M = [M]$ і $Q = [Q]$, де $[M]$ і $[Q]$ – допустимі величини M і Q у перерізах балки, які визначаються з відповідних умов міцності:

$$[M] = W_x \cdot [\sigma], \quad (6.74)$$

$$[Q] = \frac{d \cdot J_x \cdot [\sigma]}{S_x \cdot \sqrt{\alpha}}. \quad (6.75)$$

Області, в яких виконуються усі умови міцності двотаврових балок (див. рис. 6.18), назвемо *безпечними факторними просторами двотаврів*.

Як видно із формул (6.71)...(6.75), у кожного двотавра свій безпечний факторний простір, параметри якого залежать від розмірів двотавра, його матеріалу (через величину $[\sigma]$) і прийнятої теорії міцності (через коефіцієнт α).

У додатку Б наведені параметри безпечних факторних просторів для усіх номерів двотаврів, що виробляються промисловістю. Креслення цих просторів, побудовані в комп'ютерній системі *Mathcad*, містяться в додатку В.

При розрахунку вказаних параметрів геометричні характеристики двотаврів були взяті з додатку А. Розрахунок виконаний для сталі Ст.3, яка є найбільш поширеною у виробництві двотаврів (у неї $[\sigma]=160\text{МПа}$), і третьої теорії міцності (у якої $\alpha=4$), яка більш надійна в порівнянні з четвертою (див. далі).

Щоб скористуватись безпечним факторним простором для того чи іншого номера двотавра, слід відмітити на ньому всі точки, координатами яких є пари значень M і Q (без урахування їх знаків) в кожному з характерних перерізів балки, що беруться з епюр згинальних моментів і поперечних сил.

Якщо всі відмічені точки не виходять за межі безпечного факторного простору, міцність балки є повністю забезпеченою. У разі ж, коли хоча б одна точка лежить поза його межами, якась умова міцності не виконується і цей номер двотавра не є прийнятним. Так, наприклад, у перерізі 1 (див. точку 1 на рис. 6.19) не виконується умова міцності за нормальними напруженнями, в перерізі 2 – за дотичними, в перерізі 3 – за еквівалентними. У перерізах 4, 5 і 6 виконуються всі умови міцності.

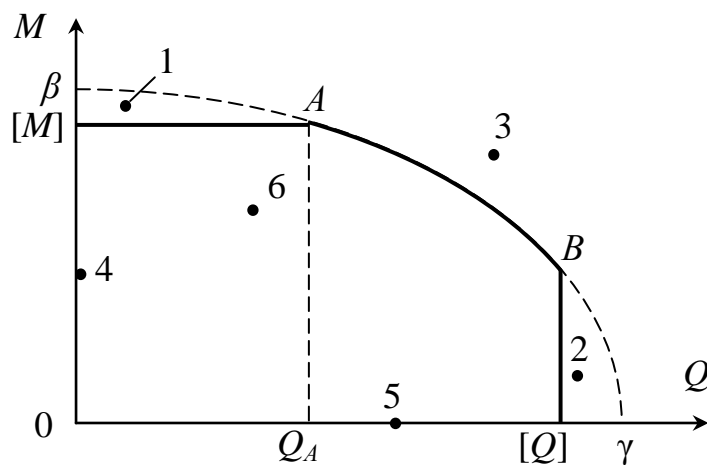


Рисунок 6.19

При негативному результаті перевірки треба взяти наступний у розмірному ряду номер двотавра і спробу повторити. І так до тих пір, поки всі точки не опиняться в межах безпечного факторного простору.

Слід звернути увагу на те, що площа безпечного факторного простору за третьою теорією міцності менша, ніж за четвертою, бо величини γ і $[Q]$, як це виходить з виразів (6.73) і (6.75), у своїх знаменниках мають величину α , яка більша за третьою теорією (див. вирази 6.58). Цей факт є підставою для використання саме третьої теорії, як більш надійної, при перевірці міцності двотаврів.

Запропоновану методику розглянемо в дії на прикладі балки, зображеної на рисунку 6.20. Для порівняння наведемо також розрахунок цієї балки за традиційною методикою [10].

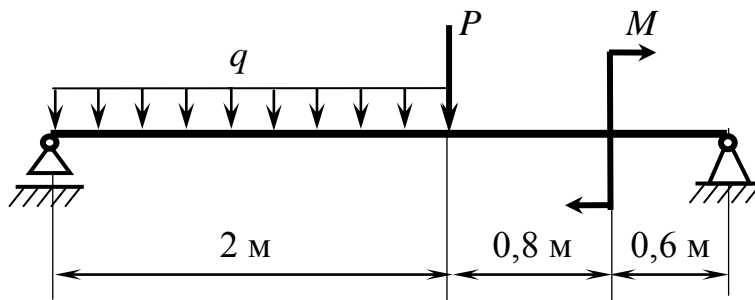


Рисунок 6.20

Приклад 6.1. Для заданої балки (див. рис. 6.20) визначити потрібний з умов міцності номер двотавра, якщо $q = 50$ кН/м; $P = 55$ кН; $M = 45$ кН·м; $[\sigma] = 160$ МПа. Завдання розв'язати за традиційною і запропонованою методиками, використовуючи III теорію міцності.

Розв'язання

Традиційна методика

1. Визначаємо опорні реакції балки і позначаємо її характерні перерізи (рис. 6.21, а):

$$\sum m_A = -q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M + R_B \cdot 3,4 = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{3,4} \cdot (q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 2 + M) = \frac{1}{3,4} \cdot (100 + 110 + 45) = 75 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = -R_A \cdot 3,4 + q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M = 0.$$

$$R_A = \frac{1}{3,4} \cdot (q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M) = \frac{1}{3,4} \cdot (240 + 77 - 45) = 80 \text{ кН.}$$

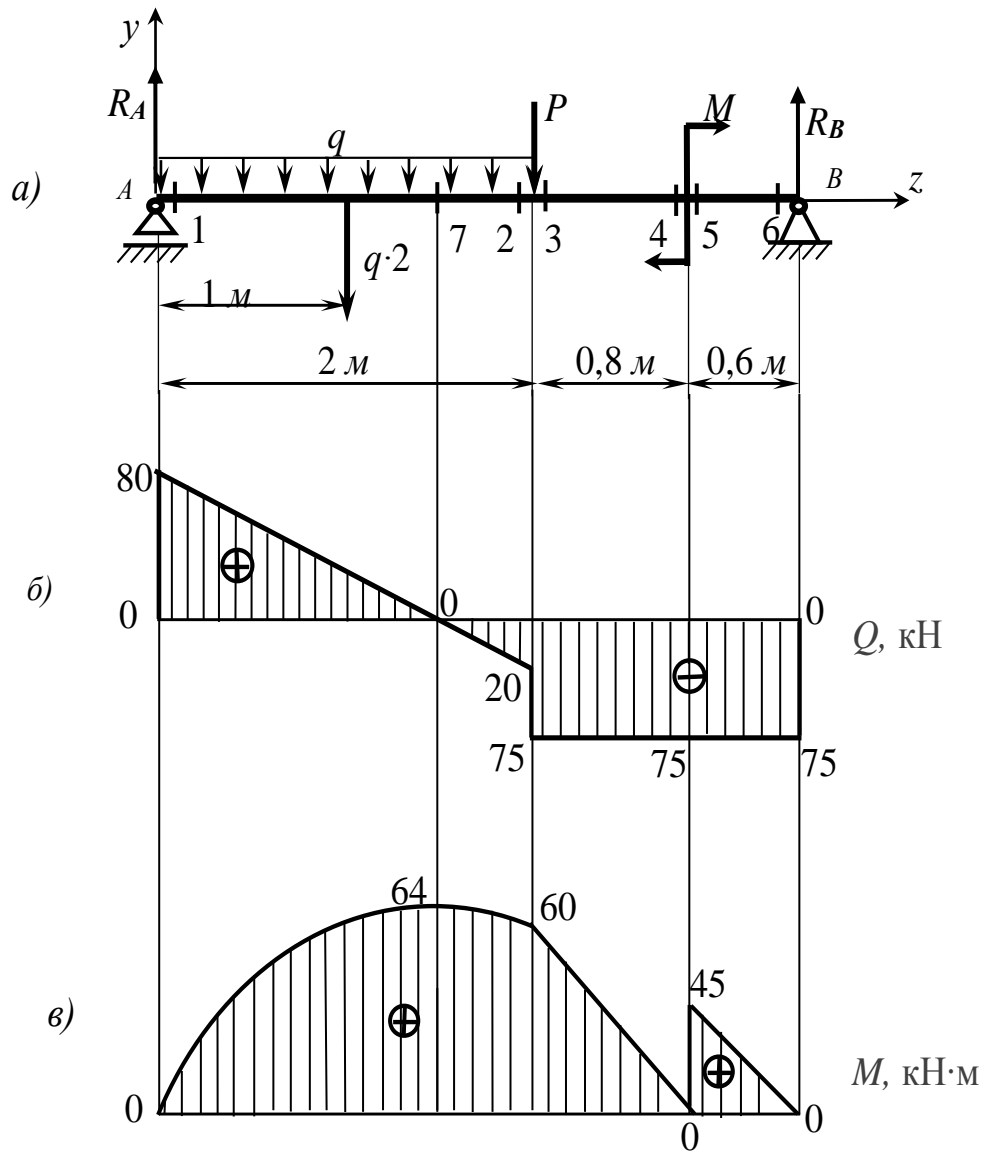


Рисунок 6.21

Перевірка:

$$\sum P_y = P_A - q \cdot 2 - P + R_B = 80 - 100 - 55 + 75 = -155 + 155 = 0,$$

тобто розрахунок виконано вірно.

2. Підраховуємо значення поперечних сил у характерних перерізах балки:

$$Q_1 = R_A = 80 \text{ кН}; Q_2 = Q_1 - q \cdot 2 = 80 - 100 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_2 - P = -20 - 55 = -75 \text{ кН}; Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_3 = -75 \text{ кН};$$

$$z_7 = Q_1 : q = 80 : 50 = 1,6 \text{ м.}$$

Будуємо епюру поперечних сил (рис. 6.21, б).

3 Підраховуємо значення згинальних моментів у характерних перерізах балки:

$$M_1 = 0; M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 160 - 100 = 60 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = R_A \cdot 2,8 - q \cdot 2 \cdot 1,8 - P \cdot 0,8 = 224 - 180 - 44 = 0;$$

$$M_5 = M_4 + M = 0 + 45 = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_6 = 0;$$

$$M_7 = R_A \cdot z_7 - q \cdot z_7 \cdot \frac{z_7}{2} = 128 - 64 = 64 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 6.21, в).

4. З умови міцності за нормальними напруженнями (див. формулу (6.60)) визначаємо потрібний осьовий момент опору перерізу балки:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{64 \cdot 10^3}{160} = 400 \text{ см}^3.$$

5. З відповідної таблиці сортаменту (див. дод. А) визначаємо потрібний номер двотавра і його основні параметри (див. рис. 6.17).

Приймаємо двотавр 27а, у якого $W_x = 407 \text{ см}^3$; $J_x = 5500 \text{ см}^4$; $S_x = 229 \text{ см}^3$; $h = 270 \text{ мм}$; $b = 135 \text{ мм}$; $d = 6,0 \text{ мм}$; $t = 10,2 \text{ мм}$.

6. Перевіряємо міцність балки за нормальними напруженнями (див. формулу (6.20)):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{64 \cdot 10^6}{407 \cdot 10^3} = 157,248 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Тож, міцність за нормальними напруженнями забезпечена.

Слід зауважити, що в цій задачі номер профілю балки було визначено саме з цієї умови міцності, тому ця перевірка не є обов'язковою. Вона обов'язкова, коли номер профілю відомий (тобто заданий).

7. Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями (див. формули (6.49)):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 229 \cdot 10^3}{6,0 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 55,515 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = [\tau]_{III} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma] = \frac{1}{2} \cdot 160 = 80 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} < [\tau].$$

Тож, міцність балки і за дотичними напруженнями забезпечена.

8. Визначаємо місце дії в балці максимальних еквівалентних напружень.

Аналізування побудованих епюр дозволяє вважати небезпечним з точки зору еквівалентних напружень переріз 3, у якому величини Q і M мають хоча і не максимальні, але близькі до них значення: $Q = 75$ кН, $M = 60$ кН·м. Відношення M/Q в цьому перерізі становить:

$$\frac{M}{Q} = \frac{60 \cdot 10^6}{75 \cdot 10^3} = 800 \text{ мм.}$$

У балці означеного профілю (двотавр 27а) граничне значення M/Q (див. формули (6.65), (6.66)) становить:

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{Q}\right)_{\text{гр}} &= \frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot y_K} \cdot \sqrt{S_x^2 - \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{4}}{6,0 \cdot 124,8} \cdot \sqrt{(229 \cdot 10^3)^2 - \left(229 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 6,0 \cdot 124,8^2\right)^2} = 370,2 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Тут
$$y_K = \frac{h}{2} - t = \frac{270}{2} - 10,2 = 124,8 \text{ мм.}$$

Оскільки $\frac{M}{Q} > \left(\frac{M}{Q}\right)_{\text{гр}}$, найбільші еквівалентні напруження в

небезпечному перерізі будуть діяти на рівні $y = y_K$: $\sigma_{\text{екв}}^{\text{max}} = \sigma_{\text{екв}}^K$.

Слід зауважити, що в менш очевидному випадку визначення небезпечного перерізу слід взяти до уваги всі потенційно небезпечні перерізи балки і по кожному з них застосувати наведену вище процедуру.

9. З урахуванням місця дії максимальних еквівалентних напружень визначимо їх величину і перевіримо відповідну умову міцності (див. формули (6.67), (6.68)):

$$\sigma_K = \frac{M}{J_x} \cdot y_K = \frac{60 \cdot 10^6}{5500 \cdot 10^4} \cdot 124,8 = 136,145 \text{ МПа;}$$

$$\begin{aligned} \tau_K &= \frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2\right) = \\ &= \frac{75 \cdot 10^3}{6,0 \cdot 5500 \cdot 10^4} \cdot \left(229 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 6,0 \cdot 124,8^2\right) = 41,426 \text{ МПа;} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{екв}}^K = \sqrt{\sigma_K^2 + 4 \cdot \tau_K^2} = \sqrt{136,145^2 + 4 \cdot 41,426^2} = 159,374 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Тож, і за еквівалентними напруженнями міцність балки є забезпеченою.

Слід зауважити, що при невиконанні хоча б однієї з умов міцності треба взяти наступний (більший) номер двотавра і перевірку повторити.

Запропонована методика

При цій методиці перші три дії розрахунку за традиційною методикою (1...3) повторюються.

4. З огляду на максимальне значення згинального моменту $M_{\max} = 64 \text{ кН}\cdot\text{м}$, находимо в додатку Б потрібний номер двотавра, тобто такий, у якого значення $[M]$ максимально наближене до M_{\max} :

$$[M] \geq M_{\max}.$$

Таким є двотавр 27а, у якого $[M] = 65,110 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Креслення його безпечного факторного простору, взяте з додатку В, з нанесеними на нього точками 1...7, координати яких дорівнюють значенням Q і M у відповідних перерізах балки, показано на рисунку 6.22.

Двотавр № 27а

$$\beta=70,513 \text{ кНм}, \gamma=144,836 \text{ кН}, [M]=65,110 \text{ кНм}, [Q]=115,284 \text{ кН}.$$

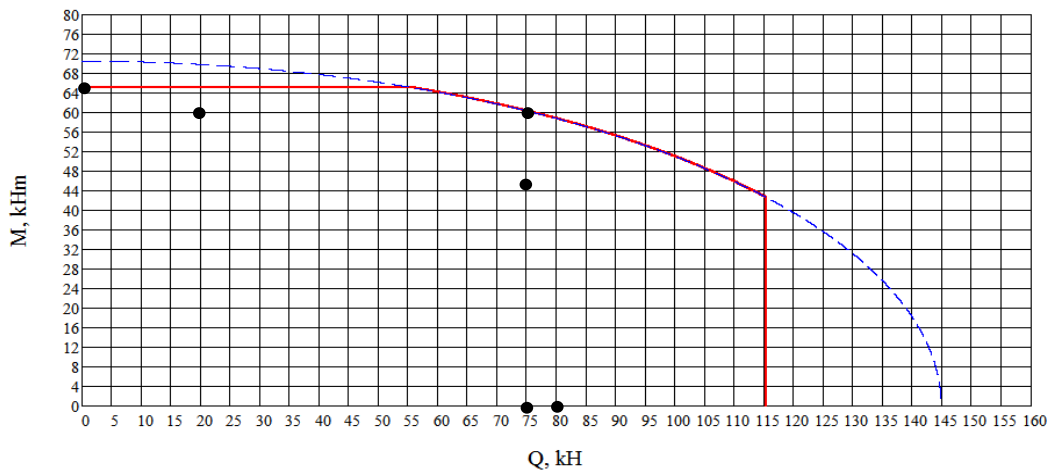


Рисунок 6.22

Як видно на рисунку 6.22, ні одна з нанесених точок не виходить за межі безпечного факторного простору. Це означає, що у всіх позначених перерізах балки виконуються всі умови міцності – за нормальними, дотичними і еквівалентними напруженнями, тобто що вибір двотавра 27а є правильним.

Щоб пересвідчитись у тому, що вибраний двотавр не є більшим за потрібний, достатньо перевірити на міцність за означеною процедурою його попередника у розмірному ряду – двотавр 27. Результат такої перевірки – негативний (рис. 6.23). Це свідчить про те, що двотавр 27а є

найменшим із двотаврів, які задовольняють усі зазначені умови міцності балки.

Двотавр № 27

$$\beta=64,026 \text{ кНм}, \gamma=147,557 \text{ кН}, [M]=59,360 \text{ кНм}, [Q]=114,515 \text{ кН}.$$

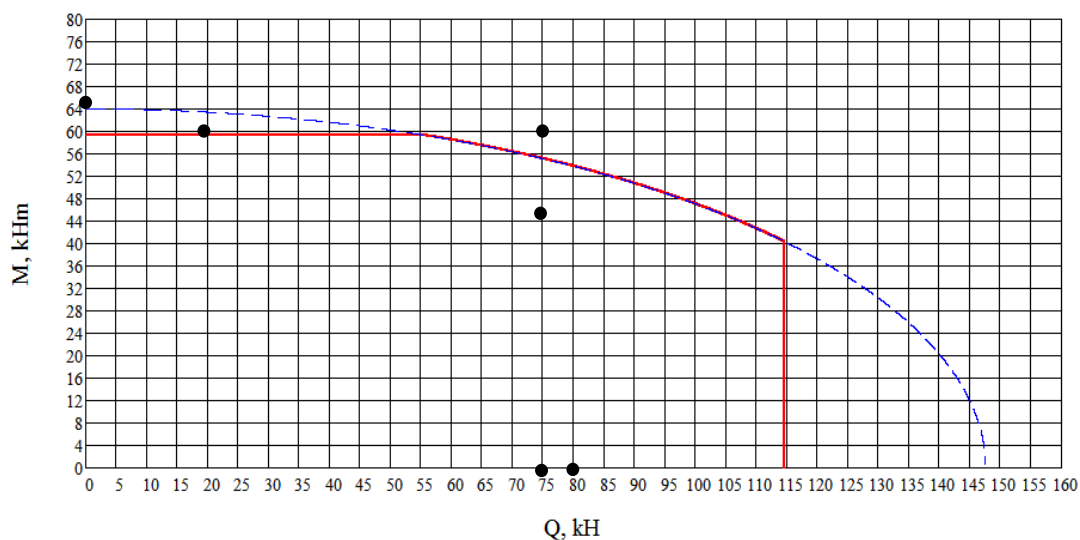


Рисунок 6.23

Порівняння результатів розрахунків за обома методиками, традиційною (аналітичною) і запропованою (графо – аналітичною), показує їх повну ідентичність. Що ж стосується витрат часу на виконання розрахунків, то вони в запропонованій методиці явно менші.

З метою максимального зменшення цих витрат були створені в середовищі *Mathcad* спеціальні комп'ютерні програми для реалізації запропонованої методики [11]–[13].

Ці програми стосуються двоопорних і консольних двотаврових балок. Вони є наскрізними, бо включають усі етапи розрахунку, починаючи з визначення опорних реакцій балки і закінчуючи визначенням мінімального номера двотавра, який забезпечує виконання всіх умов її міцності. Усі необхідні дії виконує комп'ютер в автоматичному режимі. Користувачу залишається лише ввести силові й геометричні параметри балки згідно з відповідною уніфікованою схемою і запустити процес.

Уніфікована схема двоопорної балки зображена на рисунку 6.24, уніфіковані схеми консольних балок (їх дві – з опорами зліва і справа) наведені на рисунках 6.25 і 6.26.

Комп'ютерний варіант розв'язання прикладу 6.1 наведений у додатку Г.

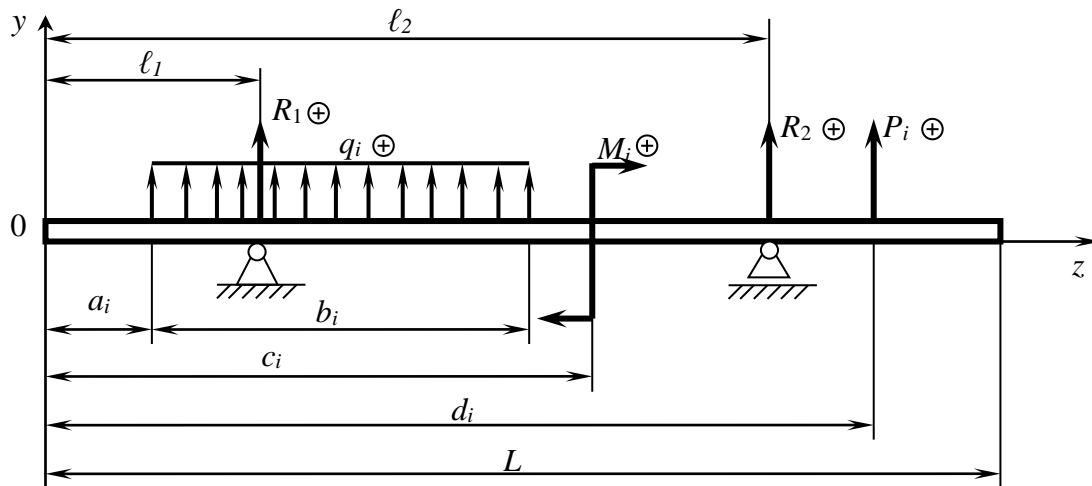


Рисунок 6.24

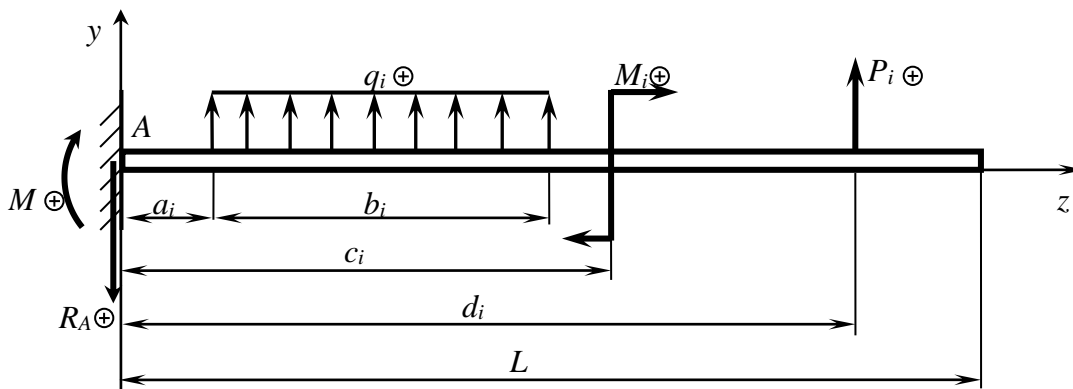


Рисунок 6.25

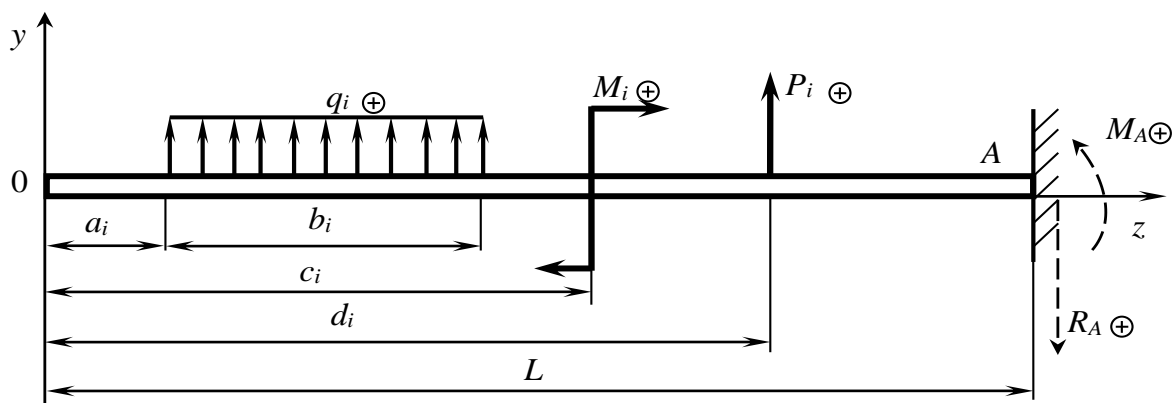


Рисунок 6.26

7 ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ ПЛОСКОМУ ЗГИНАННІ

7.1 Потенційна енергія балок і плоских рам

Розглянувши розтягання – стискання, ми отримали достатньо просту формулу для визначення деформацій стрижнів (див. формулу (2.6)). Подібні формули існують також при зсуві й крученні. Для згинання таких формул не існує. У цьому разі переміщення (лінійні та кутові) як в окремому стрижні, так і в стрижневих конструкціях залежать від схеми зовнішнього навантаження і в кожному конкретному випадку визначаються за допомогою універсальних енергетичних методів, у яких мірою пружної деформації є величина потенційної енергії, накопиченої в деформованому тілі.

При навантаженні пружного тіла зовнішніми силами точки прикладення цих сил переміщуються і сили виконують певну роботу. Ліва її частка перетворюється на потенційну енергію пружної деформації, що зберігається в тілі. Решта означеної роботи перетворюється на кінетичну енергію, яку отримують частинки тіла при їх переміщенні, також на теплову енергію, котра розсіюється в просторі.

При повільному (статичному) навантаженні втрати роботи зовнішніх сил незначні й ними зазвичай нехтують, вважаючи, що вся робота цих сил – $A^{(e)}$ перетворюється на потенційну енергію пружної деформації – Π :

$$\Pi = A^{(e)} . \quad (7.1)$$

Оскільки переміщення точок прикладення зовнішніх сил попередньо не відомі (саме їх і треба визначити), підрахувати величину Π через $A^{(e)}$ неможливо. Тому використовують інший підхід, в основі якого лежить метод перерізів, розглянутий у підрозділі 1.3 .

Реалізуючи цей підхід, виділимо із довільно навантаженого стрижня довжиною ℓ на ділянці, де нема зовнішніх сил, подовжній елемент довжиною dz (рис. 7.1).

У правому (видимому) перерізі виділеного елемента згідно з методом перерізів діють три сили – \bar{N} , \bar{Q}_x і \bar{Q}_y і три моменти – \bar{M}_x , \bar{M}_y і $\bar{M}_{кр}$. У лівому (невидимому) перерізі діють такі ж за величиною, але протилежні за напрямком силові фактори (вони на рис. 7.1 не показані). У відношенні до стрижня в цілому вони є внутрішніми, а у відношенні до виділеного елемента – зовнішніми.

У ненавантаженому стані стрижня потенційна енергія пружної деформації елемента – $d\Pi$ дорівнює нулю. Разом з нею дорівнюють нулю і означені силові фактори. У процесі навантаження зростає величина $d\Pi$, а разом з нею зростають і усі силові фактори, прикладені до виділеного елемента. Зважаючи на це, будемо умовно вважати, що саме вони деформують виділений елемент.

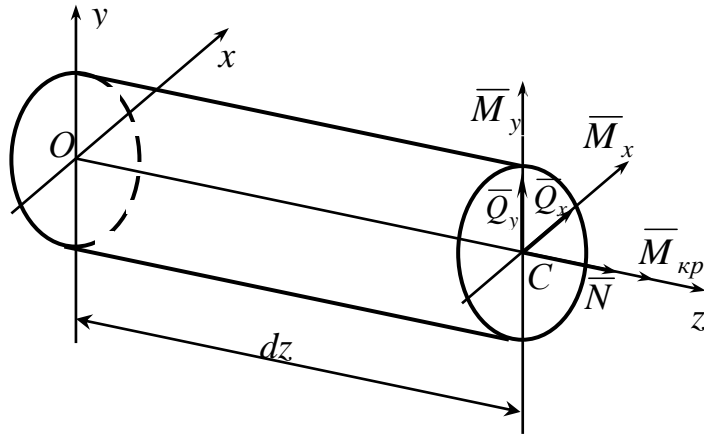


Рисунок 7.1

Роботу внутрішніх силових факторів виділеного елемента позначимо як dA . Для визначення величини цієї роботи умовно закріпимо лівий переріз елемента. Тоді вся робота з деформування елемента буде результатом сумісної дії силових факторів, зображених у його правому перерізі (див. рис. 7.1). Відійшовши від векторної символіки, маємо:

$$d\Pi = dA = dA(N) + dA(Q_x) + dA(Q_y) + dA(M_x) + dA(M_y) + dA(M_{кр}). \quad (7.2)$$

У випадку, коли виділений елемент належить балці, із шести складових у виразі для $d\Pi$ залишаються тільки дві – $dA(Q_y)$ і $dA(M_x)$, або просто $dA(Q)$ і $dA(M)$. Якщо ж елемент було виділено із стрижня плоскої рами, до них додається ще одна складова – $dA(N)$.

Зважаючи на те, що внесок поперечної і подовжньої сил у величину $d\Pi$ є набагато меншим за внесок згинального моменту, будемо вважати внесок останнього вирішальним. Тоді в обох випадках

$$d\Pi = dA(M). \quad (7.3)$$

Згідно з вже згаданою **теоремою Клапейрона** (див. підрозд. 5.5), робота згинального моменту у формулі (7.3) буде дорівнювати половині добутку кінцевої величини цього фактора на кінцеве переміщення від його дії, а саме:

$$dA(M) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot d\theta, \quad (7.4)$$

де $d\theta$ – взаємний кут повороту торцевих перерізів елемента (рис. 7.2).

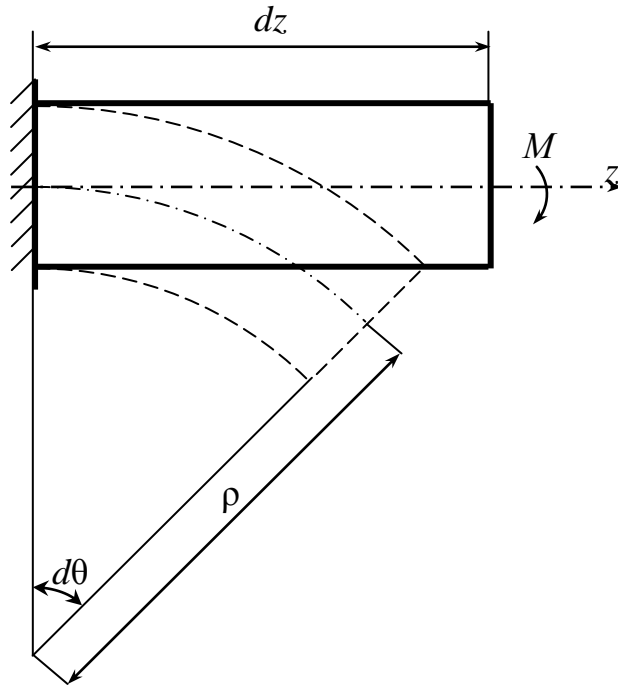


Рисунок 7.2

Величину $d\theta$ (див. рис. 7.2) знайдемо з умови незмінності довжини нейтрального шару волокон:

$$dz = \rho \cdot d\theta . \quad (7.5)$$

Звідси з урахуванням залежності (6.11):

$$d\theta = dz \cdot \frac{1}{\rho} = dz \cdot \frac{M}{E \cdot J_{oc}} , \quad (7.6)$$

де ρ – радіус кривизни нейтрального шару волокон елемента (див. підрозд. 6.1);

J_{oc} – осьовий момент інерції перерізу елемента.

Підставивши вирази (7.4) і (7.6) у формулу (7.3), остаточно маємо:

$$d\Pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 \cdot dz}{E \cdot J_x} . \quad (7.7)$$

Інтегруючи вираз (7.7) за довжиною стрижня ℓ , отримуємо:

$$\Pi = \int_{\ell} d\Pi = \frac{1}{2} \cdot \int_{\ell} \frac{M^2 \cdot dz}{E \cdot J_x} . \quad (7.8)$$

Формула (7.8) застосовується для підрахунку кількості потенційної енергії пружної деформації балок. У плоских рамах потенційна енергія є сумою потенційних енергій усіх їх стрижнів, підрахованих за формулою (7.8).

7.2 Теорема Кастільяно

Зв'язок потенційної енергії пружної деформації з переміщеннями в пружних тілах встановлює теорема, сформульована італійським механіком і інженером **К. А. Кастільяно** (1847–1884), згідно з якою *частинна похідна від потенційної енергії пружної деформації тіла за узагальненою силою дорівнює переміщенню точки прикладання цієї сили в напрямку її дії*:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_n} = \delta_n. \quad (7.9)$$

Тут під узагальненою силою розуміється або звичайна сила (P_n), або момент пари сил (M_n), а під переміщенням точки прикладення узагальненої сили – те переміщення (лінійне δ_n або кутове θ_n), на якому узагальнена сила виконує роботу.

У якості доведення зазначеної теореми наведемо такі міркування.

Розглянемо балку, що навантажена системою зосереджених сил P_1, P_2, \dots, P_n і перебуває в пружному стані. Під дією цих сил балка прогнеться за кривою I і залишиться в *рівновазі* (рис. 7.3, а).

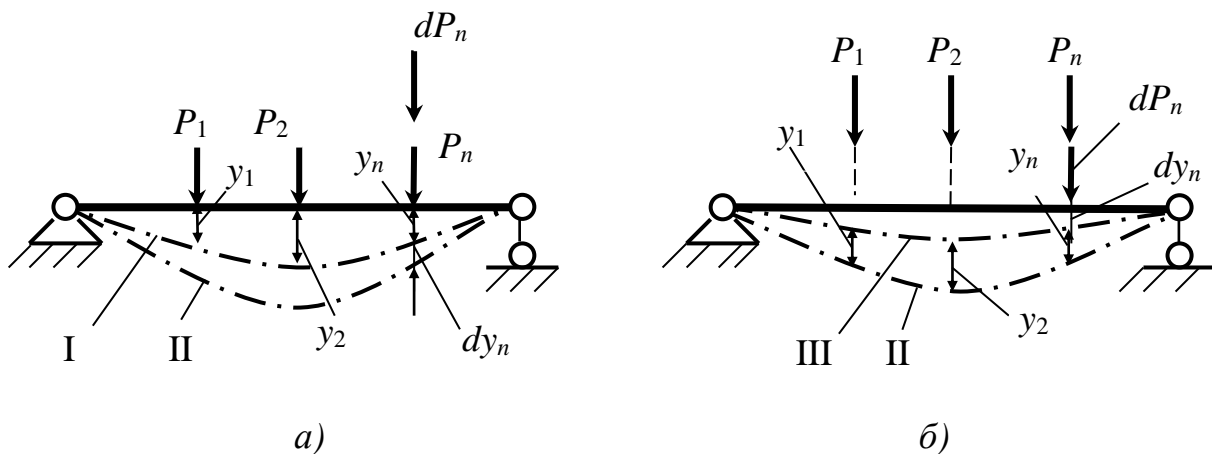


Рисунок 7.3

Необхідно визначити переміщення y_n . Для цього переведемо балку зі стану I в стан II шляхом додавання до балки безкінечно малої силової добавки dP_n . Зміна роботи при переході зі стану I в стан II дорівнює зміні потенційної енергії балки:

$$A_{II} - A_I = d\Pi. \quad (7.10)$$

Робота в I стані:

$$A_I = \frac{1}{2} P_1 \cdot y_1 + \frac{1}{2} P_2 \cdot y_2 + \dots + \frac{1}{2} P_n \cdot y_n. \quad (7.11)$$

Для визначення роботи в II стані спочатку прикладемо до балки силу dP_n , в результаті чого балка небагато прогнеться та обійме стан III (рис. 7.3, б), а потім навантажимо балку статично прикладеними силами P_1, P_2, \dots, P_n . При такій послідовності навантаження до початкових прогинів dy_1, dy_2, \dots, dy_n , спричинених силою dP_n , додадуться прогини y_1, y_2, \dots, y_n від сил P_1, P_2, \dots, P_n . Тоді робота в II стані буде такою:

$$A_{II} = \frac{1}{2} dP_n \cdot dy_n + \frac{1}{2} P_1 \cdot y_1 + \frac{1}{2} P_2 \cdot y_2 + \dots + \frac{1}{2} P_n \cdot y_n + dP_n \cdot y_n. \quad (7.12)$$

У виразі (7.12) остання складова взята без коефіцієнта $\frac{1}{2}$ тому, що при здійсненні роботи силами P_1, P_2, \dots, P_n сила dP_n вже знаходиться на балці і не змінюється.

Потенційна енергія балки Π є функцією всіх означених сил. Але оскільки в цьому випадку змінюється тільки сила P_n , то зміна потенційної енергії $d\Pi$ дорівнює:

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial P_n} \cdot dP_n. \quad (7.13)$$

Підставивши вирази (7.11)...(7.13) у формулу (7.10), після перетворень одержимо:

$$\frac{1}{2} dP_n \cdot dy_n + dP_n \cdot y_n = \frac{\partial \Pi}{\partial P_n} \cdot dP_n. \quad (7.14)$$

Відкидаючи у рівнянні (7.14) величину $\frac{1}{2} dP_n \cdot dy_n$ як малу другого порядку і скорочуючи обидві частини рівняння на dP_n , остаточно маємо:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_n} = y_n. \quad (7.15)$$

Порівнюючи вирази (7.15) та (7.9) і сприймаючи y_n як окреме значення узагальненого переміщення δ_n , бачимо повну їх ідентичність, тобто підтвердження справедливості теореми Кастільяно.

