

**Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія**

**О.Г.Водолазська, С.В.Подлесний, В.М.Іскрицький**

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

**ДИНАМІКА**

**Динаміка механічної системи та твердого тіла**

Затверджено

на методичному семінарі кафедри  
технічної механіки

Протокол № 7 від 14 лютого 2012 р.

**Краматорськ 2012**

**УДК 531.  
ББК 22.21  
В-62**

**Водолазська, О.Г.**

**В-62** Теоретична механіка. Динаміка механічної системи та твердого тіла : навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей / О.Г.Водолазська, С.В.Подлесний, В.М.Іскрицький. – Краматорськ : ДДМА, 2012. – 312 с.

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал, методику та приклади розв'язання задач з розділу теоретичної механіки «Динаміка механічної системи та твердого тіла» для студентів усіх спеціальностей.

**УДК 531.  
ББК 22.21**

ISBN

© О.Г.Водолазська, С.В.Подлесний,  
В.М.Іскрицький, 2012  
© ДДМА, 2012

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
1 Основні поняття та визначення .....	8
2 Маса системи. Центр мас системи.....	12
3 Моменти інерції механічної системи .....	15
3.1 Момент інерції щодо точки та осі.....	15
3.2 Моменти інерції відносно осей координат.....	17
3.3 Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей (теорема Гюйгенса - Штейнера).....	20
3.4 Моменти інерції найпростіших однорідних тіл.....	22
4 Приклади розв'язання задач на визначення положення центра мас механічної системи і її моментів інерції.....	34
5 Диференціальні рівняння руху механічної системи.....	41
6 Теорема про зміну кількості руху.....	43
6.1 Кількість руху точки та системи .....	43
6.2 Обчислення кількості руху системи.....	44
6.3 Елементарний і повний імпульси сили.....	46
6.4 Теорема про зміну кількості руху точки.....	47
6.5 Теорема про зміну кількості руху механічної системи.....	49
6.6 Закони збереження кількості руху .....	51
6.7 Приклади розв'язання задач .....	52
7 Теорема про рух центра мас механічної системи.....	63
7.1 Приклади завдань для самоперевірки знань.....	74
8. Теорема про зміну кінетичного моменту.....	76
8.1 Кінетичний момент точки й системи .....	76
8.2 Кінетичний момент системи відносно осі обертання при обертальному русі системи або твердого тіла .....	78
8.3 Теорема про зміну кінетичного моменту точки.....	79
8.4 Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи .....	80
8.5 Закони збереження кінетичних моментів .....	84
8.6 Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи для відносного руху .....	87
8.7 Теорема Резаля.....	90
8.8 Методика і приклади розв'язання задач.....	92

8.9 Приклади завдань для самоперевірки знань.....	106
9 Теорема про зміну кінетичної енергії .....	109
9.1 Робота сили.....	109
9.1.1 Елементарна робота сили .....	109
9.1.2 Повна робота сили .....	111
9.1.3 Потужність .....	113
9.2 Окремі випадки обчислення роботи сили .....	114
9.3 Кінетична енергія точки, системи і твердого тіла .....	133
9.3.1 Кінетична енергія точки й системи .....	133
9.3.2 Обчислення кінетичної енергії системи (теорема Кьоніга).....	134
9.3.3 Кінетична енергія твердого тіла .....	135
9.4 Теорема про зміну кінетичної енергії точки.....	139
9.5 Теорема про зміну кінетичної енергії системи.....	147
9.6 Методика і приклади розв'язання задач .....	149
9.7 Приклади завдань для самоперевірки знань.....	165
10 Потенціальне силове поле.	
Закон збереження механічної енергії.....	167
10.1 Потенціальне силове поле і силова функція .....	167
10.2 Поверхні рівня. Силкові лінії.....	170
10.3 Потенціальна енергія.....	173
10.4 Приклади обчислення силових функцій.....	175
10.5 Закон збереження механічної енергії .....	178
10.5.1 Закон збереження механічної енергії точки .....	178
10.5.2 Закон збереження механічної енергії системи .....	179
11 Застосування загальних теорем динаміки до вивчення теорії удару.....	181
11.1 Основні положення і поняття теорії удару .....	181
11.2 Теореми про зміну кількості руху і про рух центра мас для удару. Теорема Кельвіна .....	184
11.3 Теорема про зміну кінетичного моменту при ударі.....	188
11.4 Удар точки о нерухому поверхню.....	190
11.4.1 Прямий удар.....	190
11.4.2 Косий удар.....	193

11.4.3 Експериментальне визначення коефіцієнта відновлення.....	194
11.5 Теорема Карно .....	195
11.6 Прямий центральний удар двох тіл.....	198
11.7 Приклади розв'язання задач.....	202
12 Динаміка твердого тіла.....	216
12.1 Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла.....	216
12.2 Диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі .....	220
12.3 Математичний маятник і його малі коливання.....	223
12.4 Фізичний маятник. Малі коливання фізичного маятника.....	224
12.5 Експериментальне визначення моментів інерції твердих тіл .....	227
12.5.1 Спосіб хитань .....	227
12.5.2 Спосіб крутильних коливань.....	228
12.5.3 Спосіб вантажу, що падає.....	231
12.6 Методика і приклади розв'язання задач за допомогою диференціального рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.....	233
12.7 Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла .....	241
12.8 Методика і приклади розв'язання задач динаміки плоского руху твердого тіла.....	243
12.9 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки.....	251
12.9.1 Кінетичний момент тіла, що обертається навколо нерухомої точки.....	252
12.9.2 Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої точки.....	253
12.9.3 Динамічні рівняння Ейлера .....	255
12.10 Диференціальні рівняння руху вільного твердого тіла .....	259
12.11 Елементи теорії гіроскопів .....	262
12.11.1 Поняття про гіроскоп.....	262
12.11.2 Основні припущення наближеної теорії гіроскопів.....	263
12.11.3 Рух вільного гіроскопа, закріпленого в центрі тяжіння. Регулярна прецесія .....	265

12.12	Методика і приклади розв'язання задач.....	268
13	Принцип Даламбера. Динамічні реакції при обертанні тіла навколо нерухомої осі .....	273
13.1	Принцип Даламбера для матеріальної точки .....	273
13.2	Принцип Даламбера для системи матеріальних точок .....	276
13.3	Головний вектор і головний момент сил інерції.....	279
13.4	Сили інерції твердого тіла в окремих випадках його руху.....	281
13.5	Динамічні реакції підшипників при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі .....	283
13.6	Статична та динамічна урівноваженість тіл, що обертаються.....	287
13.7	Методика і приклади розв'язання задач.....	289
13.8	Приклади для самоперевірки знань.....	301
	Предметний вказівник.....	304
	Список літератури .....	307

## ВСТУП

Друга частина навчального посібника «Динаміка» присвячена динаміки механічної системи і твердого тіла.

На початку цієї частини наведені основні положення і визначення, в тому числі питання центра мас систем і моментів інерції з прикладами розв'язання задач на визначення положення центра мас механічної системи і її моментів інерції.

Значний об'єм другої частини посібника займають загальні теореми динаміки. Виведення кожної з теорем, за винятком теореми про рух центра мас механічної системи, розпочинаються з виведення визначень фізичних величин спочатку відповідно для точки, а потім з узагальненням для механічної системи.

Таким чином подані такі теореми: теорема про кількість руху точки і системами з законами збереження кількості руху; теорема про зміну кінетичного моменту точки і системи з відповідними законами збереження кінетичних моментів і теорема про зміну кінетичної енергії точки системи, також закони збереження механічної енергії. Завершується кожний підрозділ, який вміщує відповідну загальну теорему динаміки (в тому числі і теорему про рух центра мас), методикою і прикладами розв'язання задач.

Окремо зазначене питання про застосування загальних теорем динаміки до вивчення теорії удару з прикладами розв'язання за даною темою.

Динаміка твердого тіла подана через розгляд диференціальних рівнянь поступального руху твердого тіла; обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі, з включенням питань про фізичний і математичний маятники і їх малі коливання; плоского руху твердого тіла; обертального руху твердого тіла навколо нерухомої точки. Тут же подані елементи теорії гіроскопів, а також методика і приклади.

Завершується друга частина принципом Даламбера для механічної системи з розглядом питань про динамічні реакції підшипників при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі і статичної, і динамічної урівноваженості.

Перевірити набути знання студенти можуть, скориставшись завданнями для самоперевірки знань.

# 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

*Системою матеріальних точок або механічною системою* називають умовно виділену сукупність матеріальних точок, що пов'язані між собою певним чином, тобто взаємодіють між собою.

*Механічна система називається вільною*, якщо її рух не обмежують ніякі в'язі, а визначається рух лише діючими на точки системи силами, тобто в будь-який момент часу точки системи можуть займати довільні положення в системі відліку і мати довільні швидкості.

Прикладом вільної системи можете бути сонячна система, планети якої розглядаються в астрономії як матеріальні точки. Вони переміщуються орбітами, що залежать лише від діючих на планети сил.

*Механічна система називається невольною*, якщо рух її точок обмежується накладеними на точку в'язями (певними умовами) і точки системи не можуть займати довільні положення в системі відліку і мати довільні швидкості.

Прикладом системи невольних точок може бути будь-який механізм, прилад чи машина, у яких рух окремих елементів обмежений в'язями.

Розглянемо рух невольної механічної системи, яка складається з  $n$  матеріальних точок відстань між якими залишається незмінною. *Така система має назву незмінної системи.*

Щоб отримати незмінну систему двох точок  $M_1$  і  $M_4$ , їх треба з'єднати між собою в'язями, наприклад, абсолютно жорстким і невагомим (ідеальним) стрижнем (рис. 1). Для отримання незмінної системи з трьох точок  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  необхідні три стрижні:  $M_1M_2$ ;  $M_2M_3$  і  $M_3M_1$ . Для утворення незмінної системи з чотирьох точок, які не лежать в одній площині, треба приєднати точку  $M_4$  трьома стрижнями  $M_4M_1$ ;  $M_2M_4$  і  $M_3M_4$ . Дійсно, якщо прикріпити точку  $M_4$  лише двома стрижнями, наприклад,  $M_1M_4$  і  $M_2M_4$ , то система буде змінною, тому що кут між трикутниками  $M_1M_2M_3$  і  $M_1M_2M_4$  зможе змінюватись. Щоб зробити цей кут незмінним, необхідно додати третій стрижень  $M_3M_4$ .



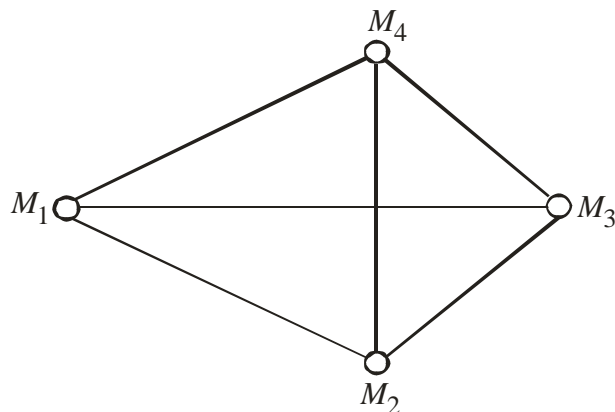


Рисунок 1

З цього витікає, що при утворенні незмінної системи кожену точку, яку додають, необхідно з'єднати ідеальними стрижнями хоча б з трьома точками, що вже входять до незмінної системи. Знайдемо мінімальну кількість стрижнів, які забезпечать незмінність системи з  $n$  матеріальних точок.

Для утворення незмінної системи з трьох точок треба три стрижні, а для приєднання до системи кожної наступної із  $(n - 3)$  точок необхідно також три стрижні. Таким чином, мінімальна кількість стрижнів, необхідна для утворення незмінної системи із  $n$  точок, визначиться формулою

$$3 + 3(n - 3) = 3n - 6. \quad (1)$$

Вважаючи кількість точок незмінної системи нескінченно великою, а довжини стрижнів, що з'єднують точки, нескінченно малими, отримаємо модель, яка має назву *абсолютно твердого тіла*.

Усі сили, діючі на точки будь-якої механічної системи (як вільної, так і невільної) можна розподілити на *зовнішні*  $\bar{F}^e$  і *внутрішні*  $\bar{F}^i$  (індекси "e" та "i" походять від латинських: exterior – зовнішній і interior – внутрішній).

*Зовнішніми силами* механічної системи називаються сили, з якими діють на точки системи ті тіла і точки, що не належать (тобто не входять до складу) системі, яка досліджується.

*Внутрішніми силами* механічної системи називають сили взаємодії між точками системи, яка розглядається.

Таке поділення являється умовним і залежить від того, яка механічна система розглядається. Наприклад, якщо розглядати рух всієї Сонячної системи, то сила притягання Землі до Сонця буде внутрішньою; якщо розглядати рух системи Земля – Місяць, то для такої системи та ж сама сила буде зовнішньою.

Інший приклад, реакції підшипників вала являються для нього зовнішніми силами. Ці ж реакції треба буде віднести до внутрішніх сил, якщо розглядати весь пристрій в цілому.

Розглянемо деякі найпростіші властивості внутрішніх сил, що діють на всю механічну систему в будь-якому її стані. Доведемо, що головний вектор всіх внутрішніх сил системи й головний момент цих сил щодо довільної точки дорівнюють нулю при будь-якому стані системи, тобто при рівновазі й при довільному русі.

Нехай система складається з  $N$  точок, де  $N$  – будь-яке кінцеве число (рис. 2).

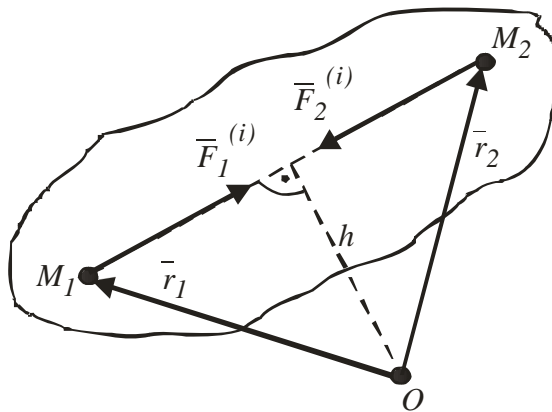


Рисунок 2

Якщо розглянути які-небудь дві довільні точки системи, наприклад,  $M_1$  та  $M_2$ , то для них за третім законом динаміки отримаємо:  $\vec{F}_1^{(i)} + \vec{F}_2^{(i)} = 0$ , тому що сили дії й протидії завжди рівні одна одній модулем, протилежні за напрямком й діють уздовж однієї прямої лінії, що з'єднує взаємодіючі точки. Головний вектор внутрішніх сил  $\vec{R}^{(i)}$

складається з векторної суми таких сил дії й протидії, тому що вся система складається з пар взаємодіючих точок. Отже,

$$\bar{R}^{(i)} = \sum \bar{F}_k^{(i)} = 0. \quad (2)$$

У проекціях на координатні осі:

$$\begin{aligned} R_x^{(i)} &= \sum F_{kx}^{(i)} = 0; \\ R_y^{(i)} &= \sum F_{ky}^{(i)} = 0; \\ R_z^{(i)} &= \sum F_{kz}^{(i)} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Зовнішні сили теж є силами взаємодії, але для них сили дії прикладені до точок розглянутої системи, а сили протидії прикладені до тіл і точок, що не входять до цієї системи.

Розглянемо тепер суму моментів сил  $\bar{F}_1^{(i)}$  і  $\bar{F}_2^{(i)}$  щодо точки  $O$ . Легко побачити (див. рис. 2), що

$$\bar{M}_0(\bar{F}_1^{(i)}) + \bar{M}_0(\bar{F}_2^{(i)}) = 0,$$

тому що обидві сили мають однакове плече та протилежні напрямки векторних моментів. Головний момент внутрішніх сил  $\bar{L}_0^{(i)}$  щодо точки  $O$  складається з векторної суми таких виразів, які дорівнюють нулю. Отже,

$$\bar{L}_0^{(i)} = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(i)}) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0. \quad (4)$$

Відповідно, у проекціях на координатні осі:

$$\begin{aligned} L_x^{(i)} &= \sum M_x(\bar{F}_k^{(i)}) = 0; \\ L_y^{(i)} &= \sum M_y(\bar{F}_k^{(i)}) = 0; \\ L_z^{(i)} &= \sum M_z(\bar{F}_k^{(i)}) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким чином властивості внутрішніх сил системи можна сформулювати так:

1) *Головний вектор всіх внутрішніх сил системи і суми проєкцій цих сил на координатні осі дорівнюють нулю.*

2) *Головні моменти внутрішніх сил системи відносно будь-якого центра і координатних осей дорівнюють нулю.*

Треба зауважити, що наведені властивості не означають, що внутрішні сили взаємно зрівноважуються і не впливають на рух системи. Внутрішні сили прикладені до різних точок і можуть спричиняти взаємні переміщення цих точок.

## 2 МАСА СИСТЕМИ. ЦЕНТР МАС СИСТЕМИ

Рух механічної системи, на яку діє певна система сил, залежить не лише від цих сил, він також залежить від її загальної маси і розподілення мас.

Маса системи (позначається  $M$  або  $m$ ) дорівнює арифметичній сумі всіх мас точок чи тіл, які утворюють механічну систему:

$$M = \sum m_k .$$

Розподіл мас у системі визначається значенням  $m_k$  мас її точок, а також їх взаємним положенням, наприклад координатами  $x_k, y_k, z_k$ . Але для вирішення більшості задач динаміки, наприклад динаміки твердого тіла, для урахування розподілення мас досить знати не всі величини  $m_k, x_k, y_k, z_k$ , а лише деякі, що визначаються через характеристики цих величин. Такими обов'язковими характеристиками являються координати центру мас системи і моменти інерції, які будуть розглянуті далі.

Розглянемо механічну систему, яка складається з  $N$  матеріальних точок (рис. 3).

Позначимо маси точок відповідно  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . Положення точок системи відносно нерухомої системи відліку (наприклад, декартової системи координат  $Oxyz$ ) задамо радіусами-векторами  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N$ .

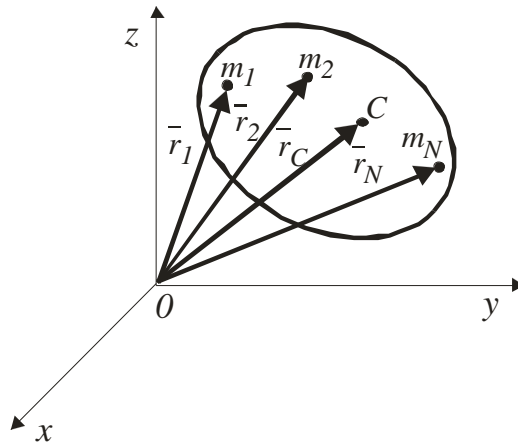


Рисунок 3

Центром мас механічної системи називається геометрична точка  $C$ , радіус-вектор  $\bar{r}_c$  якої визначається за формулою

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}, \quad (6)$$

де  $M = \sum_{k=1}^N m_k$  – маса системи.

Позначаючи декартові координати матеріальних точок  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $\dots$ ,  $(x_N, y_N, z_N)$  з рівняння (6) проектуванням на декартові осі одержимо наступні формули для координат центра мас:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^N m_k x_k}{M}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^N m_k y_k}{M}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^N m_k z_k}{M}. \quad (7)$$

Центр мас – це *геометрична* точка. Він може не збігатися з жодною матеріальною точкою системи, як, наприклад, у випадку кільця. Центр мас системи характеризує розподіл мас у системі.

Векторна величина  $\bar{S} = \sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k$  називається статичним моментом

маси щодо точки  $O$ . Скалярна величина  $S_{0yz} = \sum_{k=1}^N m_k x_k$  називається статичним моментом маси щодо координатної площини  $Oyz$ .

Величина  $S_{0xz} = \sum_{k=1}^N m_k y_k$  та  $S_{0xy} = \sum_{k=1}^N m_k z_k$  є відповідно статичними моментами маси щодо координатних площин  $Oxz$  та  $Oxy$ .

Радіус-вектор і координати центра мас через статичні моменти маси виражаються формулами:

$$\bar{r}_c = \bar{S}/M; \quad x_c = S_{0yz}/M; \quad y_c = S_{0xz}/M; \quad z_c = S_{0xy}/M.$$

Якщо механічна система являє собою суцільне тіло, то його розбивають на елементарні частки з нескінченно малими масами  $d_m$  і з радіусом-вектором  $\bar{r}$ , що змінюється від частки до частки. Тоді суми в чисельниках формул (6) і (7) при граничному переході перетворюються на інтеграли і формули (6) і (7) та набувають виду:

$$\bar{r}_c = \int \bar{r} dm / M, \quad x_c = \int x dm / M, \quad y_c = \int y dm / M, \quad z_c = \int z dm / M,$$

де  $M = \int dm$  – маса тіла.

Для однорідних суцільних тіл

$$dm = r dV; \quad M = rV,$$

де  $r$  – щільність тіла, загальна для всіх елементарних часток;

$dV$  – об'єм елементарної частки;

$V$  – об'єм тіла.

Для тіл типу тонкого аркуша, які можна прийняти за однорідні матеріальні поверхні,

$$dm = r_s ds; \quad M = r_s s,$$

де  $r_s$  – поверхнева щільність;  
 $ds$  – площа поверхні елементарної частки;  
 $s$  – площа поверхні.

Для тонкого дроту, який можна прийняти за відрізок лінії,

$$dm = r_l dl; \quad M = r_l l,$$

де  $r_l$  – лінійна щільність,  
 $dl$  – довжина елемента лінії,  
 $l$  – довжина відрізка лінії.

У цих випадках визначення центра мас тіл зводиться до обчислення центра мас об'ємів, площ і довжин ліній відповідно.

Центр мас системи характеризує розподіл мас системи невичерпно. Розглянемо тепер інші характеристики, до яких належать моменти інерції відносно осі, точки і площини, що відповідно характеризують розподіл мас даної системи відносно осі, точки і площини.

### 3 МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

При поступальному русі твердого тіла (так само як і при русі матеріальної точки) мірою його інертності була маса тіла. Для характеристики розподілу мас у тілах при розгляді обертальних рухів користуються другою мірою інертності твердого тіла – моментом інерції.

#### 3.1 Момент інерції щодо точки та осі

Моментом інерції механічної системи, що складається з  $N$  матеріальних точок, щодо точки  $O$  називається сума добутків мас цих точок на квадрати їхніх відстаней до точки  $O$  (рис. 4), тобто:

$$J_0 = \sum_{k=1}^N m_k d_k^2. \quad (8)$$

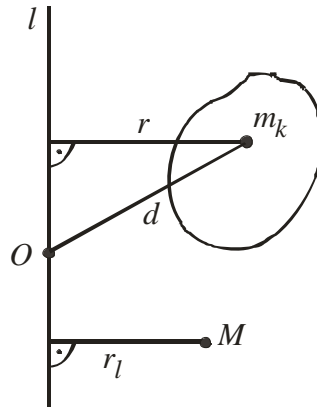


Рисунок 4

Момент інерції щодо точки часто називають полярним моментом інерції. У випадку суцільного тіла сума переходить в інтеграл, і для полярного моменту інерції маємо:

$$J_0 = \int d^2 dm,$$

де  $dm$  – маса елементарної частки тіла, прийнятої в межі за точку;  
 $d$  – її відстань до точки  $O$ .

Моментом інерції  $J_l$  системи матеріальних точок щодо осі  $Ol$  називається сума добутків мас цих точок на квадрати їх найкоротших відстаней  $r_k$  до осі  $Ol$  (див. рис. 7), тобто

$$J_l = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2. \quad (9)$$

В окремому випадку суцільного тіла суму варто замінити інтервалом:

$$J_l = \int r^2 dm. \quad (10)$$

Моменти інерції однакових за розмірами та формою однорідних тіл, виготовлених з різних матеріалів, відрізняються один від одного.



Характеристикою, що не залежить від маси матеріалу, є радіус інерції. Радіус інерції  $r_l$  щодо осі  $Ol$  визначається за формулою

$$r_l = \sqrt{J_l/M}, \quad (11)$$

де  $M$  – маса тіла.

Момент інерції відносно осі через радіус інерції щодо цієї осі визначається виразом

$$J_l = Mr_l^2. \quad (12)$$

У довідниках про моменти інерції наводять таблиці значень радіусів інерції різних тіл.

Формула (12) дозволяє вважати радіус інерції тіла щодо осі відстанню від цієї осі до такої точки, в яку варто помістити масу тіла, щоб її момент інерції виявився рівним моменту інерції тіла щодо розглянутої осі.

Моменти інерції щодо осі й точки мають однакову розмірність – кілограм-квадраний метр ( $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ).

Крім моментів інерції щодо точки й осі використовуються також моменти інерції щодо площин і відцентрові моменти інерції. Ці моменти інерції зручно розглядати щодо координатних площин й осей декартової системи координат.

### 3.2 Моменти інерції відносно осей координат

Момент інерції відносно декартових осей координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  та їхнього початку – точки  $O$  – визначаються виразом (рис. 5).

$$\begin{aligned} J_x &= \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2); \\ J_y &= \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + z_k^2); \end{aligned} \quad (13)$$

$$J_z = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2);$$

$$J_0 = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2), \quad (14)$$

де  $x_k, y_k, z_k$  – координати матеріальних точок системи. Для суцільних тіл ці формули набудуть вигляду:

$$J_x = \int (y_k^2 + z_k^2) dm;$$

$$J_y = \int (x_k^2 + z_k^2) dm; \quad (15)$$

$$J_z = \int (x_k^2 + y_k^2) dm;$$

$$J_0 = \int (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) dm.$$

З наведених формул витікає залежність:

$$2J_0 = J_x + J_y + J_z. \quad (16)$$

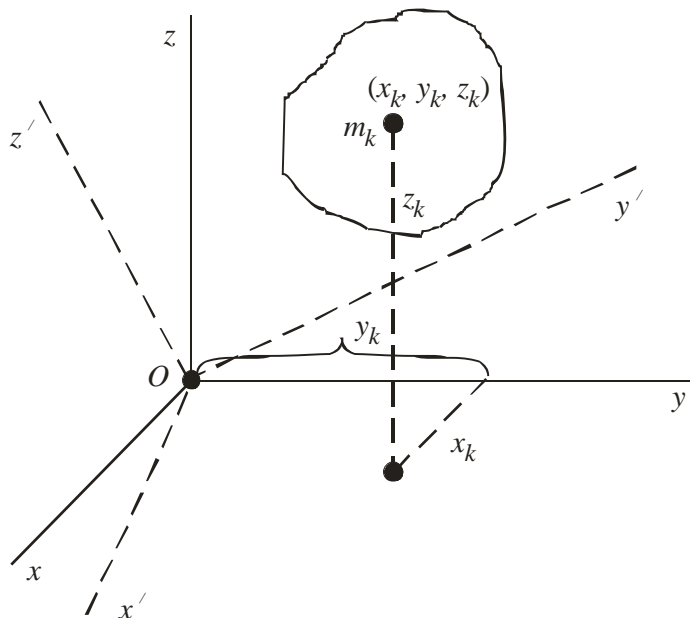


Рисунок 5

Якщо через точку  $O$  провести іншу систему декартових осей координат  $Ox'y'z'$ , то для них за формулою (16) одержимо:

$$2J_0 = J_{x'} + J_{y'} + J_{z'}. \quad (17)$$

З порівняння виразів (16) і (17) маємо, що

$$J_x + J_y + J_z = J_{x'} + J_{y'} + J_{z'}.$$

Сума моментів інерції відносно декартових осей координат не залежить від орієнтації цих осей у розглянутій точки, тобто є величиною, інваріантною стосовно напрямку осей координат.

Для осей координат  $Oxyz$  можна визначити наступні три *відцентрових моменти інерції*:

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k, \quad J_{yz} = \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k, \quad J_{zx} = \sum_{k=1}^N m_k z_k x_k. \quad (18)$$

А для суцільних тіл:

$$J_{xy} = \int xy \, dm; \quad J_{yz} = \int yz \, dm; \quad J_{xz} = \int xz \, dm.$$

Відцентрові моменти інерції часто називають добутками інерції.

Моменти інерції щодо осей і точок – величини додатні, тому що до них входять квадрати координат. Відцентрові моменти інерції містять добуток координат і можуть бути як додатними, так і від'ємними. На відміну від осьових, відцентрові моменти інерції залежать від точки, у якій обрані осі координат.

Відцентрові моменти інерції мають велике значення при обчисленні тиску на підшипники при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі і в деяких інших випадках.

Якщо відносно деякої системи координат відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, то осі цієї системи координат називаються *головними осями інерції*. Якщо початок такої системи координат збігається з центром мас механічної системи, то вони називаються *головними центральними осями інерції*.

Крім розглянутих моментів інерції іноді використовуються моменти інерції щодо координат площин  $J_{Oxy}, J_{Oyz}, J_{Ozx}$ , які визначаються виразами:

$$J_{Oxy} = \sum_{k=1}^N m_k z_k^2, \quad J_{Oyz} = \sum_{k=1}^N m_k x_k^2, \quad J_{Ozx} = \sum_{k=1}^N m_k y_k^2. \quad (19)$$

Ці моменти інерції називають також планарними моментами інерції.

### 3.3 Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей (теорема Гюйгенса-Штейнера)

Установимо залежність між моментами інерції системи щодо паралельних осей, одна з яких проходить через центр мас. Нехай маємо дві системи прямокутних, взаємно паралельних осей координат  $Oxyz$  та  $Cx'y'z'$ . Початок системи координат  $Cx'y'z'$  перебуває в центрі мас системи (рис. 6).

За визначенням моменту інерції відносно осей координат (див. (13)) маємо:

$$J_{Oz} = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2), \quad (20)$$

$$J_{Cz'} = \sum_{k=1}^N m_k (x_k'^2 + y_k'^2),$$

де  $m_k$  – маса точки  $M_k$ ;

$x_k, y_k, z_k$  і  $x_k', y_k', z_k'$  – координати цієї точки щодо систем координат  $Oxyz$  та  $Cx'y'z'$  відповідно.

Якщо позначити через  $x_C, y_C, z_C$  координати центра мас відносно системи координат  $Oxyz$ , то для взаємно паралельних осей координати однієї й тієї ж точки  $M_k$  зв'язані співвідношеннями паралельного переносу:

$$x_k = x_k' + x_C; \quad y_k = y_k' + y_C; \quad z_k = z_k' + z_C.$$

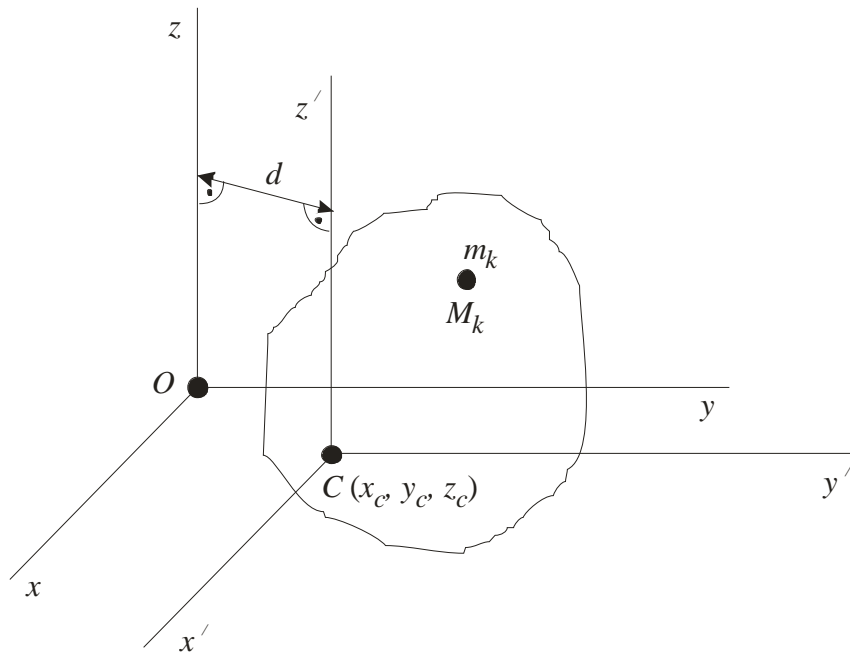


Рисунок 6

Підставимо ці значення координат у вираз (20) моменту інерції  $J_{Oz}$ .  
Після перетворень одержимо:

$$J_{Oz} = \sum_{k=1}^N m_k (x_k'^2 + y_k'^2) + 2x_C \sum_{k=1}^N m_k x_k' + 2y_C \sum_{k=1}^N m_k y_k' + (x_C^2 + y_C^2) \sum_{k=1}^N m_k .$$

У цьому співвідношенні  $\sum_{k=1}^N m_k = M$  – маса системи, а із (7)

$$\sum_{k=1}^N m_k x_k' = Mx_C' = 0 \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^N m_k y_k' = My_C' = 0 \quad \text{тому що} \quad x_C' = 0 \quad \text{та} \quad y_C' = 0$$

унаслідок того, що за умовою центр мас перебуває в початку координат цієї системи координат.

Величина  $x_C^2 + y_C^2 = d^2$ , де  $d$  – відстань між осями  $Oz$  і  $Cz'$ .

Остаточно

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2 . \tag{21}$$

Зв'язок моментів інерції щодо двох паралельних осей, одна з яких проходить через центр мас, становить зміст так званої теореми Штейнера, або Гюйгенса-Штейнера.

*Момент інерції системи відносно будь-якої осі дорівнює моменту інерції щодо паралельної заданої осі, що проходить через центр мас, плюс добуток маси системи і квадрата відстані між цими осями.*

З теореми Штейнера витікає, що для сукупності паралельних осей момент інерції є найменшим щодо осі, яка проходить через центр мас системи.

### 3.4 Моменти інерції найпростіших однорідних тіл

Моменти інерції тіл складної форми часто вдається обчислити, якщо їх попередньо розбити на тіла простої форми. Моменти інерції складних тіл одержують, підсумовуючи моменти інерції частин цих тіл. Одержимо формули для обчислення моментів інерції деяких однорідних найпростіших тіл.

#### Однорідний стрижень

Маємо однорідний стрижень довжиною  $l$  і масою  $M$  (рис. 7).

Направимо вздовж стрижня вісь  $Ox$ . Обчислимо момент інерції стрижня щодо осі  $Oz$ , яка проходить перпендикулярно стрижню через його кінець. Відповідно до визначення моменту інерції суцільного тіла щодо осі маємо:

$$J_{Oz} = \int_0^l x^2 dm = r \int_0^l x^2 dx,$$

тому що  $dm = r dx$ , де  $r = M/l$  – щільність стрижня.

Обчислюючи інтеграл, одержуємо

$$J_{Oz} = \frac{M}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{M}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = M \frac{l^2}{3}.$$

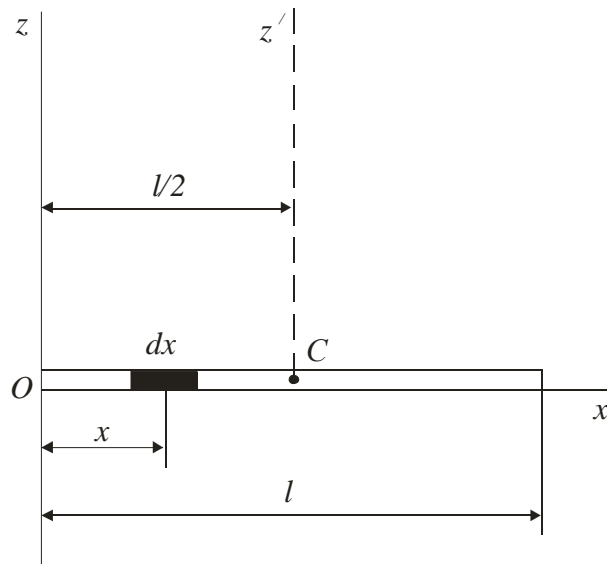


Рисунок 7

Таким чином, момент інерції стрижня відносно його кінця:

$$J_{Oz} = M \frac{l^2}{3}. \quad (22)$$

Момент інерції стрижня щодо осі  $Cz'$ , що проходить через центр мас і паралельна осі  $Oz$ , визначається за теоремою Штейнера (21)

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2,$$

де  $d^2 = (l/2)^2 = l^2/4$ .

Отже,

$$J_{Cz'} = J_{Oz} - Md^2 = M \frac{l^2}{3} - M \frac{l^2}{4} = M \frac{l^2}{12},$$

тобто, момент інерції стрижня відносно його центра:

$$J_{Cz'} = M \frac{l^2}{12}. \quad (23)$$

## Прямокутна пластина

Прямокутна тонка пластина має розміри  $l$  та  $h$  і масу  $M$  (рис. 8).

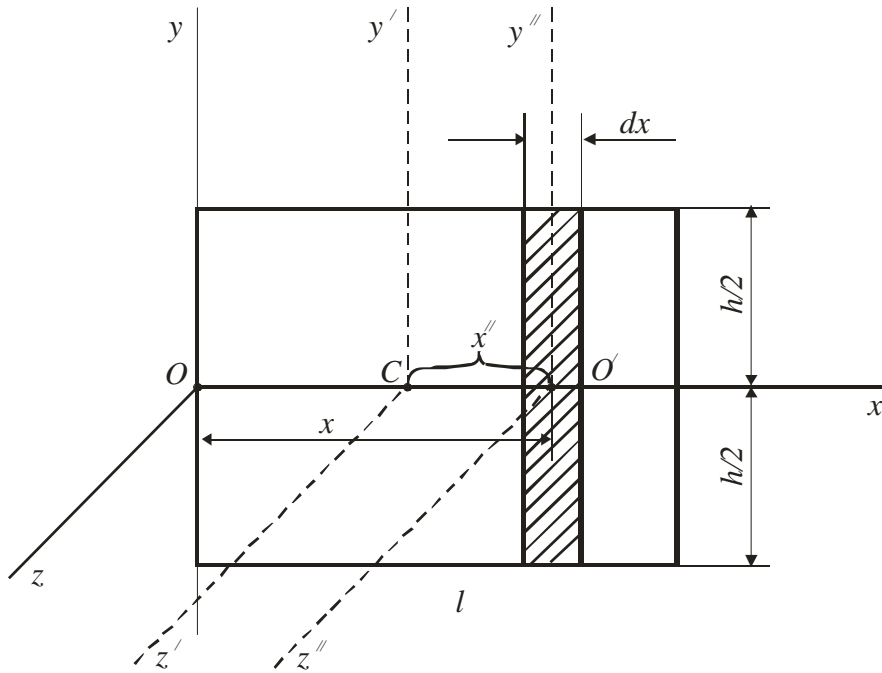


Рисунок 8

Осі  $Ox$  та  $Oy$  розташуємо у площині пластини, а вісь  $Oz$  – перпендикулярно їй. Для визначення моменту інерції пластини щодо осі  $Oy$  розіб'ємо пластину на елементарні смужки шириною  $dx$  і масою  $dm = r h dx$  та проінтегруємо за  $x$  від 0 до  $l$ . Одержимо:

$$J_{Oz} = \int x^2 dm = r \int_0^l x^2 dx,$$

$$J_y = \int_0^l x^2 dm = r h \int_0^l x^2 dx = r h \frac{l^3}{3} = M \frac{l^2}{3},$$

тому що  $r h l = M$ .

Аналогічні обчислення для осі  $Ox$  дадуть

$$J_x = M \frac{h^2}{12},$$

тому що вісь  $Ox$  проходить крізь середину пластини.



Для визначення моменту інерції пластини щодо осі  $Oz$  варто попередньо обчислити момент інерції окремої заштрихованої смужки щодо паралельної осі  $O'z'$  за формулою (22) для стрижня й застосувати потім теорему Штейнера (21). Для елементарної смужки маємо:

$$J_z = dm \frac{h^2}{12} + x^2 dm.$$

Інтегруючи цей вираз у межах від 0 до  $l$ , одержимо:

$$J_z = \int_0^l \left( dm \frac{h^2}{12} + x^2 dm \right) = rh \left[ \frac{h^2}{12} \int_0^l dx + \int_0^l x^2 dx \right] = M \left( \frac{h^2}{12} + \frac{l^3}{3} \right).$$

Отже, для моментів інерції пластини щодо осей координат отримані наступні формули:

$$J_x = M \frac{h^2}{12}, \quad J_y = M \frac{l^2}{3}, \quad J_z = M \left( \frac{h^2}{12} + \frac{l^3}{3} \right). \quad (24)$$

### Круглий диск

Маємо тонкий однорідний диск радіусом  $R$  і масою  $M$  (рис. 9).

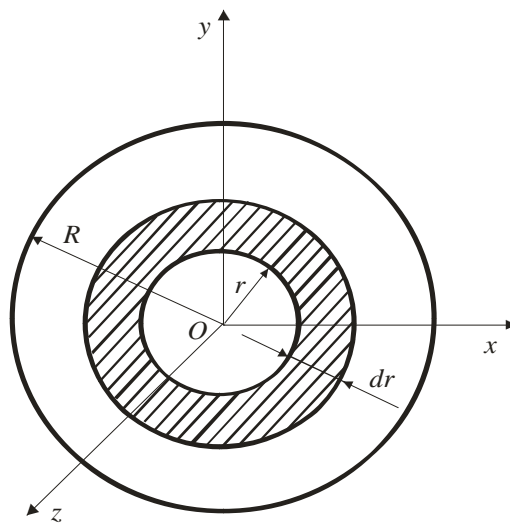


Рисунок 9

Обчислити момент його інерції  $J_0$  щодо точки  $O$  (осі  $Oz$ ). Цей момент інерції для тонкого диска збігається з моментом інерції  $J_z$  щодо координатної осі  $Oz$ , перпендикулярної площині диска. Розіб'ємо диск на концентричні смужки завширшки  $dr$ , прийняті у граничних умовах за матеріальні кола. Маса смужки дорівнює її площі  $2prdr$ , помноженої на її щільність  $r = M/(pR^2)$ , тобто  $dm = r \cdot 2prdr$ . Момент однієї смужки щодо точки  $O$  дорівнює  $r^2 dm$ . Для всього диска:

$$J_0 = \int_0^R r^2 dm = r \cdot 2p \int_0^R r^3 dr = r \cdot 2p \frac{R^4}{4} = M \frac{R^2}{2}.$$

Таким чином,

$$J_z = J_0 = M \frac{R^2}{2}. \quad (25)$$

Для осей координат  $Ox$  та  $Oy$ , розташованих у площині диска, через симетрію  $J_x = J_y$ , використовуючи вираз (16), маємо

$$2J_0 = J_x + J_y + J_z,$$

але  $J_z = J_0$ , тому  $J_x = J_y = \frac{1}{2} J_0 = \frac{MR^2}{4}.$

### Однорідне тонке кільце

Визначимо момент інерції кільця, маса якого  $M$ , а радіус  $R$  відносно осі  $z$ , що проходить через центр кільця і є перпендикулярною до площини кільця (рис. 10).

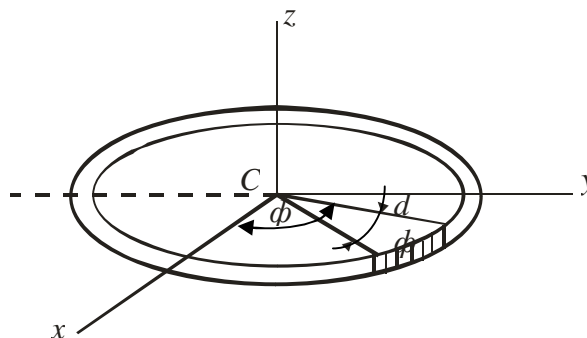


Рисунок 10

На підставі формули (15)

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm.$$

Оскільки  $dm = \frac{M}{2p} 2j$ ;  $x = R \cos j$ ;  $y = R \sin j$ , то

$$J_z = \frac{M}{2p} \int R^2 (\cos^2 j + \sin^2 j) dj = \frac{MR^2}{2p} \int_0^{2p} dj = \frac{MR^2}{2p} j \Big|_0^{2p} = MR^2.$$

$$J_{cz} = MR^2 \quad (26)$$

### Тонка однорідна пластина у формі прямокутного трикутника

Визначимо момент інерції пластини (рис. 11), маса якої дорівнює  $M$ , а катети відповідно  $a$  і  $b$ , відносно осі, яка проходить через точку  $A$  і є перпендикулярною до площини пластини.

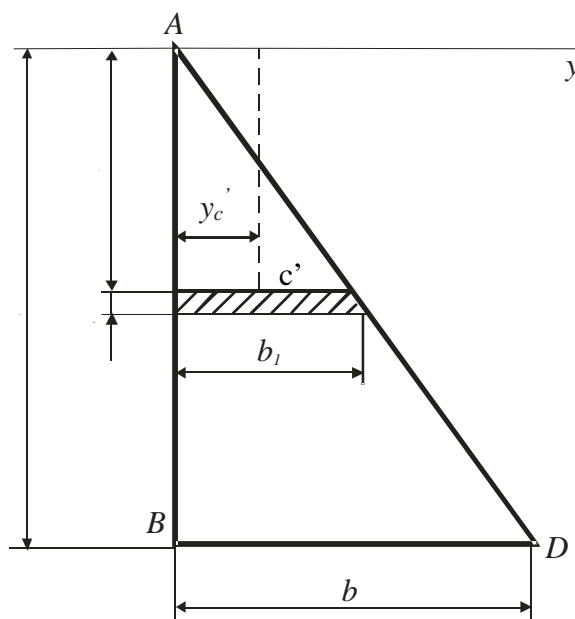


Рисунок 11

На підставі формули (15)

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm.$$

Оскільки

$$dm = \frac{2M}{a \cdot b} b' dx = \frac{2M}{a \cdot b} \cdot \frac{b \cdot x}{a} dx = \frac{2M}{a^2} x dx;$$

$$y_{c'} = \frac{b \cdot x}{2 \cdot a}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} J_z &= \int \left( x^2 + \frac{b^2 x^2}{4a^2} \right) \frac{2M}{a^2} x dx = \frac{2M}{a^2} \int_0^a x^3 dx + \frac{Mb^2}{2a^4} \int_0^a x^3 dx = \\ &= \frac{2M}{a^2} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^a + \frac{Mb^2}{2a^4} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^a = \frac{M}{4} (2a^2 + b^2). \end{aligned}$$

$$J_z = \frac{M}{4} (2a^2 + b^2). \quad (27)$$

### Круглий циліндр

Для круглого однорідного циліндра, маса якого  $M$ , радіус  $R$  і довжина  $l$  (рис. 12) обчислимо, насамперед, його момент інерції щодо поздовжньої осі симетрії  $Cz$ .

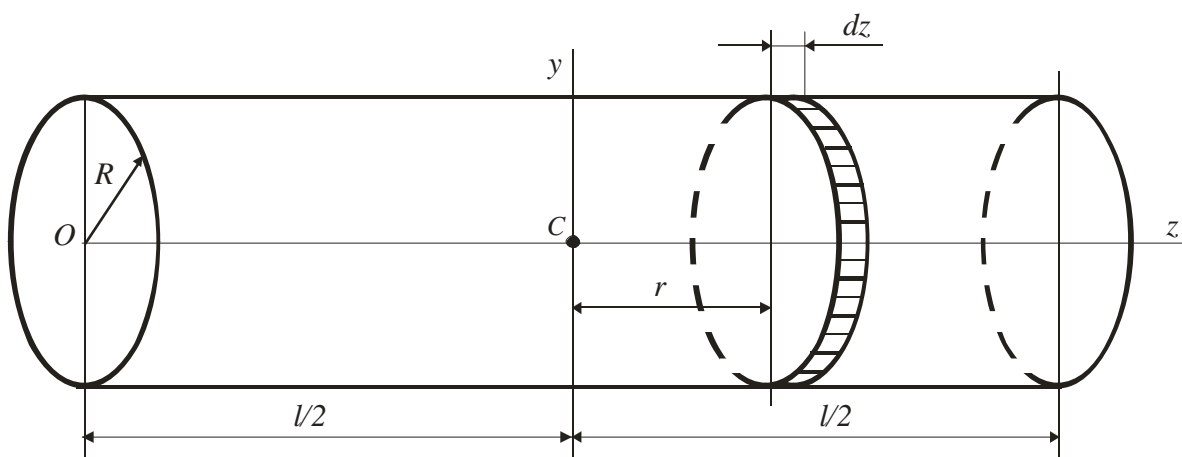


Рисунок 12

Для цього поділемо циліндр площинами, перпендикулярними осі  $Cz$ , на тонкі диски масою  $dm$  і товщиною  $dz$ . Для такого диска момент інерції щодо осі  $Cz$  дорівнює  $\frac{R^2}{2} dm$ . Для всього циліндра:

$$J_z = \int_0^M \frac{R^2}{2} dm = \frac{R^2}{2} \int_0^M dm = M \frac{R^2}{2};$$

$$J_z = \frac{MR^2}{2}. \quad (28)$$

Обчислимо момент інерції циліндра щодо його поперечної осі симетрії  $Cy$ . Для цього поділемо циліндр поперечними перерізами, перпендикулярними його поздовжньої осі, на елементарні диски товщиною  $dz$ . Момент інерції елементарного диска масою  $dm = p r^2 r dz$  щодо осі  $Cy$ , за теоремою Штейнера:  $J_{Cy} = dm \frac{R^2}{4} + dm z^2$ .

Щоб одержати момент інерції всього циліндра щодо осі  $Cy$ , треба проінтегрувати отриманий вираз за  $z$  у межах від 0 до  $l/2$  і результат подвоїти, одержимо:

$$J_{Cy} = \int_0^M (R^2/4 + z^2) dm = 2p R^2 r \int_0^{l/2} (R^2/4 + z^2) dz = p R^2 l r (R^2/4 + l^2/12).$$

Але  $p R^2 l r = M$ , де  $M$  – маса циліндра. Отже,

$$J_{Cy} = M(R^2/4 + l^2/12).$$

Таким чином, момент інерції циліндра щодо його поперечної осі симетрії визначається як сума моментів інерції щодо цієї осі диска та стрижня, маси яких рівні масі циліндра. Диск виходить із циліндра симетричним стиском його від торців до серединної площини при збереженні радіуса, а стрижень – стиском циліндра в однорідний стрижень, розташований за віссю циліндра, при збереженні довжини.

## Куля

Нехай маса кулі  $M$ , радіус  $R$  (рис. 13). Поділемо кулю на концентричні сферичні оболонки радіусом  $r$  і товщиною  $dr$ . Маса такої сфери  $dm = r dV$ , де  $r = \frac{M}{V} = \frac{M}{4/3 \rho R^3}$ ;  $dV$  – об'єм сфери, що дорівнює добутку площі поверхні сфери радіусом  $r$  і товщини  $dr$ , тобто  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Таким чином, маса елементарної кульки  $dm = r dV = r 4\pi r^2 dr$ .

Для моменту інерції кулі щодо її центра  $O$  маємо:

$$J_0 = \int_0^R r^2 dm = r 4\pi \int_0^R r^4 dr = r 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} MR^2.$$

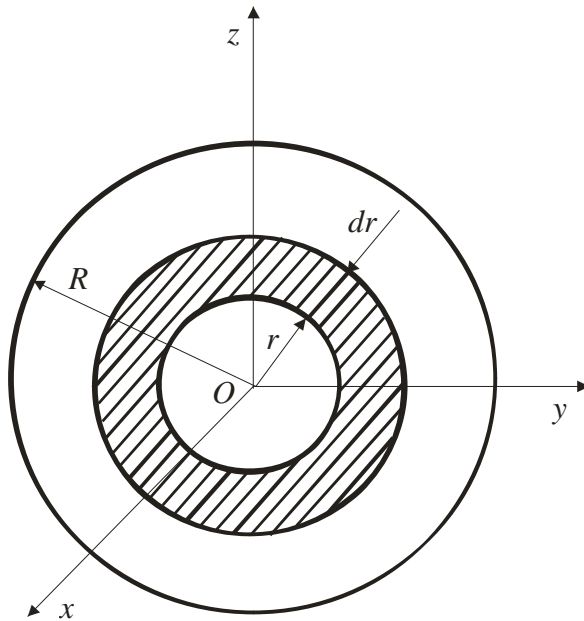


Рисунок 13

Тобто,

$$J_0 = \frac{3}{5} MR^2. \quad (29)$$

Для осей координат, що проходять через центр кулі, через симетрію

$$J_x = J_y = J_z,$$

але

$$2J_0 = J_x + J_y + J_z = 3J_x = 3J_y = 3J_z.$$

Отже

$$J_x = J_y = J_z = 2/3 I_0 = 2/5 MR^2. \quad (30)$$

### Однорідний коловий конус

Припустимо, що конус має висоту  $H$ , радіус основи  $R$  і щільність  $\rho$  (рис. 14). Тоді маса конуса:

$$M = \rho \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Для визначення моменту інерції конуса відносно його центральної подовжньої осі поділемо конус на множину елементарних пластинок товщиною  $dz$ , паралельних основи.

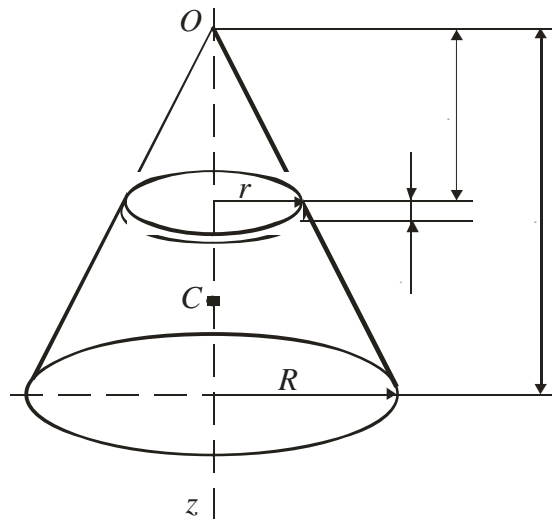


Рисунок 14

Маса пластинки радіуса  $r$  буде дорівнювати:

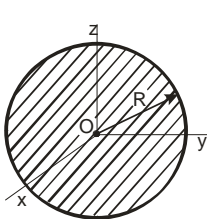
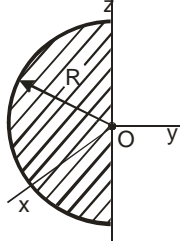
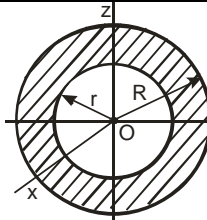
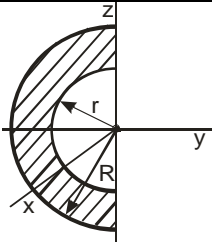
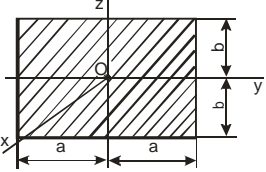
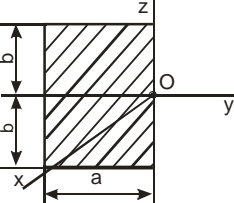
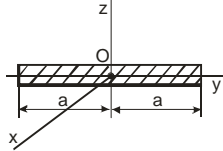
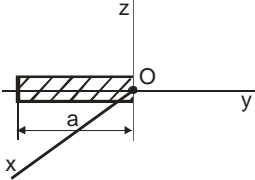
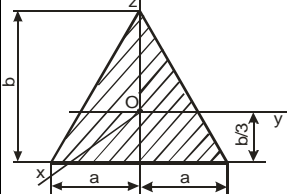
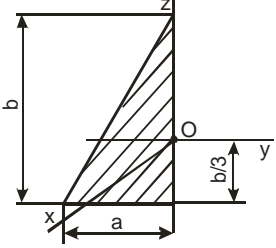
$$dm = \rho \pi r^2 dz.$$

Так як  $\frac{r}{R} = \frac{z}{H}$ , то  $r = z \frac{R}{H}$ . Тоді момент інерції

$$J_{cz} = 0,3mR^2. \quad (31)$$

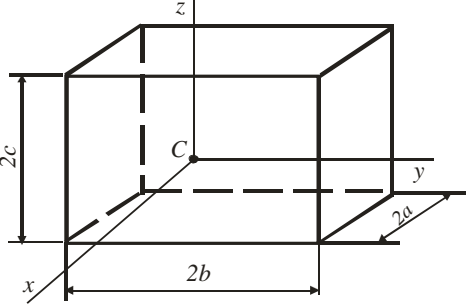
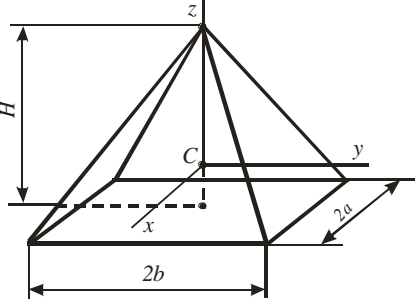
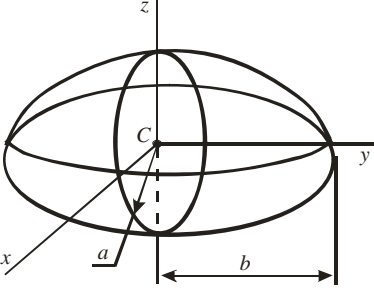
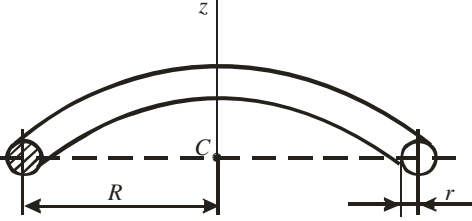
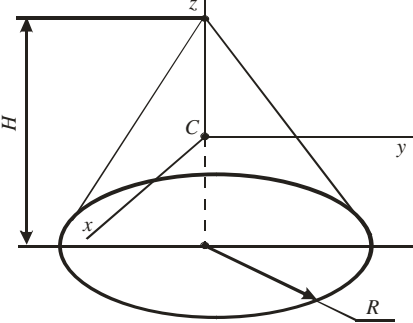
Момент інерції найбільш розповсюджених тіл зведено до таблиць 1 (плоскі фігури) і 2 (просторові тіла).

Таблиця 1

Моменти інерції деяких однорідних тіл				
Вигляд тіла	$I_x$	$I_y$	$I_z$	Вигляд тіла
	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$	
	$\frac{m(R^2 + r^2)}{2}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	
	$\frac{m(a^2 + b^2)}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{m(3a^2 + b^2)}{18}$	$\frac{mb^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$	



Таблиця 2

Вигляд тіла	Моменти інерції тіла
<p>Прямокутний паралелепіпед</p> 	$I_x = \frac{1}{3} M (b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{3} M (a^2 + c^2)$ $I_z = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2)$
<p>Прямокутна піраміда</p> 	$I_x = \frac{M}{20} \left( \frac{3}{4} H^2 + 4b^2 \right)$ $I_y = \frac{M}{20} \left( \frac{3}{4} H^2 + 4a^2 \right)$ $I_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2)$
<p>Еліпсоїд</p> 	$I_x = \frac{M}{5} (b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{M}{5} (a^2 + c^2)$ $I_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2)$
<p>Тор</p> 	$I_z = M \left( R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right)$
<p>Прямий круговий конус</p> 	$I_x = I_y = \frac{3}{20} M \left( \frac{1}{4} H^2 + R^2 \right)$ $I_z = \frac{3}{10} M R^2$

## 4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРА МАС МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ І ЇЇ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ

**Приклад 1.** Колінчастий вал (рис. 15) складається з трьох колін, які розташовані під кутом  $120^0$  один до одного. Маса колін  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  зосереджена в точках  $A, B$  і  $D$ . Масами інших частин тіла знехтувати.

Визначити положення центра мас вала.

Розв'язання

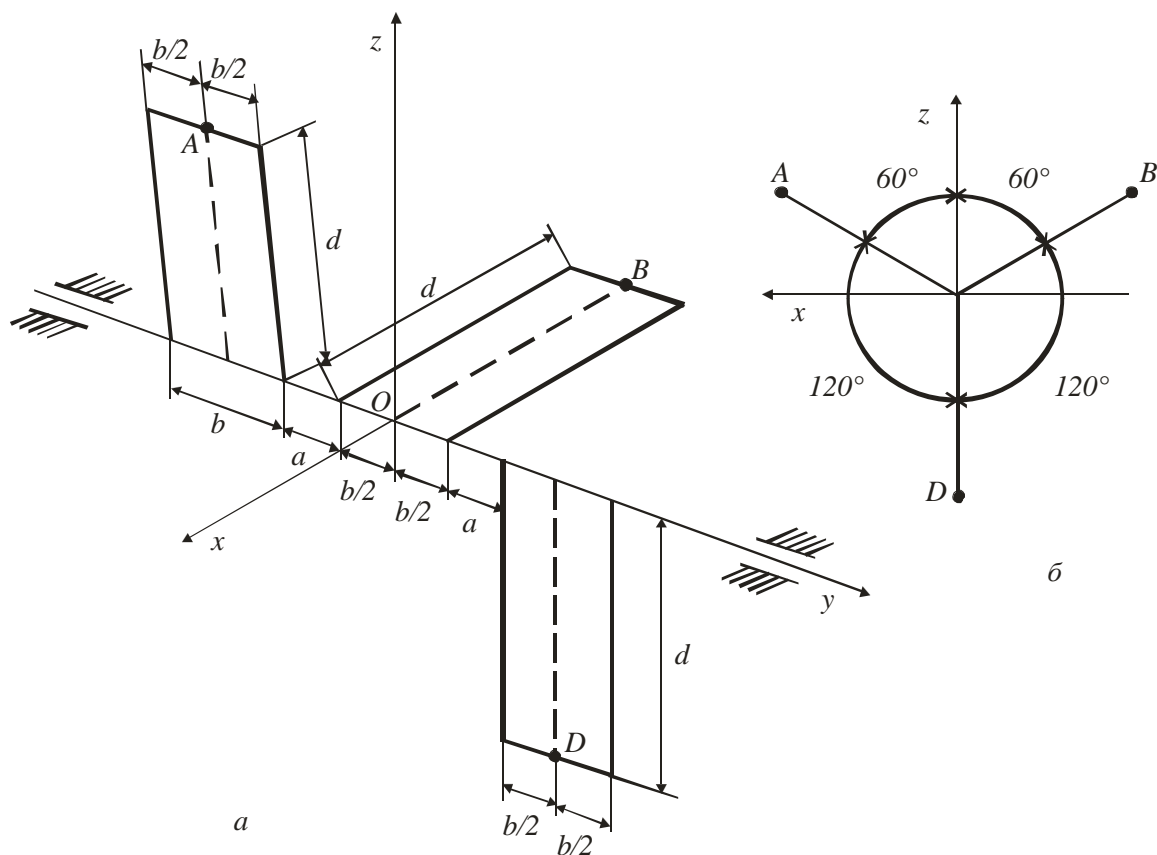


Рисунок 15

Для вирішення задачі застосуємо формули (7):

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{m_A d \sin 60^0 - m_B d \sin 60^0 + m_D \cdot 0}{m_A + m_B + m_D} = 0;$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{-m_A(a+b) + m_B(a+b) + m_D \cdot 0}{m_A + m_B + m_D} = 0;$$

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{m_A d \cos 60^\circ + m_B d \cos 60^\circ - m_D \cdot d}{m_A + m_B + m_D} = 0.$$

Отже  $x_C = y_C = z_C = 0$ . Центр мас вала збігається з початком системи координат.

**Приклад 2.** Знайти рівняння руху центра мас шарнірного паралелограма  $OABO_1$ , а також рівняння траєкторії його центра мас, якщо кривошип  $OA$  обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Ланки паралелограма – однорідні стрижні.  $OA = O_1B = 0,5AB = a$  (рис. 16).

Розв'язання

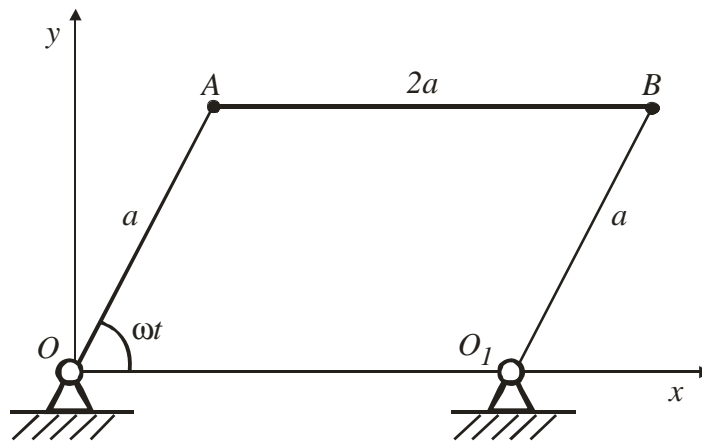


Рисунок 16

При розв'язанні задач, в яких потрібно визначити рівняння траєкторії центра мас механічної системи, рекомендується дотримуватися такого порядку.

- 1 Побудувати відповідну систему відліку.
- 2 Визначити координати центра мас механічної системи відносно системи відліку як функцію часу.
- 3 Виключити з одержаних кінематичних рівнянь руху центра мас механічної системи час  $t$ .

Побудуємо систему декартових координат (система відліку) з початком в точці  $O$  (рис. 16).

Застосовуючи формули (7), отримаємо:

$$x_C = \frac{m_{OA} \cdot 0,5a \cos wt + m_{AB}(a \cos wt + a) + m_{O_1B}(0,5a \cos wt + 2a)}{m_{OA} + m_{AB} + m_{O_1B}}.$$

Оскільки  $m_{OA} = m_{O_1B} = m$ , а  $m_{AB} = 2m$ , то

$$x_C = \frac{4ma + 3ma \cos wt}{4m} = a + \frac{3}{4}a \cos wt;$$

$$y_C = \frac{m_{OA} \cdot 0,5a \sin wt + m_{AB}a \sin wt + m_{O_1B}0,5a \sin wt}{m_{OA} + m_{AB} + m_{O_1B}} = \frac{3}{4}a \sin wt.$$

Виключаємо з отриманих рівнянь руху центра мас

$$x_C = a + \frac{3}{4}a \cos wt, \quad y_C = \frac{3}{4}a \sin wt \text{ час } t, \text{ тобто}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x_C - a)^2}{\left(\frac{3}{4}a\right)^2} = \cos^2 wt \\ \frac{y_C^2}{\left(\frac{3}{4}a\right)^2} = \sin^2 wt \end{array} \right.$$

$(x_C - a)^2 + y_C^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2$  – коло, що має радіус  $\frac{3}{4}a$ . Центр кола має координати  $(a, O)$ .

**Приклад 3.** Обчислити момент інерції сталевого вала, який має радіус 5 см і масу 100 кг відносно його твірної. Вал вважати однорідним суцільним циліндром (рис. 17).

Розв'язання

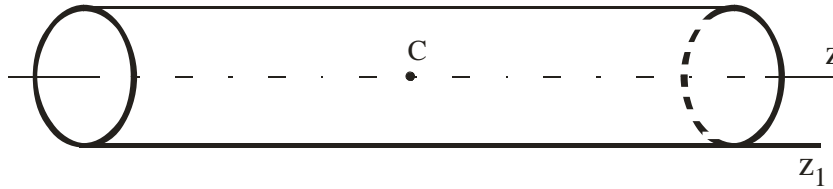


Рисунок 17

Момент інерції вала відносно осі, що проходить через його центр мас паралельно твірній, визначається за формулою (28) для моменту інерції суцільного циліндра

$$J_{cz} = \frac{mR^2}{2}.$$

Момент інерції вала відносно його осі, що збігається з твірною  $J_{z_1}$ , обчислимо за формулою (21)

$$J_{z_1} = J_z + md^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = 1,5mR^2.$$

Оскільки  $R = 5\text{ см}$ , а  $m = 100\text{ кг}$ , то матимемо:

$$J_{z_1} = 1,5mR^2 = 1,5 \cdot 100 \cdot 5^2 = 3750\text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

**Приклад 4.** Обчислити момент інерції тонкого однорідного полудиска, який має масу  $m$  і радіус  $R$  відносно осі, що проходить уздовж його діаметра (рис. 18).

Розв'язання

На підставі формули (15) маємо

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm.$$

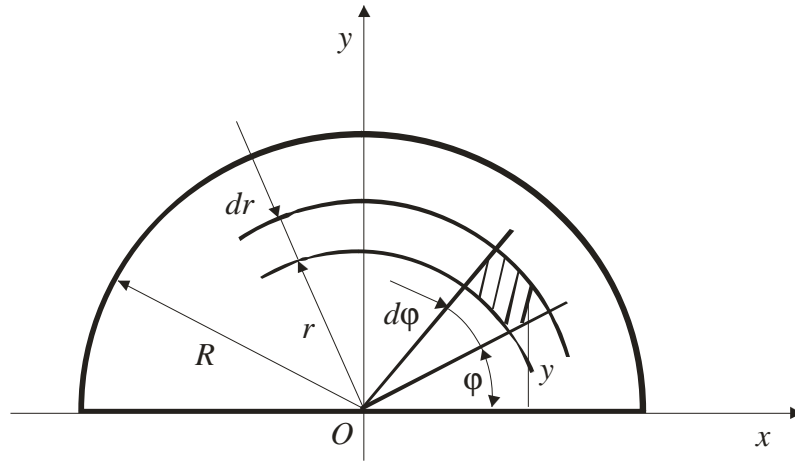


Рисунок 18

Оскільки  $dm = \frac{2m}{\rho R^2} r dr d\varphi$ ,  $z = 0$ ,  $y = r \sin \varphi$ , то

$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{2m}{\rho R^2} \int_{(M)} r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi = \frac{2m}{\rho R^2} \left( \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right) = \\
 &= \frac{2m}{\rho R^2} \left[ \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \left( 0,5 \int_0^{\pi} d\varphi - 0,5 \int_0^{\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right) \right] = \frac{2m}{\rho R^2} \left[ \frac{R^4}{4} \left( 0,5 \varphi \Big|_0^{\pi} - 0,5 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi} \right) \right] = \\
 &= \frac{2m}{\rho R^2} \left[ \frac{R^4}{4} (0,5\pi - 0) \right] = \frac{mR^2}{4}.
 \end{aligned}$$

**Приклад 5.** Тонкий однорідний стрижень АВ, довжина якого дорівнює  $2l$ , а маса –  $m$ , закріплений центром  $O$  до вертикальної осі, утворюючи з нею кут  $\alpha$  (рис. 19). Обчислити моменти інерції стрижня  $J_x, J_y$  і відцентровий момент інерції  $J_{xy}$ . Осі координат зображено на рисунку 19.

Розв'язання

На підставі формули (15) маємо:

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm; \quad J_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm.$$

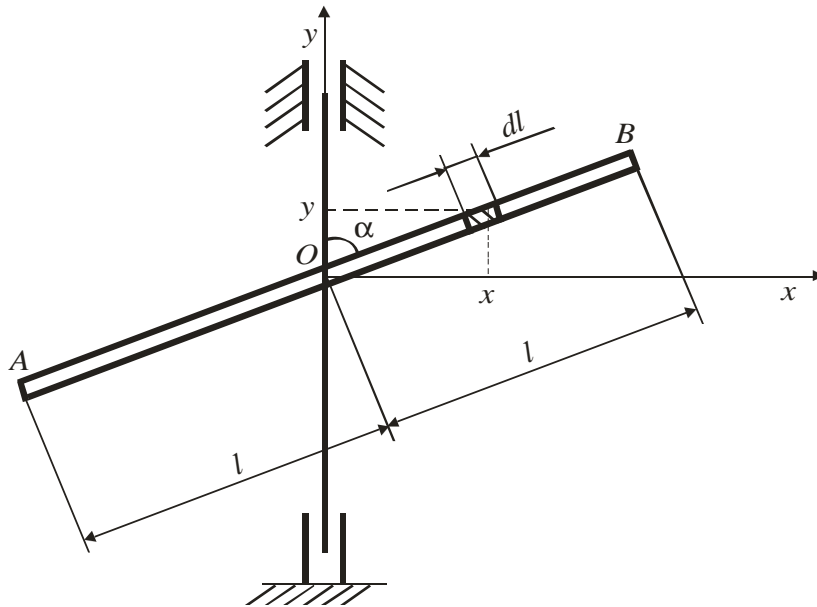


Рисунок 19

Оскільки  $dm = \frac{m}{2l} dl = \frac{m dy}{2l \cos a}$ ,  $z = 0$ ; то

$$J_x = \frac{m}{2l \cos a} \int_{(M)} y^2 dy = \frac{m}{2l \cos a} \int_{-l \cos a}^{+l \cos a} y^2 dy = \frac{m y^3}{6l \cos a} \Big|_{-l \cos a}^{+l \cos a} = \frac{m l^2}{3} \cos^2 a.$$

Оскільки  $dm = \frac{m}{2l} dl = \frac{m dx}{2l \sin a}$ ,  $z = 0$ , то

$$J_y = \frac{m}{2l \sin a} \int_{(M)} x^2 dx = \frac{m}{2l \sin a} \int_{-l \sin a}^{+l \sin a} x^2 dx = \frac{m}{6l \sin a} \Big|_{-l \sin a}^{+l \sin a} = \frac{m l^2}{3} \sin^2 a.$$

На підставі формул (18) маємо

$$J_{xy} = \int_{(M)} xy dm.$$

Оскільки  $dm = \frac{m dx}{2l \sin a}$ ,  $y = \frac{x \cos a}{\sin a}$ , то

$$J_{xy} = \frac{m \cos a}{2l \sin^2 a} \int_{(M)} x^2 dx = \frac{m \cos a \cdot x^3}{6l \sin^2 a} \Big|_{l \sin a}^{l \sin a} = \frac{m l^2}{6} \sin 2a.$$

**Приклад 6.** На рисунку 20 зображено однорідний круглий диск, маса якого дорівнює  $m$ . Диск ексцентрично насаджений на вісь  $z$ , перпендикулярну до його площини. Радіус диска дорівнює  $R$ , а ексцентриситет  $OC = a$ . Знайти моменти інерції диска відносно координатних осей. Осі координат наведено на рисунку 20.

Розв'язання

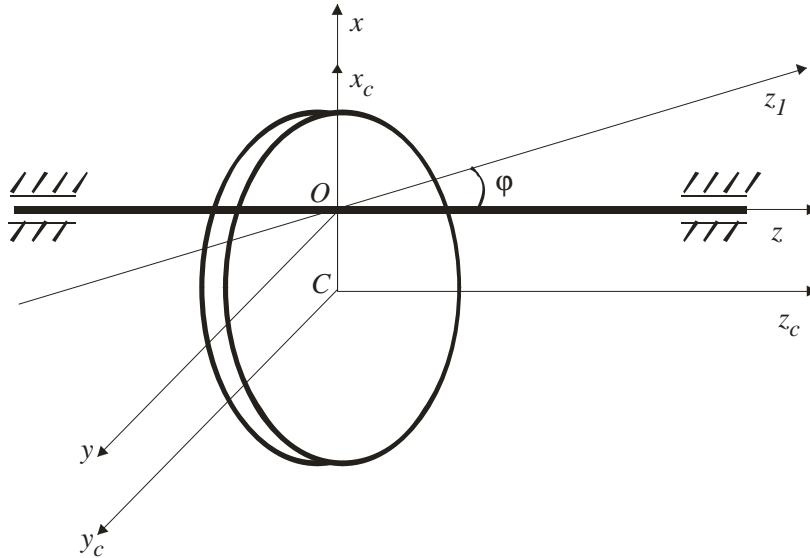


Рисунок 20

На підставі формул таблиці 1 моменти інерції диска відносно головних центральних осей такі:

$$J_{x_c} = J_{y_c} = \frac{mR^2}{4}; J_{z_c} = \frac{mR^2}{2}.$$

Момент інерції диска відносно осей  $Oxyz$ , що є паралельними до осей  $Cx_cy_cz_c$ , знайдемо за формулою (21)

$$J_x = J_{x_c} + Md^2.$$

Оскільки вісь  $x$  збігається з віссю  $x_c$ , то  $d = 0$ . Отже,

$$J_x = J_{x_c} = \frac{mR^2}{4};$$



$$J_y = J_{y_c} + ma^2 = \frac{mR^2}{4} + ma^2 = m \left( \frac{R^2}{4} + a^2 \right)$$

$$J_z = J_{z_c} + ma^2 = \frac{mR^2}{2} + ma^2 = m \left( \frac{R^2}{2} + a^2 \right)$$

Вісь  $z$  перпендикулярна до площини матеріальної симетрії диска, і тому вона є головною віссю інерції в точці  $O$ . Вісь  $x$  також ж є головною віссю інерції, оскільки вона є віссю симетрії диска. Отже, відцентрові моменти інерції диска відносно осей  $Oxyz$  дорівнюють нулю:

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

## 5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Нехай надані зовнішні сили, що діють на систему, яка складається з  $N$  точок (рис. 21).

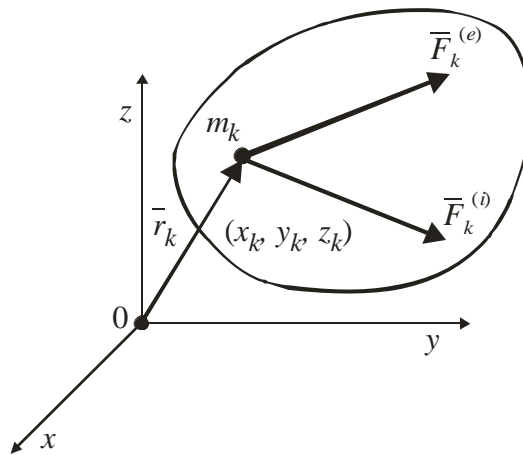


Рисунок 21

Якщо до кожної точки системи прикласти рівнодіючу силу зовнішніх сил  $\bar{F}_k^{(e)}$  і рівнодійну внутрішніх сил  $\bar{F}_k^{(i)}$ , то для будь-якої  $k$ -ї точки системи можна скласти диференціальне рівняння руху, наприклад у векторній формі, тобто

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)}; \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (32)$$

Систему  $N$  диференціальних рівнянь (32) називають диференціальними рівняннями руху механічної системи у векторній формі. Якщо спроеціювати векторні диференціальні рівняння (32) на прямокутні декартові осі координат, то одержимо систему  $3N$  диференціальних рівнянь, що описують рух точок механічної системи.

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{kx}^{(e)} + F_{kx}^{(i)}; \\ m_k \ddot{y}_k &= F_{ky}^{(e)} + F_{ky}^{(i)}; \\ m_k \ddot{z}_k &= F_{kz}^{(e)} + F_{kz}^{(i)}, \end{aligned} \quad (33)$$

де  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Рівняння (33) називають диференціальними рівняннями руху вільної механічної системи в проекціях на осі координат нерухомої декартової системи координат.

Для невідільної механічної системи позначимо рівнодійні активних сил і реакцій в'язей (серед зовнішніх і внутрішніх сил), що діють на  $k$ -ту точку системи, через  $\bar{F}_k, \bar{R}_k$ . Тоді для кожної точки системи отримаємо:

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k + \bar{R}_k, \quad (34)$$

де  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Рівняння (34) називають диференціальним рівнянням руху невідільної механічної системи у векторній формі. Якщо ж (34) спроеціювати на декартові осі координат, то будемо мати:

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{kx} + R_{kx}; \\ m_k \ddot{y}_k &= F_{ky} + R_{ky}; \\ m_k \ddot{z}_k &= F_{kz} + R_{kz}. \end{aligned} \quad (35)$$

Система  $3N$  рівнянь (35) називається диференціальними рівняннями руху невідільної механічної системи в координатній формі.

Для знаходження механічної системи за заданими силами і початковими умовами для кожної точки системи потрібно проінтегрувати систему  $3N$  диференціальних рівнянь. Цю задачу не вдається точно вирішити в загальному випадку навіть для однієї точки. Вона дуже важка у випадку двох матеріальних точок, які рухаються тільки під дією сил взаємодії за законом всесвітнього тяжіння (задача про два тіла), і зовсім нерозв'язна у випадку трьох взаємодіючих точок (задача про три тіла).

Перші інтеграли системи диференціальних рівнянь зручно одержувати з так званих загальних теорем динаміки, коли виконуються деякі додаткові умови для діючих сил.

Загальні теореми динаміки є наслідками системи диференціальних рівнянь руху точки або, відповідно, системи точок. Кожна із загальних теорем динаміки має певний фізичний зміст, який відображає певну частку явищ природи і ґрунтується на векторній або скалярній величині, що називається *мірою механічного руху*. Однією з мір руху точки або системи являється кількість руху.

## 6 ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ

### 6.1 Кількість руху точки та системи

Матеріальну точку можна розглядати як окремий випадок механічної системи, що складається з однієї точки, на яку діють сили, прикладені до системи у вигляді рівнодійної цих сил. Тому з початку всі визначення і загальні теореми будуть розглядатися для точки.

Кількістю руху матеріальної точки  $\bar{q}$  називають векторну величину, яка дорівнює добутку маси точки  $m$  на її швидкість  $\bar{V}$ , тобто

$$\bar{q} = m\bar{V}. \quad (36)$$

Кількість руху точки у фізиці часто називають імпульсом матеріальної точки.

Проекції кількості руху точки на прямокутні декартові осі координат:

$$q_x = mV_x = m\dot{x}; q_y = mV_y = m\dot{y}; q_z = mV_z = m\dot{z} \quad (37)$$

Одиниці виміру кількості руху кілограм-метр за секунду (кг·м/с) або Ньютон-секунда (Н·с).

Кількістю руху системи  $\bar{Q}$  називають векторну суму кількостей рухів окремих точок системи, тобто

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{V}_k. \quad (38)$$

Проекції кількості руху системи на прямокутні декартові осі координат:

$$Q_x = \sum m_k V_{kx}; Q_y = \sum m_k V_{ky}; Q_z = \sum m_k V_{kz}. \quad (39)$$

Вектор кількості руху системи  $\bar{Q}$  на відміну від вектора кількості руху точки  $\bar{q}$  не має точки прикладення. Вектор кількості руху точки вважається прикладеним у самій матеріальній точки, що рухається, а вектор  $\bar{Q}$  є вільним вектором.

## 6.2 Обчислення кількості руху системи

Кількість руху системи можна виразити через масу системи  $M$  і швидкість центра мас  $\bar{V}_c$ :

Нехай механічна система складається з  $N$  кількості матеріальних точок, положення яких у просторі задають за допомогою радіусів-векторів  $\bar{r}_k$  (рис.22) маса кожної точки  $m_k$ , а швидкість  $V_k$ .

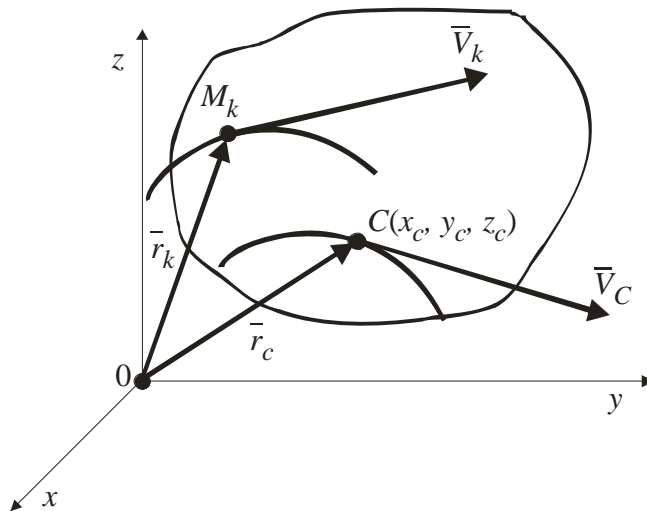


Рисунок 22

Тоді, згідно з формулою (39), маємо:

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{V}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k \bar{r}_k. \quad (40)$$

За формулою (6) для радіуса-вектора центра мас:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M},$$

звідки

$$\sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_c. \quad (41)$$

Підставляючи значення статичного моменту маси (41) у рівняння (40) маємо:

$$\bar{Q} = \frac{d}{dt} (M \bar{r}_c) = M \frac{d\bar{r}_c}{dt} = M \bar{V}_c, \quad (42)$$

тому що маса системи  $M$  не змінюється при русі системи.

У проекціях на прямокутні декартові осі відповідно отримаємо:

$$\begin{aligned}
Q_x &= MV_{C_x} = M\dot{x}_c; \\
Q_y &= MV_{C_y} = M\dot{y}_c; \\
Q_z &= MV_{C_z} = M\dot{z}_c.
\end{aligned}
\tag{43}$$

де  $x_c, y_c, z_c$  – координати центра мас системи (рис.22),

$\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c$  – відповідні проекції швидкості центра мас на координати осі.

### 6.3 Елементарний і повний імпульси сили

Дію сили  $\bar{F}$  на матеріальну точку протягом часу  $dt$  можна охарактеризувати так званим імпульсом сили:

$$d\bar{S} = \bar{F}dt. \tag{44}$$

Повний імпульс сили  $\bar{F}$  за час  $t$ , або імпульс сили  $\bar{S}$ , визначають за формулою

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F}dt. \tag{45}$$

Проекції імпульсу сили на прямокутні осі координат виражаються формулами:

$$S_x = \int_0^t F_x dt; S_y = \int_0^t F_y dt; S_z = \int_0^t F_z dt. \tag{46}$$

Одиниця імпульсу сили: ньютон-секунда (Н·с).

## 6.4 Теорема про зміну кількості руху точки

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки під дією сили  $\bar{F}$  можна подати в наступній векторній формі:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}.$$

Так як маса точки  $m$  прийнята сталою, її можна внести під знак похідної. Тоді

$$\frac{d}{dt}(m\bar{V}) = \bar{F}. \quad (47)$$

Формула (47) виражає теорему про зміну кількості руху точки в диференціальній формі: *перша похідна за часом від кількості руху точки дорівнює діючій на точку силі.*

У проєкціях на координатні осі рівняння (47) можна подати у вигляді:

$$\frac{d}{dt}(mV_x) = F_x; \quad \frac{d}{dt}(mV_y) = F_y; \quad \frac{d}{dt}(mV_z) = F_z. \quad (48)$$

Якщо обидві частини рівняння (47) домножити на  $dt$ , то одержимо іншу форму цієї теореми – теорема імпульсів у диференціальній формі:

$$d(m\bar{V}) = \bar{F}dt. \quad (49)$$

*Диференціал від кількості руху точки дорівнює елементарному імпульсу сили, що діє на точку.*

Проєціюючи обидві частини рівняння (49) на координатні осі, одержуємо:

$$d(mV_x) = F_x dt; \quad d(mV_y) = F_y dt; \quad d(mV_z) = F_z dt. \quad (50)$$

Інтегруючи обидві частини рівнянь (49) у межах від нуля до  $t$  (рис.23) маємо:

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \bar{S}, \quad (51)$$

де  $\bar{V}$  – швидкість точки в момент  $t$ ;

$\bar{V}_0$  – швидкість при  $t = 0$ ;

$\bar{S}$  – імпульс сили за час  $t$ .

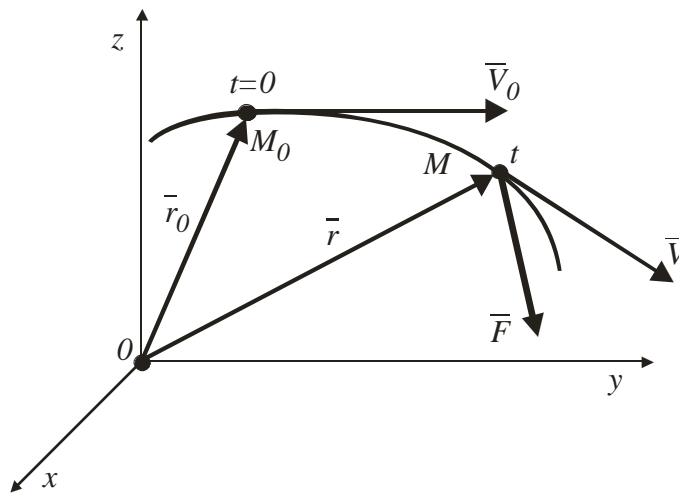


Рисунок 23

Виразення у формі (51) називають теоремою про зміну кількості руху точки у кінцевій (або інтегральній) формі: *зміна кількості руху точки за будь-який проміжок часу. Проміжок часу дорівнює імпульсу сили, що діє на точку, за той же проміжок часу.*

У проєкціях на координатні осі цю теорему можна подати у наступному вигляді:

$$mV_x - mV_{0x} = S_x; \quad mV_y - mV_{0y}; \quad mV_z - mV_{0z} = S_z. \quad (52)$$

Теорема про зміну кількості руху точки в формулах (49)...(52) не дуже відрізняється від диференціальних рівнянь руху точки. Ця теорема потрібна для одержання аналогічної теореми про зміну кількості руху механічної системи.



## 6.5 Теорема про зміну кількості руху механічної системи

Нехай механічна система складається з  $N$  матеріальних точок. Тоді для кожної точки системи можна застосувати теорему про зміну кількості руху, наприклад, у формі рівняння (47) (рис.21), враховуючі, що на кожну точку системи діє внутрішня і зовнішня сила:

$$\frac{d}{dt}(m_k \bar{V}_k) = \bar{F}_k^{(i)} + \bar{F}_k^{(e)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Додаючи по всіх точках системи праві й ліві частини цих співвідношень і з огляду на те, що сума похідних дорівнює похідній від суми, одержуємо

$$\frac{d}{dt} \sum m_k \bar{V}_k = \sum \bar{F}_k^{(i)} + \sum \bar{F}_k^{(e)}. \quad (53)$$

Із властивостей внутрішніх сил системи (2) відомо, що  $\sum \bar{F}_k^{(i)} = \bar{R}^{(i)} = 0$ , а із визначення (38) кількості руху відомо:

$$\sum m_k \bar{V}_k = \bar{Q}.$$

Тоді співвідношення (52) можна подати у вигляді

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}. \quad (54)$$

Вираз (54) є теоремою про зміну кількості руху системи в диференціальній формі:

*Похідна за часом від кількості руху системи дорівнює векторній сумі всіх зовнішніх сил, що діють на систему.*

У проекціях на прямокутні декартові осі координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^{(e)}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^{(e)}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^{(e)}. \quad (55)$$

Тобто похідна за часом від проекції кількості руху системи на яку-небудь координатну вісь дорівнює сумі проекцій всіх зовнішніх сил системи на ту ж вісь.

Домножаючи обидві частини рівняння (54) на  $dt$ , одержуємо теорему імпульсів для системи в диференціальній формі:

$$d\bar{Q} = \sum \bar{F}_k^{(e)} dt, \quad (56)$$

тобто диференціал кількості системи дорівнює векторній сумі елементарних імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють на систему.

У проекціях на координатні осі ця теорема набуде вигляду:

$$dQ_x = \sum F_{kx}^{(e)} dt; \quad dQ_y = \sum F_{ky}^{(e)} dt; \quad dQ_z = \sum F_{kz}^{(e)} dt. \quad (57)$$

Беручи інтегралі від обох частин (56) за часом у межах від 0 до  $t$ , виводимо теорему про зміну кількості руху для системи в кінцевій або інтегральній формі:

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^{(e)}, \quad (58)$$

де  $\bar{Q}_0$  – кількість руху системи в момент  $t = 0$ ;

$\bar{Q}$  – кількість руху в момент  $t$ ;

$\bar{S}_k^{(e)}$  – імпульс зовнішньої сили, що діє на кожну точку за час  $t$ :

$$\bar{S}_k^{(e)} = \int_0^t \bar{F}_k^{(e)} dt.$$

Теорема (58) формулюється так: *зміна кількості руху системи за будь-який час дорівнює векторній сумі всіх імпульсів зовнішніх сил, що діють на систему за той же час.*

У проекціях на прямокутні осі, відповідно до рівняння (58), маємо:

$$\begin{aligned}
Q_x - Q_{ox} &= \sum S_{kx}^{(e)}; \\
Q_y - Q_{oy} &= \sum S_{ky}^{(e)}; \\
Q_z - Q_{oz} &= \sum S_{kz}^{(e)},
\end{aligned}
\tag{59}$$

$$\text{де } \sum S_{kx}^{(e)} = \int_0^t F_{kx}^{(e)} dt; \quad \sum S_{ky}^{(e)} = \int_0^t F_{ky}^{(e)} dt; \quad \sum S_{kz}^{(e)} = \int_0^t F_{kz}^{(e)} dt.$$

Внутрішні сили системи не входять явно до теореми про кількості руху системи в кожній із форм, отже, не впливають безпосередньо на зміну кількості руху системи. Вони можуть впливати на зміну кількості руху тільки неявно, через зовнішні сили.

## 6.6 Закони збереження кількості руху

Закони збереження кількості руху системи можна розглядати як окремі випадки теореми про зміну кількості руху для системи залежно від особливостей системи зовнішніх сил, прикладених до механічної системи, а для однієї точки – від особливостей сил, що діють на точку. Внутрішні сили при цьому можуть бути будь-якими, тому що вони не впливають на зміну кількості руху системи.

Можливі випадки:

1 Якщо векторна сума всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, дорівнює нулю, тобто  $\sum \bar{F}_k^{(e)} = 0$ , то з теореми про зміну кількості руху системи витікає, що  $\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0$  або

$$\bar{Q} = \overline{const}.
\tag{60}$$

Цей закон (точніше, окремий випадок теореми) формулюється так: *якщо головний вектор зовнішніх сил системи дорівнює нулю, то кількість руху системи стала за величиною і напрямком.*

У проекціях на координатні осі за цим законом:

$$Q_x = C_1; \quad Q_y = C_2; \quad Q_z = C_3, \quad (61)$$

де  $C_1, C_2, C_3$  – сталі величини.

До співвідношення (60) і (61) входять похідні від координат точок за часом не вище першого порядку й не входять другі похідні від цих координат. Отже, ці співвідношення є першими інтегралами диференціальних рівнянь системи (33).

2 Якщо дорівнює нулю проекція головного вектора зовнішніх сил на будь-яку координатну вісь, наприклад  $Ox$ , тобто  $\sum F_{kx}^{(e)} = 0$ , то з (2.54) отримаємо:

$$Q_x = const. \quad (62)$$

Вираз (62) є законом збереження проекції кількості руху системи: якщо проекція головного вектора всіх зовнішніх сил системи на будь-яку вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху на ту ж вісь є величиною сталою.

## 6.7 Приклади розв'язання задач

**Приклад 7.** Вантаж масою  $m$ , який лежить на горизонтальній площині, надали (поштовхом) початкову швидкість  $\bar{V}_0$ . Подальшому руху вантажу заважає стала сила  $\bar{F}$ . Визначити через який час вантаж зупиниться.

### Розв'язання

За даними з умови задачі видно, що можна для її розв'язання скористатися теоремою про зміну кількості руху точка в кінцевій формі (51). Зобразимо вантаж, який надалі будемо вважати матеріальною точкою, в довільному положенні (рис.24). На точку діють: сила ваги  $m\bar{g}$ , нормальна реакція площини  $\bar{N}$  і сила опору  $\bar{F}$ .

Спрямуємо вісь  $x$  у бік руху і складемо перше з рівнянь системи (52):

$$mV_x - mV_{0x} = S_x.$$

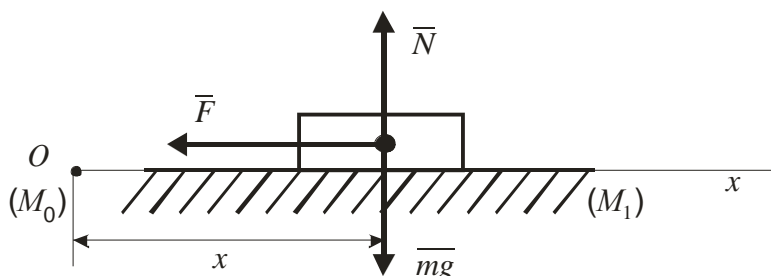


Рисунок 24

У момент зупинки  $V = 0$ . Імпульс сили  $\bar{F}$  дає проекцію:  $S_x = F_x \cdot t$ , так як  $\bar{F} = const$ , то  $S_x = -Ft$ , де  $t$  – час гальмування. Підставляючи дані в рівняння і вирішуючи його відносно  $t$ , отримаємо:

$$t = \frac{mV_0}{F}.$$

Таким чином, час гальмування зростає прямо пропорційно початковій швидкості.

**Приклад 8.** З гармати, що стоїть на башті, висота якої  $H$  м, вилітає снаряд зі швидкістю  $V_0$  м/сек. під кутом  $\alpha$  до горизонту. Через який час  $t$  снаряд упаде на землю (опором повітря знехтувати) (рис.2.25)? Ця задача розглядалася раніше у більш складній формі (див. другу основну задачу динаміки).

#### Розв'язання

Оскільки опором повітря можна знехтувати, то вважаємо, що снаряд рухається як вільна матеріальна точка під дією сили ваги  $\bar{P}$ . Щоб визначити час падіння снаряда, застосуємо теорему про зміну кількості руху точки:

$$m(\bar{V} - \bar{V}_0) = \int_{t_0}^t \bar{P} dt = \bar{S}.$$

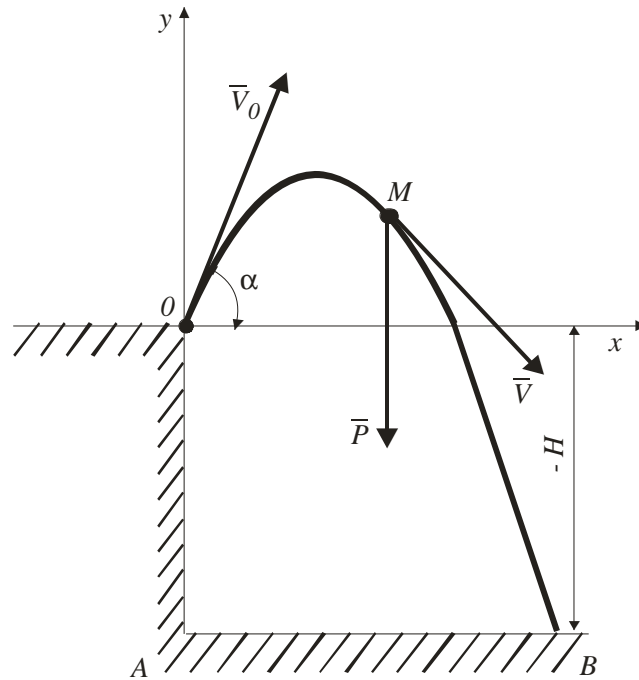


Рисунок 25

Через те, що рух відбувається у площині  $xOy$ , то векторні рівняння треба спроеціювати на дві координатні осі, зображені на рисунку 25:

$$m(V_x - V_{0x}) = S_x = \int_0^t P_x dt = 0,$$

бо  $P_x = 0$ ;

$$m(V_y - V_{0y}) = S_y = \int_0^t P_y dt = -P_y t = -mgt.$$

Проекції початкової швидкості на координатні осі відповідно дорівнюють

$$V_{0x} = V_0 \cos a; V_{0y} = V_0 \sin a.$$

Крім того,

$$V_x = \& V_y = \&$$

Беручи до уваги останні рівняння проекцій швидкості, отримаємо диференціальні рівняння руху снаряда:

$$\begin{aligned} \dot{x} - V_0 \cos a &= 0, \\ \dot{y} - V_0 \sin a &= -gt; \\ \dot{x} &= V_0 \cos a, \\ \dot{y} &= -gt + V_0 \sin a. \end{aligned}$$

За умовою задачі знайдемо початкові умови руху, які при даному виборі координат будуть  $x|_{t=0} = 0; y|_{t=0} = 0$ .

Отже, механічна задача зведена до математичної задачі Коші, яка полягає у знаходженні функцій  $x = x(t); y = y(t)$ , що задовольняють диференціальні останні рівняння при заданих початкових умовах. Інтегруючи диференціальні рівняння матимемо:

$$\begin{aligned} x &= V_0 \cos a \cdot t + C_1, \\ y &= -\frac{gt^2}{2} + V_0 \sin a \cdot t + C_2. \end{aligned}$$

Беручи до уваги початкові умови, дістанемо

$$C_1 = 0, C_2 = 0.$$

Отже шукані рівняння руху набудуть вигляду:

$$x = V_0 \cos a \cdot t; \quad y = -\frac{gt^2}{2} + V_0 \sin a \cdot t.$$

Користуючись умовами руху у момент приземлення, тобто  $y|_{t=T} = -H$ , на основі другого з рівняння для  $y$  матимемо

$$-H = -\frac{gT^2}{2} + V \sin a \cdot T,$$

або

$$gT^2 - 2V_0 \sin a T - 2H = 0.$$

Розв'язуючи це квадратне рівняння і беручи (за умовою задачі) додатний корінь, дістанемо шуканий час польоту снаряда

$$T = \frac{1}{g} \left( V_0 \sin a + \sqrt{V_0^2 \sin^2 a + 2gH} \right) c$$

Зазначимо, що завдяки застосуванню теореми про зміну кількості руху, ми інтегрували диференціальні рівняння першого, а не другого порядку.

**Приклад 9.** Точка здійснює рівномірний рух колом із швидкістю  $V = 20$  м/сек., роблячи повний оберт за час  $T = 4$  сек. Знайти імпульс сил  $\bar{S}$ , що діють на точку за час одного півперіоду, якщо маса точки  $m = 5$  кг. Визначити середнє значення сили  $F$  (рис.26).

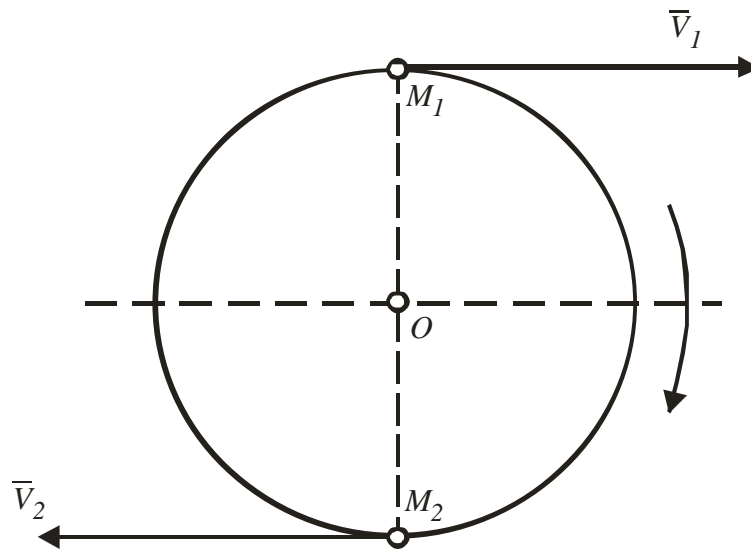


Рисунок 26

#### Розв'язання

Нехай у початковий момент часу точка, що рухається, займає положення  $M_1$ , тоді за час одного півперіоду вона займе положення  $M_2$ . Імпульс сил  $\bar{S}$  дорівнює зміні кількості руху точки за час півперіоду  $\bar{S} = mV_2 - mV_1$ .

Оскільки

$$\bar{V}_1 = -\bar{V}_2,$$



то з першого рівняння можна записати так:

$$\bar{S} = -m\bar{V}_1 + m(-\bar{V}_1) = -2m\bar{V}_1 = 2m\bar{V}_2.$$

Напрямок імпульсу сили збігається з напрямком вектора швидкості. Знайдемо модуль імпульсу сили:

$$S = 2mV_2 = 200 \text{ Н}\cdot\text{с}.$$

Застосуємо теорему про середнє значення величини для визначення інтегралу. Обчислимо середнє значення діючих сил на основі отриманого імпульсу:

$$\bar{S} = \int_{t=0}^{t=\frac{T}{2}} \bar{F} dt = \frac{1}{2} \bar{F}_{cp} T,$$

звідки 
$$|F_{cp}| = \frac{2|\bar{S}|}{T} = 100 \text{ Н}.$$

З цих рівностей випливає, що напрямок  $\bar{F}_{cp}$  збігається з напрямком кінцевої швидкості  $\bar{V}_2$ . Модуль середнього значення сили дорівнює

$$F_{cp} = \frac{2}{T} |\bar{S}| = 100 \text{ Н}.$$

**Приклад 10.** Гімнаст масою  $m$ , відштовхнувся від трампліну, отримав швидкість  $\bar{V}_0$ , спрямовану під кутом  $\alpha$  до горизонту, і рухався в повітрі, тримаючи в руках вантаж вагою  $\bar{P}$ . У найвищій точці траєкторії він відкидає вантаж у бік, протилежний своєму рухові (тобто назад від себе) з горизонтальною відносною швидкістю  $\bar{U}$ .

Визначити:

- 1- швидкість гімнаста після відкидання вантажу;
- 2- подовження довжини свого стрибка за допомогою вантажу;
- 3- місце падіння вантажу.

## Розв'язання

Розглянемо рух системи гімнаст – вантаж як систему двох матеріальних точок. Якщо опір повітря не враховується, то зовнішніми силами, що діють на систему під час стрибка, будуть  $m\bar{g}$  і  $\bar{P}$ . Як відомо з параграфу 1.6, рух гімнаста разом з вантажем під дією сил ваги повинен відбуватися за параболою (рис 27).

Рівняння такого руху, згідно з формулами (18, частина1), мають вигляд:

$$x = V_0 t \cos a;$$

$$y = V_0 t \sin a - \frac{gt^2}{2}.$$

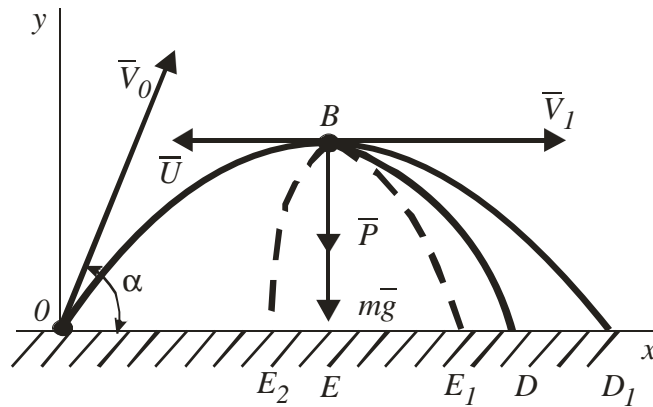


Рисунок 27

При цьому горизонтальний рух відбудеться зі швидкістю  $V_0 \cos a$ , а час підйому кривою  $OB$  і час падіння вдовж кривої  $BD$  однакові і дорівнюють:

$$t = \frac{V_0 \sin a}{g}.$$

У прикладі 10 рух гімнаста разом з вантажем має місце лише на ділянці  $OB$ . Так як в точці  $B$  вантаж отримує горизонтальну відносну швидкість  $\bar{U}$ , тобто взаємодія між гімнастом і вантажем відбувається в горизонтальному напрямку, то на ділянці  $BD_1$  закони, доведені в параграфі 1.6, зберігаються лише для вертикального руху.

Тому час падіння як гімнаста, так і вантажу зберігає значення:

$$t = \frac{V_0 \sin a}{g}.$$

Так як проекція зовнішніх вертикальних сил на вісь  $x$  дорівнює нулю:  $\sum F_{kx}^{(e)} = 0$ , то згідно з другим законом збереження кількості руху (62), отримуємо, що  $Q_x = const$  під час всього руху.

Тоді в будь-який момент часу ця проекція кількості руху набуде значення

$$Q_x = (mg + P)V_0 \cos a.$$

У точці  $B$  гімнаст, який відкинув вантаж зі швидкістю  $\bar{U}$ , отримав швидкість  $\bar{V}_1$ . Абсолютна швидкість вантажу в цей момент горизонтальна і дорівнює:

$$V_2 = V_0 \cos a - U.$$

Проекції кількості руху системи на вісь  $x$  в точці  $B$  виразимо через швидкість гімнаста і вантажу:

$$Q_{1x} = \sum m_k V_{kx} = mV_1 = \frac{P}{g}(V_0 \cos a - U).$$

Згідно з (62):  $Q_{0x} = Q_{1x} = Q_x = const$ ,

тобто

$$mV_1 + \frac{P}{g}(V_0 \cos a - U) = (mg + P)V_0 \cos a,$$

звідки

$$mV_1 = mV_0 \cos a + \frac{P}{g}U,$$

або

$$V_1 = V_0 \cos a + \frac{P}{mg}U.$$

Остання формула показує, що відкидання назад вантажу зі швидкістю  $\bar{U}$  збільшує горизонтальну швидкість гімнаста на величину  $\frac{P}{mg}U$ .

Для знаходження подовження довжини стрибка застосуємо (62) до руху гімнаста без вантажу на ділянці  $BD_1$ , встановивши, що модуль його горизонтальної швидкості  $\bar{V}_1$  не змінюється.

Довжину стрибка гімнаста визначаємо з умови, що його горизонтальний рух на кожній з ділянок  $OB$  і  $BD_1$  відбувається рівномірно:

$$OD_1 = OE + ED_1 = V_0 \cos a \cdot t + V_1 t = V_0 \cos a \cdot \frac{V_0 \sin a}{g} + \left( V_0 \cos a + \frac{P}{mg} \right) \times \\ \times \frac{V_0 \sin a}{g} = \frac{2V_0^2 \sin a \cos a}{g} + \frac{P}{mg} U \frac{V_0 \sin a}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2a}{g} + \frac{P}{mg} U \frac{V_0 \sin a}{g}.$$

Перший доданок визначає довжину стрибка  $OD$  без відкидання вантажу, а другий доданок – подовження стрибка  $DD_1$  після відкидання вантажу.

І, нарешті, горизонтальний рух вантажу відкинутого гімнастом, відбувається рівномірно зі швидкістю

$$V_2 = V_0 \cos a - U.$$

Можливі три види траєкторії вантажу:

а)  $U < V_0 \cos a - U$ .

Тоді вантаж продовжує рухатись вперед вздовж параболи  $BE_1$ . Положення точки падіння:

$$EE_1 = (V_0 \cos a - U)t = (V_0 \cos a - U) \cdot \frac{V_0 \sin a}{g}.$$

б)  $U = V_0 \cos a$ .

Тоді вантаж падає за вертикаллю  $BE$ .

в)  $U > V_0 \cos \alpha$ .

Тоді вантаж рухається назад вздовж параболи  $BE_2$ . Положення точки падіння:

$$EE_2 = (U - V_0 \cos \alpha) \frac{V_0 \sin \alpha}{g}.$$

Таким чином, приземлення гімнаста разом з вантажем відбувається в точці  $D$ . Якщо гімнаст відкидає вантаж, то сам він рухається далі до точки  $D_1$ , а вантаж може опинитись в одній з точок  $E$ , тобто по інший бік від точки  $D$ .

При збереженні горизонтальної проекції кількості руху системи відбувається її перерозподіл між частинами системи в результаті взаємодії цих частин.

**Приклад 11.** Рідина густістю  $\rho$  витікає зі швидкістю  $\bar{U}$  з трубки, площа перерізу якої  $S$ , і б'є під кутом  $\alpha$  у вертикальну стіну (рис.28). Визначити тиск, який здійснює рідина на стіну.

Розв'язання

Застосуємо теорему про зміну кількості руху системи до руху об'єму рідини, що витікає з трубки за деякий проміжок часу  $t$ . Цей об'єм заповнює ділянку струменя довжиною  $Vt$  (пройдений шлях при рівномірному русі) і площиною перерізу  $S$ . Нехтуючи дією сили ваги на форму струменя, будемо вважати рух прямолінійним. Тоді маса об'єму дорівнює добутку щільності рідини на об'єм:

$$m = \rho S V t.$$

На задану механічну систему діють: сила ваги і нормальна реакція стіни  $\bar{N}$ . Спрямуємо вісь  $x$  перпендикулярно до стіни (рис.28), скористаємося першим рівнянням (59)

$$Q_x - Q_{0x} = \sum S_{kx}^{(e)}.$$

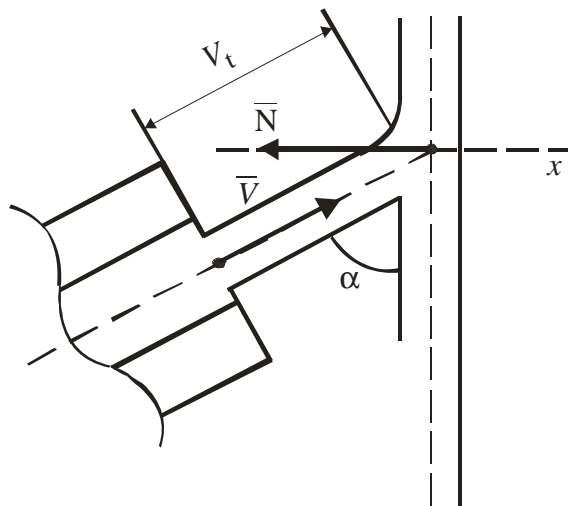


Рисунок 28

Так як рідина рухається поступально зі сталою швидкістю  $\bar{V}$ , то кількість руху системи в початковий момент часу  $t=0$  буде вектором, що співпадає з напрямком  $\bar{V}$ . Проекція цього вектора на вісь  $x$  має вигляд:

$$Q_{0x} = mV_0 = rsVt \cdot V \sin a = rsV^2 t \sin a.$$

У кінцевий момент часу частки струменя (без урахування розбризкування) будуть мати швидкості, спрямовані вздовж стіни (перпендикулярно до осі  $x$ ). Тоді проекція кількості руху в цей час  $Q_x = 0$ .

У правій частині теореми (59) знаходиться лише проекція імпульсу горизонтальної сили  $\bar{N}$  (величина стала), яку можна знайти за формулою

$$S_x = \sum S_{kx}^{(e)} = -Nt.$$

Підставляємо значення  $Q_x, Q_{0x}, \sum S_{kx}^{(e)}$  у рівняння

$$-rsV^2 t \sin a = -Nt.$$

Звідси визначаємо модуль реакції стіни, який дорівнює тиску рідини на стіну:

$$N = rsV^2 \sin a.$$

З остаточної формули видно, що максимальний тиск має місце при куті  $a = 90^\circ$ , тобто:

$$N_{\max} = rsV^2.$$

## 7 ТЕОРЕМА ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Наслідком теореми про зміну кількості руху системи є теорема про рух центра мас системи. За теоремою про кількість руху системи (54) маємо:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}.$$

Але кількість руху системи можна обчислити за формулою (42)

$$\bar{Q} = M\bar{V}_c,$$

де  $\bar{V}_c$  – швидкість центра мас;

$M$  – маса системи.

Підставляючи рівняння (42) у рівняння (54) і з огляду на те, що маса системи стала, одержуємо теорему про рух центра мас у векторній формі:

$$M \frac{d\bar{V}_c}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)} \quad (63)$$

або 
$$M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^{(e)}, \quad (64)$$

де  $\bar{a}_c$  – прискорення центра мас (рис.29).

Теорема про рух центра мас формулюється так: *центр мас системи рухається так само, як і матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи, і на яку діють всі зовнішні сили, прикладені до розглянутої механічної системи.*

Проектуючи рівняння (63) на прямокутні декартові осі координат (рис.28) одержуємо диференціальні рівняння руху центра мас:

$$\begin{aligned} M \frac{d\bar{x}_c}{dt} &= \sum F_{kx}^{(e)}; \\ M \frac{d\bar{y}_c}{dt} &= \sum F_{ky}^{(e)}; \\ M \frac{d\bar{z}_c}{dt} &= \sum F_{kz}^{(e)}, \end{aligned} \quad (65)$$

де  $x_c, y_c, z_c$  – координати центра мас,

$\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c$  – проекції швидкості центра мас на координатні осі.

Аналогічно з рівняння (65) можна одержати:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= \sum F_{kx}^{(e)}; \\ M\ddot{y}_c &= \sum F_{ky}^{(e)}; \\ M\ddot{z}_c &= \sum F_{kz}^{(e)}, \end{aligned} \quad (66)$$

де  $\ddot{x}_c, \ddot{y}_c, \ddot{z}_c$  – проекції прискорення центра мас на координатні осі.

З теореми про рух центра мас можна одержати наслідки, аналогічні законам збереження кількості руху, і проекції кількості руху на вісь.

1 Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, тобто  $\sum \bar{F}_k^{(e)} = 0$ , то з рівняння (64) витікає, що прискорення центра мас  $\bar{a}_c$  дорівнює нулю, а отже, швидкість центра мас є сталою за модулем і напрямком, тобто центр мас рухається прямолінійно і рівномірно за інерцією або перебуває в спокої. Якщо, зокрема, у початковий момент він перебуває у спокої, то він не змінює свого положення протягом всього часу, поки головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю.

2 Якщо проекція, наприклад, на вісь  $Ox$ , головного вектора зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, тобто  $\sum F_{kx}^{(e)} = 0$ , тобто з рівняння (66) необхідно, щоб проекція прискорення  $\ddot{x}_c$  центра мас на цю вісь дорівнювала нулю, а отже, проекція швидкості центра мас є сталою величиною, тобто із (65)  $V_{cx} = \dot{x}_c = const$ .

Якщо додатково в початковий момент  $V_{cx} = 0$ , то тоді координата  $x_c = const$ , тобто координата  $x_c$  центра мас не знімається при русі системи.

Внутрішні сили не впливають явно на рух центра мас. Вони можуть впливати тільки неявно, через зовнішні сили. Отже, одними внутрішніми силами, без зовнішніх, не можна вивести з рівноваги або змінити рух центра мас системи. Але внутрішніми силами для неізольованої механічної системи можна створити рух окремих частин системи  $S$ , отже, взаємодію з зовнішніми тілами, викликаючи цим зовнішні сили реакцій в'язей або змінюючи активні сили. Це може змінити рух центра мас або вивести його з рівноваги.



Наведені наслідки 1 і 2 називають законом збереження руху центра мас механічної системи. Прикладом, який ілюструє цей закон, є рух центра мас Сонячної системи. Так як притягуванням зірок можна практично знехтувати, то можна вважати, що на Сонячну систему ніякі зовнішні сили не діють. Таким чином, в першому приближенні центр мас Сонячної системи рухається у відношенні до зірок рівномірно і прямолінійно.

Теорема про рух центра мас системи являється однією з основних теорем динаміки. Ця теорема пояснює цілу низку явищ, котрі можливо спостерігати, наприклад, рух центра мас людини вздовж горизонтальної площини, здається, що відбувається за рахунок м'язів, тобто внутрішніх сил. Насправді ж переміщення відбувається під дією сил зчеплення між взуттям і площиною. Якщо б ця площина була гладенькою, людина не змогла б переміщувати свій центр мас, тобто рухатись (як у випадку ожеледиці).

Ще одним прикладом є дія пари сил на вільне тверде тіло. Якщо прикласти пару сил до вільного твердого тіла, то згідно з першим наслідком з теореми, центр мас тіла зберігає стан спокою. Під дією пари сил тіло зможе обертатися навколо свого центра мас. Як вже зазначалося диференціальне рівняння (64) руху центра мас системи не містить внутрішніх сил, що значно полегшує його інтегрування.

Ця теорема застосовується в таких випадках:

1 Під час вивчення поступального руху системи, оскільки в цьому випадку всі точки системи мають у даний момент однакові швидкості і прискорення, і тому поступальний рух матеріальної системи повністю визначається рухом центра мас.

2 У випадку складного руху, коли розглядають поступальну складову руху разом з центром мас, оскільки складний рух матеріальної системи завжди можна розкласти на переносний поступальний рух разом з центром мас і відносний рух відносно центра мас.

3 У таких випадках, коли головний вектор зовнішніх сил системи  $\bar{R}^{(e)} = 0$ , або одна з його проекцій на координатні осі, наприклад  $R_x^{(e)}$ , дорівнює 0. У першому випадку швидкість центра мас системи  $\bar{V}_c = \overline{const}$  є стала за величиною і напрямом; у другому – сталою величиною є проекція швидкості центра мас  $V_{c_x} = const$  на дану вісь.

4 При визначенні руху однієї з точок системи за даним рухом решти точок і за даними зовнішніми силами.

5 При знаходженні головного вектора зовнішніх сил, в тому числі реакцій в'язей за даними законами руху точок системи.

Методика розв'язування цих задач така:

а) визначити, які матеріальні точки (або тіла) треба включити в систему, рух якої розглядається (тобто вказати об'єкт руху);

б) визначити в'язі відносно зазначеної системи точок;

в) користуючись принципом звільнення від в'язей, відкинути останні, замінивши їх дію на точки системи реакціями;

г) скласти схему зовнішніх сил, включаючи и реакції в'язей, прикладених до виділеної системи точок (або тіла);

д) вибрати систему координат і скласти диференціальні рівняння руху центра мас системи (3) в проекціях на осі декартових координат. Для цього слід записати координати центрів мас всіх точок системи і двічі продиференціювати за часом;

е) при розв'язанні оберненої задачі динаміки про рух центра мас необхідно визначити початкові умови руху центра мас. Якщо в умові задачі дано початкові умови руху окремих точок системи, то спочатку треба визначити початкові умови для координат, проекцій швидкостей центра мас, застосовуючи формули:

$$x_{0c} = \frac{\sum m_k x_{0k}}{M}; \quad y_{0c} = \frac{\sum m_k y_{0k}}{M}; \quad z_{0c} = \frac{\sum m_k z_{0k}}{M},$$

де  $x_{0k}; y_{0k}; z_{0k}$  – початкові координати точок системи;

ж) проінтегрувати диференціальні рівняння і визначити сталі інтегрування на основі початкових умов, після чого записати закон руху центра мас. Наприклад, якщо розв'язується пряма задача динаміки, то треба двічі продиференціювати координати центра інерції за часом, і тоді проекції головного вектора зовнішніх сил на координатні осі можна визначити за формулами:

$$R_x^{(e)} = m \ddot{x}_c; \quad R_y^{(e)} = m \ddot{y}_c; \quad R_z^{(e)} = m \ddot{z}_c;$$

и) після розв'язання треба дослідити результат і зробити, якщо це можливо, узагальнюючий висновок.

**Приклад 12.** Візок  $AB$  вагою  $\bar{P}$  переміщається горизонтальною площиною з дуже малим опором, яким можна знехтувати; центр ваги візка знаходиться в його середині. Людина вагою  $\bar{Q}$ , що стоїть спочатку на нерухомому візку, переходить на відстань  $l$  з  $A$  в  $B$ . У якій бік і на яку відстань переміститься візок при переході людини з  $A$  в  $B$ ? (рис. 29).

Розв'язання

Розглядатимемо рух матеріальної системи, що складається з візка  $AB$  і людини. В'яззю відносно виділеної системи є ідеальна горизонтальна площина, реакція якої  $\bar{N}$  напрямлена перпендикулярно до цієї площини. Зовнішніми силами системи є: сили  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$ , реакція  $\bar{N}$ ; а внутрішніми силами – сили взаємодії між людиною і візком. Головний вектор зовнішніх сил:

$$\Sigma \bar{F}_k^e = \bar{R}^{(e)} = \bar{P} + \bar{Q} + \bar{N}.$$

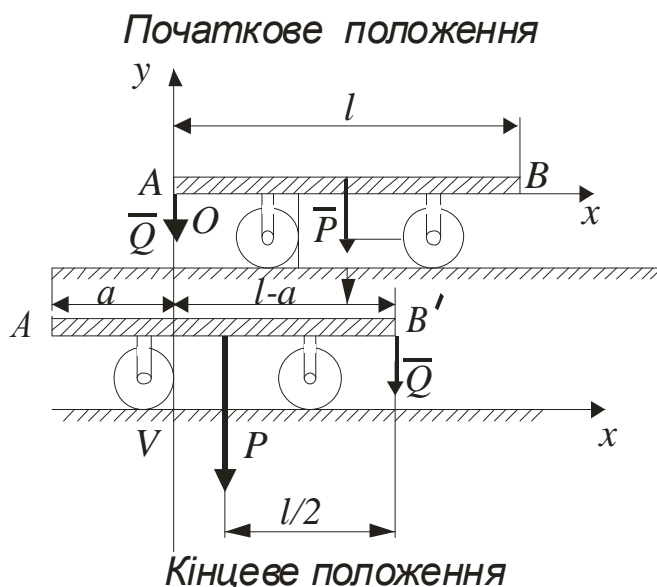


Рисунок 29

Нехай вісь  $x$  напрямлена вздовж візка, а початком «абсолютної системи» координат є точка  $O$ .

Для розв'язання задачі застосуємо теорему про рух центра мас системи, рівняння якої запишемо в проекції на вісь  $Ox$ :

$$m\ddot{x}_c = \sum F_{ix}^{(e)}.$$

Проекція головного вектора зовнішніх сил на вісь  $Ox$  дорівнює нулю; має місце закон збереження швидкості центра мас

$$\dot{x}_c = C_1.$$

Оскільки на початку руху (при  $t = 0$ ) система перебувала в спокої, то  $\dot{x}_c = C_1 = 0$ , доставаємо рівняння  $m\ddot{x}_c = \sum F_{ix}^{(e)}$ .

Інтегруючи рівняння, матимемо  $x_c = C_2 = x_{c0}$ .

Отже, координата центра мас на початку і в кінці руху системи залишається тією самою (ця закономірність називається законом збереження координати центра мас). Тоді при переході людини з точки  $A$  візка в точку  $B$  (вправо) на відстань  $l$  візок переміститься вліво на деяку, поки що невідому відстань  $a$ . Визначаючи координати центра мас на початку і в кінці руху, знайдемо напрям і відстань переміщення візка  $a$ .

Координату центра мас визначимо на основі формул (7):

$$x_{c0} = \frac{x_{10}P + x_{20}Q}{P + Q}; \quad x_c = \frac{x_1P + x_2Q}{P + Q}.$$

Із закону збереження центра мас:

$$x_{10}P + x_{20}Q = x_1P + x_2Q,$$

при цьому

$$x_{10} = \frac{l}{2}; \quad x_1 = l - a - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} - a,$$

$$x_{20} = 0; \quad x_2 = l - a.$$

Тоді рівняння можна записати так:

$$\frac{l}{2}P = \left(\frac{l}{2} - a\right)P + (l - a)Q,$$

звідки

$$a = \frac{lQ}{P + Q}.$$

Візок пересувається на відстань  $\frac{lQ}{P + Q}$  у бік, протилежний переміщенню людини.