Зауважимо, що формула (7.9) при визначенні лінійних переміщень використовується зазвичай у своєму первинному вигляді, тоді як при визначенні кутових переміщень в ній слід замінити P_n на M_n , а лінійне переміщення δ_n на кутове θ_n . Тоді формула для θ_n (кута повороту) набуде вигляду

$$\theta_n = \frac{\partial \Pi}{\partial M_n}. \quad (7.16)$$

Слід зауважити, що практичне застосування теореми Кастільяно вельми обмежене, бо вона дозволяє визначати переміщення лише в тих точках пружних тіл, де прикладені зосереджені сили або моменти пар сил. Так, зокрема, з її допомогою можна визначити прогин балки (рис. 7.4) в точці A і кут повороту перерізу A (приклад 7.1).

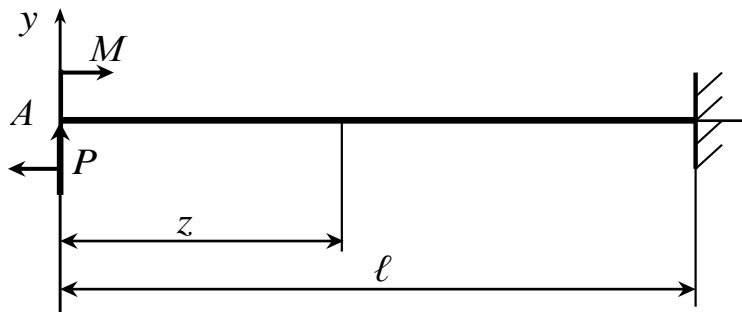


Рисунок 7.4

Розв'язання

1. У цьому випадку згинальний момент у перерізах балки дорівнює:

$$M(z) = M + P \cdot z.$$

Тому потенційна енергія пружної деформації балки згідно з формулою (7.8) буде такою:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\ell} \frac{(M + P \cdot z)^2 \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{1}{2E \cdot J_x} \times \\ &\times \int_{\ell} (M^2 + 2 \cdot M \cdot P \cdot z + P^2 \cdot z^2) \cdot dz = \\ &= \frac{1}{2E \cdot J_x} \cdot (M^2 \cdot \ell + M \cdot P \cdot \ell^2 + \frac{1}{3} \cdot P^2 \cdot \ell^3). \end{aligned}$$

2. Прогин балки в точці A (δ_A) – це переміщення точки прикладення сили P в напрямку її дії. Тому

$$\delta_A = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \frac{1}{2E \cdot J_x} \cdot \left(M \cdot \ell^2 + \frac{2}{3} P \cdot \ell^3 \right).$$

3. Кут повороту перерізу A (θ_A) – це кутове переміщення перерізу A , де прикладений момент M . Тому

$$\theta_A = \frac{\partial \Pi}{\partial M} = \frac{1}{2E \cdot J_x} \cdot (2M \cdot \ell + P \cdot \ell^2).$$

Значення знайдених переміщень додатні, тому їх напрямки співпадають з напрямками P і M (рис. 7.5).

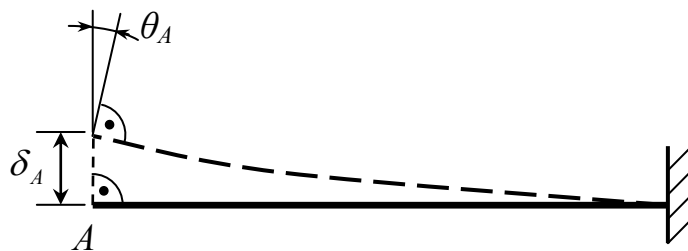


Рисунок 7.5

7.3 Метод Мора

Теорема Кастільяно в практиці інженерних розрахунків використовується вкрай рідко, бо не дозволяє визначати переміщення у точках конструкцій, де нема прикладених сил і моментів. Вона є неприйнятною також на ділянках з розподіленим навантаженням.

Цей недолік повною мірою виправляє метод, запропонований **О. Х. Мором**, уже згаданим у пунктах 5.4 і 5.7. Щоб зрозуміти його логіку, розглянемо якусь балку з відомим навантаженням, у довільній точці якої (для конкретики назвемо її A) нема прикладених сили і моменту пари сил.

Нехай треба визначити лінійне переміщення (прогин балки) в цій точці й кутове переміщення (кут повороту) перерізу, що проходить через цю точку.

Зрозуміло, що пряме застосування теореми Кастільяно в цьому випадку неможливе. Згідно з О. Х. Мором, для усунення цієї перешкоди треба прикласти до балки в заданій точці вертикальну фіктивну (тобто реально не існуючу) силу Φ і фіктивний момент Φ' , а вже потім застосувати до балки зазначену теорему. Подивимось, що з цього вийде.

Спочатку розглянемо наслідки прикладення до балки фіктивної сили Φ . При такому вельми неординарному кроці згинальний момент у перерізах балки дорівнюватиме:

$$M(z) = M + \bar{M} \cdot \Phi, \quad (7.17)$$

де M – згинальні моменти у перерізах балки від дії реального навантаження;

\bar{M} – згинальні моменти у перерізах балки від дії одиничної сили $P = 1$, прикладеної в заданій точці й спрямованої за напрямком фіктивної сили Φ .

Вираз для потенційної енергії пружної деформації балки в цьому випадку згідно з формулою (7.8) буде таким:

$$\Pi = \int_{\ell} \frac{(M + \bar{M} \cdot \Phi)^2}{2E \cdot J_x} \cdot dz. \quad (7.18)$$

Застосувавши теорему Кастільяно до виразу (7.18), маємо:

$$\delta_A = \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi} = \int_{\ell} \frac{2 \cdot (M + \bar{M} \cdot \Phi) \cdot (0 + \bar{M}) \cdot dz}{2E \cdot J_x}, \quad (7.19)$$

де δ_A – лінійне переміщення точки A .

А тепер згадаємо, що сили Φ у дійсності не існує (тобто, що $\Phi = 0$), і остаточно отримаємо вираз для δ_A :

$$\delta_A = \int_{\ell} \frac{M \cdot \bar{M} \cdot dz}{E \cdot J_x}. \quad (7.20)$$

Виконавши аналогічні дії стосовно фіктивного моменту Φ' , маємо відповідний вираз для кутового переміщення в точці A

$$\theta_A = \int_{\ell} \frac{M \cdot \bar{M}' \cdot dz}{E \cdot J_x}, \quad (7.21)$$

де \bar{M}' – згинальні моменти у перерізах балки від дії одиничного моменту $M = 1$, прикладеного в точці A й спрямованого за напрямком фіктивного моменту Φ'

Вирази (7.20) і (7.21) називають **інтегралами Мора**. Суть же методу Мора полягає саме в обчисленні цих інтегралів.

Зазначені інтеграли призначені для визначення лінійних і кутових переміщень у довільних точках як балок, так і плоских рам. При їх обчисленні треба мати на увазі такі особливості процесу.

Як у балках, так і в рамах конкретні напрямки обох переміщень у більшості випадків наперед не відомі. У таких випадках одиничні сили або моменти спрямовують довільно в той чи інший бік можливого переміщення, а істинний напрямок цього переміщення визначається за знаком його отриманого значення. Якщо це значення додатне, істинний напрямок цього переміщення збігається з прийнятим напрямком відповідного одиничного силового фактора (сили або моменту). При від'ємному ж значенні істинний напрямок цього переміщення є протилежним до напрямку відповідного одиничного силового фактора.

У випадку рами інтеграли Мора обчислюються для кожного стрижня окремо з подальшим складанням отриманих результатів з урахуванням їх знаків.

У рамах незакріплені точки можуть переміщуватись у двох напрямках – вертикальному і горизонтальному. Тому лінійним переміщенням точок рам надають відповідні індекси. Так, наприклад, вертикальне переміщення точки A рами позначається як δ_A^y , а горизонтальне переміщення цієї точки – як δ_A^z .

Процедуру визначення переміщень методом Мора проілюструємо таким прикладом.

Приклад 7.2. Для консольної балки, зображеної на рисунку 7.6, визначити прогин у точці A і кут повороту перерізу A , якщо відомі значення E , J_x , q , ℓ .

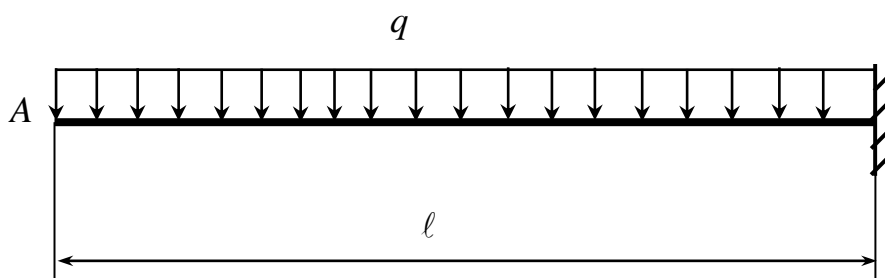


Рисунок 7.6

Розв'язання

1. Будемо епюри згинальних моментів від дії заданого навантаження – M , одиначної сили – \bar{M} і одиначного моменту – \bar{M}' , визначаємо залежності цих моментів від координати z (рис. 7.7).

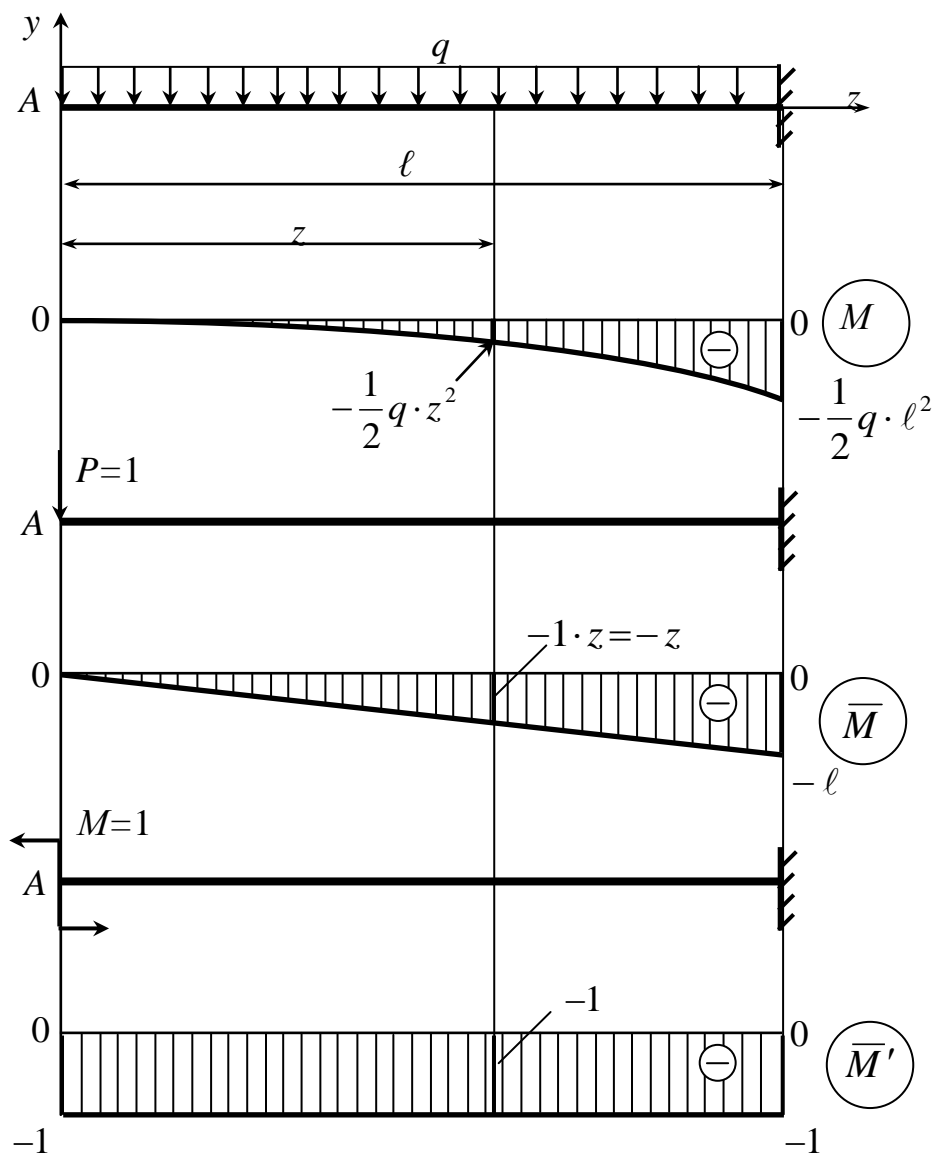


Рисунок 7.7

2. За допомогою інтеграла Мора (7.20) визначаємо прогин балки в точці A (тобто лінійне переміщення точки A):

$$\delta_A = \int_{\ell} \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot J_x} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_{\ell} \left(-\frac{1}{2} q \cdot z^2\right) \cdot (-z) \cdot dz = \frac{q \cdot \ell^4}{8E \cdot J_x}.$$

3. Аналогічно, застосовуючи інтеграл Мора (7.21) визначаємо кут повороту перерізу A :

$$\theta_A = \int_{\ell} \frac{M \cdot \bar{M}' \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_{\ell} \left(-\frac{1}{2} q \cdot z^2\right) \cdot (-1) \cdot dz = \frac{q \cdot \ell^3}{6E \cdot J_x}.$$

Звернемо увагу на те, що величини δ_A і θ_A є додатними. Це означає, що вказані переміщення спрямовані в напрямку відповідних одиничних силових факторів, а саме: δ_A – униз, θ_A – проти ходу стрілок годинника.

Як бачимо, прямий підрахунок інтегралів Мора (за допомогою формул інтегрального числення) не складний в разі, коли, так звана вантажна, епюра M має одну ділянку. У разі ж, коли цих ділянок декілька, такий шлях суттєво ускладнюється і його заміняють чисельним обчисленням зазначених інтегралів, варіанти якого розглядаються далі.

7.4 Чисельне обрахування інтегралів Мора

Інтеграли Мора в інженерній практиці зазвичай обраховують чисельно, тобто не застосовуючи формул інтегрального числення, що набагато простіше і вигідніше з огляду на витрати часу. Основу такого методичного підходу складає правило, яке було запропоноване в 1925 році майбутнім ученим і винахідником, тодішнім студентом Московського інституту інженерів залізничного транспорту **А. К. Верещагіним** (1896–1959) і носить його ім'я.

Правило Верещагіна стосується доволі поширеного випадку, коли ділянки балок і стрижнів рам є прямолінійними і мають постійну за їх довжиною (ℓ) жорсткість перерізу ($E \cdot J_x$). У цьому випадку епюри згинальних моментів від одиничних силових факторів (\bar{M} і \bar{M}') завжди лінійні. Вантажна ж епюра (M) при цьому може бути як лінійною, так і нелінійною.

Зазначене правило формулюється таким чином: *інтеграл добутку двох функцій, хоча б одна з яких лінійна, дорівнює добутку площі епюри першої функції на ординату епюри другої (лінійної) функції, що знаходиться під центром ваги епюри першої функції.*

Пересвідчимося у справедливості зазначеного ствердження.

Нехай, наприклад, необхідно обчислити інтеграл на ділянці довжиною ℓ від добутку $f_1(z) \cdot f_2(z)$, у якому функція $f_2(z)$ лінійна:

$$f_2(z) = b + k \cdot z, \quad (7.22)$$

де b і k – постійні коефіцієнти;

z – поточна координата (рис. 7.8).

У цьому випадку:

$$\int_{\ell} f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot dz = \int_{\ell} f_1(z) \cdot (b + k \cdot z) \cdot dz = b \cdot \int_{\ell} f_1(z) \cdot dz + k \cdot \int_{\ell} f_1(z) \cdot z \cdot dz =$$

$$= b \cdot \Omega_1 + k \cdot S_{1y} = b \cdot \Omega_1 + k \cdot \Omega_1 \cdot z_{C_1} = Q_1 \cdot (b + k \cdot z_{C_1}) = Q_1 \cdot h_2, \quad (7.23)$$

де Ω_1 – площа епюри $f_1(z)$ (див. рис. 7.8);

$S_{1y} = \Omega_1 \cdot z_{C_1}$ – статичний момент площі епюри $f_1(z)$ відносно осі y ;

z_{C_1} – абсциса центра ваги епюри $f_1(z)$;

h_2 – ордината епюри $f_2(z)$ під центром ваги епюри $f_1(z)$.

Таким чином, справедливість правила Верещагіна доведена.

Слід зауважити, що у випадку, коли обидві епюри лінійні, не важливо, яку з них треба вважати першою, а яку – другою.

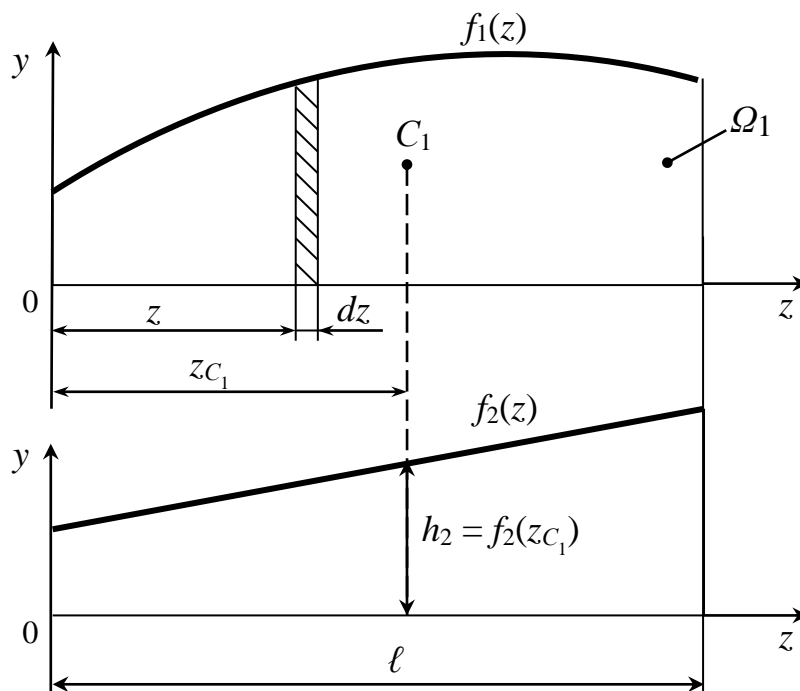


Рисунок 7.8

Використання правила Верещагіна надає інтегралам Мора (7.20) і (7.21) наступного, більш зручного для практичного вжитку вигляду

$$\delta_A = \int_{\ell} \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot J_x} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \Omega_1 \cdot h_2, \quad (7.24)$$

$$\theta_A = \int_{\ell} \frac{M \cdot \bar{M}'}{E \cdot J_x} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \Omega_1 \cdot h_2'. \quad (7.25)$$

Визначення переміщень за формулами (7.24) і (7.25) є достатньо простим, коли вантажна епюра M має просту геометричну форму, у якій відомі площа і розташування центра ваги (рис. 7.9...7.12).

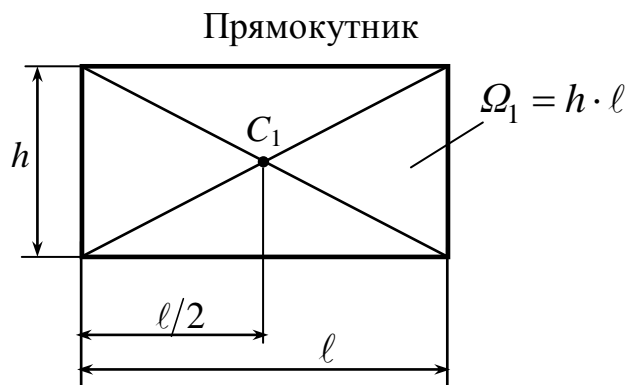


Рисунок 7.9

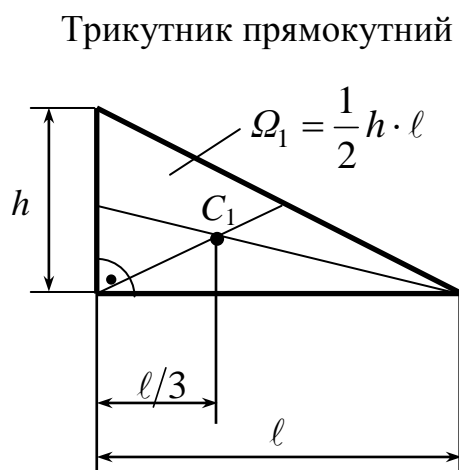


Рисунок 7.10

Трикутник параболічний опуклий

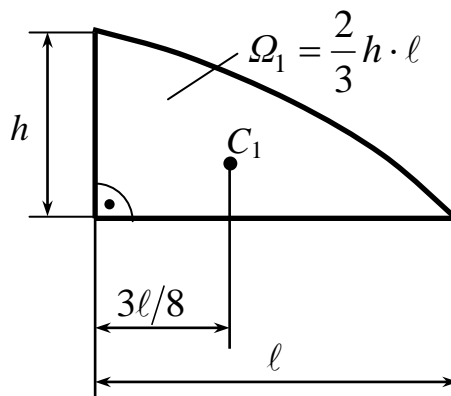


Рисунок 7.11

Трикутник параболічний угнутий

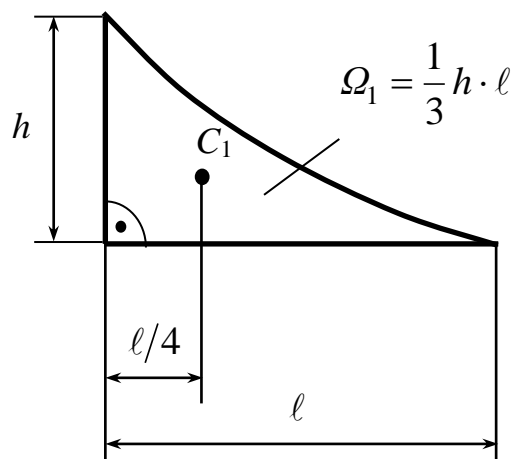


Рисунок 7.12

Слід зауважити, що наведені параметри параболічних трикутників стосуються лише тих із них, у яких параболи мають у найвищій (див. рис. 7.11) або найнижчій (див. рис. 7.12) своїх точках плавний перехід до горизонтальних дотичних. У разі ж відсутності такої ознаки користуватись наведеними параметрами не можна.

Розрахунок за формулами (7.24) і (7.25) проілюструємо таким прикладом.

Приклад 7.3. Для консольної балки, зображеної на рисунку 7.13, визначити за допомогою правила Верещагіна переміщення точки A і кут повороту перерізу A , якщо відомі значення E , J_x , q , l . Порівняти результати з отриманими в прикладі 7.2, де було застосоване пряме обчислення інтегралів Мора.

Розв'язання

Цього разу маємо (рис. 7.13):

$$\Omega_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} q \cdot l^2 \right) \cdot l = \frac{1}{6} q \cdot l^3; \quad h_2 = \frac{3}{4} l; \quad h'_2 = 1;$$

$$\delta A = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \Omega_1 \cdot h_2 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \frac{1}{6} q \cdot l^3 \cdot \frac{3}{4} l = \frac{q \cdot l^4}{8E \cdot J_x};$$

$$\theta_A = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \Omega_1 \cdot h'_2 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \frac{1}{6} q \cdot l^3 \cdot 1 = \frac{q \cdot l^3}{6E \cdot J_x}.$$

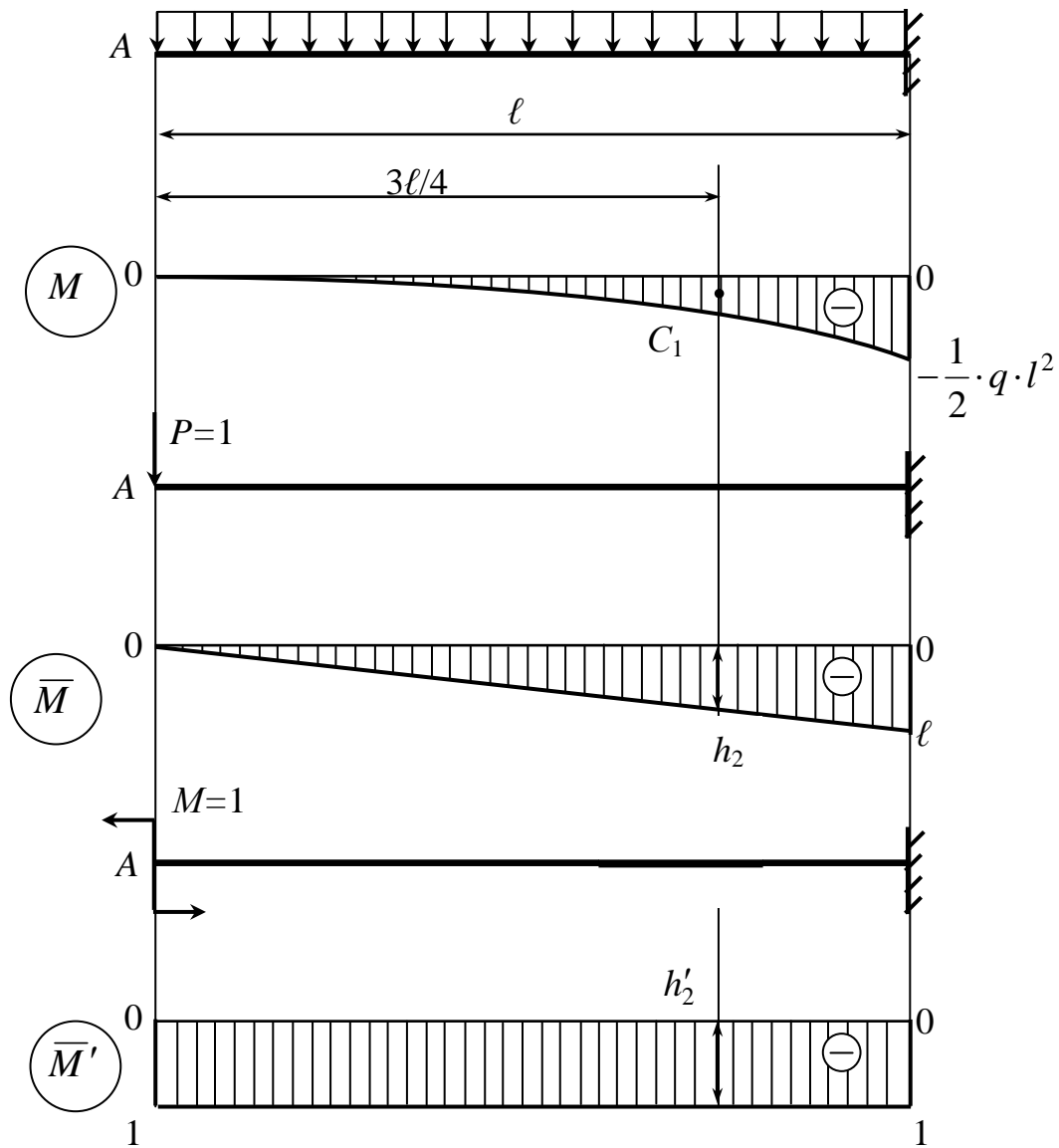


Рисунок 7.13

Звернемо увагу на знаки h_2 і h'_2 . Згідно з обґрунтуванням правила Верещагіна, розглянутим вище, вони вважаються додатними, коли епюри $f_1(z)$ і $f_2(z)$ лежать по один бік від своїх баз (нульових ліній), і від'ємними, коли вони розташовані по різні боки від них. У цьому випадку обидві ці епюри розташовані нижче (тобто по один бік) від своїх баз, тож h_2 і h'_2 взяті зі знаком плюс.

Як бачимо, отримані цього разу результати ідентичні одержаним у прикладі 7.2.

Порівняння двох наведених варіантів розв'язання достатньо простої задачі (див. приклади 7.2 і 7.3) дозволяє віддати перевагу другому з них, де застосоване правило Верещагіна, бо цей варіант є більш простим і таким, що не потребує спеціальних математичних знань. Однак, при ускладненні форми вантажної епюри M для застосування правила Верещагіна потрібні деякі специфічні прийоми (розшарування епюри та інші) і певний

практичний досвід. Щоб уникнути цих незручностей, часто користуються так званою **формулою крайніх ординат**, яка є розповсюдженням правила Верещагіна на довільну форму вантажної епюри і має універсальний характер. Цю формулу також називають формулою перемноження трапецій.

Для отримання зазначеної формули розглянемо спочатку ділянку стрижня, де нема розподіленого навантаження. На ній вантажна епюра M прямолінійна (рис. 7.14, а). Одиночна ж епюра \bar{M} (або \bar{M}') завжди прямолінійна (рис. 7.14, б).

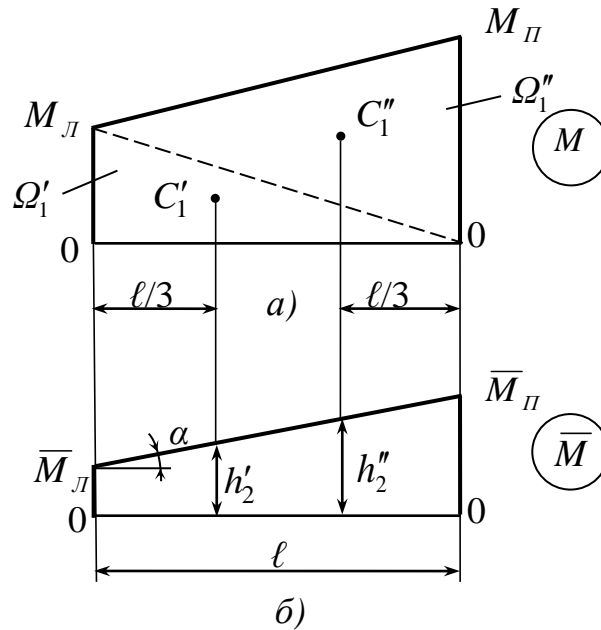


Рисунок 7.14

Щоб охопити усі можливі варіанти форм обох епюр, будемо вважати їхні крайні ординати – ліві (M_L, \bar{M}_L) і праві (M_P, \bar{M}_P) – алгебраїчними величинами, що мають знаки плюс або мінус. На рисунку 7.14 усі вони зображені як додатні. При розташуванні ж тієї чи іншої крайньої ординати нижче нульової лінії вона стає від'ємною.

Поділимо епюру M на два трикутники (див. рис. 7.14,а). Тоді, використовуючи правило Верещагіна, маємо для даної ділянки:

$$\int_{\ell} \frac{M \cdot \bar{M} \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot (\Omega'_1 \cdot h'_2 + \Omega''_1 \cdot h''_2), \quad (7.26)$$

де
$$\Omega'_1 = \frac{1}{2} \ell \cdot M_L; \quad (7.27)$$

$$\Omega_1'' = \frac{1}{2} \ell \cdot M_{II}; \quad (7.28)$$

$$h_2' = \bar{M}_{II} + \frac{\ell}{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \bar{M}_{II} + \frac{\ell}{3} \cdot \frac{\bar{M}_{II} - \bar{M}_{II}}{\ell} = \frac{2\bar{M}_{II} + \bar{M}_{II}}{3}; \quad (7.29)$$

$$h_2'' = \bar{M}_{II} + \frac{2}{3} \ell \cdot \operatorname{tg} \alpha = \bar{M}_{II} + \frac{2}{3} \ell \cdot \frac{\bar{M}_{II} - \bar{M}_{II}}{\ell} = \frac{\bar{M}_{II} + 2\bar{M}_{II}}{3}. \quad (7.30)$$

Підставивши (7.27)...(7.30) у (7.26), після перетворень отримаємо:

$$\int_{\ell} \frac{M \cdot \bar{M} \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{\ell}{6E \cdot J_x} \cdot (2M_{II} \cdot \bar{M}_{II} + 2M_{II} \cdot \bar{M}_{II} + M_{II} \cdot \bar{M}_{II} + M_{II} \cdot \bar{M}_{II}). \quad (7.31)$$

У випадку, коли на ділянці діє розподілене навантаження, еюра M стає криволінійною – опуклою або угнутою, а її площа відповідно збільшується або зменшується в порівнянні з трапецієподібною на величину Ω_1''' (рис. 7.15).

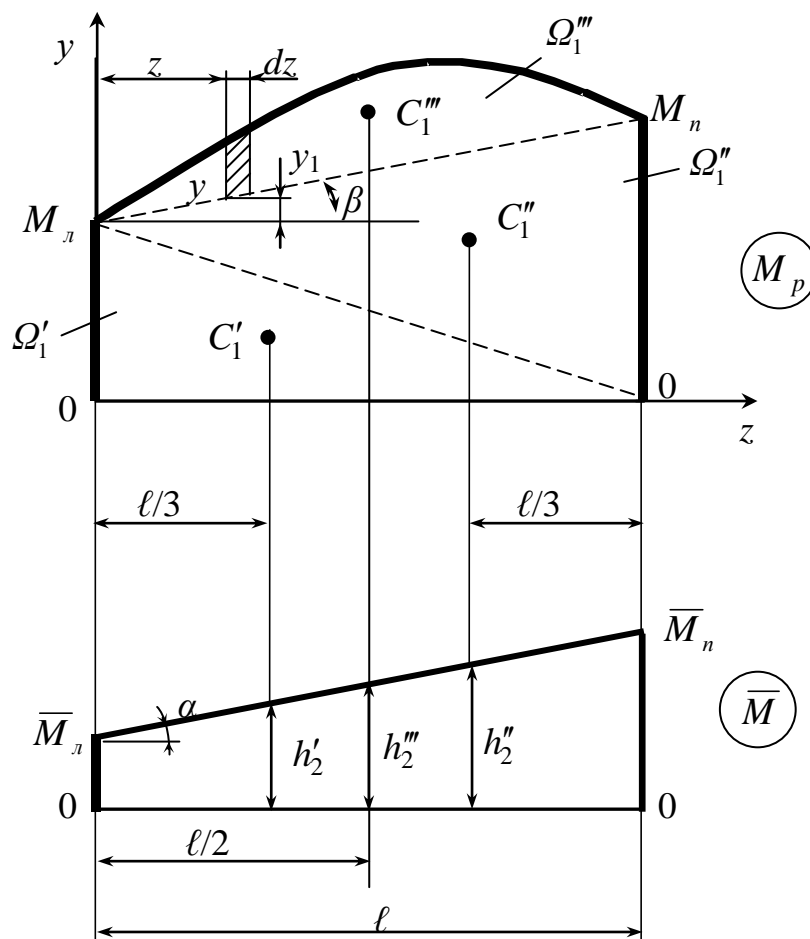


Рисунок 7.15

Для визначення величини Ω_1''' розглянемо спочатку вид еюри згинальних моментів у разі дії на ділянку балки довжиною ℓ одного лише

розподіленого навантаження інтенсивністю q (рис. 7.16). Виокремивши цю ділянку і приклавши до неї реакції $q \cdot \ell / 2$, бачимо, що епюра M у цьому випадку являє собою опуклий параболічний сегмент з рівнянням параболи

$$y = \frac{q \cdot \ell}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} = \frac{1}{2} q \cdot z \cdot (\ell - z). \quad (7.32)$$

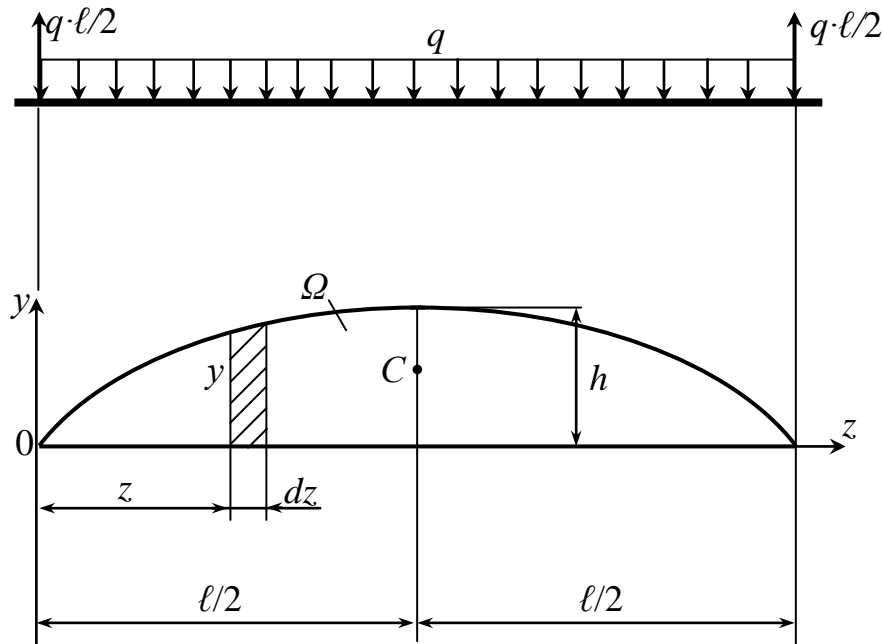


Рисунок 7.16

Площа цього сегмента:

$$\Omega = \int_{\ell} y \cdot dz = \dots = \frac{1}{12} q \cdot \ell^3. \quad (7.33)$$

Центр ваги сегмента (точка C) лежить на відстані $\ell / 2$ від осі y (див. рис. 7.16).

У загальній епюрі M (див. рис. 7.15) зазначений сегмент є zdeформованим шляхом підйому всіх його елементарних смужок на висоту y' :

$$y' = z \cdot \tan \beta = z \cdot \frac{M_{II} - M_{JI}}{\ell}. \quad (7.34)$$

Зрозуміло, що при такому перетворенні параболічного сегмента його площа не зміниться:

$$\Omega_1''' = \Omega = \int_{\ell} y \cdot dz = \frac{1}{12} q \cdot \ell^3. \quad (7.35)$$

Незмінним залишиться також його статичний момент відносно осі y :

$$S_{1y}''' = S_y = \int_{\ell} y \cdot z \cdot dz. \quad (7.36)$$

Рівність площ і статичних моментів параболічного сегмента до і після зазначеної деформації вказує на те, що відстань його центра ваги від осі y залишається незмінною і становить $\ell/2$. Таким чином (див. рис. 7.15):

$$h_2''' = \frac{1}{2} \cdot (\bar{M}_L + \bar{M}_n). \quad (7.37)$$

Додавання у підрахунок інтеграла Мора, яку вносить розподілене навантаження, становить:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \Omega_1''' \cdot h_2''' = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \frac{q \cdot \ell^3}{12} \cdot \frac{(\bar{M}_L + \bar{M}_n)}{2} = \\ &= \frac{q \cdot \ell^3}{24E \cdot J_x} \cdot (\bar{M}_L + \bar{M}_n). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Цю добавку називають *поправкою на кривизну*. У разі опуклої епюри M вона має знак «плюс», у разі угнутої – «мінус».

З урахуванням цієї поправки формула крайніх ординат набуває остаточного вигляду

$$\begin{aligned} \int_{\ell} \frac{M \cdot \bar{M} \cdot dz}{E \cdot J_x} &= \frac{\ell}{6E \cdot J_x} \cdot (2M_L \cdot \bar{M}_L + 2M_n \cdot \bar{M}_n + M_L \cdot \bar{M}_n + M_n \cdot \bar{M}_L) \pm \\ &\pm \frac{q \cdot \ell^3}{24E \cdot J_x} \cdot (\bar{M}_L + \bar{M}_n). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Підрахунок інтеграла Мора за допомогою формули крайніх ординат називають перемноженням епюр M і \bar{M} і позначають таким чином:

$$\int_{\ell} \frac{M_p \cdot \bar{M} \cdot dz}{E \cdot J_x} = M \times \bar{M}. \quad (7.40)$$

Формула (7.39) застосовується для кожної з ділянок балки, де обидві епюри не є нульовими, після чого отримані результати підсумовуються з урахуванням знаків.

Слід зауважити, що перед визначенням переміщень у тій чи іншій конкретній балці треба переконатись у відсутності в ній пластичних деформацій. Передумовою цього є виконання балкою умов міцності (див. підрозд. 6.3). Якщо розміри перерізу балки не задані, їх слід визначити, а вже потім розраховувати переміщення. Якщо ж ці розміри відомі, треба спочатку виконати перевірку балки на міцність.

Приклад 7.4. Підібрати переріз сталеві балки (двотавр), визначити з застосуванням формули крайніх ординат прогин цієї балки в точці H і кут повороту її перерізу K (рис. 7.17), якщо $[\sigma] = 160$ МПа.

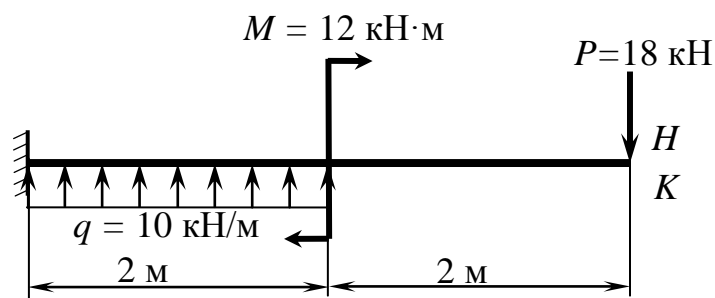


Рисунок 7.17

Розв'язання

1. На схемі балки помічаємо характерні перерізи (рис. 7.18, а).
2. Будуємо епюру поперечних сил (рис. 7.18, б):

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = P = 18 \text{ кН}; \quad Q_4 = Q_3 - q \cdot 2 = 18 - 10 \cdot 2 = -2 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_3 = -2 \text{ кН}; \quad \ell_5 = Q_4 : q = 2 : 10 = 0,2 \text{ м.}$$

3. Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 7.18, в):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = -P \cdot 2 = -18 \cdot 2 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = -P \cdot 2 - M = -18 \cdot 2 - 12 = -48 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = -P \cdot 4 - M + q \cdot 2 \cdot 1 = -18 \cdot 4 - 12 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = -64 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = -P \cdot (4 - \ell_5) - M + q \cdot (2 - \ell_5) \cdot 0,5 \cdot (2 - \ell_5) =$$

$$= -18 \cdot 3,8 - 12 + 10 \cdot 1,8 \cdot 0,9 = -68,4 - 12 + 16,2 = -64,2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

4. Визначаємо за формулою (6.60) потрібний осьовий момент опору перерізу двотавра :

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{64,2 \cdot 10^3}{160} = 401,3 \text{ см}^3.$$

5. З відповідної таблиці сортаменту (див. дод. А) визначаємо потрібний номер двотавра . Приймаємо двотавр 27а, у якого $W_x = 407 \text{ см}^3$ і $J_x = 5500 \text{ см}^4$.

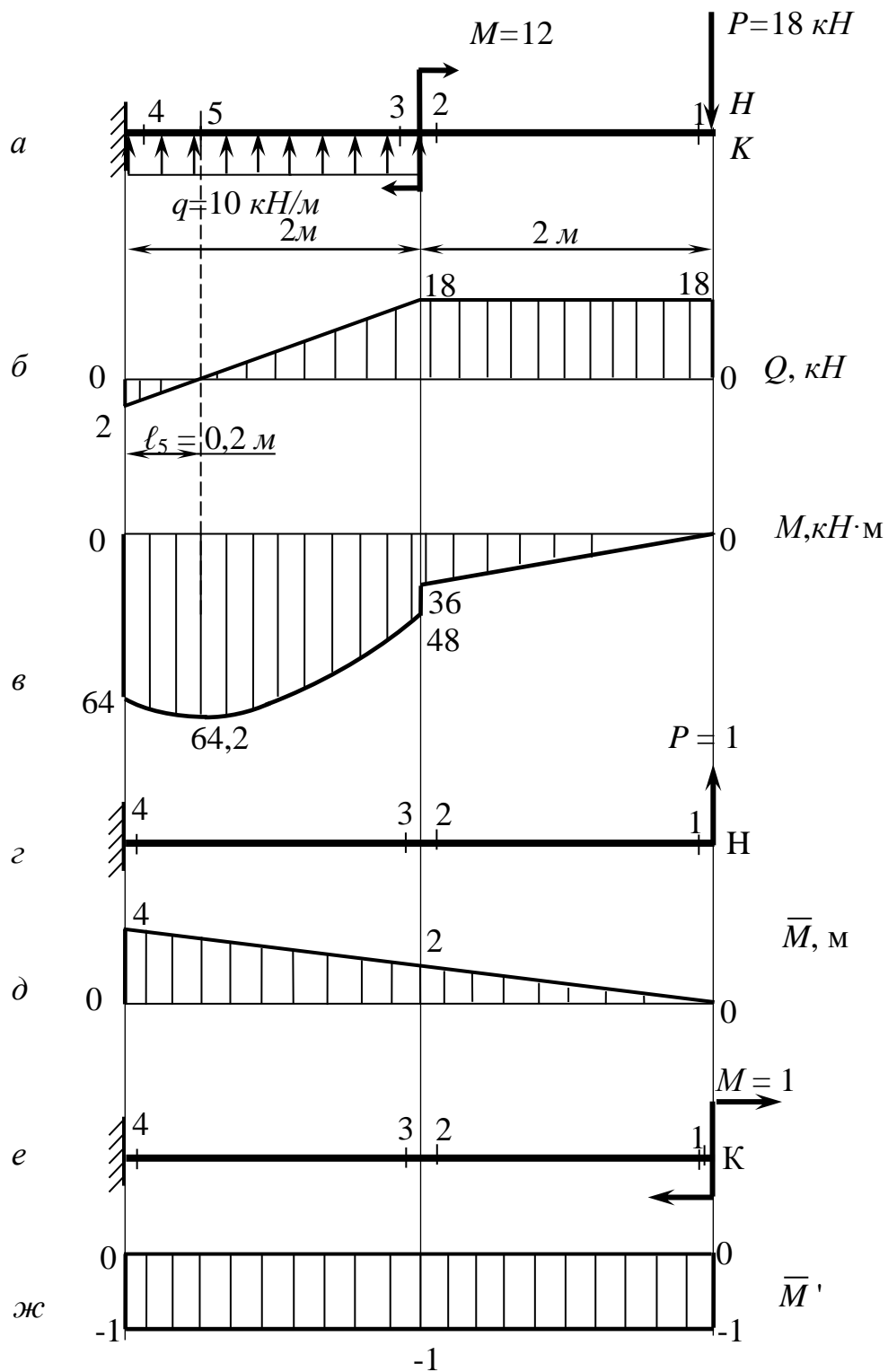


Рисунок 7.18

6. Для визначення лінійного переміщення в точці H балки прикладаємо в ній одиничну силу $P = 1$ (рис.7.18,г) і будуємо епюру \bar{M} (рис. 7.18, д):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = P \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}; \quad M_4 = P \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м}.$$

7. Величину лінійного переміщення в точці H балки визначаємо, «перемножуючи» епюри M (див. рис. 7.18, в) і \bar{M} (див. рис. 7.18, д) за формулою крайніх ординат:

$$\begin{aligned} \delta_H &= \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (-2 \cdot 64 \cdot 4 - 2 \cdot 48 \cdot 2 - 64 \cdot 2 - 48 \cdot 4) + \\ &+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (-2 \cdot 36 \cdot 2) - \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (4 + 2) = -\frac{2456}{6E \cdot J_x} = \\ &= -\frac{2456 \cdot 10^{12}}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^4} = -37,212 \text{ мм} = -37,212 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

Від'ємний результат вказує на те, що точка H переміщується в напрямку, протилежному одиничній силі, тобто униз.

8. Для визначення кута повороту перерізу K балки прикладаємо в цьому перерізі одиничний момент $M = 1$ (рис.7.18,е) і будуємо епюру \bar{M}' (рис. 7.18, ж):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M = -1.$$

9. Величину кутового переміщення перерізу K балки визначаємо, «перемножуючи» епюри M (див. рис. 7.17, в) і \bar{M}' (див. рис. 7.18, ж) за формулою крайніх ординат:

$$\begin{aligned} \theta_K &= M \times \bar{M}' = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 64 \cdot 1 + 2 \cdot 48 \cdot 1 + 64 \cdot 1 + 48 \cdot 1) + \\ &+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 36 \cdot 1 + 36 \cdot 1) - \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-1 - 1) = \\ &= \frac{928}{6E \cdot J_x} = \frac{928 \cdot 10^9}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 14,061 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} = 0,806 \text{ град.} \end{aligned}$$

Додатний результат вказує на те, що переріз K обертається за напрямком одиничного моменту, тобто за ходом стрілок годинника.

Приклад 7.5. Для сталеві рами (рис. 7.19) підібрати переріз (двотавр) і визначити за допомогою формули крайніх ординат вертикальне

і горизонтальне переміщення точки A і кут повороту перерізу A , якщо:
 $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $q = 10 \text{ кН/м}$; $P = 20 \text{ кН}$; $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

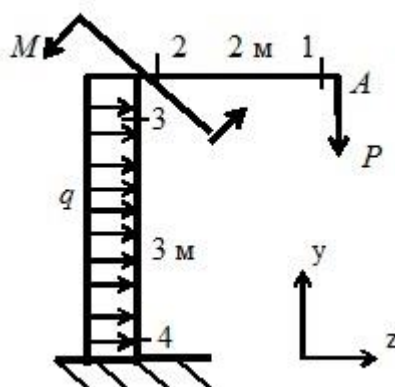


Рисунок 7.19

Розв'язання

1. Визначаємо алгебраїчні значення згинальних моментів у характерних перерізах балки від дії заданого навантаження і будуємо епюру M (рис. 7.20):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = -(-P) = 20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = -(-P \cdot \ell_1 + M) = -(-20 \cdot 2 + 30) = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = -(-P \cdot \ell_1 + M - q \cdot \ell_2 \cdot 0,5 \cdot \ell_2) =$$

$$= -(-20 \cdot 2 + 30 - 10 \cdot 3 \cdot 1,5) = 55 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

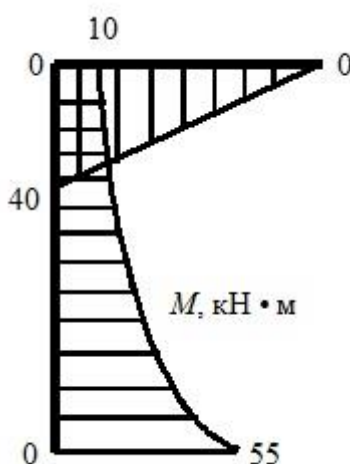


Рисунок 7.20

Слід зауважити, що в побудові епюр подовжніх і поперечних сил у цьому випадку нема потреби, бо, по-перше, величини N і Q не впливають на задані переміщення, і, по-друге, епюра M на відміну від попереднього випадку (див. приклад 7.4) не має екстремуму, тому тут епюра Q є зайвою.

2. Визначаємо за формулою (6.60) потрібний осьовий момент опору перерізу двотавра:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{55 \cdot 10^3}{160} = 343,75 \text{ см}^3.$$

3. З відповідної таблиці сортаменту (див. дод. А) вибираємо двотавр 27, у якого $W_x = 371 \text{ см}^3$; $J_x = 5 \text{ 010 см}^4$.

4. У точці А рами прикладаємо вертикальну одиничну силу $P_1 = 1$, визначаємо від її дії алгебраїчні значення згинальних моментів у характерних перерізах рами і будуємо епюру \bar{M}_1 (рис. 7.21):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = M_4 = -(-P_1 \cdot 2) = -(-1 \cdot 2) = 2 \text{ м}.$$

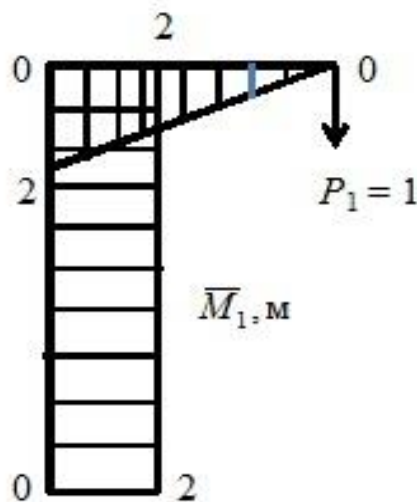


Рисунок 7.21

5. Визначаємо вертикальне переміщення точки А, «перемножуючи» між собою епюри M і \bar{M}_1 .

При цьому необхідно з'ясувати, які значення крайніх ординат на ділянках рами вважати додатними, а які – від'ємними. У балок (які є завжди горизонтальними) такого питання не існує: крайні ординати їх епюр вважаються додатними, коли вони розташовані над базовою лінією, а від'ємними – ті, що знаходяться під нею.

Додержуватись цього правила зручно і в разі горизонтальних стрижнів (ригелів) рам. Що ж стосується їх вертикальних стрижнів (стійок), то у їхніх епюр додатні крайні ординати можуть бути розташованими як зліва, так і справа від базових ліній, тобто не так, як у балок. У цьому разі зазначене правило, прийняте для балок, не діє. Тут треба самостійно прийняти для себе те чи інше правило, застосувавши його одночасно до обох епюр, що «перемножуються». Слід при цьому розуміти, що вибране правило не вплине на результат розрахунку, тому

при його виборі необхідно керуватись насамперед міркуваннями зручності.

У нашому прикладі будемо розглядати вертикальний стрижень як деяку балку, умовно повернуту на 90 градусів проти ходу стрілок годинника. У цьому разі стрижень з точки зору формули крайніх ординат буде повністю аналогічним цій балці. Тоді крайні ординати його епюор, розташовані зліва від бази, будуть додатними, а справа – від’ємними. Що ж стосується горизонтального стрижня рами, то для нього застосуємо звичайне правило, прийняте для балок.

Отже, с урахуванням цих зауважень маємо:

$$\begin{aligned} \delta_A^y &= M \times \bar{M}_1 = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-40) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot 0 + (-40) \cdot 0 + 0 \cdot (-2)] + \\ &+ \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-55) \cdot (-2) + 2 \cdot (-10) \cdot (-2) + (-55) \cdot (-2) + (-10) \cdot (-2)] + \\ &+ \frac{10 \cdot 3^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-2 - 2) = \frac{320}{6E \cdot J_x} + \frac{1170}{6E \cdot J_x} - \frac{1080}{24E \cdot J_x} = \frac{1220}{6E \cdot J_x} = \\ &= \frac{1220 \cdot 10^{12}}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^4} = 20,3 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Результат розрахунку – додатний. Це означає, що точка A переміщується за вертикаллю за напрямком одиничної сили $P_1 = 1$, тобто униз.

6. У точці A рами прикладаємо горизонтальну одиничну силу $P_2 = 1$, визначаємо від її дії алгебраїчні значення згинальних моментів у характерних перерізах рами і будуємо епюру \bar{M}_2 (рис. 7.22):

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0; \quad M_4 = -(-P \cdot 3) = -(-1 \cdot 3) = 3 \text{ м.}$$

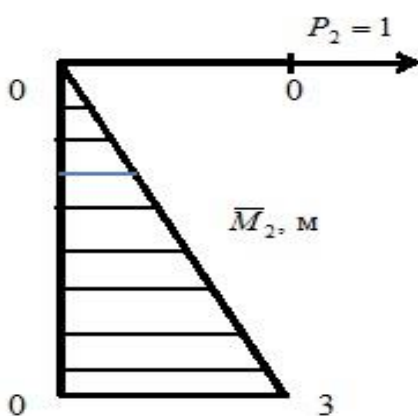


Рисунок 7.22

7. Визначаємо горизонтальне переміщення точки A :

$$\begin{aligned} \delta_A^z &= M \times \bar{M}_2 = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-40) \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + (-40 \cdot 0 + 0 \cdot 0)] + \\ &+ \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-55) \cdot (-3) + 2 \cdot (-10) \cdot 0 + (-55) \cdot 0 + (-10) \cdot (-3)] + \\ &+ \frac{10 \cdot 3^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-3 + 0) = 0 + \frac{1080}{6E \cdot J_x} - \frac{810}{24E \cdot J_x} = \frac{877,5}{6E \cdot J_x} = \\ &= \frac{877,5 \cdot 10^{12}}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^4} = 14,6 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Результат і цього разу – додатний. Це означає, що точка A переміщується за горизонталлю в напрямку одиничної сили $P_2 = 1$, тобто вправо.

8. У перерізі A рами прикладаємо одиничний момент $M = 1$, визначаємо від його дії алгебраїчні значення згинальних моментів у характерних перерізах рами і будуємо епюру \bar{M}' (рис. 7.23):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = -(-M) = -(-1) = 1.$$

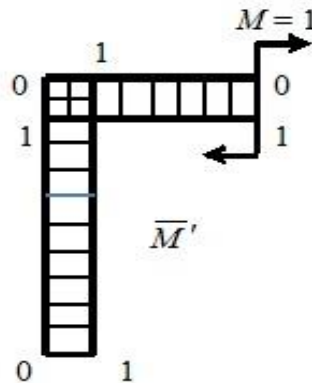


Рисунок 7.23

9. Визначаємо кут повороту перерізу A :

$$\begin{aligned} \theta_A &= M \times \bar{M}' = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-40) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-40) \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)] + \\ &+ \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-55) \cdot (-1) + 2 \cdot (-10) \cdot (-1) + (-55) \cdot (-1) + (-10) \cdot (-1)] + \\ &+ \frac{10 \cdot 3^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-1 - 1) = \frac{240}{6E \cdot J_x} + \frac{585}{6E \cdot J_x} - \frac{540}{24E \cdot J_x} = \frac{690}{6E \cdot J_x} = \\ &= \frac{690 \cdot 10^9}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^4} = 0,0115 \text{ рад.} = 0,659 \text{ град.} \end{aligned}$$

Результат розрахунку – додатний. Це означає, що переріз A обертається за напрямком одиничного моменту, тобто за ходом стрілок годинника.

Із наведених прикладів видно, що «ручне» визначення інтегралів Мора за формулою крайніх ординат є доволі трудомісткою операцією, яка, до того ж, потребує додаткового розрахунку балок і рам на міцність з метою пересвідчитись, що ці об'єкти працюють саме в області пружності, для якої дійсна формула крайніх ординат.

З цих причин «ручний» підрахунок інтегралів Мора придатний головним чином для навчальних цілей. Його ж застосування в інженерній практиці є малоперспективним, особливо у випадках, коли визначаються лінійні й кутові переміщення одночасно в багатьох місцях балки або рами з подальшою побудовою відповідних графіків.

У пункті 6.4 розглянута спрощена, графо – аналітична методика повного розрахунку на міцність статично визначуваних двоопорних і консольних двотаврових балок. Для реалізації цієї методики створені відповідні комп'ютерні програми. Логічно було б подовжити зазначені програми з метою надання їм змоги додаткового визначення лінійних і кутових переміщень, що і було зроблено.

Для кожного із зазначених різновидів балок були створені додаткові розрахункові блоки, які дозволяють визначати прогини і кути повороту перерізів у будь-яких місцях цих балок і будувати відповідні графіки за їх довжиною [14]–[16]. Ці блоки приєднані до відповідних програм розрахунків двотаврів на міцність і складають з ними єдине ціле.

У інтегрованих програмах місця визначення лінійних переміщень позначені літерою H , а кутових – літерою K . Інтегралі Мора у цих програмах замінені відповідними сумами:

$$\delta_H = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \sum_{i=1}^n M_i \cdot \bar{M}_i \cdot \Delta z, \quad (7.41)$$

$$\theta_K = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \sum_{i=1}^n M_i \cdot \bar{M}'_i \cdot \Delta z, \quad (7.42)$$

де $i = 1 \dots n$ – номери кроків уздовж осі z ;

n – кількість кроків на довжині балки;

M_i , \bar{M}_i , \bar{M}'_i – поточні значення згинальних моментів від дії заданого навантаження, одиничної сили і одиничного моменту.

$\Delta z = 1 \dots 2$ см – довжина кроку.

Роботу інтегрованої програми проілюструємо комп'ютерним варіантом розв'язання прикладу 7.4 (дод. Г).

Порівнюючи результати «ручного» і комп'ютерного варіантів розв'язання зазначеного прикладу, бачимо їх повну ідентичність при беззастережній перевазі другого варіанта у витратах часу.

7.5 Розрахунки статично невизначуваних балок і плоских рам. Метод сил

До цих пір ми розглядали розрахунки виключно статично визначуваних балок і плоских рам, тобто таких, у яких кількість опорних реакцій не перевищувала кількості незалежних рівнянь статичної рівноваги, які можна скласти для визначення цих реакцій.

На практиці поряд з ними існують і статично невизначувані аналоги цих об'єктів, які мають певні переваги перед статично визначуваними в міцності й жорсткості при близьких витратах матеріалу. Але ці переваги, на жаль, пов'язані з ускладненнями розрахунків зазначених статично невизначуваних об'єктів з причини наявності у них «зайвих» опорних реакцій, для визначення яких потрібно задіяти певну кількість додаткових рівнянь деформаційного характеру.

Подібна ситуація мала місце і в розрахунках статично невизначуваних стрижневих конструкцій, що працюють на розтягання – стискання (див. підрозд. 2.5). Того разу до рівнянь статичної рівноваги додавали рівняння зв'язку між абсолютними подовжніми деформаціями стрижнів.

Подібним же чином діють і в розрахунках статично невизначуваних балок і плоских рам, хоча в цьому випадку є ціла низка суттєвих відмінностей.

Розкриття статичної невизначуваності зазначених об'єктів, тобто визначення їх «зайвих» реакцій, у машинобудуванні відбувається зазвичай за так званим *методом сил*. Основні етапи цього методу:

1. Визначення ступеня статичної невизначуваності балки або рами за формулою (2.27)

$$S = n_R - n_{PP},$$

де n_R – загальна кількість опорних реакцій;

n_{PP} – кількість незалежних рівнянь рівноваги для їх визначення.

2. Вибір так званої *основної системи*, тобто перетворення статично невизначуваної балки або рами на статично визначувану шляхом відкидання всіх «зайвих» реакцій.

3. Отримання *еквівалентної системи* шляхом завантаження основної системи заданими навантаженнями та невідомими «зайвими» реакціями (силами або моментами пар сил) з позначенням їх як X_i . Тут $i = 1, 2, \dots, n$ – номер «зайвої» реакції, $n = S$ – кількість «зайвих» реакцій.

4. Складання системи *канонічних рівнянь методу сил* (їх кількість дорівнює S), фізична сутність яких – у нульових переміщеннях точок прикладення «зайвих» реакцій у еквівалентній системі.

5. Визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь методом Мора (див. підрозд. 7.3).

6. Розв'язання канонічних рівнянь, визначення величин і напрямків «зайвих» реакцій.

Після виконання зазначених дій еквівалентна система перетворюється на звичайну (статично визначувану) балку або раму, подальші розрахунки якої на міцність і жорсткість розглянуті в розділах 6 і 7.

Розрахунки статично невизначених рами і балки з залученням методу сил проілюструємо такими прикладами.

Приклад 7.6. Для сталеві рами (рис. 7.24) побудувати епюри внутрішніх зусиль і підібрати переріз (двотавр), якщо $[\sigma] = 160$ МПа.

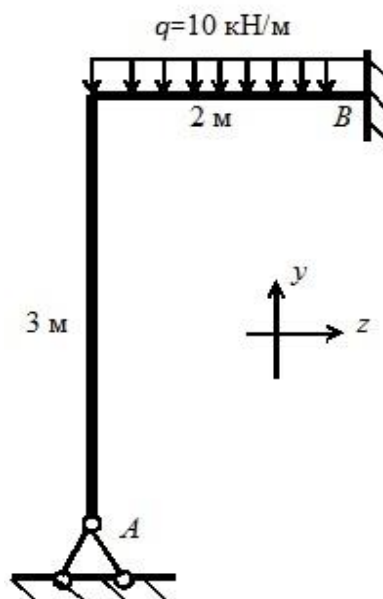


Рисунок 7.24

Розв'язання

1. Визначаємо ступінь статичної невизначуваності рами. У неї $n_R = 5$ (дві реакції нерухомого шарніра A і три – жорсткого кріплення B), тоді як $n_{pp} = 3$ (плоска довільна система сил). Таким чином, $S = 5 - 3 = 2$, тобто рама є двічі статично невизначуваною, тобто для визначення всіх її опорних реакцій бракує двох рівнянь.

2. Перетворюємо задану раму на *основну систему (о.с.)*, змінюючи опори рами таким чином, щоб у них залишилось лише три реакції, які можна буде визначити з рівнянь рівноваги. Із усіх можливих варіантів зупинимося на варіанті з відкинутою опорою A , який є найбільш зручним і продуктивним, бо не потребує при подальшій побудові всіх епюр попереднього визначення опорних реакцій (рис. 7.25).

3. Завантажуємо основну систему заданим навантаженням і невідомими реакціями відкинутої опори A – X_1 та X_2 (рис. 7.26) і отримуємо так звану *еквівалентну систему* (е. с.), в якій напруження і переміщення будуть такими самими, як і у заданої рами, якщо величини X_1 та X_2 відповідатимуть умовам відсутності вертикального і горизонтального переміщень точки A еквівалентної системи (у заданої рами вона нерухома).

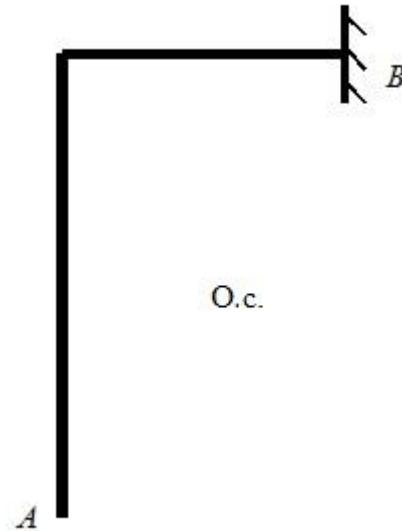


Рисунок 7.25

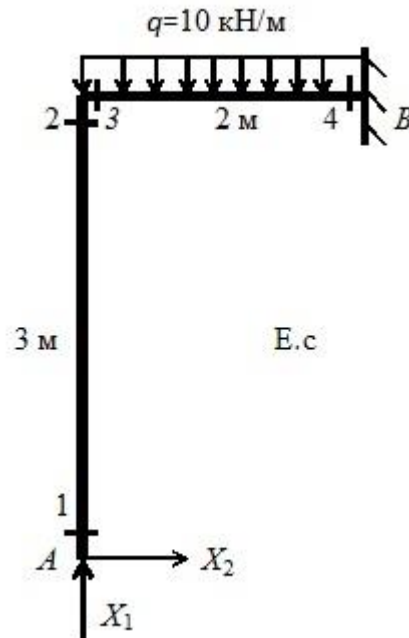


Рисунок 7.26

4. Для забезпечення умов нерухомості точки A еквівалентної системи (див. рис. 7.26) записуємо канонічні рівняння методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases} \quad (7.43)$$

Ці рівняння зветься канонічними, бо вони у всіх статично невизначуваних об'єктів записуються за єдиним каноном (законом), хоча фізичний сенс у кожному випадку різний. У задачах з двома невідомими вони мають наведений вигляд. При трьох невідомих система складається з трьох канонічних рівнянь, кожне з яких містить невідомі X_1, X_2, X_3 . Якщо ж невідоме одне, то й рівняння одне, що містить тільки X_1 .

У нашому випадку перше рівняння системи (7.43) символізує відсутність вертикального переміщення точки A еквівалентної системи ($\delta_A^y = 0$), а друге – відсутність горизонтального переміщення цієї точки ($\delta_A^z = 0$). Перші складові обох рівнянь є внесками в значення δ_A^y і δ_A^z невідомої X_1 , другі – внесками X_2 , треті – внесками заданого навантаження.

5. Визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь шляхом побудови і подальшого «перемноження» за формулою крайніх ординат (див. підрозд. 7.4) епюр згинальних моментів від дії одиничних сил $X_1 = 1$ і $X_2 = 1$ й заданого навантаження (рис. 7.27...7.29). Усі ці епюри побудовані за характерними перерізами (див. рис. 7.26) і алгебраїчними значеннями згинальних моментів (див. підрозд. 4.1).

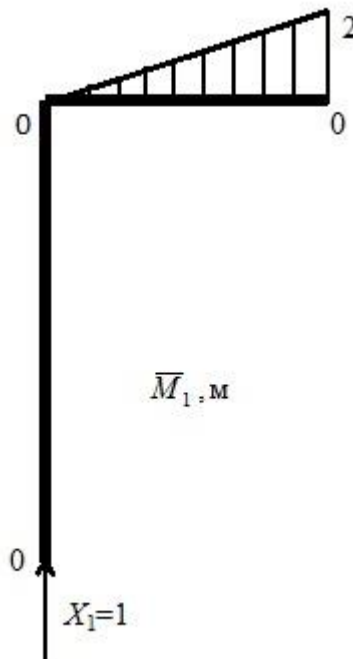


Рисунок 7.27

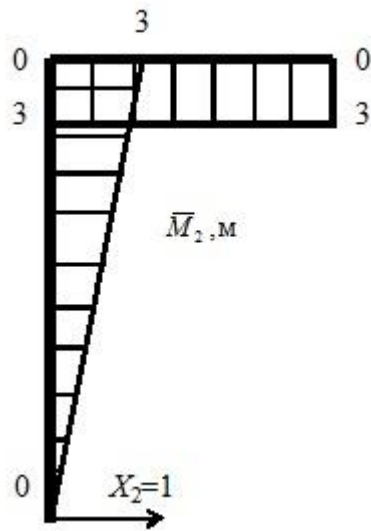


Рисунок 7.28

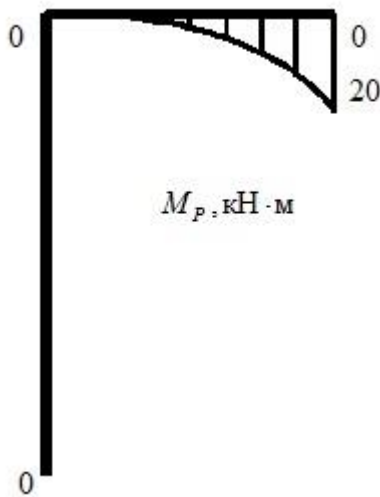


Рисунок 7.29

Коефіцієнти δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} і δ_{22} визначаються за формулами:

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1; \quad (7.44)$$

$$\delta_{12} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2; \quad (7.45)$$

$$\delta_{21} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_1; \quad (7.46)$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2. \quad (7.47)$$

Величини Δ_{1P} і Δ_{2P} визначаються за формулами:

$$\Delta_{1P} = M_P \times \bar{M}_1; \quad (7.48)$$

$$\Delta_{2P} = M_P \times \bar{M}_2. \quad (7.49)$$

Розрахунки за формулами (7.44)...(7.49) з урахуванням числових значень зазначених епюр і прийнятого правила знаків для крайніх ординат (див. приклад 7.5) дають такі результати:

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1 = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0] = \frac{16}{6E \cdot J_x};$$

$$\delta_{12} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3)] = -\frac{36}{6E \cdot J_x};$$

$$\delta_{21} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_1 = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = \delta_{12} = -\frac{36}{6E \cdot J_x};$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2 &= \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) \cdot (-3) + 0 \cdot (-3) + (-3) \cdot 0] + \\ &+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-3) \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) \cdot (-3) + (-3) \cdot (-3) + (-3) \cdot (-3)] = \frac{162}{6E \cdot J_x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = M_P \times \bar{M}_1 &= \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-20) \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-20 \cdot 0)] + \\ &+ \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 + 2) = -\frac{160}{6E \cdot J_x} + \frac{160}{24E \cdot J_x} = -\frac{120}{6E \cdot J_x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} = M_P \times \bar{M}_2 &= \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot (-3) + 2 \cdot (-20) \cdot (-3) + 0 \cdot (-3) + (-20) \cdot (-3)] + \\ &+ \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-3 - 3) = \frac{360}{6E \cdot J_x} - \frac{480}{24E \cdot J_x} = \frac{240}{6E \cdot J_x}. \end{aligned}$$

6. Підставляємо в канонічні рівняння (7.43) підраховані значення всіх коефіцієнтів, помножені на $6E \cdot J_x$, маємо:

$$\begin{cases} 16 \cdot X_1 - 36 \cdot X_2 - 120 = 0; \\ -36 \cdot X_1 + 162 \cdot X_2 + 240 = 0. \end{cases} \quad (7.50)$$

Систему рівнянь (7.50) розв'язуємо методом алгебраїчного складання.

Помножимо перше із них на 2,25, щоб вирівняти коефіцієнти при X_1 ($2.25 = 36:16$). Тоді воно набуде вигляду

$$36 \cdot X_1 - 81 \cdot X_2 - 270 = 0. \quad (7.51)$$

Складаємо рівняння (7.51) з другим рівнянням системи (7.50), отримуємо:

$$0 + 81 \cdot X_2 - 30 = 0. \quad (7.52)$$

Звідціль знаходимо:

$$X_2 = \frac{30}{81} = 0,370 \text{ кН.}$$

Підставляємо знайдене значення X_2 в рівняння (7.51) і підраховуємо:

$$\begin{aligned} 36 \cdot X_1 - 81 \cdot 0,370 - 270 = 0; \quad 36 \cdot X_1 - 29,970 - 270 = 0; \\ 36 \cdot X_1 - 299,970 = 0; \quad X_1 = \frac{299,970}{36} = 8,333 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Для перевірки підставимо знайдені значення X_1 і X_2 в рівняння (7.50), з яких починався розрахунок.

Перше рівняння:

$$16 \cdot 8,333 - 36 \cdot 0,370 - 120 = 133,328 - 133,320 \approx 0.$$

Друге рівняння:

$$-36 \cdot 8,333 + 162 \cdot 0,370 + 240 = -299,988 + 299,940 \approx 0.$$

Як бачимо, результати розрахунків цілком прийнятні.

Слід зауважити, що реалізований метод розв'язання системи канонічних рівнянь є прийнятним тільки в разі двох невідомих. При їх більшій кількості доцільно задіяти стандартні комп'ютерні програми. Після визначення невідомих реакцій шарніра A еквівалентна система

перетворилась на звичайну статично визначувану раму (рис. 7.30), з якою будемо працювати надалі.

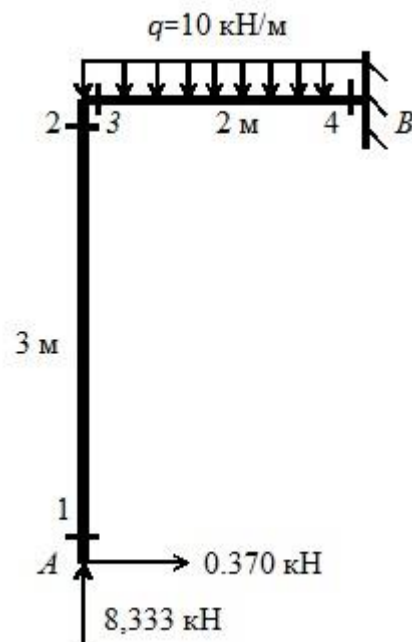


Рисунок 7.30

7. У відповідності до завдання визначаємо значення подовжніх сил у характерних перерізах еквівалентної системи (див. рис. 7.30) і будуємо епюру N (рис. 7.31):

$$N_1 = N_2 = -8,333 \text{ кН}; \quad N_3 = N_4 = -0,370 \text{ кН}.$$

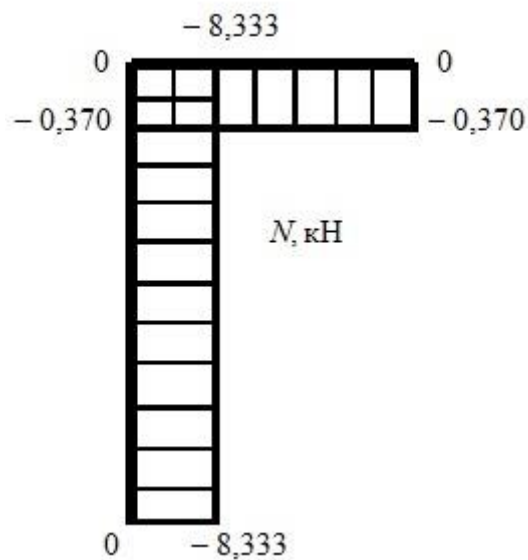


Рисунок 7.31

8. Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах еквівалентної системи (див. рис. 7.30) і будуємо епюру Q (рис. 7.32):

$$Q_1 = Q_2 = -0,370 \text{ кН}; \quad Q_3 = 8,333_4 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_3 - q \cdot 2 = 8,333 - 10 \cdot 2 = -11,667 \text{ кН}.$$

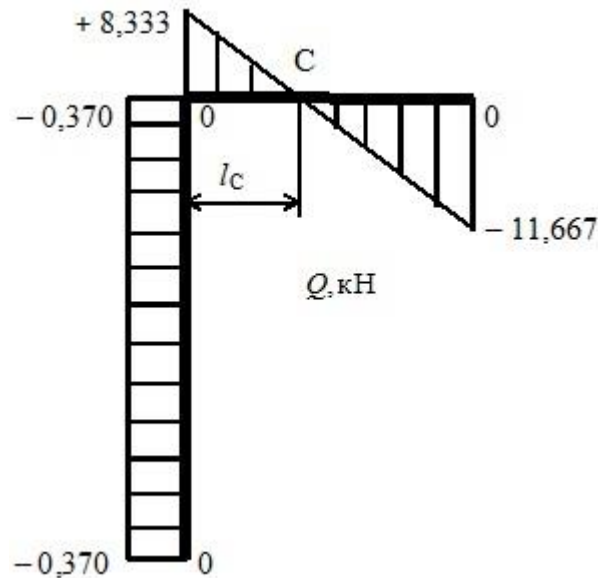


Рисунок 7.32

Як бачимо, епюра Q в перерізі C перетинає базу. Положення цього перерізу (відстань l_c) знайдемо з умови:

$$Q_c = Q_3 - q \cdot l_c = 0; \quad l_c = Q_3 : q = 8,333 : 10 = 0,833 \text{ м}.$$

9. Визначаємо алгебраїчні значення згинальних моментів у характерних перерізах рами (див. рис. 7.30) і будуємо епюру M (рис. 7.33):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = -(+0,370 \cdot 3) = -1,110 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = -(+0,370 \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1 - 8,333 \cdot 2) =$$

$$= -(+1,110 + 20 - 16,666) = -4,444 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_c = -\left(+0,370 \cdot 3 - 8,333 \cdot l_c + q \cdot l_c \cdot \frac{l_c}{2}\right) =$$

$$= -\left(+0,370 \cdot 3 - 8,333 \cdot 0,833 + 10 \cdot 0,833 \cdot \frac{0,833}{2}\right) =$$

$$= -(+1,110 - 6,941 + 3,469) = 2,362 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

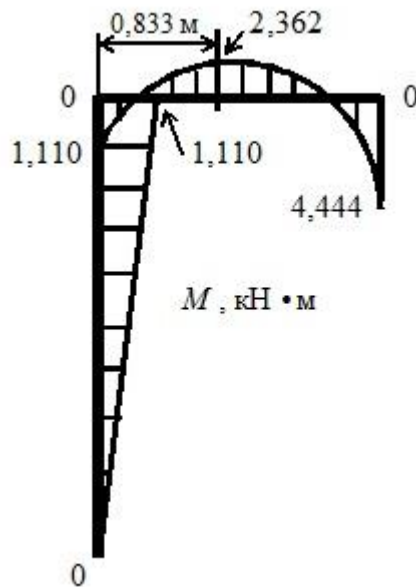


Рисунок 7.33

10. Виконуємо деформаційну перевірку виконаних розрахунків, щоб дізнатись, чи виконуються умови відсутності вертикального і горизонтального переміщень точки A еквівалентної системи (див. рис. 7.30), які були покладені в основу канонічних рівнянь (7.43).