**Приклад 13.** Електричний двигун вагою  $P_1$  встановлено без кріплення на гладенькому горизонтальному фундаменті. На валі двигуна під прямим кутом до нього закріплено один кінець однорідного стрижня, довжина якого  $2l$ , вага  $\bar{P}_2$ , а на другий кінець стрижня насаджено точковий вантаж  $B$  вагою  $\bar{P}_3$ , кутова швидкість вала  $\omega$  (рис.30). Визначити: горизонтальний рух двигуна; кутову швидкість вала електродвигуна, при якій електродвигун відриватиметься від фундаменту; найбільше горизонтальне зусилля  $R_1$ , яке діятиме на болти, якщо ними закріпити кожух електродвигуна на фундаменті.

Розв'язання

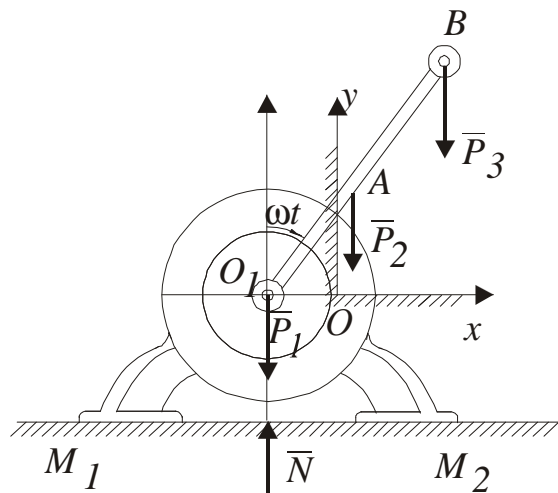


Рисунок 30

Дана система складається з двигуна, стрижня і точкового вантажу. В'язю для цієї системи буде ідеальна горизонтальна площина  $M_1M_2$ . Реакція  $\bar{N}$  цієї в'язі напрямлена вертикально. Отже, до зовнішніх сил належать сили  $\bar{P}_1; \bar{P}_2; \bar{P}_3$  і сила реакції  $\bar{N}$ , а до внутрішніх — сили взаємодії між точками розглядуваної системи. Оскільки зовнішні сили вертикальні, то вони не можуть вплинути на горизонтальне переміщення центра мас системи.

Тут, як і в попередній задачі, мають місце закони збереження швидкості і абсциси центра мас системи. Нехай початок нерухомої системи координат буде в точці, яка відповідає початковому положенню центра вала двигуна, а осі напрямлено так, як показано на рисунку 30.

Тоді

$$m \ddot{x}_c = R_x^{(e)} = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + N_x = 0.$$

Отже,

$$\dot{x}_c = C_1 = 0.$$

Після інтегрування маємо

$$x_c = C_2 = x_{c0} = 0.$$

Для довільного моменту часу

$$x_c = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} = 0,$$

де  $x_1$  — горизонтальне переміщення центра двигуна вздовж осі  $Ox$ ;

$$x_2 = x_1 + l \sin \omega t,$$

$$x_3 = x_1 + 2l \sin \omega t$$

є відповідно координатами центра стрижня і вантажу  $B$ .

Тоді маємо:

$$P_1 x_1 + P_2 (x_1 + l \sin \omega t) + P_3 (x_1 + 2l) = 0.$$

Звідки

$$x_1 = \frac{P_2 + 2P_3}{P_1 + P_2 + P_3} l \sin \omega t.$$

Отже, центр ваги двигуна  $O_1$  рухатиметься у бік, протилежний переміщенню центрів ваги стрижня і вантажу, за гармонічним законом, з амплітудою, яка дорівнює

$$\frac{P_2 + 2P_3}{P_1 + P_2 + P_3} l$$

і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Тепер розглянемо друге питання задачі. Візьмемо диференціальне рівняння руху центра мас розглядуваної системи в проекції на вісь  $Oy$ :

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{g} \ddot{y}_c = -P_1 - P_2 - P_3 + N.$$

Значення  $y_c$  (ординату центра мас) знайдемо за відомою вже формулою

$$y_c = \frac{1}{M} \sum m_k y_k = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3}{P_1 + P_2 + P_3},$$

де  $y_1 = 0$  (переміщення центра ваги двигуна вздовж осі  $Oy$  дорівнює нулю, оскільки двигун не відривається від фундаменту), а  $y_2 = l \cos \omega t$ ;  $y_3 = 2l \cos \omega t$  – відповідно координати центра ваги стрижня  $O_1B$  і вантажу  $B$ .

Звідси

$$y_c = \frac{P_1 + 2P_3}{P_1 + P_2 + P_3} l \cos \omega t.$$

Продиференціювавши двічі останні рівності за часом, матимемо:

$$\ddot{x}_c = -\frac{P_1 + 2P_3}{P_1 + P_2 + P_3} l w^2 \cos wt.$$

Отже, остаточно диференціальне рівняння руху центра мас вздовж осі  $Oy$  набуде вигляду:

$$-\frac{P_1 + 2P_3}{g} l w^2 \cos wt = -P_1 - P_2 - P_3 + N.$$

Звідси знаходимо реакцію фундаменту  $M_1 M_2$ :

$$N = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_1 + 2P_3}{g} l w^2 \cos wt.$$

Максимальне і мінімальне значення реакції фундаменту:

$$N_{\max} = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{P_1 + 2P_3}{g} l w^2 \left(t = \frac{\pi}{w}\right);$$

$$N_{\min} = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_1 + 2P_3}{g} l w^2 (t = 0).$$

Щоб знайти кутову швидкість  $w_{kp}$ , при якій двигун почне відриватись від фундаменту (звільнитися від в'язі), досить припустити, що реакція в'язі дорівнює нулю:

$$N_{\min} = 0.$$

Це дає змогу скласти рівняння відносно  $w_{kp}$ :

$$P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_1 + 2P_3}{g} l w_{kp}^2 = 0,$$



звідки

$$w_{кр} = \sqrt{\frac{g}{t} \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_2 + 2P_3}} \text{ (сек}^{-1}\text{)}.$$

Знайдемо тепер найбільше горизонтальне зусилля, яке діє на кріпильні фундаментні (анкерні) болти. Головний вектор зовнішніх сил в цьому випадку буде

$$S\bar{F}_k^{(e)} = \bar{R}^{(e)} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{N} + \bar{R}_1, \text{ а } R_x^{(e)} = R_1.$$

Запишемо диференціальне рівняння руху центра мас вздовж осі  $Ox$ :

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{g} \ddot{x}_c = R_1.$$

Оскільки

$$x_c = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{P_1 x_1 + P_2 (x_2 + l \sin wt) + P_3 (x_3 + 2l \sin wt)}{P_1 + P_2 + P_3}$$

і при закріпленні переміщення двигуна дорівнює нулю, тобто  $x_1 = 0$ , то

$$x_c = \frac{P_2 + 2P_3}{P_1 + P_2 + P_3} l \sin wt, \text{ а } \ddot{x}_c = -\frac{P_2 + 2P_3}{P_1 + P_2 + P_3} l w^2 \sin wt.$$

Диференціальне рівняння руху центра мас розглядуваної вздовж осі  $Ox$  набуде вигляду:

$$-\frac{P_2 + 2P_3}{P_1 + P_2 + P_3} l w^2 \sin wt = R_1.$$

Найбільше горизонтальне зусилля, що діє на болти, буде:

$$R_1 = \frac{P_2 + P_3}{g} l w^2 \text{ при } t = \frac{P}{2w}.$$

Зазначимо, що зусилля, прикладені до болтів (за величиною ці зусилля дорівнюють реакції болтів, відповідно до третього закону Ньютона) є замінними, що послаблює міцність матеріалів. Крім того, ці зусилля прямо пропорціональні квадрату кутової швидкості обертання ротора двигуна і тому вони збільшуються із збільшенням кутової швидкості. Це викликає потребу нормувати роботу двигуна, щоб запобігти аваріям. Знак мінус у формулі реакції болтів означає, що горизонтальна реакція болтів напрямлена в бік, протилежний горизонтальному переміщенню центрів ваги стрижня і вантажу.

## **7.1 Приклади завдань для самоперевірки знань**

### **Варіант 1**

- 1 Записати формулу і дати визначення поняття «кількість руху точки».
- 2 Записати та сформулювати теорему про змінення кінетичного моменту точки відносно центра.
- 3 Записати та сформулювати теорему про змінення кількості руху точки в диференційній формі.
- 4 Момент інерції стрижня відносно осі, перпендикулярної до осі стрижня і яка проходить через кінець стрижня (формула та визначення).
- 5 Записати та сформулювати теорему про рух центра мас механічної системи.

### **Варіант 2**

- 1 Дати визначення кількості руху системи. Записати формулу.
- 2 Сформулювати властивості внутрішніх сил системи.
- 3 Записати та сформулювати теорему про змінення кількості руху точки (другу форму – теорему імпульсів).
- 4 Момент інерції системи відносно центра (формула та визначення).
- 5 Сформулювати закони збереження положення центра мас механічної системи.

### **Варіант 3**

- 1 Записати формулу для визначення кількості руху тіла (використовуючи поняття «центр мас») та дати визначення.
- 2 Пояснити термін «повний імпульс сили».
- 3 Момент інерції системи відносно осі (формула та визначення).
- 4 Сформулювати теорему про змінення кількості руху системи в інтегральній формі.
- 5 Записати формулу для визначення координат центра мас механічної системи.

### **Варіант 4**

- 1 Дати визначення елементарного імпульсу сили.
- 2 Записати та сформулювати теорему про змінення кількості руху системи в кінцевій або інтегральній формі.
- 3 Кінетичний момент при обертальному русі твердого тіла (формула та визначення).
- 4 Сформулювати поняття центра мас механічної системи. Записати формулу для визначення радіуса-вектора центра мас.
- 5 Момент інерції стрижня відносно його центра (формула та визначення).

### **Варіант 5**

- 1 Записати та сформулювати теорему про змінення кількості руху системи у другій формі – теорему імпульсів.
- 2 Записати та сформулювати теорему про змінення кінетичного моменту сил системи відносно осі.
- 3 Кінетичний момент точки відносно центра (дати визначення).
- 4 Момент інерції диску відносно центра (формула).
- 5 Теорема Гюйгенса – Штейнера про моменти інерції відносно паралельних осей (записати та сформулювати).

## Варіант 6

- 1 Записати та сформулювати теорему про змінення кількості руху точки в інтегральній формі.
- 2 Сформулювати закони збереження кінетичних моментів.
- 3 Кінетичний момент системи відносно центра (дати визначення).
- 4 Записати формулу для моментів інерції системи відносно координатних осей.
- 5 Записати формулу для момента інерції кільця відносно його центра.

## 8 ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОГО МОМЕНТУ

### 8.1 Кінетичний момент точки й системи

Поряд з кількістю руху, як векторною мірою поступального руху механічної системи, використовуються поняття момента кількості руху, або кінетичного момента, як міри обертального руху механічної системи відносно довільного центру (точки) або осі. Розглянемо спочатку кінетичний момент окремої точки.

Для матеріальної точки масою  $m$ , що рухається зі швидкістю  $\bar{V}$ , кінетичний момент  $\bar{k}_0$  відносно буд якого центра  $O$  називають момент кількості руху точки відносно центра  $O$  (рис 32) тобто

$$\bar{k}_0 = \bar{M}_0(m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V}. \quad (67)$$

Кінетичний момент  $\bar{k}_0$  прикладений до точки  $O$ , щодо якої він обчислюється.

Проектуючи обидві частини рівняння (67) на прямокутні декартові осі, одержуємо кінетичні моменти точки щодо цих осей координат, якщо точка  $O$  є початком осей координат:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= M_x(m\bar{V}) = m(yV_z - zV_y) = m(\underline{y}z - z\underline{y}); \\ k_y &= M_y(m\bar{V}) = m(zV_x - xV_z) = m(\underline{z}x - x\underline{z}); \\ k_z &= M_z(m\bar{V}) = m(xV_y - yV_x) = m(\underline{x}y - y\underline{x}). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Одиниця кінетичного моменту – кг·м<sup>2</sup>/с, або ньютон-метр-секунда [Н·м·с].

Для механічної системи кінетичним моментом  $\bar{k}_0$  (або головним моментом кількості руху системи відносно будь-якої точки  $O$ ) називають векторну суму кінетичних моментів точок цієї системи, узятих відносно точки  $O$  (рис.32), тобто

$$\bar{K}_0 = \Sigma \bar{M}_0(m_k \bar{V}_k) = \Sigma \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k. \quad (69)$$

Кінетичний момент системи  $\bar{k}_0$  прикладений до точки  $O$ , відносно якої він обчислюється (рис.32).

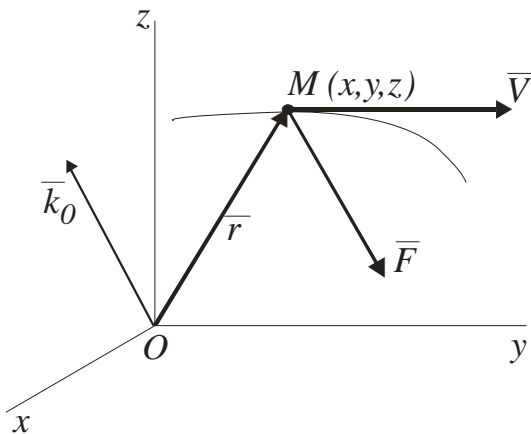


Рисунок 31

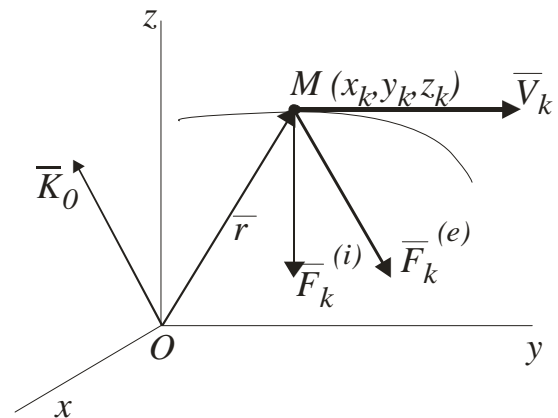


Рисунок 32

Якщо спроеціювати рівняння (69) на прямокутні декартові осі координат, то одержимо проекції кінетичного моменту на ці осі, або кінетичні моменти відносно осей координат:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= M_x(m_k \bar{V}_k) = \Sigma m_k (\underline{y}_k z_k - z_k \underline{y}_k); \\ K_y &= M_y(m_k \bar{V}_k) = \Sigma m_k (\underline{z}_k x_k - x_k \underline{z}_k); \\ K_z &= M_z(m_k \bar{V}_k) = \Sigma m_k (\underline{x}_k y_k - y_k \underline{x}_k). \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

## 8.2 Кінетичний момент системи відносно осі обертання при обертальному русі системи або твердого тіла

Обчислимо кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання, коли тіло обертається навколо цієї нерухомої осі з кутовою швидкістю  $w$  (рис.33). За визначенням кінетичного моменту відносно осі (70) маємо

$$K_z = \Sigma M_z(m_k \bar{V}_k).$$

Але при обертанні тіла навколо осі швидкість будь-якої  $k$ -ї точки  $V_k = h_k w$ , при чому кількість руху точки  $m_k \bar{V}_k$  перпендикулярна відрізку  $h_k$  й лежить у площині перпендикулярній осі обертання  $Oz$  для однієї точки  $m_k V_k h_k$ .

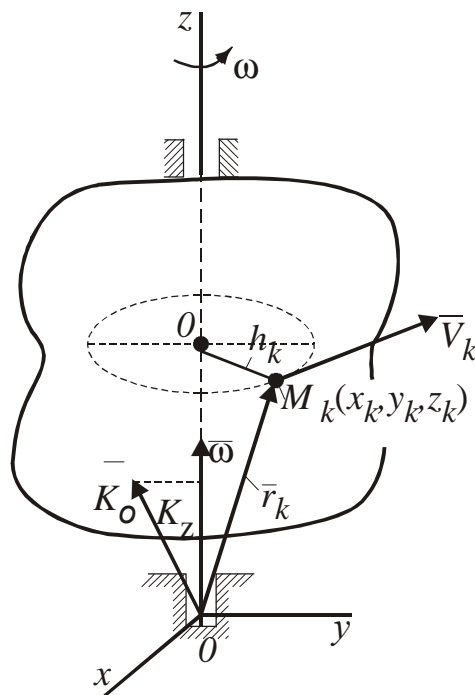


Рисунок 33

Для всього тіла:

$$K_z = \Sigma m_k h_k^2 w = w \Sigma m_k h_k^2 = w J_z,$$

тобто

$$K_z = J_z w. \tag{71}$$

Таким чином, кінетичний момент тіла щодо осі обертання при обертальному русі дорівнює добутку кутової швидкості тіла на його момент інерції відносно осі обертання. Знак кінетичного моменту щодо осі збігається зі знаком кутової швидкості обертання навколо цієї осі: *при обертанні проти годинникової стрілки кінетичний момент додатний, при обертанні за годинниковою стрілкою він від'ємний.*

Додатково без виводу наведемо формули для кінетичних моментів щодо двох інших осей координат  $Ox$  і  $Oy$ , перпендикулярних до осі обертання  $Oz$ . Маємо:

$$K_x = -J_{xz} \omega; \quad K_y = -J_{yz} \omega, \quad (72)$$

де  $J_{xz} = \sum m_k x_k z_k$  і  $J_{yz} = \sum m_k y_k z_k$  – відцентрові моменти інерції.

Ці формули можна одержати як окремий випадок більш загальних формул для випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої точки.

Якщо вісь обертання  $Oz$  є головною віссю інерції для точки  $O$ , то  $J_{xz} = J_{yz} = 0$  й, отже,  $K_x = K_y = 0$  для цієї точки. У цьому випадку кінетичний момент  $\bar{K}_0$  відносно точки  $O$  спрямований за віссю обертання. У загальному випадку момент  $\bar{K}_0$  не спрямований вздовж осі обертання, тому що має проєкції  $K_x$  і  $K_y$  на осі координат, які не дорівнюють нулю та перпендикулярні осі обертання  $Oz$ .

### 8.3 Теорема про зміну кінетичного моменту точки

Для матеріальної точки основний закон динаміки можна подати у вигляді

$$\frac{m d\bar{V}}{dt} = \bar{F}.$$

Помножаючи обидві частини цього співвідношення ліворуч векторно на радіус-вектор  $\bar{r}$  (див. рис. 31), одержуємо

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (73)$$

У правій частині цієї формули маємо момент сили щодо нерухомої точки  $O$ . Перетворимо ліву частину, застосувавши формулу похідної від векторного добутку:

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) - \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V}.$$

Але

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V} = \bar{V} \times m\bar{V} = 0,$$

як векторний добуток паралельних векторів. Після цього з рівняння (73) одержуємо:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) = \bar{r} \times \bar{F}, \quad (74)$$

або

$$\frac{d\bar{k}_0}{dt} = \bar{M}_0(\bar{F}). \quad (75)$$

Таким чином, *перша похідна за часом від кінетичного моменту точки відносно будь-якого центра дорівнює моменту сили відносно того ж центра.*

**Це і є теорема про зміну кінетичного моменту для точки.**

Проектуючи рівняння (75) на прямокутні декартові осі координат, одержуємо теореми про зміну кінетичного моменту точки щодо цих осей координат:

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\bar{F}); \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y(\bar{F}); \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z(\bar{F}). \quad (76)$$

#### 8.4 Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи

Якщо до точок системи прикласти всі зовнішні й внутрішні сили (див. рис.32), то для кожної точки системи можна записати теорему про зміну кінетичного моменту у формі рівняння (74), тобто

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}, k = 1, 2, \dots, N.$$



Додаючи праві й ліві частини цих співвідношень за всіма точками системи й заміняючи суми похідних похідною від суми, одержуємо:

$$\frac{d}{dt} \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}.$$

Із властивостей внутрішніх сил, механічної системи відомо, що

$$\bar{L}_0^{(i)} = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(i)}) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0,$$

а за визначенням кінетичного моменту системи

$$\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k = \bar{K}_0,$$

тоді

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

Якщо позначити головний момент всіх зовнішніх сил  $\bar{L}_0^{(e)}$ , отримаємо

$$\bar{L}_0^{(e)} = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)}),$$

і теорему про зміну кінетичного моменту системи можна подати у вигляді:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{L}_0^{(e)}. \quad (77)$$

*Перша похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно будь-якого центра  $O$  дорівнює векторній сумі моментів зовнішніх сил, що діють на систему, відносно того ж центра.*

До цієї теореми входить кінетичний момент системи  $\bar{K}_0$  в її русі відносно інерціальної системи відліку, причому кінетичний момент і моменти зовнішніх сил обчислюються відносно нерухомої в цій системі відліку точки  $O$ . Одержимо теорему про зміну кінетичного моменту

системи в її русі відносно інерціальної системи відліку, але оберемо при обчисленні кінетичного моменту і моментів зовнішніх сил точку  $A$ , що рухається відносно інерціальної системи відліку зі швидкістю  $\bar{V}_A$ .

За визначенням кінетичного моменту системи щодо точки  $A$  маємо (рис.34).

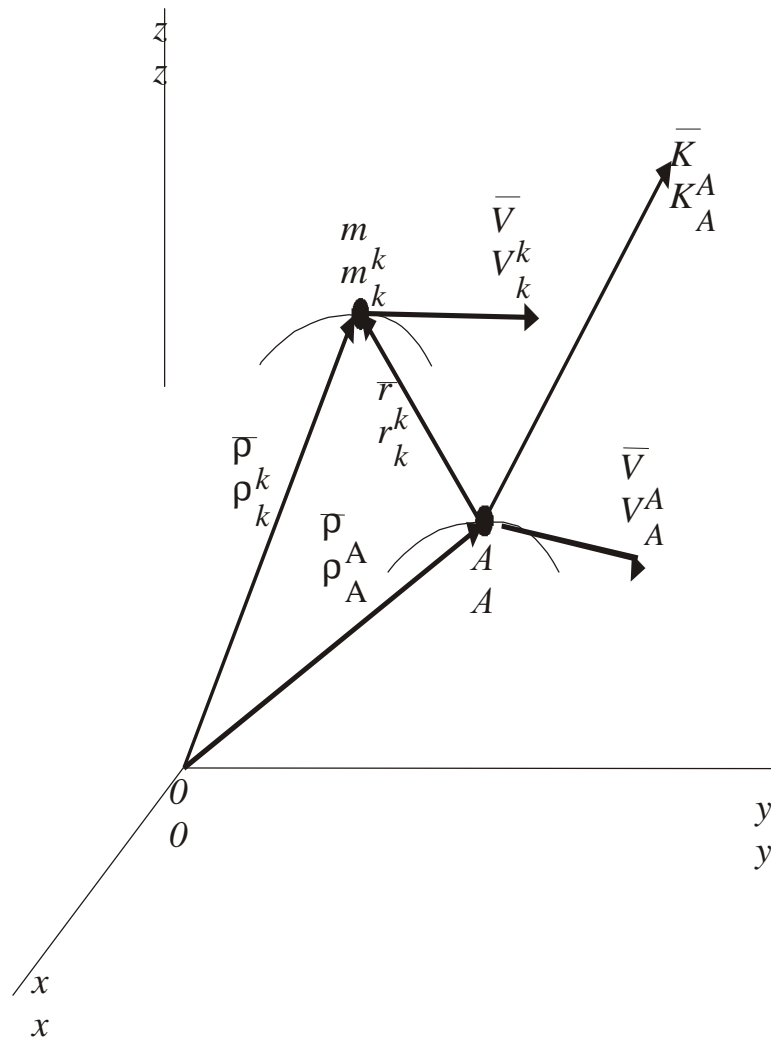


Рисунок 34

Обчислимо похідну за часом від кінетичного моменту  $\bar{K}_A$  за правилом диференціювання векторних добутків. Одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{k}_A}{dt} &= \Sigma \left( \frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \bar{V}_k + \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \right) = \Sigma \left( (\bar{V}_k - \bar{V}_A) \times m_k \bar{V}_k + \bar{r}_k \times (\bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}) \right) = \\ &= -\bar{V}_A \times \Sigma m_k \bar{V}_k + \Sigma \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}, \end{aligned}$$

тому що

$$\begin{aligned}\bar{r}_k &= \bar{r}_k - \bar{r}_A; & \frac{d\bar{r}_k}{dt} &= \frac{\bar{r}_k - \bar{r}_A}{dt} = \bar{V}_k - \bar{V}_A; \\ m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} &= \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}; \\ \bar{V}_k \times m\bar{V}_k &= 0; & \Sigma \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} &= 0.\end{aligned}$$

З огляду на те, що кількість руху системи  $\bar{Q} = \Sigma m_k \bar{V}_k = M\bar{V}_c$ , одержимо

$$\frac{d\bar{K}_A}{dt} = -\bar{V}_A \times M\bar{V}_A + \Sigma \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)},$$

або

$$\frac{d\bar{K}_A}{dt} = M\bar{V}_c \times \bar{V}_A + \bar{L}_A^{(e)}.$$

Розглянемо *окремі випадки* цієї теореми.

1 Якщо точка  $A$  збігається із центром мас  $C$ , то теорема набуває форми

$$\boxed{\times} \quad (78)$$

2 Якщо у випадку плоского руху твердого тіла вибрати точку  $A$  як миттєвий центр швидкостей  $P$ , то  $\bar{V}_A = \bar{V}_P \neq 0$ , тому що в розглянутому випадку  $\bar{V}_P$  є швидкість руху миттєвого центра швидкостей за нерухомою центроїдою, а вона не дорівнює нулю, на відміну від швидкості точки тіла, що збігається з точкою  $P$ , яка дорівнює нулю. Очевидно, що  $\bar{V}_P + \bar{V}_c = 0$ , якщо  $\bar{V}_P$  паралельна  $\bar{V}_c$ , тобто якщо дотичні до центроїд і траєкторії центра мас паралельні, або центр мас перебуває на нормалі до центроїд у точці  $P$ . Тоді

$$\frac{d\bar{K}_P}{dt} = \bar{L}_P^{(e)}. \quad (79)$$

Ці окремі випадки показують, що для рухомих точок центра мас для будь-якої системи і миттєвого центра швидкостей при плоскому русі твердого тіла в розглянутому випадку теорема про зміну кінетичного моменту для абсолютного руху має ту ж форму, що й для нерухомої точки  $O$ .

Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну кінетичного моменту системи. Вони можуть впливати на нього тільки через зовнішні сили, тобто неявно.

Проеціюючи вираз (77) на прямокутні декартові осі координат, одержуємо теорему про зміну кінетичного моменту системи відносно цих осей координат, тобто

$$\frac{dK_x}{dt} = L_x^{(e)}; \quad \frac{dK_y}{dt} = L_y^{(e)}; \quad \frac{dK_z}{dt} = L_z^{(e)}. \quad (80)$$

Теорема про зміну кінетичного моменту дозволяє вивчати обертальний рух твердого тіла навколо осі і точки або обертальну частину руху тіла в загальному випадку руху вільного твердого тіла.

### 8.5 Закони збереження кінетичних моментів

Виведемо закони збереження кінетичних моментів для системи, розглядаючи матеріальну точку як механічну систему, в якій кількість точок дорівнює одиниці. Природно, що для однієї матеріальної точки всі діючі на неї сили є зовнішніми. Можливі наступні *окремі випадки* теореми про зміну кінетичного моменту системи.

1 Якщо головний момент зовнішніх сил системи відносно точки  $O$  дорівнює нулю, тобто  $\bar{L}_0^{(e)}=0$ , то відповідно до рівняння (77) кінетичний момент  $\bar{K}_0$  відносно тієї ж точки сталий за модулем і напрямком, тобто

$$\bar{K}_0 = \overline{const}. \quad (81)$$

Цей окремий випадок теореми про зміну кінетичного моменту

системи називають *законом збереження кінетичного моменту*.  
У проекціях на прямокутні декартові осі координат за цим законом:

$$K_x = C_1; \quad K_y = C_2; \quad K_z = C_3, \quad (82)$$

де  $C_1, C_2, C_3$  – сталі величини.

Співвідношення (82) є першими інтегралами диференціальних рівнянь руху системи. Закон збереження кінетичного моменту системи показує, що одні внутрішні сили не можуть змінити кінетичний момент системи так само, як вони не змінюють її кількість руху.

2 Якщо сума моментів всіх зовнішніх сил системи щодо осі  $Ox$  дорівнює нулю, тобто

$$L_x^{(e)} = \sum M_x(F_k^{(e)}) = 0, \text{ то з рівнянь (80) треба}$$

$$\overline{K}_x = \overline{const}. \quad (83)$$

Отже, кінетичний момент системи щодо якої-небудь координатної осі сталий, якщо сума моментів зовнішніх сил щодо цієї осі дорівнює нулю, що, зокрема, спостерігається, коли зовнішні сили паралельні осі або перетинають її. В окремому випадку для тіла або системи тіл, які всі разом можуть обертатися навколо нерухомої осі, і якщо при цьому

$$L_x^{(e)} = \sum M_x(\overline{F}_k^{(e)}) = 0,$$

тобто

$$K_z = J_z \omega = const,$$

або

$$J_z \omega = J_{z0} \omega_0, \quad (84)$$

де  $J_z$  і  $\omega$  – момент інерції системи тіл і їхня кутова швидкість щодо осі обертання в довільний момент часу;

$J_{z0}$  і  $\omega_0$  – момент інерції тіл й їхня кутова швидкість у момент часу, обраний за початковий, наприклад, при  $t=0$ .

Закон збереження кінетичного моменту у формі (84) використовують у своїй діяльності акробати, стрибунки, танцюристи й т.д. Наочно його можна продемонструвати в досліді на лаві Жуковського (рис.35). Якщо людина з гирями в руках встане на горизонтальну платформу лави Жуковського, що може обертатися навколо вертикальної осі майже без тертя, і потім надати платформі швидкість навколо цієї осі, то

$$J_{z0}\omega_0 = J_z \omega,$$

тому, що зовнішні сили або паралельні осі обертання (сили ваги людини, гир і платформи), або перетинають вісь (реакції підшипника, якщо знехтувати силами тертя), як показано на рисунку 36.

Отже, якщо людина збільшить момент інерції, наприклад, розведенням рук з гирями в сторони, то кутова швидкість обертання зменшиться, і навпаки. У дійсності кутова швидкість хоча й повільно, але весь час зменшується внаслідок наявності опору повітря й тертя в підшипнику лави.

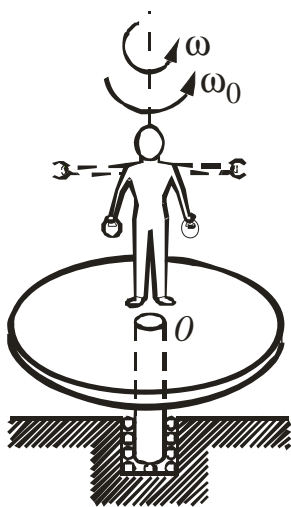


Рисунок 35

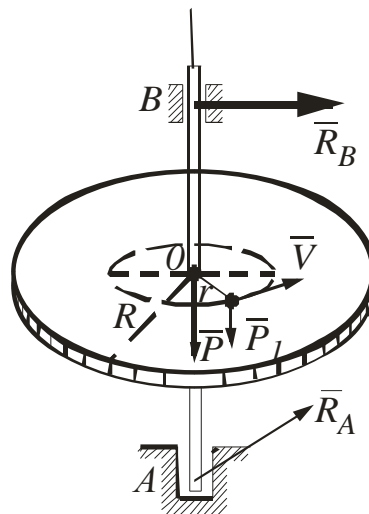


Рисунок 36

## 8.6 Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи для відносного руху

Розглянемо відносний рух механічної системи відносно системи координат, яка рухається поступально разом з центром мас механічної системи.

Перш ніж розглянути теорему, виведемо формулу для обчислення кінетичного моменту системи.

**Формула для кінетичного моменту системи.** Нехай механічна система рухається відносно основної системи координат  $Ox_1y_1z_1$ . Візьмемо рухому систему координат  $Sxyz$  з початком у центрі мас системи, що рухається поступально щодо основної системи координат.

З рисунка 37 видно, що для будь-якого моменту часу

$$\bar{\mathbf{r}}_k = \bar{\mathbf{r}}_c + \bar{\mathbf{r}}_k.$$

Диференціюючи цю тотожність за часом, одержуємо:

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}_k}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}_c}{dt} + \frac{d\bar{\mathbf{r}}_k}{dt},$$

або

$$\bar{\mathbf{V}}_k = \bar{\mathbf{V}}_c + \bar{\mathbf{V}}_{kr},$$

де  $\bar{\mathbf{V}}_k$  – абсолютна швидкість точки  $M_k$ ;

$\bar{\mathbf{V}}_c$  – абсолютна швидкість центра мас;

$\bar{\mathbf{V}}_{kr} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}_k}{dt}$  – відносна швидкість точки  $M_k$  щодо рухомої системи

координат  $Sxyz$ . При поступальному русі рухомої системи координат її кутова швидкість  $\bar{\omega}$  дорівнює нулю, і за формулою Бура повна похідна за часом від радіуса-вектора  $\bar{\mathbf{r}}$  збігається з локальною похідною, рівною відносній швидкості.

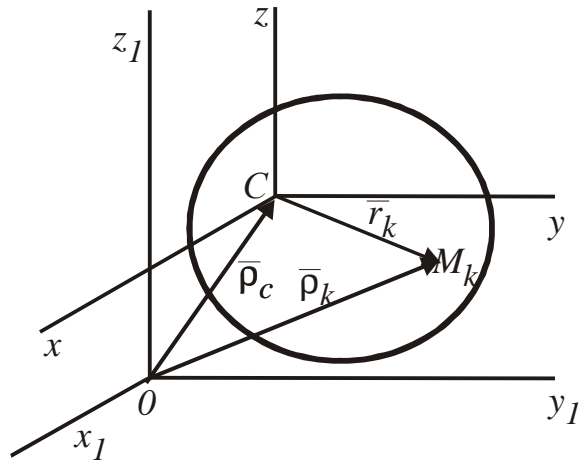


Рисунок 37

Відповідно до визначення кінетичного моменту  $\bar{K}_0$  відносно нерухомої точки  $O$ , для абсолютного руху системи щодо системи координат  $Ox_1y_1z_1$  за формулою (69) маємо:

$$\bar{K}_0 = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k .$$

Підставляючи у цю формулу значення  $\bar{r}_k$  і  $\bar{V}_k$ , після невеликих перетворень одержуємо:

$$\bar{K}_0 = \bar{r}_c \times \bar{V}_c \sum m_k + \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_{kr} + \bar{r}_c \times \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} + (\sum m_k \bar{r}_k) \times \bar{V}_c . \quad (85)$$

У цій формулі  $\sum m_k = M$  – маса системи. Крім того, останні два доданки дорівнюють нулю. Дійсно, за визначеннями радіуса-вектора центра мас відносно цього центра мас маємо:

$$0 = \bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M} .$$

Отже,  $\sum m_k \bar{r}_k = 0$ , і останній доданок у формулі (85) теж дорівнює нулю.



Інший додатак можна попередньо перетворити:

$$\bar{\mathbf{r}}_C \times \sum m_k \frac{d\bar{\mathbf{r}}_k}{dt} = \bar{\mathbf{r}}_C \times \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{\mathbf{r}}_k).$$

Цей додатак також дорівнює нулю, тому що увесь час  $\sum m_k \bar{\mathbf{r}}_k = 0$ .

Формула (85) набуває наступного остаточного виду:

$$\bar{\mathbf{K}}_0 = \bar{\mathbf{r}}_C \times M\bar{\mathbf{V}}_C + \bar{\mathbf{K}}_C^{(r)},$$

$$\text{де } \bar{\mathbf{K}}_C^{(r)} = \sum \bar{\mathbf{r}}_C \times m_k \bar{\mathbf{V}}_{kr}. \quad (86)$$

Величина  $\bar{\mathbf{K}}_C^{(r)}$  є кінетичним моментом системи відносно центра мас при відносному русі щодо системи координат, яка рухається поступально разом із центром мас, тобто системи координат  $S_{хуz}$ .

Формула (86) показує, що кінетичний момент абсолютного руху системи відносно нерухомої точки  $O$  дорівнює векторній сумі кінетичного моменту центра мас щодо тієї ж точки, якби в центрі мас була зосереджена вся маса системи, і кінетичного моменту системи відносно центра мас для відносного руху системи щодо рухомої системи координат, яка рухається поступально разом із центром мас.

Отримаємо тепер теорему про зміну кінетичного моменту системи у відносному русі відносно центра мас.

Для абсолютного руху системи й нерухомої точки  $O$  теорема про зміну кінетичного моменту має вигляд

$$\frac{d\bar{\mathbf{K}}_0}{dt} = \sum \bar{\mathbf{r}}_k \times \bar{\mathbf{F}}_k^{(e)}.$$

Підставляючи сюди значення  $\bar{\mathbf{r}}_k$  й  $\bar{\mathbf{K}}_0$  за формулою (86) і проводячи диференціювання і угруповання членів, одержуємо:

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}_C}{dt} \times M\bar{\mathbf{V}}_C + \bar{\mathbf{r}}_C \times M \frac{d\bar{\mathbf{V}}_C}{dt} + \frac{d\bar{\mathbf{K}}_C^{(r)}}{dt} = \bar{\mathbf{r}}_C \times \sum \bar{\mathbf{F}}_k^{(e)} + \sum \bar{\mathbf{r}}_k \times \bar{\mathbf{F}}_k^{(e)}.$$

Перенесемо із правої частини в ліву перший доданок і з огляду на те, що

$$\frac{d\bar{r}_C}{dt} \times M\bar{V}_C = \bar{V}_C \times M\bar{V}_C = 0,$$

як векторний добуток паралельних векторів, отримаємо:

$$\bar{r}_C \times \left[ M \frac{d\bar{V}_C}{dt} - \sum \bar{F}_k^{(e)} \right] + \frac{d\bar{K}_C^{(e)}}{dt} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

У цій формулі вираз у квадратних дужках дорівнює 0 на підставі теореми про рух центра мас системи (63), і, отже, формула набуде вигляду:

$$\frac{d\bar{K}_C^{(e)}}{dt} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)},$$

або

$$\frac{d\bar{K}_C^{(e)}}{dt} = \bar{L}_C^{(e)}, \quad (87)$$

де  $\bar{L}_C^{(e)} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}$  є **головним моментом всіх зовнішніх сил щодо центра мас**.

Формула (87) виражає *теорему про зміну кінетичного моменту системи* щодо центра мас для відносного руху системи стосовно системи координат, що рухається поступально із центром мас. Формується вона так само, як для випадку, в якому центр мас є нерухомою точкою.

Цю теорему застосовують для вивчення обертальної частини плоского руху і руху вільного твердого тіла навколо центра мас.

## 8.7 Теорема Резаля

Теоремі про зміну кінетичного моменту системи можна дати наступне кінематичне тлумачення. З кінематики точки відомо, що швидкість точки можна розглядати як швидкість кінця радіуса-вектора, який переміщується за точкою, яка рухається, або як швидкість зміни самого радіуса-вектора, якщо він проведений у точку, що рухається,

з будь-якої нерухомої точки (рис.38). Траєкторія точки, що рухається, при цьому є годографом  $\bar{r}$  (радіуса-вектора), а швидкість точки спрямована за дотичною до цього годографа й дорівнює першій похідній за часом від радіуса-вектора. Аналогічно цьому, і похідну за часом від кінетичного моменту можна розглядати як своєрідну швидкість кінця цього вектора при русі за годографом кінетичного моменту. (рис.39). Ця швидкість не є звичайною швидкістю точки, тому що кінетичний момент має іншу розмірність, чим радіус-вектор. Це є швидкість зміни вектора кінетичного моменту.

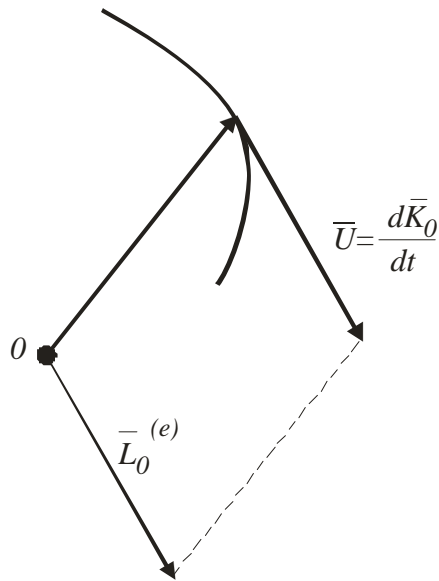


Рисунок 38

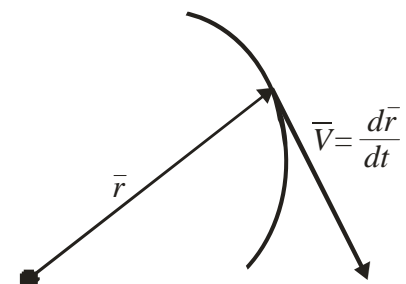


Рисунок 39

Таким чином, якщо позначити через  $\bar{U}$  цю швидкість кінця кінетичного моменту, тобто  $\bar{U} = \frac{d\bar{K}_0}{dt}$ , то теорему про зміну кінетичного моменту системи (77) можна подати в новій формі – у вигляді так званої *теорему Резаля*:

$$\bar{U} = \bar{L}_0^{(e)}. \quad (88)$$

**Теорему Резаля** можна сформулювати так: *при русі механічної системи швидкість точки, що співпадає з кінцем вектора кінетичного моменту відносно точки O дорівнює за величиною й паралельна за напрямком головному моменту всіх зовнішніх сил системи відносно тієї ж самої точки O*. На цій теоремі ґрунтується наближена теорія гіроскопів.

## 8.8 Методика і приклади розв'язання задач

Теорему про зміну кінетичного моменту або моменту кількості руху механічної системи зручно застосувати при дослідженні руху системи, до якої належать тверді тіла, що здійснюють обертальний рух навколо довільної точки або осі.

Розв'язання задач за допомогою теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи відносно нерухомої осі рекомендується виконувати за таким планом:

1) обрати і спрямувати одну з осей системи відліку вздовж осі обертання;

2) записати теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно відповідної осі;

3) прикласти до механічної системи всі зовнішні сили;

4) обчислити кінетичний момент механічної системи відносно нерухомої осі та визначити його похідну за часом;

5) обчислити головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої осі;

6) підставити результати, отримані при виконанні пунктів 4 та 5 у пункт 2, потім залежно від умови задачі, розв'язати пряму або обернену (основну) задачу динаміки.

Якщо справедливий закон збереження кінетичного моменту механічної системи, то методика розв'язання задач така:

1) побудувати систему відліку і спрямувати одну з осей системи вздовж осі обертання;

2) записати теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно обраної осі;

3) прикласти до механічної системи усі зовнішні сили;

4) показати, що сума моментів усіх зовнішніх сил системи відносно осі обертання дорівнює нулю;

5) обчислити і прирівняти кінетичні моменти механічної системи відносно осі у початковий і кінцевий моменти часу;

6) розв'язати здобуте рівняння і визначити шукану величину.

**Приклад 14.** Вакуум-фільтр неперервної дії (рис.40) складається з барабана 1, фільтрувальної тканини 2, короба для сушла 3 і натяжного пристрою з роликками. Ролики 4, 5 і 6 забезпечують підтримку фільтрувальної тканини з осадам при роботі фільтра, а ролик 7 забезпечує її натяг.

#### Розв'язання

На барабан 1 діють обертальний момент  $M$  і момент сил опору, пропорційний кутовий швидкості барабана:  $M_{on} = -aw$ , де  $a$  – стала величина.

Нехтуючи масою фільтрувальної тканини і осаду та вважаючи, що проковзування фільтрувальної тканини по барабану і роликках відсутнє, визначити закон, за яким змінюється кут повороту барабана  $j = f(t)$ , якщо маса барабана  $m$ , радіус барабана  $R$ , радіус інерції –  $r$ , а ролик 7 є суцільним однорідним диском масою  $m_1$ , радіус якого дорівнює  $r$ . У початковий момент руху система перебувала у спокої.

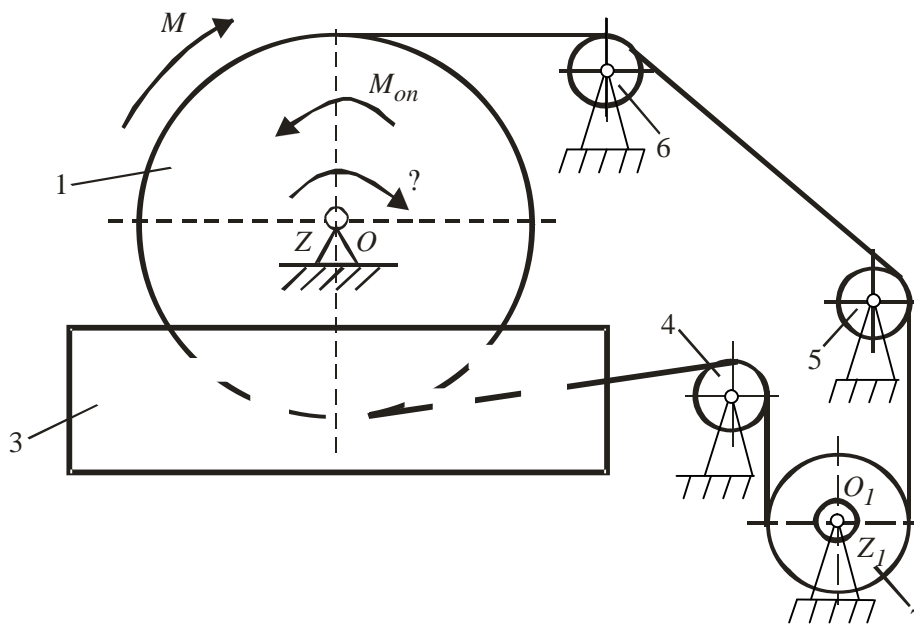


Рисунок 40

Застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи у проекції на вісь  $z$ :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e).$$

Оскільки кінетичний момент твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, відносно осі обертання дорівнює добутку кутової швидкості обертання тіла навколо цієї осі на момент інерції тіла відносно цієї самої осі, то останнє рівняння набуває вигляду

$$J_z \dot{\omega} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e), \quad (a)$$

де  $J_z$  – момент інерції твердого тіла відносно осі обертання;  $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$

– кутове прискорення твердого тіла;  $\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e)$  – алгебрична сума моментів усіх зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, відносно осі обертання.

До барабана 1 прикладені: обертальний момент  $M$ , момент сил опору  $M_{on}$ , сила ваги барабана  $\bar{P}$ , реакції  $\bar{X}_O, \bar{Y}_O$  в точці  $O$ , реакції фільтрувальної тканини  $T_1$  і  $T_2$  (рис. 41).

Обчислимо момент зовнішніх сил, прикладених до барабана:

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e) = M + (T_1 - T_2)R - M_{on} = M + (T_1 - T_2)R - a\dot{\omega}$$

де  $\dot{\omega} = \omega$  – кутова швидкість барабана.

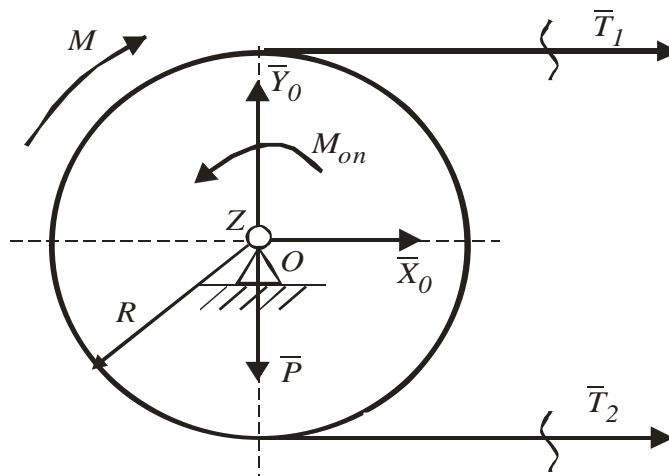


Рисунок 41

Момент інерції барабана відносно осі обертання  $z$

$$J_z = mr^2.$$

Значення моменту  $\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e)$  і моменту інерції  $J_z$  підставляємо в рівняння, отримане з теореми про зміну кінетичного моменту (рівняння (а)):

$$mr^2 \ddot{\omega} = M + (T_1 - T_2)R - a \ddot{\omega} \quad (б)$$

де  $\ddot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$  – кутове прискорення барабана 1.

В останній рівності реакції фільтрувальної тканини  $T_1$  і  $T_2$  нам невідомі.

Для виключення  $T_1$  і  $T_2$  розглянемо рух ролика 7 (рис. 42). Ролик здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі  $z_1$ . Складемо рівняння руху ролика. Це рівняння аналогічне попередньому рівнянню

$$J_{z_1} \ddot{\omega}_7 = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e), \quad (в)$$

де  $\ddot{\omega}_7 = \frac{d\omega_7}{dt}$  – кутове прискорення ролика 7.

На ролик 7 діють сила ваги  $\bar{P}_7$  і реакції фільтрувальної тканини  $\bar{T}_1$  і  $\bar{T}_2$ . Обчислимо момент сил, прикладених до ролика 7:

$$\sum_{k=1}^n M_{z_1}(\bar{F}_k^e) = (T_2 - T_1)r.$$

Момент інерції ролика відносно осі обертання  $z_7$

$$J_{z_1} = \frac{m_7 r^2}{2}.$$

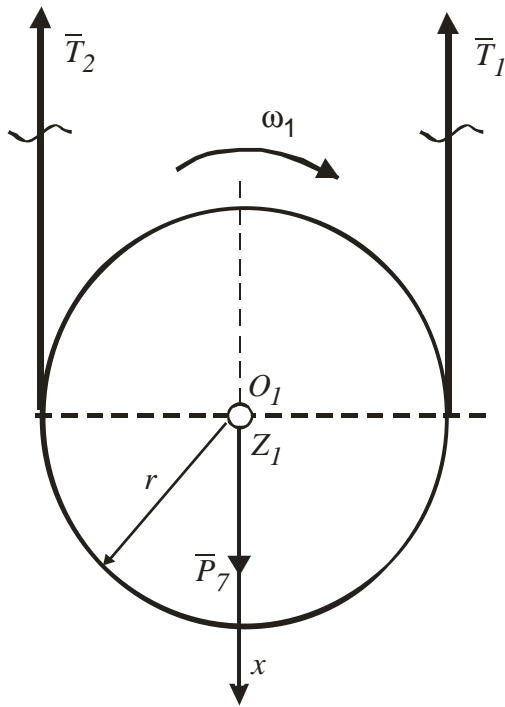


Рисунок 42

Значення моменту  $\sum_{k=1}^n M_{z_1}(\bar{F}_k^e)$  і моменту інерції  $J_{z_1}$  підставляємо у диференціальне рівняння

$$\frac{m_7 r^2}{2} \ddot{\varphi}_7 = (T_2 - T_1) r. \quad (\Gamma)$$

Оскільки вісь  $z_1$  нерухома, то з рівняння рівноваги сил, що діють на ролик, тобто

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad P_7 - T_1 - T_2 = 0,$$

матимемо

$$P_7 = T_1 + T_2. \quad (\Delta)$$

Розв'язуючи систему останніх рівнянь (Г) і (Д), дістанемо:

$$T_1 = \frac{P_7}{2} - \frac{m_7 r \ddot{\varphi}_7}{4}; \quad T_2 = \frac{P_7}{2} + \frac{m_7 r \ddot{\varphi}_7}{4}. \quad (\epsilon)$$



Враховуючи, що за умовою задачі фільтрувальна тканина рухається без ковзання, тобто всі її точки мають однакові за величиною швидкості, матимемо  $wR = w_{\gamma}r$  або  $j\dot{R} = j\dot{\gamma}r$ , де  $w_{\gamma} = j\dot{\gamma}$  – кутова швидкість ролика 7.

Диференціюючи останній вираз за часом, матимемо

$$j\ddot{R} = j\ddot{\gamma}r,$$

звідки

$$j\ddot{\gamma} = j\ddot{R} \frac{R}{r}. \quad (\text{ж})$$

Беручи до уваги рівності (е) і (ж) рівнянню (б) надамо вигляду

$$\frac{j\ddot{\gamma}}{2}(2mr^2 + m_{\gamma}R^2) = M - aj\dot{\gamma},$$

або

$$j\ddot{\gamma} = \frac{2}{2mr^2 + m_{\gamma}R^2}(M - aj\dot{\gamma}). \quad (\text{и})$$

Оскільки  $j\ddot{\gamma} = \frac{dj\dot{\gamma}}{dt}$ , то диференціальне рівняння (з) можна записати так:

$$\frac{dj\dot{\gamma}}{dt} = \frac{2}{2mr^2 + m_{\gamma}R^2}(M - aj\dot{\gamma}).$$

Позначимо  $\frac{2}{2mr^2 + m_{\gamma}R^2} = n$ ; тоді диференціальне рівняння набирає

вигляду

$$\frac{dj\dot{\gamma}}{dt} = n(M - aj\dot{\gamma}). \quad (\text{к})$$

Відокремимо змінні  $j\dot{\gamma}$  і  $t$ :

$$\frac{dj\dot{\gamma}}{n(M - aj\dot{\gamma})} = dt.$$

Після інтегрування цього рівняння дістанемо

$$-\frac{1}{na} \ln(M - aj) + c_1 = t. \quad (\text{л})$$

Сталу інтегрування  $c_1$  визначимо на підставі початкових умов руху:  $t = 0$ ;  $j(0) = 0$ ;  $\dot{j}(0) = 0$ , тоді з останнього рівняння дістанемо

$$c_1 = \frac{1}{na} \ln M.$$

Отже, рівняння (к) набирає вигляду

$$\frac{1}{na} \ln M - \frac{1}{na} \ln(M - aj) = t.$$

Перетворимо останнє рівняння

$$\ln \frac{M}{M - aj} = nat,$$

або

$$e^{nat} = \frac{M}{M - aj},$$

звідки знайдемо

$$j = \frac{M}{a} (1 - e^{-nat}). \quad (\text{м})$$

Через те, що  $\dot{j} = \frac{dj}{dt}$ , то рівняння (л) набуде вигляду

$$\frac{dj}{dt} = \frac{M}{a} (1 - e^{-nat}).$$

Відокремимо змінні  $j$  і  $t$ :

$$dj = \frac{M}{a} (1 - e^{-nat}) dt.$$

Після інтегрування цього рівняння дістанемо

$$j = \frac{Mt}{a} - \frac{M}{a^2 n} e^{nat} + c_2. \quad (\text{н})$$

Сталу інтегрування  $c_2$  визначимо на підставі початкових умов руху:  $t = 0$ ;  $j(0) = 0$ ;  $\dot{j}(0) = 0$ , тоді з рівняння (м) дістанемо

$$c_2 = \frac{M}{a^2 n}.$$

З урахуванням значення  $c_2$  рівняння (м) набуде вигляду

$$j = \frac{Mt}{a} - \frac{M}{a^2 n} (1 - e^{nat}),$$

або, беручи до уваги значення  $n$ , остаточно матимемо:

$$j = \frac{Mt}{a} + \frac{M(2mr^2 + m_7 R^2)}{2a^2} \left( 1 - e^{-\frac{2at}{2mr^2 + m_7 R^2}} \right) \quad (\text{п})$$

Рівняння (п) є шуканим законом, за яким змінюється кут повороту барабана 1 вакуум-фільтра при його роботі з часом.

**Приклад 15.** Однорідна кругла горизонтальна платформа радіусом  $R$  і вагою  $\bar{Q}$  може обертатись без тертя навколо вертикальної осі. Як зміниться кутова швидкість платформи, якщо людина, яка спочатку стояла на платформі на відстані  $r$  від її осі, піде: 1) колом радіусом  $r$  по платформі з відносною швидкістю  $\bar{U}$ ; 2) перпендикулярно осі обертут платформи, відходячи від неї з тією самою відносною швидкістю.

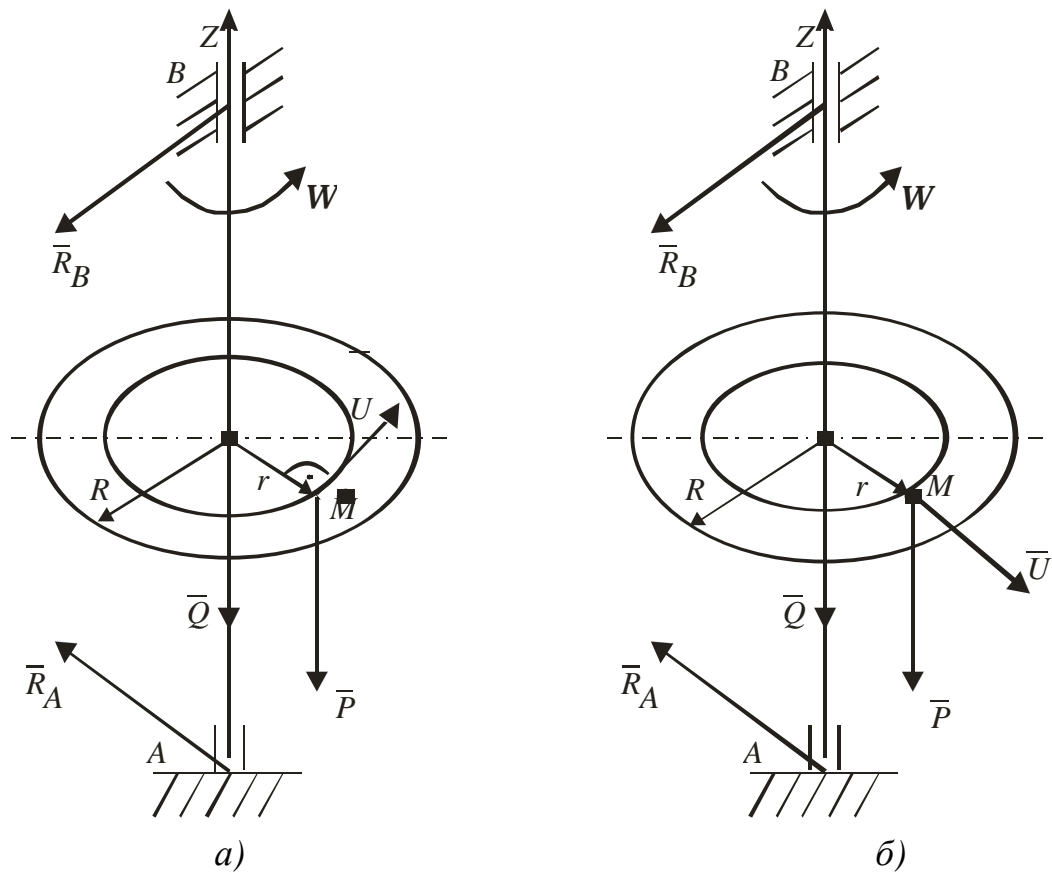


Рисунок 43

### Розв'язання

Нехай кутова швидкість платформи була  $w_0$ , а потім внаслідок руху людини по платформі стала  $w$ . Оскільки зовнішні сили для системи, яка складається із платформи і людини, паралельні осі  $z$  (рис. 43) або її перетинають, то

$$\sum_{i=1}^N M_z(\bar{F}_i^e) = 0.$$

Отже  $\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_i^e)$ ;  $\frac{dK_z}{dt} = 0$ , звідки  $K_z = const$ ;  $K_z = K_{0z}$ .

Визначимо кінетичний момент системи для двох випадків напрямку відносної швидкості  $\bar{U}$  в початкові та кінцеві моменти часу:

1 Початковий момент часу

$$K_{0z} = \left( \frac{Q}{2g} \cdot R^2 + \frac{P}{g} \cdot r^2 \right) w_0.$$

В обох випадках значення  $K_{0z}$  однакові.

2 Кінцевий момент часу.

Перший випадок:

$$K_z = \left( \frac{Q}{2g} \cdot R^2 + \frac{P}{g} \cdot r^2 \right) w + \frac{P}{g} rU.$$

Другий випадок:

$$K_z = \left( \frac{Q}{2g} \cdot R^2 + \frac{P}{g} (r + Ut)^2 \right) w.$$

Якщо прирівняти послідовно кінцеві вирази до початкового виразу і розв'язати отримані рівняння відносно шуканої кутової швидкості платформи, то будемо мати висновок, що у другому випадку кутова швидкість змінюється за законом:

$$w = w_0 = \frac{QR^2 + 2Pr^2}{QR^2 + 2P(r + Ut)^2},$$

а в першому зменшується відповідно рівнянню

$$w = w_0 - \frac{Pr}{0,5QR^2 + Pr^2} U.$$

**Приклад 16.** На барабан вагою  $P$  і радіусом  $r$  (рис.44) намотана нитка з прикріпленням до її кінця вантажем  $A$  вагою  $G$ . Нехтуючи вагою нитки, визначити кутове прискорення барабана при вертикальному русі вантажу, якщо радіус інерції барабана відносно осі  $O$  дорівнює  $r$  і на барабан діє сталий момент сил тертя  $M_{тр}$ .

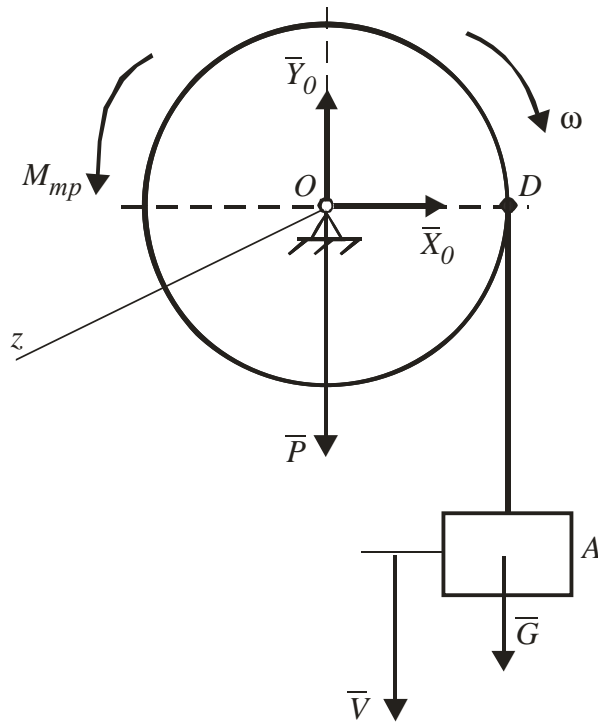


Рисунок 44

#### Розв'язання

Розглянемо систему барабан – вантаж. Тоді невідомі сили натягу нитки будуть внутрішніми силами.