Фактичні величини зазначених переміщень визначимо за формулами:

$$\delta_A^y = M \times \bar{M}_1, \quad (7.53)$$

$$\delta_A^z = M \times \bar{M}_2, \quad (7.54)$$

де M – сумарна еюра згинальних моментів від дії заданого навантаження і визначених реакцій шарніра A (див. рис. 7.33);

\bar{M}_1 – еюра згинальних моментів від дії одиничної сили $X_1 = 1$ (див. рис. 7.27);

\bar{M}_2 – еюра згинальних моментів від дії одиничної сили $X_2 = 1$ (див. рис. 7.28).

Отже, вертикальне переміщення становить:

$$\begin{aligned} \delta_A^y = M \times \bar{M}_1 &= \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-1,110) \cdot 0 + 2 \cdot (-4,444) \cdot 2 + (-1,110) \cdot 2 + (-4,444) \cdot 0] + \\ &+ \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 + 2) = -\frac{39,992}{6E \cdot J_x} + \frac{160}{24E \cdot J_x} = \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot (40 - 39,992) \approx 0. \end{aligned}$$

Відносна похибка при цьому становить:

$$\Delta_1 = \frac{40 - 39,992}{40} \cdot 100 = 0,02\%$$

Аналогічно, горизонтальне переміщення становить:

$$\begin{aligned} \delta_A^z = M \times \bar{M}_2 = & \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1,110) \cdot (-3) + 0 \cdot (-3) + (-1,110) \cdot 0] + \\ & + \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-1,110) \cdot (-3) + 2 \cdot (-4,444) \cdot (-3) + (-1,110) \cdot (-3) + (-4,444) \cdot (-3)] + \\ & + \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-3 - 3) = \frac{19,980}{6E \cdot J_x} + \frac{99,972}{6E \cdot J_x} - \frac{480}{24E \cdot J_x} = \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot (119,952 - 120) \approx 0. \end{aligned}$$

Відносна похибка цього разу:

$$\Delta_2 = \frac{120 - 119,952}{120} \cdot 100 = 0,04\%$$

Допустима похибка зазвичай становить 2 %. З огляду на це, можна вважати виконані розрахунки повною мірою успішними.

11. Визначаємо за формулою (6.60) потрібний осьовий момент опору перерізу двотавра:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{4,444 \cdot 10^3}{160} = 27,775 \text{ см}^3.$$

Із відповідної таблиці сортаменту (див. дод. А) вибираємо двотавр 10, у якого $W_x = 39,7 \text{ см}^3$.

На завершення слід зазначити, що для визначення переміщень у розглянутій рамі (якщо в цьому виникне потреба) необхідно відтворити в еквівалентній системі (див. рис. 7.30) відповідні дії прикладу 7.5.

Приклад 7.7. Для сталеві балки (рис. 7.34) побудувати епюри внутрішніх зусиль і підібрати переріз (двотавр), якщо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $q = 10 \text{ кН/м}$; $P = 18 \text{ кН}$; $M = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $a = 2 \text{ м}$; $b = 3 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$; $d = 2 \text{ м}$.

Розв'язання

1. Визначаємо ступінь статичної невизначуваності балки (рис. 7.35, а).

У балки 4 реакції. На неї діє плоска довільна система сил, для якої можна скласти 3 незалежних рівняння статичної рівноваги. Тож, ступінь

статичної невизначуваності цієї балки дорівнює $S = 4 - 3 = 1$, тобто балка 1 раз статично невизначувана.

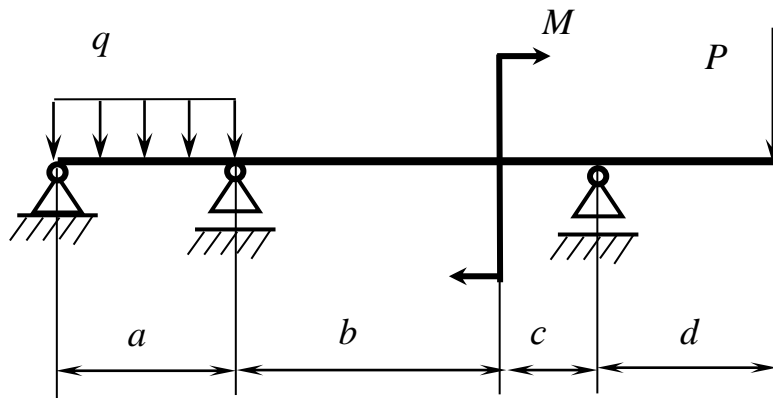


Рисунок 7.34

2. Підбираємо основну систему.

Для розкриття статичної невизначуваності цієї балки можна було б відкинути одну з її рухомих опор – B або C , у яких є по одній вертикальній реакції (див. рис. 7.35, а). Однак, такий підхід до статично невизначуваних балок зазвичай не застосовують.

Найбільш вдалою основною системою для них вважається варіант з так званими врізаними шарнірами над проміжними опорами, які розбивають суцільну балку на окремі частини, кожна з яких сприймає лише те навантаження, яке діє в її межах і не залежить від навантажень інших частин.

До врізання зазначених шарнірів сусідні частини балки, що розташовані між проміжними опорами, є у відношенні одна до одної жорсткими кріпленнями, які не дозволяють відокремлений поворот кожної з частин відносно спільної опори. Врізані ж шарніри такий поворот дозволяють, бо в них уже нема моменту, який був у жорсткого кріплення.

Для компенсації цієї втрати до кожного з врізаних шарнірів прикладають по парі рівних і протилежно спрямованих моментів (X_i), значення яких знаходять з умови відсутності відносного кута повороту перерізів розділеної балки, що примикають до врізаного шарніра:

$$\theta_{\text{відн.}} = 0. \quad (7.55)$$

Щоб не відходити від зазначеної традиції, вибираємо в якості основної системи для нашого прикладу балку з врізаним шарніром над проміжною опорою B (рис. 7.35, б).

3. Прикладаємо до основної системи задане навантаження і невідомі моменти X_1 врізаного шарніра B , отримуємо еквівалентну систему (рис. 7.35, в).

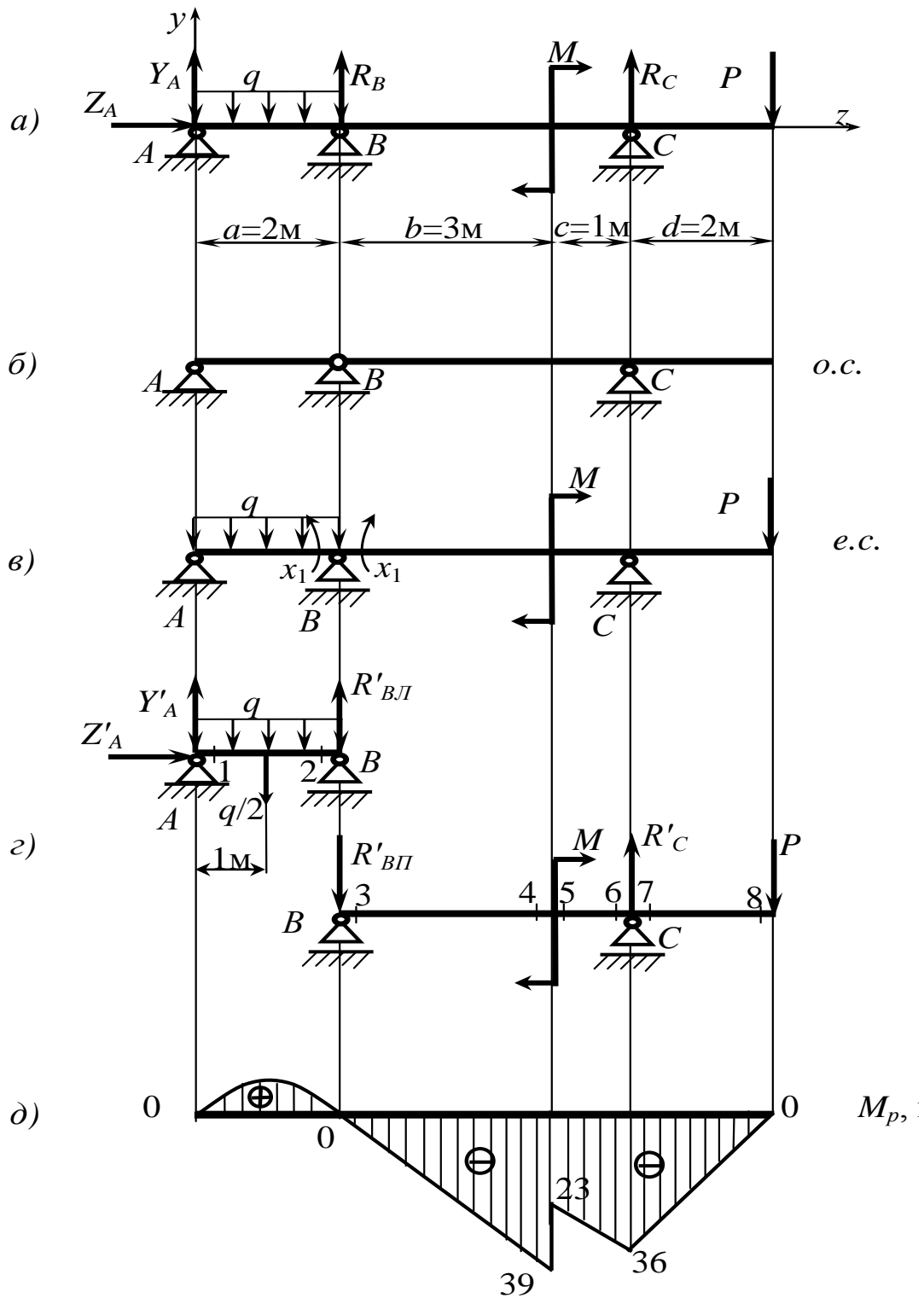


Рисунок 7.35

4. Для еквівалентної системи запишемо канонічне рівняння методу сил (цього разу воно одне):

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (7.56)$$

У даному прикладі умова (7.55) набуває вигляду

$$\theta_{відн.}^B = 0. \quad (7.57)$$

Перша складова в рівнянні (7.56) – це внесок у величину $\theta_{відн.}^B$ невідомих моментів X_1 , друга – це вклад заданого навантаження.

Для визначення коефіцієнтів канонічного рівняння (7.56) треба мати епюри згинальних моментів від дії на балку заданого навантаження і одиничних моментів $X_1 = 1$ в шарнірі B .

5. Визначаємо опорні реакції лівої і правої частин основної системи від дії заданого навантаження (рис. 7.35, г) і будуюмо вантажну епюру згинальних моментів $-M_P$ (рис. 7.35, д).

Ліва частина (AB):

$$\sum m_B = -Y'_A \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad (7.58)$$

$$\sum m_A = R'_{BL} \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad (7.59)$$

$$\sum P_z = Z'_A = 0. \quad (7.60)$$

Із рівняння (7.58):

$$Y'_A = \frac{q \cdot 2 \cdot 1}{2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 10 \text{ кН.}$$

Із рівняння (7.59):

$$R'_{BL} = \frac{q \cdot 2 \cdot 1}{2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 10 \text{ кН.}$$

Із рівняння (7.60):

$$Z'_A = 0.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = Y'_A + R'_{BL} - q \cdot 2 = 10 + 10 - 10 \cdot 2 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

Права частина (BC):

$$\sum m_C = R'_{BL} \cdot 4 - M - P \cdot 2 = 0; \quad (7.61)$$

$$\sum m_B = -M + R'_C \cdot 4 - P \cdot 6 = 0. \quad (7.62)$$

Із рівняння (7.61):

$$R'_{BL} = \frac{1}{4} \cdot (M + P \cdot 2) = \frac{1}{4} \cdot (16 + 18 \cdot 2) = 13 \text{ кН}.$$

Із рівняння (7.62):

$$R'_C = \frac{1}{4} \cdot (M + P \cdot 6) = \frac{1}{4} \cdot (16 + 18 \cdot 6) = 31 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = -R'_{BL} + R'_C - P = -13 + 31 - 18 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

Епюра M_P (рис. 7.35, д):

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0; \quad M_4 = -R'_{BL} \cdot 3 = -13 \cdot 3 = -39 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 + M = -39 + 16 = -23 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = M_7 = R'_{BL} \cdot 4 + M = -13 \cdot 4 + 16 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Слід зауважити, що при цій схемі балки визначення реакцій Y'_A та R'_{BL} при побудові епюри M_P не є обов'язковим, бо значення згинальних моментів у перерізах 1 і 2, які розташовані біля опор A і B , явно дорівнюють нулю. До того ж, екстремальне значення згинального моменту на ділянці AB епюри M_P для подальшого розрахунку не потрібне.

6. Визначаємо опорні реакції лівої і правої частин основної системи від дії одиничних моментів $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 7.36, а) і будуємо епюру \bar{M} (рис. 7.36, б).

Ліва частина (AB):

$$\sum m_B = -\bar{Y}_A \cdot 2 + \bar{X}_1 = 0; \quad (7.63)$$

$$\sum m_A = -\bar{R}_{BL} \cdot 2 + \bar{X}_1 = 0; \quad (7.64)$$

$$\sum P_z = \bar{Z}_A = 0. \quad (7.65)$$

Із рівняння (7.63):

$$\bar{Y}_A = \frac{\bar{X}_1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ м}^{-1}.$$

Із рівняння (7.64):

$$\bar{R}_{BII} = \frac{\bar{X}_1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ м}^{-1}.$$

Із рівняння (7.65):

$$\bar{Z}_A = 0.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = \bar{Y}_A - \bar{R}_{BII} = 0,5 - 0,5 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

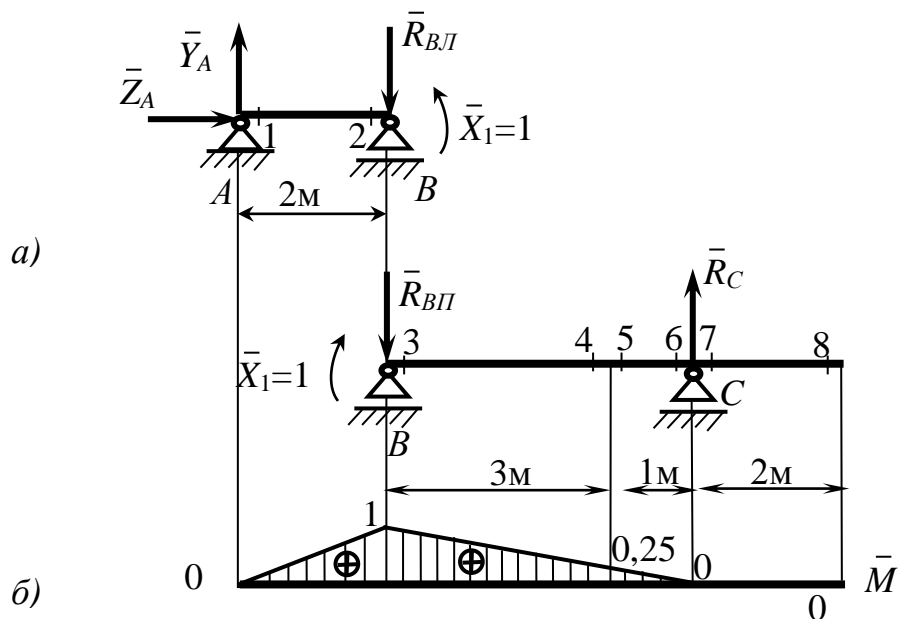


Рисунок 7.36

Права частина (BC):

$$\sum m_C = -\bar{X}_1 + \bar{R}_{BII} \cdot 4 = 0; \quad (7.66)$$

$$\sum m_B = -\bar{X}_1 + \bar{R}_C \cdot 4 = 0. \quad (7.67)$$

Із рівняння (7.66):

$$\bar{R}_{BII} = \frac{\bar{X}_1}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м}^{-1}.$$

Із рівняння (7.67):

$$\bar{R}_C = \frac{\bar{X}_1}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м}^{-1}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = -\bar{R}_{BII} + \bar{R}_C = -0,25 + 0,25 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

Епюра \bar{M} :

$$M_1 = 0; \quad M_2 = \bar{Y}_A \cdot 2 = 0,5 \cdot 2 = 1; \quad M_3 = \bar{X}_1 = 1;$$
$$M_4 = M_5 = \bar{X}_1 - \bar{R}_{BII} \cdot 3 = 1 - 0,25 \cdot 3 = 0,25; \quad M_6 = M_7 = M_8 = 0.$$

7. Визначаємо коефіцієнти канонічного рівняння (7.56):

$$\delta_{11} = \bar{M} \times \bar{M} = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) +$$
$$+ \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0,25 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 1) +$$
$$+ \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0,25 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0,25 \cdot 0 + 0 \cdot 0,25) = \frac{12}{6E \cdot J_x}.$$

$$\Delta_{1P} = M_P \times \bar{M} = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) +$$
$$+ \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-39) \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,25 + (-39) \cdot 1] +$$
$$+ \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-23) \cdot 0,25 + 2 \cdot (-36) \cdot 0 + (-23) \cdot 0 + (-36) \cdot 0,25] = -\frac{176}{6E \cdot J_x}.$$

8. Визначаємо значення X_1 :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{176}{12} = 14,667 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

9. Визначаємо опорні реакції еквівалентної системи (рис. 7.37).

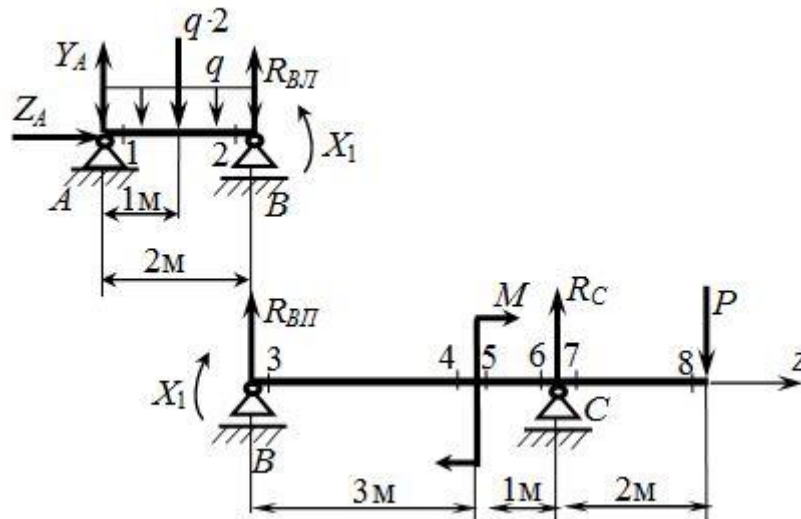


Рисунок 7.37

Ліва частина (AB):

$$\sum m_B = -Y_A \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 + X_1 = 0; \quad (7.68)$$

$$\sum m_A = -q \cdot 2 \cdot 1 + R_{BII} \cdot 2 + X_1 = 0; \quad (7.69)$$

$$\sum P_x = Z_A = 0. \quad (7.70)$$

Із рівняння (7.68):

$$Y_A = \frac{1}{2} \cdot (q \cdot 2 \cdot 1 + X_1) = \frac{1}{2} \cdot (10 \cdot 2 \cdot 1 + 14,667) = 17,334 \text{ кН.}$$

Із рівняння (7.69):

$$R_{BII} = \frac{1}{2} \cdot (q \cdot 2 \cdot 1 - X_1) = \frac{1}{2} \cdot (10 \cdot 2 \cdot 1 - 14,667) = 2,667 \text{ кН.}$$

Із рівняння (7.70):

$$Z_A = 0.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = Y_A - q \cdot 2 \cdot 1 + R_{BII} = 17,334 - 10 \cdot 2 \cdot 1 + 2,667 \approx 0.$$

Реакції визначені вірно.

Права частина (BC):

$$\sum m_B = -X_1 - M + R_C \cdot 4 - P \cdot 6 = 0; \quad (7.71)$$

$$\sum m_C = -X_1 - M - R_{BII} \cdot 4 - P \cdot 2 = 0; \quad (7.72)$$

Із рівняння (7.71):

$$R_C = \frac{1}{4} \cdot (X_1 + M + P \cdot 6) = \frac{1}{4} \cdot (14,667 + 16 + 18 \cdot 6) = 34,667 \text{ кН};$$

Із рівняння (7.72):

$$R_{BII} = -\frac{1}{4} \cdot (X_1 + M + P \cdot 2) = -\frac{1}{4} \cdot (14,667 + 16 + 18 \cdot 2) = -16,667 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = R_{BII} + R_C - P = -16,667 + 34,667 - 18 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

10. Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах еквівалентної системи (див. рис. 7.37) і будуємо епюру Q (рис. 7.38):

$$Q_1 = y_A = 17,334 \text{ кН}; \quad Q_2 = y_A - q \cdot 2 = 17,334 - 10 \cdot 2 = -2,666 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = R_{BII} = -16,667 \text{ кН};$$

$$Q_7 = Q_8 = Q_6 + R_C = -16,667 + 34,667 = 18 \text{ кН};$$

$$l_D = y_A : q = 17,334 : 10 = 1,733 \text{ м}.$$

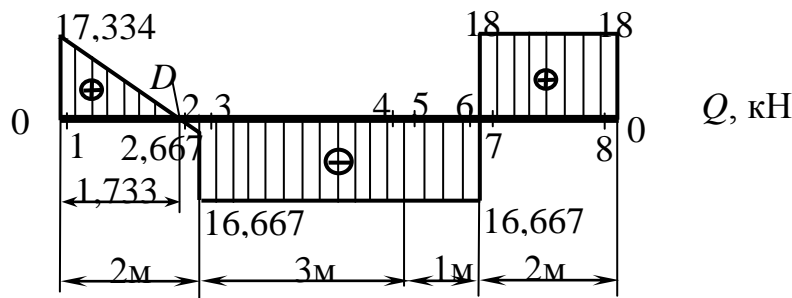


Рисунок 7.38

11. Визначаємо значення згинальних моментів у характерних перерізах еквівалентної системи (див. рис. 7.37) і будуємо підсумкову епюру M (рис. 7.39):

$$\begin{aligned}
M_1 = M_8 &= 0; & M_2 = X_1 &= 14,667 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_3 = X_1 &= 14,667 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_4 = X_1 + R_{\text{ВІІ}} \cdot 3 &= \\
&= 14,667 - 16,667 \cdot 3 &= 14,667 - 50,001 &= -35,334 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_5 = M_4 + M &= -35,334 + 16 &= -19,334 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_6 = M_7 &= -P \cdot 2 &= -18 \cdot 2 &= -36 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_D = y_A \cdot \ell_D - q \cdot \ell_D \cdot \frac{\ell_D}{2} &= 17,334 \cdot 1,733 - 10 \cdot 1,733 \cdot \frac{1,733}{2} &= \\
&= 30,040 - 15,016 &= 15,024 \text{ кН}\cdot\text{м}.
\end{aligned}$$

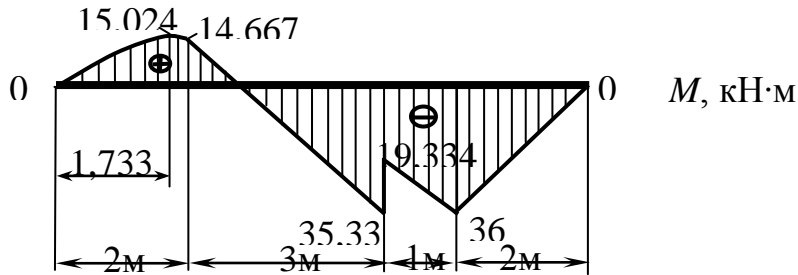


Рисунок 7.39

12. Виконуємо деформаційну перевірку виконання умови (7.57):

$$\begin{aligned}
\theta_{\text{відн.}}^B = M \times \bar{M} &= \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 14,667 + 0 \cdot 1 + 14,667 \cdot 0) + \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} (0 + 1) + \\
&+ \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 14,667 \cdot 1 + 2 \cdot (-35,334) \cdot 0,25 + 14,667 \cdot 0,25 + (-35,334) \cdot 1] + \\
&+ \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-19,334) \cdot 0,25 + 2 \cdot (-36) \cdot 0 + (-19,334) \cdot 0 + (-36) \cdot 0,25] = \\
&= \frac{58,668}{6E \cdot J_x} + \frac{80}{24E \cdot J_x} - \frac{60,001}{6E \cdot J_x} - \frac{18,667}{6E \cdot J_x} = \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot (78,668 - 78,668) = 0.
\end{aligned}$$

Як бачимо, умова (7.57), яку було покладено в основу канонічного рівняння (7.56), виконується. Відносна похибка цього разу дорівнює нулю.

13. Визначаємо за формулою (6.60) потрібний осьовий момент опору перерізу двотавра:

$$W_x \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{36 \cdot 10^3}{160} = 225 \text{ см}^3.$$

Із відповідної таблиці сортаменту (див. дод. А) вибираємо двотавр 22, у якого $W_x = 232 \text{ см}^3$.

8 ЗСУВ

8.1 Чистий зсув, його особливості та напружений стан

Зсувом називається такий вид навантаження, при якому в перерізах стрижня виникають тільки поперечні сили Q .

Деформацію зсуву з достатнім ступенем наближення можна одержати практично, приклавши перпендикулярно до стрижня з протилежних боків дві рівні й протилежно направлені сили. Прикладом такої дії сил може бути різання механічними ножицями металевих смуг або прутів (рис. 8.1).

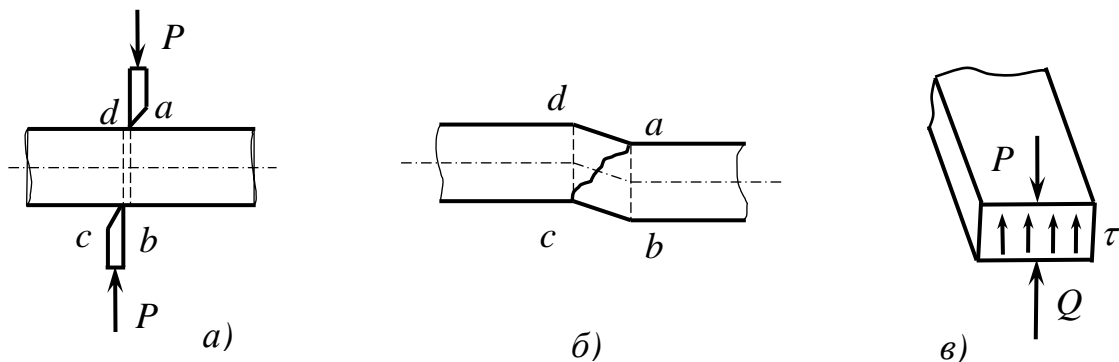


Рисунок 8.1

Ліва частина смуги, яку ріжуть ножицями (див. рис. 8.1, а), відділяється від правої двома ножами, до яких прикладені сили P достатньої величини. Верхній ніж намагається розділити смугу в площині ab , нижній – у площині cd . При нормальній побудові процесу ці площини не співпадають: відстань між ними є технологічним прозором. Розділення смуги відбувається після входження ножів у матеріал шляхом появи тріщин у площині ac (див. рис. 8.1, б). Наявність прозору визиває деяке викривлення зони зсуву і відповідну появу в ній поряд з поперечною силою Q додаткових зусиль інших напрямків. Таким чином, у цьому прикладі зсув є дещо спотвореним. Це спотворення зникає лише в разі відсутності прозору, тобто при збіжності площин ab і cd .

У цьому випадку, використовуючи метод перерізів (рис. 8.1, в), знаходимо, що поперечна сила Q в перерізі ab (або cd) площею F дорівнює зовнішній силі P і викликає появу в точках перерізу відповідних дотичних напружень τ :

$$Q = P = \int_F \tau \cdot dF . \quad (8.1)$$

Вважаючи дотичні напруження τ розподіленими по площі F рівномірно, матимемо:

$$Q = P = F \cdot \tau, \quad (8.2)$$

звідки
$$\tau = \frac{P}{F}. \quad (8.3)$$

Цією формулою і користуються в розрахунках на міцність при зсуві. Умова міцності цього разу має вигляд

$$\tau \leq [\tau], \quad (8.4)$$

де $[\tau]$ – допустиме напруження при зсуві.

Визначення величин $[\tau]$ для різних матеріалів шляхом механічних випробувань є доволі складним і дорогим. Тому ці величини зазвичай встановлюють у долях від допустимих нормальних напружень, використовуючи ті чи інші теорії міцності.

Для реалізації такого підходу, також для інших теоретичних потреб, проаналізуємо напружений стан матеріалу при зсуві.

Розглянемо окремий випадок плоского напруженого стану, *при якому на всіх гранях виділеного елемента* (рис. 8.2, а) *виникають тільки дотичні напруження*. Такий напружений стан називається *чистим зсувом*.

Знайдемо величини і напрями головних напружень при чистому зсуві. Це – обернена задача теорії плоского напруженого стану (див. підрозд. 5.2).

Для розв'язання цієї задачі побудуємо відповідне коло Мора (рис. 8.2, б). Його центр – у точці O , тому, що $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$.

Будемо вважати, що $\tau_\alpha = -\tau$, $\tau_\beta = \tau$. Тоді з кола Мора знайдемо:

$$R = \tau_\beta = \tau, \quad \sigma_1 = R = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -R = -\tau, \quad (8.5)$$

а головні ділянки нахилені до граней елемента під кутом 45° (див. рис. 8.2, а).

8.2 Деформація і закон Гука при чистому зсуві

Розглянемо деформацію елемента $abcd$, що перебуває в умовах чистого зсуву (див. рис. 8.2, а).

Оскільки по гранях цього елемента нема нормальних напружень, то уздовж граней нема і лінійних деформацій. Водночас діагональ ac , що співпадає з напрямом σ_1 , подовжується, а діагональ bd , яка співпадає з напрямом σ_3 , скорочується. У результаті квадрат $abcd$ перетворюється

на ромб $a'b'c'd'$. Таким чином, деформація чистого зсуву характеризується тільки зміною прямих кутів виділеного елемента.

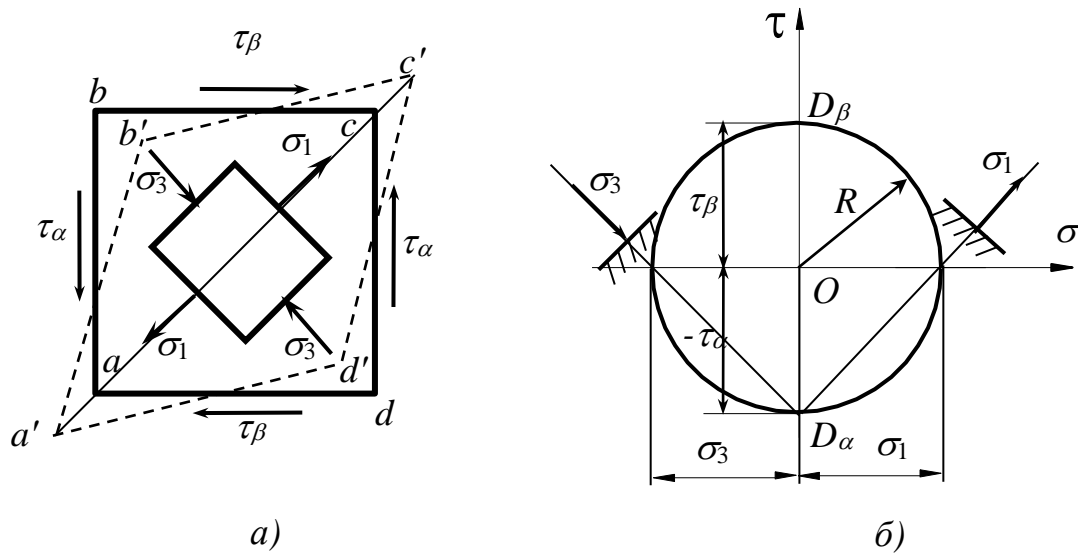


Рисунок 8.2

Розглянемо більш детально деформацію цього елемента (рис. 8.3).

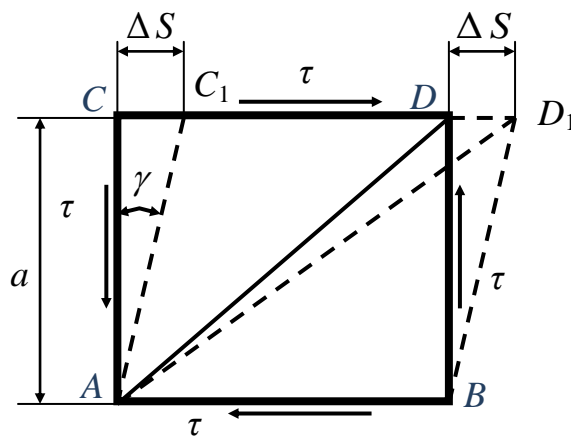


Рисунок 8.3

Якщо грань AB закріпити нерухомо, то під дією дотичних напружень грань CD зрушиться паралельно AB на деяку величину $DD_1=CC_1=\Delta S$, яка зветься абсолютним зсувом. Елемент $ABCD$ перекосить, прямий кут CAB зменшиться на кут γ , що називається відносним зсувом. Оскільки деформації елемента – пружні, цей кут є вельми малим. Тоді

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (8.6)$$

Залежність величини γ від τ встановлює закон Гука при зсуві у відносній формі:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{або} \quad \tau = G \cdot \gamma, \quad (8.7)$$

де G – так званий модуль пружності II роду (або модуль пружності при зсуві).

Величина G не є новою фізичною характеристикою матеріалу, бо вона пов'язана з модулем пружності I роду (E) і коефіцієнтом Пуассона (μ):

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}. \quad (8.8)$$

Для сталі: $E \approx 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu \approx 0,3$. Тоді

$$G \approx \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot (1 + 0,3)} \approx 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа} \approx 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Розв'язуючи разом рівняння (8.3), (8.6) і (8.7), одержуємо:

$$\Delta S = \frac{P \cdot a}{G \cdot F}, \quad (8.9)$$

де P – сила, що спричиняє зсув (див. рис. 8.1);

F – площа зсуву;

a – розмір елемента (див. рис. 8.3).

Формулу (8.9) часто називають законом Гука при зсуві в абсолютній формі.

8.3 Розрахунки на міцність при зсуві

Елементи багатьох з'єднань, які працюють в умовах зсуву (заклепувальних, шпонкових, зварних та ін.) розраховують на зріз. У ряді випадків їх доповнюють розрахунками на зминання і розрив.

Умова міцності на зріз базується на формулах (8.3) і (8.4) і має вигляд

$$\tau = \frac{P_{зр.}}{F_{зр.}} \leq [\tau], \quad (8.10)$$

де τ – дотичне напруження в елементі з’єднання;

$P_{зр.}$ – сила, що створює це напруження;

$F_{зр.}$ – площа зрізу;

$[\tau]$ – допустиме дотичне напруження.

Визначимо величину $[\tau]$ для пластичних матеріалів, з яких зазвичай виготовлюються деталі з’єднань. Використаємо при цьому третю і четверту теорії міцності (див. підрозд. 5.7), а також вирази для головних напружень при чистому зсуві (див. формули (8.5)).

При чистому зсуві у граничному стані (поява пластичних деформацій) маємо:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \tau_{зр.}; \\ \sigma_3 = -\sigma_3 = -\tau_{зр.}; \\ \sigma_2 = 0. \end{cases} \quad (8.11)$$

У граничному стані при використанні третьої теорії міцності:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{зр.}, \quad (8.12)$$

де $\sigma_{зр.}$ – граничне нормальне напруження ($\sigma_{зр.} = \sigma_T$ при розтяганні або стисканні).

Підставивши вирази (8.11) у формулу (8.12), після перетворень одержимо:

$$\tau_{зр.} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{зр.}. \quad (8.13)$$

Поділивши ліву і праву частини (8.13) на коефіцієнт запасу міцності (n), остаточно отримаємо:

$$[\tau]_{III} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma]. \quad (8.14)$$

У граничному стані при використанні четвертої теорії міцності:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = \sigma_{зр.}. \quad (8.15)$$

Після підстановки у (8.15) значень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ із (8.11) і подальших перетворень, остаточно отримаємо:

$$[\tau]_{IV} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot [\sigma] \approx 0,6 \cdot [\sigma]. \quad (8.16)$$

У розрахунках на міцність умова (8.10) є основною при визначенні основних параметрів з'єднань, що працюють на зріз. Так, використовуючи її, можна визначити потрібну площу зрізу:

$$F_{зр.} \geq \frac{P_{зр.}}{[\tau]}. \quad (8.17)$$

Розрахунки на зминання і розрив проводять як перевіірочні, коли є загроза руйнування з'єднання з цих причин. Відповідні умови міцності мають вигляд

$$\sigma_{зм.} = \frac{P_{зм.}}{F_{зм.}} \leq [\sigma_{зм.}], \quad (8.18)$$

$$\sigma_{роз.} = \frac{P_{роз.}}{F_{роз.}} \leq [\sigma], \quad (8.19)$$

де $P_{зм.}$, $P_{роз.}$ – відповідно зусилля зминання і розриву;
 $F_{зм.}$, $F_{роз.}$ – відповідно площі зминання і розриву;
 $[\sigma_{зм.}]$ – допустиме напруження при зминанні,

$$[\sigma_{зм.}] = (2,0 \dots 2,5) \cdot [\sigma]; \quad (8.20)$$

$[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження (див. ідрозд. 6.1).

Процедуру зазначених розрахунків проілюструємо прикладом.

Приклад 8.1. Сталеві смуги з'єднані між собою за допомогою двох металевих заклепок (рис. 8.4). За третьою теорію міцності визначити потрібний діаметр заклепок і всебічно перевірити надійність з'єднання, якщо $P = 40$ кН, $a = 30$ мм, $b = 60$ мм, $\delta = 8$ мм, допустиме напруження для заклепок $[\sigma]_з. = 200$ МПа, для смуг – $[\sigma]_с. = 160$ МПа.

Розв'язання

1. Зовнішні сили P розтягують смуги. Заклепки є своєрідними в'язями з реакціями $R_1 \dots R_4$ (див. рис. 8.4). Вважатимемо ці реакції однаковими і такими, що попарно рівноважують сили P . Тоді

$$R_1=R_2=R_3=R_4=R = P/2 = 20 \text{ кН}. \quad (8.21)$$

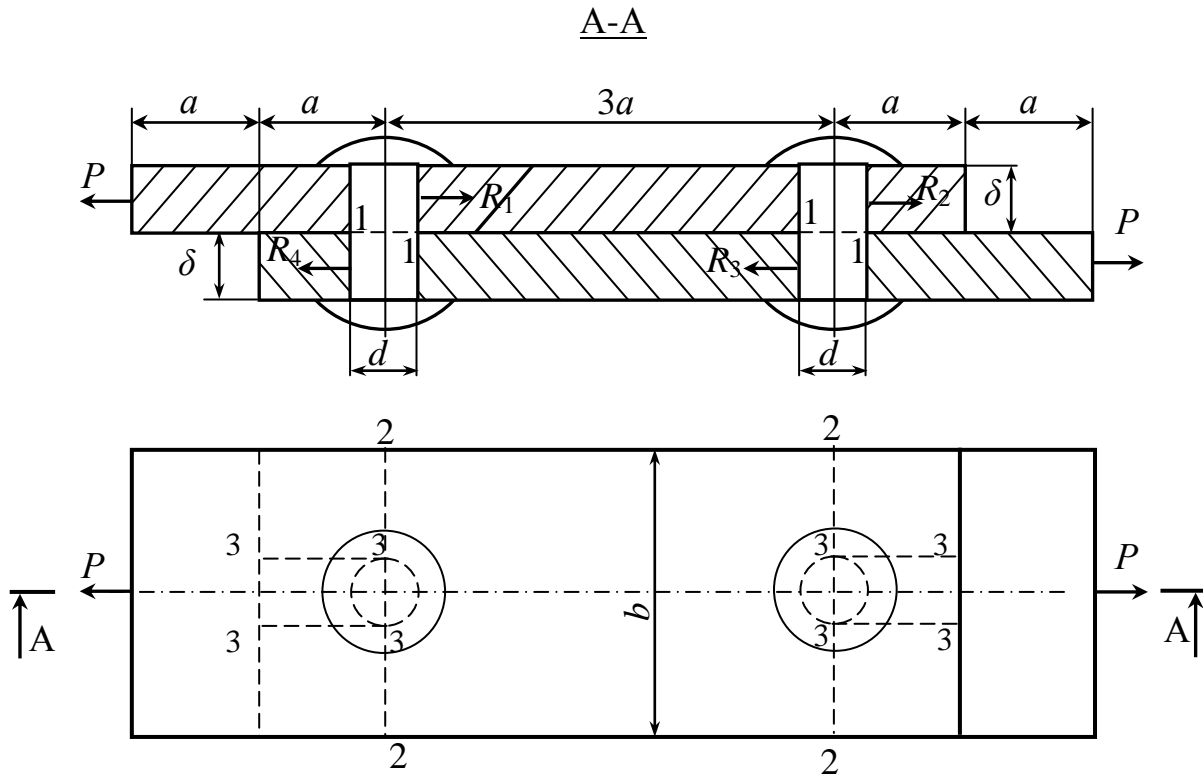


Рисунок 8.4

2. Причиною вірогідного руйнування заклепок є зріз по поверхнях 1–1 (див. рис. 8.4). Зусилля зрізу кожної заклепки дорівнює:

$$P_{зр.} = R = 20 \text{ кН.}$$

Площа поверхні зрізу однієї заклепки:

$$F_{зр.} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,25 \cdot \pi \cdot d^2. \quad (8.22)$$

Допустиме дотичне напруження матеріалу заклепок (див. формулу (8.14)):

$$[\tau]_{з.} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma]_{з.} = \frac{1}{2} \cdot 200 = 100 \text{ МПа.}$$

Тоді, з урахуванням виразу (8.22) і умови (8.17), маємо:

$$F_{зр.} \geq \frac{P_{зр.}}{[\tau]} = \frac{20 \cdot 10^3}{100} = 200 \text{ мм}^2,$$

$$d \geq \sqrt{\frac{200}{0,5 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{200}{0,5 \cdot 3,14}} = 15,96 \text{ мм.}$$

З нормального ряду лінійних розмірів (див. дод. А) приймаємо: $d = 16 \text{ мм}$.

2. Оскільки $[\sigma]_c < [\sigma]_з$, зминання можливе у смуг в місцях їх контакту з боковими поверхнями заклепок. При цьому в кожному місці контакту умовна площа зминання (рис. 8.5) становить:

$$F_{зм.} = d \cdot \delta = 16 \cdot 8 = 128 \text{ мм}^2,$$

а зусилля зминання – $P_{зм.} = R = 20 \text{ кН}$.

Тоді

$$\sigma_{зм.} = \frac{P_{зм.}}{F_{зм.}} = \frac{20 \cdot 10^3}{128} = 156,25 \text{ МПа.}$$

Допустиме напруження при зминанні матеріалу смуг (див. формулу (8.20)):

$$[\sigma_{зм.}] = 2 \cdot [\sigma]_c = 2 \cdot 160 = 320 \text{ МПа.}$$

Оскільки $\sigma_{зм.} < [\sigma_{зм.}]$, умова міцності (8.18) виконується.

3. Вірогідний розрив смуг слід очікувати по поверхнях 2–2, розташованим ближче до точок прикладення сил P (див. рис. 8.4), тобто там, де подовжня сила найбільша (рис. 8.6). Тоді

$$P_{роз.} = N_{\max} = P = 40 \text{ кН.}$$

Кожна з цих поверхонь має площу (див. рис. 8.5):

$$F_{роз.} = (b - d) \cdot \delta = (60 - 16) \cdot 8 = 352 \text{ мм}^2.$$

Розривне напруження при цьому становить:

$$\sigma_{роз.} = \frac{P_{роз.}}{F_{роз.}} = \frac{40 \cdot 10^3}{352} = 113,64 \text{ МПа.}$$

Як бачимо, $\sigma_{роз.} < [\sigma]_c$, тому умова (8.19) також виконується.

4. Руйнування смуг можливе також шляхом виривання матеріалу з їх кінців реакціями R_2 і R_4 , тобто шляхом зрізу заклепками об'ємів матеріалу між площинами 3–3 (див. рис. 8.4).

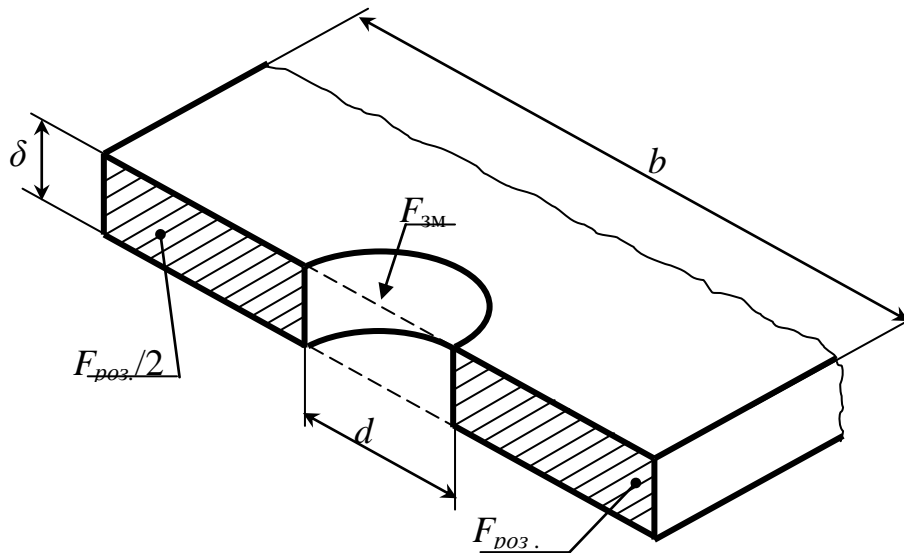


Рисунок 8.5

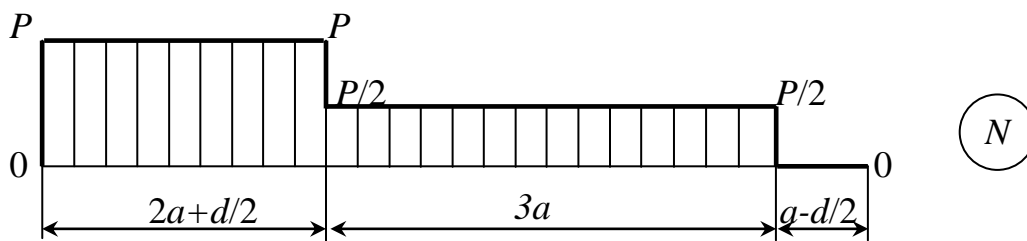


Рисунок 8.6

У цьому разі сумарна площа зрізу у однієї смуги становить:

$$F'_{зр.} = 2 \cdot a \cdot \delta = 2 \cdot 30 \cdot 8 = 480 \text{ мм}^2,$$

а дотичні напруження на поверхнях зрізу:

$$\tau' = \frac{P'_{зр.}}{F'_{зр.}} = \frac{R}{F'_{зр.}} = \frac{20 \cdot 10^3}{480} = 41,67 \text{ МПа.}$$

Допустиме дотичне напруження для матеріалу смуг (див. формулу (8.14)):

$$[\tau]_c = \frac{1}{2} \cdot [\sigma]_c = \frac{1}{2} \cdot 160 = 80 \text{ МПа.}$$

Оскільки $\tau' < [\tau]_c$, то небезпека виривання матеріалу з кінців смуг відсутня. Таким чином, розглянуте заклепувальне з'єднання є цілком надійним, оскільки забезпечує виконання всіх умов міцності.

Наведений приклад стосується лише одного з багатьох можливих варіантів з'єднань, що працюють в умовах зсуву. Особливості розрахунку інших розглядаються в курсах деталей машин і спеціальних дисциплін.

9 КРУЧЕННЯ

9.1 Загальні положення. Побудова епюр крутних моментів

Крученням називають такий варіант навантаження стрижня, при якому в його поперечних перерізах виникають лише крутні моменти – $M_{кр.}$, а інші внутрішні силові фактори відсутні.

Стрижні, які передають крутний момент, в техніці зветься валами. Вони мають, як правило, круглу форму поперечного перерізу – суцільну або кільцеву (див. рис. 6.7, 6.8).

У загальному випадку навантаження вала крутний момент у будь-якому з його перерізів дорівнює сумі моментів відносно осі вала (z) від зовнішніх сил, прикладених до його залишеної частини:

$$M_{кр.} = \sum m_z(\bar{P}_k). \quad (9.1)$$

У випадку обертання вала з постійною частотою (n) крутний момент можна визначити за формулою

$$M_{кр.} = \frac{K}{\omega} = K \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{30 \cdot K}{\pi \cdot n}, \quad (9.2)$$

де K – потужність, що передається валом;

ω – кутова швидкість обертання вала;

n – кількість обертів вала за 1 хвилину.

Слід зауважити, що потужності у кіловатах (кВт) відповідає крутний момент у кН·м. У разі ж, коли потужність у формулі (9.2) вимірюється у ватах (Вт), крутний момент має розмірність Н·м.

Для визначення небезпечних перерізів валів будують епюри крутних моментів, вводячи таке правило знаків: *крутний момент вважається додатним, коли спостерігач, який дивиться на переріз, бачить момент $M_{кр.}$, який направлений за ходом стрілок годинника. При протилежному напрямку крутний момент вважається від'ємним.*

Зазначене правило знаків для крутних моментів узгоджене з класичним правилом теоретичної механіки, згідно з яким моменти сил відносно осі вважаються додатними, якщо, дивлячись з додатного напрямку цієї осі, можна бачити їх спрямованими проти ходу стрілок годинника. Тож, крутні моменти мають такі самі знаки, як і моменти зовнішніх сил, що їх спричиняють. На рисунку 9.1 крутний момент у перерізі A , як і зовнішні моменти M_1 та M_2 , що його врівноважують, зображені додатними.

Процедуру побудови епюр крутних моментів проілюструємо таким прикладом.

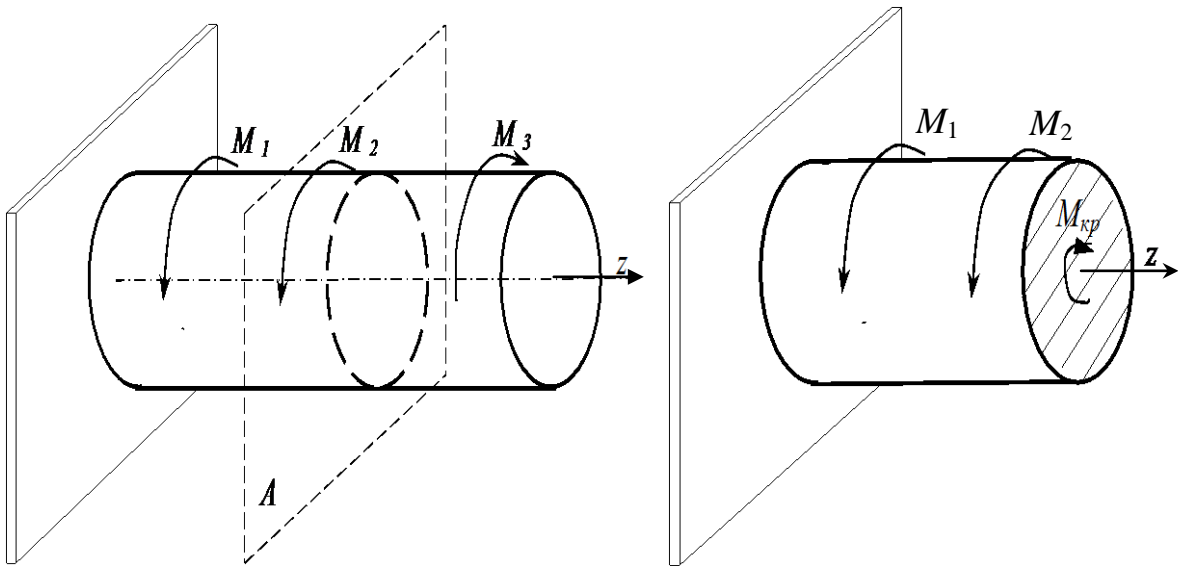


Рисунок 9.1

Приклад 9.1. Для вала (рис. 9.2, а) побудувати епюру крутних моментів, якщо модулі зовнішніх моментів дорівнюють: $M_1 = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_2 = 350 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_3 = 300 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_4 = 400 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_5 = 200 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

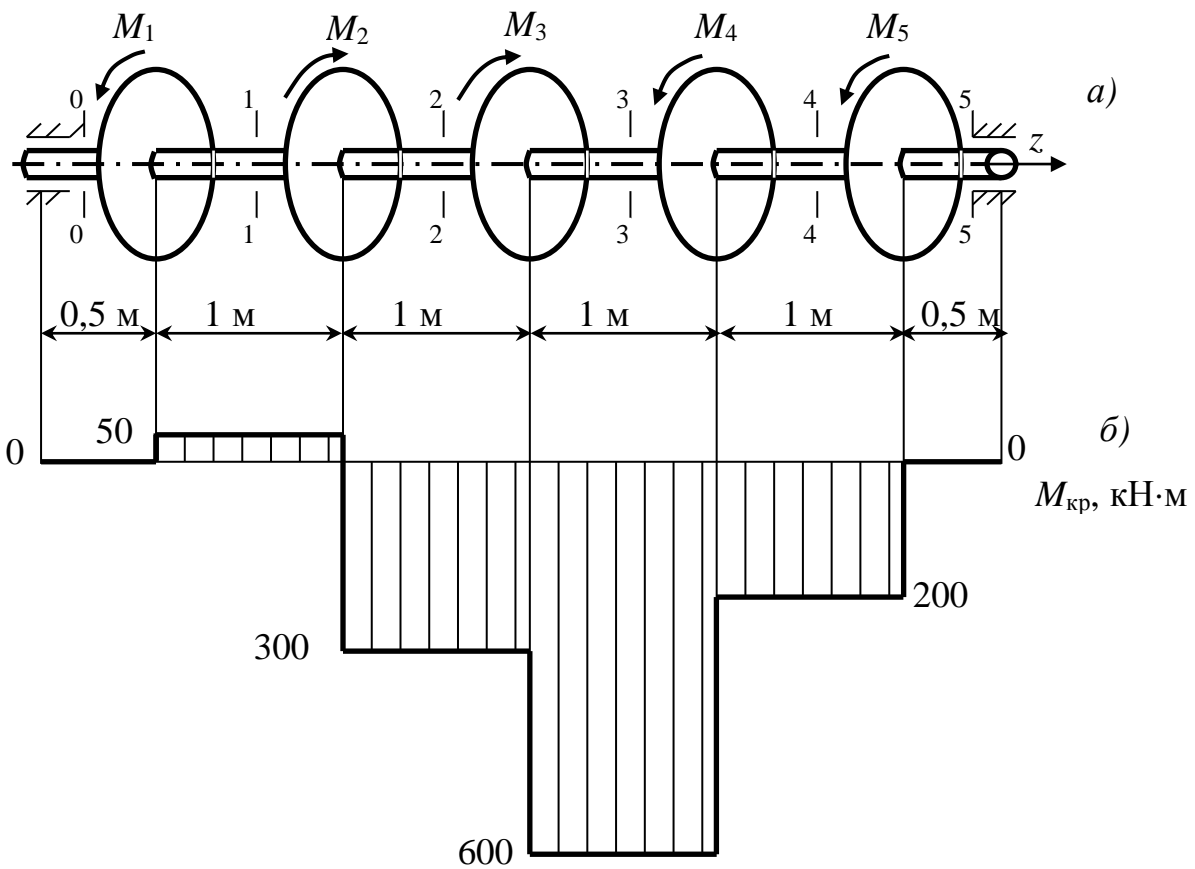


Рисунок 9.2

Розв'язання

1. Згідно з означеним правилом, будемо вважати зовнішні моменти M_1, M_4 і M_5 додатними, а моменти M_2 і M_3 – від'ємними.

2. Вал має шість ділянок з різними значеннями крутних моментів. Визначимо їх величини у довільних перерізах кожної з ділянок (див. рис. 9.2, а), тобто в перерізах 0–0, 1–1, 2–2, 3–3, 4–4 і 5–5:

$$M_{кр.}^{0-0} = 0; \quad M_{кр.}^{1-1} = M_1 = +50 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{кр.}^{2-2} = M_1 - M_2 = +50 - 350 = -300 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{кр.}^{3-3} = M_1 - M_2 - M_3 = +50 - 350 - 300 = -600 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{кр.}^{4-4} = M_1 - M_2 - M_3 + M_4 = +50 - 350 - 300 + 400 = -200 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{кр.}^{5-5} = M_1 - M_2 - M_3 + M_4 + M_5 = +50 - 350 - 300 + 400 + 200 = 0.$$

3. Зважаючи на те, що вказані перерізи вала є довільними, значення крутних моментів у цих перерізах розповсюдимо на всю довжину відповідних ділянок. Тоді вся епюра згинальних моментів буде складатись з горизонтальних прямолінійних ділянок. Побудована таким чином епюра крутних моментів зображена на рисунку 9.2, б. Порівнюючи її з епюрою подовжніх сил (див. рис. 2.2), бачимо повну їх зовнішню схожість. Схожими є і процедури побудови цих епюр.

9.2 Напруження і деформації при крученні вала

При розрахунку вала на кручення вирішують дві основні задачі: визначають напруження, що виникають у його перерізах, і знаходять кутові переміщення залежно від зовнішніх моментів.

Зазначений розрахунок базується на *гіпотезі плоских перерізів*, в основу якої покладено припущення, що плоскі поперечні перерізи вала залишаються такими ж і при крученні, повертаючись один до одного як жорстке ціле.

Досліди показують, що при скручуванні вала зовнішнім моментом M (рис. 9.3, а) подовжні прямі лінії на його поверхні перетворюються на гвинтові; радіуси на торцевому перерізі не скривлюються; відстані між перерізами практично не міняються, тобто перерізи 1–1 і 2–2 зберігають між собою відстань dz , повертаючись один до одного на кут закручування $d\varphi$.

Крутний момент $M_{кр.}$, який дорівнює зовнішньому моменту M , пов'язаний з величинами дотичних напружень τ у точках перерізу (рис. 9.3, б):

$$M_{кр.} = \int_F \rho \cdot \tau \cdot dF. \quad (9.3)$$

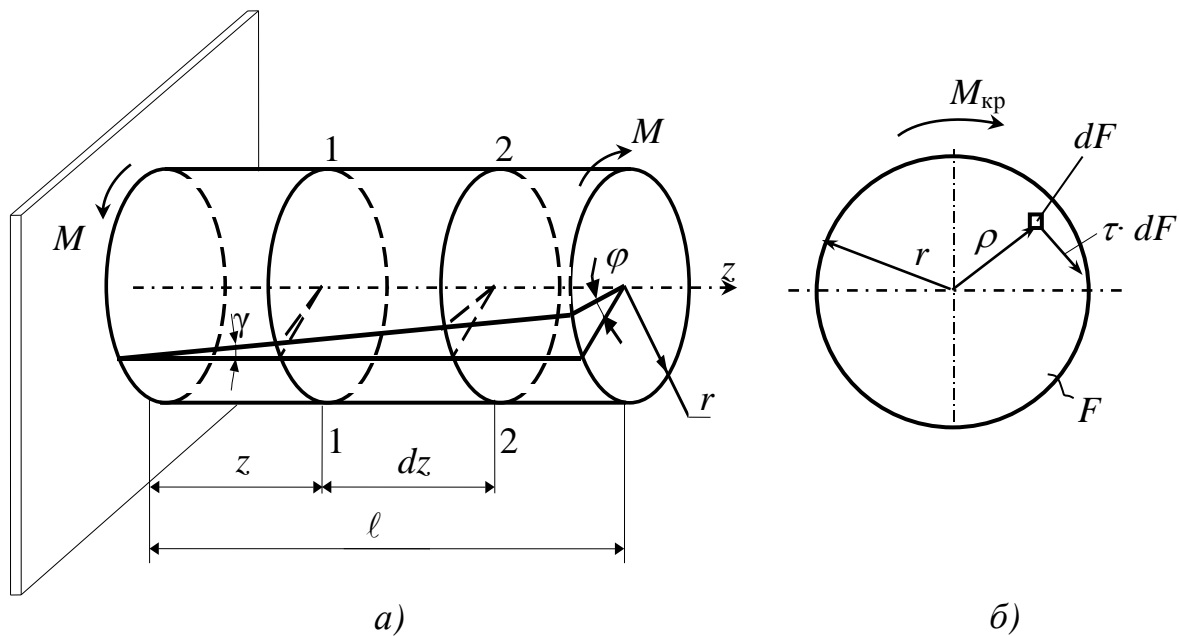


Рисунок 9.3

Для визначення величин τ виділимо з вала двома циліндровими поверхнями з радіусами ρ і $\rho+d\rho$ елементарне кільце довжиною dz (рис. 9.4).

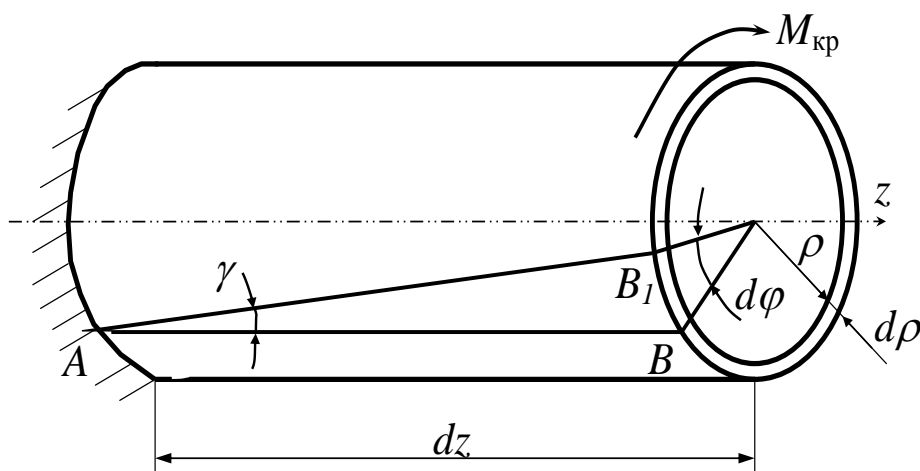


Рисунок 9.4

Правий торцевий переріз кільця (див. рис. 9.4) повертається при крученні відносно лівого на кут $d\varphi$. Пряма AB повертається при цьому на кут γ і, перетворюючись на гвинтову лінію, займає положення AB_1 . Довжина BB_1 дорівнює $\rho \cdot d\varphi$ або $\gamma \cdot dz$.

Отже

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz}. \quad (9.4)$$

Кут γ є кутом зсуву циліндрової поверхні. Величина $d\varphi / dz$ позначається зазвичай через θ і називається *відносним кутом закручування* або кутом взаємного повороту двох перерізів, віднесеним до відстані між ними:

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (9.5)$$

Пов'яжемо кут γ з величиною τ законом Гука при зсуві (див. формулу (8.7)). Тоді з урахуванням (9.4) отримаємо:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz}. \quad (9.6)$$

Підставивши (9.6) у вираз (9.3), маємо:

$$M_{кр.} = \int_F G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho^2 \cdot dF. \quad (9.7)$$

Оскільки величини G і $\frac{d\varphi}{dz}$ в (9.7) є константами, їх можна винести за знак інтеграла. Тоді

$$M_{кр.} = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \int_F \rho^2 \cdot dF = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot J_p, \quad (9.8)$$

де J_p – полярний момент інерції перерізу вала (див. формулу (3.11)).

Тепер із виразу (9.8) визначимо величину $\frac{d\varphi}{dz}$:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{кр.}}{G \cdot J_p}. \quad (9.9)$$

Підставимо вираз (9.9) у формулу (9.6). Остаточного маємо:

$$\tau = \frac{M_{кр.}}{J_p} \cdot \rho. \quad (9.10)$$

Таким чином, дотичні напруження в поперечних перерізах вала розподілені уздовж радіуса за лінійним законом і мають найбільші значення на поверхні вала (при $\rho = r = d/2$):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{J_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (9.11)$$

де величина

$$W_p = \frac{2 \cdot J_p}{d} \quad (9.12)$$

зветься *полярним моментом опору перерізу* вала.

Оскільки полярні моменти інерції J_p у кола і кільця вдвічі більші за осьові моменти інерції – J_x і J_y (див. підрозд. 3.2), то і полярні їх моменти опору в два рази більші за осьові:

$$W_p = 2 \cdot W_{oc}. \quad (9.13)$$

Для суцільного перерізу (див. формулу (6.18))

$$W_{oc} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Тоді з урахуванням (9.13):

$$W_p = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot d^3. \quad (9.14)$$

Для кільцевого перерізу (див. формули (6.18), (6.19))

$$W_{oc} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \cdot (1 - c^4),$$

де

$$c = d_0 / d.$$

Тоді

$$W_p = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot d^3 \cdot (1 - c^4), \quad (9.15)$$

Епюри дотичних напружень в означених перерізах зображені на рисунках 9.5, а і 9.5, б.

Звернемо увагу на те, що максимальні дотичні напруження діють також у подовжніх перерізах вала, які проходять через його вісь, бо це витікає із закону парності дотичних напружень (див. підрозд. 5.1). Взагалі,

на поверхні вала має місце напружений стан чистого зсуву (див. підрозд. 8.1), схема якого зображена на рисунку 9.6. Чистий зсув діє і в глибинних шарах вала.

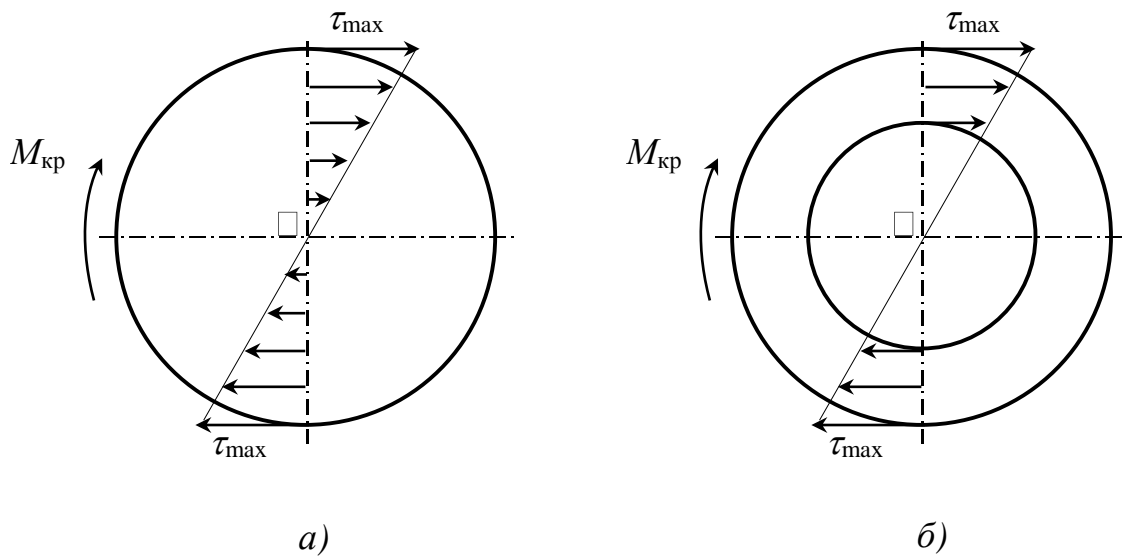


Рисунок 9.5

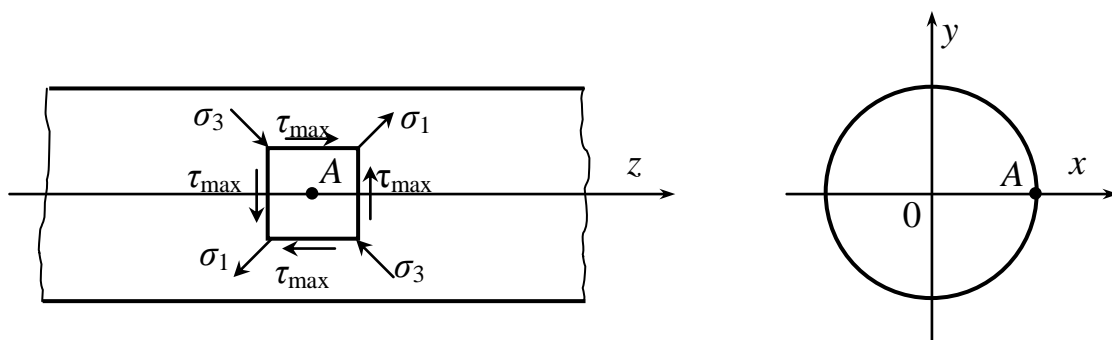


Рисунок 9.6

Повернемося тепер до виразу (9.9). Він дозволяє визначити повний кут закручування вала довжиною ℓ :

$$\varphi = \int_{\ell} \frac{M_{кр.}}{G \cdot J_p} \cdot dz. \quad (9.16)$$

У разі, коли $M_{кр.}$ за довжиною вала є незмінним і коли жорсткість перерізу вала при крученні – $G \cdot J_p$ також незмінна, вираз (9.16) спрощується:

$$\varphi = \frac{M_{кр.} \cdot \ell}{G \cdot J_p}. \quad (9.17)$$

У випадку, коли вал має ступінчасту форму і (або) різні значення $M_{кр.}$ на окремих ділянках, формулу (9.17) використовують для кожної ділянки, після цього визначені кути закручування підсумовують з урахуванням їх напрямків.

9.3 Умови міцності й жорсткості при крученні

Вали, що не несуть поперечних навантажень (наприклад, карданні вали автомобілів, штанги бурових установок, свердла та ін.) розраховують на міцність і жорсткість при крученні. Поперечні навантаження, що спричиняються елементами механічних передач, закріпленими на валах, до кручення додають згини у різних площинах і значно ускладнюють розрахунки.

Умова міцності вала при крученні має вигляд

$$\tau_{\max} = \left| \frac{M_{кр.}}{W_p} \right|_{\max} \leq [\tau], \quad (9.18)$$

де τ_{\max} – найбільше дотичне напруження в об'ємі вала;

$[\tau]$ – допустиме дотичне напруження (див. формули (8.14), (8.16)).

Умова жорсткості обмежує відносний кут закручування вала:

$$\theta_{\max} = \left| \frac{M_{кр.}}{G \cdot J_p} \right|_{\max} \leq [\theta], \quad (9.19)$$

де θ_{\max} – найбільший відносний кут закручування за довжиною вала;

$[\theta]$ – допустимий відносний кут закручування, що залежить від характеру навантаження вала.

Вважається прийнятним: $[\theta] \approx 0,005$ рад/м (0,29 град/м) – при статичному навантаженні, $[\theta] \approx 0,004$ рад/м (0,23 град/м) – при перемінному, $[\theta] \approx 0,003$ рад/м (0,17 град/м) – при ударному.

Практичні розрахунки валів на міцність і жорсткість розглянемо на таких прикладах.

Приклад 9.2. Підібрати діаметр суцільного сталюого вала (див. рис. 9.2, а) і визначити повний кут його закручування, прийнявши: $[\tau] = 120$ МПа, $[\theta] = 0,005$ рад/м, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Розв'язання

1. З епюри крутних моментів (див. рис. 9.2, б) знаходимо максимальне за модулем значення крутного моменту: $M_{кр.}^{\max} = 600 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2. З умови міцності (9.18) і з урахуванням виразу для W_p (9.14) визначаємо потрібний діаметр вала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}^{\max}}{\frac{1}{16} \pi \cdot d^3} \leq [\tau];$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}^{\max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 600 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 120}} = 294 \text{ мм.}$$

3. Оскільки довжини всіх ділянок вала, де $M_{кр.} \neq 0$, однакові (див. рис. 9.2, а), бачимо, що відносний кут закручування вала θ буде найбільшим саме на ділянці дії $M_{кр.}^{\max}$. З урахуванням цього, використовуючи умову жорсткості (9.19) і вираховуючи J_p за формулами (3.13), (3.19), вдруге визначаємо потрібний діаметр вала:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр.}^{\max}}{G \cdot \frac{1}{32} \pi \cdot d^4} \leq [\theta];$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр.}^{\max}}{G \cdot \pi \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 600 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 0,005 \cdot 10^{-3}}} = 352 \text{ мм.}$$

4. Як бачимо, потрібне значення діаметра вала з умови жорсткості виявилось більшим, ніж з умови міцності. Тому з відповідної таблиці сортаменту (див. дод. А) остаточно приймаємо: $d = 360$ мм.

5. Визначаємо повний кут закручування вала.

З рисунка 9.4 виходить, що напрямок закручування вала співпадає з напрямком крутного моменту, який спричиняє це закручування. Оскільки закручування може відбуватись або за ходом стрілок годинника, або проти цього ходу, треба в розрахунку розрізняти означені напрямки. Будемо вважати кути закручування додатними, якщо вони спричинені додатними крутними моментами (див. підрозд. 9.1), і від'ємними, якщо крутні моменти від'ємні.

Наш вал (див. рис. 9.2, а) має шість характерних ділянок з різними величинами $M_{кр.}$. Крайні ліва і права ділянки вала (нульова і п'ята) не мають крутних моментів, тому $\varphi_0 = \varphi_5 = 0$. На ділянці 1 крутний момент додатний, тож і $\varphi_1 > 0$. На ділянках 2, 3 і 4 крутні моменти від'ємні (див. рис. 9.2, б), тому $\varphi_2 < 0$, $\varphi_3 < 0$ і $\varphi_4 < 0$.

Визначимо величини вказаних кутів закручування, використовуючи формулу (9.17), у якій під $M_{кр.}$ будемо розуміти крутний момент на тій чи

інший ділянці, а під ℓ – довжину цієї ділянки ($\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = 1$ м.). Таким чином:

$$\varphi_1 = \frac{M_{кр}^{1-1} \cdot \ell_1}{G \cdot J_p} = + \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{32} \cdot 3,14 \cdot 360^4} = +3,790 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{кр}^{2-2} \cdot \ell_2}{G \cdot J_p} = - \frac{300 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{32} \cdot 3,14 \cdot 360^4} = -2,274 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{кр}^{3-3} \cdot \ell_3}{G \cdot J_p} = - \frac{600 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{32} \cdot 3,14 \cdot 360^4} = -4,548 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

$$\varphi_4 = \frac{M_{кр}^{4-4} \cdot \ell_4}{G \cdot J_p} = - \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{32} \cdot 3,14 \cdot 360^4} = -1,516 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Повний кут закручування вала визначимо як алгебраїчну суму кутів закручування на всіх його ділянках:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 = 0 + 3,790 \cdot 10^{-4} - 2,274 \cdot 10^{-3} - 4,548 \cdot 10^{-3} - 1,516 \cdot 10^{-3} + 0 = -7,955 \cdot 10^{-3} \text{ рад. } (-0,456 \text{ град}).$$

Отриманий результат свідчить про те, що вал є закрученим проти ходу годинникової стрілки майже на 0,5 градуса.