Скористаємося теоремою про зміну кінетичного моменту відносно осі  $Oz$ :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e).$$

Для системи, що розглядається:  $K_z = K_z^B + K_z^B$ , де  $K_z^B, K_z^B$  – кінетичний момент вантажу і барабана відповідно. Вантаж рухається поступально, його швидкість  $V_A = V_D = V = wr$ . Барабан обертається навколо осі  $Oz$  і його момент інерції  $J_{oz} = \frac{P}{g} r^2$ . Тоді кінетичні моменти:

$$K_z^B = \frac{G}{g} Vr; \quad K_z^B = J_{oz} \cdot w = \frac{P}{g} r^2 w$$

і кінетичний момент системи:

$$K_z = (Gr^2 + Pr^2) \frac{w}{g}.$$

Обчислимо суму моментів зовнішніх сил відносно осі  $z$ :

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = Gr - M_{mp},$$

тоді, згідно з теоремою:

$$\frac{Gr^2 + Pr^2}{g} \frac{dw}{dt} = Gr - M_{mp},$$

звідки, враховуючи, що  $\frac{dw}{dt} = e$ :

$$e = \frac{(Gr - M_{mp})g}{Gr^2 + Pr^2}.$$

**Приклад 17.** Однорідна горизонтальна платформа (прямокутна з сторонами  $2l$  і  $l$ ), яка має масу  $m_1$ , жорстко скріплена з вертикальним валом і обертається разом з ним навколо осі  $z$  з кутовою швидкістю  $w_0$  (рис.45). У момент часу  $t_0 = 0$  на вал починає діяти обертальний момент  $M$ , спрямований протилежно  $w_0$ . Одночасно вантаж  $D$  масою  $m_2$ , який знаходиться в жолобі  $AB$  в точці  $C$ , починає рухатися вздовж жолобу під дією внутрішніх сил за законом  $s = CD = F(t)$ .

Розв'язання

Визначити, нехтуючи масою вала, залежність  $w = f(t)$  – закон зміни кутової швидкості платформи за наступними даними:

$m_1 = 16$  кг,  $m_2 = 10$  кг,  $l = 0,5$  м,  $w_0 = 2$  с<sup>-1</sup>,  $S = 0,4$  т<sup>2</sup> м,  $M = kt$ , де  $k = 6$  Нм/с.

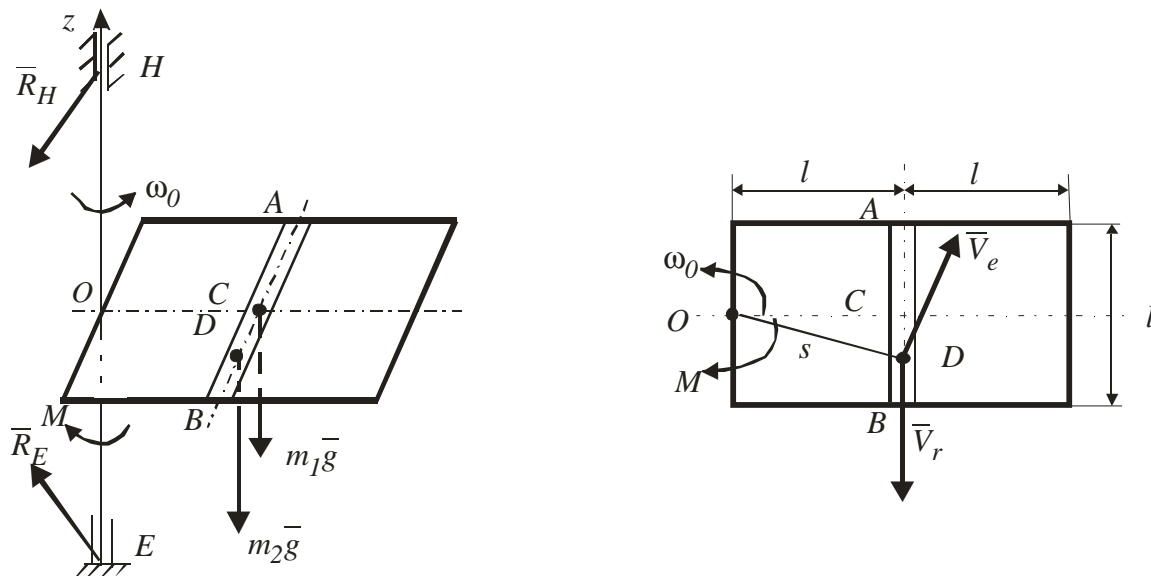


Рисунок 45

Розглянемо рух механічної системи, яка складається з платформи і вантажу, який надалі будемо вважати матеріальною точкою. Зобразимо діючі на систему сили ваги  $m_1 \bar{g}$  і  $m_2 \bar{g}$ , реакції в'язей  $\bar{R}_E$  і  $\bar{R}_H$ , а також момент  $M$ , спрямований протилежно  $\omega_0$ .

Запишемо теорему про зміну кінетичного моменту системи в диференціальній формі відносно осі обертання  $z$ :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^N M_z(\bar{F}_i^e).$$

Відповідно рис. 45, сили ваги  $m_1 \bar{g}$  і  $m_2 \bar{g}$  паралельні осі  $z$ , а реакції  $\bar{R}_E$  і  $\bar{R}_H$  перетинають цю вісь. Таким чином їх моменти відносно осі  $z$  дорівнюють нулю. Тоді, вважаючи для моменту додатним напрямком обертання у бік дугової стрілки  $\omega_0$ , отримаємо

$$\sum_{i=1}^N M_z(\bar{F}_i^e) = -M = -kt,$$

і попереднє рівняння набуде такого вигляду

$$\frac{dK_z}{dt} = -kt.$$



Проінтегруємо це рівняння

$$K_z = -\frac{k}{2}t^2 + C.$$

Для даної механічної системи  $K_z = K_z^{\Pi} + K_z^D$ , де  $K_z^{\Pi}, K_z^D$  – кінетичні моменти платформи і вантажу  $D$  відповідно,  $K_z^{\Pi} = J_z w$ .

Значення моменту інерції платформи  $J_z$  знайдемо за теоремою Гюйгенса – Штейнера (21) про моменти інерції відносно паралельних осей:

$$J_z = J_{cz} + m_1(OC)^2 = J_{cz} + m_1l^2,$$

де  $J_{cz}$  – момент інерції відносно осі, паралельної осі  $z$ , і яка проходить через центр  $C$  платформи.

Як відомо  $J_{cz} = \frac{m_1}{12}(4l^2 + l^2) = \frac{5}{12}m_1l^2$ , тоді  $J_z = \frac{5}{12}m_1l^2 + m_1l^2 = \frac{17}{12}m_1l^2$ .

Таким чином,

$$K_z^{\Pi} = \frac{17}{12}m_1l^2w.$$

Для визначення  $K_z^D$  звернемося до рисунка 45 і розглянемо рух вантажу  $D$  як складний, вважаючи його рух вздовж платформи відносним, а обертання самої платформи навколо осі  $z$  – переносним рухом. Тоді, абсолютна швидкість вантажу  $\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_e$ .

Так як вантаж  $D$  рухається за законом  $s = CD = 0,4t^2$ , то  $V_r = \dot{s} = 0,8t$ .

Зображаємо вектор  $\bar{V}_r$  на рисунку 45 з урахуванням знака  $\dot{s}$  (при  $\dot{s} < 0$  напрямом  $\bar{V}_r$  був би протилежним). Потім, враховуючи напрямом  $w$ , зображаємо вектор  $\bar{V}_e$  ( $\bar{V}_e \perp OD$ ), чисельно  $V_e = w OD$ . Тоді, за теоремою Варіньона, маємо:

$$K_z^D = M_z(m_2\bar{V}) = M_z(m_2\bar{V}_r) + M_z(m_2\bar{V}_e) = -m_2V_r OC + m_2V_e OD = \\ = -0,8m_2t + m_2(OD)^2 w.$$

З рисунка 46 видно, що  $(OD)^2 = l^2 + s^2 = l^2 + 0,16t^4$ . Підставляючи значення  $(OD)^2$  в останнє рівняння, а значення  $K_z^H$  і  $K_z^D$  в формулу для визначення кінетичного моменту системи і враховуючи дані умови задачі, отримаємо:

$$K_z = \frac{17}{12}m_1l^2w + m_2(l^2 + 0,16t^4)w - 0,8m_2lt = (8,17 + 1,6t^4)w - 4t.$$

Тоді, з теореми про зміну кінетичного моменту, в якій  $k=6$ , отримаємо:

$$(8,17 + 1,6t^4)w - 4t = 3t^2 + C_1.$$

Сталу інтегрування  $C_1$  знаходимо за початковими умовами при  $t=0$ ;  $w=w_0$ . Отримаємо  $C_1 = 8,17w_0 = 16,34$ . При цьому значенні  $C_1$  з останнього рівняння знаходимо шукану залежність  $w$  от  $t$ :

$$w = \frac{16,34 + 4t - 3t^2}{8,17 + 1,6t^4},$$

де  $t$ , с;  $w$ ,  $c^{-1}$ .

## 8.9 Приклади завдань для самоперевірки знань

### Варіант 1

- 1 Записати формулу і дати визначення поняття «кількість руху точки».
- 2 Записати та сформулювати теорему про змінення кінетичного моменту точки відносно центра.

- 3 Записати та сформулювати теорему про змінення кількості руху точки в диференційній формі.
- 4 Момент інерції стрижня відносно осі, перпендикулярної до осі стрижня і яка проходить через кінець стрижня (формула та визначення).
- 5 Записати та сформулювати теорему про рух центра мас механічної системи.

### **Варіант 2**

- 1 Дати визначення кількості руху системи. Записати формулу.
- 2 Сформулювати властивості внутрішніх сил системи.
- 3 Записати та сформулювати теорему про змінення кількості руху точки (другу форму – теорему імпульсів).
- 4 Момент інерції системи відносно центра (формула та визначення).
- 5 Сформулювати закони збереження положення центра мас механічної системи.

### **Варіант 3**

- 1 Записати формулу для визначення кількості руху тіла (використовуючи поняття «центр мас») та дати визначення.
- 2 Пояснити термін «повний імпульс сили».
- 3 Момент інерції системи відносно осі (формула та визначення).
- 4 Сформулювати теорему про змінення кількості руху системи в інтегральній формі.
- 5 Записати формулу для визначення координат центра мас механічної системи.

### **Варіант 4**

- 1 Дати визначення елементарного імпульсу сили.
- 2 Записати та сформулювати теорему про змінення кількості руху системи в кінцевій або інтегральній формі.

- 3 Кінетичний момент при обертальному русі твердого тіла (формула та визначення).
- 4 Сформулювати поняття центра мас механічної системи. Записати формулу для визначення радіуса-вектора центра мас.
- 5 Момент інерції стрижня відносно його центра (формула та визначення).

### **Варіант 5**

- 1 Записати та сформулювати теорему про змінення кількості руху системи у другій формі – теорему імпульсів.
- 2 Записати та сформулювати теорему про змінення кінетичного моменту сил системи відносно осі.
- 3 Кінетичний момент точки відносно центра (дати визначення).
- 4 Момент інерції диску відносно центра (формула).
- 5 Теорема Гюйгенса-Штейнера про моменти інерції відносно паралельних осей (записати та сформулювати).

### **Варіант 6**

- 1 Записати та сформулювати теорему про змінення кількості руху точки в інтегральній формі.
- 2 Сформулювати закони збереження кінетичних моментів.
- 3 Кінетичний момент системи відносно центра (дати визначення).
- 4 Записати формулу для моментів інерції системи відносно координатних осей.
- 5 Записати формулу для моменту інерції кільця відносно його центра.

## 9 ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

Для розгляду теореми про зміну кінетичної енергії необхідно ввести нове поняття для сили – робота сили – і розглянути деякі найпростіші способи її обчислення.

### 9.1 Робота сили

Робота сили на будь-якому переміщенні є однією з основних характеристик, що оцінює дію сили на цьому переміщенні. Розглянемо елементарну роботу, повну роботу і потужність.

#### 9.1.1 Елементарна робота сили

Елементарна робота  $dA$  сили  $\vec{F}$  на елементарному (нескінченно малому) переміщенні  $d\vec{r}$  визначається у такий спосіб (рис.46):

$$dA = F_t ds, \quad (89)$$

де  $F_t$  – проекція сили  $\vec{F}$  на напрямок швидкості точки або на напрямок елементарного переміщення, що вважається спрямованим за швидкістю точки.

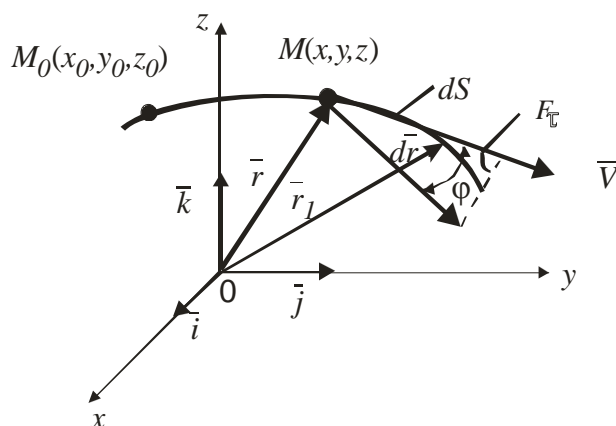


Рисунок 46

Елементарна робота є скалярною величиною. Її знак визначається знаком проекції сили  $F_t$ , тому що переміщення  $ds$  приймаємо додатним. При  $F_t > 0$  елементарна робота  $dA > 0$ , а при  $F_t < 0$   $dA$  – від’ємна. Тому що  $F_t = F \cos j$ , де  $j$  – кут між силою  $\vec{F}$  і напрямком швидкості точки  $\vec{V}$ , то вираз 89 можна подати у вигляді

$$dA = F \cos j \, ds. \quad (90)$$

У цій формулі величини  $F$  і  $ds$  позитивні, і знак  $dA$  визначається знаком  $\cos j$ . Якщо  $j$  – гострий кут ( $j < 90^\circ$ ), то  $dA$  – додатне, якщо  $j$  – тупий кут ( $180^\circ \geq j > 90^\circ$ ), то  $dA$  – від’ємна, якщо  $j = 90^\circ$ , то  $dA = 0$ .

Отже, елементарна робота сили дорівнює добутку елементарного переміщення на проекцію сили на це переміщення. Таким чином, якщо сила перпендикулярна елементарному переміщенню, то її елементарна робота дорівнює нулю. Зокрема, робота нормальної складової сили  $F_n$  завжди дорівнює нулю.

Приведемо інші формули для обчислення елементарної роботи сили. З кінематики точки відомо, що  $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ;  $V = |\vec{V}| = \frac{ds}{dt}$ . Отже,  $ds = |d\vec{r}| = V \, dt$ .

Після цього, відповідно до формули (90), елементарна робота

$$dA = F |d\vec{r}| \cos j = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (91)$$

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку сили на диференціал радіуса-вектора точки (елементарний приріст радіуса-вектора точки при її елементарному переміщенні). Так як  $d\vec{r} = \vec{V} \, dt$ , то, відповідно до формули (91),

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{V} \, dt = \vec{F} \, dt \cdot \vec{V}. \quad (92)$$

Елементарна робота дорівнює скалярному добутку елементарного імпульсу сили на швидкість точки.

Якщо силу і радіус-вектор спроеціювати на осі координат, тобто

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

З останньої формули

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Підставляючи у (91) значення  $\vec{F}$  і  $d\vec{r}$ , одержуємо

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (93)$$

Формулу (93) називають *аналітичним виразом елементарної роботи*. Хоча вираз для елементарної роботи (93) за формою і нагадує повний диференціал функції координат точки, у дійсності у загальному випадку елементарна робота не є повним диференціалом.

Елементарна робота є повним диференціалом функції координат точки тільки для спеціального класу сил, так званих *потенційних* сил, які будуть розглянути нижче.

### 9.1.2 Повна робота сили

Для визначення повної роботи сили  $\vec{F}$  на переміщенні від точки положення з  $M_0$  до точки  $M$  розіб'ємо це переміщення на  $n$  переміщень, кожне з яких у межі переходить в елементарне. Тоді роботу  $A$  можна виразити формулою

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n dA_k,$$

де  $dA_k$  – робота на  $k$ -му елементарному переміщенні, на які розбито повне переміщення.

Тому що сума у визначенні роботи є інтегральною сумою визначення криволінійного інтеграла на ділянці кривої  $M_0M$ , то, використовуючи для

елементарної роботи формулу (89), одержуємо

$$F = \int_{M_0}^M F_t ds. \quad (94)$$

Використовуючи інші вирази для елементарної роботи, повну роботу сили можна подати також у вигляді

$$A = \int_{M_0}^M \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz), \quad (95)$$

або

$$A = \int_0^t \bar{F} \cdot V dt, \quad (96)$$

де момент часу  $t = 0$  відповідає положенню точки  $M_0$ , а момент часу  $t$  – точці  $M$ .

Формула (96) особливо зручна для обчислення роботи сили, коли сила відома як функція часу. Відзначимо, що з визначення елементарної і повної роботи витікають такі її властивості:

- 1) робота рівнодіючої сили на будь-якому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт, що складають рівнодіючу на тому ж переміщенні;
- 2) робота сили на повному переміщенні дорівнює сумі робіт цієї ж сили на складових переміщеннях, на які будь-яким чином розбите повне переміщення.

Першу властивість досить довести тільки для елементарної роботи рівнодіючої сили. Якщо сила  $\bar{R}$  є рівнодіючою силою системи сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \mathbf{K}, \bar{F}_N)$ , прикладених до розглянутої точки, то вона виражається геометричною сумою цих сил. Тоді за визначенням елементарної роботи сили маємо:

$$\bar{R} \cdot d\bar{r} = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \mathbf{L} + \bar{F}_N) \cdot d\bar{r} = \bar{F}_1 \cdot d\bar{r} + \bar{F}_2 \cdot d\bar{r} + \mathbf{L} \cdot d\bar{r} + \bar{F}_N \cdot d\bar{r}.$$

Перша властивість доведена.



Друга з означених властивостей безпосередньо витікає з можливості розбивання будь-яким чином повного проміжку інтегрування на складові, причому повний інтеграл на повному проміжку інтегрування дорівнює сумі інтегралів на складових частинах повного проміжку. Одиницею повної роботи, так само як й елементарної, є джоуль: 1 Дж=1 Н·м.

Якщо проекція сили на напрямок швидкості є величиною сталою, то з формули (94) одержимо

$$A = F_t s ,$$

де  $s$  – шлях, пройдений точкою.

Так як  $A = F \cos j$  , то останню формулу можна подати у вигляді

$$F = F_s \cos j .$$

Треба зазначити, що в цій формулі як  $F$  , так і  $j$  можуть бути змінними, але  $F \cos j$  є постійною величиною. Це виконується також, якщо  $F$  і  $j$  теж сталі величини. Якщо додатково кут  $j$  дорівнює  $0^\circ$  або  $180^\circ$ , то тоді

$$A = \pm F_s ,$$

причому ця формула може бути застосована як для прямолінійного, так і для криволінійного руху. Для цього необхідно, щоб сила  $\bar{F}$  була сталою за модулем і увесь час спрямованою за дотичною до траєкторії точки. У випадку прямолінійної траєкторії сила  $\bar{F}$  повинна бути увесь час спрямована за траєкторією у бік руху точки.

### **9.1.3 Потужність**

Потужність сили, або працездатність будь-якого джерела сили, часто оцінюють тією роботою, що сила може здійснити за одиницю часу. Отже, за визначенням, потужність

$$W = \frac{dA}{dt} . \tag{97}$$

З огляду на формулу (92) для елементарної роботи, потужність  $W$  можна подати у вигляді

$$W = \vec{F} \cdot \vec{V} = FV \cos j . \quad (98)$$

Таким чином, *потужність дорівнює скалярному добутку сили на швидкість точки.*

З формули (98) одержуємо, що чим більше швидкість, тим менше сила при одній і тій же потужності. Отже, якщо від джерела сили із заданою потужністю потрібно одержати більшу силу, то її можна одержати тільки при меншій швидкості. Так, наприклад, коли залізничному локомотиву треба збільшити силу тяги, то для цього треба зменшити швидкість потягу.

Одиницею потужності є ват:  $1\text{Вт} = 1\text{Дж/с}$ .

## 9.2 Окремі випадки обчислення роботи сили

Робота сили у загальному випадку залежить від характеру руху точки прикладення сили. Отже, для обчислення роботи треба знати рух цієї точки. Але у природі є сили й приклади руху, для яких роботу можна обчислити порівняно просто, знаючи початкове й кінцеве положення точки.

Розглянемо роботу сили ваги й лінійної сили пружності, що змінюється за законом Гука, і обчислення роботи сили, прикладеної до якої-небудь точки твердого тіла в різних випадках його руху. Як найпростіші приклади руху вкажемо випадки, коли робота дорівнює нулю. Так, робота будь-якої сили дорівнює нулю, якщо вона прикладена увесь час у нерухомій точці або в точках, швидкість яких дорівнює нулю, як, наприклад, у випадку, коли сила увесь час прикладена в миттєвому центрі швидкостей при плоскому русі тіла або увесь час у точках, що лежать на миттєвій осі обертання, у випадку обертання тіла навколо нерухомої точки. Ці випадки можливі в задачах, коли розглядають роботу сили тертя в точці дотику двох тіл при відсутності ковзання одного тіла вздовж іншого. При цьому робота сили тертя дорівнює нулю.

**Робота сили ваги.** Силу ваги  $\bar{P}$  матеріальної точки масою  $m$  поблизу поверхні Землі можна вважати постійною, рівною  $mg$  і спрямованою за вертикаллю вниз (рис. 47). Якщо взяти осі координат  $Oxyz$ , у яких вісь  $Oz$  спрямована за вертикаллю нагору, то

$$P_x = 0; \quad P_y = 0; \quad P_z = -mg.$$

Обчислюючи роботу  $A$  сили  $\bar{P}$  на переміщенні від точки  $M_0$  до точки  $M_1$  за формулою (95) маємо:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = -mg \int_{z_0}^{z_1} dz = -mg(z_1 - z_0),$$

або

$$A = -mgh,$$

де  $h = z_1 - z_0$  – висота, на яку піднімається точка.

З формули бачимо, що робота сили ваги не залежить від вигляду траєкторії, якою рухається точка. Сила, що має таку властивість, називається *потенційною*. Таким чином, сила ваги – потенційна сила.

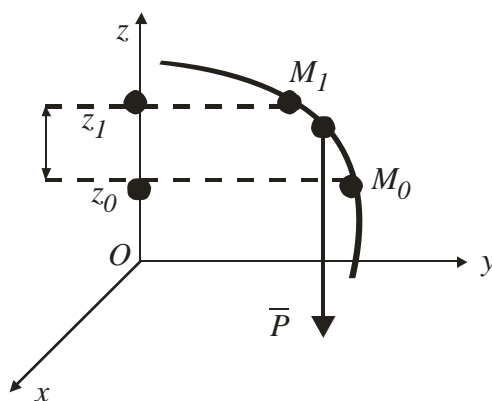


Рисунок 47

При підйомі точки висота  $h$  є відмінною. Отже, у загальному випадку робота сили ваги

$$A = \pm mgh. \quad (99)$$

Робота сили ваги дорівнює взятому зі знаком «+» або «-» добутку цієї сили на вертикальне переміщення точки прикладення сили ваги. «+» - якщо точка рухається вниз; «-» - якщо точка рухається вгору.

**Робота лінійної сили пружності** Лінійною силою пружності називають силу, що діє за законом Гука (рис.48)

$$\vec{F} = -c\vec{r},$$

де  $\vec{r}$  – відстань від точки статичної рівноваги, де сила дорівнює нулю, до розглянутої точки  $M$ ;  $c$  – сталий коефіцієнт жорсткості.

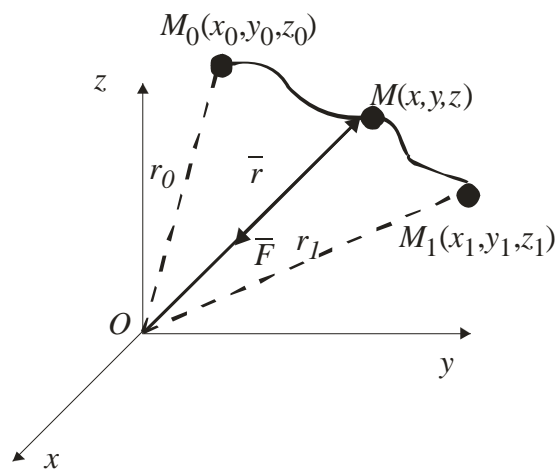


Рисунок 48

Оберемо початок координат у точці статичної рівноваги, тоді

$$F_x = -cx; \quad F_y = -cy; \quad F_z = -cz.$$

Після цього роботу на переміщенні від точки  $M_0$  до точки  $M$  визначимо за формулою

$$A = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -c \int_{M_0}^M (x dx + y dy + z dz) = -c \int_{r_0}^r \vec{r} d\vec{r},$$

тому що

$$xdx + ydy + zdz = \bar{r}d\bar{r},$$

де  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$

Виконуючи інтегрування, одержуємо

$$A = -\frac{c}{2}(r_1^2 - r_0^2). \quad (100)$$

За цією формулою і обчислюють роботу лінійної сили пружності. Якщо точка  $M_0$  збігається з точкою статичної рівноваги  $O$ , то тоді  $r_0 = 0$ , і для роботи сили на переміщенні від точки  $O$  до точки  $M$  маємо

$$A = -\frac{c}{2}r^2.$$

Величина  $r$  – найкоротша відстань між розглянутою точкою  $M$  і точкою статичної рівноваги. Позначимо цю відстань  $I$  і назвемо деформацією пружини. Тоді

$$A = -\frac{c}{2}I^2. \quad (101)$$

Робота лінійної сили пружності на переміщенні зі стану статичної рівноваги завжди від'ємна і дорівнює половині добутку коефіцієнта жорсткості на квадрат деформації. З формули (100) або (101) видно, що робота лінійної сили пружності не залежить від форми переміщення, і робота на будь-якому замкненому переміщенні дорівнює нулю. Вона також дорівнює нулю, якщо точка  $M_0$  й  $M$  лежить на одній сфері, описаній з точки статичної рівноваги.

**Робота сили, прикладеної до твердого тіла.** Одержимо формули для обчислення елементарної й повної роботи сили, прикладеної в будь-якій точці твердого тіла, що здійснює той чи інший рух. Спочатку розглянемо поступальний і обертальний рухи тіла, а потім – загальний випадок руху твердого тіла.

При *поступальному русі твердого тіла* всі точки тіла мають однакові за модулем і напрямком швидкості (рис. 49).

Отже, якщо сила  $\bar{F}$  прикладена до точки  $M_k$ , то так як

$$\bar{V}_k = \bar{V},$$

$$dA = \bar{F} \cdot \bar{V}_k dt = \bar{F} \cdot \bar{V} dt = \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

де  $\bar{r}$  – радіус-вектор довільної точки твердого тіла.

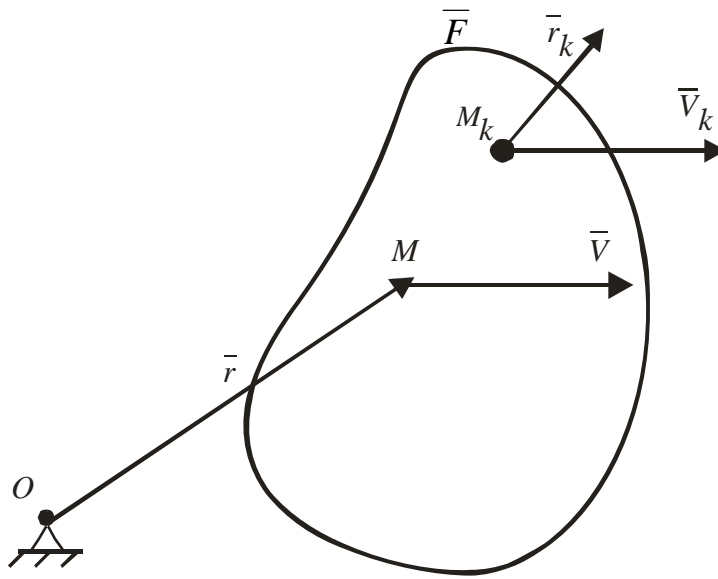


Рисунок 49

На якому-небудь переміщенні повна робота

$$A = \int_{M_0}^M \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

а також може бути отримана з формул (89)...(93) для елементарної роботи сили.

При *обертанні твердого тіла* навколо нерухомої осі, швидкість точки  $M$  можна обчислити за векторною формулою Ейлера (рис.50). Відомо з розгляду кінематики

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

тоді елементарну роботу сили  $\vec{F}$  визначимо за формулою

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{V} dt = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt.$$

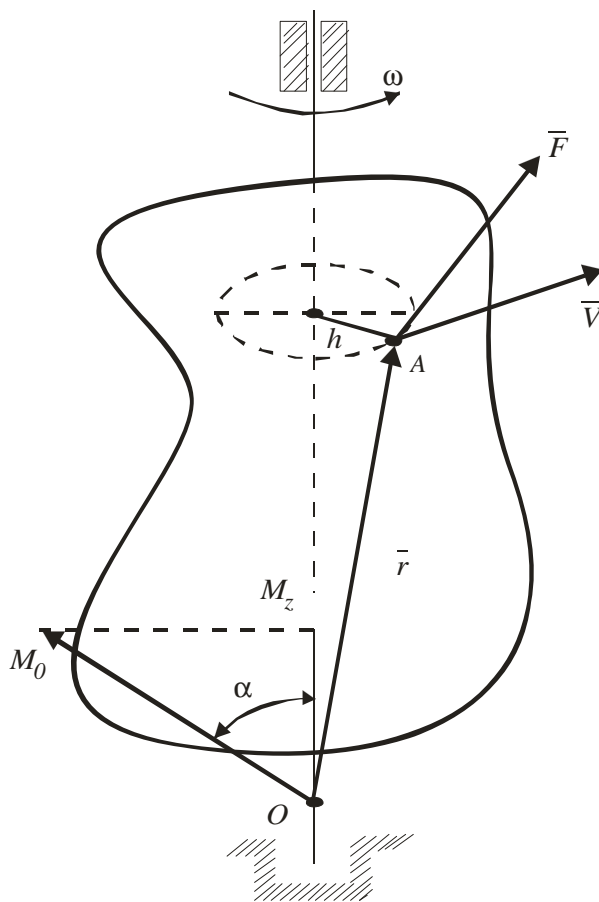


Рисунок 50

У змішаному векторному добутку, що виражається у вигляді матриці, можна переставляти співмножники в круговому порядку:

$$\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

і

$$dA = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) dt = \vec{\omega} \cdot M_0 dt = \omega dt M_0 \cos \alpha,$$

тому що

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{M}_0$$

є моментом сили щодо точки  $O$ .

З огляду на те, що  $M_0 \cos \alpha = M_z$  – момент сили щодо осі обертання  $Oz$  і  $w dt = dj$ , остаточно одержуємо

$$dA = M_z dj . \quad (102)$$

Таким чином, елементарна робота сили, прикладена до будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку моменту сили відносно осі обертання на диференціал кута обертання тіла.

Повна робота

$$A = \int_0^j M_z dj . \quad (103)$$

В окремому випадку, якщо момент сили щодо осі обертання є сталим, тобто  $M_z(\bar{F}) = \text{const}$ , роботу визначають за формулою

$$A = M_z j , \quad (104)$$

де  $j$  – кут обертання тіла, на якому обчислюють роботу сили. Так як  $dA = \bar{w} \cdot \bar{M}_0(\bar{F}) dt$ , то потужність у випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

$$W = \frac{dA}{dt} = \bar{w} \cdot \bar{M}_0(\bar{F}) = w M_z(\bar{F}) . \quad (105)$$

Потужність сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на момент сили відносно осі обертання тіла.

Для вільного тіла у загальному випадку руху швидкість точки  $M$ , у якій прикладена сила  $\bar{P}$  (рис.51),

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{w} \times \bar{r} ,$$

отже,

$$dA = \bar{F} \cdot \bar{V} dt = \bar{F} \cdot \bar{V}_0 dt + \bar{F} \cdot (\bar{w} \times \bar{r}) dt .$$



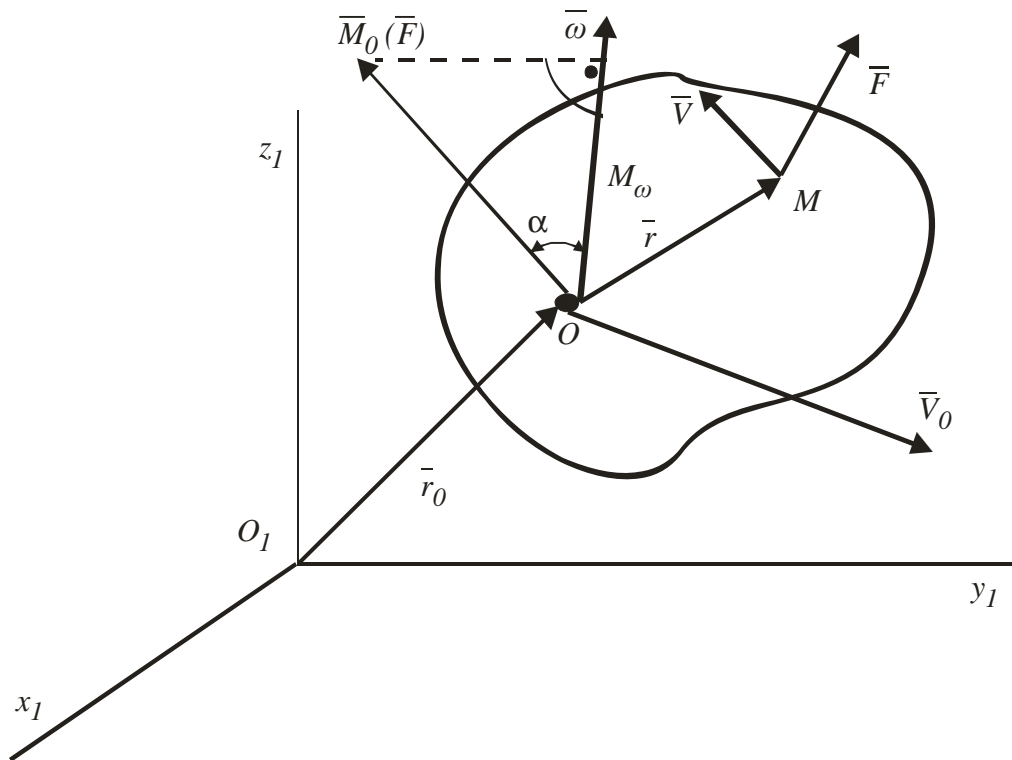


Рисунок 51

З огляду на те, що

$$\bar{V}_0 dt = d\bar{r}_0$$

і

$$\bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \bar{F}) = \bar{\omega} \cdot \bar{M}_0$$

маємо

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}_0 + \bar{\omega} \cdot \bar{M}_0(\bar{F}) dt = \bar{F} d\bar{r}_0 + \omega dt M_0 \cos \alpha .$$

Але тому що  $M_0 \cos \alpha = M_w$  – момент сили щодо миттєвої осі відносного обертання навколо точки  $O$ , і  $\omega dt = dj$  – елементарний кут оберту навколо осі, то остаточно одержуємо

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}_0 = M_w(\bar{F}) dj . \quad (106)$$

Таким чином, елементарна робота сили, прикладеної в будь-який точці твердого тіла, у загальному випадку руху складається з елементарної роботи на елементарному поступальному переміщенні разом з якою-небудь точкою тіла і з елементарного обертального переміщення навколо цієї точки (обраної за полюс).

У випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої точки, обравши цю точку за полюс  $O$ , за формулою (106) для елементарної роботи маємо

$$dA = M_w(\bar{F})dj. \quad (107)$$

Обертання на кут  $j$  варто розглядати у кожен момент часу навколо своєї миттєвої осі обертання.

Формулу (106) застосовують і для плоского руху твердого тіла, тільки в цьому випадку миттєва вісь відносного обертання перпендикулярна площині руху і проходить через довільну точку тіла. Якщо ця точка обирається як миттєвий центр швидкостей, то елементарна робота від поступального переміщення дорівнює нулю, і в цьому випадку елементарну роботу можна обчислити за формулою (107), тобто так само, як при обертанні тіла навколо нерухомої точки.

**Робота внутрішніх сил твердого тіла.** Доведемо, що для твердого тіла сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю на будь-якому його переміщенні. Очевидно, досить довести, що сума елементарних робіт всіх внутрішніх сил дорівнює нулю. Розглянемо дві будь-які точки твердого тіла  $M_1$  і  $M_2$  (рис. 52).

Так як внутрішні сили є сили взаємодії точок тіла, то для цих двох точок

$$\bar{F}_1^{(i)} = -\bar{F}_2^{(i)}; \quad F_1^{(i)} = -F_2^{(i)}.$$

Введемо одиничний вектор  $\bar{l}^0$ , спрямований вздовж сили  $\bar{F}_1^{(i)}$ . Тоді

$$\bar{F}_1^{(i)} = \bar{l}^0 F_2^{(i)}; \quad \bar{F}_2^{(i)} = -\bar{l}^0 F_2^{(i)} = -\bar{l}^0 F_1^{(i)}.$$

Сума елементарних робіт сил  $\bar{F}_1^{(i)}$  й  $\bar{F}_2^{(i)}$ :

$$dA_1^{(i)} + dA_2^{(i)} = \bar{F}_1^{(i)} \cdot \bar{V}_1 dt + \bar{F}_2^{(i)} \cdot \bar{V}_2 dt = \bar{F}_1^{(i)} dt (\bar{V}_1 \bar{l}^0 - \bar{V}_2 \bar{l}^0).$$

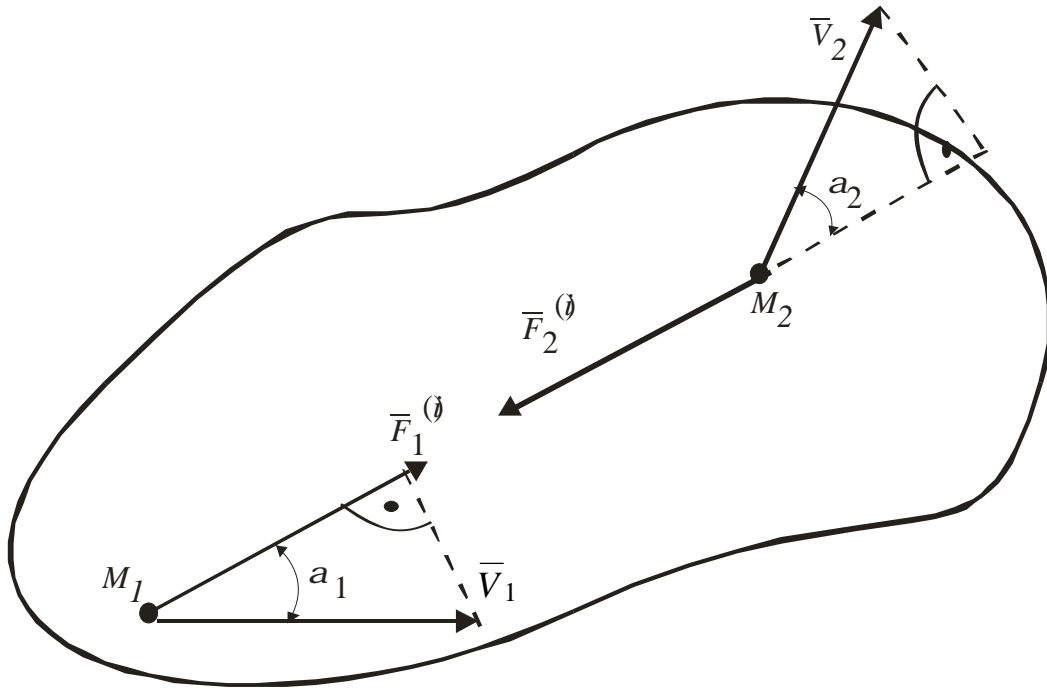


Рисунок 52

Розкриваючи скалярні добутки векторів у дужках, одержуємо:

$$dA_1^{(i)} + dA_2^{(i)} = F_1^{(i)} dt (\bar{V}_1 \cos a_1 - \bar{V}_2 \cos a_2) = 0,$$

тому що в кінематиці твердого тіла було доведено, що проекції швидкостей будь-яких двох точок твердого тіла на напрямок прямої лінії, що з'єднує ці точки, рівні один одному при будь-якому русі твердого тіла. В отриманому виразі різниця проекцій швидкостей двох точок дорівнює нулю.

Тверде тіло можна вважати механічною системою, що складається з пар взаємодіючих точок, для кожної з яких сума елементарних робіт внутрішніх сил дорівнює нулю.

Виконуючи операцію додавання елементарних робіт для всіх пар точок, одержуємо

$$\sum dA_k^{(i)} = 0. \quad (108)$$

Як уже відомо, головний момент всіх внутрішніх сил для будь-якої механічної системи дорівнює нулю. Сума робіт внутрішніх сил дорівнює

нулю тільки у випадку твердого тіла, а для будь-якої механічної системи в загальному випадку вона не дорівнює нулю.

У задачах як механічну систему часто розглядають систему з'єднаних твердих тіл. При обчисленні роботи всіх сил, прикладених до такої системи тіл, мабуть, досить урахувати роботу внутрішніх сил у місцях з'єднання твердих тіл. Якщо тверді тіла з'єднані за допомогою шарнірів без тертя, або недеформованих в'язей, то сума робіт внутрішніх сил, прикладених до системи, що не деформується, буде дорівнювати нулю.

**Приклад 18.** *Робота сили тертя ковзання. Розглянемо рух точки на будь-якій шорсткій поверхні (рис.53).*

Розв'язання

Діюча на точку сила тертя, за модулем дорівнює  $F_{mp} = fN$ , де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання,  $N$  – нормальна реакція поверхні. Спрямована сила тертя завжди протилежно руху точки. Таким чином,  $F_{mpt} = -F_{mp} = -fN$  і за формулою (89)

$$A = - \int_{M_0}^{M_1} F_{mp} ds = - \int_{M_0}^{M_1} f N ds.$$

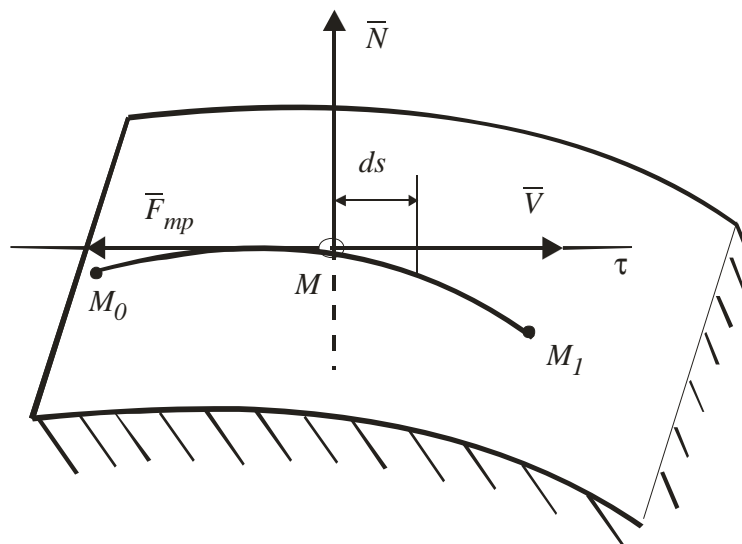


Рисунок 53

Якщо чисельно сила тертя величина стала, то її робота  $A = -F_{mp}s$ , де  $s$  – дуга, вздовж якої переміщується точка.

Таким чином, робота сили тертя ковзання завжди від’ємна. Так як ця робота залежить від довжини дуги  $M_0M_1$ , то сила тертя є **непотенційною силою**.

**Приклад 19.** *Робота сил тертя, які діють на тіло, що котиться.*

а) *На колесо радіуса  $R$  (рис. 54), яке котиться вздовж нерухомої поверхні без проковзування, діє сила тертя, яка перешкоджає ковзанню точки дотику  $P$  колеса з поверхнею.*

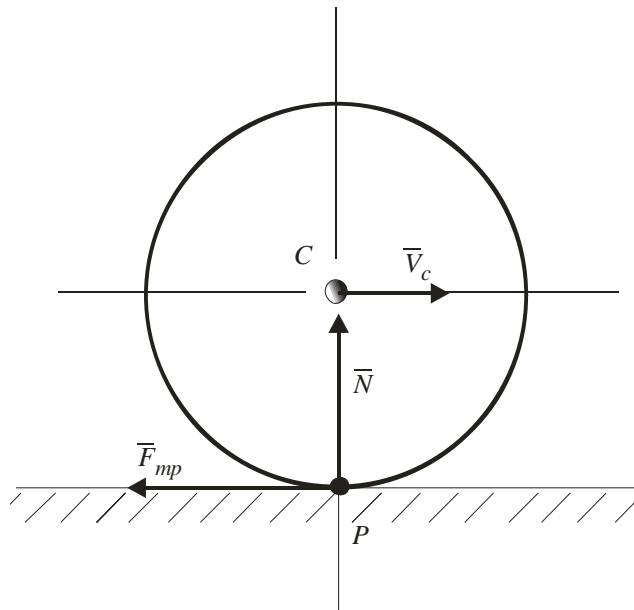


Рисунок 54

#### Розв’язання

Елементарна робота цієї сили:  $dA = -F_{mp}ds_p$ .

Але точка  $P$  в даному випадку є миттєвим центром швидкостей, тобто  $V_p = 0$ , оскільки  $ds_p = V_p dt$ , то  $ds_p = 0$  і для кожного елементарного переміщення  $dA = 0$ . Таким чином, при коченні без ковзання робота сили тертя ковзання на будь-якому переміщенні тіла дорівнює нулю. Дорівнює нулю і робота нормальної реакції  $\bar{N}$ , якщо вважати тіла такими, що не деформуються, і силу  $\bar{N}$ , прикладену в точці  $P$ .

Опір коченню, що виникає внаслідок деформації поверхонь (рис.55), утворює пара сил  $(\bar{N}, m\bar{g})$ , момент якої  $M_{опору} = f_k N$ , де  $f_k$  – коефіцієнт

тертя кочення. Тоді, згідно з формулою (102), враховуючи, що при коченні без ковзання кут оберту колеса  $dj = \frac{ds_c}{R}$ , отримаємо

$$dA_{\text{коч}} = -f_k N dj = -\frac{f_k}{R} N ds_c,$$

де  $ds_c$  – елементарне переміщення центра  $C$  колеса.

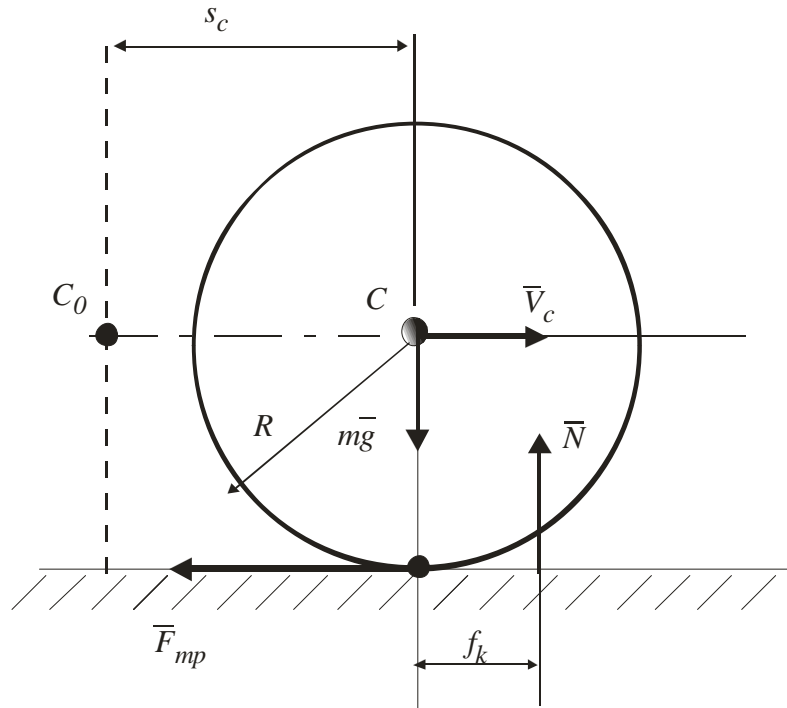


Рисунок 55

Якщо  $N = const$ , то повна робота сил опору кочення набуде виду:

$$A_{\text{коч}} = -f_k N j = -\frac{f_k}{R} N s_c.$$

**Приклад 20.** Визначити суму робіт сил, прикладених до точкової маси математичного маятника при його кутовому переміщенні  $(j_2 - j_1)$ , якщо  $\bar{P}$  – вага точкової маси маятника,  $l$  – довжина його нитки (рис. 56).

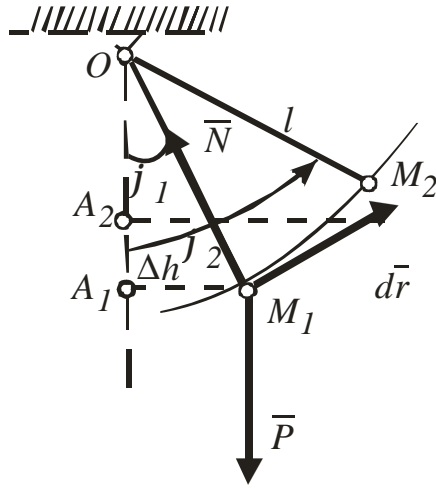


Рисунок 56

### Розв'язання

Розглянемо рух матеріальної точки  $M$  масою  $m$ . В'язю точки  $M$  є нитка. Відкинемо цю в'язь, замінивши її дію реакцією  $\bar{N}$ . Тоді на нитку діятимуть дві сили  $\bar{P}$  і  $\bar{N}$ . Елементарне переміщення точки буде напрямлене вздовж дотичної до траєкторії, а саме, вздовж дуги кола радіуса  $l$ . Отже, реакція перпендикулярна до вектора елементарного переміщення, а шукану роботу сил можна записати

$$A = \sum A_i = A(\bar{P}) + A(\bar{N}).$$

Робота сили ваги  $\bar{P}$  від'ємна, оскільки точкова маса маятника піднімається вгору, а сила  $\bar{P}$  напрямлена вниз:

$$A(\bar{P}) = -P \Delta h.$$

Різниця висот кінцевого і початкового положень дорівнює:

$$\Delta h = A_1 A_2 = OA_1 - OA_2 = l(\cos j_1 - \cos j_2).$$

Остаточно

$$A(\bar{P}) = -Pl(\cos j_1 - \cos j_2).$$

Шукана робота сил набуде виду:

$$A = \sum A_i = -Pl(\cos j_1 - \cos j_2) < 0.$$

Другий спосіб розв'язання цієї задачі ґрунтується на застосуванні формули (102). Обчислюємо роботу прикладених до точки сил при обертанні маятника навколо його осі  $z$ , яка проходить через точку  $O$  перпендикулярно до площини рисунка.

У цьому випадку елементарна робота прикладених сил дорівнює  $dA = M_z dj$ , де  $M_z$  – головний момент сил, прикладених до рухомої точки відносно осі обертання  $Oz$ , а  $dj$  – елементарне кутове переміщення.

Згідно з теоремою про момент рівнодійної (теорема Варіньона)

$$M_z = M_z(\bar{P}) + M_z(\bar{N}) = -Pl \sin j,$$

оскільки момент сили  $\bar{N}$ , що проходить через вісь  $Oz$ , дорівнює нулю. Момент від'ємний, оскільки напрям обертання під його дією протилежний напрямку додатного відліку кута повороту  $j$ . Остаточно елементарна робота всіх сил дорівнює:

$$dA = M_z dj = -Pl \sin j dj.$$

Шукану роботу знайдемо за допомогою визначеного інтегралу в межах від  $j_1$  до  $j_2$  (102):

$$A_j = \int_{j_1}^{j_2} M_z dj = -Pl \int_{j_1}^{j_2} \sin j dj = -Pl(\cos j_1 - \cos j_2).$$

**Приклад 21.** Вантаж  $M$  утримується в рівновазі на похилій площині, нахиленої під кутом  $\alpha$  до горизонту, за допомогою пружини з коефіцієнтом пружності  $s$ , вісь якої паралельна похилій площині (в площині рисунка). Під дією поштовху вантаж перемістився вниз по похилій площині на відстань  $l$ . Обчислити роботи всіх сил, прикладених до вантажу  $M$  при цьому переміщенні, якщо коефіцієнт тертя ковзання вантажу по похилій площині дорівнює  $f$  (рис.59).



## Розв'язання

Розглядатимемо рух вантажу  $M$  вагою  $\bar{P}$ , на який накладено в'язі: похила шорстка площина і пружина. Користуючись принципом звільнення від в'язей, замінимо їх дію реакціями  $\bar{N}, \bar{F}_{m.k}, \bar{F}_{np}$ .  $\bar{F}_{m.k}$  – сила тертя ковзання,  $\bar{F}_{np}$  – реакція пружини. Точку  $M$  вважатимемо вільною, до якої прикладені сили  $\bar{P}, \bar{N}, \bar{F}_{m.k}, \bar{F}_{np}$ .

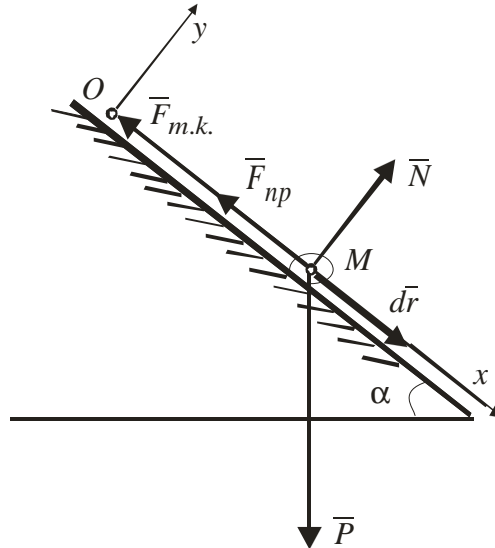


Рисунок 59

Елементарне переміщення  $d\bar{r}$  вантажу  $M$  буде напрямлене вздовж похилої площини. Вісі координат зображено на рисунку 58. Початок системи координат, точка  $O$ , збігається з кінцем недеформованої (нерозтягнутої) пружини. Шукана робота сил набуде виду:

$$A = \sum A_i = A(\bar{P}) + A(\bar{N}) + A(\bar{F}_{m.k}) + A(\bar{F}_{np}).$$

Обчислимо окремо роботу кожної прикладеної до вантажу сили:

$$A(\bar{P}) = P \Delta h = Pl \sin a; \quad \Delta h = (x_2 - x_1) \sin a = l \sin a.$$

Робота сили ваги додатна, оскільки вантаж  $M$  наближається до земної поверхні. Робота нормальної сили реакції  $\bar{N}$  дорівнює нулю, тому що ця сила перпендикулярна до напрямку переміщення вантажу, який рухається вздовж похилої площини:

$$A(\bar{N}) = \bar{N} \cdot d\bar{r} = N dr \cos 90^\circ = 0.$$

Робота пружної сили пружини визначається формулою (101)

$$A(\bar{F}_{np}) = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2) = -\frac{c}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1);$$

$$x_2 - x_1 = l.$$

За умовою задачі вантаж  $M$  у початковому положенні, що визначається координатою  $x_1$ , перебував в стані рівноваги, тому  $x_1 = l_{cm}$ . Отже,  $x_2 = l + x_1 = l + l_{cm}$ , і робота дорівнюватиме:

$$A(\bar{F}_{np}) = -\frac{c}{2}l(l + 2l_{cm}).$$

Щоб знайти  $l_{cm}$ , спроєктуємо всі прикладені до точки сили на координатну вісь  $Ox$ :

$$F_{np_x} + F_{mk_x} + P_x + N_x = 0$$

або

$$-cl_{cm} - fP \cos a + P \sin a = 0.$$

Оскільки за законом Кулона

$$F_{m.k} = fP \cos a,$$

то

$$l_{cm} = \frac{P(\sin a - f \cos a)}{c}.$$

Остаточно

$$A(\bar{F}_{np}) = -\frac{cl}{2} \left[ l + \frac{2P(\sin a - f \cos a)}{c} \right].$$

Робота сили тертя ковзання набуде виду:

$$A(F_{mk}) = -fPl \cos a .$$

Остаточна робота всіх сил дорівнюватиме:

$$A = lP \sin a - flP \cos a - \frac{cl^2}{2} - lP(\sin a - f \cos a) = -\frac{cl^2}{2} .$$

**Приклад 22.** Знайти потужність двигунів літака, якщо швидкість його горизонтального польоту –  $V$  км / год., аеродинамічний опір –  $F$  Н, а коефіцієнт корисної дії гвинтомоторної групи –  $h$ .

Розв'язання

Потужність обчислюємо за формулою (98), враховуючи, що

$$1 \frac{\text{км}}{\text{год}} = \frac{1000}{3600} = \frac{10^3}{36 \cdot 10^2} \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$W = \frac{FV}{h} = \frac{FV \cdot 10^3}{h \cdot 36 \cdot 10^2} .$$

Оскільки за умовою вектори  $\vec{F}$  і  $\vec{V}$  колінарні (лежать на одній прямій), то шукана потужність буде:

$$W = \frac{5FV}{18h} .$$

**Приклад 23.** Визначення потужності машини можна здійснити таким чином. На валі машини розміщують чавунний шків, який центрують і закріплюють жорстко за допомогою різьбового з'єднання, наприклад гвинтів (рис. 59). Далі на шківі розміщують дві дерев'яні деталі, одна з яких – має вигляд стрижня, на якому на відстані  $l$  від центра розташований вантаж  $Q$ . Противагу  $P$  підбирають так, щоб вільно розміщений на шківі натиск знаходився у стані рівноваги без

тягарця  $Q$  у горизонтальному положенні, тобто так, щоб стрижень проходив між нерухомими балками  $A$  і  $B$ . Випробування починають с того, що затягують болти дерев'яних деталей до тих пір, поки машина, яка досліджується, набере заздалегідь установлену кількість обертів  $n$ . Стрижень притискується при цьому до нерухомої балки  $A$ . Потім починають збільшувати вагу  $Q$  (додаючи тягарці) до тих пір, поки стрижень не відійде від точки  $A$  і знову не займе горизонтальне положення між балками  $A$  і  $B$ .

Визначити потужність, якщо вага тягарців відома і дорівнює  $Q$ ; довжина стрижня  $l$ , а кількість обертів за хвилину дорівнює  $n$ .

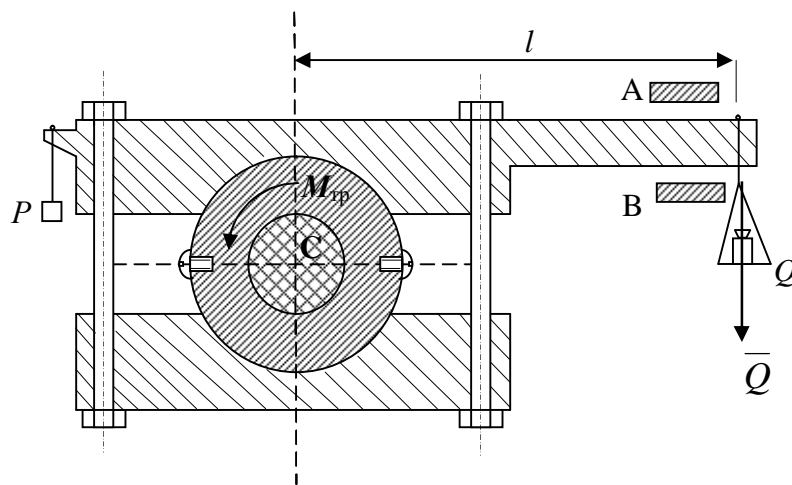


Рисунок 59

### Розв'язання

За умовою задачі центр ваги деталей з противагою  $P$  знаходиться на одній вертикалі з віссю шківa. На шків діють обертальний момент і момент тертя, сума яких дорівнює нулю, так як шків обертається рівномірно.

Щоб визначити момент сил тертя, розглянемо рівновагу деталей і складемо рівняння моментів, діючих на них сил відносно осі вала:

$$\sum M_C(\bar{F}_i) = 0.$$

$$M_{тр} - Ql = 0; \quad M_{тр} = Ql;$$

Потужність обчислюється за формулою (97)

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

При обертальному русі за формулою (102)  $dA = MdY$ .

Тоді

$$N = \frac{MdY}{dt} = Mw,$$

де  $M$  – обертальний момент;

$w$  – кутова швидкість обертання.

Кутова швидкість в радіанах за секунду дорівнює

$$w = \frac{pn}{30};$$

де  $n$  – кількість обертів за хвилину.

Тоді потужність буде дорівнювати:

$$N = Q \cdot l \frac{pn}{30} \text{ (Вт)}$$

### 9.3 Кінетична енергія точки, системи і твердого тіла

#### 9.3.1 Кінетична енергія точки й системи

**Кінетичною енергією матеріальної точки, або її живою силою, називають половину добутку маси точки на квадрат її швидкості, тобто  $\frac{mV^2}{2}$  або  $\frac{m\bar{V}^2}{2}$ , тому що скалярний квадрат будь-якого вектора дорівнює квадрату модуля цього вектора. Кінетична енергія є скалярною,**

додатною величиною. Одиницею кінетичної енергії є джоуль:  
 $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Кінетичною енергією системи  $T$  називають суму кінетичних енергій всіх точок механічної системи, тобто

$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \bar{V}_k^2}{2}. \quad (109)$$

Кінетична енергія, як точки, так і системи, не залежить від напрямку швидкостей точок. Кінетична енергія може дорівнювати нулю для системи тільки за умови, якщо всі точки системи перебувають у спокої.

### 9.3.2 Обчислення кінетичної енергії системи (теорема Кьоніга)

Розкладемо рух механічної системи на переносний поступальний разом із центром мас системи і відносний стосовно системи координат, яка рухається поступально разом із центром мас. Аналогічно тому, як це відбувалося при доказі формули для кінетичного моменту при такому розкладанні абсолютного руху, для кожної точки системи  $M_k$  (див. рис. 34) маємо

$$\bar{\mathbf{r}}_k = \bar{\mathbf{r}}_c + \bar{\mathbf{r}}_k$$

і, відповідно,

$$\bar{\mathbf{V}}_k = \bar{\mathbf{V}}_c + \bar{\mathbf{V}}_{kr},$$

де  $\bar{\mathbf{V}}_{kr} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}_k}{dt}$  є відносною швидкістю точки. Так як рухома система координат рухається поступально ( $\bar{\mathbf{w}} = 0$ ), отже, повна похідна за часом від  $\bar{\mathbf{r}}_k$  збігається з локальною похідною, рівною відносній швидкості точки.

Підставляючи значення швидкості  $\bar{\mathbf{V}}_k$  у вираз кінетичної енергії абсолютного руху системи, тобто її руху щодо системи координат  $Ox_1y_1z_1$ , після перетворень одержуємо

$$T = \sum \frac{m_k \bar{V}_k^2}{2} = \frac{\bar{V}_c^2}{2} \sum m_k + \sum \frac{m_k \bar{V}_{kr}^2}{2} + \bar{V}_c \sum m_k \bar{V}_{kr}, \quad (110)$$

але

$$\bar{V}_c \sum m_k \bar{V}_{kr} = \bar{V}_c \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{V}_c \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{r}_k) = 0,$$

тому що

$$\sum m_k \bar{r}_k = \text{const} = 0.$$

З огляду на те, що  $\sum m_k = M$  – маса системи, і позначаючи  $T_c^{(r)}$  другий доданок у формулі (110), маємо:

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + T_c^{(r)}, \quad (111)$$

де

$$T_c^{(r)} = \sum \frac{m_k V_{kr}^2}{2}.$$

Величина  $T_c^{(r)}$  є кінетичною енергією відносного руху системи щодо системи координат, яка рухається поступально разом з її центром мас, або кінетичною енергією системи щодо центра мас.

Формула (111) виражає так звану **теорему Кьоніга**: *кінетична енергія системи в абсолютному русі складається з кінетичної енергії центра мас, якщо в ньому зосередити всю масу системи, і кінетичної енергії системи щодо центра мас.*

### 9.3.3 Кінетична енергія твердого тіла

При *поступальному русі* твердого тіла кінетична енергія

$$T = \sum \frac{m_k \bar{V}_{kr}^2}{2} = \frac{\bar{V}^2}{2} \sum m_k = M \frac{V^2}{2}, \quad (112)$$

тому що при поступальному русі твердого тіла швидкості всіх точок тіла однакові, тобто  $\bar{V}_k = \bar{V}$ , де  $\bar{V}$  – загальна швидкість для всіх точок тіла.

Таким чином, *кінетична енергія твердого тіла при поступальному русі обчислюється так само, як і для однієї точки, в якій маса дорівнює масі всього тіла.*

При *обертанні тіла* навколо нерухомої осі кінетичну енергію можна обчислити, якщо врахувати, що швидкість будь-якої точки тіла  $M_k$  можна виразити як

$$V_k = \omega h_k,$$

де  $h_k$  – найкоротша відстань від точки  $M_k$  до осі обертання;

$\omega$  – кутова швидкість тіла.

Тоді

$$T = \sum \frac{m_k \bar{V}_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{\omega^2}{2} J_z,$$

або

$$T = J_z \frac{\omega^2}{2}, \quad (113)$$

де  $J_z$  – момент інерції тіла відносно осі обертання  $Oz$ .

Отже, *кінетична енергія тіла при обертальному русі навколо нерухомої осі дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості тіла.*

З порівняння формул (112) і (113) витікає, що ці формули подібні, тільки при обертальному русі аналогом маси є момент інерції тіла відносно осі обертання, а аналогом швидкості – кутова швидкість тіла. Така аналогія між поступальним й обертальним рухами твердого тіла може спостерігатися в багатьох формулах, що стосуються цих двох рухів.

При *плоскому русі твердого тіла* кінетичну енергію можна обчислити за теоремою Кьоніга. Так як в цьому випадку відносний рух щодо центра мас (точніше, відносно системи координат, яка рухається поступально разом із центром мас) є обертанням навколо центра мас із кутовою швидкістю  $\omega$ ,



$$T_c^{(r)} = J_{cz} \frac{w^2}{2},$$

де  $J_{cz}$  – момент інерції тіла відносно осі  $Cz$ , що проходить через центр мас тіла, перпендикулярний площині руху. Отже, на підставі формули (111) для плоского руху тіла маємо:

$$T = \frac{M\bar{V}_c^2}{2} + J_{cz} \frac{w^2}{2}. \quad (114)$$

Таким чином, при плоскому русі тіла кінетична енергія складається з кінетичної енергії поступального руху тіла разом із центром мас і кінетичної енергії від обертання навколо осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до площини руху.

Якщо механічна система складається з декількох твердих тіл, то необхідно обчислити кінетичну енергію кожного тіла, а потім отримані кінетичні енергії додати.

Кінетична енергія системи тіл визначається як сума кінетичних енергій тіл, що складають цю систему.

**Приклад 24.** Обчислимо кінетичну енергію ходової частини трактора, який рухається зі швидкістю  $V$ . Відстань між осями коліс радіуса  $R$  дорівнює  $l$ , вага одного погонного метра гусениці  $g$  (рис. 58), вага одного колеса дорівнює  $\bar{m}g$ . Колеса вважати суцільними однорідними дисками.

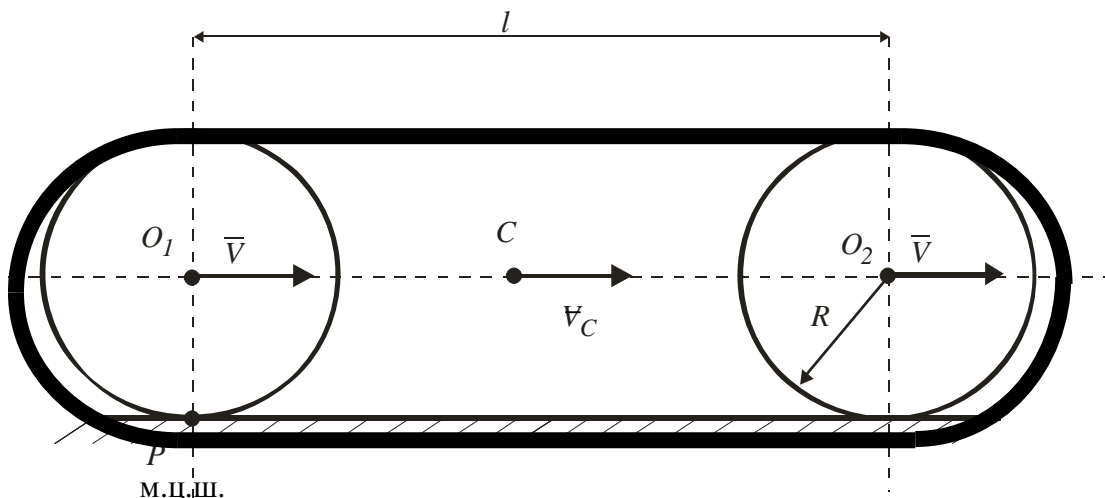


Рисунок 58

## Розв'язання

Визначимо масу гусениці

$$m = \frac{g L}{g},$$

де  $L$  – довжина гусениці,

$$L = 2(l + pR).$$

Гусениця виконує складний рух, тому її кінетичну енергію обчислимо за теоремою Кьонінга (111):

$$T_G = \frac{mV_c^2}{2} + T_c^{(r)}; \quad \text{де } V_c = V; \quad T_c^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_{ir}^2.$$

У відносному русі всі точки мають швидкість  $V_{ir} = V$ . Тому кінетична енергія гусениці

$$T_G = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V^2 = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} V^2 \sum_{i=1}^N m_i = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} m V^2 = m V^2.$$

Підставимо вираз для маси гусениці, отримаємо

$$T_G = \frac{2g(l + pR)}{g} V^2.$$

Визначимо кінетичну енергію коліс, які котяться без ковзання. Оскільки колеса виконують плоско-паралельний рух, то їх кінетичну енергію можна обчислити за формулою (114). Тоді для двох коліс:

$$T_K = 2 \left( \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2 \right),$$

де  $V_c$  – швидкість центрів мас коліс (на рис. 58 це точки  $O_1$  і  $O_2$ );

$J_{cz}$  – момент інерції коліс відносно осей, які проходять через їх центри мас.

Момент інерції диска відносно осі  $z$ , яка проходить через центри ваги перпендикулярно до площини матеріальної симетрії колеса,

$$J_{cz} = \frac{1}{2}MR^2,$$

де  $m$  – маса колеса;

$R$  – радіус колеса.

Кутова швидкість  $w$  визначається з формули  $V_c = V_{o1} = V = R w$  (так як точка  $P$  – м.ц.ш.), тоді  $w = \frac{V}{R}$ .

Таким чином

$$T_K = 2 \left( \frac{1}{2} \frac{mg}{g} V^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{mgR^2}{2g} \frac{V^2}{R^2} \right) = \frac{3}{2} \frac{mgV^2}{g}.$$

Загальний вираз кінетичної енергії ходової частини трактора отримуємо як суму кінетичної енергії гусениці і 2 коліс:

$$T = T_\Gamma + T_K = \frac{V^2}{2g} (4g(l + pR) + 3mg).$$

#### 9.4 Теорема про зміну кінетичної енергії точки

Для матеріальної точки масою  $m$ , що рухається під дією сили  $\bar{F}$ , основний закон динаміки можна подати у вигляді

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}.$$

Множачи обидві частини цього співвідношення скалярно на диференціал радіуса-вектора точки  $d\bar{r}$  отримуємо:

$$m d\bar{V} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

або

$$m\bar{V} \cdot d\bar{V} = \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

де  $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$  – швидкість точки.

Враховуючи, що  $dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}$  – елементарна робота, одержуємо

$$m\bar{V} \cdot d\bar{V} = dA.$$

Так як

$$m\bar{V} \cdot d\bar{V} = d\left(\frac{m\bar{V}^2}{2}\right) = d\left(\frac{mV^2}{2}\right),$$

остаточно маємо:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \bar{F} \cdot d\bar{r} \text{ або } d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA. \quad (115)$$

Формула (115) виражає теорему про зміну кінетичної енергії для точки в диференціальній формі: *диференціал кінетичної енергії точки дорівнює елементарній роботі сили, що діє на точку.*

Якщо обидві частини формули(115) розділити на  $dt$  і врахувати, що  $\frac{dA}{dt} = W$  – потужність, то теорему можна також подати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\bar{V}^2}{2}\right) = W. \quad (116)$$

*Похідна за часом від кінетичної енергії дорівнює потужності, підведеної до цієї точки.*

Інтегруючи обидві частини формули (115) у межах переміщення положення точки  $M_o$  до положення  $M$ , одержуємо теорему про зміну кінетичної енергії точки у кінцевій формі (або інтегральній формі):

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_o^2}{2} = A. \quad (117)$$

*Зміна кінетичної енергії точки на якому-небудь переміщенні дорівнює роботі сили, що діє на точку на тому ж переміщенні.*

За допомогою теореми про зміну кінетичної енергії (точки і системи) можна розв'язувати задачі в тих випадках, коли серед даних і шуканих величин є: маса (або вага  $P$ ); швидкості точок в початковий і кінцевий моменти часу; переміщення точки (точок); сили, прикладені до точки (точок).

При цьому найлегше розв'язуються задачі при сталих силах, або силах, що залежать від положення точки (точок).

Розв'язуючи задачі за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії точки, рекомендуємо дотримуватися такої послідовності в роботі:

- 1) виділити матеріальну точку (або тіло), рух якої розглядаємо;
- 2) розглянути в'язі виділеного тіла;
- 3) замінити дію в'язей на виділену точку реакціями в'язей;
- 4) скласти схему всіх сил, включаючи і реакції в'язей, після чого рух точки можна розглядати як вільний;
- 5) вибрати систему координат;
- 6) обчислити суму робіт, прикладених до матеріальної точки на її переміщенні;
- 7) обчислити кінетичну енергію матеріальної точки в її початковому і кінцевому положеннях;
- 8) застосувати теорему про зміну кінетичної енергії точки і із складеного рівняння визначити шукану величину.

**Приклад 25.** *Потяг вагою 24000 кН рухається на підйом, тангенс кута якого  $\text{tg}\alpha = 0,02$ . Опір рухові складає 0,01 ваги потяга. Протягом 520м швидкість потягу змінюється від  $18 \frac{\text{км}}{\text{год}}$  до  $36 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ . Визначити силу тяги локомотива.*

#### Розв'язання

Розглянемо поступальний рух потягу як рух матеріальної точки, на яку діють сили: ваги  $m\bar{g}$ , тяги  $\bar{F}$ , опору  $\bar{R}$  і нормальна реакція  $\bar{N}$ . Спрямуємо вісь  $x$  у бік руху потягу.

Використаємо теорему (117) про зміну кінетичної енергії точки на переміщенні  $M_0M_2$  (рис.59). Швидкість потягу на цьому переміщенні змінюється від  $V_0 = 5 \text{ м/с}$  до  $V_2 = 10 \text{ м/с}$ . Сила  $R = 0,01mg$ . Тоді за теоремою (117):

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A.$$

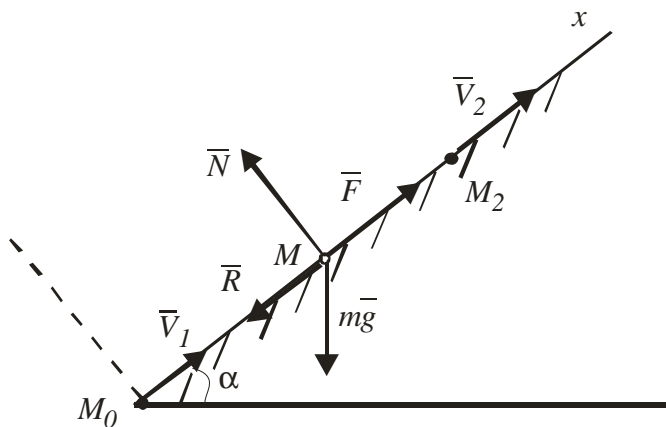


Рисунок 59

Робота сил  $A = Fs - mgs \sin a - 0,01mgs = [F - mg(\sin a + 0,01)]s$ .

Оскільки кут  $a$  дуже малий, то  $tga \approx \sin a = 0,02$ .

Підставляємо всі дані у вираз теореми, враховуючи, що

$$m = \frac{P}{g} = \frac{24000}{9,8},$$

$\frac{P}{2g}(V_2^2 - V_0^2) = s[F - mg(\sin a + 0,01)]$ , звідки сила тяги:

$$F = \frac{P}{2gs}(V_2^2 - V_0^2) + P(\sin a + 0,01) = \frac{24000}{2 \cdot 9,8 \cdot 520}(10^2 - 5^2) + 24000(0,02 + 0,01) = 464,6 \text{ кН}.$$

**Приклад 26.** Визначити, яку найменшу початкову швидкість, направлену вертикально вгору, треба надати тілу, щоб воно піднялося з поверхні Землі на висоту  $H$  (рис.60). Опором повітря знехтувати. Силу притягання вважати обернено пропорційною квадрату відстані тіла від центра Землі ( $m, O$ ):

$$F = \frac{mgR^2}{x^2},$$

де  $R$  – радіус Землі;

$x$  – відстань тіла до центра Землі.

Розв'язання

Розглянемо тіло  $M$  як матеріальну точку, на яку діє сила притягання до центра Землі.

Проекція сили  $\vec{F}$  на вісь  $Ox$

$$F_x = \frac{-mgR^2}{x^2}.$$

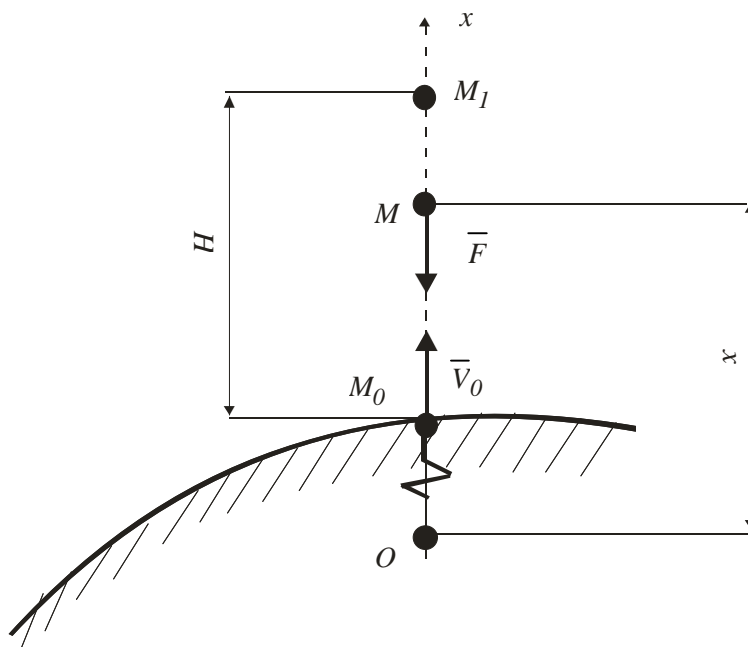


Рисунок 60

Звернемося до теореми про зміну кінетичної енергії точки (117):

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_o^2}{2} = A.$$

Так, як в кінцевому положенні  $M_1$  швидкість точки  $V_1 = 0$ , то її кінцева кінетична енергія дорівнює нулю, тобто:

$$\frac{mV_1^2}{2} = 0.$$

Початкова кінетична енергія точки складає  $\frac{mV_o^2}{2}$ .

Таким чином ліва частина рівняння має значення  $-\frac{mV_o^2}{2}$ .

Обчислимо праву частину рівняння, тобто, роботу сили:

$$\begin{aligned} A_{M_o M_1} &= \int_R^{R+H} F_x dx = \int_R^{R+H} \left( -\frac{mgR^2}{x^2} \right) dx = -mgR^2 \int_R^{R+H} \frac{dx}{x^2} = mgR^2 \cdot \frac{1}{x} \Big|_R^{R+H} = \\ &= -mgR^2 \left( \frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right) = -\frac{mgRH}{R+H}. \end{aligned}$$

Дорівняємо кінетичну енергію і роботу сили  $F$ , отримуємо:

$$-\frac{mV_o^2}{2} = -\frac{mgRH}{R+H}.$$

Звідки остаточно маємо

$$V_o = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}.$$

Знайдемо при якій початковій швидкості  $V_o$  тіло, яке кинуте вертикально вгору, піде в нескінченність. Поділивши чисельник і знаменник останнього виразу на  $H$ .



Одержимо

$$V_o = \sqrt{\frac{2gR}{1 + \frac{R}{H}}}.$$

При  $H \rightarrow \infty \frac{R}{H} \rightarrow 0$ , звідки находимо:

$$V_o = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км/с}.$$

Отримане значення швидкості визначає другу космічну швидкість. Друга космічна швидкість – це найменша початкова швидкість  $\bar{V}_o$ , при якій можливе відділення тіла від поверхні Землі за незамкненою траєкторією.

Першою космічною швидкістю називається початкова швидкість, при якій тіло може залишити поверхню Землі, перетворившись на її штучний супутник. Вона визначається за формулою

$$V_o = \sqrt{gR} \approx 7,9 \text{ км/с}.$$

При швидкостях, які лежать в межах  $8 \text{ км/с} \leq V_o \leq 11 \text{ км/с}$ , тіло, кинуте за напрямом дотичної до земної поверхні, перетворюється на супутника Землі. При швидкостях, менших за  $8 \text{ км/с}$ , тіло, описавши еліптичну траєкторію, упаде на Землю. Усі ці результати відносяться до руху в безповітряному просторі.

Цей приклад свідчить, що використання загальних теорем динаміки (в даному випадку теореми про зміну кінетичної енергії) дає змогу в ряді випадків уникнути інтегрування рівняння руху точки.

**Приклад 27.** Тягар, підвішений на нитці довжиною  $l$ , відхиляють від вертикалі на кут  $\alpha_o$  і відпускають без початкової швидкості.

Знайти швидкість тягара в момент часу, коли нитка утворює з вертикаллю кут  $\alpha$  (рис.61).

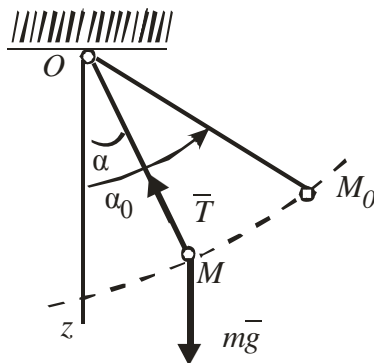


Рисунок 61

### Розв'язання

Нехтуючи розмірами тягаря, будемо розглядати його, як матеріальну точку.

Оскільки до умови задачі входить переміщення, яке визначається кутом відхилення нитки, швидкість в початковому і кінцевому положенні, маса тягаря, то для розв'язання задачі скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії матеріальної точки у кінцевому вигляді (117):

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_o^2}{2} = A.$$

На тягар діють такі сили:  $m\bar{g}$  – вага тягаря;  $\bar{N}$  – реакція нитки.

Робота сили ваги  $A = mgh$  (робота додання, так як точка рухається вниз), де

$$h = l \cos a - l \cos a_o = l(\cos a - \cos a_o).$$

Оскільки  $V_o = 0$ , то маємо:

$$\frac{mV^2}{2} = mgl(\cos a - \cos a_o).$$

звідси

$$V = \sqrt{2gl(\cos a - \cos a_o)}.$$

## 9.5 Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Нехай механічна система складається з  $N$  матеріальних точок.

Приклавши до точок системи всі зовнішні й внутрішні сили, для кожної точки системи можна виразити теорему про зміну кінетичної енергії точки у формі (115):

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \bar{F}_k^{(e)} \cdot d\bar{r}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Виконуючи операцію додавання по всіх точках системи для правих і лівих частин цих співвідношень і виносячи знак диференціала за знак суми, одержуємо:

$$d \sum \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum \bar{F}_k^{(e)} \cdot d\bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^{(i)} \cdot d\bar{r}_k,$$

або

$$dT = \sum dA_k^{(e)} + \sum dA_k^{(i)}, \quad (118)$$

де кінетична енергія системи

$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2},$$

елементарна робота зовнішніх і внутрішніх сил, відповідно:

$$dA_k^{(e)} = \bar{F}_k^{(e)} \cdot d\bar{r}_k, \quad dA_k^{(i)} = \bar{F}_k^{(i)} \cdot d\bar{r}_k.$$

Формула (118) виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи у диференціальній формі: *диференціал від кінетичної енергії системи дорівнює сумі елементарних робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему.*

Якщо обидві частини формули (118) проінтегрувати між двома положеннями системи – початковим і кінцевим, у яких, відповідно, кінетична енергія системи має значення  $T_o$  і  $T$ , то, змінюючи порядок додавання і інтегрування, отримаємо:

$$T - T_o = \sum \int_{M_{k_o}}^{M_k} dA_k^{(e)} + \sum \int_{M_{k_o}}^{M_k} dA_k^{(i)},$$

або

$$T - T_o = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)}, \quad (119)$$

де  $\sum A_k^{(e)} = \sum \int_{M_{k_o}}^{M_k} dA_k^{(e)}$  – сума роботи зовнішніх сил, що діють на систему при переміщенні кожної точки системи з початкового положення  $M_{k_o}$  у кінцеве положення  $M_k$ ;

$$\sum A_k^{(i)} = \sum \int_{M_{k_o}}^{M_k} dA_k^{(i)} \text{ – відповідно сума робіт внутрішніх сил системи.}$$

Формула (119) виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи в кінцевій або інтегральній формі: *зміна кінетичної енергії системи при її переміщенні з одного положення в інше дорівнює сумі робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему, на відповідних переміщеннях точок системи при тих же переміщеннях системи.*

**Окремий випадок.** Для абсолютно твердого тіла сума робіт всіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю:

$$\sum A_k^{(i)} = 0.$$

Отже, теорему про зміну кінетичної енергії, наприклад, у кінцевій формі можна подати у вигляді

$$T - T_o = \sum A_k^{(e)}. \quad (120)$$

*Зміна кінетичної енергії твердого тіла при якому-небудь переміщенні дорівнює сумі робіт всіх зовнішніх сил, що діють на тіло, на відповідних переміщеннях точок тіла при тому ж переміщенні твердого тіла.*

Таким чином, на відміну від розглянутих інших загальних теорем динаміки системи, до теореми про зміну кінетичної енергії можуть входити внутрішні сили. Вони не входять до цієї теореми лише у випадку абсолютно твердого тіла.

## **9.6 Методика і приклади розв'язання задач**

Теорему про зміну кінетичної енергії системи застосовують у тих випадках, коли до даних і шуканих величин входять: інерційні характеристики точок системи (маса і моменти інерції); швидкості точок системи (лінійні і кутові); сили, моменти сил і пар сил, прикладених до точок системи; переміщення точок системи (лінійні, кутові).

Зазначимо також, що застосування цієї теореми найефективніше тоді, коли сили і моменти сил та пар сил сталі або залежать від координат точок системи.

Розв'язування задач за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії системи проводять у такій послідовності:

- 1) визначають кількість матеріальних точок (тіл), що належать до системи;
- 2) розглядають схему сил як зовнішніх, так і внутрішніх, що діють на точки системи;
- 3) вибирають систему координат та переміщення системи, для якої слід застосувати теорему про зміну кінетичної енергії;
- 4) досліджують, виконують внутрішні сили роботу чи ні;
- 5) обчислюють суму робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил на переміщеннях точок системи (у випадку незмінної системи – тільки суму робіт зовнішніх сил);
- 6) обчислюють кінетичну енергію механічної системи (точок та тіл, які належать до системи) у початковому і кінцевому положеннях системи. При цьому лінійні швидкості окремих точок системи треба,

користуючись співвідношеннями кінематики, виразити як функцію швидкості однієї або кількох точок;

7) складають рішення, що відповідає теоремі про зміну кінетичної енергії, і визначають невідому величину.

**Приклад 28.** У маятнику Максвелла однорідний циліндр масою  $m$  і радіусом  $R$  падає вниз без початкової швидкості, розмотуючи нитку, яка намотана на циліндр в його серединнім перерізі. Визначити швидкість осі циліндра залежно від висоти її опускання (62).

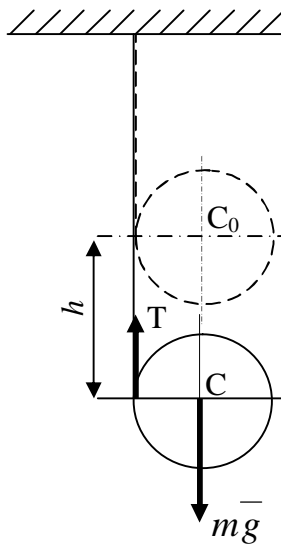


Рисунок 62

### Розв'язання

За теоремою (120) про зміну кінетичної енергії твердого тіла маємо:

$$T - T_o = \sum_{i=1}^N A_k^{(e)}.$$

Оскільки в початковий момент часу циліндр знаходився у стані спокою, то

$$T_o = 0.$$

Циліндр виконує плоско-паралельний рух. Його кінетична енергія в момент опускання на висоту  $h$  дорівнює:

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + J_c \frac{\omega^2}{2}, \text{ де } J_c = \frac{mR^2}{2}, V_c = \omega R,$$

тому

$$T = \frac{3m}{4} V_c^2.$$

Зовнішніми силами є сила ваги  $m\bar{g}$  і реакція нитки  $\bar{T}$ . Сила  $\bar{T}$  весь час прикладена в миттєвому центрі  $P$  швидкостей циліндра, тому робота цієї сили дорівнює нулю. Отже роботу здійснює лише сила ваги  $m\bar{g}$ :

$$\sum A_k^e = mgh.$$

Підставляючи знайдені величини у вираз теореми про зміну кінетичної енергії, одержимо:

$$\frac{3mV_c^2}{4} = mgh,$$

звідки

$$V_c = \frac{2}{3} \sqrt{3gh}.$$

**Приклад 29.** На циліндричний каток 1 радіуса  $R$  і масою  $m_1$  намотана нитка, перекинута через блок 3 (рис.63).

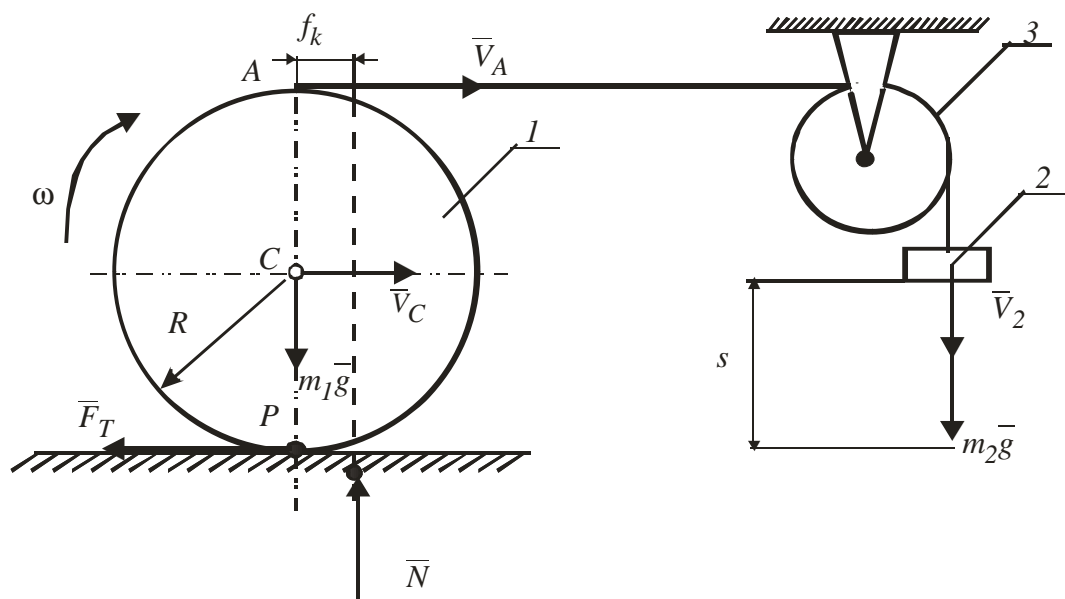


Рисунок 63

### Розв'язання

Нитка несе на кінці вантаж 2 масою  $m_2$ . Визначити, яку швидкість  $\bar{V}_c$  буде мати центр  $C$  катка, коли вантаж 2 пройде вниз шлях  $s$ , якщо  $V_{co} = 0$ . Коефіцієнт тертя кочення катка дорівнює  $f_k$ , радіус інерції катка відносно його осі –  $r$ . Масою нитки і блока 3 знехтувати.

Розглянемо рух механічної системи двох тіл 1 і 2, з'єднаних ниткою. На систему діють сили ваги  $m_1\bar{g}$  і  $m_2\bar{g}$ , нормальна реакція поверхні  $\bar{N}$ , спрямована з урахуванням кочення, сила тертя  $\bar{F}_m$  прикладена в миттєвому центрі швидкостей  $P$ . Тому надалі не враховується. Так як нитка не розтягується, то система не деформується, тобто  $\sum A_k^i = 0$ .

Для вирішення задачі можна скористатися теоремою про зміну кінетичної енергії системи у вигляді (120), а саме:  $T - T_o = \sum A_k^e$ . Так як при  $t = 0$ ,  $V_{co} = 0$ , то  $T_o = 0$ , і тоді теорема буде мати вигляд:  $T = \sum A_k^e$ .

Обчислимо кінетичну енергію системи:

$$T = T_1 + T_2.$$

Тіло 1 здійснює плоский рух, тоді кінетична енергія:

$$T_1 = \frac{m_1}{2} V_c^2 + \frac{1}{2} (m_1 \cdot r^2) \omega^2.$$

Оскільки точка  $P$  є миттєвим центром швидкостей, то

$$\omega = \frac{V_c}{R} \quad \text{і} \quad T_1 = \frac{m_1}{2} V_c^2 + \frac{m_1}{2} \frac{r^2}{R^2} V_c^2 = \frac{m_1 V_c^2}{2} \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Тіло 2 здійснює поступальний рух, і його кінетична енергія:

$$T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2}.$$



Із рисунка 63 видно, що  $V_2 = V_A = 2V_c$ .

$$\text{Тоді } T_2 = \frac{m_2 4V_c^2}{2}.$$

Кінетична енергія всієї системи набуде виду:

$$T = \frac{1}{2} \left[ 4m_2 + m_1 \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] V_c^2.$$

Обчислимо суму робіт зовнішніх сил.

Роботу виконують сила  $m\bar{g}$  і пара  $(\bar{N}, m\bar{g})$ . Оскільки  $V_2 = 2V_c$ , то переміщення точки  $C$ :  $s_c = 0,5s$ . Робота складається з двох частин,

$$\sum A_k^e = A(m\bar{g}) + A(M_{\text{опору}}).$$

Робота сили ваги тіла 2:

$$A(m_2 \bar{g}) = m_2 g s.$$

А робота моменту опору коченню

$$A(M_{\text{опору}}) = -N f_k a_1,$$

де  $a_1$  – кут оберту катка;  $N = m_1 g$ .

Так як  $w = \frac{V_c}{R}$ , то проінтегрувавши цей вираз отримаємо:

$$a_1 = \frac{s_c}{R} = \frac{0,5s}{R} \text{ і } A(M_{\text{опору}}) = -m_1 g f_k \cdot \frac{s}{2R}.$$

Тоді сума робіт зовнішніх сил становить:

$$\sum A_k^e = m_2 g s - m_1 g f_k \frac{s}{2R} = g s (m_2 - m_1 \frac{f_k}{2R}).$$

Дорівнюємо вирази кінетичної енергії системи і суми робіт зовнішніх сил:

$$T = \sum A_k^e, \text{ тоді } \frac{1}{2} \left[ 4m_2 + m_1 \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] V_c^2 = g s \left( m_2 - \frac{m_1 f_k}{2R} \right),$$

$$\text{Звідки } V_c = \sqrt{\frac{2g(m_2 R - \frac{f_k}{2} m_1) R s}{4m_2 R^2 + m_1 (R^2 + r^2)}}.$$

**Приклад 30.** Підвісний конвеєр для транспортування штучних вантажів складається з прямої рейки 1, двокоткових візків 2 і вантажних колісок 3 (рис.64). Коліски 3 підвішені до візків 2 за допомогою шарнірів С. Усі візки з'єднані між собою тяговим ланцюгом 4.

Маса вантажу з коліскою становить  $m = 60 \text{ кг}$ , маса котка візка 2, який має діаметр  $d = 0,1 \text{ м}$ , становить  $m_1 = 5 \text{ кг}$ . Коефіцієнт тертя кочення котка  $f_k = 0,0015 \text{ м}$ .

Визначити силу  $\bar{S}$ , яку необхідно прикласти до тягового ланцюга 4 при переміщенні одного візка із завантаженою коліскою від положення А (завантаження коліски) до положення В (розвантаження коліски), якщо відстань між точками А і В становить  $l_1 + l_2 = 16 + 16 \text{ м}$ , висота підйому коліски з вантажем  $H = 4,8 \text{ м}$ , швидкість у положенні А дорівнює нулю, а в положенні В -  $V_B = 0,2 \text{ м/с}$ . Тертям у шарнірах С, тертям тягового ланцюга по прямій рейці і його вагою знехтувати. Котки вважати однорідними круглими дисками. Кочення котків відбувається без ковзання.

Розв'язання

Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи:

$$T - T_o = \sum_{k=1}^N A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N A_k^{(i)}.$$

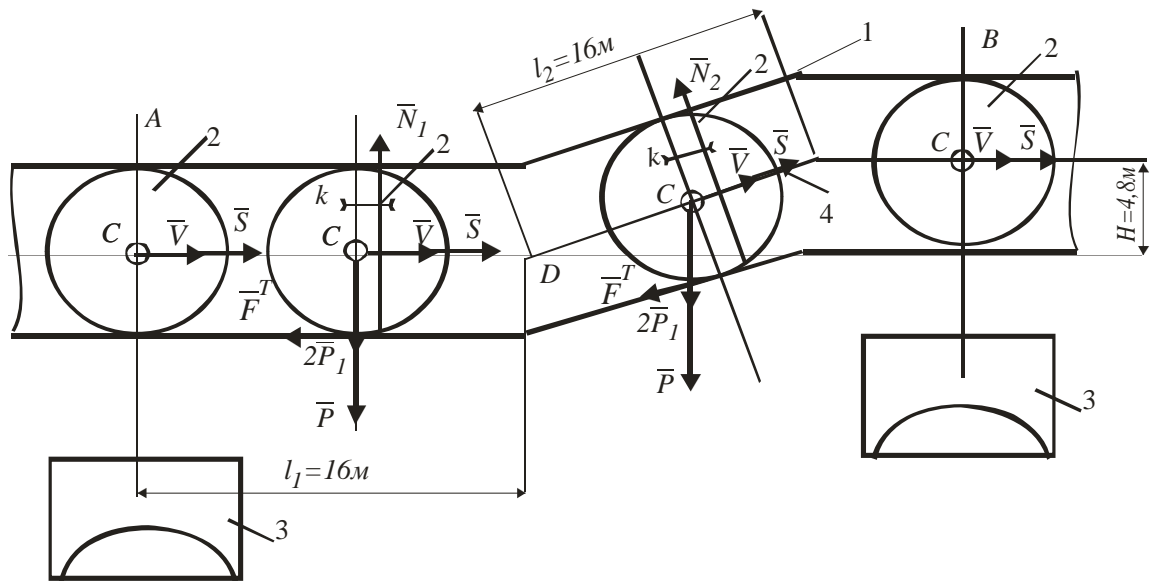


Рисунок 64

Система, що розглядається, складається з твердих тіл, і тертям у шарнірі  $C$  нехтують, тому

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(i)} = 0.$$

Оскільки в початковому положенні система перебуває в спокої, то  $T_0 = 0$ . Отже, теорема про зміну кінетичної енергії системи набирає вигляду

$$T = \sum_{k=1}^n A_k^{(e)}. \quad (a)$$

Кінетична енергія системи  $T$  у кінцевому положенні системи  $B$  дорівнює сумі кінетичних енергій твердих тіл, які належать до складу системи:

$$T = T_1 + 2T_2, \quad (б)$$

де  $T_1$  – кінетична енергія колиски з вантажем;  $T_2$  – кінетична енергія котка.

Колиска з вантажем здійснює поступальний рух. Кінетична енергія такого тіла визначається за формулою

$$T_1 = \frac{mV_c^2}{2},$$

де  $V_c$  – швидкість точки  $C$ .

Оскільки в положенні  $B$   $V_c = V_B$ , то остаточно маємо

$$T_1 = \frac{mV_B^2}{2},$$

де  $m$  – маса колиски з вантажем.

Коток здійснює плоскопаралельний рух, тому кінетична енергія котка визначається за формулою

$$T_2 = \frac{m_1V_c^2}{2} + \frac{J_c w^2}{2},$$

де  $m_1$  – маса котка;

$V_c$  – швидкість центра мас котка;

$J_c$  – момент інерції котка відносно осі, що проходить через центр мас котка  $C$ ;

$w$  – кутова швидкість котка.

Оскільки в положенні  $B$   $V_c = V_B$ , між лінійною швидкістю центра котка  $C$  і кутовою швидкістю котка при його коченні без ковзання існує залежність  $w = \frac{2V}{d}$ , то попередній вираз  $T$  набирає вигляду

$$T_2 = \frac{m_1V_B^2}{2} + \frac{J_c w^2}{2} = \frac{3m_1V_B^2}{4},$$

де

$$J_c = \frac{m_1 \left( \frac{d}{2} \right)^2}{2} = \frac{m_1 d^2}{8}.$$

Значення  $T_1$  і  $T_2$  підставляємо у рівність (б):

$$T = T_1 + 2T_2 = \frac{mV_B^2}{2} + \frac{6m_1^2}{4} = \frac{V_B^2}{2}(m + 3m_1). \quad (в)$$

Визначимо суму робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до системи, на переміщенні від положення  $A$  до положення  $B$ :

$$\sum_{k=1}^N A_k^{(e)} = A(\bar{P}) + A(2\bar{P}_1) + A(M_k) + A(\bar{S}),$$

де  $A(\bar{P})$  – робота сили ваги вантажу з коліскою;  $A(2\bar{P}_1)$  – робота сил ваги котків;  $A(M_k)$  – робота моменту сил опору кочення;  $A(\bar{S})$  – робота шуканої сили.

Робота сили тертя  $\bar{F}^T$  дорівнює нулю, оскільки сила  $\bar{F}^T$  прикладена миттєво центрі швидкостей котка.

Робота сили ваги  $\bar{P}$

$$A(\bar{P}) = -P \sin a \cdot l = -PH = -mgH.$$

Робота сили ваги  $2\bar{P}_1$

$$A(2\bar{P}_1) = -2P_1 \sin a \cdot l_2 = -2P_1H = -2m_1gH.$$

Робота моменту сил опору кочення

$$A(M_k) = -(P + 2P_1)f_k a_1 - (P + 2P_1)\cos a f_k a_2,$$

де  $(P + 2P_1)f_k a_1$  – робота моменту сил опору кочення на горизонтальній ділянці;  $(P + 2P_1)\cos a f_k a_2$  – робота моменту сил опору кочення на похилій ділянці;  $a_1 = \frac{2l_1}{d}$ ;  $a_2 = \frac{2l_2}{d}$  (на підставі виразу  $w = \frac{2V}{d}$ , оскільки тут лінійні і кутові переміщення співвідносяться, як лінійні і кутові швидкості).

$$\text{Отже, } A(M_k) = -\frac{2l_1 g f_k}{d} (m + 2m_1) - \frac{2l_2 g f_k}{d} (m + 2m_1) \cos a.$$

Робота шуканої сили  $\bar{S}$

$$A(\bar{S}) = S(l_1 + l_2).$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k^{(e)} &= -mgH - 2m_1gH - \frac{2l_1 g f_k}{d} (m + 2m_1) - \frac{2l_2 g f_k}{d} (m + 2m_1) \cos a + \\ &+ S(l_1 + l_2) = -60 \cdot 9,81 \cdot 4,8 - 2 \cdot 5 \cdot 9,81 \cdot 4,8 - (60 + 2 \cdot 5) \cdot 9,81 \cdot 0,0015 \cdot 320 - (\Gamma) \\ &- (60 + 2 \cdot 5) \cdot 9,81 \cdot 0,954 \cdot 0,0015 \cdot 320 + S(16 + 16) = 32S - 3940,2, \end{aligned}$$

$$\text{де } \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{4,8}{16}\right)^2} = 0,954.$$

Значення кінетичної енергії системи (в) і значення суми робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до системи (г), підставляємо у рівність (а):

$$\frac{V_B^2}{2} (m + 3m_1) = 32S - 3940,2.$$

Звідки отримаємо:

$$S = \frac{1}{32} \left[ 3940,2 + \frac{V_B^2}{2} (m + 3m_1) \right] = 123,2 \text{ Н}.$$

**Приклад 31.** *Механічна система складається з трьох тіл, з'єднаних між собою ниткою. Тіло 3 прикріплено за допомогою пружини до опори. У початковий момент часу система перебувала у стані спокою. Вантаж 1 починає рухатись вниз вздовж нахиленої під кутом  $\alpha$  до горизонту площини. При цьому ступінчатий диск 2 починає рух навколо нерухомої осі  $O$ , а коток 3 рухається вгору вздовж нахиленої під кутом  $\beta$  до горизонту площини, розтягуючи пружину. Коток 3 вважати однорідним суцільним циліндром. На рисунку 65,а зображена система у початковому положенні, коли вона перебуває у спокої. На рисунку 65,б система зображена у положенні, коли вантаж 1 опустився вздовж нахиленої площини на відстань  $S$ . Необхідні для розрахунків дані:*

$$m_1 = 10m; m_2 = 2m; m_3 = m; r_2 = 6 \text{ см}; R_2 = 2r_2 = 12 \text{ см};$$

$$\rho = i_{2z} = 1,5r_2 = 9 \text{ см}; R_3 = 15 \text{ см}; \alpha = 30^\circ; \beta = 45^\circ; f = 0,1; c = 10 \text{ Н/м};$$

$$f_k = \delta = 0,2 \text{ см}; s_0 = 0,5 \text{ м}; F = f(s) = 30(s+3s), \text{ Н}.$$

Знайти швидкість вантажу 1 у кінцевому положенні.

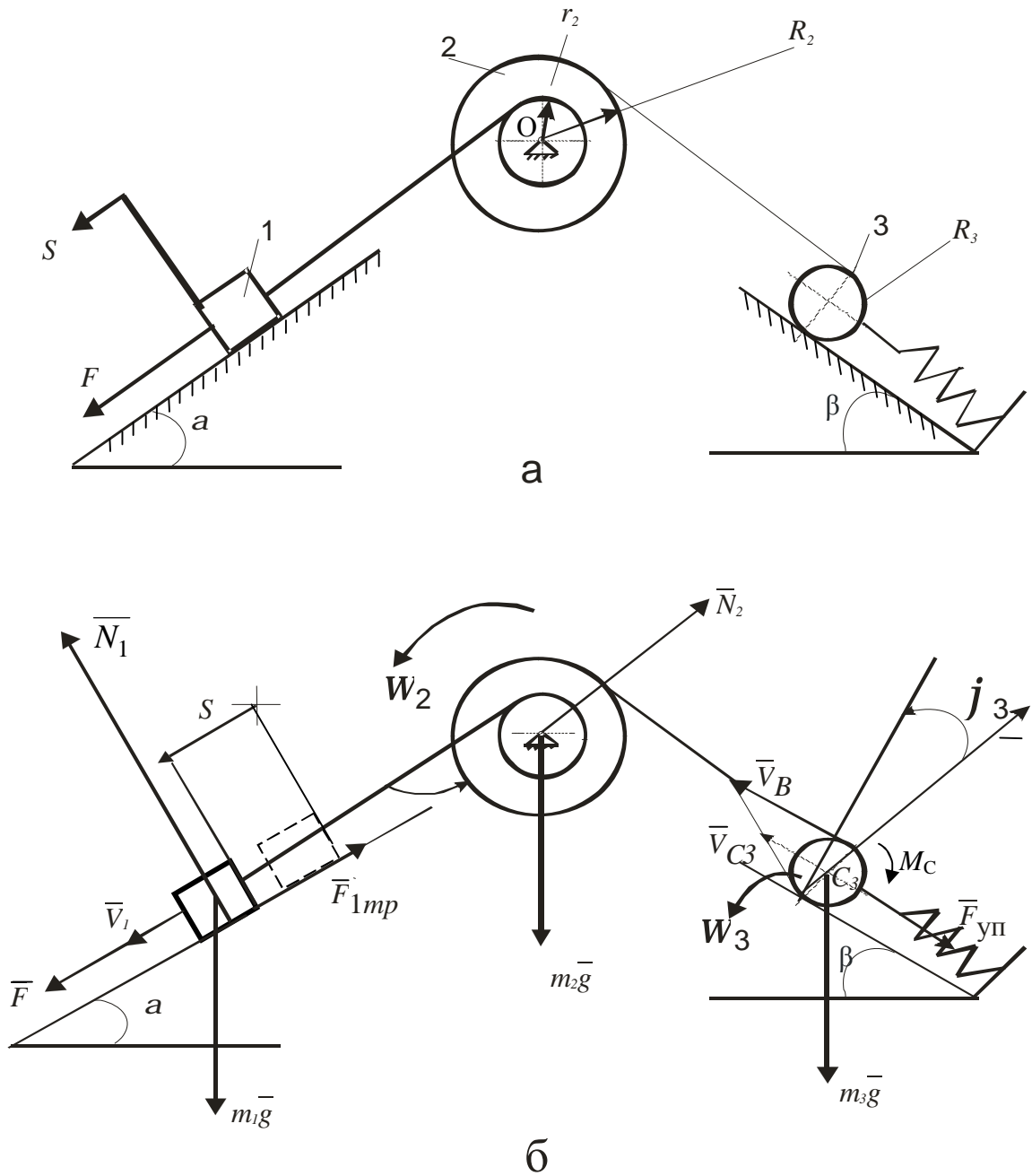


Рисунок 65

## Розв'язання

На підставі теореми про зміну кінетичної енергії можна записати (вважаємо механічну систему незмінною):

$$T - T_o = \sum_{k=1}^n A_k^{(e)},$$

де  $T_o$  та  $T$  – кінетична енергія система відповідно у початковому та кінцевому положеннях;

$\sum_{k=1}^n A_k^{(e)}$  – сума робіт зовнішніх сил на переміщеннях точок системи.

У початковий момент система знаходилась у стані спокою, тому  $T_o = 0$ . Зобразимо систему у кінцевому положенні (див. рис. бб, б).

Кінетична енергія системи у кінцевому положенні складається з кінетичних енергій кожного тіла:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (\text{б})$$

Кінетична енергія вантажу 1, який рухається поступально:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2. \quad (\text{в})$$

Кінетична енергія блока 2, що обертається навколо нерухомої осі:

$$T = \frac{1}{2} J_{2z} \omega^2, \quad (\text{г})$$

де  $J_{2z}$  – момент інерції блока відносно осі обертання,

$N_3$

$$J_{2z} = m_2 i_{2z}^2; \quad (\text{д})$$

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}. \quad (\text{е})$$



Таким чином

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{i_{2z}^2}{r_2^2} V_1^2. \quad (\text{ж})$$

Кінетична енергія катка 3, який рухається плоско-паралельно:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{c3}^2 + \frac{1}{2} J_{zc} w_3^2, \quad (\text{и})$$

де  $V_{c3}$  – швидкість центру мас катка;

$w_3$  – миттєва кутова швидкість катка;

$J_{zc}$  – момент інерції тіла відносно осі, яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас.

Оскільки колесо можна вважати суцільним однорідним диском, то його момент інерції відносно осі  $z$ , яка проходить через центр мас  $C_3$ , дорівнює:

$$J_{zc} = \frac{m_3 R_3^2}{2}. \quad (\text{к})$$

Знайдемо  $V_B, V_{c3}, w_3$ :

$$V_B = w_2 R_2 = \frac{V_1 R_2}{r_2}, \quad (\text{л})$$

$$V_{c3} = \frac{1}{2} V_B = \frac{V_1 R_2}{2r_2}, \quad (\text{м})$$

$$w_3 = \frac{V_B}{2R_3} = \frac{V_1 R_2}{2r_2 R_3}. \quad (\text{н})$$

Підставимо (к), (л) та (н) в (и):

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left( \frac{V_1 R_2}{2r_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3 R_3^2}{2} \left( \frac{V_1 R_2}{2r_2 R_3} \right)^2 = \frac{3}{16} m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} V_1^2. \quad (\text{п})$$

Визначимо кінетичну енергію усієї механічної системи, підставивши (в), (ж), та (н), у формулу (б):

$$T = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \frac{i_{2z}^2}{r_2^2}V_1^2 + \frac{3}{16}m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2}V_1^2 = \frac{V_1^2}{16} \left( 8m_1 + 8m_2 \frac{i_{2z}^2}{r_2^2} + 3m_3 \frac{R_2^2}{r_2^2} \right) \quad (\text{р})$$

Після підстановки значень мас і радіусів одержимо:

$$T = \frac{V_1^2}{16} \left( 8 \cdot 10m + 8 \cdot 2m \left( \frac{1,5r_2}{r_2} \right)^2 + 3m \left( \frac{2r_2}{r_2} \right)^2 \right) = 8mV_1^2. \quad (\text{с})$$

Знайдемо суму робіт усіх зовнішніх сил, які діють на тіла системи на заданому переміщенні. Зобразимо зовнішні сили, які діють на систему (рис. 65,б) і знайдемо їх сумарну роботу:

$$\sum_{k=1}^N A_k^e = A(\bar{F}) + A(m_1\bar{g}) + A(\bar{N}_1) + A(\bar{F}_1^{mp}) + A(m_2\bar{g}) + A(\bar{N}_2) + A(m_3\bar{g}) + A(\bar{N}_3) + A(\bar{F}_3^{mp}) + A(\bar{M}_c) + A(\bar{F}_{yn}). \quad (\text{т})$$

Робота зовнішньої сили  $F$ :

$$A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} F ds = \int_0^{s_1} 30 \cdot (2 + 3s) ds = 60 s_1 + 45 s_1^2,$$

де  $s_1 = s$  – переміщення вантажу 1.

Робота сили ваги тіла 1:

$$A(m_1\bar{g}) = A(m_1g)_t s,$$

де  $(m_1g)_t$  – проекція сили ваги на напрямок руху,  $(m_1g)_t = m_1g \sin a$ .

Таким чином,

$$A(m_1 \bar{g}) = m_1 g \sin a \cdot s_1.$$

Робота реакції площини  $\bar{N}_1$  дорівнює 0, оскільки вона розміщена нормально до напрямку руху, отже  $A(\bar{N}_1) = 0$ .

Робота сили тертя ковзання  $\bar{F}_1^{mp}$   $A(\bar{F}_1^{mp}) = A(\bar{F}_1^{mp})_t s$ , де  $(\bar{F}_1^{mp})_t$  – проекція сили тертя ковзання на напрямок руху,  $(\bar{F}_1^{mp})_t = -\bar{F}_1^{mp}$ , а сама сила тертя дорівнює:

$$\bar{F}_1^{mp} = fN_1 = fm_1 g \cos a.$$

Отже

$$A(\bar{F}_1^{mp}) = -fm_1 g \cos a \cdot s_1.$$

Робота сили ваги тіла 2 і реакції підшипника  $\bar{N}_2$  дорівнюють нулю, оскільки сили прикладені до точки, яка не рухається.

$$A(m_2 \bar{g}) = A(\bar{N}_2) = 0.$$

Робота сили ваги тіла 3:  $A(m_3 \bar{g}) = (m_3 \bar{g})_t s_3$ ,

де  $(m_3 \bar{g})_t = -m_3 g \sin b$ ,  $s_3$  – переміщення центру мас тіла 3, пропорційне відповідній швидкості:  $\frac{s_3}{V_{C3}} = \frac{s_1}{V_1}$ , звідки  $s_3 = s_1 \frac{V_{C3}}{V_1} = s_1$ . Отже

$$A(m_3 \bar{g}) = -m_3 g \sin b \cdot s_1.$$

Робота реакції площини  $\bar{N}_3$  дорівнює нулю, оскільки сила розміщена перпендикулярно напрямку руху

$$A(\bar{N}_3) = 0.$$

Робота сили тертя ковзання  $\bar{F}_3^{mp}$  також дорівнює нулю, оскільки вона прикладена до миттєвого центру швидкостей катка 3, який не рухається. Отже

$$A(\bar{F}_3^{mp}) = 0.$$

Робота сил опору кочення  $M_c$ :  $A(M_c) = -M_c j_3$ , де  $M_c$  – момент сил опору кочення, який дорівнює  $M_c = dN_3 = d m_3 g \cos b$ ;  $j_3$  – кут повороту катка 3 навколо осі  $z$ , яка перпендикулярна до площини руху і проходить через миттєвий центр швидкостей.

Кут  $j_3$  є величиною, пропорційною відповідній кутовій швидкості  $w_3$ :  $\frac{j_3}{w_3} = \frac{s_1}{V_1}$ , звідки  $j_3 = \frac{s_1}{R_3}$ . Отже  $A(M_c) = -d m_3 g \cos b \frac{s}{R_3}$ .

Робота сили пружності  $F_{yn}$ :

$$A(\bar{F}_{yn}) = -\frac{cs_3^2}{2} = -\frac{cs_1^2}{2}.$$

Підставляючи одержані значення робіт до формули (р), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^N A_k^{(e)} = (60 s_1 + 45 s_1^2) + m_1 g \sin a \cdot s_1 - f m_1 g \cos a - m_3 g \sin b s_1 - dm_3 g \cos b \frac{s_1}{R_3} - \frac{cs_1^2}{2}.$$

Після підстановки значень мас та функцій кутів одержуємо:

$$\sum_{k=1}^N A_k^{(e)} = s_1 \left[ 60 + 45s_1 + 10 mg \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 10 mg \cdot 0,866 - 0,707 mg - 0,002 mg \frac{0,707}{0,015} - \frac{10 s_1}{2} \right].$$

Звідки

$$\sum_{k=1}^N A_k^{(e)} = 161,7 \text{ Дж} . \quad (y)$$

Підставимо (п) і (с) в формулу (а) і знайдемо, що  $8mV_1^2 = 161,7$ .  
Звідки  $V_1 = 1,42 \text{ м/с}$ .

## 9.7 Приклади завдань для самоперевірки знань

### Варіант 1

- 1 Викласти формулу для визначення кінетичної енергії твердого тіла при обертальному русі.
- 2 Записати формулу аналітичного виразу елементарної роботи сили.
- 3 Записати формулу для визначення роботи сили тертя ковзання і пояснити її рисунком.
- 4 Записати формулу для визначення кінетичної енергії системи матеріальних точок.
- 5 Записати та сформулювати теорему про змінення кінетичної енергії системи в інтегральній формі.

### Варіант 2

- 1 Довести та сформулювати теорему про змінення кінетичної енергії точки у диференціальній формі.
- 2 Записати формулу для визначення елементарної роботи сили  $\vec{F}$  на переміщенні  $d\vec{S}$ .
- 3 Записати формулу для визначення роботи лінійної сили пружності.
- 4 Записати формулу для визначення кінетичної енергії системи тіл.
- 5 Записати формулу та сформулювати, чому дорівнює робота сили ваги.

### Варіант 3

- 1 Викласти формулу для визначення кінетичної енергії твердого тіла при його плоскому русі.
- 2 Записати формулу для визначення елементарної роботи сили  $\vec{F}$ , якщо положення точки задається радіус-вектором  $\vec{r}$ .
- 3 Записати формулу для визначення кінетичної енергії точки.
- 4 Записати формулу для визначення роботи моменту опору кочення.
- 5 Записати та сформулювати, чому дорівнює робота внутрішніх сил твердого тіла.

### Варіант 4

- 1 Викласти формулу для визначення роботи моменту сили при обертальному русі.
- 2 Записати формулу для визначення елементарної роботи сили  $\vec{F}$ , прикладеної до точки, яка рухається зі швидкістю  $\vec{V}$ .
- 3 Записати формулу для визначення кінетичної енергії твердого тіла при поступальному русі.
- 4 Записати формулу для визначення роботи лінійної сили пружності.
- 5 Записати і сформулювати теорему про змінення кінетичної енергії точки в інтегральній формі.

### Варіант 5

- 1 Довести та сформулювати теорему про змінення кінетичної енергії системи у диференціальній формі.
- 2 Записати одну із формул для визначення повної роботи сили.
- 3 Записати формулу для визначення роботи сил тертя ковзання.
- 4 Записати формулу для визначення кінетичної енергії твердого тіла при його обертальному русі.
- 5 Записати та сформулювати, чому дорівнює робота моменту опору коченню.

## Варіант 6

- 1 Записати формулу для визначення роботи сили ваги.
- 2 Записати формулу для визначення потужності сили.
- 3 Записати формулу для визначення кінетичної енергії тіла при плоскому русі.
- 4 Записати формулу для визначення кінетичної енергії тіла при плоскому русі.
- 5 Записати та сформулювати теорему про змінення кінетичної енергії точки в диференціальній формі.

## 10 ПОТЕНЦІАЛЬНЕ СИЛОВЕ ПОЛЕ. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МЕХАНІЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

Для обчислення роботи сили на будь-якому переміщенні в загальному випадку необхідно знати закон руху точки на цьому переміщенні. Є клас сил, для яких робота не залежить від характеру рухів точки на розглянутому переміщенні. Ці сили називаються *потенціальними*, і вони мають велике значення в різних галузях механіки і фізики.

### 10.1 Потенціальне силове поле і силова функція

*Силовим полем* називають частину простору, у кожній точці якого на матеріальну точку діє певна сила, що залежить від координат точки й часу. Силове поле вважають *стаціонарним*, якщо діючі сили не залежать від часу. Якщо ж сили залежать від часу, то силове поле є нестаціонарним.

Силове поле називають *потенціальним*, якщо є силова функція  $U$ , що залежить від координат точки і часу для нестаціонарного силового поля. Через силову функцію  $U$  проєкції сили на координатні осі в кожній точці поля (рис.67) визначаються за формулами:

$$F_x = \frac{dU}{dx}; \quad F_y = \frac{dU}{dy}; \quad F_z = \frac{dU}{dz}. \quad (121)$$

Функцію  $U = (x, y, z, t)$  називають силовою функцією.

Розглянемо основні властивості силової функції стаціонарного силового поля. З рівняння (121) витікає, що силова функція визначається з точністю до постійної. Додавання сталої до функції  $U$  не впливає на значення  $F_x, F_y, F_z$ . Елементарна робота

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU, \quad (122)$$

тобто  $dA = dU$ .

Таким чином, елементарна робота сили у потенціальному силовому полі дорівнює повному диференціалу силової функції. Іноді цю властивість силової функції приймають за її визначення; тоді рівняння (121) одержують із рівняння (122).

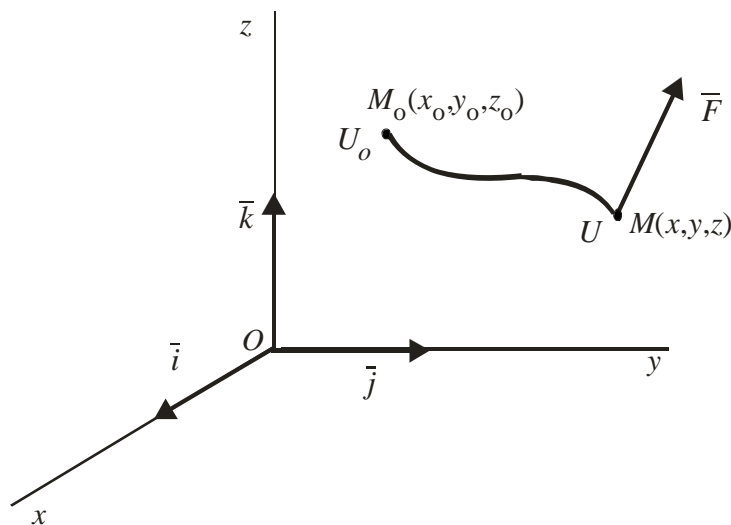


Рисунок .67

Повна робота сили  $\bar{F}$  на ділянці від точки  $M_0$  до точки  $M$

$$A = \int_{M_0}^M dA = \int_{M_0}^M dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U - U_0,$$



тобто

$$A = U - U_0, \quad (123)$$

де  $U_0 = U(x_0, y_0, z_0)$ ,  $U = U(x, y, z)$ .

Отже, повна робота сили на будь-якому переміщенні точки дорівнює різниці значень силової функції в кінцевій і початковій точках переміщення і не залежить від форми траєкторії, якою відбувається рух, якщо силова функція є однозначною.

З рівняння (123) витікає, що робота сили у потенціальному силовому полі за будь-яким замкнутим шляхом дорівнює нулю, тому що значення силової функції у початковій і кінцевій точках переміщення однакове, якщо силова функція не набуває інших значень після повернення до первісної точки.

Силова функція може набувати інших значень після повернення до первісної точки, залежно від кількості обходів, якщо ділянка, обмежена замкнутим шляхом обходу, містить у собі спеціальні особливі точки силової функції.

Якщо застосувати поняття вектор-градієнта від скалярної функції  $U$

$$\text{grad } U = \bar{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial U}{\partial z},$$

де  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – одиничні вектори, спрямовані по осях координат, то силу  $\bar{F}$  можна виразити як градієнт силової функції  $U$ :  $\bar{F} = \overline{\text{grad}} U$ .

Визначимо умови, які дають змогу за силами силового поля встановлювати, чи буде силове поле потенціальним.