Приклад 9.3. Бурова штанга, що має форму труби з зовнішнім діаметром $d = 100$ мм і внутрішнім $d_0 = 60$ мм, обертається з частотою $n = 120$ обертів за хвилину. Визначити максимально допустиму потужність приводу штанги, якщо $[\tau] = 80$ МПа, $[\theta] = 0,20$ град/м, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Розв'язання

1. Визначимо параметри штанги, потрібні для подальшого розрахунку:

$$c = \frac{d_0}{d} = \frac{60}{100} = 0,6;$$

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 100^4 \cdot (1 - 0,6^4)}{32} = 8,541 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$[\theta] = 0,20 \cdot \frac{3,14}{180} = 3,489 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м} = 3,489 \cdot 10^{-6} \text{ рад/мм.}$$

2. З умови жорсткості (9.19) визначаємо максимально допустиму величину крутного моменту:

$$\begin{aligned} M_{кр.}^{\max} &= [\theta] \cdot G \cdot J_p = 3,489 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 8,541 \cdot 10^6 = \\ &= 238,396 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{мм} = 2,384 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

3. Перевіряємо штангу на міцність:

$$W_p = \frac{J_p}{0,5 \cdot d} = \frac{8,541 \cdot 10^6}{0,5 \cdot 100} = 17,082 \cdot 10^4 \text{ мм}^3;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр.}^{\max}}{W_p} = \frac{2,384 \cdot 10^6}{17,082 \cdot 10^4} = 13,956 \text{ МПа}.$$

Величина τ_{\max} не перевищує $[\tau]$, тож міцність штанги забезпечена.

4. Визначаємо максимально допустиму потужність приводу штанги, використовуючи формулу (9.2):

$$K_{\max} = M_{кр.}^{\max} \cdot \frac{1}{30} \cdot \pi \cdot n = 2,384 \cdot \frac{1}{30} \cdot 3,14 \cdot 120 = 29,943 \text{ кВт}.$$

10 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТРИЖНІВ

10.1 Подовжній згин, його сутність

При розтяганні прямих стрижнів їх первісна форма зберігається аж до розриву. При стисканні ж їх центральною силою, тобто прикладеною в центрі ваги перерізу, можлива втрата цієї форми і, як наслідок, швидке руйнування. Це явище зветься подовжнім згином.

Причина подовжнього згину пов'язана з наявністю у стиснутих стрижнів трьох форм пружної рівноваги – стійкої, нестійкої і перехідної (критичної).

У разі стійкої рівноваги (рис. 10.1, а) стиснутий стрижень після будь-якого бокового поштовху відхиляється у відповідному напрямку і після цього повертається у свій первинний стан.

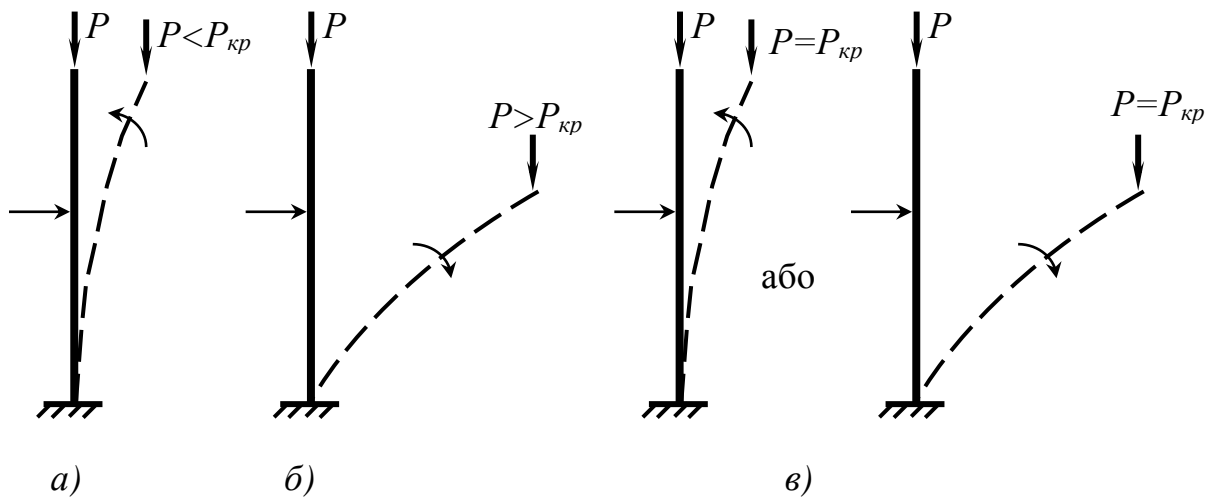


Рисунок 10.1

При нестійкій рівновазі (рис. 10.1, б) стрижень після бокового поштовху в первинний стан не повертається, а продовжує рухатись у напрямку цього поштовху до моменту руйнування.

При критичній рівновазі стрижень після такого поштовху може поводитись як при стійкій, так і при нестійкій рівновазі (рис. 10.1, в). Величина сили, при якій можлива критична рівновага, зветься *критичною силою* – $P_{кр}$. Зрозуміло, що стійка рівновага має місце, коли $P < P_{кр}$, а нестійка, коли $P > P_{кр}$.

Таким чином, втрата стрижнем стійкості вірогідна вже при критичній рівновазі. Тому критична сила вважається небезпечною з точки зору подовжнього згину. Щоб запобігти цьому небезпечному явищу, треба вміти визначати величину $P_{кр}$.

10.2 Визначення критичної сили. Задача Ейлера

Вперше задача визначення критичної сили для центрально стиснутих стрижнів була розв'язана видатним математиком і механіком **Л. Ейлером** (1707–1783). До цих пір вона є основою відповідних практичних розрахунків. Розглянемо цю задачу.

Схема стиснутого стрижня, прийнята в задачі Ейлера, зображена на рисунку 10.2.

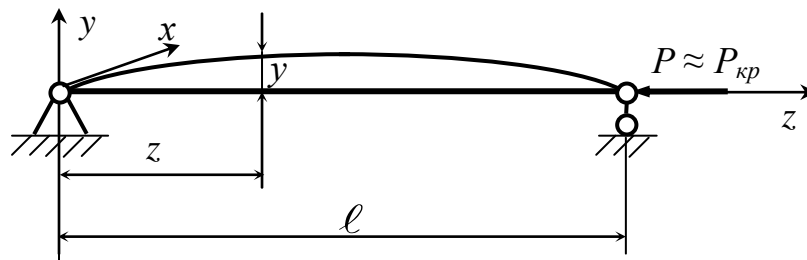


Рисунок 10.2

Розв'язання задачі базується на таких припущеннях:

1. Стрижень стискається силою P , не набагато більшою за $P_{кр}$.
2. Відхилення стрижня від прямолінійної форми y є малим (розглядається початок втрати стійкості).
3. Напруження в стрижні не перевищують межі пропорційності:

$$\sigma \leq \sigma_{пц}. \quad (10.1)$$

4. Згин стрижня відбувається у площині мінімальної жорсткості (zy):

$$J_{\min} = J_x. \quad (10.2)$$

У основу розв'язання задачі покладено два вирази для кривизни пружної лінії стиснутого стрижня (тобто його зігнутої осі).

Перший з них відомий з курсу вищої математики:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y/dz^2}{\left[1 + (dy/dz)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (10.3)$$

де ρ – радіус кривизни плоскої кривої.

Другий вираз для кривизни отримано в ході визначення нормальних напружень при плоскому згині (див. формулу (6.11)). Цього разу цей вираз набуває вигляду

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_x} = \frac{P \cdot y}{E \cdot J_{\min}}. \quad (10.4)$$

Зважаючи на те, що значення y малі, будемо вважати такими і величини dy/dz (тобто тангенси кутів нахилу дотичних кривої до осі z). Тоді, нехтуючи цими величинами ($dy/dz \approx 0$), із (10.3) маємо:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dz^2}. \quad (10.5)$$

Прирівнюючи (10.4) і (10.5), отримуємо:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{P \cdot y}{E \cdot J_{\min}}. \quad (10.6)$$

Знак «мінус» у рівнянні (10.6) поставлено тому, що знаки $d^2 y / dz^2$ і y завжди протилежні (див. курс вищої математики). Цього разу (див. рис. 10.2) $y > 0$, а $d^2 y / dz^2 < 0$. Якщо ж стрижень буде вигнутий униз, знаки цих величин поміняються на протилежні.

Позначимо:

$$P / E \cdot J_{\min} = k^2. \quad (10.7)$$

З урахуванням виразу (10.7) рівняння (10.6) набуває стандартного вигляду

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 \cdot y = 0. \quad (10.8)$$

Як відомо з курсу вищої математики, це рівняння має такий розв'язок:

$$y = A \cdot \sin(k \cdot z) + B \cdot \cos(k \cdot z), \quad (10.9)$$

де A і B – постійні інтегрування, що визначаються із граничних умов:

$$z = 0, \quad y = 0; \quad (10.10)$$

$$z = \ell, \quad y = 0. \quad (10.11)$$

Підставивши умову (10.10) у (10.9), отримаємо:

$$0 = 0 + B,$$

або $B = 0.$ (10.12)

Підставивши умову (10.11) у вираз (10.9) і значення B (10.12), маємо:

$$0 = A \cdot \sin(k \cdot \ell). \quad (10.13)$$

Зважаючи на те, що $A \neq 0$ (інакше приведе до $y \equiv 0$, що суперечить умові задачі), приймаємо:

$$\sin(k \cdot \ell) = 0. \quad (10.14)$$

Тоді

$$k \cdot \ell = \pi \cdot n, \quad (10.15)$$

де n – ціле число, відмінне від нуля (при $n = 0$ маємо: $k \cdot \ell = 0$ і $y \equiv 0$, що суперечить умові задачі).

Із (10.15) маємо:

$$k^2 = \frac{\pi^2 \cdot n^2}{\ell^2}. \quad (10.16)$$

Прирівнявши (10.7) і (10.16), після перетворень отримаємо вираз для критичної сили:

$$P_{кр} \approx P = \frac{\pi^2 \cdot n^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{\ell^2}. \quad (10.17)$$

Вираз (10.17) не є остаточним, бо в ньому величина n не визначена. Щоб з'ясувати її сенс, повернемося до рівняння пружної лінії стрижня (10.9). З урахуванням (10.12) і (10.15) воно набуває вигляду

$$y = A \cdot \sin(k \cdot z) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{\ell} \cdot z\right). \quad (10.18)$$

Це – рівняння синусоїди. Її період:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \cdot \ell}{\pi \cdot n} = 2 \cdot \frac{\ell}{n}. \quad (10.19)$$

Звідсіль

$$\frac{\ell}{n} = \frac{T}{2} = L, \quad (10.20)$$

де L – так звана півхвиля синусоїди, або приведена довжина стрижня.

Із (10.20) виходить, що

$$n = \ell / L, \quad (10.21)$$

тобто що величина n дорівнює кількості півхвиль синусоїди, які вміщуються в довжині стрижня. У схемі Ейлера (див. рис. 10.2) $n = 1$.

З урахуванням (10.21) вираз для критичної сили (10.17) набуває вигляду

$$P_{кр} \approx P = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot \ell)^2}, \quad (10.22)$$

де μ – величина, яка показує, в скільки разів наведена довжина стрижня більша його дійсної довжини:

$$\mu = \frac{1}{n} = \frac{L}{\ell}. \quad (10.23)$$

Подальші дослідження показали, що величина μ суттєво залежить від схеми кріплення кінців стиснутого стрижня. Деякі варіанти таких схем наведені у додатку Д, інші – у довідковій літературі.

10.3 Межі застосування формули Ейлера для критичного напруження. Формула Ясинського

У практичних розрахунках разом з формулою для критичної сили (10.22) використовують також відповідну формулу для критичного напруження

$$\sigma_{кр.} = \frac{P_{кр.}}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot \ell)^2 \cdot F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{(\mu \cdot \ell)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}, \quad (10.24)$$

де $i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F}$ – мінімальний радіус інерції перерізу стрижня (див. підрозд. 3.2);

F – площа перерізу;

λ – так звана гнучкість стрижня,

$$\lambda = \mu \cdot \ell / i_{\min}. \quad (10.25)$$

З формули (10.24) виходить, що марка сталі або іншого матеріалу, з якого виготовлено стрижень, слабо впливає на величину $\sigma_{кр.}$, бо модуль

пружності E , що пов'язує $\sigma_{кр.}$ з маркою матеріалу, у «дорогих» і «дешевих» його марок приблизно однаковий. Як наслідок – неможливість суттєвого підвищення критичного напруження за рахунок використання більш якісних матеріалів.

З'ясуємо межі застосування формули (10.24). Нагадаємо, що одним з припущень у розглянутій задачі Ейлера напруження в стрижні не повинні перевищувати межю пропорційності. Тож

$$\sigma_{кр.} \leq \sigma_{пц.} \quad (10.26)$$

У граничному випадку

$$\sigma_{кр.} = \sigma_{пц.} \quad (10.27)$$

Із цієї умови визначимо відповідне значення гнучкості – $\lambda_{зр.}$:

$$\sigma_{кр.} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_{зр.}^2} = \sigma_{пц.},$$

$$\lambda_{зр.} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц.}}} \quad (10.28)$$

Для сталі Ст. 3, яка найчастіше використовується для стиснутих стрижнів: $E = 2,1 \times 10^5$ МПа, $\sigma_{пц.} = 200$ МПа. Цього разу

$$\lambda_{зр.} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} = 102.$$

При $\lambda < \lambda_{зр.}$ формула (10.24) дає завищений результат і користуватись нею небезпечно.

Теоретичне розв'язання задачі стійкості за межею пропорційності доволі складне, тому тут послуговуються емпіричними (тобто такими, що базуються на результатах обробки експериментальних даних) формулами для $\sigma_{кр.}$, зокрема формулою **Ф. С. Ясинського** (1856–1899), яка для сталевих стояків має вигляд

$$\sigma_{кр.} = a - b \cdot \lambda, \quad (10.29)$$

де a і b – емпіричні коефіцієнти.

Межі застосування цієї формули:

$$\lambda_0 < \lambda < \lambda_{зр.}, \quad (10.30)$$

де λ_0 – значення гнучкості, при якому $\sigma_{кр.} = \sigma_T$.

Для сталі Ст.3: $\sigma_T = 240$ МПа, $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа,

$$\lambda_0 = \frac{a - \sigma_T}{b} = \frac{310 - 240}{1,14} \approx 61.$$

При $\lambda \leq \lambda_0$ розрахунки на стійкість взагалі не проводять, бо стиснуті стрижні втрачають міцність раніше, ніж стійкість.

Межі застосування наведених формул для критичного напруження наглядно ілюструє діаграма, зображена на рисунку 10.3.

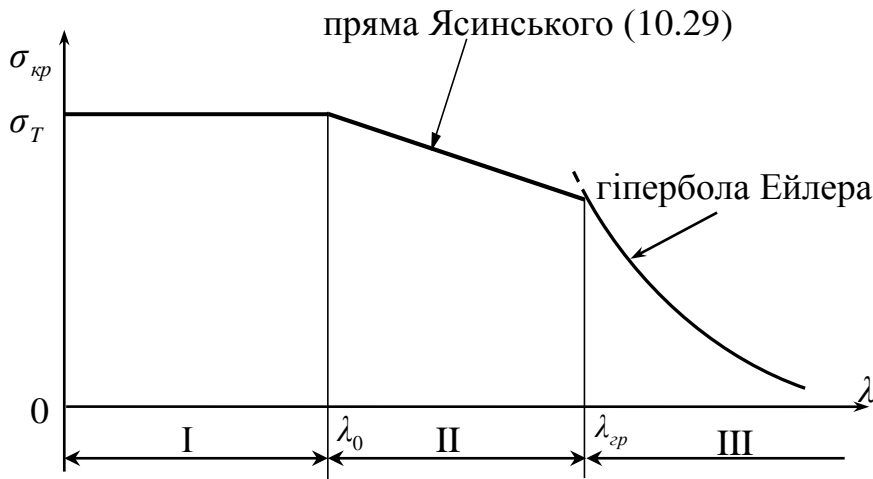


Рисунок 10.3

Ділянка I на цьому рисунку є ділянкою *коротких стрижнів*, розрахунки на стійкість яких не проводять, ділянка II – це ділянка *стрижнів середньої довжини*, для яких використовують формулу Ясинського (10.29), ділянка III є ділянкою *довгих стрижнів*, для яких застосовують формулу Ейлера (10.24).

10.4 Розрахунки на стійкість з використанням коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження

Умови стійкості стиснутих стрижнів мають вигляд

$$P \leq [P_{ст.}] = \frac{P_{кр.}}{n_{ст.}}, \quad (10.31)$$

$$\sigma \leq [\sigma_{ст.}] = \frac{\sigma_{кр.}}{n_{ст.}}, \quad (10.32)$$

де $[P_{ст.}]$ і $[\sigma_{ст.}]$ – сила і напруження, допустимі в розрахунках на стійкість;

n_{cm} – коефіцієнт запасу стійкості (1,7...2,0 – для сталевих будівельних конструкцій; 3,5...5,0 – для сталевих конструкцій в машинобудуванні; 5,0 – для конструкцій з чавуну; 3,0 – для дерев'яних конструкцій).

При стисканні допустимі напруження на міцність $[\sigma_-]$ і стійкість $[\sigma_{cm}]$ пов'язані між собою:

$$\frac{[\sigma_{cm.}]}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{кр.}}{n_{cm.}} \cdot \frac{\sigma_-^0}{n} = \frac{\sigma_{кр.} \cdot n}{\sigma_-^0 \cdot n_{cm.}}, \quad (10.33)$$

де σ_-^0 – напруження, небезпечне з умови міцності при стисканні;

n – коефіцієнт запасу міцності.

Із (10.33) маємо:

$$[\sigma_{cm.}] = \frac{\sigma_{кр.} \cdot n}{\sigma_-^0 \cdot n_{cm.}} \cdot [\sigma_-] = \varphi \cdot [\sigma_-], \quad (10.34)$$

де $\varphi = \frac{\sigma_{кр.} \cdot n}{\sigma_-^0 \cdot n_{cm.}}$ – так званий коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження ($\varphi \leq 1$).

Величини цього коефіцієнта залежать від матеріалу і гнучкості стрижня. Їх наведено у додатку Д, також у довідковій літературі.

З урахуванням (10.34) умова стійкості (10.32) набуває вигляду

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi \cdot [\sigma_-]. \quad (10.35)$$

Розрахунки з використанням умови (10.35) проводяться в будівництві, машинобудуванні й ряді інших галузей промисловості. З її допомогою розв'язують задачі трьох типів:

1. На визначення максимально допустимого навантаження стрижня (проектний розрахунок).
2. На підбір перерізу стрижня (проектний розрахунок).
3. На перевірку умови стійкості стрижня (перевірочний розрахунок).

Приклад 10.1. Визначити максимально допустиму величину навантаження стояка (двотавр 20, сталь Ст.3), якщо $\ell = 2$ м, $[\sigma_-] = 160$ МПа. Схема стояка зображена на рисунку 10.4.

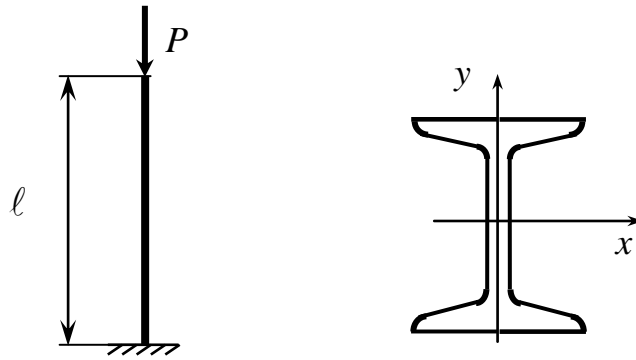


Рисунок 10.4

Розв'язання

У цьому прикладі розглядається перший варіант проєктного розрахунку.

1. Визначаємо гнучкість стояка, прийнявши:
 $\mu = 2$ (дод. Д, рис. Д.1); $i_{\min.} = i_y = 2,07$ см (дод. А, табл. А.2);

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min.}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^2}{2,07} = 193,237.$$

2. Визначаємо величину φ (дод. Д, табл. Д.1). Оскільки значення $\lambda = 193,237$ у цій таблиці нема, використовуємо метод лінійної інтерполяції (рис. 10.5):

$$\varphi = 0,19 + (200 - 193,237) \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,19 + (200 - 193,237) \cdot \frac{0,21 - 0,19}{200 - 190} = 0,204.$$

3. З умови стійкості (10.35) визначаємо максимально допустиме значення стискаючої сили:

$$P_{\max} = F \cdot \varphi \cdot [\sigma_-] = 26,8 \cdot 10^2 \cdot 0,204 \cdot 160 = 87475 \text{ Н} = 87,475 \text{ кН},$$

де $F = 26,8 \text{ см}^2$ – площа поперечного перерізу стояка (дод. А, табл. А.2).

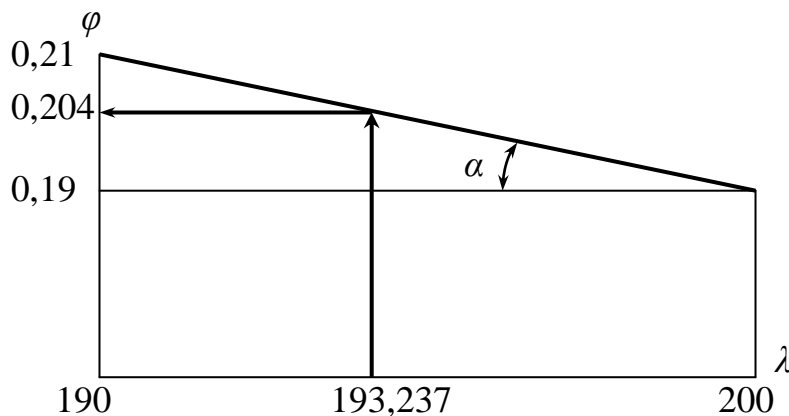


Рисунок 10.5

Приклад 10.2. Підібрати розміри перерізу стояка зі сталі Ст.3 (рис. 10.6), якщо $P = 100$ кН, $\ell = 1$ м, $[\sigma_-] = 160$ МПа, Точність визначення розмірів – до цілих міліметрів.

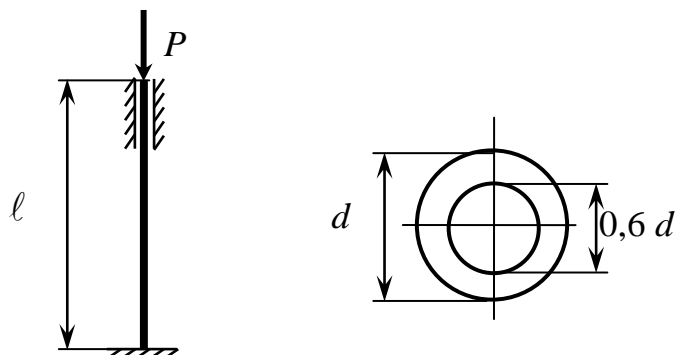


Рисунок 10.6

Розв'язання

У цьому прикладі розглядається другий варіант проектного розрахунку.

1. Виражаємо всі геометричні характеристики стояка через невідомий параметр d :

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} - \frac{\pi \cdot (0,6d)^2}{4} = 0,5024 \cdot d^2;$$

$$J_{oc.} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} - \frac{\pi \cdot (0,6d)^4}{64} = 0,0427 \cdot d^4;$$

$$i_{oc.} = i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{oc.}}{F}} = \sqrt{\frac{0,0427 \cdot d^4}{0,5024 \cdot d^2}} = 0,2915 \cdot d.$$

2. Визначаємо параметр d . Оскільки в умові стійкості (10.35) величини F і φ невідомі, використовуємо метод поступових наближень.

На першому кроці з таблиці Д.1 приймаємо середнє значення φ : $\varphi = 0,6$. Потім визначаємо величини F і d :

$$F \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma_-]} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 160} = 1042 \text{ мм}^2; \quad d \geq \sqrt{\frac{1042}{0,5024}} = 45,5 \text{ мм}.$$

Приймаємо $d = 46$ мм.

У заданій схемі $\mu = 0,5$ (див. рис. Д.1). Тоді

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,2915 \cdot 46} = 37,288.$$

Методом лінійної інтерполяції (див. табл. Д.1) визначаємо відповідне значення φ на кінці першого кроку:

$$\varphi = 0,92 + (40 - 37,288) \cdot \frac{0,94 - 0,92}{40 - 30} = 0,925,$$

де 0,92 і 0,94 – значення φ при величинах гнучкості 40 і 30 відповідно.

Оскільки значення φ на початку і в кінці першого кроку сильно розходяться, продовжуємо розрахунок.

На другому кроці приймаємо: $\varphi = \frac{0,6 + 0,925}{2} = 0,7625.$

Підраховуємо:

$$F \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,7625 \cdot 160} = 820 \text{ мм}^2; \quad d \geq \sqrt{\frac{820}{0,5024}} = 40,4 \text{ мм.}$$

Приймаємо $d = 41$ мм. Цього разу

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,2915 \cdot 41} = 41,836; \quad \varphi = 0,89 + (50 - 41,836) \cdot \frac{0,92 - 0,89}{50 - 40} = 0,914.$$

Оскільки значення φ на початку і в кінці другого кроку все ще сильно різняться, переходимо до наступного кроку.

На третьому кроці приймаємо: $\varphi = \frac{0,7625 + 0,914}{2} = 0,838.$

Підраховуємо:

$$F \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,838 \cdot 160} = 746 \text{ мм}^2; \quad d \geq \sqrt{\frac{746}{0,5024}} = 38,5 \text{ мм.}$$

Приймаємо $d = 39$ мм. Тоді:

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,2915 \cdot 39} = 43,981.$$

Відповідне значення φ в кінці третього кроку становить:

$$\varphi = 0,89 + (50 - 43,981) \cdot \frac{0,92 - 0,89}{50 - 40} = 0,908.$$

Оскільки значення φ на початку і в кінці третього кроку ще суттєво різняться, переходимо до наступного кроку.

На четвертому кроці приймаємо: $\varphi = \frac{0,838 + 0,908}{2} = 0,873$.

Підраховуємо:

$$F \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,873 \cdot 160} = 716 \text{ мм}^2; \quad d \geq \sqrt{\frac{716}{0,5024}} = 37,8 \text{ мм.}$$

Приймаємо $d = 38$ мм. Цього разу маємо:

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,2915 \cdot 38} = 45,139; \quad \varphi = 0,89 + (50 - 45,139) \cdot \frac{0,92 - 0,89}{50 - 40} = 0,905.$$

Порівнюючи значення φ на початку і в кінці четвертого кроку, бачимо, що ці значення істотно зблизились. Тому виконуємо перевірку умови стійкості (10.35):

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,5024 \cdot 38^2} = 137,843 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{cm.}] = \varphi \cdot [\sigma_-] = 0,905 \cdot 160 = 148,800 \text{ МПа.}$$

Бачимо, що умова стійкості виконується, оскільки $\sigma < [\sigma_{cm.}]$. При цьому недовантаження стояка становить:

$$\Delta = \frac{[\sigma_{cm.}] - \sigma}{[\sigma_{cm.}]} \cdot 100 = \frac{148,800 - 137,843}{148,800} \cdot 100 = 7,364 \%$$

Для можливого поліпшення результату виконаємо ще один крок.

На п'ятому кроці приймаємо: $\varphi = \frac{0,873 + 0,905}{2} = 0,889$.

Підраховуємо: $F \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,889 \cdot 160} = 703 \text{ мм}^2; \quad d \geq \sqrt{\frac{703}{0,5024}} = 37,4 \text{ мм.}$

Приймаємо $d = 38$ мм. Оскільки такий результат вже був на попередньому кроці, розрахунок припиняємо, остаточно приймаючи цей результат.

Приклад 10.3. Перевірити на стійкість стоек із сталі Ст.5 (рис. 10.7), якщо $P = 1\,000$ кН, $\ell = 3,3$ м, переріз – квадрат 100×100 мм, $[\sigma] = 180$ МПа.

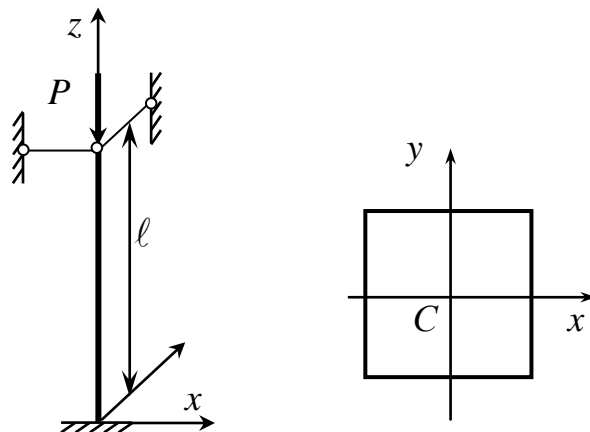


Рисунок 10.7

Розв'язання

У цьому прикладі розглядається варіант перевірконого розрахунку.

1. Визначаємо параметри стаяка:

$$\mu = 0,7 \text{ (див. рис. Д.1); } F = 10 \cdot 10 = 100 \text{ см}^2;$$

$$J_{oc.} = J_x = J_y = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 10^3 = 833,333 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{oc.}}{F}} = \sqrt{\frac{833,333}{100}} = 2,887 \text{ см; } \lambda = \frac{0,7 \cdot 3,3 \cdot 10^2}{2,887} = 80.$$

2. Визначаємо значення φ : $\varphi = 0,70$ (див. табл. Д.1).

3. Перевіряємо умову стійкості стаяка (10.35):

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{100 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^2} = 100 \text{ МПа;}$$

$$[\sigma_{cm.}] = \varphi \cdot [\sigma_-] = 0,7 \cdot 180 = 126 \text{ МПа.}$$

Оскільки $\sigma < [\sigma_{cm.}]$, умова стійкості виконується.

ЛІТЕРАТУРА

1 Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Є. С. Уманський. – К. : Вища шк., 2004. – 655 с.

2 Опір матеріалів : *конспект лекцій [для студентів усіх механічних спеціальностей денної і заочної форм навчання]* / [укл.: Л. В. Кутовий, Т. П. Зінченко, В. А. Овчаренко]. – Краматорськ : ДДМА, 2007. – Ч. 1. – 196 с.

3 Опір матеріалів : *конспект лекцій [для студентів усіх механічних спеціальностей денної і заочної форм навчання]* / [укл.: Л. В. Кутовий, Т. П. Зінченко, В. А. Овчаренко]. – Краматорськ : ДДМА, 2008. – Ч. 2. – 168 с.

4 Лупа Ю. В. Жизнь и научное наследие С. П. Тимошенко / Ю. В. Лупа // Студентський вісник ДДМА: *зб. наук. пр.* – Краматорськ : ДДМА, 2020. – С. 91–95.

5 Лупа Ю. В. Исторические этапы становления науки о сопротивлении материалов / Ю. В. Лупа // Студентський вісник ДДМА: *зб. наук. пр.* – Краматорськ : ДДМА, 2020. – С. 85–90.

6 Особенности прочностного расчёта балок и их учёт в изложении технических дисциплин / [Ю. С. Холодняк, С. В. Подлесный, А. В. Периг, А. А. Григорьев] // Качество образования: управление, сертификация, признание : *сб. науч. работ международной научно-методической конференции.* – Краматорск : ДГМА, 2011. – С. 463–469.

7 Холодняк Ю. С. Совершенствование методики прочностного расчёта двутавровой балки и её изложения в курсах технических дисциплин / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, И. А. Матвеев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. – Пермь : ПНИПУ, 2012. – С. 77–90.

8 Холодняк Ю. С. О методике изложения вопросов прочности двутавровой балки / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, И. А. Матвеев // Современное образование и интеграционные процессы : *сб. науч. работ международной научно-методической конференции.* – Краматорск : ДГМА, 2012. – С. 351–362.

9 Холодняк Ю. С. Развитие методологии прочностных расчётов двутавровых балок / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, С. В. Капорович // Науковий Вісник Донбаської державної машинобудівної академії. – Краматорськ : ДДМА, 2015. – № 2 (17Е). – С. 167–176.

10 Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів»: *навч. посібник* / Л. В. Кутовий [та ін.]. – Краматорськ : ДДМА, 2007. – 220 с.

11 Про комп'ютерні програми до спрощеної методики комплексної оцінки міцності двотаврових балок / [Ю. С. Холодняк, А. А. Костіков, С. В. Подлесний, С. В. Капорович] // Вісник Донбаської державної

машинобудівної академії : *зб. наук. праць*.– Краматорськ : ДДМА, 2019. – № 3 (47). – С. 72–81.

12 About computer programs for simplified methodology of complex assessment of strength of two – beam beams / Yu.S. Holodnyak, A.A. Kostikov, S.V. Podlesny, S.V. Kaporovych // Перспективні технології та прилади : *зб. наук. праць*. – Луцьк : ЛНТУ, 2019. – № 15. – С.99–108.

13 Холодняк Ю. С. Разработка компьютерных программ для упрощённой методики расчёта на прочность двутавровых балок / Ю. С. Холодняк, А. А. Костиков, С. В. Капорович // Сучасні інноваційні технології підготовки інженерних кадрів для гірничої промисловості та транспорту 2020 : *зб. наук. праць міжнародної конференції*. – Дніпро : ДНГУ, 2020. – С. 338–346.

14 Розвиток комп'ютерних програм спрощеного розрахунку на міцність двотаврових балок / [Ю. С. Холодняк, А. А. Костіков, С. В. Подлесний, С. В. Капорович] // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : *зб. наук. праць*.– Краматорськ : ДДМА, 2020. – № 1(48).– С. 117–126.

15 The software enhancement for simplified strength computation of I – beam / [Yu.S. Holodnyak, A.A. Kostikov, S.V. Podlesny, S.V. Kaporovych] // Перспективні технології та прилади : *зб. наук. праць*. – Луцьк : ЛНТУ, 2020. – № 17. – С. 146–154.

16 Холодняк Ю. С. Про комп'ютерні програми спрощеного розрахунку двотаврових балок на міцність і жорсткість / Ю. С. Холодняк, О. А. Костіков, С. В. Капорович // Сучасні інноваційні технології підготовки інженерних кадрів для гірничої промисловості та транспорту 2021: *зб. наук. праць міжнародної конференції*. – Дніпро : ДНГУ, 2021. – С. 76– 86.