Якщо силова функція  $U$  існує, то

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}.$$

Звідки матимемо:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0. \quad (124)$$

Рівності (124) – це необхідні і достатні умови існування силової функції  $U = U(x, y, z)$ . Якщо ввести вектор, проєкції якого на осі координат дорівнюють відповідно:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

і який називається вихором або ротором вектора  $\vec{F}$ :

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right),$$

то умови існування силової функції рівняння (124) можна подати у більш короткому вигляді:

$$\text{rot } \vec{F} = 0. \quad (125)$$

Таким чином, для того, щоб силове поле було потенціальним, необхідно й достатньо, щоб воно було безвихровим.

Непотенціальними силами є сили опору, що залежать від швидкості, і сили тертя. Прикладами потенціальних полей є поле сили тяжіння і поле сили пружності.

## 10.2 Поверхні рівня. Силові лінії

Якщо розглядати точки потенціального силового поля, у яких силова функція має однакове значення, наприклад  $U = C$ , то всі ці точки розташуються на поверхні, що називають *поверхнею рівного рівня* або *поверхнею рівня*.

Рівняння поверхні рівня має вигляд  $U(x, y, z) = C$ .

Відзначимо деякі властивості поверхонь рівня.

1 *Робота сили дорівнює нулю, якщо початкова й кінцева точки переміщення лежать на одній поверхні рівня.*

Дійсно,

$$A = U - U_0.$$

Якщо початкова й кінцева точки лежать на одній поверхні рівня, то  $U=U_0$ , і, отже,  $A=0$ . Робота сили на переміщенні між точками  $M_0$  і  $M$  не залежить від положення цих точок на своїх поверхнях рівня. На будь-якому переміщенні між двома точками розглянутих поверхонь рівня вона однакова (рис.68).

2 Сила в потенціальному силовому полі завжди перпендикулярна поверхні рівня або, точніше, дотичній площині поверхні рівня.

Дійсно, нехай маємо поверхню рівня  $U=C$ .

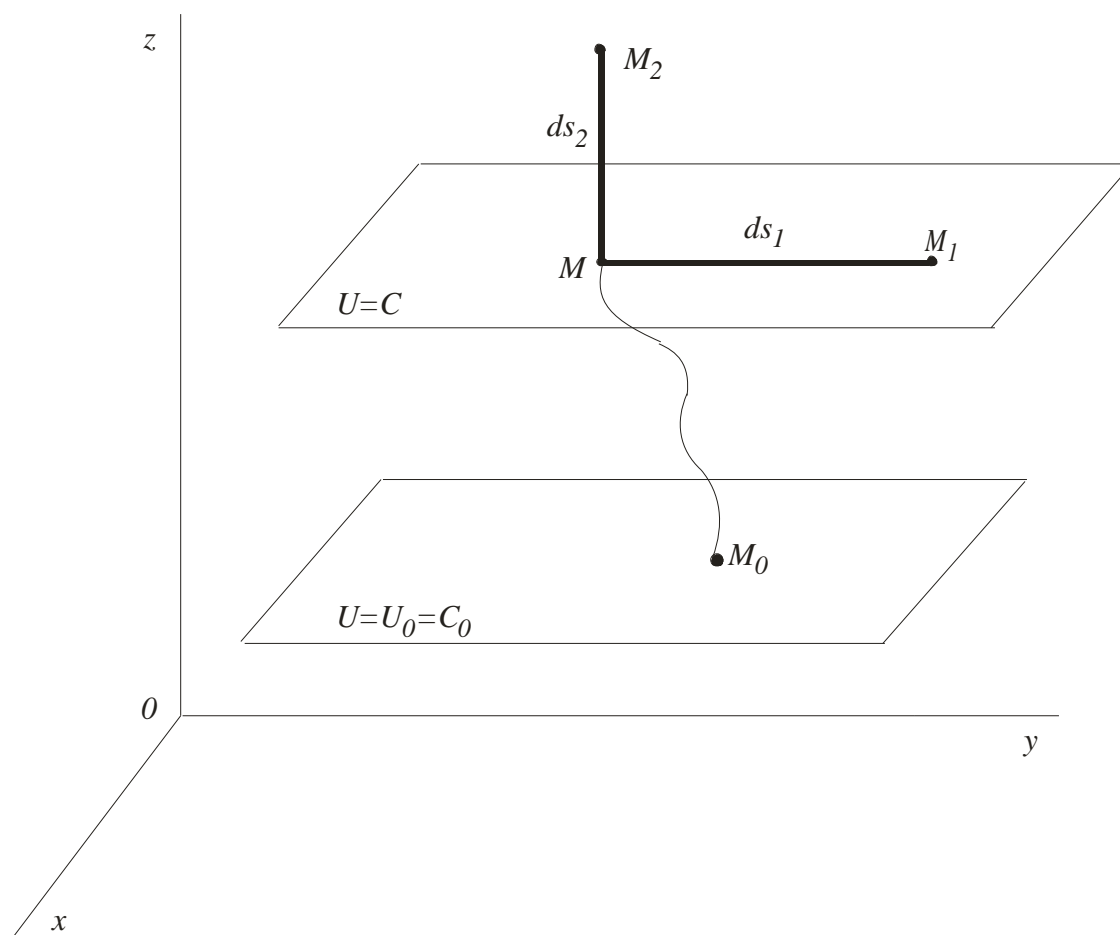


Рисунок 68

Візьмемо на ній дві нескінченно близькі точки  $M$  і  $M_1$  й обчислимо елементарну роботу на переміщенні  $ds_1$  між цими точками:

$$dA = F ds_1 \cos\left(\overline{F}, \overline{MM_1}\right).$$

З іншої сторони:  $dA = U(M_1) - U(M) = C - C = 0$ .

Тому що  $F$  і  $ds_1$  не дорівнюють нулю, то  $\cos\left(\overline{F}, \overline{MM_1}\right) = 0$ , і, отже кут між силою  $\overline{F}$  й переміщенням  $\overline{MM_1}$ , що лежить у дотичній площини до поверхні рівня, є прямим.

3 *Сила в потенціальному силовому полі завжди спрямована убік зростаючих значень силової функції.*

Для доказу цієї властивості сили візьмемо точку  $M_2$  на перпендикулярі до поверхні рівня, побудованому в точці  $M$  у напрямку зростаючих значень силової функції. Тоді елементарна робота на елементарному переміщенні  $MM_2$ , рівному  $ds_2$ , обчислюється за формулою

$$F ds_2 \cos\left(\overline{F}, \overline{MM_2}\right) = C_2 - C = 0,$$

тому що  $C_2 > C$ .

Отже,  $\cos\left(\overline{F}, \overline{MM_2}\right) > 0$ , тому кут, який дорівнює  $180^\circ$ , виключається, і виходить, що сила  $\overline{F}$  спрямована за  $\overline{MM_2}$  убік зростаючих значень силової функції.

4 Якщо все силове поле розбити поверхнями рівня на  $n$  рівних значень так, що для першої поверхні рівня  $C = \frac{C}{n}$ , для другої –  $C_2 = \frac{2C}{n}$  і для останньої  $C_n = n \frac{C}{n} = C$ , то там, де сусідні поверхні рівня ближче одна до одної, модуль сили  $\overline{F}$  більше, ніж у місцях, де поверхні рівня далі

відстоять одна від одної. Цю властивість можна перевірити, якщо помітити, що робота між точками будь-яких двох сусідніх поверхонь у цьому випадку однакова. Отже, там, де відстань між поверхнями менше, сила за числовим значенням більше, і навпаки.

Поряд з поверхнями рівня у силовому полі вводять поняття *силової лінії*, тобто такої лінії, у кожній точки якої сила спрямована за дотичною до цієї лінії (рис. 69).

Тому що вектор  $d\vec{r}$  із проєкціями на осі  $dx, dy, dz$  завжди спрямований за дотичною до кривої, то з умови паралельності  $d\vec{r}$  й  $\vec{F}$  треба, щоб

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}. \quad (126)$$

Ці диференціальні рівняння щодо координат  $x, y, z$  є диференціальними рівняннями силової лінії.

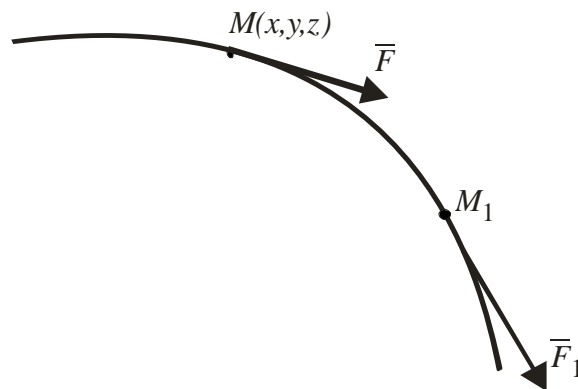


Рисунок 69

### 10.3 Потенціальна енергія

У випадку потенціального силового поля поряд із силовою функцією можна ввести іншу функцію, що характеризує здатність потенціальних сил виконувати роботу, тобто запас енергії у даній точці поля, – потенціальну

енергію в цій точці (рис. 70), або потенціальну енергію матеріальної точки в розглянутій точці силового поля.

Потенціальною енергією  $\Pi$  матеріальної точки у розглянутій точці силового поля  $M$  називають роботу, яку можуть виконати сили поля, що діють на матеріальну точку при переміщенні її із точки  $M$  у початкову точку  $M_0$ , тобто

$$\Pi = A_{MM_0}; \Pi = A_{MM_0} = U_0 - U = C_0 - U. \quad (127)$$

Постійна  $C_0$  та сама для всіх точок поля, що залежить від того, яка точка поля обрана за початкову. Очевидно, що потенціальну енергію можна ввести тільки для потенціального силового поля, у якому робота не залежить від форми переміщення між точками  $M$  і  $M_0$ . Непотенціальне силове поле не має потенціальної енергії, для нього не існує й силової функції.

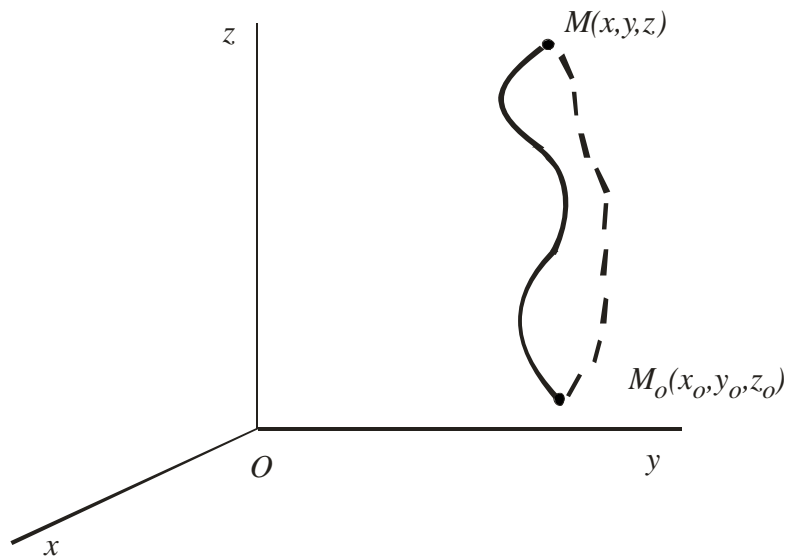


Рисунок 70

На підставі рівнянь (121) і (127) маємо:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (128)$$

З рівнянь (122), (123) і (127) відповідно, одержуємо:

$$dA = dU = -d\Pi; \quad A = U - U_0 = \Pi - \Pi_0.$$

З наведених формул витікає, що  $\Pi$  визначається з точністю до довільної сталої, котра залежить від вибору початкової точки, але ця довільна стала не впливає на сили, які обчислюють через потенціальну енергію, і роботу цих сил. З огляду на це, формулу (127) можна виразити так:

$$\Pi = -U + \text{const} \quad \text{або} \quad \Pi = -U. \quad (129)$$

Потенціальну енергію у будь-якій точці поля з точністю до довільної сталої можна визначити як значення силової функції в цій же точці, взяте зі знаком мінус. Власне кажучи, досить однієї з функцій ( $-\Pi$ ) або  $U$ .

#### 10.4 Приклади обчислення силових функцій

Якщо обчислити силову функцію, то на підставі рівняння (129) буде відома й потенціальна енергія. Обчислимо силові функції однорідного поля сили ваги і силового поля лінійної сили пружності.

**Силова функція однорідного поля сили ваги.** Якщо вісь  $Oz$  (рис. 71) направити вертикально вгору, то проекції сили ваги на координатні осі будуть рівні:

$$P_x = 0; \quad P_y = 0; \quad P_z = -mg.$$

Обчислюючи елементарну роботу сили  $\vec{P}$ , одержуємо:

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mg dz = d(-mgz).$$

Так як елементарна робота є повним диференціалом, то силове поле

сили ваги є потенціальним, і силова функція цього поля визначається за формулою

$$U = -mgz + const. \quad (130)$$

За формулою (130) визначають силову функцію однорідного поля сили ваги, тобто поля, у якому сила ваги постійна за модулем і напрямком. Рівняння поверхні рівня  $U = C$  або  $z = const$ , тобто поверхнями рівня є горизонтальні площини.

**Силовa функція лінійної сили пружності.** Для лінійної сили пружності (рис. 71) маємо

$$\vec{F} = -c\vec{r}; \quad F_x = -cx; \quad F_z = -cz.$$

Отже

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -c(xdx + ydy + zdz) = -crdr = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right),$$

тому що  $x dx + y dy + z dz = r dr$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

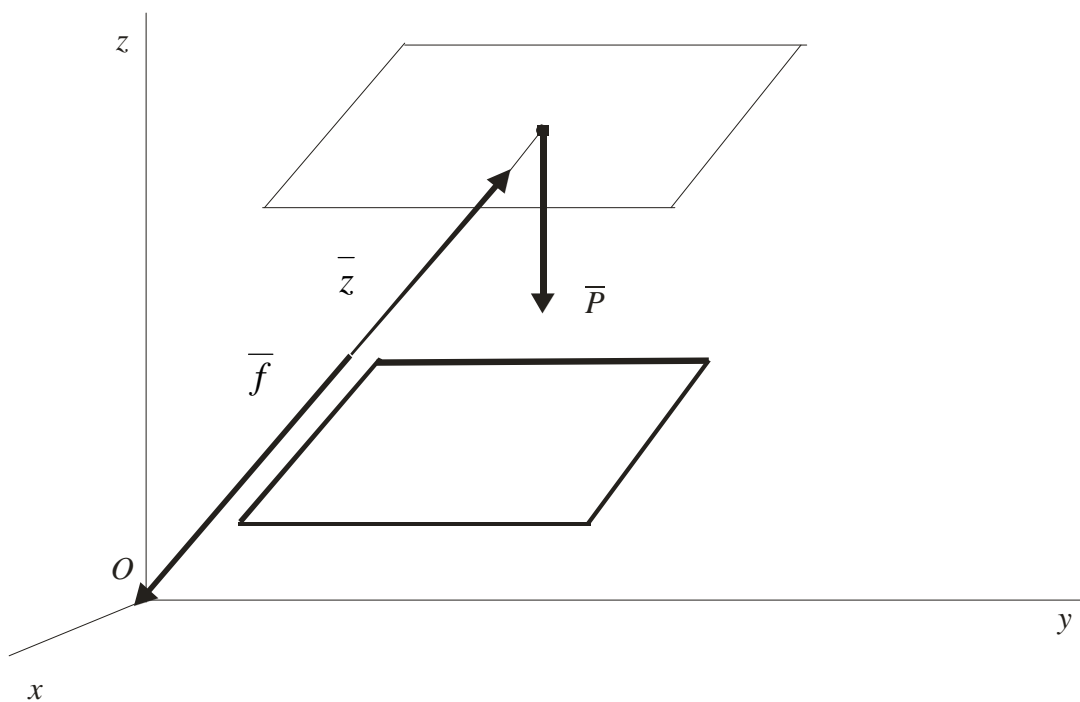


Рисунок 71



Силову функцію лінійної сили пружності визначають за формулою

$$U = -\frac{cr^2}{2} + const = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + const. \quad (131)$$

Поверхнями рівня  $U=C$  є сфери  $r=const$ .

**Силова функція і потенціальна енергія системи.** Для механічної системи у потенціальному силовому полі можна ввести силову функцію як функцію, що залежить від координат всіх точок системи, тобто від положення системи у силовому полі. Якщо система складається з  $n$  точок, то силова функція  $U(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \mathbf{K}; x_n, y_n, z_n)$  залежить у загальному випадку від координат всіх точок. Проекції сили, що діє на кожну точку системи:

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}; F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}; F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}; k = 1, 2, \mathbf{K}, n. \quad (132)$$

Сума елементарних робіт всіх сил, що діють на точки системи, визначається за формулою

$$\sum dA_k = \sum (F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k) = \sum \left( \frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k} dz_k \right) = dU,$$

або

$$\sum dA_k = dU. \quad (133)$$

Таким чином, сума елементарних робіт сил поля, що діють на механічну систему, дорівнює повному диференціалу від силової функції.

Якщо обчислити суму робіт, що здійснять сили поля, які діють на механічну систему при переміщенні системи з положення  $(M_0)$ , в якому є силова функція  $U_0$ , в положення  $(M)$ , в якому є силова функція  $U$ , то

$$\sum A_k = \sum_{(M_0)}^{(M)} \int dA_k = \int_{(M_0)}^{(M)} dU = U - U_0 \text{ або } \sum A_k = U - U_0. \quad (134)$$

Отже, сума робіт сил поля, що діють на систему при переміщенні системи з одного (початкового) положення в інше, (кінцеве), дорівнює різниці значень силової функції в кінцевому й початковому положеннях системи.

*Потенціальною енергією системи  $\Pi$  у розглянутому положенні ( $M$ ) потенціального силового поля називають суму робіт сил поля, що діють на систему, які ці сили здійснюють при переміщенні системи з розглянутого положення у початкове положення ( $M_1$ ), тобто*

$$\Pi = \sum A_k = U_1 - U = -U + \text{const}, \quad (135)$$

де  $U$  – значення силової функції для системи сил у положенні ( $M$ );

$U_1$  – значення силової функції в початковому положенні системи.

З рівнянь (132) ... (135) витікає, що

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}; F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}; F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}; \sum dA_k = dU = -d\Pi;$$

$$\sum A_k = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi.$$

## 10.5 Закон збереження механічної енергії

### 10.5.1 Закон збереження механічної енергії точки

Для матеріальної точки теорему про зміну кінетичної енергії можна виразити у наступному виді:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A.$$

Якщо матеріальна точка рухається у стаціонарному потенціальному силовому полі, то

$$A = \Pi_0 - \Pi.$$

Отже,

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi \quad \text{або} \quad \frac{mV^2}{2} + \Pi = \frac{mV_0^2}{2} + \Pi_0 = h,$$

де  $h$  – постійна величина.

Позначаючи через  $E$  повну механічну енергію точки, що складається з її кінетичної й потенційної енергій, одержуємо:

$$E = \frac{mV^2}{2} + \Pi = h.$$

Таким чином, *при русі точки у стаціонарному потенціальному силовому полі її повна механічна енергія залишається сталою величиною, що є законом збереження механічної енергії для точки.*

### **10.5.2 Закон збереження механічної енергії системи**

Теорему про зміну кінетичної енергії для системи можна подати у вигляді

$$T - T_0 = \sum (A_k^{(e)} + A_k^{(i)}) = \sum A_k.$$

Якщо система рухається у стаціонарному потенціальному силовому полі, то

$$\sum A_k = \Pi_0 - \Pi,$$

де  $\Pi$  – потенціальна енергія внутрішніх і зовнішніх сил, що діють на систему.

Отже,

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi \text{ або } T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = h,$$

де  $h$  – стала величина.

Позначаючи через  $E$  повну механічну енергію системи, маємо

$$E = T + \Pi = h. \quad (136)$$

Формула (136) виражає **закон збереження механічної енергії для системи**: повна механічна енергія при русі системи у стаціонарному потенціальному силовому полі зовнішніх і внутрішніх сил є сталою величиною.

У випадку абсолютно твердого тіла робота всіх внутрішніх сил дорівнює нулю, і, отже потенціальна енергія внутрішніх сил є сталою величиною, яка дорівнює нулю. Тоді в рівнянні (136) за потенціальну енергію варто прийняти тільки потенціальну енергію зовнішніх сил, що разом з кінетичною енергією будуть сталою величиною. При русі механічної системи, яка змінюється, сума кінетичної енергії системи і потенціальної енергії зовнішніх сил не є сталою. Вона стає сталою тільки разом з потенціальною енергією внутрішніх сил. Механічні системи, для яких виконується закон збереження механічної енергії, називають консервативними.

При русі точки або системи в непотенціальному силовому полі, яке зустрічається в дійсності, коли непотенціальність пов'язана з дією сил опору, механічна енергія змінюється, причому вона завжди зменшується на роботу сил опору. Загублена системою частина механічної енергії звичайно переходить в теплову енергію. Повна енергія всіх видів (механічна, теплова, хімічна й т.д.) не змінюється при русі точки або системи в будь-якому силовому полі. При цьому відбувається тільки перетворення одного виду енергії на інший.

## 11 ЗАСТОСУВАННЯ ЗАГАЛЬНИХ ТЕОРЕМ ДИНАМІКИ ДО ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ УДАРУ

У попередніх розділах вивчалися рухи механічних систем, в яких лінійні і кутові швидкості, а також відповідні динамічні величини, такі як кількість руху та кінетичний момент, під дією сил змінювалися з часом неперервно. Тобто нескінченно малим змінам часу відповідали нескінченно малі зміни даних величин. Сили, які зумовлюють неперервний характер змін кінематичних і динамічних величин у механічних рухах, називаються *звичайними* або *скінченими*, бо вони мають обмежені числові значення. Такими скінченими силами є, наприклад, вага, сила пружності, сила всесвітнього тяжіння тощо. У загальних теоремах динаміки, які були викладені в попередніх розділах (6, 7, 8, 9) сили розглядалися як скінченні.

Однак зустрічається випадок, коли, наприклад, швидкості точок тіла (чи механічної системи), а відповідно і їх кількість руху за дуже малий проміжок часу отримують скінчені прирости. Цей випадок називають ударом.

### 11.1 Основні положення і поняття теорії удару

Ударом називають явище, при якому за дуже малий проміжок часу, тобто майже миттєво, швидкості частини або всіх точок системи змінюються на скінченні величини в порівнянні з їхніми значеннями безпосередньо перед ударом або після нього. Тривалість удару становить звичайно десяті й менші частини часток секунди.

Зустрічаються різні за характером випадки ударних явищ. У найпростіших випадках удар проявляється як майже миттєве накладення або зняття в'язей. Прикладом удару, пов'язаного з миттєвим накладенням в'язей, може служити зіткнення тіла, що рухається поступально, з іншим, наприклад, нерухомим, тілом. Удар, обумовлений миттєвим зняттям в'язей або їхнім руйнуванням, можна уявити, як відрив частини тіла при його швидкому обертанні навколо осі і т.п. Можуть бути ударні явища більш

складного характеру, пов'язані, наприклад, з періодичним накладенням і зняттям в'язей (кування, штампування й ін.)

Зміна швидкостей точок при ударі на скінченні величини пов'язана з великими ударними прискореннями цих точок, виникнення яких вимагає великих ударних сил. Якщо  $\bar{F}$  – ударна сила, а  $t$  – тривалість, або час, удару, то характерний графік зміни ударної сили за час удару від моменту  $t_1$  до моменту  $t_2$  має вигляд, показаний на рис. 72.

Ударна сила швидко зростає від нуля у момент початку удару до максимального значення, потім так само швидко зменшується, звичайно за іншим законом, до нуля наприкінці удару. У багатьох випадках не потрібне детальне знання закону зміни ударної сили. Досить знати тільки сумарний імпульс цієї сили, що швидко змінюється за час удару або ударний імпульс. Ударним імпульсом називають векторну величину

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt . \quad (137)$$

Ударний імпульс графічно зображується на рисунку 72 заштрихованою площею, обмеженою кривою лінією зміни ударної сили й віссю абсцис, на якій відкладається час.

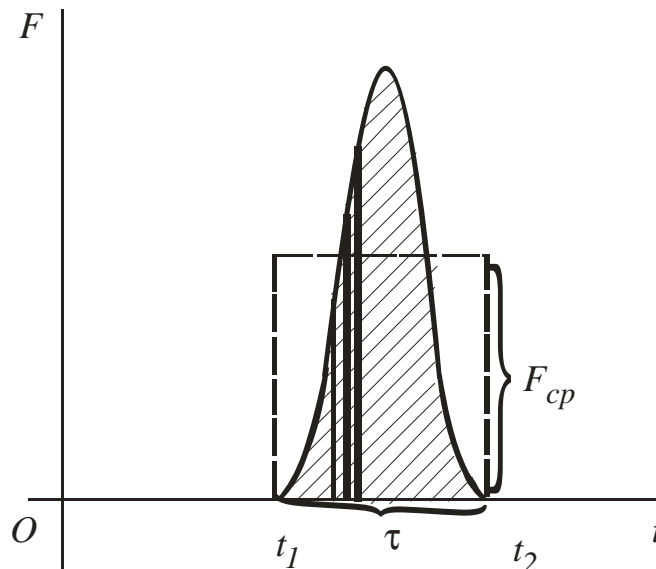


Рисунок 72

Іноді розглядають середню ударну силу – сталу силу протягом удару, що за час удару дає такий же ударний імпульс, як змінна ударна сила. Середня ударна сила визначається зі співвідношення

$$\bar{F}_{cp} t = \bar{S}. \quad (138)$$

Великі ударні сили дають кінцеві ударні імпульси за малий час удару. Середня ударна сила, відповідно до її визначення, – величину порядку  $1/t$ , тобто при малому  $t$  є величиною великою.

Імпульс неударної сили, наприклад, сили ваги тіла, за час удару має порядок величини  $t$ , тобто є величиною малою у порівнянні з ударними імпульсами. Тому імпульсами неударних сил можна знехтувати у порівнянні з ударними.

При ударі двох тіл у місці їхнього зіткнення виникають деформації і, отже, переміщення точок тіл, обумовлені деформаціями. Унаслідок малої величини деформації у порівнянні з переміщеннями точок тіла кінцевий проміжок часу переміщення точок тіл за час удару являються величинами малими. У загальному випадку, якщо  $\bar{V}_{cp}$  – середня швидкість за час удару будь-якої точки системи, що випробовує удар, то переміщення цієї точки має порядок величини  $t$ , тому що середня швидкість є величина кінцева. Тому *переміщеннями точок за час удару можна знехтувати*. Вважають, що за час удару точки системи не встигають змінити своє положення, а отже не змінюються їхні радіуси-вектори і їхні координати. Якщо, наприклад, тіло падає на спіральну пружину за час удару, величина переміщення тіла дорівнює стиску пружини за цей час. Цим переміщенням можна знехтувати у порівнянні, наприклад, з переміщенням тіла від початку удару тіла до моменту найбільшої деформації пружини. При ударі пружину можна вважати твердим тілом у наближених розрахунках при розгляді переміщення тіла за час удару.

Явище удару широко використовується у техніці при куванні, штампуванні, забиванні паль і т.п. Це ж явище часто є небажаним, особливо при ударі деталей у машинах одна об одну внаслідок люфтів, при ударі коліс транспорту при нерівності дороги, стики рейок і т.п.

Більшість величин, що характеризують удар, з достатньою точністю можуть бути отримані із загальних теорем динаміки. Розглянемо особливості застосування цих теорем до явища удару.

## 11.2 Теорема про зміну кількості руху і про рух центра мас для удару. Теорема Кельвіна

Нехай до удару точка  $M$  масою  $m$  рухалася ділянкою траєкторії  $AM$ , маючи безпосередньо перед ударом швидкість  $\bar{V}$  (рис.73).

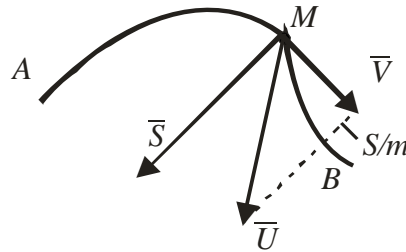


Рисунок 73

Під дією ударної сили  $\bar{F}$  і неударної  $\bar{F}^*$  точка змінила швидкість, що відразу після удару стала  $\bar{U}$ . Після удару точка продовжує рухатися ділянкою траєкторії  $MB$ . Удар точки  $M$  характеризується майже миттєвою зміною її швидкості від  $\bar{V}$  до  $\bar{U}$  за модулем і напрямком і у загальному випадку різким зломом її траєкторії в момент удару.

За теоремою про зміну кількості руху для точки в інтегральній формі маємо:

$$m\bar{U} - m\bar{V} = \int_0^t \bar{F} dt + \int_0^t \bar{F}^* dt ,$$

де  $t$  – час удару.

Позначаючи імпульс ударної сили  $\bar{S}$  й нехтуючи імпульсом неударної сили за час удару в порівнянні з ударним імпульсом, одержуємо наступну теорему про зміну кількості руху точки при ударі:

$$m\bar{U} - m\bar{V} = \bar{S} . \quad (139)$$

*Зміна кількості руху точки за час удару дорівнює ударному імпульсу, прикладеному до точки.*



У проекціях на осі координат маємо:

$$mU_x - mV_x = S_x; \quad mU_y - mV_y = S_y; \quad mU_z - mV_z = S_z. \quad (140)$$

Зміна швидкості точки при ударі  $\bar{U} - \bar{V} = \bar{S}/m$ , тобто вона паралельна ударному імпульсу  $\bar{S}$ .

Для будь-якої механічної системи, що складається з  $N$  точок, поділимо ударні сили на зовнішні й внутрішні. Застосовуючи теорему про зміну кількості руху для удару до кожної точки системи, одержуємо:

$$m_k \bar{U}_k - m_k \bar{V}_k = \bar{S}_k^{(e)} + \bar{S}_k^{(j)}, \quad i=1,2,\mathbf{K},N,$$

де  $\bar{S}_k^{(e)}$  і  $\bar{S}_k^{(j)}$  – ударні імпульси зовнішніх і внутрішніх сил.

Імпульсами неударних сил за час удару нехтуємо. Виконуючи додавання по точках системи отримаємо:

$$\sum_{k=1}^N m_k \bar{U}_k - \sum_{k=1}^N m_k \bar{V}_k = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(j)}.$$

Позначаючи кількості руху системи після і до удару, відповідно,

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^N m_k \bar{U}_k; \quad \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^N m_k \bar{V}_k,$$

і з огляду на те, що за властивостями внутрішніх сил, у тому числі і ударних,

$$\sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(j)} = 0,$$

маємо

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_k \bar{S}_k^{(e)}. \quad (141)$$

Співвідношення (141) виражає теорему про зміну кількості руху системи при ударі.

*Зміна кількості руху системи за час удару дорівнює векторній сумі зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до точок системи.*

У проекціях на координатні осі одержуємо:

$$Q_x - Q_{0x} = \sum S_{kx}^{(e)}; \quad Q_y - Q_{0y} = \sum S_{ky}^{(e)}; \quad Q_z - Q_{0z} = \sum S_{kz}^{(e)}. \quad (142)$$

Застосовуючи формулу для обчислення кількості руху системи через масу системи і швидкість її центра мас, отримаємо:

$$\bar{Q} = M\bar{U}_c; \quad \bar{Q}_0 = M\bar{V}_c,$$

де  $M$  – маса системи;  $\bar{U}_c, \bar{V}_c$  – швидкості центра мас до і після удару.

З урахуванням зазначеного з рівняння (141) одержуємо наступну теорему про рух центра мас системи:

$$M(\bar{U}_c - \bar{V}_c) = \sum \bar{S}_k^{(e)}. \quad (143)$$

У проекціях на координатні осі вона набуде форми:

$$\left. \begin{aligned} M(U_{cx} - V_{cx}) &= \sum_k S_{kx}^{(e)}; \\ M(U_{cy} - V_{cy}) &= \sum_k S_{ky}^{(e)}; \\ M(U_{cz} - V_{cz}) &= \sum_k S_{kz}^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

Окремі випадки:

1 Якщо  $\sum_k \bar{S}_k^{(e)} = 0$ , то з рівнянь (141) і (143) витікає, що

$$\bar{Q} = \bar{Q}_0; \quad \bar{U}_c = \bar{V}_c, \quad (145)$$

тобто, кількість руху системи і швидкість центра мас не змінюються, якщо векторна сума зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до точок системи, дорівнює нулю. Це закони збереження кількості руху і руху центра мас системи при ударі.

2 Якщо є координатна вісь, наприклад  $Ox$ , для якої  $\sum_k S_{kx}^{(e)} = 0$ , то з рівнянь (142) і (144) одержуємо наступні закони збереження проекції кількості руху і руху центра мас:

$$Q_x = Q_{ox}; \quad U_{cx} = V_{cx}. \quad (146)$$

З рівняння (139) можна одержати теорему Кельвіна для роботи ударної сили за час удару. Безпосередньо обчислити роботу ударної сили за час удару важко, тому що ударні сили дуже великі, а переміщення точок системи за час удару малі, і ними нехтують. Теорема Кельвіна дозволяє виразити роботу сили через імпульс сили і середнє значення швидкостей точки, тобто величини кінцеві при ударі. Помноживши рівняння (139) послідовно на  $\bar{U}$  і  $\bar{V}$  скалярно, одержимо:

$$mU^2 - m\bar{U} \cdot \bar{V} = \bar{S} \cdot \bar{U}; \quad m\bar{U} \cdot \bar{V} - mV^2 = \bar{S} \cdot \bar{V}.$$

Після додавання цих рівностей і ділення їх на 2 (двійку) маємо:

$$\frac{m\bar{U}^2}{2} - \frac{m\bar{V}^2}{2} = \frac{1}{2} \bar{S} \cdot (\bar{V} + \bar{U}).$$

За теоремою про зміну кінетичної енергії для точки ліва частина цієї рівності дорівнює зміні кінетичної енергії, а права – роботі  $A$ , прикладеної до точки сили  $\bar{F}$ . Тому

$$A = \frac{1}{2} \bar{S} \cdot (\bar{U} + \bar{V}). \quad (147)$$

Це і є теорема Кельвіна: *робота сили, прикладеної до точки, за будь-який проміжок часу дорівнює скалярному добутку імпульсу сили за той же проміжок часу і напівсуми початкової й кінцевої швидкостей точки.*

Теорему Кельвіна можна використовувати до всіх випадків руху точки, у тому числі і до явища удару.

Для механічної системи теорема Кельвіна виводиться із рівняння (146) шляхом додавання по всіх точках системи, тобто

$$\sum_k A_k = \frac{1}{2} \sum_k \bar{S}_k \cdot (\bar{U}_k + \bar{V}_k), \quad (148)$$

де  $\bar{S}_k = \bar{S}_k^{(e)} + \bar{S}_k^{(i)}$  – імпульс зовнішньої й внутрішньої сил, що діють на  $k$ -у точку.

### 11.3 Теорема про зміну кінетичного моменту при ударі

Нехай матеріальна точка під дією ударного імпульсу випробовує удар. За теоремою про зміну кількості руху для точки, маємо:

$$m\bar{U} - m\bar{V} = \bar{S},$$

де  $\bar{V}$  і  $\bar{U}$  – швидкості точки до і після удару.

Домножимо цю векторну рівність ліворуч векторно на радіус-вектор точки  $\bar{r}$ . Одержуємо:

$$\bar{r}_k \times m_k \bar{U}_k - \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k = \bar{r}_k \times \bar{S}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{S}_k^{(i)}; \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (149)$$

де  $\bar{S}_k^{(e)}$  й  $\bar{S}_k^{(i)}$  – зовнішні й внутрішній ударні імпульси, що діють на  $k$ -у точку системи.

Додаючи рівняння (149) по всіх точках системи і вводячи позначення кінетичних моментів системи до і після удару, а також векторної суми моментів зовнішніх ударних імпульсів відносно центру  $O$ , одержимо наступну теорему про зміну кінетичного моменту системи при ударі:

$$\bar{K}_o - \bar{K}_o^{(o)} = \sum_k \bar{M}_o(\bar{S}_k^{(e)}), \quad (150)$$

$$\text{де } \bar{K}_0 = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{U}_k, \quad \bar{K}_0 = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k, \quad \sum \bar{r}_k \times \bar{S}_k^e = \sum \bar{M}_0(\bar{S}_k^e),$$

$$\sum \bar{r}_k \times \bar{S}_k^i = \sum \bar{M}_0(\bar{S}_k^i) = 0,$$

згідно з властивостями внутрішніх сил.

Зміна кінетичного моменту системи відносно центра  $O$  під час удару дорівнює векторній сумі моментів відносно цього ж центра  $O$  зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до точок системи. У проєкціях на осі координат рівність (150) набуває наступної форми:

$$\begin{aligned} K_x - K_x^{(0)} &= \sum_k M_x(\bar{S}_k^{(e)}); \\ K_y - K_y^{(0)} &= \sum_k M_y(\bar{S}_k^{(e)}); \\ K_z - K_z^{(0)} &= \sum_k M_z(\bar{S}_k^{(e)}). \end{aligned} \quad (151)$$

Якщо удар випробовує тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі  $Oz$ , і  $w_0$  й  $w$  кутові швидкості до і після удару, то, з урахуванням того, що

$$K_z = J_z w, \quad K_z^{(0)} = J_z w_0,$$

де  $J_z$  – момент інерції тіла щодо осі обертання (151), одержуємо наступну зміну кутової швидкості тіла:

$$J_z (w - w_0) = \sum_k M_z(\bar{S}_k^{(e)});$$

або

$$(w - w_0) = \frac{\sum_k M_z(\bar{S}_k^{(e)})}{J_z}. \quad (152)$$

До рівняння (152) не входять моменти ударних імпульсів реакцій закріплених точок осі обертання, тому що вони перетинають вісь обертання, якщо не виникають ударні імпульси сил тертя у місцях закріплення осі.

Окремі випадки:

1 Якщо  $\sum_k \bar{M}_0(\bar{S}_k^{(e)})=0$ , то з рівняння (150) витікає збереження

кінетичного моменту системи щодо точки при ударі:

$$\bar{K}_0 - \bar{K}_0^{(0)} = \overline{const}. \quad (153)$$

2 Якщо є вісь, наприклад  $Ox$ , щодо якої  $\sum_k M_x(\bar{S}_k^{(e)})=0$ , то з рівняння (151) одержуємо закон збереження кінетичного моменту системи відносно осі при ударі:

$$K_x - K_x^{(0)} = const. \quad (154)$$

## 11.4 Удар точки об нерухому поверхню

### 11.4.1 Прямий удар

Удар називають прямим, якщо швидкість точки  $\bar{V}$  перед ударом спрямована за нормаллю до поверхні у точці удару  $M$  (рис. 74). Після удару матеріальна точка відокремиться від поверхні, маючи у загальному випадку швидкість  $\bar{U}$ , спрямовану теж за нормаллю до поверхні.

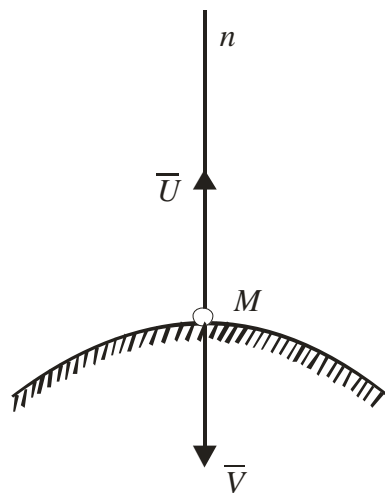


Рисунок 74

Для оцінки ударних властивостей поверхні і тіла, прийнятого за матеріальну точку, введемо коефіцієнт відновлення  $k$ . Коефіцієнтом відновлення називають відношення числового значення швидкості точки після удару до числового значення її до удару, тобто

$$k = \frac{|\bar{U}|}{|\bar{V}|} = U/V. \quad (155)$$

Якщо  $k=1$ , то удар називається *абсолютно пружним*. У цьому випадку  $U=V$ , і при ударі точки змінюється тільки напрямок швидкості на протилежний. При  $k=0$  удар вважається *абсолютно непружним*. Швидкість точки при такому ударі об нерухому поверхню після удару  $U=0$ . У більш загальному випадку абсолютно непружного удару точки по поверхні, що рухається, точка після удару рухається разом з відповідною точкою поверхні. У випадках, при яких  $0 < k < 1$ , удар називають просто пружним (або частково пружним).

При ударі точки об нерухому поверхню можна розділити на фазу деформації і фазу відновлення. Фазу деформації тривалістю  $t_1$  відраховують від моменту початку удару до моменту найбільшої деформації тіла, що приймається за матеріальну точку. Наприкінці цієї фази швидкість точки при ударі об нерухому поверхню дорівнює нулю. Протягом фази відновлення  $t_2$  матеріальна точка від моменту найбільшої деформації до її відділення від поверхні частково відновлює свою первісну форму при пружному ударі. При абсолютно пружному ударі форма тіла відновлюється повністю. У випадку абсолютно непружного удару форма тіла зовсім не відновлюється, тому що удар має тільки одну фазу деформації. Загальний час удару  $t = t_1 + t_2$ . При абсолютно непружному ударі  $t_2 = 0$ ,  $t = t_1$ .

На точку при її прямому ударі об нерухому поверхню з боку поверхні діє ударна сила реакції поверхні  $\bar{N}$ . Вона змінюється за величиною протягом удару, але увесь час спрямована за нормаллю до поверхні.

Застосуємо до першої і другої фаз удару точки теорему про зміну кількості руху у проекції на напрямок зовнішньої нормалі до поверхні, за який приймаємо напрямок, протилежний швидкості точки до удару.

Для першої фази маємо:

$$0 - (-mV) = S_1,$$

де  $S_1 = \int_0^{t_1} Ndt$  – ударний імпульс сили реакції поверхні за першу фазу удару.

Для другої фази, відповідно,  $mV - 0 = S_2$ ,

де  $S_2 = \int_0^{t_2} Ndt$  – ударний імпульс сили реакції поверхні за другу фазу удару.

Дією імпульсів не ударних сил за час удару, наприклад сили ваги, нехтуємо.

Отже маємо  $mV = S_1$ ;  $mU = S_2$ . Звідси

$$k = U/V = S_2/S_1. \quad (156)$$

Формула (156) дає вираз коефіцієнта відновлення при прямому ударі точки об нерухому поверхню, який дорівнює відношенню числових значень ударних імпульсів за другу й першу фази удару. Вираз коефіцієнта відновлення через ударні імпульси, отриманий при ударі точки об нерухому поверхню, вважають справедливим і у випадку прямого удару точки по поверхні, що рухається.

Повний ударний імпульс  $\bar{S}$  складається з імпульсів  $\bar{S}_1$  і  $\bar{S}_2$  тобто

$$S = S_1 + S_2 = mV \left( 1 + \frac{U}{V} \right) = mV(1 + k).$$

При  $k=1$   $S = 2mV$ ; при  $k=0$ ,  $S = mV$ . Ударний імпульс при абсолютно непружному ударі у два рази менше ударного імпульсу при абсолютно пружному ударі.



### 11.4.2 Косий удар

Удар називається непрямым, або косим, якщо швидкість точки перед ударом спрямована під кутом  $\alpha$  до нормалі поверхні. При  $\alpha = 0$  маємо прямий удар. Кут  $\alpha$  (рис.75) називають кутом падіння. У загальному випадку швидкість точки  $\bar{U}$  після удару складе з нормаллю до поверхні кут  $\beta$ , що називають кутом відбиття.

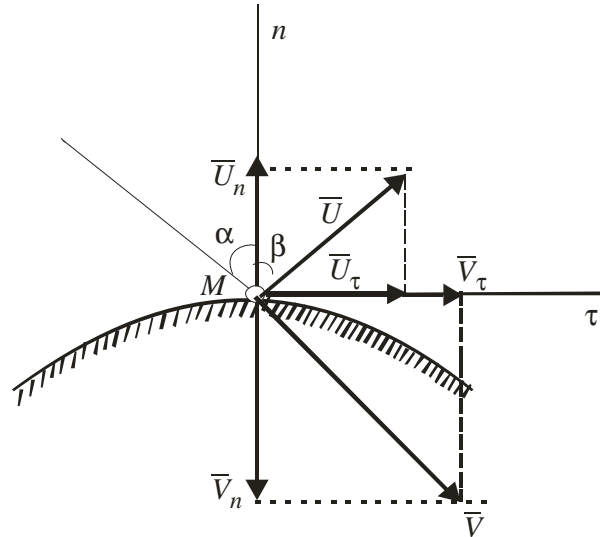


Рисунок 75

Розкладаємо швидкості до і після удару на нормальну і дотичну складові:

$$\bar{V} = \bar{V}_n + \bar{V}_t; \quad \bar{U} = \bar{U}_n + \bar{U}_t.$$

Коефіцієнтом відновлення при косому ударі називають величину  $k = |\bar{U}_n|/|\bar{V}_n| = U_n/V_n$ . Застосування теореми про зміну кількості руху у проекції на нормаль до поверхні приводить до виразу коефіцієнта відновлення через ударні імпульси:

$$k = U_n/V_n = S_{2n}/S_{1n}, \quad (157)$$

де  $S_{2n}$  і  $S_{1n}$  – проекції ударних імпульсів на нормаль до поверхні за другу і першу фази удару.

У випадку неідеально гладенької поверхні  $U_t < V_t$ . Надалі приймаємо, що поверхня не має ударного тертя, і тому  $U_t = V_t$ . У цьому випадку:

$$tg b = U_t / U_n = V_t / U_n; \quad tga = V_t / V_n; \quad tgb = \frac{1}{k} tga.$$

Ця формула виражає залежність між кутом падіння і кутом відбиття при різних коефіцієнтах відновлення і відсутності ударного тертя.

### 11.4.3 Експериментальне визначення коефіцієнта відновлення

Коефіцієнт відновлення можна визначати експериментально, вимірюючи висоту, на яку підніметься тіло, наприклад у формі невеликої кулі, після прямого удару об поверхню (рис. 76) при падінні із заданої висоти. Якщо кулька падає на нерухому поверхню з висоти  $h_1$ , то її швидкість безпосередньо перед ударом  $V = \sqrt{2gh_1}$ . Відразу після удару – швидкість  $U$  кульки через висоту підйому її над поверхню виражається залежністю  $U = \sqrt{2gh_2}$ . Для коефіцієнта відновлення отримаємо:

$$k = U / V = \sqrt{h_2 / h_1}.$$

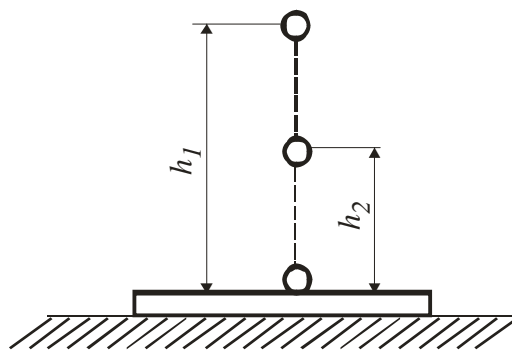


Рисунок 76

Вимірюючи  $h_2$  при заданому  $h_1$ , одержують значення коефіцієнтів відновлення для різних матеріалів кульки і поверхні.

Численні дослідження показали, що коефіцієнт відновлення залежить не тільки від матеріалу тіл, які співударяються, але й від їхніх мас, форми тіл, швидкостей співударяння та інших факторів. Використання коефіцієнта відновлення у розрахунках (у припущенні, що він залежить тільки від матеріалу тіл, що співударяються) припустимо лише у дуже грубому наближенні до дійсності. У більш точних розрахунках варто врахувати не тільки деформації, що виникають при ударі, але в деяких випадках і процес їхнього виникнення і відновлення. Врахування деформацій при ударі здійснюється у задачах теорії пружності. Методи теорії пружності дозволяють більш глибоко проникати в явища удару. У теоретичній механіці звичайно розглядаються граничні випадки абсолютно пружного й абсолютно непружного ударів.

### 11.5 Теорема Карно

При абсолютно пружному ударі точки об нерухому поверхню під час відсутності ударного тертя швидкість точки може змінюватися тільки за напрямком. Числова величина її залишається незмінною. Кінетична енергія точки і системи точок, що перебувають у таких умовах не змінюється за час удару. При пружному і абсолютно непружному ударах кінетична енергія змінюється.

Установимо зміну кінетичної енергії у випадку абсолютно непружного удару при миттєвому накладенні в'язей для точки і системи під час відсутності ударного тертя. З теореми про зміну кількості руху для точки (рис. 77), маємо

$$m\bar{U} - m\bar{V} = \bar{S},$$

де  $m$  – маса точки;  $\bar{V}$  і  $\bar{U}$  – її швидкості безпосередньо до і після удару;

$\bar{S}$  – ударний імпульс від дії поверхні.

При відсутності ударного тертя ударний імпульс спрямований за нормаллю до поверхні. Швидкість точки після такого удару спрямована за дотичною до поверхні, тобто її проекція на нормаль  $U_n = 0$ .

У розглянутому випадку ударний імпульс  $\bar{S}$  і швидкість точки після удару  $\bar{U}$  взаємно перпендикулярні й тому задовольняють умові

$$\bar{S} \cdot \bar{U} = 0.$$

З огляду на це, помножимо обидві частини попереднього рівняння скалярно на  $\bar{U}$ , одержимо допоміжне співвідношення

$$-m\bar{V}^2 \cdot \bar{U} + m\bar{U}^2 = 0. \quad (158)$$

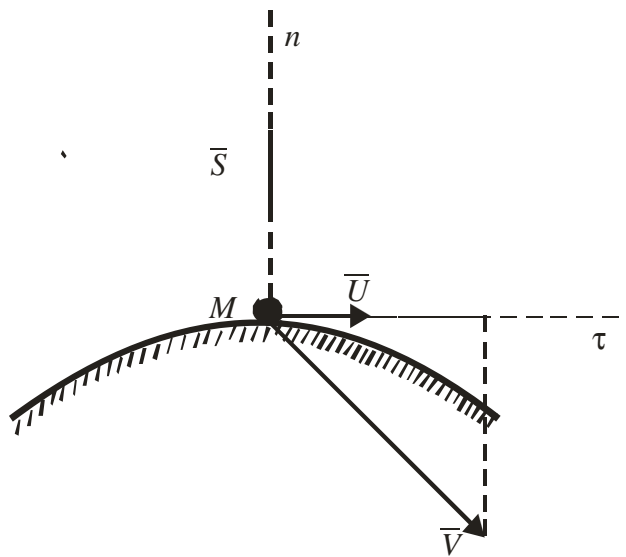


Рисунок 77

При абсолютно непружному ударі кінетична енергія точки зменшиться на  $m\bar{V}^2/2 - m\bar{U}^2/2$ . Додаючи до цього виразу величину, яка дорівнює нулю, у формі рівняння (158), одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{mV^2}{2} - \frac{mU^2}{2} &= \frac{m\bar{V}^2}{2} - \frac{m\bar{U}^2}{2} + (-m\bar{V} \cdot \bar{U} + mU^2) = \frac{m\bar{V}^2}{2} + \frac{m\bar{U}^2}{2} - m\bar{V} \cdot \bar{U} = \\ &= \frac{m}{2}(\bar{V} - \bar{U})^2. \end{aligned}$$

Отримана теорема Карно для точки про втрату кінетичної енергії при абсолютно непружному ударі й відсутності ударного тертя:

$$\frac{m\bar{V}^2}{2} - \frac{m\bar{U}^2}{2} = \frac{m}{2}(\bar{V} - \bar{U})^2. \quad (159)$$

Втрачена точкою кінетична енергія при абсолютно непружному ударі і відсутності ударного тертя і у випадку миттєвого обмеження в'язями дорівнює кінетичній енергії точки від загубленої швидкості.

У теоремі (159) можна отримати відповідну теорему для механічної системи, необхідно лише, щоб для кожної точки системи виконувалась умова:  $\bar{S}_k \cdot \bar{U}_k = 0$ . Тоді для  $k$ -ї точки системи

$$\frac{m_k \bar{V}_k^2}{2} - \frac{m_k \bar{U}_k^2}{2} = \frac{m_k}{2}(\bar{V}_k - \bar{U}_k)^2,$$

де  $(\bar{V}_k - \bar{U}_k)$  – швидкість, загублена  $k$ -ю точкою.

Виконуючи додавання по всіх  $N$  точках системи і позначаючи  $T_0$  і  $T$  – кінетичну енергію системи до і після удару відповідно, отримаємо:

$$T_0 - T = \frac{1}{2} \sum m_k (\bar{V}_k - \bar{U}_k)^2, \quad (160)$$

$$\text{де } T_0 = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}; \quad T_0 = \sum \frac{m_k U_k^2}{2}.$$

Таким чином, теорема Карно для системи формулюється так: *збитки кінетичної енергії при абсолютно непружному ударі у випадку миттєвого звільнення від в'язей і при відсутності ударного тертя дорівнюють кінетичній енергії від загублених швидкостей точок системи.*

Якщо удар не є абсолютно непружним ( $k \neq 0$ ), то аналогічними перетвореннями можна отримати, що кінетична енергія системи, втрачена під час удару, виражається співвідношенням

$$T_0 - T = \frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{1}{2} \sum m_k (\bar{V}_k - \bar{U}_k)^2, \quad (161)$$

де  $k$  – коефіцієнт відновлення.

## 11.6 Прямий центральний удар двох тіл

У прикладних задачах досить часто розглядається випадок удару двох рухомих тіл (рис.78). У разі центрального удару лінія удару проходить через центри мас тіл, які співударяються.

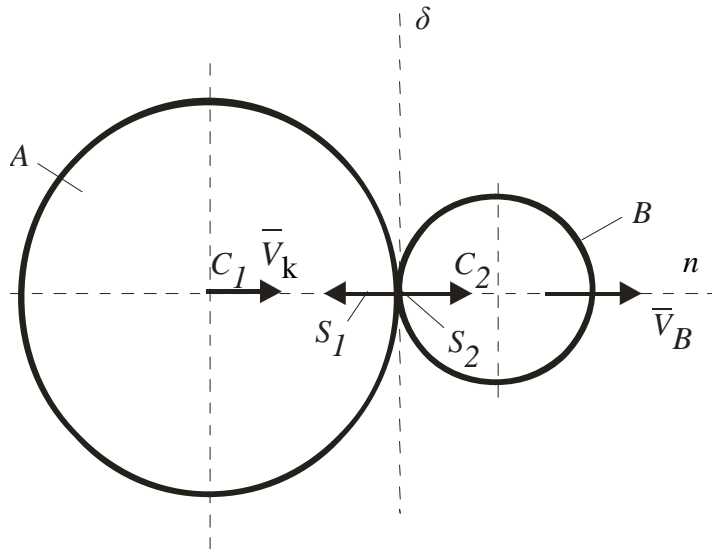


Рисунок 78

Розглянемо прямий центральний удар двох тіл. Нехай  $\bar{V}_A > \bar{V}_B$  і коефіцієнт відновлення  $k$  для співударних тіл  $A$  і  $B$  відомий. Визначимо швидкості тіл  $A$  і  $B$  у кінці удару  $\bar{U}_A, \bar{U}_B$ . За теоремою про зміну кількості руху для кожного тіла:

$$m_A \bar{V}_A - m_A \bar{U}_A = \bar{S}_1; \quad m_B \bar{V}_B - m_B \bar{U}_B = \bar{S}_2.$$

Але за законом про рівність дії і протидії  $\bar{S}_2 = -\bar{S}_1$ , тоді отримаємо, що кількість руху системи тіл  $A$  і  $B$  не змінюється

$$m_A \bar{V}_A + m_B \bar{V}_B = m_A \bar{U}_A + m_B \bar{U}_B, \quad (162)$$

де  $\bar{V}_A, \bar{V}_B$  – складові частини векторів швидкостей відповідно тіл  $A$  і  $B$  на початку удару на нормаль (рис. 78), тобто нормальні складові векторів швидкостей;

$\bar{U}_A$  і  $\bar{U}_B$  – нормальні складові векторів швидкостей відповідно тіл  $A$  і  $B$  у кінці удару.

Рівняння (162) містить дві невідомі величини  $\bar{U}_A$  і  $\bar{U}_B$ , тому, щоб їх визначити, необхідно скласти ще одне рівняння. За визначенням  $i$  на підставі формули (156) коефіцієнт відновлення для співударних тіл  $A$  і  $B$ :

$$k = -\frac{U_n}{V_n} = -\frac{U_A - U_B}{V_A - V_B}, \quad (163)$$

Об'єднавши рівняння (162) і (163) матимемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} m_A V_A + m_B V_B = m_A U_A + m_B U_A; \\ k = \frac{U_A - U_B}{V_A - V_B}. \end{cases} \quad (164)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (164) визначимо проекції векторів швидкостей тіл  $A$  і  $B$  у кінці удару на нормаль  $n$ :

$$\begin{cases} U_A = V_A - (1+k) \frac{m_B}{m_A + m_B} (V_A - V_B); \\ U_B = V_B - (1+k) \frac{m_A}{m_A + m_B} (V_B - V_A). \end{cases} \quad (165)$$

Тепер знайдемо зміну кінетичної енергії  $T - T_0$  системи співударних тіл  $A$  і  $B$  за час удару.

Очевидно, що

$$\begin{aligned} T - T_0 &= \left( \frac{m_A U_A^2}{2} + \frac{m_B U_B^2}{2} \right) - \left( \frac{m_A V_A^2}{2} + \frac{m_B V_B^2}{2} \right) = \\ &= \frac{m_A}{2} (U_A - V_A)(U_A + V_A) + \frac{m_B}{2} (U_B - V_B)(U_B + V_B). \end{aligned} \quad (166)$$

Із системи (165) випливає:

$$\begin{cases} U_A - V_A = -(1+k) \frac{m_B}{m_A + m_B} (V_A - V_B); \\ U_B - V_B = (1+k) \frac{m_A}{m_A + m_B} (V_A - V_B). \end{cases} \quad (167)$$

Підставляючи ці вирази у рівність (166) отримаємо:

$$T - T_0 = -\frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (1+k)(V_A - V_B)(-U_A - U_A + U_B + V_B). \quad (168)$$

Враховуючи вираз (163), перетворимо рівняння (168) так:

$$\begin{aligned} T - T_0 &= -\frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (1+k)[k(V_A - V_B) + V_B - V_A] = \\ &= \frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (1+k)(1-k)(V_A - V_B)^2, \end{aligned}$$

або остаточно

$$T - T_0 = -\frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (1-k^2)(V_A - V_B)^2. \quad (169)$$

З виразу (169) випливає, що при  $k \neq 1$   $T < T_0$ , тобто за час удару відбувається втрата кінетичної енергії системи співударних тіл  $A$  і  $B$ :

$$T_{\text{втр}} = T - T_0.$$

Якщо  $k = 1$  (абсолютно пружний удар), то  $T = T_0$ , тобто кінетична енергія системи співударних тіл не втрачається. Якщо  $k = 0$  (абсолютно непружний удар), то із системи (164) випливає, що

$$U = U_A = U_B = \frac{m_A V_A + m_B V_B}{m_A + m_B}. \quad (170)$$



Формула (1710) визначає спільну швидкість тіл у кінці прямого центрального абсолютно непружного удару.

Утрачену енергію при ударі ( $k = 0$ ) визначимо за формулою (171)

$$T_{\text{втр}} = \frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (V_A - V_B)^2. \quad (171)$$

Нехай тепер одне із тіл, наприклад тіло  $B$ , буде нерухомим, тобто  $V_B = 0$ . Тоді з рівностей (170) і (171) випливає:

$$U = \frac{m_A V_A}{m_A + m_B}; \quad T_{\text{втр}} = \frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} V_A^2.$$

Таким чином, обидва тіла в кінці удару рухаються з однією швидкістю  $U$ . Тому кінетична енергія, яка залишається у системі (залишкова кінетична енергія),

$$T_{\text{зал}} \frac{(m_A + m_B)U^2}{2} = \frac{m_A^2 V_A^2}{2(m_A + m_B)}.$$

Кінетична енергія системи на початку удару  $T_0$  (запас енергії) складається тільки з кінетичної енергії тіла  $A$ , тобто  $T_0 = \frac{m_A V_A^2}{2}$ . Тоді для втраченої і залишкової кінетичних енергій системи маємо:

$$T_{\text{втр}} = \frac{m_B T_0}{m_A + m_B} = \frac{T_0}{1 + \frac{m_A}{m_B}}; \quad T_{\text{зал}} = \frac{m_A T_0}{m_A + m_B} = \frac{T_0}{1 + \frac{m_B}{m_A}}. \quad (172)$$

Практично удар використовується або для деформації тіла, або для надання тілам швидкості. Втрачена системою кінетична енергія витрачається на деформацію тіла, залишкова кінетична енергія – на подолання опору при подальшому русі тіл. Якщо удар використовується

для деформування тіл, то втрачена кінетична енергія має становити значну частину загального запасу енергії. З першої формули (172) випливає, що цей випадок буде мати місце, якщо  $m_B \gg m_A$ , тобто маса нерухомого тіла, наприклад ковадла під час кування, має бути значно більшою маси тіла, що ударяє (молота).

Якщо удар виконується для надання швидкості співударним тілам, то залишкова кінетична енергія має становити значну частину загального запасу енергії. З другої формули (172) випливає, що цей випадок буде мати місце, якщо  $m_A \gg m_B$ , тобто маса тіла, що ударяє, наприклад молотка під час забивання цвяхів, має бути значно більшою маси нерухомого тіла – цвяха.

Якщо має місце абсолютно пружний удар ( $k = 1$ ) для тіл з однаковою масою ( $m_A = m_B$ ), з рівностей (165) матимемо  $U_A = V_B, U_B = V_A$ . Отже, під час абсолютно пружного удару тіл з однаковою масою має місце обмін швидкостями, і втрата кінетичної енергії не відбувається.

## 11.7 Приклади розв'язання задач

**Приклад 33.** Стальна куля вагою  $P = 200\text{г}$ , падаючи з висоти  $h = 4\text{м}$ , ударяється об стальну плиту. Визначити середнє значення ударної реакції, якщо час удару  $t = 0,0002\text{сек}$ , а коефіцієнт відновлення  $k = \frac{5}{9}$  (рис.79).

### Розв'язання

У цій задачі розглядаються два співударних тіла: куля і плита. Удар прямий, центральний. Визначимо перш за все швидкість  $V$  кулі до удару. Оскільки куля падає без початкової швидкості з висоти  $h$ , то

$$V_1 = \sqrt{2gh}.$$

Плита залишається нерухомою, тому  $V_2 = 0$  і  $U_2 = 0$ .

На основі теореми про зміну кількості руху центра мас системи матимемо

$$m(U_1 - V_1) = S,$$

де  $m$  – маса кулі.

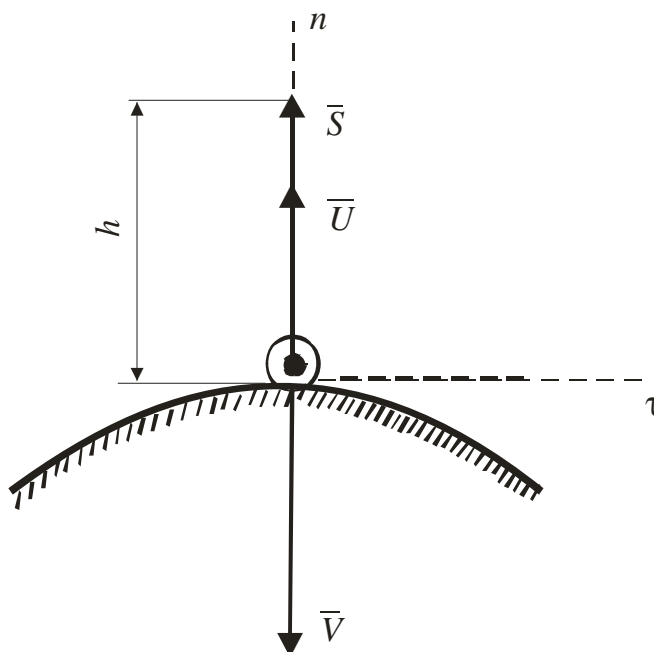


Рисунок 79

Проеціюючи обидві частини цієї рівності на зовнішню нормаль у точці удару, отримаємо

$$m(U_{1n} - V_{1n}) = S_n.$$

Але при прямому ударі кулі  $U_{1n} = U$ ,  $V_{1n} = -V$ ,  $S_n = S$ , тому

$$m(U_1 + V_1) = S.$$

Коефіцієнт відновлення  $k = \frac{U_1}{V_1}$ . Значить швидкість кулі після удару

дорівнює:

$$U_1 = kV_1.$$

Тоді

$$S = \frac{P}{g}(1+k)V_1.$$

Отже середнє значення ударної реакції набуде виду:

$$N_{cp} = \frac{S}{t} = \frac{(1+k)}{tg}PV_1 \approx 1,4m.$$

Результат цієї задачі показує, що імпульсами звичайних сил можна знехтувати.

**Приклад 34.** Дві абсолютно гладких кулі рухаються у протилежних напрямках з паралельними швидкостями  $\bar{V}_1$  і  $\bar{V}_2$ , однаковими за модулем. У момент їх зустрічі швидкості утворюють з лінією центрів кут  $\alpha$  (рис.80). Визначити швидкість куль  $\bar{U}_1$  і  $\bar{U}_2$  після удару, якщо маса першої кулі в два рази більша за масу другої ( $m_1 = 2m_2$ ), а коефіцієнт відновлення  $k = \frac{1}{2}$ .

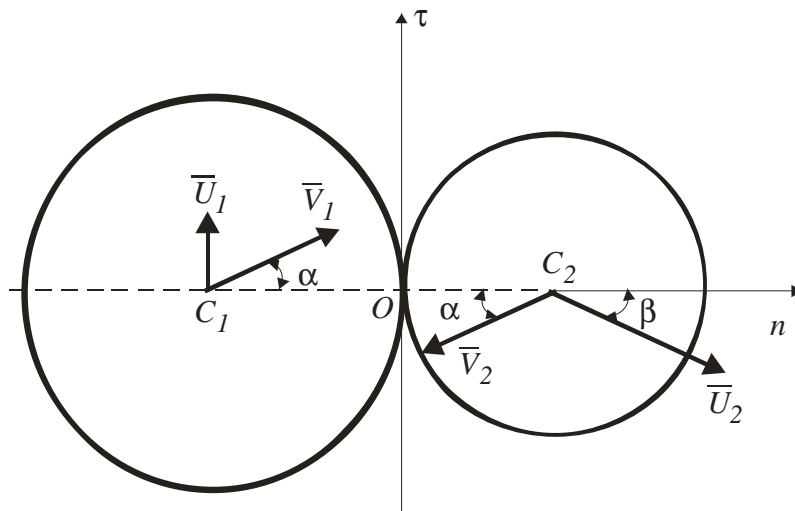


Рисунок 80

Розв'язання

У задачі розглядається косий удар куль, оскільки їх швидкості не напрямлені за лінією центрів  $C_1C_2$ . Співударні кулі гладенькі, отже, удар

здійснюється без тертя. Тому дотичні компоненти швидкостей до і після удару однакові, тобто

$$U_{1t} = V_{1t} = V \sin a, \quad U_{2t} = V_{2t} = -V \sin a.$$

Косий удар двох куль характеризується такими рівняннями:

$$m_1 V_{1n} + m_2 V_{2n} = m_1 U_{1n} + m_2 U_{2n};$$

$$k = \frac{U_{2n} - U_{1n}}{V_{1n} - V_{2n}},$$

де  $V_{1n} = V \cos a$ ,  $V_{2n} = -V \cos a$ ,  $m_1 = 2m_2$ ,  $k = 0,5$ .

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо нормальні складові  $U_{1n}$  і  $U_{2n}$  швидкостей після удару

$$U_{1n} = 0; \quad U_{2n} = V \cos a.$$

Остаточно

$$U_1 = \sqrt{U_{1n}^2 + U_{1t}^2} = V \sin a;$$

$$U_2 = \sqrt{U_{2n}^2 + U_{2t}^2} = V;$$

$$\cos b = \frac{U_{2n}}{U_2} = \frac{V \cos a}{V} = \cos a;$$

$$b = a.$$

Оскільки  $U_{1n} = 0$ , то напрям швидкості  $U_1$  першої кулі після удару буде перпендикулярний до лінії центрів. Напрямок швидкості другої кулі після удару визначається кутом  $b$ .

**Приклад 35.** *Балістичний маятник, що застосовується для визначення швидкості кулі або снаряда, являє собою підвішений на*

горизонтальній осі ящик, наповнений в'язкою речовиною (наприклад, піском або глиною), що поглинає енергію падаючого в нього снаряда (рис.81). Снаряд масою  $m$ , летячи із швидкістю  $V$  і потрапляючи в точку  $A$ , відхиляв маятник навколо осі  $O$  на кут  $\alpha$ . Визначити швидкість  $V$  снаряда, вважаючи, що вісь  $O$  маятника не зазнає дії удару. Маса маятника -  $M$ ,  $OA=a$ ,  $l$  - відстань центра мас маятника від осі обертання.

#### Розв'язання

У цій задачі одне з двох співударних тіл (ящик) обертається навколо нерухомої осі. Тому застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0^e.$$

Головний момент  $M_0^e$  зовнішніх сил (сил ваги маятника, снаряда, реакції шарніра  $O$ ) відносно осі обертання дорівнює нулю. Отже маємо закон збереження моменту кількості руху системи

$$\bar{K}_0 = \text{const}.$$

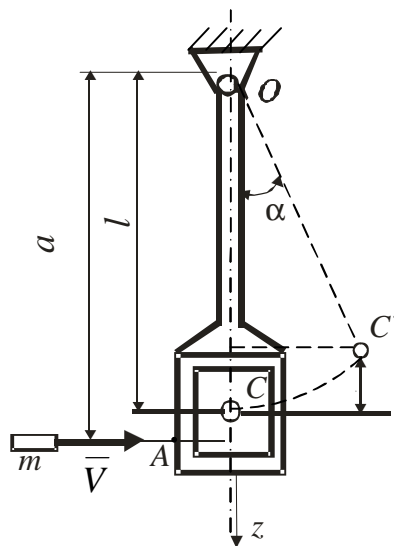


Рисунок 81

Інакше кажучи алгебраїчні суми моментів кількості руху снаряда і маятника до і після удару однакові. Тому

$$mVa = w(J_0 + ma^2),$$

де  $J_0$  – момент інерції маятника відносно осі  $O$ .

Крім того,  $J_0 = Mr^2$ , де  $r$  – радіус інерції маятника відносно осі  $O$ .

За умовою задачі вісь маятника не зазнає удару, тому  $r^2 = al$  і останнє рівняння набуде вигляду:

$$mV = w(Ml + ma).$$

Звідси

$$V = w \frac{(Ml + ma)}{m}.$$

Щоб визначити початкову кутову швидкість системи після удару, застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи:

$$-\frac{1}{2}Jw^2 = -(M + m)gh, \quad (a)$$

де  $\frac{1}{2}Jw^2$  – кінетична енергія системи у початковий момент безпосередньо після удару (кінетична енергія в момент максимального відхилення маятника, яка характеризується кутом  $a$ , дорівнює нулю),  $h$  – висота, на яку підіймається центр мас системи у кінцевий момент,

$$h = z_C(1 - \cos a),$$

де  $z_C = \frac{Ml + ma}{M + m}$  – координата центра мас  $S$  системи.

Рівняння (a) набуває вигляду:

$$-\frac{1}{2}(J_0 + ma^2)w^2 = (M + m)g \frac{Ml + ma}{M + m} \cdot 2\sin^2 \frac{a}{2}.$$

Беручи до уваги, що  $J_0 = Mr^2 = Mal$ , після спрощень отримаємо:

$$w = 2\sqrt{\frac{g}{a}} \sin \frac{a}{2}.$$

Звідси шукана швидкість снаряда набуде виду:

$$V = 2\frac{Ml + ma}{m} \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \frac{a}{2}.$$

**Приклад 36.** Для зміцнення ґрунту під фундаментом будівлі палі масою  $m_2 = 50$  кг забивалися копром у ґрунт (рис. 82). Бойок копра масою  $m_1 = 450$  кг падає без початкової швидкості з висоти  $h = 2$  м; коефіцієнт відновлення дорівнює нулю; за останні десять ударів палі заглибилась у ґрунт на  $d = 5$  см. Визначити середній опір ґрунту при забиванні палі.

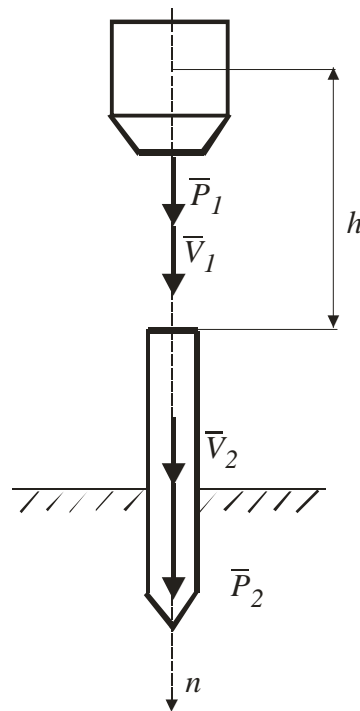


Рисунок 82

#### Розв'язання

Загальну нормаль до поверхонь співударних тіл у точці їх дотику  $n$  напрямляємо вертикально вниз.



Визначаємо кінетичну енергію системи на початку удару:

$$T = \frac{1}{2}m_1V_1^2 = \frac{1}{2}450(\sqrt{2gh})^2 = 450gh \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Визначаємо кінетичну енергію при абсолютно непружному ударі, що витрачається тільки на подолання опору ґрунту при русі палі:

$$T_2 = \frac{m_1T}{m_1 + m_2} = \frac{450 \cdot 450gh}{50 + 450} = 405gh \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Робота сил опору ґрунту за один удар бойка

$$A_{on} = \frac{Sd}{n_{y\delta}},$$

де  $S$  – величина сили опору ґрунту за один удар бойка по палі;

$n_{y\delta} = 10$  – кількість ударів, за які паля заглиблюється в ґрунт на глибину  $d = 5 \text{ см}$ .

Тоді маємо

$$T_2 = A_{on},$$

звідки з урахуванням значень  $T_2$  і  $A_{on}$  отримаємо:

$$S = \frac{T_2 n_{y\delta}}{d} = \frac{450gh n_{y\delta}}{d} = \frac{450 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 10}{0,05} = 159 \text{ кН.}$$

**Приклад 37.** Паровий молот масою  $12 \times 10^3$  кг падає зі швидкістю 5 м/с на ковадло, маса якого разом із куском метала, що кується, дорівнює  $250 \times 10^3$  кг.

Знайти роботу  $A_{деф}$ , що поглинається куском метала і роботу  $A_{віб}$ , що витрачається на коливання фундаменту, а також визначити коефіцієнт  $\eta$  корисної дії молота; удар непружний.

Загальну нормаль до поверхонь співударних тіл у точці їх дотику напрямляємо вертикально вниз (рис. 83).

#### Розв'язання

Оскільки зовнішні ударні імпульси, прикладені до системи, відсутні, тобто  $\sum_{k=1}^N \bar{S}_k^e = 0$ , то має місце закон збереження кількості руху механічної системи при ударі:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2, \quad (\text{a})$$

де  $V_1, V_2$  – величини відповідно швидкості молота і ковадла з куском металу на початку удару;  $U_1, U_2$  – величини, відповідно, швидкості молота і ковадла з куском металу в кінці удару.

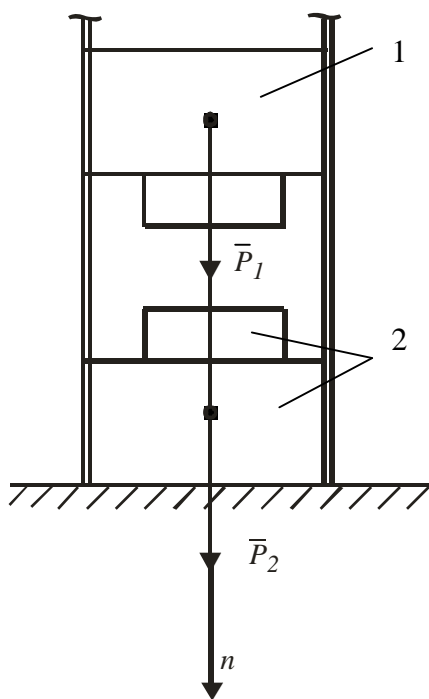


Рисунок 83

Оскільки удар непружний, то коефіцієнт відновлення

$$k = \frac{U_1 - U_2}{V_1 - V_2} = 0,$$

звідки маємо

$$U_1 = U_2 = U.$$

Враховуючи останні рівності і беручи до уваги, що  $V_2 = 0$ , з рівняння (а) отримаємо

$$U = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}.$$

Втрачена кінетична енергія при прямому центральному ударі двох тіл визначається за формулою

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - k^2) (V_1 - V_2)^2.$$

Для випадку, що розглядається, цей вираз спрощується, оскільки  $k = 0$  і  $V_2 = 0$ :

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} V_1^2.$$

Оскільки вся втрачена кінетична енергія при ударі молота витрачається на деформацію куску метала, що кується, то маємо:

$$\Delta T = A_{def} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} V_1^2 = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 250 \cdot 10^3 \cdot 5^2}{2(12 \cdot 10^3 + 250 \cdot 10^3)} = 143 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Через те, що в кінці удару молот і ковадло з куском металу рухаються з однією швидкістю  $U$ , то кінетична енергія, що залишилася у системі, витрачається на коливання фундаменту:

$$\begin{aligned} T_{зал} = A_{віб} &= \frac{(m_1 + m_2) U^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) (m_1 V_1)^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \\ &= \frac{m_1^2 V_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{(12 \cdot 10^3)^2 \cdot 5^2}{2(12 \cdot 10^3 + 250 \cdot 10^3)} = 6,87 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт корисної дії молота визначається за формулою

$$h = \frac{A_{\text{деф}}}{A_{\text{деф}} + A_{\text{віб}}} = \frac{143 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^3 + 6,87 \cdot 10^3} = 0,954.$$

**Приклад 38.** Дві однакові пружні кулі  $A$  і  $B$  рухаються назустріч одна одній. При якому співвідношенні між швидкостями куль на початку удару куля  $A$  після удару зупиняється? Коефіцієнт відновлення при ударі дорівнює  $k$ .

Розв'язання

У цій задачі розглядається прямий центральний пружний удар. Будуємо систему координат  $Otn$  так, як зображено на рисунку 84.

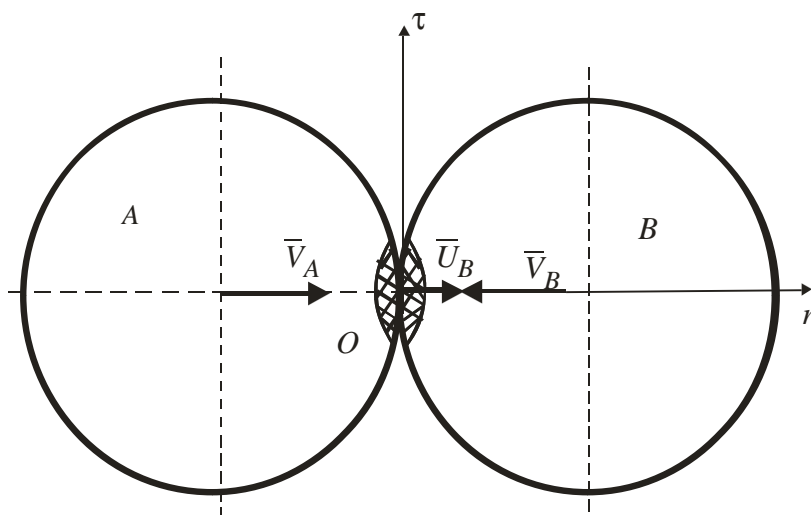


Рисунок 84

Визначаємо проекції швидкості співударних тіл на початку і в кінці удару на вісь  $n$ :

$$V_n = V_A - V_B, \quad U_n = U_B - U_A.$$

Визначаємо коефіцієнт відновлення:

$$k = \frac{U_n}{V_n} = \frac{U_B - U_A}{V_A - V_B}.$$

За умовою задачі куля  $A$  має залишатися нерухомою, тобто  $U_A = 0$ .

Отже,

$$U_B = k(V_A - V_B).$$

Розглядаємо дві фази деформації співударних тіл. Перша фаза деформації буде характеризуватися відносною швидкістю взаємного проникнення  $V_n^{відн} = V_A + V_B$ . Друга фаза відновлення характеризується відносною швидкістю:  $U_n^{відн} = U_B + U_A$ . Оскільки удар абсолютно пружний, то має місце обмін швидкостями:

$$V_n^{відн} = U_n^{відн};$$

отже, при  $U_A = 0$  маємо

$$U_B = V_A + V_B.$$

Порівнюючи значення  $U_B$ :

$$k(V_A - V_B) = V_A + V_B,$$

знайдемо шукане співвідношення швидкостей:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{1+k}{1-k}.$$

**Приклад 39.** *Кулька падає з нахилом зі швидкістю  $V$  на нерухому горизонтальну площину і відскакує від площини зі швидкістю  $V_1 = \frac{V\sqrt{2}}{2}$ .*

*Визначити кут падіння  $\alpha$  і кут відбиття  $\beta$ , якщо коефіцієнт відновлення*

*при ударі  $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .*

### Розв'язання

Будуємо систему координат  $Otn$  так, як зображено на рисунку 85.

Проекції швидкостей на початку і в кінці удару на вісь  $t$  рівні між собою, оскільки удар здійснюється без тертя:

$$V \sin a = V_1 \sin b ,$$

звідки маємо  $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin b$ .

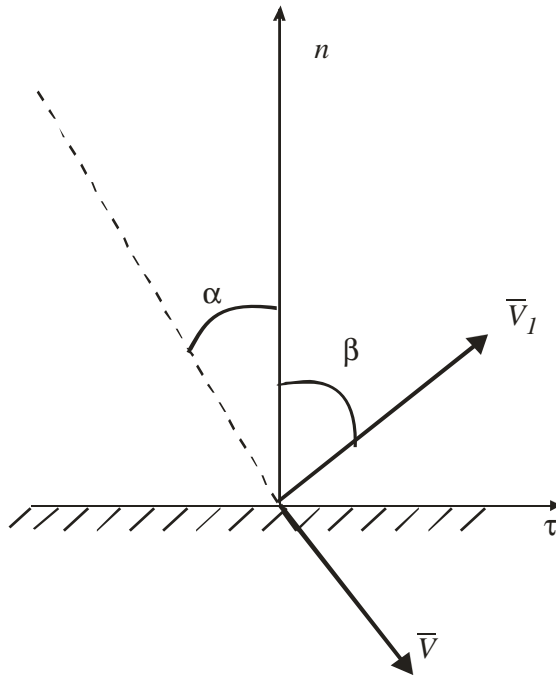


Рисунок 85

Відношення проекції швидкостей на початку і в кінці удару на вісь  $n$  визначає коефіцієнт відновлення:

$$k = \frac{U_n}{V_n} = \frac{V_1 \cos b}{V \cos a} = \frac{\sqrt{2} \cos b}{2 \cos a}, \text{ звідси визначаємо:}$$

$$\cos a = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \cos b .$$

Оскільки  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ , то

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin b\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\cos^2 b\right) = 1,$$

або

$$0,5\sin^2 b + 1,5\cos^2 b = 1.$$

Підставляючи в цю рівність замість  $\cos^2 b$  значення за відомою формулою  $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$ , отримаємо  $\sin^2 b = 0,707$ . Отже,

$$b = \frac{p}{4} = 45^\circ.$$

Визначимо кут  $a$  за формулою

$$\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin \frac{p}{4} = 0,5; \text{ отже } a = \frac{p}{6}.$$

**Приклад 40.** Куля вагою  $P_1 = 5\text{Н}$  рухається із швидкістю  $V_1 = 15\text{м/сек}$ . Поперед неї рухається у тому самому напрямку із швидкістю  $V_2 = 2\text{м/сек}$ . куля вагою  $P_2 = 8\text{Н}$ . Визначити швидкість куль в кінці удару, якщо коефіцієнт відновлення  $k = 0,5$ .

Розв'язання

У цій задачі розглядається прямий, центральний і не цілком пружний удар двох куль. Цей удар описується рівняннями:

$$P_1V_1 + P_2V_2 = P_1U_1 + P_2U_2;$$

$$k = \frac{U_2 - U_1}{V_1 - V_2}.$$

Розв'язуючи ці рівняння, маємо:

$$U_1 = V_1 - (1+k)\frac{P_2}{P_1 + P_2}(V_1 - V_2),$$

$$U_2 = V_2 + (1+k)\frac{P_1}{P_1 + P_2}(V_1 - V_2).$$

Підставляючи числові значення даних величин, отримаємо:

$$U_1 = 3 \frac{M}{\text{сек}}; \quad U_2 = 9,5 \frac{M}{\text{сек}}.$$

Після удару швидкість першої кулі зменшилась, а другої – збільшилась. При цьому кулі продовжують рухатися у тому самому напрямку.

## 12 ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

### 12.1 Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла

Поступальний рух твердого тіла повністю характеризується рухом однієї точки цього тіла, наприклад, центра мас тіла.

З теореми (63) про рух центра мас системи можна отримати диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла. Запишемо цю теорему у векторній формі:

$$M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e.$$

Але при поступальному русі твердого тіла прискорення всіх точок тіла однакові за модулем і напрямком, тобто  $\bar{a}_c = \bar{a}$ , де  $\bar{a}$  – прискорення довільної точки тіла. З огляду на це, з теореми про рух центра мас одержуємо наступне диференціальне рівняння поступального руху тіла у векторній формі:

$$M\bar{a} = \sum \bar{F}_k^e.$$

Проеціюючи на декартові осі координат, отримаємо:

$$M\bar{a}_x = \sum F_{kx}^e; \quad M\bar{a}_y = \sum F_{ky}^e; \quad M\bar{a}_z = \sum F_{kz}^e. \quad (173)$$



Це і є диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла в проекціях на прямокутні осі координат.

За допомогою рівнянь (173) можна розв'язувати дві основні задачі динаміки поступального руху твердого тіла:

- знаючи кінематичні рівняння руху центра мас твердого тіла, можна визначити головний вектор прикладених до твердого тіла сил;
- знаючи зовнішні сили, прикладені до твердого тіла і початкові умови його руху, визначити кінематичні рівняння руху тіла, якщо відомо, що воно рухається поступально.

Розв'язання задач динаміки у випадку поступального руху твердого тіла виконується за методикою, що була наведена в першій частині при розгляді послідовності вирішення задач динаміки точки. Бо згідно з кінематичними властивостями поступального руху, траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок тіла, що рухається поступально, однакові. Таким чином, досить розглянути одну точку тіла, наприклад, точку  $C$  – центр мас тіл, щоб повністю визначити рух всього тіла.

У випадку, коли поступальний рух твердого тіла відбувається під дією сталих сил або сил, що залежать тільки від часу, а до даних і шуканих величин належать діючі сили, час руху тіла, початкова і кінцева швидкості тіла, то для розв'язання цих задач доцільно застосувати теорему про зміну кількості руху матеріальної точки.

Якщо сили, прикладені до твердого тіла, сталі або залежать тільки від переміщення тіла, а до даних і шуканих величин належать діючі сили, переміщення тіла, швидкості на початку і в кінці руху, то для розв'язання цих задач доцільно застосувати теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.

Застосовуючи обидві теореми, можна розв'язати задачі, в яких даними або шуканими величинами є і час руху тіла, і його переміщення.

**Приклад 41.** *Для переміщення контейнерів з готовою продукцією до складу готової продукції на машинобудівних заводах застосовують різні типи конвеєрного транспорту. Схему одного з них подано на рисунку 86.*

*Контейнер, що має масу 80 кг, рухається від точки  $A$  до точки  $B$  по конвеєру, який розташований під кутом  $\alpha = 10^\circ$  до горизонту. Коефіцієнт тертя при русі контейнера  $f = 0,15$ . Початкова швидкість руху контейнера дорівнює нулю. Визначити, через який час швидкість контейнера буде дорівнювати 5 м/с, і який шлях за цей час пройде контейнер.*

## Розв'язання

Зображуємо контейнер на рисунку 86 у довільному положенні у системі відліку  $Axy$ .

Записуємо початкові умови руху контейнера:  $t = 0$ ;  $x(0) = 0$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ . Прикладаємо до контейнера в центрі його мас активну силу – силу ваги  $\bar{P}$ . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, умовно відкинемо в'язь (шорстка поверхня) і її вплив на контейнер замінимо двома реакціями:  $\bar{N}$  – (нормальна реакція) і  $\bar{F}_{mp}$  (сила тертя).

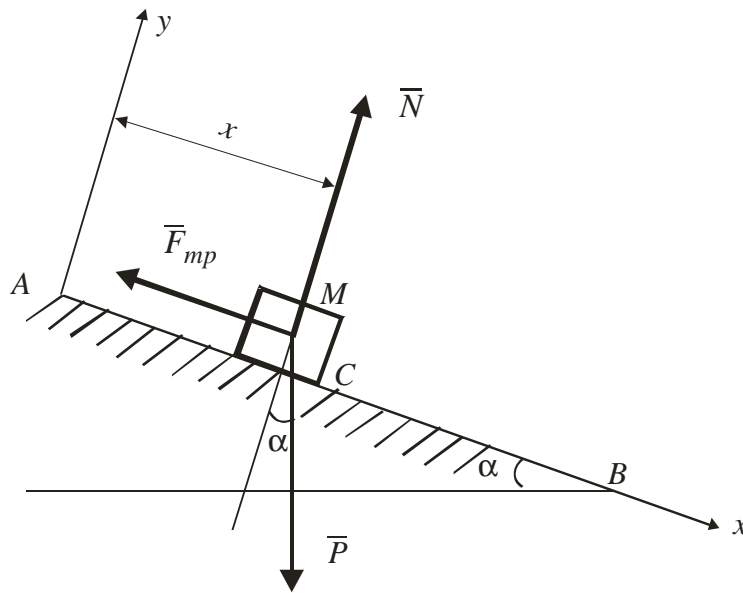


Рисунок 86

Для визначення часу руху контейнера до моменту набуття ним швидкості 5м/с застосуємо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі у проекції на вісь  $x$  (це може бути перший спосіб розв'язування задачі):

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = S_x,$$

де  $\dot{x}_0 = 0$ ;  $S_x = \sum_{k=1}^n \int_0^t F_{kx} dt$ .

Маємо  $\frac{P}{g} \dot{x} = \int_0^t (P \sin a - P \cos a \cdot f) dt$

або

$$\frac{P}{g} \cdot \xi = P(\sin a - \cos a \cdot f)t,$$

Звідки

$$t = \frac{\xi}{g(\sin a - \cos a \cdot f)} = \frac{5}{9,81(0,174 - 0,985 \cdot 0,15)} = 19,2 \text{ с.} \quad (\text{a})$$

Щоб визначити, який шлях пройде контейнер за час  $t$ , застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в інтегральній формі:

$$\frac{m\xi^2}{2} - \frac{m\xi_0^2}{2} = A,$$

де  $\xi_0 = 0$ ;  $A = \sum_{k=1}^n \int_{kx}^x F_{kx} dx$ .

Маємо  $\frac{P\xi^2}{2g} = \int_0^x P(\sin a - \cos a \cdot f) dx$ ,

або

$$\frac{\xi^2}{2g} = (\sin a - \cos a \cdot f)x,$$

звідси

$$x = \frac{\xi^2}{2g(\sin a - \cos a \cdot f)} = \frac{5^2}{2 \cdot 9,81(0,174 - 0,985 \cdot 0,15)} = 48,5 \text{ м.}$$

Можливий інший спосіб розв'язання наведеного прикладу. Для цього треба безпосередньо скористатися рівняннями (173). З першого рівняння маємо:

$$M\ddot{\xi} = \sum F_{kx}^e, \text{ або } M\ddot{\xi} = P \sin a - F_{mp},$$

де  $F_{mp} = fN$ , і із другого рівняння (173), враховуючи, що вздовж осі  $u$  контейнер не рухається, отримаємо:

$$M\ddot{x} = N - P \cos a; N = P \cos a; F_{mp} = fP \cos a.$$

Тоді  $\frac{P}{g}\ddot{x} = P \sin a - fP \cos a$ , або  $\ddot{x} = g(\sin a - f \cos a)$ .

Проінтегрувавши останнє рівняння (після поділення змінних) маємо:

$$\dot{x} = gt(\sin a - f \cos a) + C_1.$$

Так як  $\dot{x}(0) = 0$ , то  $C_1 = 0$ .

А при  $\dot{x} = V = 5 \text{ м/с}$  знайдемо час  $t$ :

$$t = \frac{\dot{x}}{g(\sin a - f \cos a)} = \frac{5}{9,81(0,174 - 0,15 \cdot 0,985)} = 19,2 \text{ с},$$

що повністю співпадає з рішенням (а).

Проінтегрувавши рівняння закону змінення швидкості ще раз отримаємо спочатку закон руху точки:

$$x = g \frac{t^2}{2} (\sin a - f \cos a) + C_2, \text{ але при } t = 0; x(0) = 0, \text{ то } C_2 = 0.$$

Пройдений шлях знайдемо при  $t = 19,2 \text{ с}$ :

$$x = \frac{9,81}{2} \cdot 19,2^2 (0,174 - 0,15 \cdot 0,985) = 48,5 \text{ м.}$$

Як бачимо, другий спосіб з використанням диференціальних рівнянь (173) поступального руху, більш простий.

## 12.2 Диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Розглянемо тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі  $z$  з кутовою швидкістю  $w$  (рис. 87).

З теореми про зміну кінетичного моменту (80) одержимо диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі  $Oz$ .

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}).$$

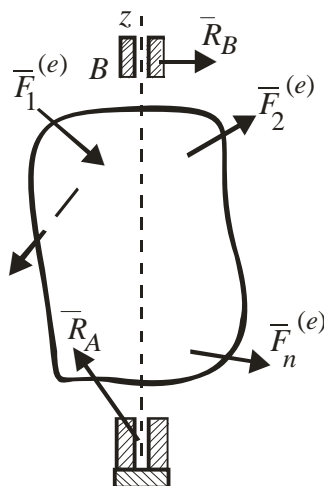


Рисунок 87

Для випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, відповідно до рівняння (71),

$$K_z = J_k w,$$

де  $J_z$  – сталий для твердого тіла момент інерції щодо нерухомої осі обертання;

$w$  – кутова швидкість.

З огляду на це, одержуємо:

$$J_z \frac{dw}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Якщо ввести кут повороту тіла  $j$ , то, з огляду на те, що  $\frac{dw}{dt} = \frac{dj}{dt}$ ,

отримаємо

$$J_z \frac{dj}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}). \quad (174)$$

Це і є диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Воно повністю аналогічне диференціальному рівнянню поступального руху твердого тіла в проекції на яку-небудь вісь, наприклад, на вісь  $Ox$ .

До диференціального рівняння обертання тіла навколо нерухомої осі замість координати  $x$  входить кут повороту  $j$ , замість маси тіла  $M$  – момент інерції щодо осі обертання  $J_z$ , замість суми проекцій зовнішніх сил на вісь  $Ox$  – сума моментів зовнішніх сил відносно осі обертання  $Oz$ , або так званий обертальний момент зовнішніх сил.

Реакції підшипників  $\bar{R}_A$  і  $\bar{R}_B$  осі обертання є зовнішніми силами, але їхні моменти відносно осі обертання дорівнюють нулю, тому що вони перетинають вісь, якщо знехтувати силами тертя.

В окремому випадку, коли

$$\sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = L^{(e)} = const,$$

отримаємо

$$e = \mathfrak{J} = \bar{L}_z^{(e)} / J_z = const,$$

тобто, обертання тіла відбувається з постійним кутовим прискоренням.

Якщо

$$\sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = L_z^{(e)} = 0,$$

то

$$\mathfrak{J} = \frac{dj}{dt} = 0 \text{ і } w = const.$$

Це випадок рівномірного обертання тіла інерцією без дії обертального моменту зовнішніх сил.

Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла в загальному випадку дозволяє вирішувати дві основні задачі: за заданим обертанням тіла визначити обертальний момент зовнішніх сил і за заданим обертальним моментом і початковими умовами знаходити закон обертання тіла. При рішенні другої задачі для знаходження кута повороту як функції часу доводиться інтегрувати диференціальне рівняння обертального руху. Методи його інтегрування повністю аналогічні розглянутим раніше (в частині 1) методам інтегрування диференціального рівняння прямолінійного руху точки (див. другий спосіб розв'язання прикладу 41).

### 12.3 Математичний маятник і його малі коливання

Математичним маятником називають тверде тіло малих розмірів (таке тіло можна вважати матеріальною точкою), яке підвішене за допомогою нерозтяжної нитки довжиною  $l$ , масою якої, в порівнянні з масою твердого тіла, нехтують (рис. 88).

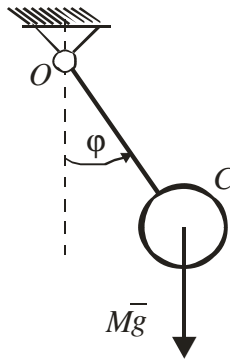


Рисунок 88

Диференціальне рівняння тіла  $C$ , яке разом з ниткою обертається навколо осі  $Ox$ , має вигляд (174):

$$J_x \ddot{\varphi} = \sum M_x(\bar{F}_k^e).$$

Для матеріальної точки  $C$ :  $J_x = Ml^2$ , тоді

$$Ml^2 \cdot \ddot{\varphi} = -Mgl \sin \varphi, \text{ або:}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (175)$$

При малому куті  $\varphi$  (тобто при малих коливаннях можна прийняти  $\sin \varphi \approx \varphi$ ). І диференціальне рівняння (175) набуде вигляду:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (176)$$

Цей вигляд аналогічний вигляду диференціального рівняння вільних прямолінійних коливань точки. Аналогічно знаходиться і період коливань математичного маятника:

$$T = \frac{2p}{k} = 2p \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (177)$$

#### 12.4 Фізичний маятник. Малі коливання фізичного маятника

**Фізичним маятником** називається тверде тіло довільної форми, яке може обертатися навколо нерухомої осі під дією сили тяжіння.

На рисунку 89 зображений фізичний маятник з горизонтальною віссю підвісу  $x$  (віссю, навколо якої обертається тіло  $A$ ). Точка  $O$  – точка перетину осі підвісу з площиною, що містить центр мас тіла  $C$ , яка перпендикулярна до осі підвісу тіла, – називається точкою підвісу фізичного маятника. Кут відхилення маятника від вертикалі позначимо через  $\varphi$ , а відстань  $OC$  між точкою підвісу  $O$  і центром мас маятника  $C$  – через  $d$ .

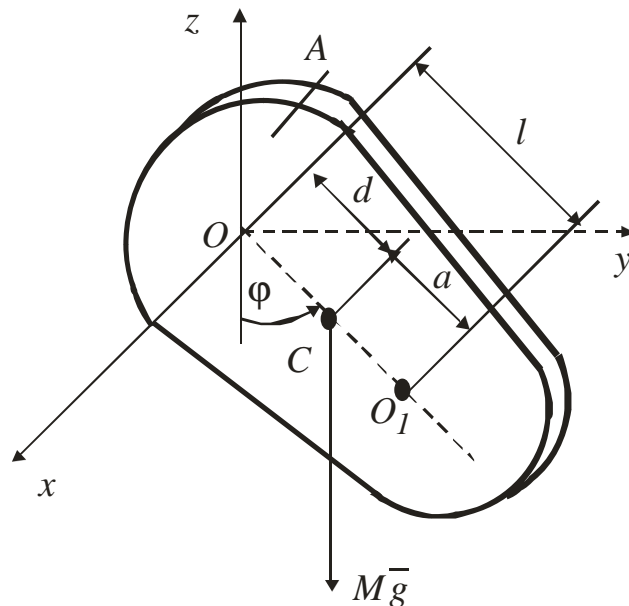


Рисунок 89



На підставі рівності (174) диференціальне рівняння обертального руху маятника відносно осі  $x$  набуде вигляду:

$$J_x \ddot{\varphi} = \sum M_x(\bar{F}_k^e);$$

$$J_x \ddot{\varphi} = -Mgd \sin j,$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgd}{J_x} \sin j = 0, \quad (178)$$

де  $M$  – маса маятника, а  $J_x$  – момент інерції маятника відносно осі  $Ox$ .

Рівняння (178) є нелінійним. Знайдемо його розв'язок, обмежувачись випадком малих коливань, тобто прийнемо, що  $\sin j \approx j$ . Тоді рівняння (178) набуде вигляду:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgd}{J_x} j = 0. \quad (179)$$

Рівняння (179) – диференціальне рівняння малих коливань фізичного маятника.

Якщо порівняти рівняння (179) з диференціальним рівнянням малих коливань математичного маятника (176), то визначимо зведену довжину фізичного маятника, тобто

$$l = \frac{J}{Md}. \quad (180)$$

**Зведеною довжиною фізичного маятника називається довжина математичного маятника, рух якого аналогічний руху фізичного маятника.**

Якщо у рівності (180) величину  $J_x$  визначити за формулою (21)

$$J_x = J_c + Md^2,$$

де  $J_c$  – момент інерції фізичного маятника відносно осі, що проходить через центр мас маятника, то отримуємо інший вираз зведеної довжини:

$$l = \frac{J_c}{Md} + d. \quad (181)$$

З формули (181) випливає, що  $l > d$ .

Якщо вздовж лінії, що з'єднує точку підвісу  $O$  і центр ваги  $C$  маятника, відкласти від точки  $O$  за напрямком до точки  $C$  зведену довжину  $l$ , то отримаємо точку  $O_1$ , яка називається *центром хитань фізичного маятника*. Відстань від центра мас до центра хитань:

$$a = \frac{J_c}{Md}. \quad (182)$$

Покажемо, що точка підвісу  $O$  і центр хитань  $O_1$  мають властивості взаємності. Дійсно, якщо помістити вісь підвісу в точці  $O_1$ , то зведена довжина  $l_1$  маятника, що визначається на підставі формули (181), буде

$$l_1 = \frac{J_c}{Ma} + a.$$

Беручи до уваги рівність (182), матимемо:

$$l_1 = \frac{J_c}{Md} + d = l.$$

Отже, якщо вісь підвісу буде проходити через точку  $O_1$ , то центром хитань буде точка  $O$  (оскільки  $l_1 = l$ , див. рис. 89).

Диференціальне рівняння (179) за виглядом збігається з диференціальним рівнянням вільних прямолінійних коливань матеріальної точки, і його загальний розв'язок за аналогією має вигляд

$$j = A \sin(kt + b), \quad (183)$$

де  $A$  – амплітуда коливання маятника;  $k = \sqrt{\frac{Mgd}{J_x}}$  – кругова частота

коливання;  $b$  – початкова фаза коливання Звідки випливає, що кут  $j$  змінюється за гармонічним законом з періодом

$$T = \frac{2p}{k} = 2p \sqrt{\frac{J_x}{Mgd}}. \quad (184)$$

## 12.5 Експериментальне визначення моментів інерції твердих тіл

Експериментальні методи застосовуються для визначення моментів інерції твердих тіл, які мають неправильну геометричну форму. Ці методи ґрунтуються на спостереженні за різними видами обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, оскільки момент інерції тіла – характеристика його інертності при обертанні.

Розглянемо три експериментальних способи: спосіб хитань, спосіб крутильних коливань і спосіб вантажу, що падає.

### 12.5.1 Спосіб хитань

Як приклад визначення моментів інерції твердих тіл цим способом розглянемо визначення моменту інерції шатуна (рис. 90) відносно осі, що проходить через його центр мас  $C$ .

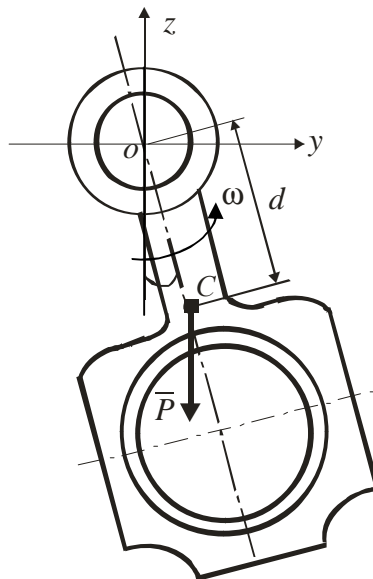


Рисунок 90

Визначення моменту інерції виконується у такій послідовності:

- 1) визначають вагу шатуна і положення його центра мас  $C$ ;
- 2) підвішують шатун у вертикальній площині так, щоб він мав можливість хитатися навколо горизонтальної осі підвісу;
- 3) відхиливши шатун від положення рівноваги на малий кут  $j$ , надають йому коливального руху;
- 4) за допомогою секундоміра шляхом спостереження визначають період коливання шатуна  $T$ ;
- 5) оскільки шатун є фізичним маятником, на підставі формули (184) визначають значення моменту інерції шатуна відносно осі підвісу:

$$J_x = \frac{T^2 P d}{(4p)^2}; \quad (185)$$

б) застосовуючи формулу (185), визначають момент інерції шатуна  $J_c$  відносно центральної осі, що проходить через центр мас шатуна і є паралельною осі підвісу:

$$J_c = J_x - m d^2 = \frac{T^2 P d}{(4p)^2} - \frac{P d^2}{g}. \quad (186)$$

### **12.5.2 Спосіб крутильних коливань**

Розглянемо тверде тіло  $A$ , прикріплене до пружного тонкого вертикального стрижня  $OO_1$  (рис. 91). Обернемо тіло  $A$  навколо осі  $Oz$  на малий кут  $j$  і відпустимо. Під дією сил пружності стрижня  $OO_1$  тіло  $A$  намагається повернутися в положення рівноваги, але, маючи кутову швидкість, проходить це положення і обертається навколо осі  $Oz$  у протилежний бік. Таким чином виникають крутильні коливання тіла.

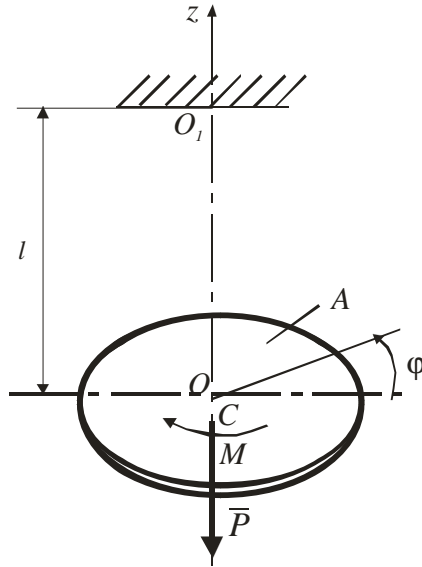


Рисунок 91

Сили пружності стрижня при крутильних коливаннях зводяться до крутильного моменту  $M_{кр} = -c j$ , де  $c = \frac{GJ_{Cz}}{l}$  – коефіцієнт жорсткості стрижня;  $G$  – модуль пружності матеріалу стрижня;  $J_{Cz}$  – момент інерції стрижня відносно осі  $c_z$ ;  $l$  – довжина стрижня.

На підставі рівняння (174) диференціальне рівняння крутильних коливань набуде вигляду:

$$J_{Cz} \ddot{j} = -c j ,$$

або

$$\ddot{j} + \frac{c}{J_{Cz}} j = 0 .$$

Період крутильних коливань визначається за формулою

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{Cz}}{C}} . \quad (187)$$

Визначення моменту інерції твердого тіла способом крутильних коливань виконується у такій послідовності:

- 1) до нижнього кінця тонкого стрижня (дроту), який защемлений

верхнім кінцем, підвішують тверде еталонне тіло, момент інерції якого відносно центральної осі  $Cz$  відомий (рис. 91);

2) відхиливши еталонне тіло від положення рівноваги на малий кут  $j$ , надають тілу коливального руху;

3) за допомогою секундоміра шляхом спостереження визначають період коливання еталонного тіла  $T_1$ ;

4) підвішують до стрижня тіло (рис. 92), момент інерції якого належить визначити; надають тілу коливального руху; за допомогою секундоміра шляхом спостереження визначають період коливання тіла  $T_2$ ;

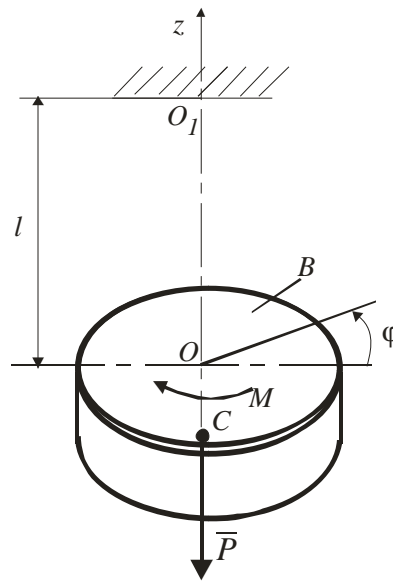


Рисунок 92

5) на підставі формули (187) отримують рівність

$$J_{zC_2} = \frac{J_{1C_2} T_2^2}{T_1^2}, \quad (188)$$

де  $J_{zC_2}$  – момент інерції, що належить визначити;

$J_{1C_2}$  – момент інерції еталонного тіла;

$T_1$  – період коливання еталонного тіла;

$T_2$  – період коливання тіла, момент інерції якого визначається;

б) за формулою (188) визначають шуканий момент інерції.

### 12.5.3 Спосіб падаючого вантажу

Розглянемо механічну систему, що складається з махового колеса 2 радіусом  $R$ , на якому намотаний тонкий дріт, до якого підвішена гиря 1 вагою  $P$  (рис. 93).

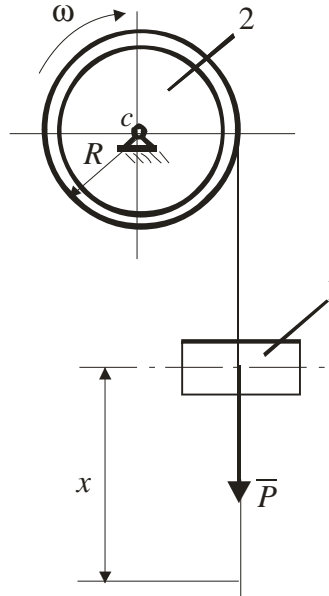


Рисунок 93

Нехай у початковий момент часу система перебувала у спокої. Застосуємо для аналізу руху системи теорему про зміну кінетичної енергії системи:

$$T_1 + T_2 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i,$$

де  $T_1 = \frac{P}{2g} \dot{x}^2$  – кінетична енергія гирі;

$T_2 = \frac{J_C}{2R^2} \dot{x}^2$  – кінетична енергія махового колеса.

Сума робіт  $\sum_{k=1}^n A_k^i = 0$ , оскільки система незмінна. Сума робіт  $\sum_{k=1}^n A_k^e$

становить:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = Px.$$

Підставляючи значення  $T_1$ ,  $T_2$  і  $\sum_{k=1}^n A_k^e$  у теорему про зміну кінетичної енергії системи, здобудемо:

$$\frac{\mathcal{E}}{2} \left( \frac{J_C}{R^2} + \frac{P}{g} \right) = Px.$$

Інтегруючи цей вираз при  $t = 0$ ;  $x(0) = 0$ , знаходимо

$$x = \frac{Pt^2 g R^2}{2(J_C g + PR^2)}. \quad (189)$$

Якщо за час  $t = t_1$  гиря опускається на висоту  $h$ , то з рівності (189) знайдемо

$$h = \frac{Pt_1^2 g R^2}{2(J_C g + PR^2)},$$

звідки

$$J_C = \frac{PR^2}{g} \left( \frac{gt_1^2}{2h} - 1 \right). \quad (190)$$

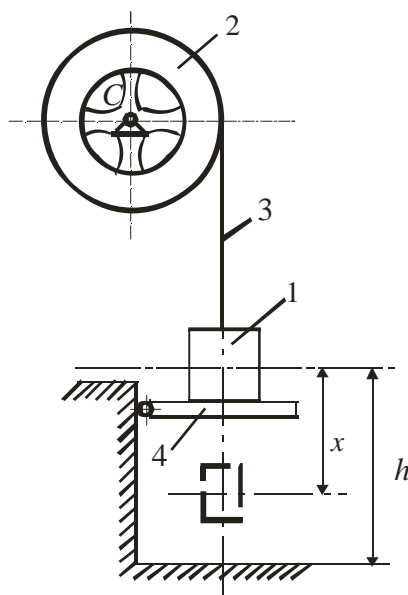


Рисунок 94



Визначення моментів інерції твердих тіл способом вантажу, що падає, виконується у такій послідовності:

1) створюють механічну систему за схемою, зображеною на рисунку 94, де 1 – гиря; 2 – тверде тіло, момент інерції якого належить визначити; 3 – тонкий дріт; 4 – горизонтальна площадка;

2) звільняючи гирю від в'язі (горизонтальної площадки), дають їй можливість опускатися, надаючи обертання тілу, момент інерції якого належить визначити;

3) за допомогою секундоміра шляхом спостереження визначають час падіння  $t_1$  гирі з висоти  $h$ ;

4) за формулою (190) визначають шуканий момент інерції.

## **12.6 Методика і приклади розв'язання задач за допомогою диференціального рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі**

За допомогою диференціального рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі можна розв'язувати як прямі, так і обернені задачі динаміки. У прямих задачах за даним моментом інерції твердого тіла відносно осі обертання і законом обертання твердого тіла  $j = j(t)$  визначають головний момент зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, відносно осі обертання. В обернених задачах за заданими моментами зовнішніх сил відносно осі обертання, моментом інерції, а також за початковими умовами руху визначають рівняння обертання твердого тіла, тобто  $j = j(t)$ .

Схема розв'язання задач динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі така:

1) вибрати осі координат і задати напрям однієї з них (осі  $z$ ) уздовж осі обертання твердого тіла;

2) визначити всі зовнішні сили, прикладені до твердого тіла (в тому числі і сили реакцій в'язей), і зобразити їх на розрахунковій схемі;

3) обчислити суму моментів усіх зовнішніх сил відносно осі обертання;

- 4) скласти диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі;
- 5) розв'язати пряму або обернену задачу залежно від умови;
- 6) дослідити розв'язок, щоб визначити область його застосування.

**Приклад 42.** *Кулька  $A$ , яка прикріплена до кінця стрижня  $AB$  завдовжки  $l$ , починає обертатися навколо вертикальної осі  $O_1O_2$  з початковою кутовою швидкістю  $\omega_0$  у посудині з рідиною (рис. 95, а). Сила опору рідини  $R = at\omega$ , де  $t$  - маса кульки;  $a$  - коефіцієнт пропорційності. Визначити, через який проміжок часу кутова швидкість обертання стане у два рази меншою за початкову, а також кількість обертів  $n$ , які зробить стрижень з кулькою за цей проміжок часу. Масу кульки вважати зосередженою в її центрі, масою стрижня знехтувати.*

Розв'язання

Розрахункову схему зображено на рисунку 95,б. Диференціальне рівняння руху

$$J_z \dot{\omega} = - at \omega,$$

де  $J_z = ml^2$ .

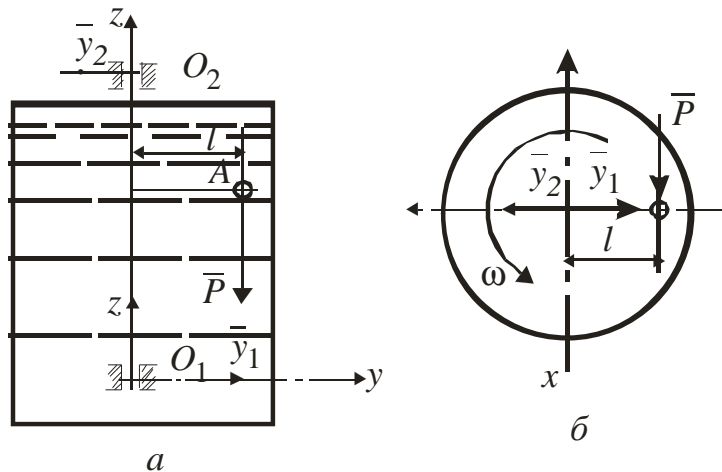


Рисунок 95

Оскільки  $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$ , то  $-\frac{l}{a} \frac{d\omega}{\omega} = dt$ .

Після інтегрування і визначення сталої інтегрування отримаємо

$$t = \frac{l}{a} \ln \frac{j_0}{j} = \frac{w_0}{w}.$$

Оскільки  $j = \frac{j_0}{2}$ , то  $t = \frac{l}{a} \ln 2$ .

Визначаємо закон руху кульки. З рівності  $t = \frac{l}{a} \ln \frac{j_0}{j}$  маємо

$$j = j_0 e^{-\frac{at}{l}}.$$

Оскільки  $j = \frac{dj}{dt}$ , то  $dj = j_0 e^{-\frac{at}{l}} dt$ .

Після інтегрування і визначення сталої інтегрування отримаємо

$$j = \frac{l}{j} j_0 \left( 1 - e^{-\frac{at}{l}} \right).$$

Оскільки  $t = \frac{l}{a} \ln 2$ , то  $j = \frac{l}{2a} j_0$ .

Тоді  $n = \frac{j}{2p} = \frac{l j_0}{4pa}$ .

**Приклад 43.** Тверде тіло, прикріплене до пружного дроту, здійснює крутильні коливання під дією зовнішнього моменту  $M_z = M_0 \cos pt$ ,  $M_0$  і  $\gamma$  - додатні сталі, а  $z$  - вісь, яка має напрямок уздовж дроту (рис. 96). Момент сил пружності дроту  $M_{пр} = -c j$ , де  $c$  - коефіцієнт пружності, а  $j$  - кут закручування. Момент інерції твердого тіла відносно осі  $z$  дорівнює  $J_z$ . Силами опору руху знехтувати. Визначити рівняння руху твердого тіла у двох випадках: 1)  $\sqrt{\frac{c}{J_z}} \neq p$ ; 2)  $\sqrt{\frac{c}{J_z}} = p$ , якщо у початковий момент при ненапруженому дроті твердому тілу надали кутової швидкості  $w_0$ .

## Розв'язання

Розрахункову схему подано на рисунку 96. Диференціальне рівняння руху має вигляд

$$J_z \ddot{\varphi} = M_0 \cos pt - c\dot{\varphi}, \text{ або } \ddot{\varphi} + k^2 \dot{\varphi} = H \cos pt,$$

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{J_z}, \quad H = \frac{M_0}{J_z}.$$

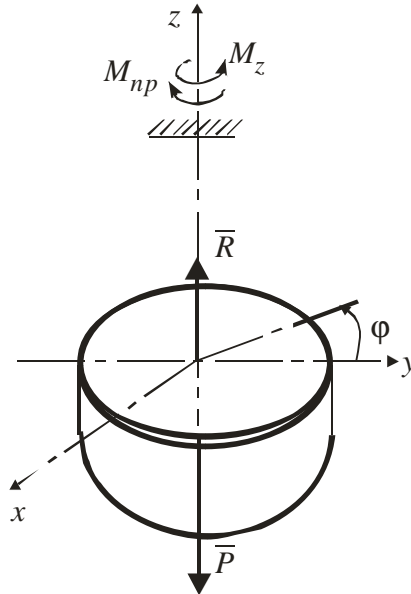


Рисунок 96

У випадку  $k \neq p$   $j = j_1 + j_2$ ,

де

$$j_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt;$$

$$j_2 = A \sin pt + B \cos pt; \quad A = 0; \quad B = \frac{H}{k^2 - p^2}.$$

Отже,  $j = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H}{k^2 - p^2} \cos pt$ ,

$$\text{де } C_1 = -\frac{H}{k^2 - p^2}; \quad C_2 = \frac{j_0}{k}.$$

$$\text{Остаточно } j = \frac{j_0}{k} \sin kt + \frac{H}{k^2 - p^2} (\cos pt - \cos kt).$$

У випадку  $k \neq p$   $j = j_1 + j_2$ , де  $j_1 = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt$ ;

$$j_2 = A_1 t \sin pt + B_1 t \cos pt; A_1 = \frac{H}{2p}; B = 0.$$

$$\text{Отже, } j = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt + \frac{H}{2p} t \sin pt,$$

$$\text{де } C_3 = 0; C_4 = \frac{j_0}{k} = \frac{w_0}{k}.$$

$$\text{Остаточно } j = \frac{w_0}{k} \sin kt + \frac{H}{2k} t \sin kt.$$

**Приклад 44.** Тверде тіло починає здійснювати обертальний рух відносно нерухомої осі  $z$  під дією сталого моменту  $M$  (рис. 97). При цьому виникає момент сил опору  $M_1$ , пропорційний квадрату кутової швидкості обертання тіла, тобто  $M_1 = aw^2$ . Знайти закон зміни кутової швидкості, якщо момент інерції тіла відносно осі обертання  $J = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

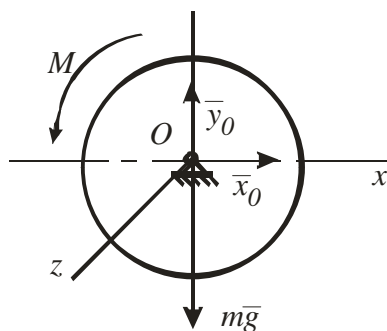


Рисунок 97

### Розв'язання

Складемо диференціальне рівняння (174) обертання тіла навколо нерухомої осі для даного випадку

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e),$$

або

$$J \ddot{\omega} = M - a j^2,$$

де  $j = \omega$  – кутова швидкість тіла.

Зробимо заміну:

$$j = \frac{dj}{dt}.$$

Тоді

$$\frac{dj}{dt} = \frac{a}{J} \left( \frac{M}{a} - j^2 \right),$$

або

$$\frac{dj}{\frac{M}{a} - j^2} = \frac{a}{J} dt.$$

Проінтегруємо рівняння, застосувавши табличний інтеграл.

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

Тоді

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{M}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\frac{M}{a}} + j}{\sqrt{\frac{M}{a}} - j} = \frac{a}{J} t + C_1.$$

При  $t = 0$  маємо  $\dot{\varphi} = w_0 = 0$ , тому

$$C_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{M}} \cdot \ln 1 = 0,$$

тобто

$$\ln \frac{\sqrt{\frac{M}{a}} + \dot{\varphi}}{\sqrt{\frac{M}{a}} - \dot{\varphi}} = \frac{2\sqrt{Ma}}{J} t.$$

Пропотенціюємо рівняння, зробивши зміну:

$$\frac{2\sqrt{Ma}}{J} = b.$$

У результаті чого одержимо:

$$\frac{\sqrt{\frac{M}{a}} + \dot{\varphi}}{\sqrt{\frac{M}{a}} - \dot{\varphi}} = e^{bt}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно  $\dot{\varphi}$ , визначимо шукану кутову швидкість обертання тіла.

$$w = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{M}{a}} \cdot \frac{l - e^{-bt}}{l + e^{-bt}}.$$

Аналіз одержаного результату дозволяє зробити висновок, що при обертанні тіла під дією такого навантаження на протязі досить великого проміжку часу (коли  $t \rightarrow \infty$ ) його кутова швидкість прямує до свого граничного значення.

$$w_{\text{гран}} = \sqrt{\frac{M}{a}}.$$

**Приклад 45** Розглянемо також випадок, коли момент опору обертального руху тіла (рис. 97) навколо нерухомої осі пропорційний кутовій швидкості, тобто, коли  $M_1 = a\omega$ .

Розв'язання

Запишемо диференціальне рівняння руху

$$J\dot{\omega} = M - a\dot{\omega},$$

або

$$\dot{\omega} = \frac{a}{J} \left( \frac{M}{a} - \dot{\omega} \right).$$

Зробимо заміну в рівнянні  $\dot{\omega} = \frac{d\dot{\omega}}{dt}$  і розділимо змінні. Тоді отримаємо:

$$\frac{d\dot{\omega}}{\frac{M}{a} - \dot{\omega}} = \frac{a}{J} dt,$$

або

$$\frac{d\left(\frac{M}{a} - \dot{\omega}\right)}{\frac{M}{a} - \dot{\omega}} = -b dt,$$

де  $b = \frac{a}{J}$ .

Проінтегруємо рівняння і отримаємо:

$$\ln\left(\frac{M}{a} - \dot{\omega}\right) = -bt + C_1.$$

Відповідно початковим умовам:  $t = 0$ ,  $\dot{\omega} = \dot{\omega}_0 = \omega_0 = 0$ , маємо  $C_1 = \ln\left(\frac{M}{a} - \dot{\omega}\right)$ , і рівняння тоді набуде вигляду:

$$\ln\left(1 - \frac{a\dot{\omega}}{M}\right) = -bt.$$



Пропотенціюємо це рівняння і вирішимо його відносно  $w$ .  
враховуючи, що  $\dot{\varphi} = w$ :

$$w = \frac{M}{a} \cdot (1 - e^{-bt})$$

Як бачимо, у цьому випадку при достатньо тривалому навантаженні  
обертання твердого тіла наближається до рівномірного з постійною  
кутовою швидкістю  $w = \frac{M}{a}$ .

## 12.7 Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла

З кінематики відомо, що плоский рух можна розглядати як  
поступальний разом з полюсом і обертальний рух відносно полюса.  
Оберемо за полюс центр мас системи.

Використовуючи теореми про рух центра мас і про зміну  
кінетичного моменту системи щодо центра мас для відносного руху  
системи стосовно системи координат, що рухається поступально із  
центром мас, одержимо диференціальні рівняння плоского руху твердого  
тіла.

У площині руху центра мас тіла, що здійснює плоский рух, оберемо  
нерухому систему координат  $Ox_1y_1$ , відносно якої розглядається рух, і  
систему  $Sx$ , яка рухається поступально разом із центром мас (рис.98).  
Нехай  $x_c$  і  $y_c$  – координати центра мас тіла відносно нерухомої системи  
координат. Тоді за теоремою про рух центра мас одержимо два наступних  
диференціальних рівняння плоского руху твердого тіла:

$$M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^{(e)}; \quad M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^{(e)},$$

де  $M$  – маса тіла.