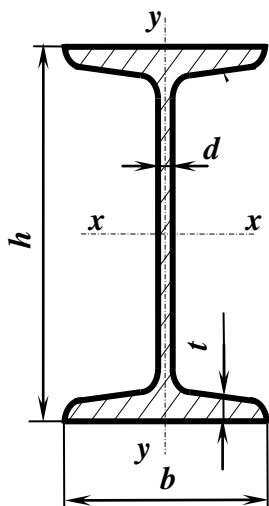
ДОДАТОК А

Основні параметри катаних профілів

1 Нормальні лінійні розміри, мм (по ГОСТ 6636-69, фрагмент ряду Ra20)

Таблиця А.1

1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6
4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0	10	11	12	14
16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56
63	71	80	90	100	110	125	140	160	180	200	220
250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900



Таблиця А.2

2. Двотаври сталі гарячекатані (за ГОСТ 8239-89)

Позначення:

h – висота профілю

b – ширина полки

d – товщина стінки

t – середня товщина полки

F – площа перерізу

J – моменти інерції

W – моменти опору

i – радіуси інерції

S_x – статичний момент
половини перерізу

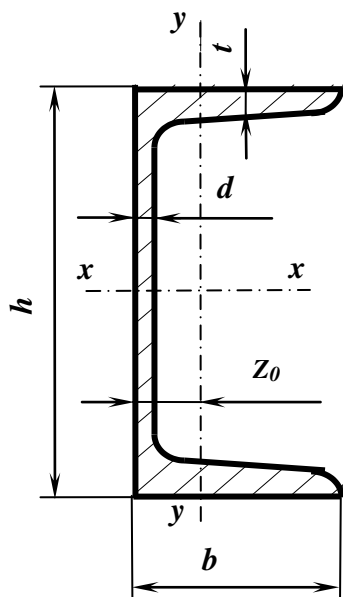
Приклад позначення
профілю:

Двотавр 30 ГОСТ 8239-89

Номер профілю	Основні розміри, мм				F см ²	J_x см ⁴	W_x см ³	i_x см	S_x см ³	J_y см ⁴	W_y см ³	i_y см
	h	b	d	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

3. Швелери сталеві гарячекатані

(за ГОСТ 8240-89)



Позначення:

h – висота профілю
 b – ширина полки
 d – товщина стінки
 t – середня товщина полки
 F – площа перерізу
 J – моменти інерції

W – моменти опору
 i – радіуси інерції
 S_x – статичний момент
 половини перерізу
 Z_0 – відстань від осі y
 до зовнішньої грані стінки

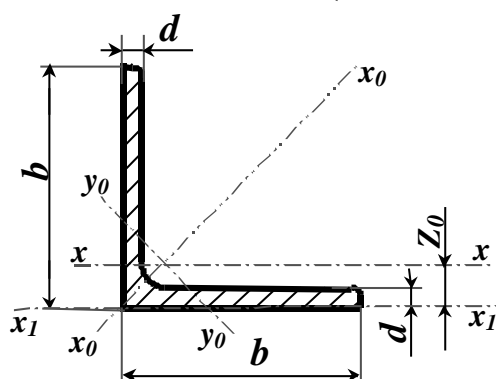
Приклад позначення профілю:

Швелер 30 ГОСТ 8240-89

Таблиця А.3

Номер профілю	Основні розміри, мм				F см ²	J_X см ⁴	W_X см ³	i_X см	S_X см ³	J_Y см ⁴	W_Y см ³	i_Y см	Z_0 см
	h	b	d	t									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

**4 КУТИКИ СТАЛЄВІ
ГАРЯЧЕКАТАНІ РІВНОПОЛИЧНІ
(за ГОСТ 8509-93 або ДСТУ2251-93)**



Позначення:

b – ширина полки

d – товщина полки

F – площа перерізу

J – моменти інерції

i – радіуси інерції

Z_0 – відстань від центра ваги перерізу до зовнішньої грані полки

Приклад позначення профілю:

Куттик 50х50х3 ГОСТ 8509-93

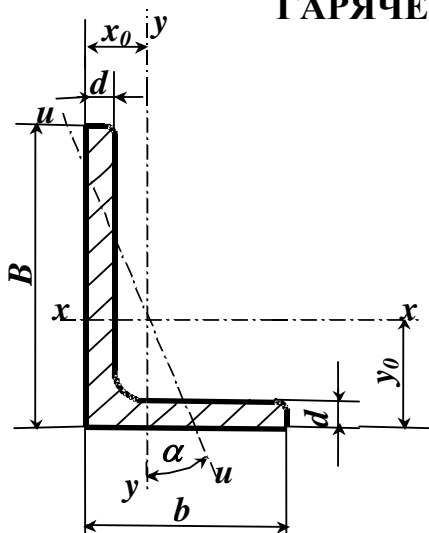
Таблиця А.4

Номер Куттика	Основні розміри мм		F см ²	J_X см ⁴	i_X см	J_{x_0} max см ⁴	i_{x_0} max см	J_{y_0} min см ⁴	i_{y_0} min см	Z_0 см
	b	d								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
		5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
		6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18

Продовження таблиці А.4

Номер Кутика	Основні розміри мм		F см ²	J_X см ⁴	i_X см	J_{X_0} max см ⁴	i_{X_0} max см	J_{Y_0} min см ⁴	i_{Y_0} min см	Z_0 см
	b	d								
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
14	140	16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
14	140	10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
		10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
16	160	11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
22	220	30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07
		14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
25	250	16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
		16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
25	250	28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	8117	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31

5 КУТИКИ СТАЛЄВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ НЕРІВНОПОЛИЧНІ (за ГОСТ 8510-86)



Позначення:

B – ширина більшої полки b – ширина меншої полки
 d – товщина полки F – площа перерізу
 J – моменти інерції i – радіуси інерції
 x_0, y_0 – відстані від центра ваги перерізу до зовнішніх граней полкок α – кут нахилу осі u

Приклад позначення профілю:

Кутик 50x32x3 ГОСТ 8510-86

Таблиця А.5

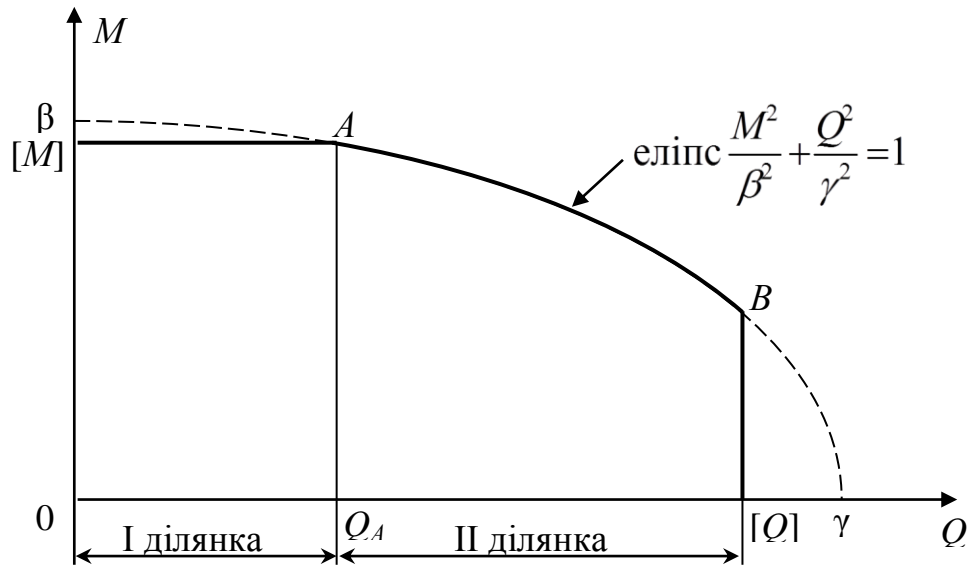
Номер кутика	Основні розміри, мм			F см ²	J_x см ⁴	J_y см ⁴	J_u см ⁴	i_u см	x_0 см	y_0 см	tg α
	B	b	d								
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392
			4	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
3/2	30	20	3	1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	0,54	1,04	0,421
			4	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382
3,2/2	32	20	3	1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374
			4	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385
4/2,5	40	25	4	2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
			5	3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	0,66	1,41	0,374
4/3	40	39	4	2,67	4,18	2,01	1,09	0,64	0,78	1,28	0,544
			5	3,28	5,04	2,41	1,33	0,64	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382
			4	2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403
			4	3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
			5	4,41	13,8	4,48	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
			5	4,98	19,9	6,26	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6	5,90	23,3	7,28	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8	7,68	29,6	9,15	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	23,41	12,08	6,41	1,07	1,26	2,00	0,576
			6	6,60	27,46	14,12	7,52	1,07	1,30	2,04	0,575
			7	7,62	31,32	16,05	8,60	1,06	1,34	2,08	0,571
			8	8,62	35,00	18,88	9,65	1,06	1,37	2,12	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
			6	7,25	40,92	14,60	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			7	8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	1,25	2,48	0,435
			8	9,47	52,38	18,52	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430

Продовження таблиці А.5

Номер кутика	Основні розміри, мм			F см ²	J_X см ⁴	J_Y см ⁴	J_u min см ⁴	i_u см	x_0 см	y_0 см	tg α
	B	b	d								
8/5	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	1,09	1,13	2,60	0,387
			6	7,55	48,98	14,85	8,88	1,08	1,17	2,65	0,386
8/6	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	1,29	1,49	2,47	0,547
			7	9,42	59,61	28,74	15,58	1,29	1,53	2,52	0,546
			8	10,6	66,88	32,15	17,49	1,28	1,57	2,56	0,544
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	19,7	11,8	1,22	1,26	2,92	0,384
			6	8,54	70,6	21,2	12,7	1,22	1,28	2,95	0,384
			8	11,2	90,9	27,1	16,3	1,21	1,36	3,04	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	30,6	18,20	1,38	1,42	3,23	0,393
			7	11,1	113,0	35,0	20,83	1,37	1,46	3,28	0,392
			8	12,6	127,0	39,2	23,38	1,36	1,50	3,32	0,391
			10	15,5	154,0	47,1	28,34	1,35	1,58	3,40	0,387
10/6,5	100	65	7	11,2	114,0	38,3	22,77	1,41	1,52	3,24	0,415
			8	12,7	138,3	43,0	25,24	1,41	1,56	3,28	0,414
			10	15,7	155,5	51,7	30,60	1,40	1,64	3,37	0,410
11/7	110	70	6,5	11,4	142	45,6	26,9	1,53	1,58	3,55	0,402
			8	13,9	172	54,6	32,3	1,52	1,64	3,61	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	227	73,7	43,4	1,76	1,80	4,01	0,407
			8	16,0	256	83,0	48,8	1,75	1,84	4,05	0,406
			10	19,7	312	100,0	59,3	1,74	1,92	4,14	0,404
			12	23,4	365	117,0	69,5	1,72	2,00	4,22	0,400
14/9	140	90	8	18,0	364	120	70,3	1,98	2,03	4,49	0,411
			10	22,2	444	146	85,5	1,96	2,12	4,58	0,409
16/10	160	100	9	22,9	606	186	110	2,20	2,23	5,19	0,391
			10	25,3	667	204	121	2,19	2,28	5,23	0,390
			12	30,0	784	239	142	2,18	2,36	5,32	0,388
			14	34,7	897	272	162	2,16	2,43	5,40	0,385
18/11	180	110	10	28,3	952	276	165	2,42	2,44	5,88	0,375
			12	33,7	1123	324	194	2,40	2,52	5,97	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	446	264	2,75	2,79	6,50	0,392
			12	37,9	1568	482	285	2,74	2,83	6,54	0,392
			14	43,9	1801	551	327	2,73	2,91	6,62	0,390
			16	49,8	2026	617	367	2,72	2,99	6,71	0,388
25/16	250	160	12	48,3	3147	1032	604	3,54	3,53	7,97	0,410
			16	63,6	4091	1333	781	3,50	3,69	8,14	0,408
			18	71,1	4545	1475	896	3,49	3,77	8,23	0,407
			20	78,5	4987	1613	949	3,48	3,85	8,31	0,405

ДОДАТОК Б

**Параметри безпечного факторного простору двотаврів
(сталь Ст.3, $[\sigma] = 160$ МПа, третя теорія міцності)**



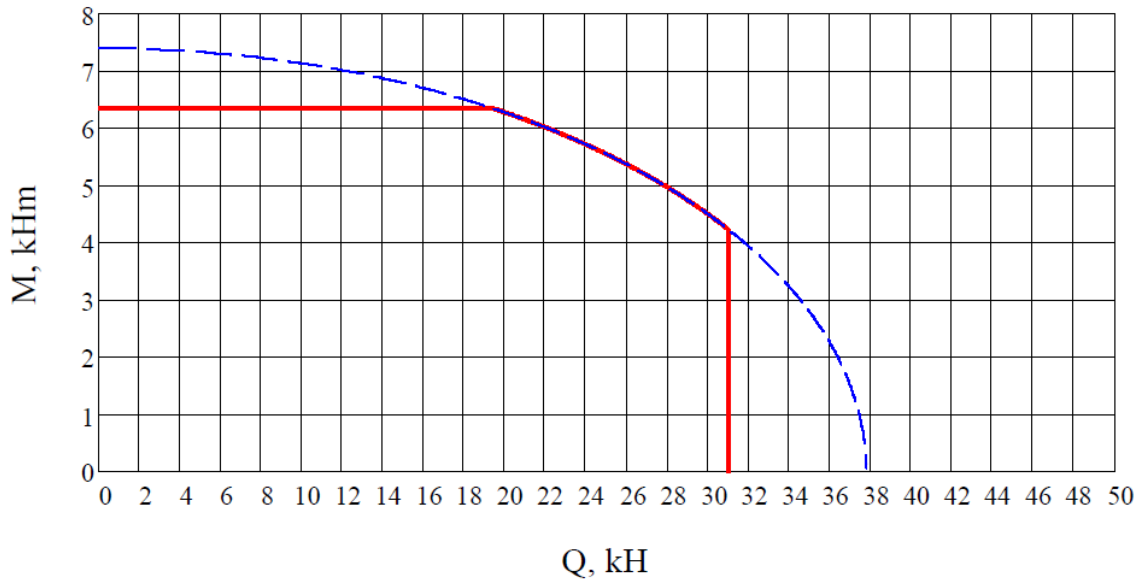
Таблиця Б.1

Номер двотавра	β , кН·м	γ , кН	$[M]$, кН·м	$[Q]$, кН	Q_A , кН
10	7,402	37,758	6,352	30,991	19,385
12	10,626	49,714	9,344	39,881	23,673
14	14,643	60,227	13,072	47,911	27,140
16	19,346	70,878	17,440	56,051	30,693
18	25,201	81,860	22,880	64,658	34,314
18a	28,005	80,166	25,440	64,971	33,516
20	32,140	93,137	29,440	73,600	37,366
20a	35,536	91,513	32,480	74,077	37,127
22	40,276	106,648	37,120	84,091	41,384
22a	44,154	104,441	40,640	84,285	40,831
24	50,100	120,338	46,240	95,097	46,319
24a	55,172	118,225	50,720	95,640	46,526
27	64,026	147,557	59,360	114,515	55,298
27a	70,513	144,836	65,110	115,284	55,602
30	81,030	180,046	75,520	137,373	65,259
30a	89,361	176,713	82,880	138,548	66,071
33	102,367	215,074	95,520	162,549	77,336
36	127,657	252,820	118,880	189,787	92,126
40	163,097	316,526	152,480	232,241	112,335
45	210,216	392,515	196,960	281,236	137,179
50	270,712	494,005	254,240	345,828	169,690
55	346,380	605,383	325,600	416,990	206,528
60	435,470	727,747	409,600	494,526	247,097

ДОДАТОК В
Креслення безпечного факторного простору двотаврів
(сталь Ст.3, $[\sigma] = 160$ МПа, третя теорія міцності)

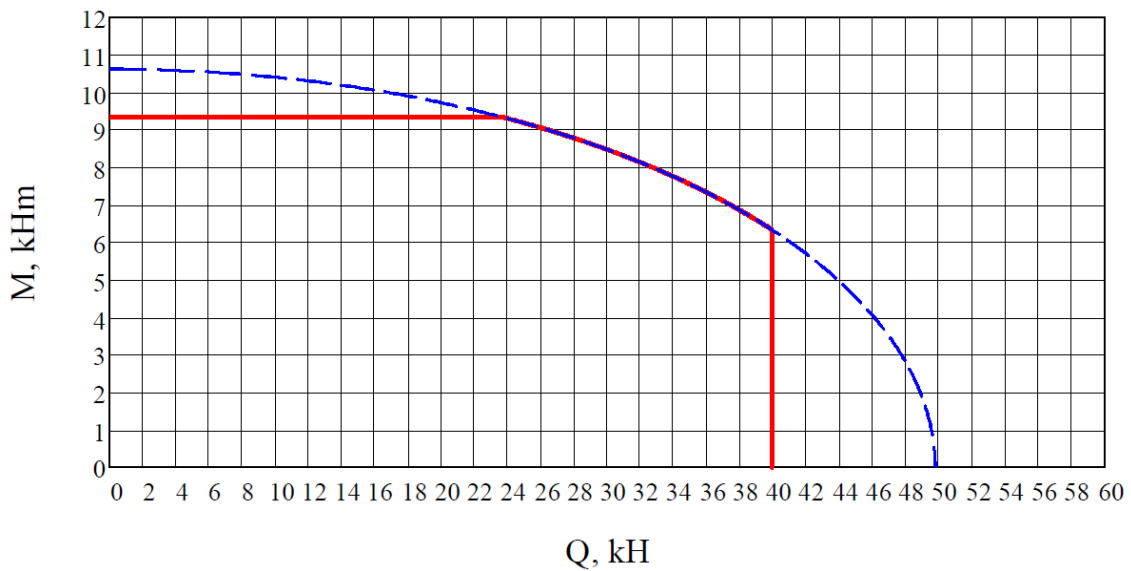
Двотавр № 10

$\beta = 7,402$ кН·м, $\gamma = 37,758$ кН, $[M] = 6,352$ кН·м, $[Q] = 30,991$ кН



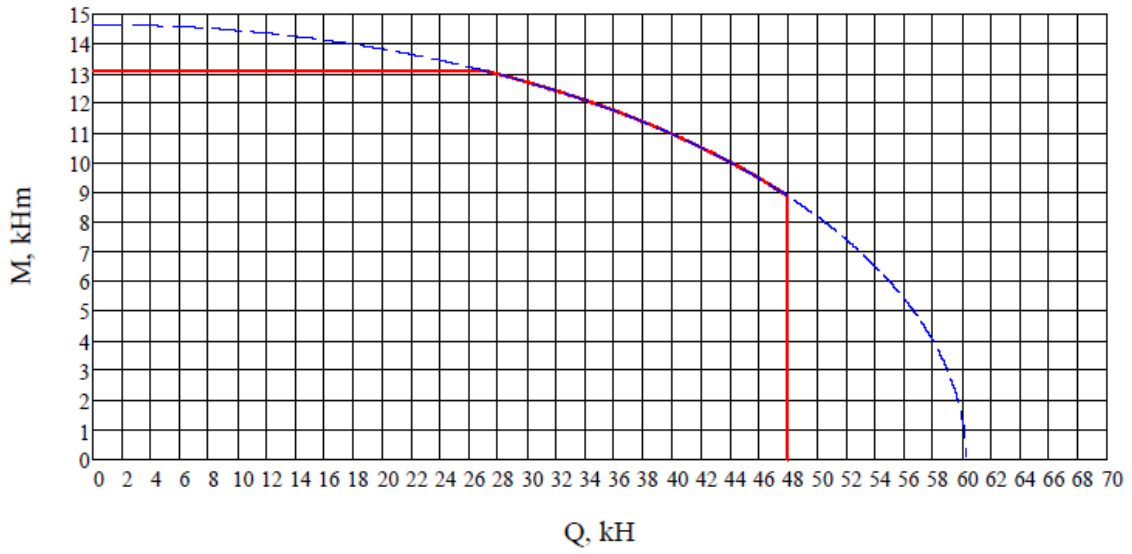
Двотавр № 12

$\beta = 10,626$ кН·м, $\gamma = 49,714$ кН, $[M] = 9,344$ кН·м, $[Q] = 39,881$ кН



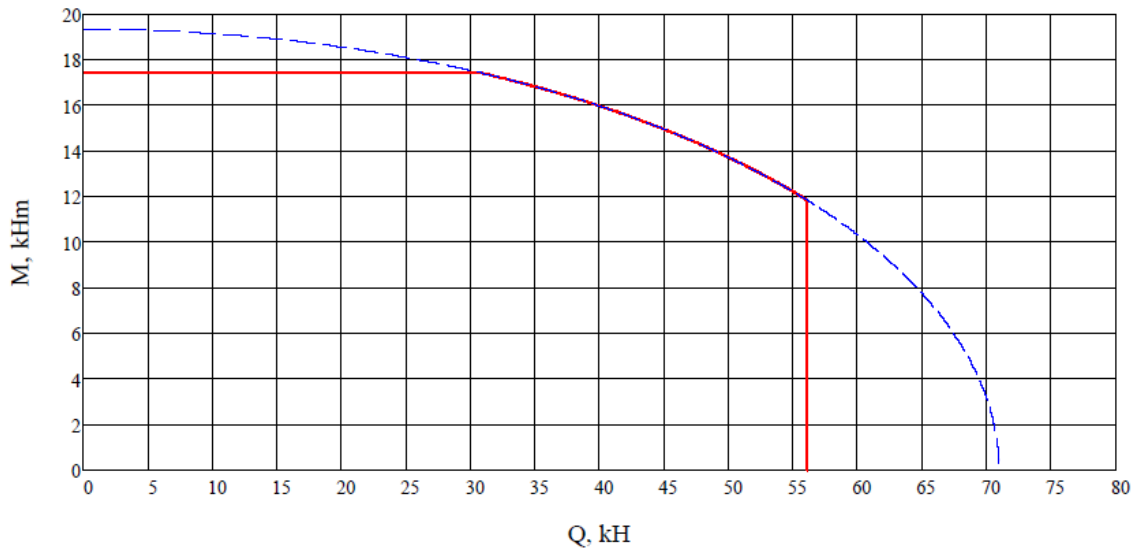
Двотавр № 14

$\beta=14,643 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\gamma=60,227 \text{ кН}$, $[M]=13,072 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $[Q]=47,911 \text{ кН}$



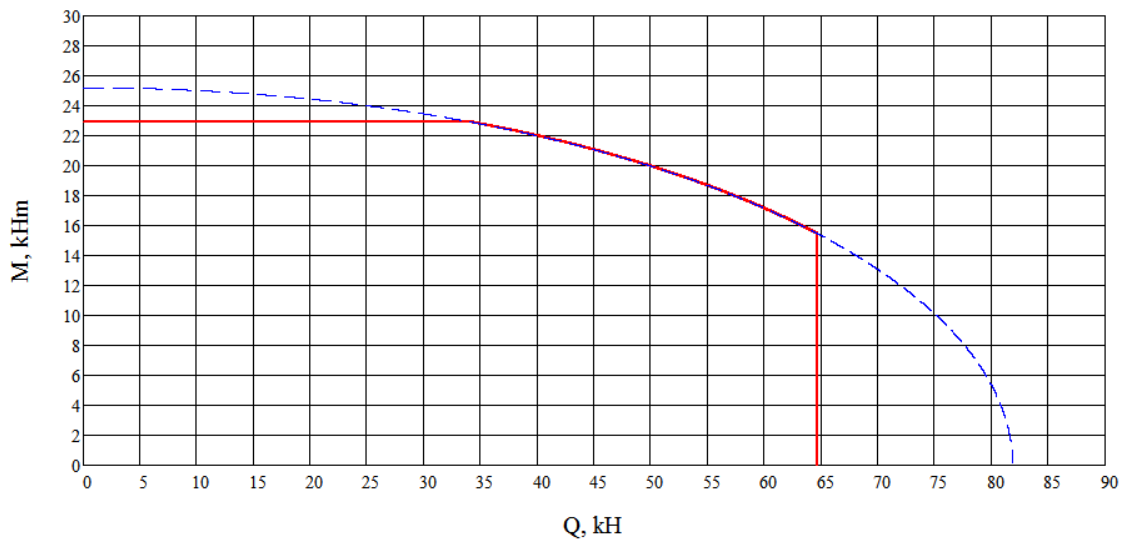
Двотавр № 16

$\beta=19,346 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\gamma=70,878 \text{ кН}$, $[M]=17,440 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $[Q]=56,051 \text{ кН}$



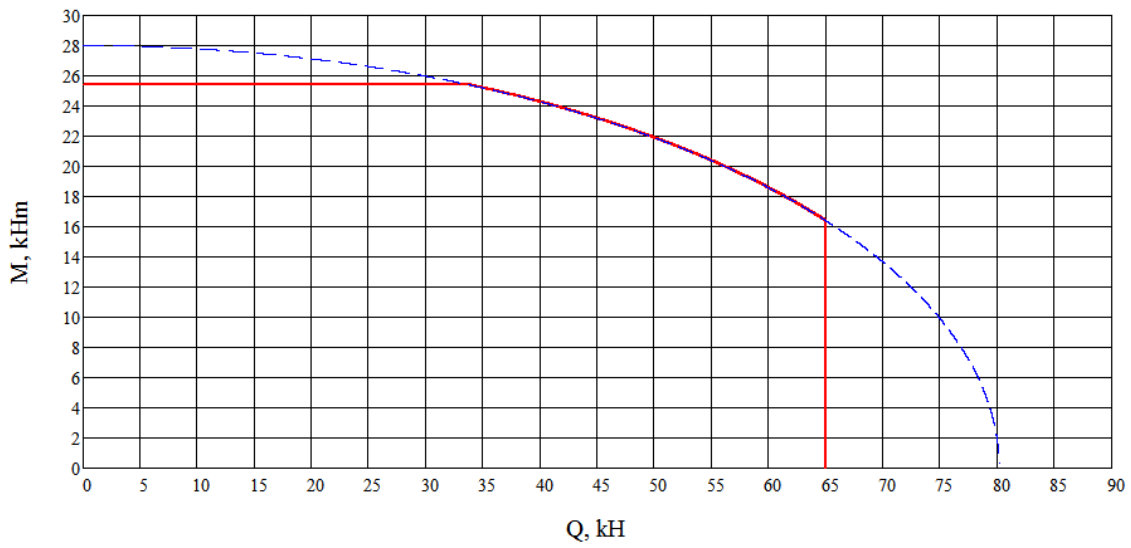
Двотавр № 18

$\beta=25,201$ кН·м, $\gamma=81,860$ кН, $[M]=22,880$ кН·м, $[Q]=64,658$ кН



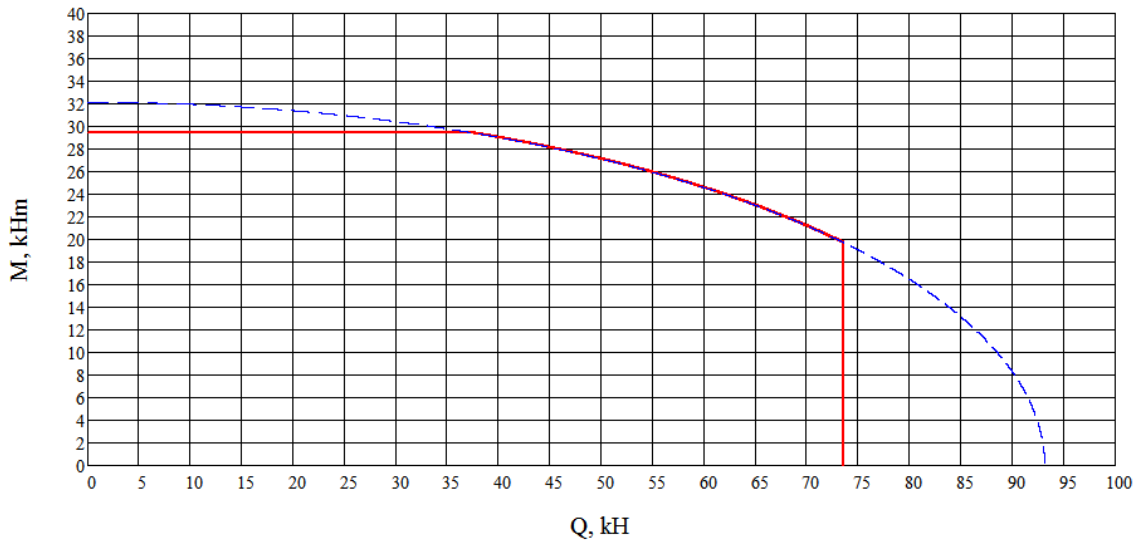
Двотавр № 18а

$\beta=28,005$ кН·м, $\gamma=80,166$ кН, $[M]=25,440$ кН·м, $[Q]=64,971$ кН



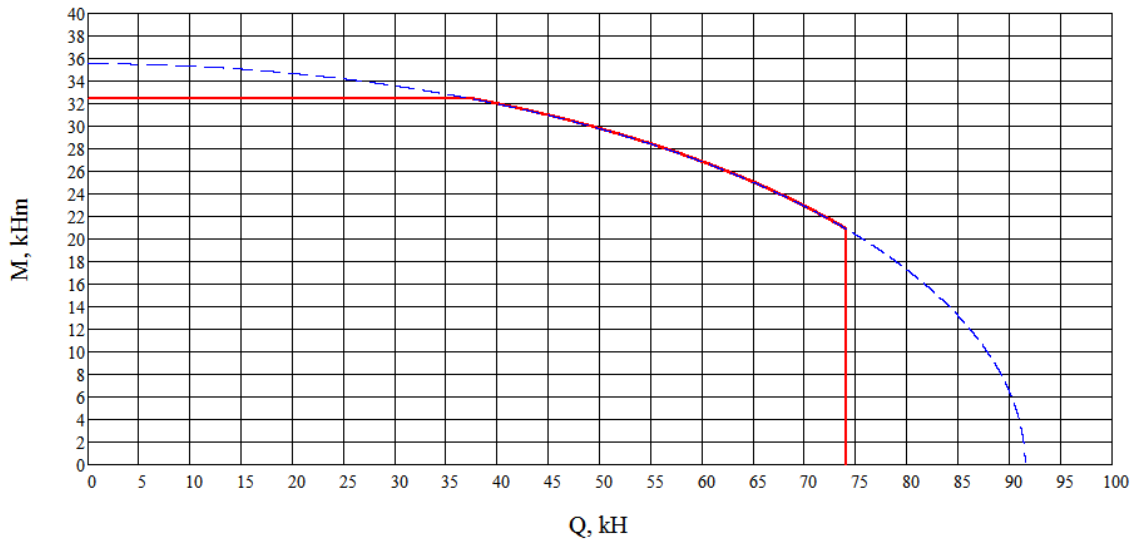
Двотавр № 20

$\beta=32,140$ кН·м, $\gamma=93,137$ кН, $[M]=29,440$ кН·м, $[Q]=73,600$ кН



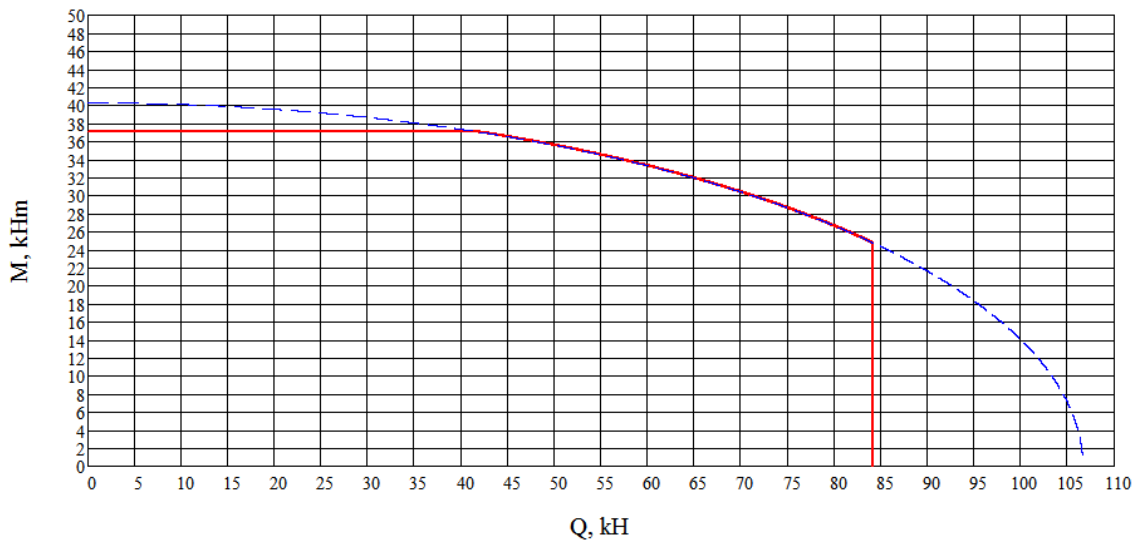
Двотавр № 20а

$\beta=35,536$ кНм, $\gamma=91,513$ кН, $[M]=32,480$ кНм, $[Q]=74,077$ кН



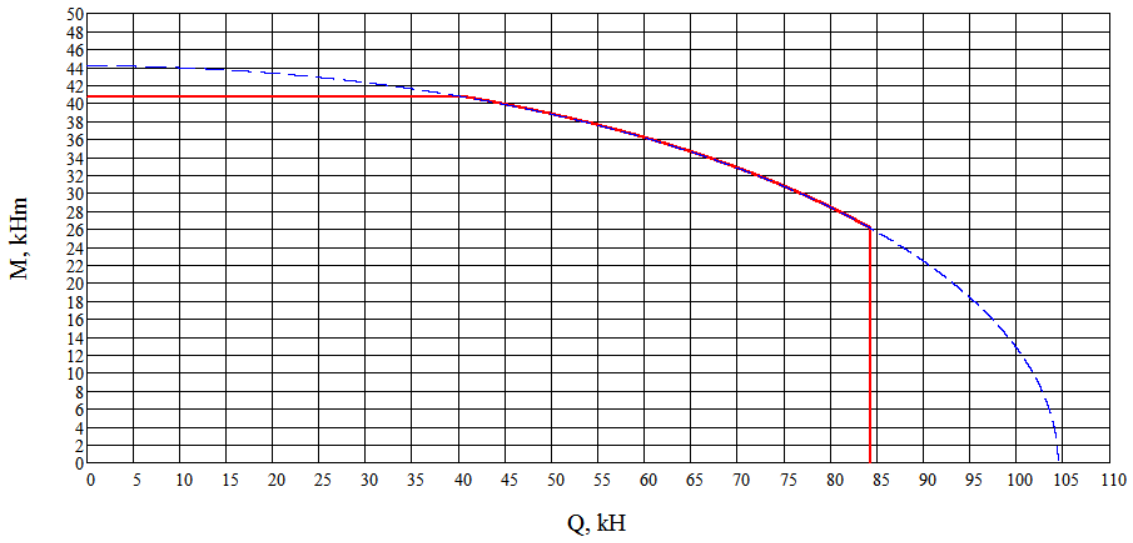
Двотавр № 22

$\beta=40,276$ кН·м, $\gamma=106,648$ кН, $[M]=37,120$ кН·м, $[Q]=84,091$ кН



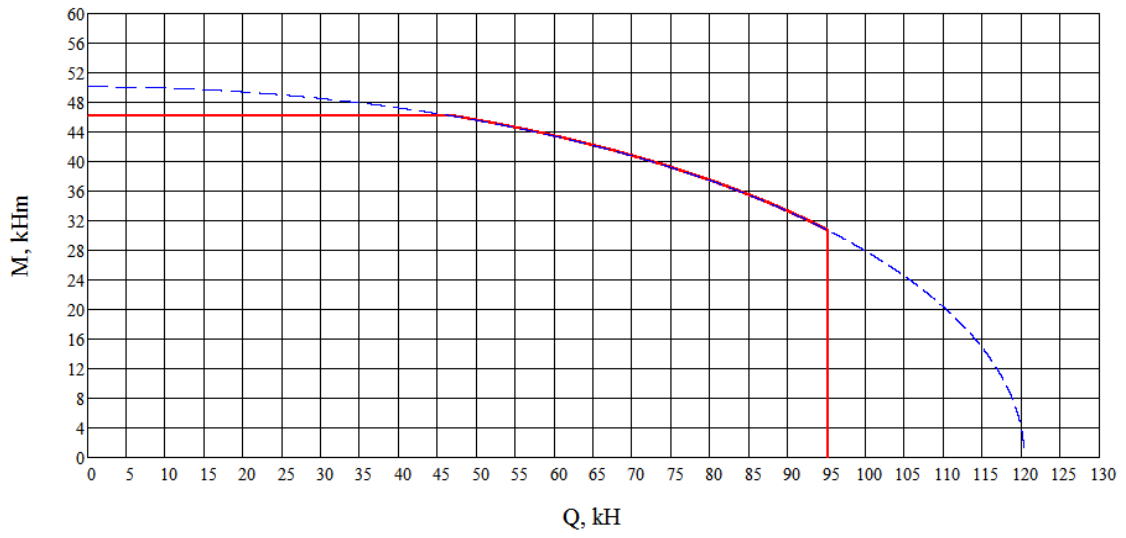
Двотавр № 22а

$\beta=44,154$ кН·м, $\gamma=104,441$ кН, $[M]=40,640$ кН·м, $[Q]=84,285$ кН



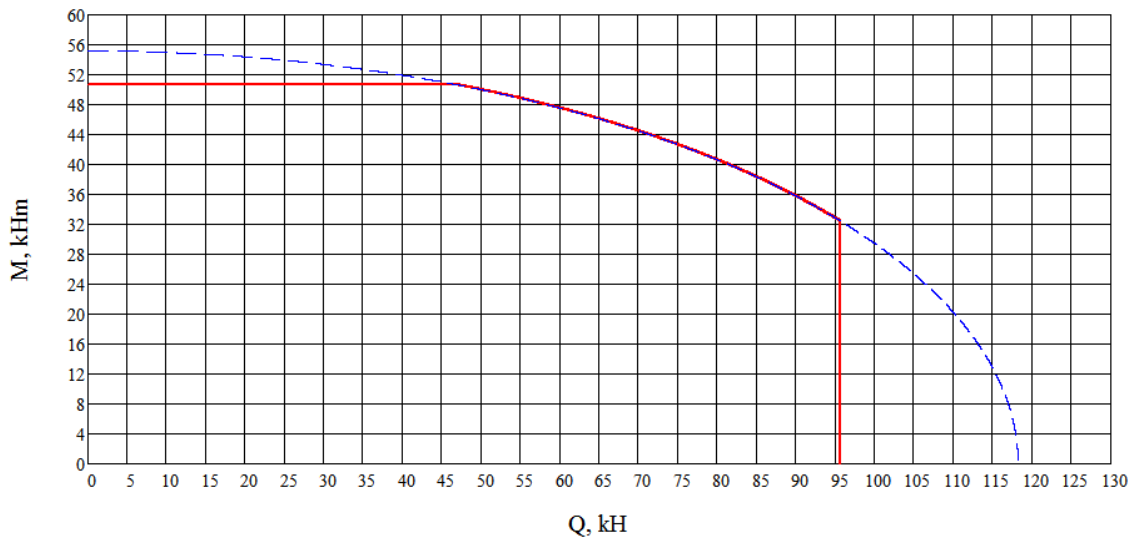
Двотавр № 24

$\beta=50,100$ кН·м, $\gamma=120,338$ кН, $[M]=46,240$ кН·м, $[Q]=95,097$ кН



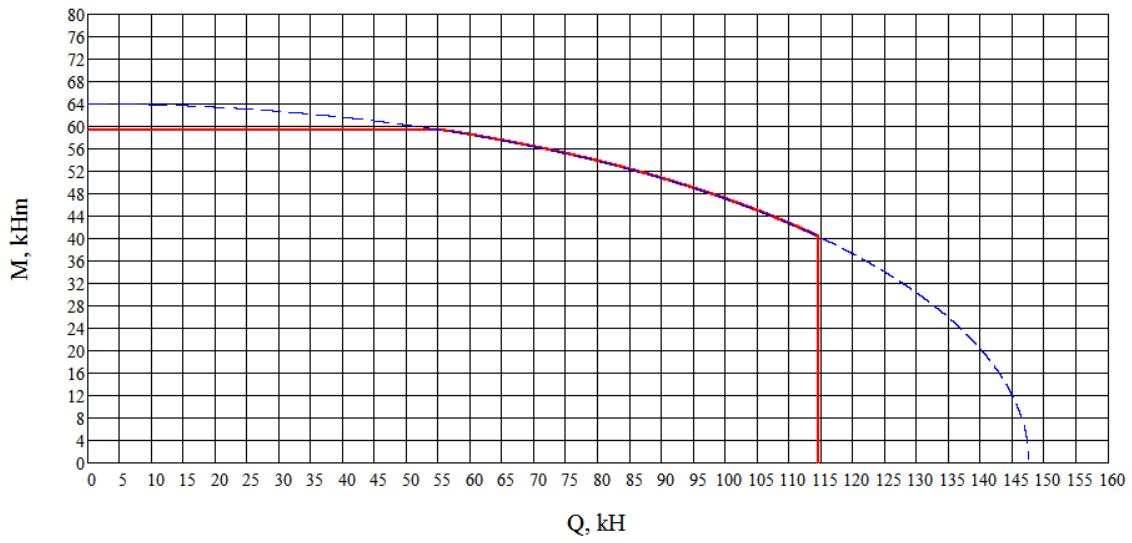
Двотавр №24а

$\beta=55,172$ кН·м, $\gamma=118,225$ кН, $[M]=50,720$ кН·м, $[Q]=95,640$ кН



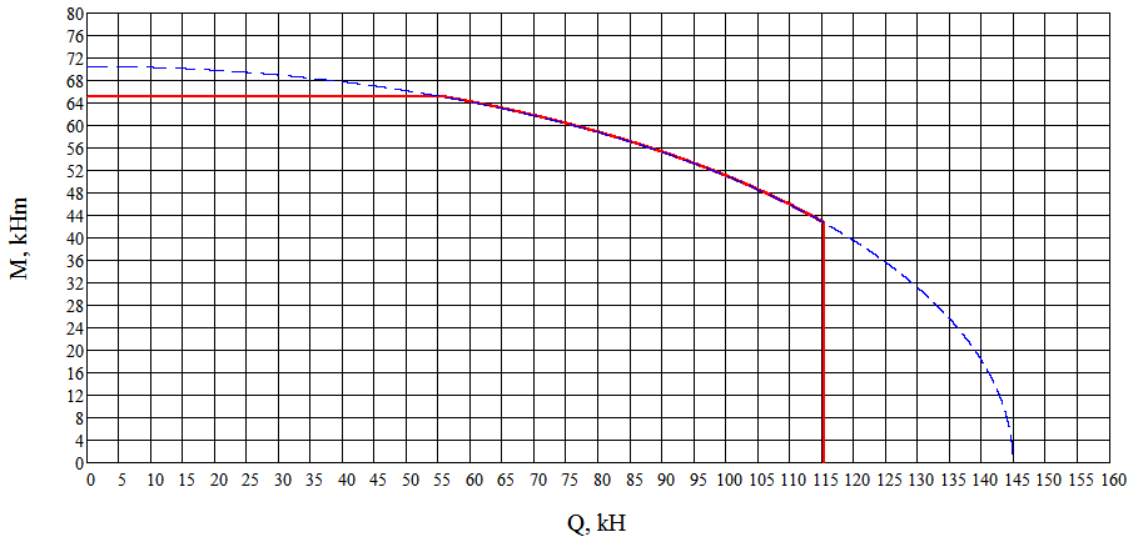
Двотавр № 27

$\beta=64,026$ кН·м, $\gamma=147,557$ кН, $[M]=59,360$ кН·м, $[Q]=114,515$ кН



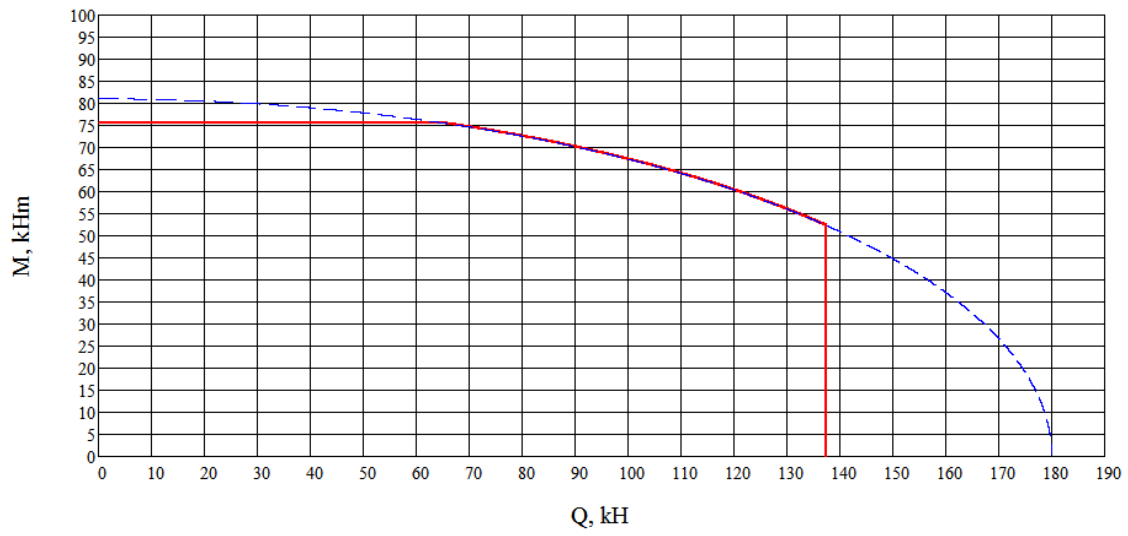
Двотавр № 27а

$\beta=70,513$ кН·м, $\gamma=144,836$ кН, $[M]=65,110$ кН·м, $[Q]=115,284$ кН



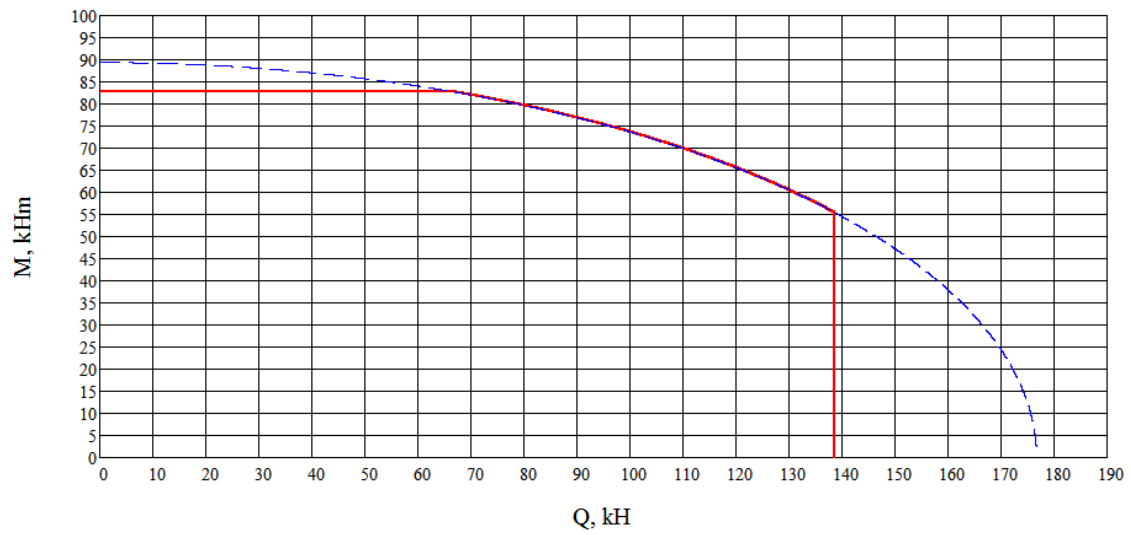
Двотаер № 30

$\beta=81,030$ кН·м, $\gamma=180,046$ кН, $[M]=75,520$ кН·м, $[Q]=137,373$ кН



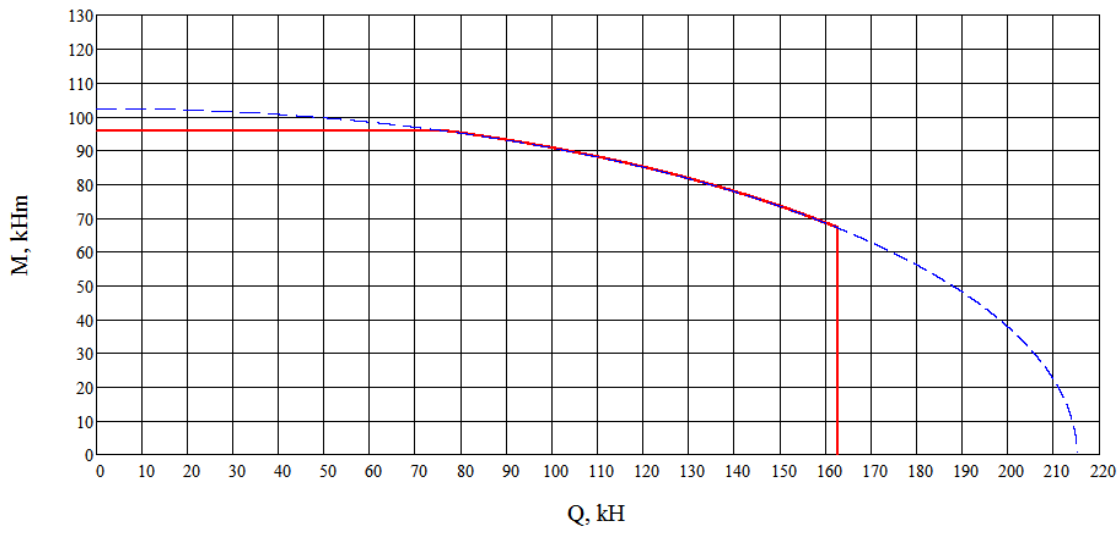
Двотаер № 30а

$\beta=89,361$ кН·м, $\gamma=176,713$ кН, $[M]=82,880$ кН·м, $[Q]=138,548$ кН



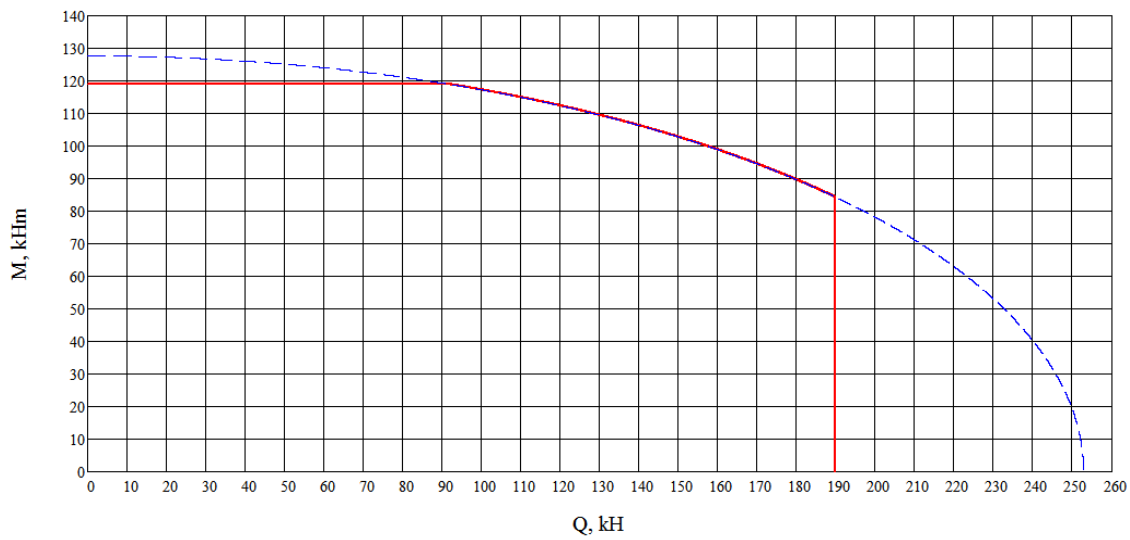
Двотавр № 33

$\beta=102,367$ кН·м, $\gamma=215,074$ кН, $[M]=95,520$ кН·м, $[Q]=162,549$ кН



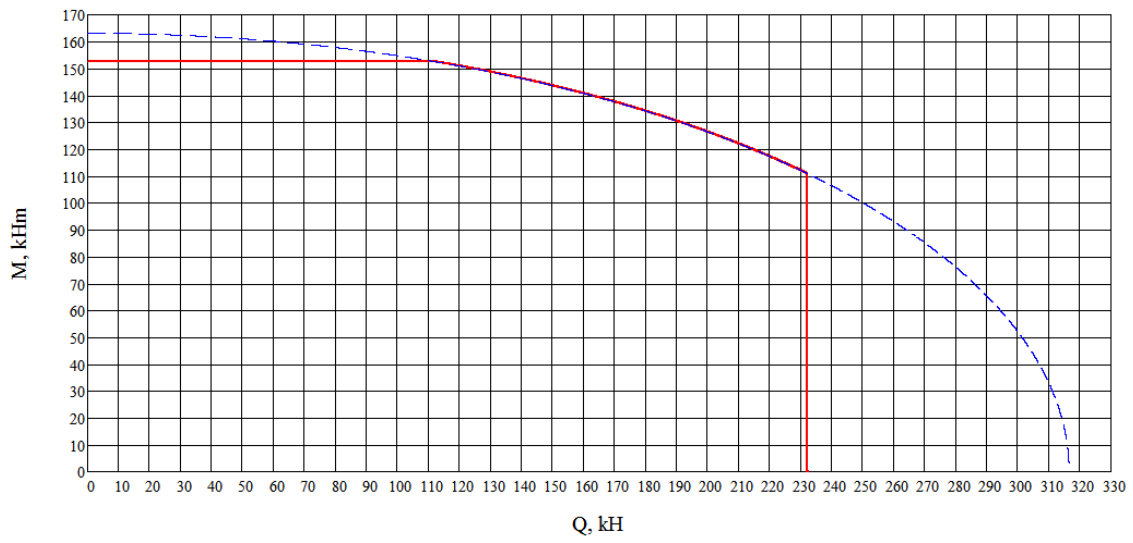
Двотавр № 36

$\beta=127,657$ кН·м, $\gamma=252,820$ кН, $[M]=118,880$ кН·м, $[Q]=189,787$ кН



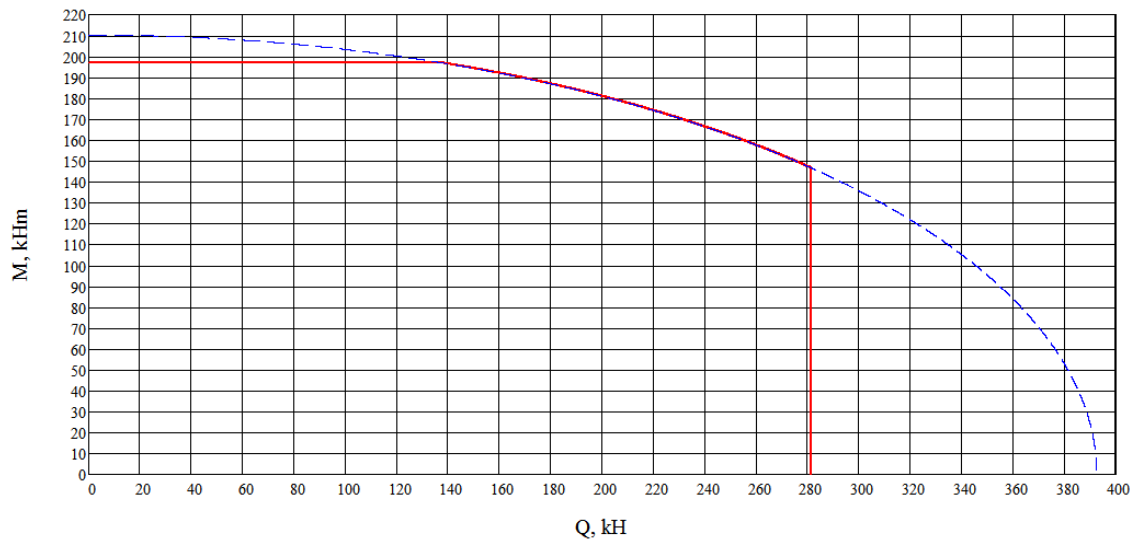
Двотавр № 40

$\beta=163,097$ кН·м, $\gamma=316,526$ кН, $[M]=152,480$ кН·м, $[Q]=232,241$ кН



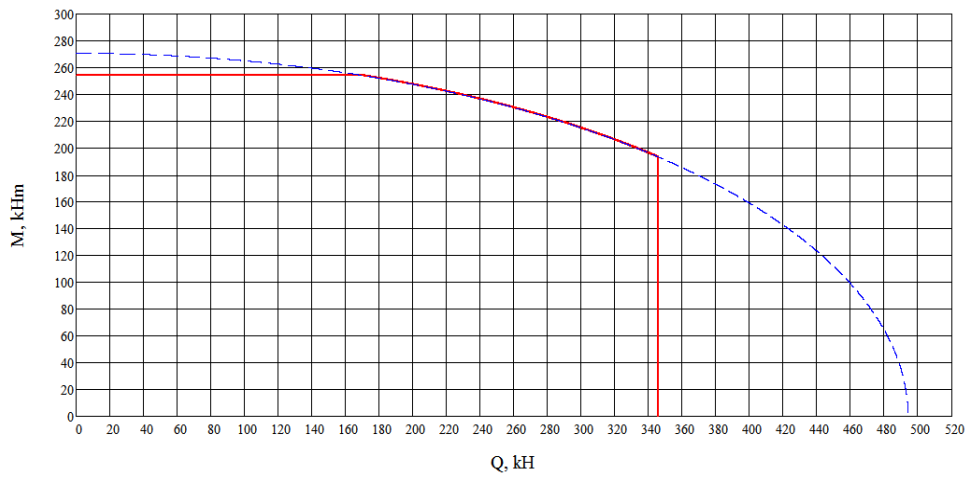
Двотавр № 45

$\beta=210,216$ кНм, $\gamma=392,515$ кН, $[M]=196,960$ кНм, $[Q]=281,236$ кН



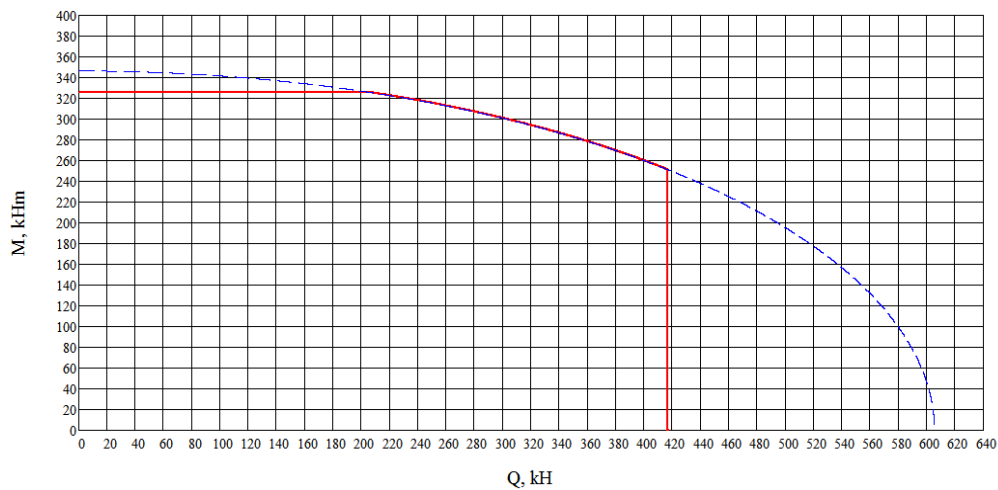
Двотавр № 50

$\beta=270,712$ кН·м, $\gamma=494,005$ кН, $[M]=254,240$ кН·м, $[Q]=345,828$ кН



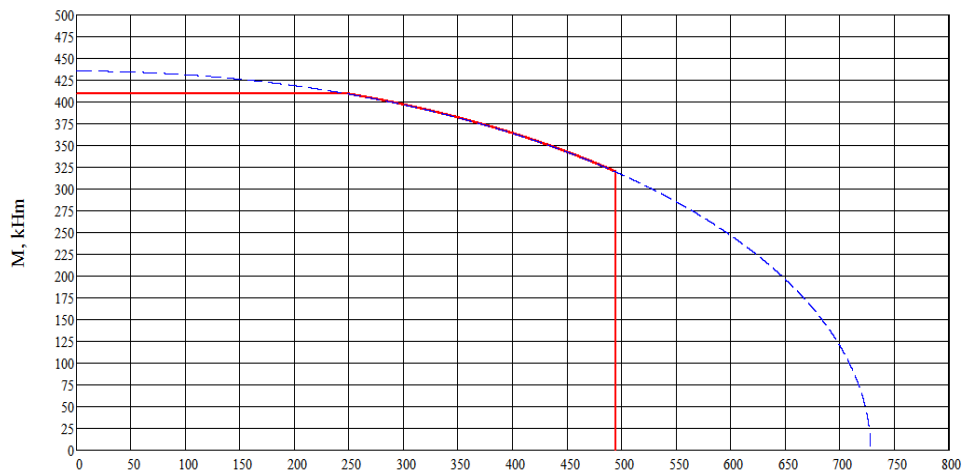
Двотавр № 55

$\beta=346,380$ кН·м, $\gamma=605,383$ кН, $[M]=325,600$ кН·м, $[Q]=416,990$ кН



Двотавр № 60

$\beta=435,470$ кН·м, $\gamma=727,747$ кН, $[M]=409,600$ кН·м, $[Q]=494,526$ кН



ДОДАТОК Г

Комп'ютерні розрахунки

Приклад 6.1

1. Введення зосереджених сил, моментів пар сил та їх розташування:

Введіть зосереджені сили P , їх розташування d , моменти пар сил M та їх розташування c

$$P := \begin{pmatrix} -55 \\ 0 \end{pmatrix} \text{kN} \quad d := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \quad M := \begin{pmatrix} 45 \\ 0 \end{pmatrix} \text{kN}\cdot\text{m} \quad c := \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}$$

2. Введення довжини балки, розташування опор і розподілених навантажень, інтенсивності цих навантажень:

Введіть розподілені навантаження q , їх розташування a , протяжність b , довжину балки L та розташування опор на балці l_1 та l_2

$$q := \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \quad L := 3.4 \text{m} \quad l_1 := 0 \text{m} \quad l_2 := 3.4 \text{m}$$

3. Знаходження опорних реакцій балки:

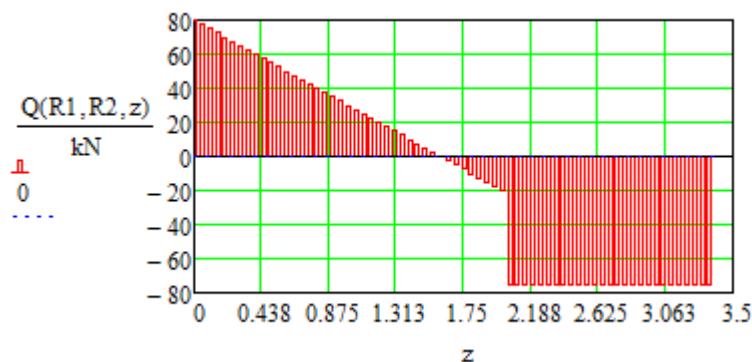
$$R2 := \frac{1}{(l_2 - l_1)} \left[\sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} M_i - \sum_{i=1}^{\text{rows}(P)} [P_i \cdot (d_i - l_1)] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \cdot b_i \cdot \left(a_i + \frac{b_i}{2} - l_1 \right) \right] \right]$$

$$R2 = 7.5 \times 10^4 \text{N}$$

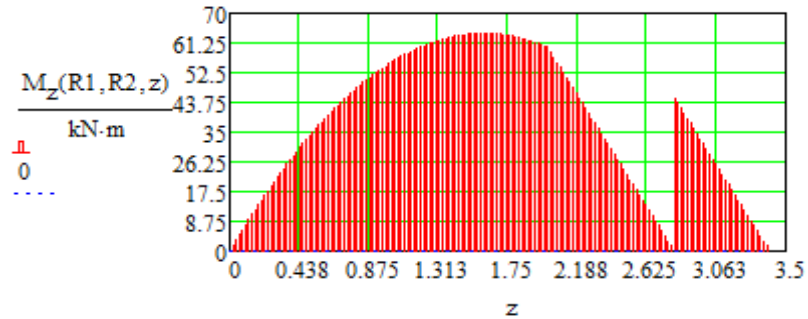
$$R1 := \frac{1}{(l_2 - l_1)} \left[- \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} M_i + \sum_{i=1}^{\text{rows}(P)} [P_i \cdot (d_i - l_2)] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \cdot b_i \cdot \left(l_2 - a_i - \frac{b_i}{2} \right) \right] \right]$$

$$R1 = 8 \times 10^4 \text{N}$$

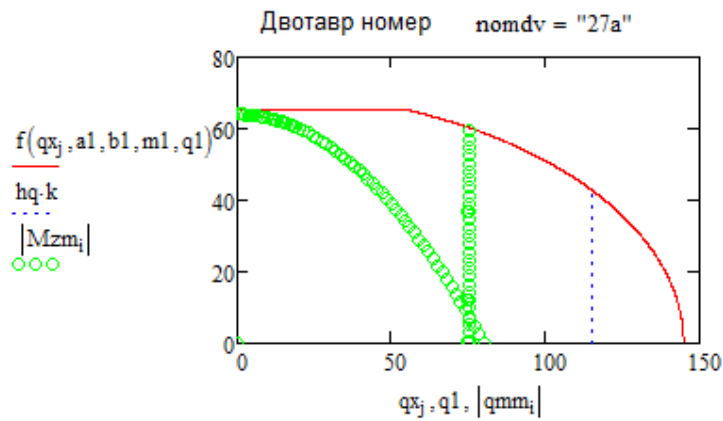
4. Побудова епюри поперечних сил:



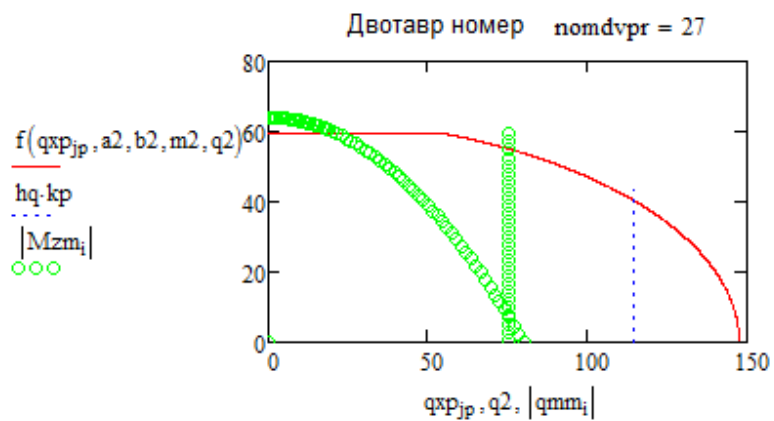
5. Побудова епюри згинальних моментів:



6. Знаходження потрібного номера двотавра:



7. Порівняння з попереднім номером двотавра:



Приклад 7.4

1 Введення зосереджених сил, моментів пар сил та їх розташування:

Введіть зосереджені сили P , їх розташування d моменти пар сил M та їх розташування c

$$P := \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix} \text{kN} \quad d := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \quad M := \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} \text{kN}\cdot\text{m} \quad c := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}$$

2 Введення довжини балки, інтенсивності і розташування розподілених навантажень, розташування защемлення балки :

Введіть розподілені навантаження q , їх розташування a , протяжність b , довжину балки L , розташування защемлення l_z

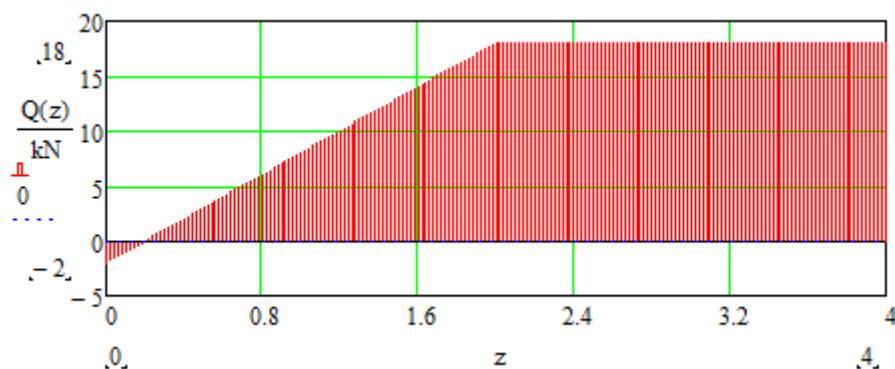
$$q := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \quad L := 4 \text{m} \quad l_z := 0$$

3 Визначення опорних реакцій:

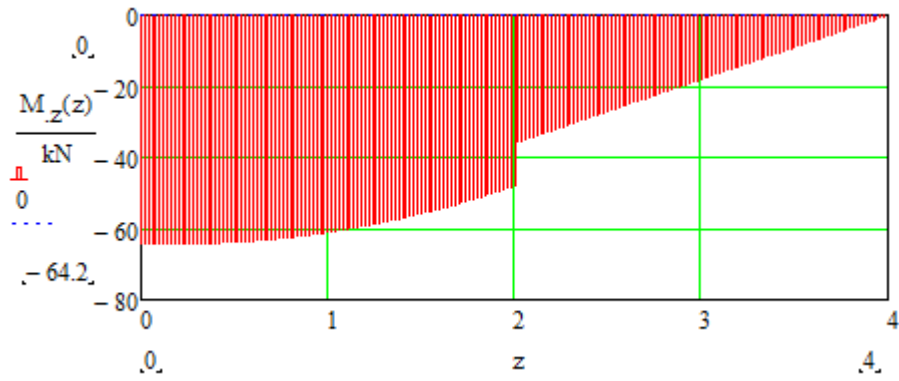
$$R_A := \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} (q_i \cdot b_i) + \sum_{i=1}^{\text{rows}(P)} (P_i) \quad R_A = 2 \times 10^3 \text{N}$$

$$M_A := \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \cdot b_i \cdot \left(a_i + \frac{b_i}{2} \right) \right] + \sum_{i=1}^{\text{rows}(P)} (P_i \cdot d_i) - \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} (M_i) \quad M_A = -6.4 \times 10^4 \text{J}$$

4 Побудова епюри поперечних сил:

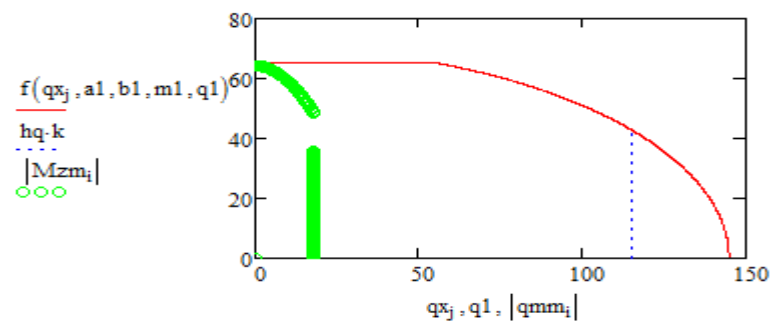


5 Побудова вантажної епюри згинальних моментів:



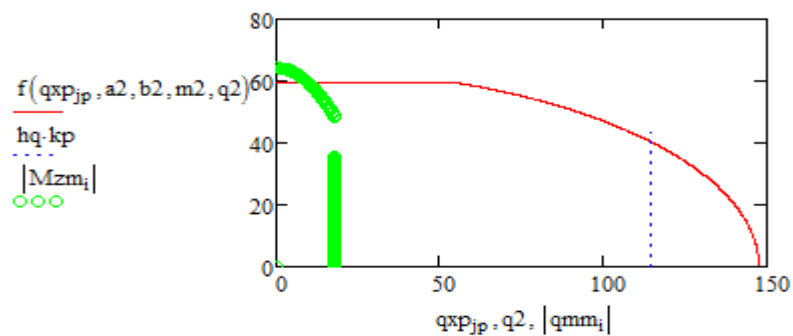
6 Знаходження потрібного номера двотавра:

Двотавр номер `nomdv = "27a"`



7 Порівняння з попереднім номером двотавра:

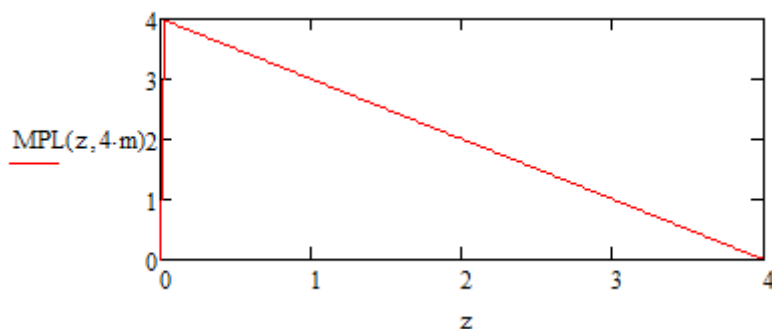
Двотавр номер `nomdvpr = 27`



8 Знаходження залежності згинального моменту від координати z перерізу балки і положення одиничної сили l_H :

$$MPL(z, l_H) := \begin{cases} l_H - z & \text{if } (z > 0) \wedge (z \leq l_H) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

9 Побудова епюри згинальних моментів при навантаженні балки одиничною силою в заданій точці H :

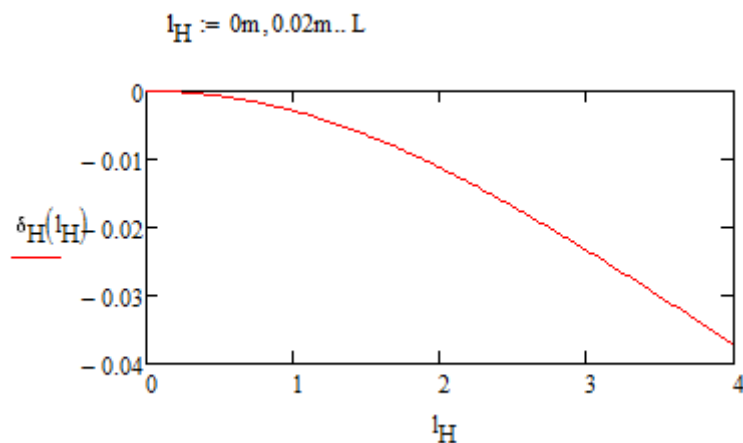


10 Знаходження прогину δ_H в заданій точці H балки:

$$E := 2 \cdot 10^{11} \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \qquad J_x := 5500 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\delta_H(l_H) := \frac{1}{E \cdot J_x} \int_0^L MPL(z, l_H) \cdot M_z(z) \, dz \qquad \delta_H(4\text{m}) = -0.0372 \text{ m}$$

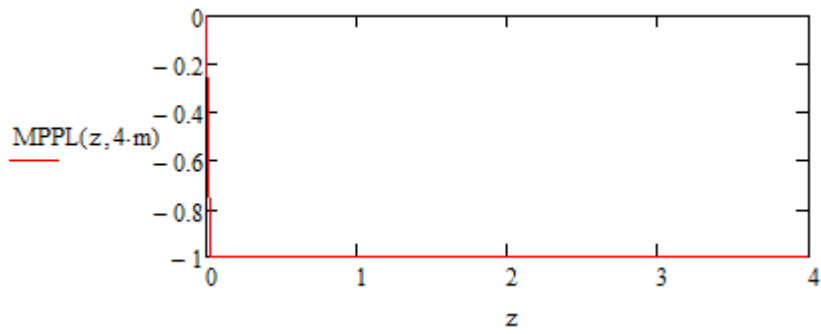
11 Побудова графіка зміни величини δ_H за довжиною балки:



12 Знаходження залежності згинального моменту від координати z перерізу балки і положення одиничного моменту l_k :

$$MPPL(z, l_k) := \begin{cases} -1 & \text{if } (z > 0) \wedge (z \leq l_k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

13 Побудова епюри згинальних моментів при навантаженні балки одиничним моментом у заданій точці K :

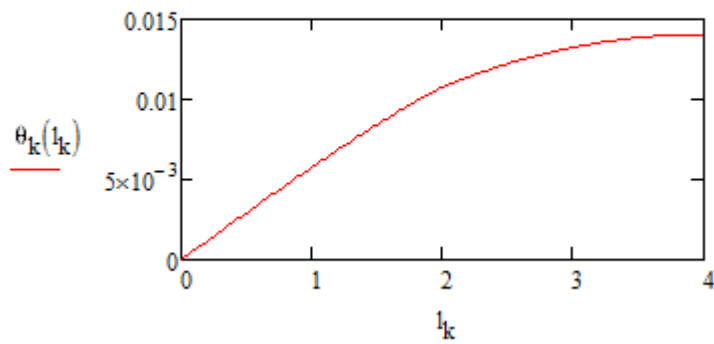


14 Знаходження кута повороту перерізу θ_k в заданій точці K балки:

$$\theta_k(l_k) := \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L \text{MPPL}(z, l_k) \cdot M_z(z) \, dz \quad \theta_k(4\text{-m}) = 0.0141$$

15 Побудова графіка зміни величини θ_k за довжиною балки:

$$l_k := 0\text{m}, 0.02\text{m}..L$$



ДОДАТОК Д
Основні параметри стиснутих стрижнів

1 Коефіцієнти μ приведеної довжини

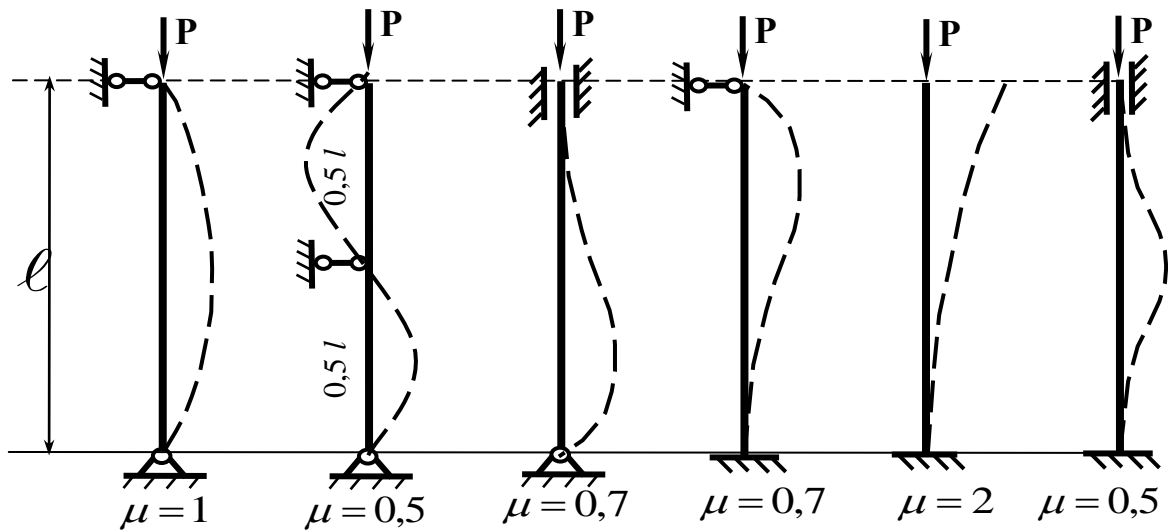


Рисунок Д.1

2 Коефіцієнти φ зменшення основного допустимого напруження

Таблиця Д.1

Гнучкість λ	Сталь			чавун	Дерево
	Ст 4, 3, 2	Ст 5	СПК		
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

Навчальне видання

**ХОЛОДНЯК Юрій Сергійович
КОСТИКОВ Олександр Анатолійович
ЧОСТА Наталія Вікторівна**

ОПР МАТЕРІАЛІВ

Курс лекцій

**для студентів усіх механічних спеціальностей
денної і заочної прискорених форм навчання**

Редагування і комп'ютерне верстання І. І. Дьякова

19/2022. Формат 60 x 84/16. Ум. друк. арк.. 8,14.
Обл.-вид. арк..6,43. Тираж 100 пр. Зам. № 7.

Видавець і виготовлювач
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 1633 від 24.12.2003