Третє диференціальне рівняння плоского руху твердого тіла одержимо з теореми про зміну кінетичного моменту у відносному русі стосовно центра мас (77) у проекції на рухому вісь  $C_z$ :

$$\frac{dK_{cz}^{(r)}}{dt} = \sum M_{cz} \left( \bar{F}_k^{(e)} \right).$$

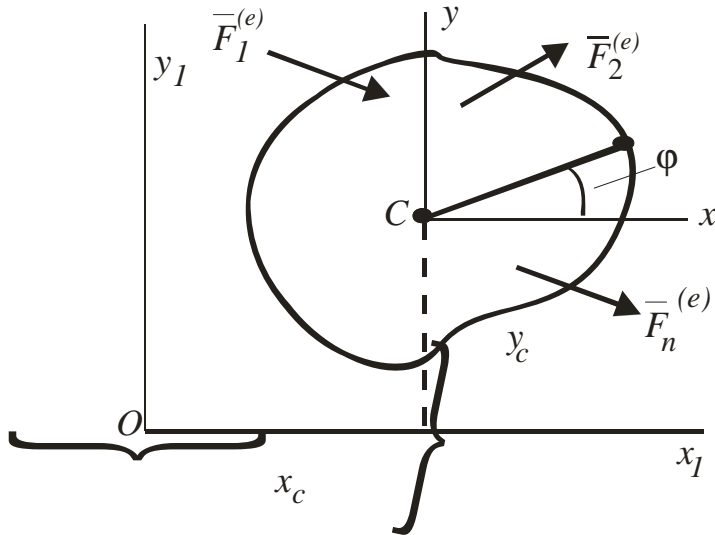


Рисунок 98

Плоский рух твердого тіла можна вважати складеним з поступального руху із центром мас  $C$  і обертання навколо рухомої осі  $C_z$ . Для випадку обертання навколо осі кінетичний момент щодо цієї осі обчислюється за формулою

$$K_{cz}^{(r)} = J_{cz} w,$$

де  $w$  – кутова швидкість й  $J_{cz}$  – момент інерції тіла щодо осі  $C_z$ .

Так як  $J_{cz}$  – є величиною сталою, то після підстановки  $K_{cz}^{(r)}$  у теорему про зміну кінетичного моменту у відносному русі одержимо

$$J_{cz} \frac{dw}{dt} = \sum M_{cz} \left( \bar{F}_k^{(e)} \right).$$

Якщо ввести кут повороту  $j$  навколо осі  $Cz$ , то одержимо наступне диференціальне рівняння:

$$J_{cz} \ddot{j} = \sum M_{cz} \left( \bar{F}_k^{(e)} \right).$$

Таким чином для твердого тіла, що здійснює плоский рух і отже, яке має три ступені вільності, відповідно одержимо наступні диференціальні рівняння:

$$M \ddot{x} = \sum \bar{F}_{kx}^{(e)}; \quad M \ddot{y} = \sum \bar{F}_{ky}^{(e)}; \quad J_{cz} \ddot{j} = \sum M_{cz} \left( \bar{F}_k^{(e)} \right). \quad (191)$$

За допомогою цих рівнянь можна вирішувати дві основні задачі: за заданим плоским рухом твердого тіла знаходити зовнішні сили і за заданими зовнішніми силами і початковими умовами визначити його рух. При рішенні цих задач повинні бути задані маса тіла  $M$  і його момент інерції.

## 12.8 Методика і приклади розв'язання задач динаміки плоского руху твердого тіла

Задачі динаміки плоского руху твердого тіла треба розв'язувати у такій послідовності:

- зобразити на рисунку всі зовнішні сили, враховуючи наявність в'язей, накладених на тверде тіло;
- обрати нерухому систему відліку;
- записати систему рівнянь (191);
- обчислити праві частини цих рівнянь, тобто суми проекцій зовнішніх сил на осі  $x$  і  $y$ , а також суму моментів цих сил відносно центра мас;
- скласти систему диференціальних рівнянь плоского руху твердого тіла;

- встановити початкові умови руху твердого тіла;
- проінтегрувати складену систему диференціальних рівнянь, враховуючи початкові умови руху тіла;
- знайти необхідні шукані величини.

**Приклад 46.** На барабан однорідного котка масою  $m$  і радіусом  $r$ , який лежить на горизонтальній шорсткій підлозі, намотана нитка, до якої прикладена сила  $\vec{T}$  під кутом  $\alpha$  до горизонту (рис.99). Радіус барабана  $a$ , радіус інерції котка  $r$ . Визначити закон руху осі котка  $O$ . У початковий момент коток перебував у спокої, потім котився без ковзання.

Розрахункову схему зображено на рисунку 99. Диференціальні рівняння руху такі:

$$m\ddot{x} = T \cos \alpha - F^T; \quad m\ddot{y} = N - P + T \sin \alpha; \quad J\ddot{\varphi} = -F^T r + Ta.$$

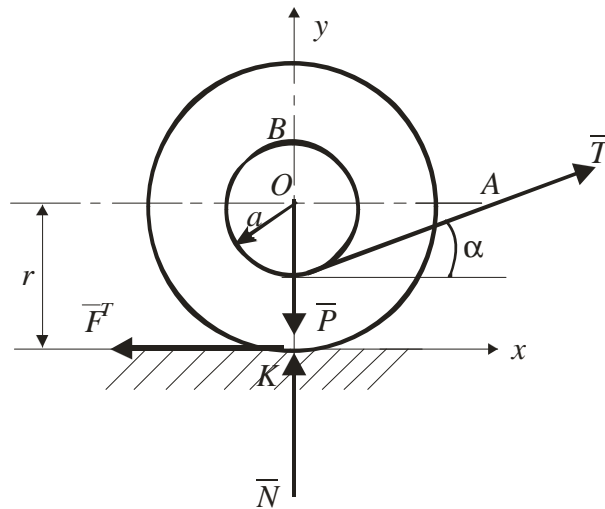


Рисунок 99

#### Розв'язання

З рівнянь, беручи до уваги що

$$J_o = mr^2; \quad \dot{\varphi}_o = j\dot{\varphi}; \quad \ddot{\varphi}_o = j\ddot{\varphi},$$

отримаємо

$$\ddot{x} = \frac{Tr(r \cos \alpha - a)}{m(r^2 + r^2)}.$$

Після інтегрування цього рівняння і визначення сталих інтегрування (початкові умови руху:  $t = 0$ ;  $x(0) = 0$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ ), матимемо:

$$x_0 = \frac{Tr(r \cos \alpha - a)}{2m(r^2 + r^2)} t^2.$$

**Приклад 47.** Однорідний круглий циліндр радіусом  $r$  і вагою  $\bar{P}$  скочується без ковзання під дією ваги вздовж площини, нахиленої до горизонту під кутом  $\alpha$  (рис.100).

Знайти прискорення центра мас (центра ваги) циліндра, а також найменшу силу тертя, при якій можливе кочення без ковзання. Опором кочення знехтувати.

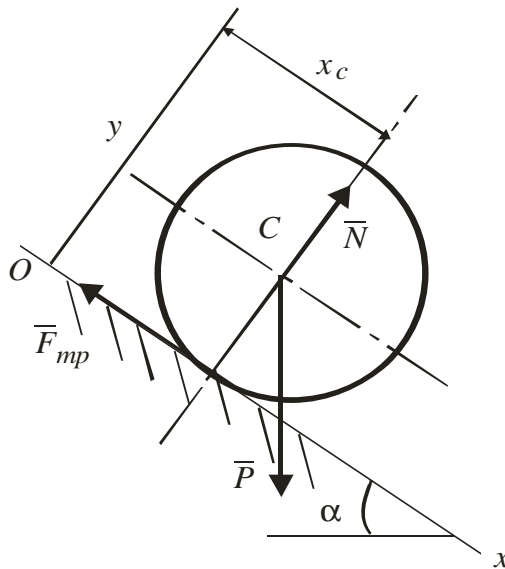


Рисунок 100

#### Розв'язання

Розглянемо рух циліндра. Циліндр здійснює невідільний плоскопаралельний рух. Прикладемо до циліндра всі зовнішні сили: силу ваги циліндра  $\bar{P}$ , нормальну реакцію похилої площини  $\bar{N}$  і силу тертя ковзання  $\bar{F}^T$ .

Побудуємо нерухому систему координат з початком у точці  $O$ , що відповідає початковому положенню циліндра. Вісь  $Ox$  напрямимо вздовж похилої площини, а вісь  $Oy$  – перпендикулярно до цієї площини.

Обчислимо алгебричну суму проекції всіх зовнішніх сил, прикладених до циліндра, на осі координат  $Oxy$ :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^{(e)} = P \sin a - F_{mp};$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^{(e)} = -P \cos a + N.$$

Обчислимо алгебричну суму моментів усіх зовнішніх сил, прикладених до циліндра, відносно центра мас циліндра (за додатний напрямок моментів візьмемо напрямок обертання циліндра):

$$\sum_{k=1}^n M_c(F_k^{(e)}) = rF_{mp}.$$

Диференціальні рівняння руху циліндра мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{P}{g} \ddot{x}_c = P \sin a - F_{mp}; \\ \frac{P}{g} \ddot{y}_c = -P \cos a + N; \\ J_c \ddot{j} = rF_{mp}. \end{cases} \quad (a)$$

де  $J_c$  – момент інерції циліндра відносно осі, яка проходить через його центр мас  $C$  і перпендикулярна до площини  $xOy$ .

Рівняння (а) містять п'ять невідомих величин:  $x_c, y_c, j, N$  і  $F_{mp}$ . Тому треба скласти ще два рівняння. Оскільки циліндр котиться без ковзання, то

$$V_c = \dot{x}_c = r\dot{j}.$$

З другого рівняння системи (а) визначаємо реакцію  $N$ :

$$N = P \cos \alpha ,$$

оскільки  $\ddot{x}_c = 0$ .

При коченні без ковзання  $\ddot{x}_c = r \ddot{\varphi}$  (оскільки  $x_c = r \varphi$ ), тому третє рівняння системи (а) з урахуванням того, що  $J_c = \frac{Pr^2}{2g}$ , набуває вигляду

$$\frac{P}{2g} \ddot{x}_c = F_{mp} .$$

Підставляючи знайдене значення  $F_{mp}$  у перше рівняння системи (а), дістанемо шукане прискорення центра мас циліндра:

$$\ddot{x}_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha .$$

Беручи до уваги значення  $\ddot{x}_c$ , знайдемо силу тертя ковзання:

$$F_{mp} = \frac{1}{3} P \sin \alpha ,$$

необхідну для того, щоб циліндр котився по похилій площині без ковзання.

При коченні циліндра без ковзання сила тертя  $F_{mp}$  має задовольняти умову

$$F_{mp} \leq fN ,$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання.

Підставляючи у цю нерівність значення  $F_{mp} = \frac{1}{3} P \sin \alpha$  і  $N = P \cos \alpha$ , знайдемо умову кочення циліндра без ковзання:

$$\frac{1}{3} P \sin \alpha \leq f P \cos \alpha ,$$

або

$$f \geq \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

**Приклад 48.** Визначити величину горизонтальної сили  $\bar{F}$ , яку необхідно прикласти до центра мас циліндра радіусом  $r$  і масою  $m$ , щоб він котився без ковзання по горизонтальній площині (рис.101).

Розв'язання

Розглядаємо рух циліндра. Циліндр здійснює невільний плоскопаралельний рух. Прикладемо до циліндра всі зовнішні сили: силу ваги  $\bar{P}$ , силу  $\bar{F}$  (рушійна сила), нормальну реакцію  $\bar{N}$  і силу тертя  $\bar{F}_{mp}$  (рис.101).

Нерухому систему відліку показано на рисунку 101.

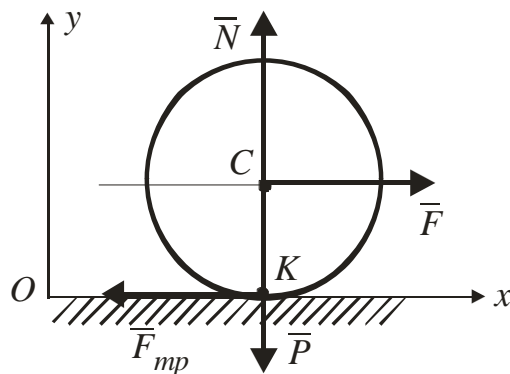


Рисунок 101

Складемо диференціальні рівняння руху циліндра (за додатний напрямок моментів сил візьмемо напрямок кочення циліндра):

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = F - F_{mp}; \\ m\ddot{y}_c = N - P; \\ J_C \ddot{\varphi} = F_{Tp} r. \end{cases} \quad (6)$$

Оскільки циліндр котиться без ковзання, то  $\dot{x}_c = r\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{x}_c = r\ddot{\varphi}$



З другого рівняння системи (б) маємо

$$N = P = mg ,$$

оскільки  $\alpha_c = 0$ .

Визначаємо момент інерції циліндра відносно осі, що проходить через його центр мас перпендикулярно до площини  $xOy$ :

$$J_c = \frac{mr^2}{2} .$$

Враховуючи значення  $\alpha_c$  і  $J_c$ , першому і третьому рівнянням системи (б) надамо вигляду:

$$mr\alpha = F - F_{mp} ;$$

$$\frac{mr^2}{2} \cdot \alpha = F_{mp} .$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, отримаємо

$$F_{mp} = \frac{F}{3} .$$

При коченні циліндра без ковзання сила тертя  $\bar{F}_{mp}$  має задовольняти умову

$$F_{mp} \leq fN ,$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання.

Підставляючи у цю нерівність значення  $F_{mp} = \frac{F}{3}$  і  $N = mg$ , дістанемо граничне значення горизонтальної сили  $F$ , під дією якої циліндр може котитися без ковзання:

$$F \leq 3mgf .$$

**Приклад 49.** Визначити величину обертового моменту  $M$ , прикладеного до циліндра радіусом  $r$  і масою  $m$ , щоб він котився без ковзання по горизонтальній площині (рис.102).

Розв'язання

Розглядаємо рух циліндра. Циліндр здійснює невільний плоскопаралельний рух. Прикладемо до циліндра всі зовнішні сили: силу ваги  $\bar{P}$ , нормальну реакцію  $\bar{N}$  і силу тертя  $\bar{F}_{mp}$  (у даному випадку сила  $\bar{F}_{mp}$  є рушійною силою).

Нерухому систему відліку показано на рисунку 102.

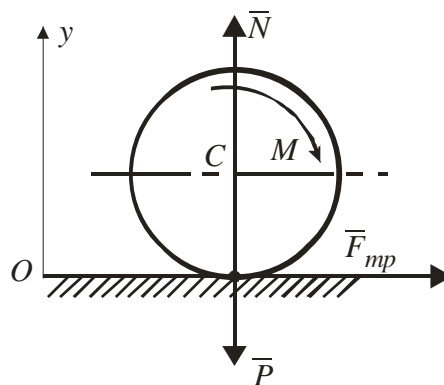


Рисунок 102

Складемо диференціальні рівняння руху циліндра ( за додатний напрямок моментів сил візьмемо напрямком обертання циліндра):

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = F_{mp}; \\ m\ddot{y}_c = N - P; \\ J_c \ddot{\varphi} = M - F_{mp}r. \end{cases} \quad (a)$$

Оскільки циліндр котиться без ковзання, то  $\dot{x}_c = r\dot{\varphi}$  і  $\ddot{x}_c = r\ddot{\varphi}$

Визначаємо момент інерції циліндра відносно осі, що проходить через його центр мас перпендикулярно до площини  $xOy$ :

$$J_c = \frac{mr^2}{2}.$$

Підставляючи значення  $\ddot{x}_c = r\ddot{\alpha}$  і  $\ddot{y}_c = 0$  і  $J_c = \frac{mr^2}{2}$  у рівняння системи

(а), отримаємо

$$F_{mp} = \frac{2M}{3r}.$$

Оскільки

$$F_{mp} \leq fN,$$

або

$$F_{mp} \leq fmg,$$

то

$$\frac{2M}{3r} = fmg,$$

звідки дістанемо граничне значення обертального моменту, під дією якого циліндр може котитися без ковзання:

$$M \leq 1,5mgrf.$$

## 12.9 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки

Динаміка обертального руху твердого тіла навколо нерухомої точки протягом століть привертала увагу вчених у галузі механіки і математики. Вперше (в 1750р) Л.Ейлер вивів диференціальні рівняння руху тіл з нерухомою точкою для випадку, коли центр мас збігається з цією точкою. Потім Ж.Лагранж (в 1788р) дослідив другий випадок, коли центр мас і нерухома точка розміщені на осі симетрії тіла. І нарешті С.Ковалевська (1880) одержала нові важливі результати, за які було відзначена премією паризької Академії наук.

Для отримання диференціальних рівнянь руху тіла, що має нерухому точку, необхідно спочатку знайти вираз головного моменту кількості руху (тобто кінетичного моменту)  $\bar{K}_o$  і кінетичної енергії  $T$  тіла в цьому випадку руху.

### 12.9.1 Кінетичний момент тіла, що обертається навколо нерухомої точки

Вектор  $\bar{K}_O$  можна визначити за його проєкціями на будь-які три координатні осі  $Oxuz$ . Щоб знайти відповідні формули у найбільш простому вигляді, оберемо за осі  $Oxuz$  (рис.103), які жорстко пов'язані з тілом, головні осі інерції цього тіла для точки  $O$  (див. підроз. 3.2).

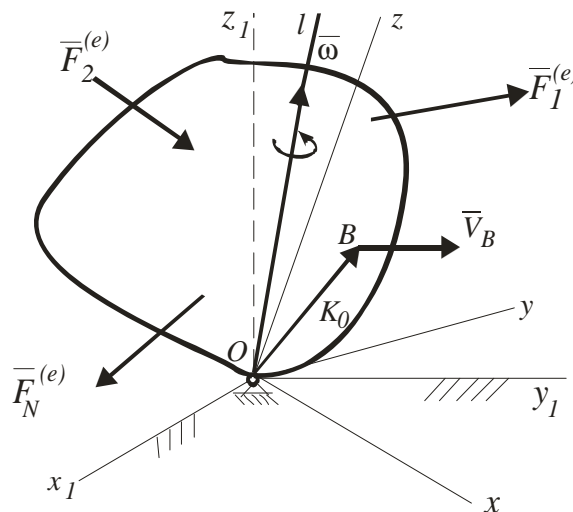


Рисунок. 103

Почнемо з обчислення  $K_x$ . За аналогією з (70):

$$M_x(m_k \bar{V}_k) = m_k (y_k V_{kz} - z_k V_{ky}).$$

Але за кінематичними формулами Ейлера (із кінематики сферичного руху):

$$V_{ky} = w_z x_k - w_x z_k; \quad V_{kz} = w_x y_k - w_y x_k,$$

де  $w_x; w_y; w_z$  – проєкції на осі  $Oxuz$  миттєвої кутової швидкості тіла;

$x_k, y_k, z_k$  – координати точок тіла.

Підставимо ці значення  $V_{ky}$  і  $V_{kz}$  в попередню рівність. При цьому треба відмітити, що складові з добутками координат можна не

обчислювати, так, як осі  $Oxyz$  являються головними осями інерції і для них всі відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, тобто:

$$\sum m_k x_k y_k = 0; \quad \sum m_k x_k z_k = 0.$$

Тоді, виносячи спільний множник  $w_x$  за дужки, знайдемо:

$$K_x = \sum M_x(m_k \bar{V}_k) = \left[ \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) \right] w_x,$$

де величина в квадратних дужках, згідно з формулою (13), являється головним моментом інерції тіла відносно осі  $Ox$ . Аналогічні вирази отримаємо для  $K_y$  і  $K_z$ , тоді остаточно маємо:

$$K_x = J_x w_x; \quad K_y = J_y w_y; \quad K_z = J_z w_z. \quad (192)$$

Формули (192) дають вирази проєкцій кінетичного моменту  $\bar{K}_O$  на головні осі інерції тіла для точки  $O$ .

Якщо осі  $Oxyz$  не будуть головними, то як можна обчислити, формули (192) будуть мати наступний більш складний вигляд:

$$\begin{cases} K_x = J_x w_x - J_{xy} w_y - J_{xz} w_z; \\ K_y = J_y w_y - J_{xy} w_x - J_{yz} w_z; \\ K_z = -J_{xz} w_x - J_{yz} w_y + J_z w_z. \end{cases} \quad (193)$$

### ***12.9.2 Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої точки***

Із кінематики сферичного руху твердого тіла відомо, що будь-яке елементарне переміщення твердого тіла, яке має нерухому точку  $O$ , являє собою елементарний поворот з кутовою швидкістю  $\bar{w}$  навколо миттєвої осі обертання  $Ol$ , що проходить теж через точку  $O$ , то кінетичну енергію тіла можна визначити за формулою

$$T = \frac{1}{2} J_{Ol} \omega^2,$$

де  $J_{Ol}$  – момент інерції тіла відносно довільної осі  $Ol$ . Якщо ця вісь утворює з осями  $Oxyz$  кути  $a; b$  і  $g$  (рис.104) відповідно, то із визначення (9) моменту інерції, а саме

$$J_l = \sum m_k h_k^2,$$

де  $h_k^2 = r_k^2 - (OD_k)^2$ , як проекція вектора  $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$  на вісь  $Ol$  буде дорівнювати сумі проекції складових цього вектора на ту ж саму вісь, причому

$$(x_k \vec{i})_l = x_k \cos a; (y_k \vec{j})_l = y_k \cos b; (z_k \vec{k})_l = z_k \cos g,$$

крім того  $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$ .

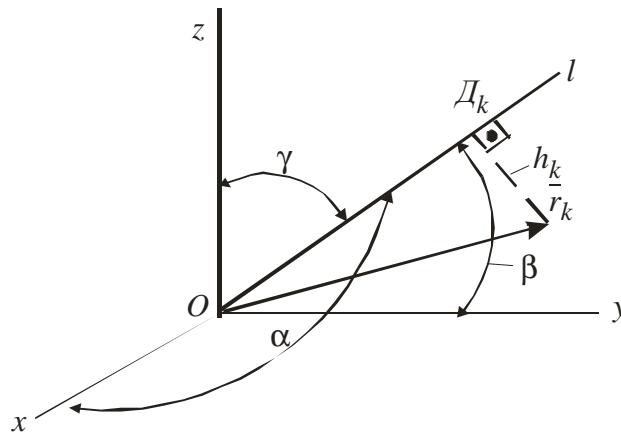


Рисунок 104

Тоді

$$J_l = \sum m_k \left[ x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - (x_k \cos a + y_k \cos b + z_k \cos g)^2 \right].$$

Тепер, якщо урахувати, що  $1 - \cos^2 a = \cos^2 b + \cos^2 g$  і т.д., а потім винести квадрати і додатки косинусів, як спільні множники, за дужки, прийняти до уваги формули (13) для моментів інерції відносно координатних осей і (18) для відцентрових моментів інерції, то отримаємо:

$$J_l = J_x \cos^2 a + J_y \cos^2 b + J_z \cos^2 g - 2J_{xy} \cos a \cos b - 2J_{yz} \cos b \cos g - 2J_{zx} \cos a \cos g. \quad (194)$$

Якщо за осі  $Oxyz$  обрані головні осі інерції, то вираз (194) набуває спрощеного вигляду:

$$J_l = J_x \cos^2 a + J_y \cos^2 b + J_z \cos^2 g. \quad (195)$$

Тепер підставимо значення (194) для  $J_l$  у формулу для обчислення кінетичної енергії системи і при цьому враховуємо, що

$$w_x = w \cos a; \quad w_y = w \cos b; \quad w_z = w \cos g,$$

так як вектор  $\vec{w}$  спрямований вздовж осі  $ol$ . Тоді отримаємо:

$$2T = J_x w_x^2 + J_y w_y^2 + J_z w_z^2 - 2J_{xy} w_x w_y - 2J_{yz} w_y w_z - 2J_{xz} w_x w_z. \quad (196)$$

Якщо за осі  $Oxyz$  обрані головні моменти інерції, то згідно з (196):

$$2T = J_x w_x^2 + J_y w_y^2 + J_z w_z^2. \quad (197)$$

### 12.9.3 Динамічні рівняння Ейлера

Нехай на тверде тіло, що має нерухому точку  $O$  діють задані сили  $\vec{F}_1^{(e)}, \vec{F}_2^{(e)}, \dots, \vec{F}_N^{(e)}$  (рис. 105), одночасно на тіло буде діяти реакція  $\vec{R}_O$  в'язі (на рисунку 105 не показана). Щоб виключити з рівнянь руху цю невідому

реакцію, скористаємося теоремою про зміну кінетичного моменту у вигляді (88) теореми Резаля. Оскільки  $\overline{M}_o(\overline{R}_o) = 0$ , то з теореми Резаля

$$\overline{V}_B = \overline{M}_o, \quad (198)$$

де  $\overline{M}_o = \sum \overline{M}_o(\overline{F}_k^{(e)})$ ;  $\overline{V}_B$  – швидкість у відношенні до інерціальної системи відліку  $Ox_1y_1z_1$  точки  $B$ , яка співпадає з кінцем вектора кінетичного моменту  $\overline{K}_o$ .

Рух тіла вивчається теж у відношенні до інерціальної системи відліку  $Ox_1y_1z_1$ . Але щоб отримати рівняння цього руху в найбільш простому вигляді, спроеціюємо обидві частини попередньої рівності на жорстко скріплені з тілом осями  $Oxyz$ , які рухаються разом з ним і які являються головними осями інерції тіла для точки  $O$ . Тоді вираз проєкцій вектора  $\overline{K}_o$  буде мати простий вигляд, який дають формули (192), а моменти інерції, що входять до цих формул, будуть величинами сталими.

Для обчислення проєкцій абсолютної швидкості  $\overline{V}_B$  на рухомі осі подамо  $\overline{V}_B$  як геометричну суму відносної (у відношенні до осей  $Oxyz$ ) швидкості  $\overline{V}_r$  переносної швидкості  $\overline{V}_e$ . Тоді з рівняння (198)

$$\overline{V}_r + \overline{V}_e = \overline{M}_o \quad \text{і} \quad V_{rx} + V_{ex} = M_x. \quad (199)$$

Позначимо координати точки  $B$  через  $x, y, z$ .

При цьому радіусом-вектором точки  $B$  являється вектор  $\overline{K}_o$  (див.рис.103), тоді

$$x = K_x; \quad y = K_y; \quad z = K_z.$$

Отже

$$V_{rx} = \frac{dx}{dt} = \frac{dK_x}{dt}.$$



А при визначенні  $\bar{V}_e$  точку  $B$  можна розглядати, як таку, що належить тілу, пов'язаному з осями  $Oxyz$ . Але це тіло обертається навколо нерухомої точки  $O$ .

Тоді

$$V_{e_x} = w_y z - w_z y = w_y K_z,$$

де  $w$  – кутова швидкість тіла. Замінюючи у знайдених виразах  $V_{r_x}$  і  $V_{e_x}$  величини  $K_x, K_y, K_z$  їх значеннями (192) і підставляючи ці значення  $V_{r_x}$  і  $V_{e_x}$  у друге рівняння рівностей (199), отримаємо:

$$\frac{d(J_x w_x)}{dt} + J_z w_z w_y + J_y w_y w_z = M_x.$$

Аналогічні вирази можна отримати для проекції першого рівняння з рівностей (199) на осі  $y$  і  $z$  (їх можна знайти круговою перестановкою індексів).

Так як для пов'язаних з тілом осей  $Oxyz$  величини  $J_x, J_y, J_z$  – сталі, то остаточно знайдемо наступні диференціальні рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої точки  $O$  у проекціях на головні осі інерції тіла для цієї точки:

$$\begin{cases} J_x \frac{dw_x}{dt} + (J_z - J_y) w_y w_z = M_x; \\ J_y \frac{dw_y}{dt} + (J_x - J_z) w_z w_x = M_y; \\ J_z \frac{dw_z}{dt} + (J_y - J_x) w_z w_y = M_z. \end{cases} \quad (200)$$

Рівняння (200) називають динамічним рівнянням Ейлера.

Якщо положення тіла задати кутами Ейлера  $j, \gamma, \varphi$  (рис.105), то основна задача динаміки буде полягати в тому, щоб за відомими  $M_x, M_y, M_z$  знайти закон руху тіла, тобто знайти:

$$j = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad q = f_3(t),$$

тобто залежності цих кутів від часу. Для вирішення цієї задачі треба до рівнянь (200) додати кінематичні рівняння Ейлера, а саме:

$$\begin{cases} w_x = \dot{j} \sin q \sin j + \dot{q} \cos j; \\ w_y = \dot{j} \sin q \cos j - \dot{q} \sin j; \\ w_z = \dot{y} \cos q + \dot{j} \end{cases} \quad (201)$$

Рівняння (201) встановлюють зв'язок між проекціями кутової швидкості  $w_x, w_y, w_z$  і кутами  $j, y, q$ .

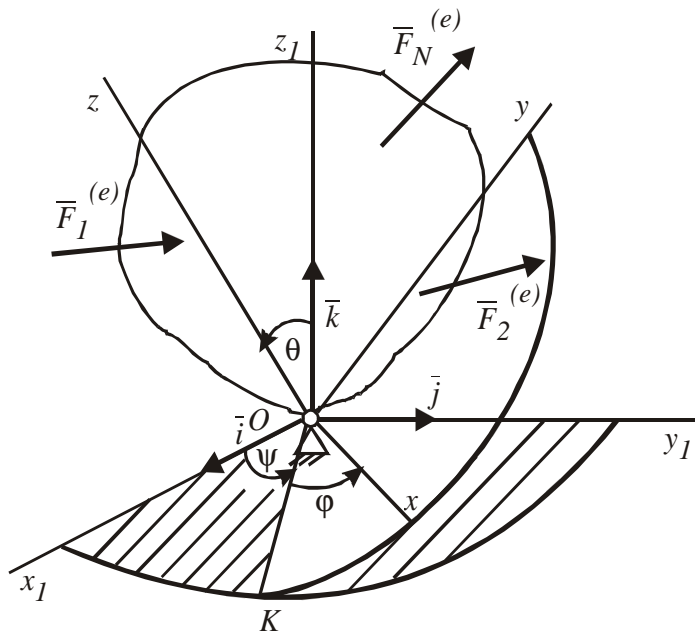


Рисунок 105

Динамічні (200) і кінематичні (201) рівняння Ейлера утворюють системи шести нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Інтегрування цієї системи рівнянь становить складну математичну задачу. Достатньо зауважити, що навіть окремий випадок руху твердого тіла навколо нерухомої точки під дією тільки однієї сили тяжіння не може бути розв'язаний у загальному вигляді.

Відомі три окремі випадки, коли інтегрування рівнянь (200), (201) може бути доведене до квадратур за будь-яких початкових умов руху. Це випадки Ейлера-Пуансо; Лагранжа-Пуассона і Ковалевської.

Звичайно при інтегруванні цих рівнянь (при вирішенні відповідних конкретних задач) використовують ті чи інші наближені математичні методи.

Один з найпростіших прикладів використання цих рівнянь – рух вільного гіроскопа, закріпленого в центрі тяжіння.

### 12.10 Диференціальні рівняння руху вільного твердого тіла

Розглянемо рух вільного твердого тіла відносно інерціальної системи відліку  $Ox_1y_1z_1$  (рис.106). Позначимо через  $Cx_2y_2z_2$  систему координат, початок якої розташований у центрі мас  $C$  твердого тіла. Осі цієї системи паралельні осям інерціальної системи відліку  $Ox_1y_1z_1$ . Жорстко пов'яжемо з тілом систему  $Cxyz$ . Нехай осі цієї системи співпадають з головними осями інерції тіла в точці  $C$ .

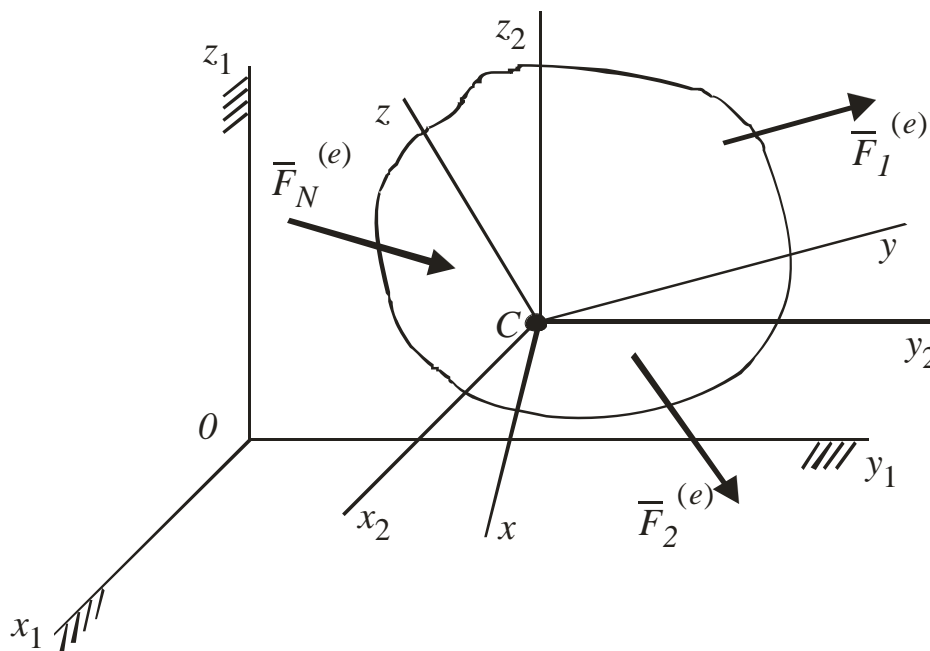


Рисунок 106

З кінематики відомо, що вільний рух твердого тіла складається з поступального руху цього тіла разом з полюсом (за полюс обирають центр мас  $C$  твердого тіла) і руху тіла навколо центра мас, як навколо нерухомої точки.

Якщо на тіло діють зовнішні сили  $\bar{F}_1^{(e)}, \bar{F}_2^{(e)}, \dots, \bar{F}_N^{(e)}$ , то диференціальні рівняння руху центра мас  $C$  твердого тіла відносно інерціальної системи відліку отримують із теореми про рух центра мас тіла.

$$M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^{(e)},$$

де  $M$  – маса тіла;  $\bar{a}_c$  – прискорення центра мас.

У проєкціях на нерухомі осі  $Ox_1y_1z_1$  остання рівність і дасть диференціальні рівняння поступальної складової руху вільного тіла:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_{1c} = \sum F_{kx_1}^{(e)}; \\ M\ddot{y}_{1c} = \sum F_{ky_1}^{(e)}; \\ M\ddot{z}_{1c} = \sum F_{kz_1}^{(e)}, \end{cases} \quad (202)$$

де  $M$  – маса твердого тіла;  $\ddot{x}_{1c}, \ddot{y}_{1c}, \ddot{z}_{1c}$  – відповідно проєкції вектора прискорення центра мас на нерухомі осі координат;  $\sum F_{kx_1}^{(e)}, \sum F_{ky_1}^{(e)}, \sum F_{kz_1}^{(e)}$  – відповідно проєкції зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, на нерухомі осі координат. Рух твердого тіла навколо центра мас  $C$ , як навколо нерухомої точки, буде визначатися рухом осей  $Cx_2y_2z_2$ , відносно системи  $Cx_1y_1z_1$ , який буде відомим, якщо будуть відомі кути Ейлера  $j, y, q$  як функції часу.

Оскільки теорема про зміну кінетичного моменту системи відносно центра мас  $C$  подібна до аналогічної теореми про зміну кінетичного моменту відносно нерухомої точки, то для руху твердого тіла відносно центра мас матимемо ті самі динамічні рівняння Ейлера, що і для тіла з нерухомою точкою:

$$\begin{cases} J_x \frac{dw_x}{dt} + (J_z - J_y)w_y w_z = \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k^{(e)}); \\ J_y \frac{dw_y}{dt} + (J_x - J_z)w_x w_y = \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k^{(e)}); \\ J_z \frac{dw_z}{dt} + (J_y - J_x)w_x w_y = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^{(e)}). \end{cases} \quad (203)$$

Системи рівнянь (202) і (203) являють собою систему шести диференціальних рівнянь руху для вільного твердого тіла. Оскільки невідомими є три абсолютні координати центра мас  $x_{1c}, y_{1c}, z_{1c}$  і три кути Ейлера  $j, y, q$ , то до системи рівнянь (202) і (203) необхідно приєднати ще кінематичні рівняння Ейлера (201):

$$\begin{aligned} w_x &= y \cos q \sin j + q \cos j, \\ w_y &= y \sin q \cos j - q \sin j, \\ w_z &= y \cos q + j \end{aligned}$$

Якщо проекції головного моменту зовнішніх сил  $\sum F_{kx_1}^{(e)}, \sum F_{ky_1}^{(e)}, \sum F_{kz_1}^{(e)}$  не залежать від кутів Ейлера, а проекції головного моменту  $\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k^{(e)}), \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k^{(e)}), \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^{(e)})$  не залежать від координат центра мас, то в цьому випадку рівняння (202) і (203) можна інтегрувати незалежно одне від одного; координати  $x_{1c}, y_{1c}, z_{1c}$  будуть функціями часу і шести довільних сталих інтегрування; а  $j, y, q$  – теж будуть функціями часу і шести інших (незалежних від перших) довільних сталих інтегрування.

У більш складних випадках руху, наприклад у випадку руху тіла в середовищі, яке чинить опір, головний момент  $\bar{M}_c^{(e)}$  буде залежати від координат  $x_{1c}, y_{1c}, z_{1c}$ , а сила опору, яка діє на тіло буде залежати від положення тіла, тобто від кутів Ейлера  $j, y, q$ . У цьому випадку рівняння (202) і (203) утворюють сумісну систему. У загальному випадку інтегрування системи рівнянь (202) і (203) інтеграли матимуть 12 сталих інтегрування.

## 12.11 Елементи теорії гіроскопів

### 12.11.1 Поняття про гіроскоп

*Гіроскопом* називається симетричне тверде тіло, яке обертається з великою кутовою швидкістю навколо своєї осі симетрії та одночасно здійснює рух навколо нерухомої точки, яка лежить на осі симетрії.

Найпростішим гіроскопом є дзига (рис.107). Дзига обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі  $Oz$ , яка змінює своє положення у просторі, оскільки точка  $O$  є нерухомою, а кінець осі  $Oz$  незакріплений.

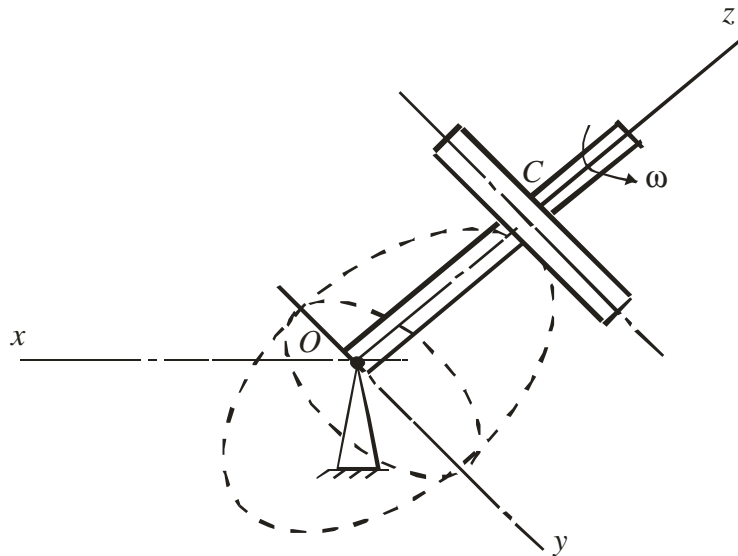


Рисунок 107

Вісь  $Oz$  гіроскопа називається віссю власного обертання гіроскопа. Еліпсоїд інерції гіроскопа для нерухомої точки  $C$  є еліпсоїдом обертання (на рис.107 еліпсоїд інерції гіроскопа зображений штриховими лініями). Осі гіроскопа  $Ox$  і  $Oy$ , що лежать в екваторіальній площині еліпсоїда інерції, є головними осями інерції.

Моменти інерції гіроскопа відносно цих осей однакові, тобто  $J_x = J_y$ . Вісь гіроскопа  $Oz$  є головною центральною віссю інерції гіроскопа.

У гіроскопах, які застосовуються в техніці, вільне обертання власної осі  $Oz$  і закріплення її у нерухомій точці  $O$  забезпечується кріпленням гіроскопа в рамках (кільцях) карданового підвісу (рис. 108), що дає змогу осі власного обертання  $Oz$  займати довільне положення у просторі.

Такий гіроскоп має три ступеня вільності: він може здійснити три незалежних обертання навколо осей  $Ox, Oz_1, Oy$ , які перетинаються в нерухомій точці  $O$ .

Якщо центр мас гіроскопа збігається з нерухомою точкою власної осі обертання  $O$ , то гіроскоп називається астатичним або зрівноваженим, у протилежному разі – важким.

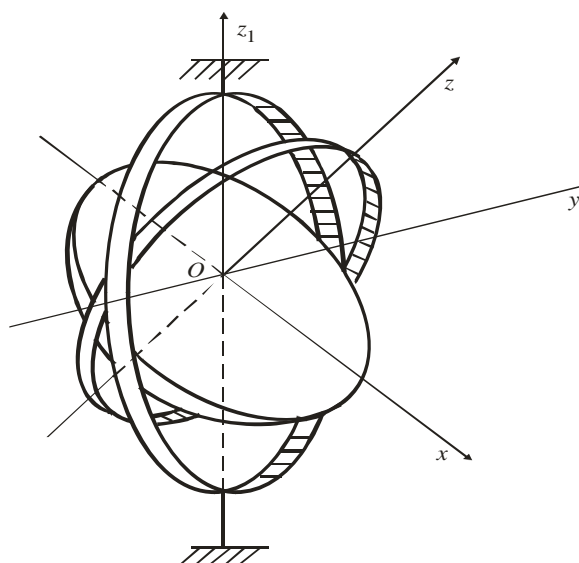


Рисунок 108

Кутова швидкість обертання сучасних гіроскопів навколо власної осі  $Oz$  досягає  $6000 \frac{1}{c}$  (порядку  $60000 \text{ об/хв}$ ).

### 12.11.2 Основні припущення наближеної теорії гіроскопів

Вивчення руху гіроскопа зводиться до вивчення руху власної осі обертання гіроскопа. Обертальний рух гіроскопа навколо цієї осі, як правило, відомий і кутова швидкість цього обертання підтримується сталою. Рух власної осі обертання гіроскопа можна визначити за допомогою вектора кінетичного моменту гіроскопа відносно нерухомої точки, тобто вектора  $\bar{K}_o$ .

Оскільки гіроскоп є твердим тілом, що обертається навколо нерухомої точки, тобто тілом, що здійснює сферичний рух, то на підставі формули кінематики миттєва кутова швидкість гіроскопа (рис.109)

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3,$$

де  $\bar{w}_2$  – вектор кутової швидкості обертання гіроскопа навколо осі  $Oz_1$ ;  
 $\bar{w}_1$  – вектор кутової швидкості обертання гіроскопа навколо осі  $Oz$ ;  
 $\bar{w}_3$  – вектор кутової швидкості обертання гіроскопа навколо осі  $OK$  (збігається з лінією вузлів).

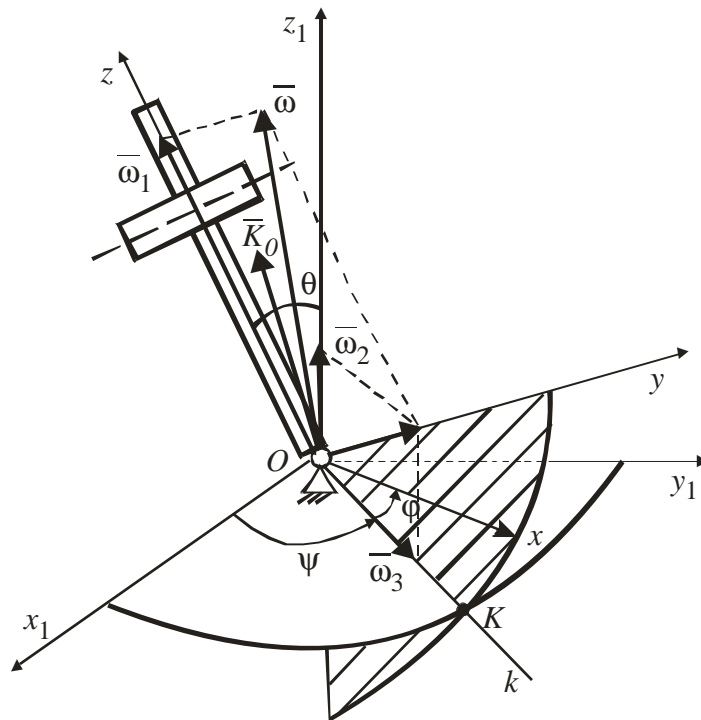


Рисунок 109

Оскільки кутова швидкість  $w_2$  (кутова швидкість прецесії) мала порівняно з кутовою швидкістю власного обертання гіроскопа  $w_1$  (у сучасних гіроскопах  $w_1 = 6000 \frac{1}{c}$  і  $w_2 \leq 0,01 \frac{1}{c}$ ), а зміна кута нутації  $q$ , як правило, незначна (у випадку регулярної прецесії взагалі дорівнює нулю), то у першому наближенні можна взяти  $\bar{w} = \bar{w}_1$ . Беручи до уваги формули (194) і те, що осі  $Ox, Oy$  і  $Oz$  – головні осі інерції гіроскопа, матимемо проєкції вектора  $\bar{K}_o$  на осі системи координат  $Ox_1 y_1 z_1$ :



$$K_x = J_x \omega_x; \quad K_y = J_y \omega_y; \quad K_z = J_z \omega_z.$$

Якщо вектор  $\bar{\omega}$  вважати спрямованим вздовж осі власного обертання гіроскопа  $Oz$ , то  $\omega_x = \omega_y \approx 0$  і величина вектора  $\bar{K}_o$  буде

$$K_0 = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2} = K_z = J_z \omega_z = J_z \omega_1. \quad (204)$$

Таким чином, для гіроскопа, який з великою кутовою швидкістю обертається навколо власної осі, можна вважати, що вектор кінетичного моменту відносно нерухомої точки гіроскопа  $\bar{K}_o$  за величиною дорівнює власному кінетичному моменту гіроскопа, тобто  $J_z \omega_1$ , і напрямлений вздовж осі власного обертання гіроскопа:

$$\bar{K}_o = J_z \bar{\omega}_1. \quad (205)$$

Проте, щоб зберегти геометрію руху гіроскопа, необхідно також брати до уваги кутову швидкість  $\bar{\omega}_2$ .

Теорія, що ґрунтується на розглянутих припущеннях, називається *наближеною теорією гіроскопів*.

### ***12.11.3 Рух вільного гіроскопа, закріпленого в центрі тяжіння. Регулярна прецесія***

Прикладом використання наближеної теорії гіроскопів може бути рух вільного гіроскопа, закріпленого в центрі тяжіння. Нехай на цей гіроскоп не діють ніякі сили, крім сили ваги. У цьому випадку  $\sum \bar{M}_o(\bar{F}_k^{(e)}) = 0$  і теорема про зміну кінетичного моменту (76) набуває вигляду:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = 0, \quad (206)$$

звідки  $\bar{K}_0 = const$ .

Таким чином, вектор  $\bar{K}_0$  має сталий напрямок в інерціальній системі відліку. Користуючись цією обставиною для спрощення подальших розрахунків спрямуємо нерухому вісь  $Oz_1$  вздовж вектора  $\bar{K}_0$  (рис.110). Дві інші осі, що не зображені на рисунку 110, можна спрямувати довільно.

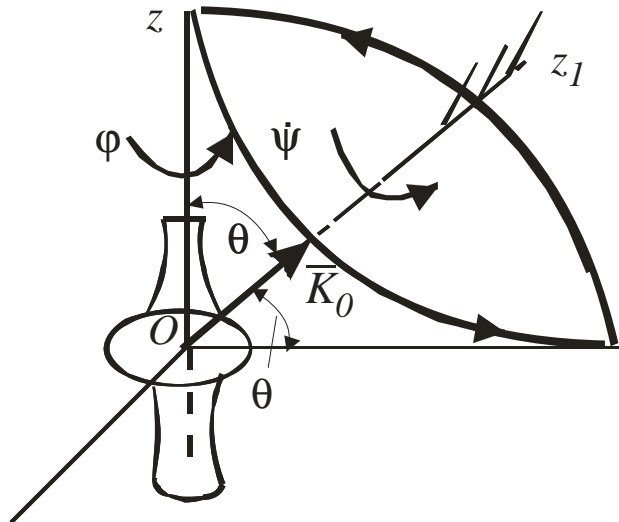


Рисунок 110

Рухомі осі, пов'язані з гіроскопом, проведемо так, щоб вісь  $Oz$  була напрямлена вздовж осі симетрії гіроскопа. Тоді  $J_x = J_y$  і останнє рівняння із рівностей (200), (так, як в цьому випадку  $M_z = 0$ ) набуде вигляду:

$$\frac{dw_z}{dt} = 0, \quad (207)$$

звідки  $w_z = const$ .

Аналогічно з формули (194) отримаємо

$$K_z = J_z w = const.$$

Але водночас, як видно на рисунку 110,

$$K_z = K_0 \cos q, \text{ де } q = \angle z_1 oz - \text{кут нутації.}$$

Так як згідно з (206),  $\bar{K}_0 = const$ , то звідси маємо що і  $\cos q = const$  або

$$q = const = q_0, \quad (208)$$

де  $q_0$  – початкове значення кута нутації.

Домножимо обидві частини першого з рівнянь (200) на  $w_x$ , а другого – на  $w_y$ . Додаючи отримані вирази одне до одного і враховуючи, що

$$M_x = M_y = 0, \text{ а } J_x = J_y,$$

отримаємо

$$J_x \left( w_x \frac{dw_x}{dt} + w_y \frac{dw_y}{dt} \right) = 0.$$

Звідки, інтегруючи, а потім, з урахуванням спільного множника (на нього треба поділити обидві частини останньої рівності), знаходимо:

$$w_x^2 + w_y^2 = const.$$

Замінімо  $w_x$  і  $w_y$  їх значеннями з кінематичних рівнянь Ейлера (201). Враховуючи, що  $q = const$  і  $\dot{q} = 0$ , отримаємо:

$$w_x = \dot{\psi} \sin q \sin j ; w_y = \dot{\psi} \sin q \cos j ,$$

звідси

$$w_x^2 + w_y^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 q .$$

Але, згідно з доведеним, ліва частина цього рівняння і  $\sin q$  величини сталі. Таким чином

$$\dot{\psi} = const = \dot{\psi}_0. \quad (209)$$

І нарешті, останнє з кінематичних рівнянь (201) Ейлера дає

$$w_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \varphi .$$

Тут, як ми вже знайшли,  $w_z$ ,  $\dot{\varphi}$  і  $\cos \varphi$  – сталі.

Таким чином,

$$\dot{\psi} = \text{const} = \dot{\psi}_0 . \quad (210)$$

За будь-яких початкових умов гіроскоп, що розглядається, обертається навколо своєї осі симетрії зі сталою кутовою швидкістю  $\dot{\psi}_0$ , а сама ця вісь обертається, у свою чергу, навколо нерухомої осі  $Oz_1$  зі сталою кутовою швидкістю  $\dot{\varphi}$ , описуючи конічну поверхню зі сталим кутом при вершині конуса  $2\theta$  (див.рис.110).

Такий рух гіроскопа називається регулярною прецесією.

## 12.12 Методика і приклади розв'язання задач

Задачі з визначення руху осі гіроскопа за допомогою наближеної теорії доцільно розв'язувати у такій послідовності:

- 1) встановити систему відліку;
- 2) зобразити на рисунку всі зовнішні сили, прикладені до гіроскопа;
- 3) визначити головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки гіроскопа;
- 4) визначити власний кінетичний момент гіроскопа;
- 5) застосувати теорему Резаля і визначити рух осі власного обертання гіроскопа.

Задачі з визначання гіроскопічного тиску (з визначення гіроскопічних реакцій опор) доцільно розв'язувати у такій послідовності:

- 1) зобразити на рисунку вектор кутової швидкості  $\bar{\omega}_1$  власного обертання гіроскопа і власний кінетичний момент  $\bar{K}_o$  гіроскопа;
- 2) знайти гіроскопічний момент  $\bar{M}_{z_{ip}}$  (головний момент зовнішніх сил  $\bar{M}_o^{(e)}$ );

3) визначити напрям і величину гіроскопічного тиску на опори (гіроскопічні реакції).

**Приклад 50.** У дробарці (рис.111) бігуни обертаються навколо вертикальної осі  $Oz_1$  зі сталою кутовою швидкістю  $\bar{\omega}_2$ . Сила ваги кожного бігуна  $\bar{P}$ , радіус  $R$  і радіус інерції відносно осі  $Oz_1$  власного обертання  $r$  - відомі величини. Визначити силу тиску кожного бігуна на дно чаші і тиск бігунів на шарнір  $O$ , застосовуючи наближену теорію гіроскопів.

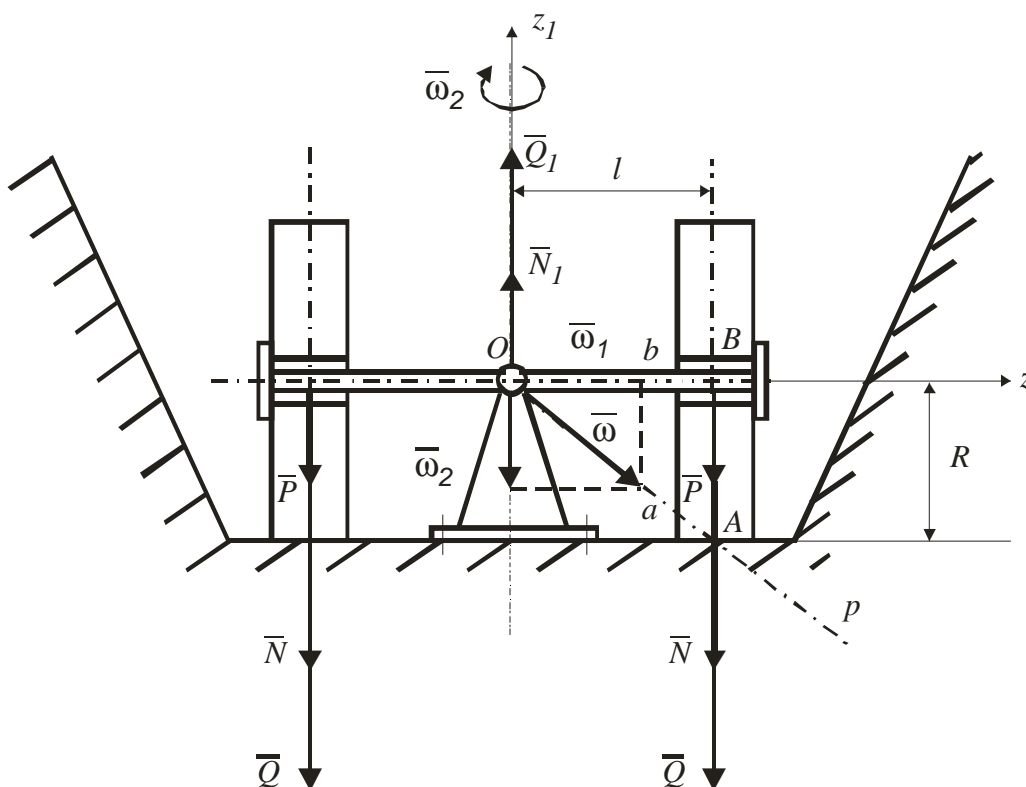


Рисунок 111

#### Розв'язання

Розглядаємо бігун як гіроскоп з віссю власного обертання  $Oz$ , що здійснює прецесійний рух навколо осі  $Oz_1$ . Сила тиску  $\bar{Q}$  бігуна на дно чаші складається із сили ваги бігуна і сили гіроскопічного тиску  $\bar{N}$ :  $\bar{Q} = \bar{P} + \bar{N}$ .

Припускаючи, що точка A бігуна нерухома (рис.111), визначаємо положення миттєвої осі обертання бігуна. Вісь  $Op$  є миттєвою віссю

обертання бігуна. За віссю  $Op$  напрямлена миттєва кутова швидкість бігуна  $\bar{w}$ , яка складається із кутової швидкості прецесії  $\bar{w}_2$  і кутової швидкості власного обертання бігуна  $\bar{w}_1$ .

З подібних трикутників  $\Delta Oab$  і  $\Delta OAB$  випливає співвідношення

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{l}{R},$$

звідки

$$w_1 = \frac{w_2 l}{R}.$$

Відповідно до правила Жуковського бігун тисне на дно чаші із силою  $\bar{N}$ , а на шарнір  $O$  – із силою  $\bar{N}_1$ . Сили  $\bar{N}$  і  $\bar{N}_1$  мають однакове значення, але протилежний напрямок.

Величина сил  $\bar{N}$  і  $\bar{N}_1$  становить:

$$N = N_1 = \frac{J_z w_2 w_1}{l} = \frac{Pr^2 w_2^2 l}{g l R} = \frac{Pr^2 w_2^2}{g R},$$

де

$$J_z = \frac{Pr^2}{g}.$$

Величина сили тиску бігуна на дно чаші

$$Q = P + \frac{Pr^2 w_2^2}{gR} = P \left( 1 + \frac{Pr^2 w_2^2}{gR} \right).$$

Величина тиску на шарнір  $O$  обох бігунів

$$Q_1 = 2N_1 = 2N = \frac{2Pr^2 w_2^2}{gR}.$$

Якщо бігун є однорідним диском, то  $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$  і величини тиску бігуна

на дно чаші й обох бігунів на шарнір  $O$  будуть відповідно такими:

$$Q = P\left(1 + \frac{Rw_2^2}{2g}\right); Q_1 = \frac{PRw_2^2}{g}.$$

З останніх формул випливає, що для одержання великого тиску на дно чаші необхідно застосовувати бігуни великого радіуса, оскільки величина тиску пропорційна радіусу бігуна  $R$ .

**Приклад 51.** Дзита (рис 112), що має форму диска діаметром 30 см, обертається з кутовою швидкістю 80 рад/с навколо своєї осі симетрії. Диск насаджений на вісь, довжина якої дорівнює 20 см. Ця вісь є віссю симетрії дзиту. Визначити кутову швидкість регулярної прецесії дзиту, якщо її власний кінетичний момент дорівнює  $J_z w_1$ .

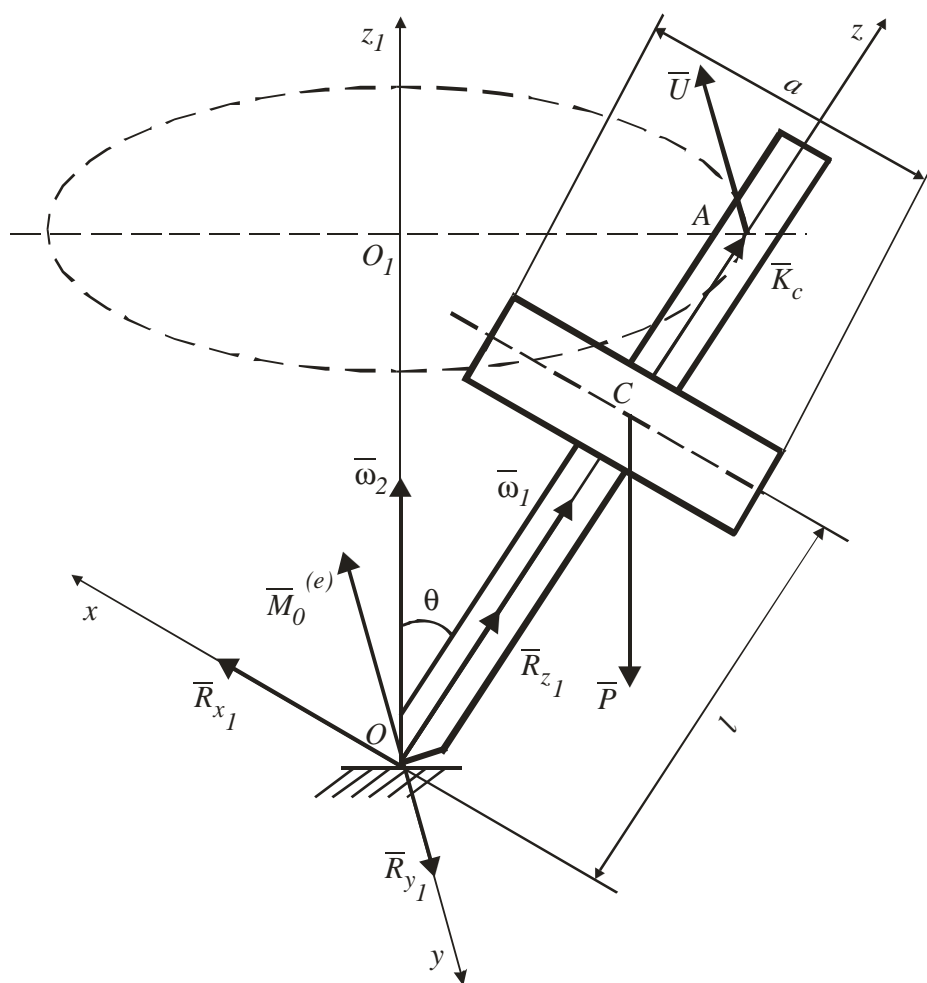


Рисунок 112

### Розв'язання

Прикладаємо до дзиги всі зовнішні сили: силу  $\bar{P}$  – силу ваги дзиги і реакції нерухомої точки  $O$  дзиги –  $\bar{R}_x, \bar{R}_y$  і  $\bar{R}_z$ .

Визначаємо головний момент зовнішніх сил відносно точки  $O$ :

$$M_o^{(e)} = Pl \sin q .$$

Вектор  $\bar{M}_o^{(e)}$  напрямлений уздовж осі  $Oy$ , оскільки вектор  $\bar{P}$  і точка  $O$  лежать у площині  $xOz$ .

Відповідно до наближеної теорії гіроскопів вектор кінетичного моменту дзиги  $\bar{K}_o$  лежить на осі  $Oz$  і за величиною становить:  $K_o = J_z w_1$ . Зображуємо на рисунку 112 вектор  $\bar{K}_o$  вздовж осі  $Oz$  і кінець цього вектора позначаємо літерою  $A$ .

На підставі теореми Резаля вектор швидкості  $\bar{U}$  точки  $A$  буде паралельним вектору  $\bar{M}_o^{(e)}$ , тобто вектор  $\bar{U}$  – перпендикулярний до площини  $xOz$ . За величиною вектор  $\bar{U}$

$$U = M_o^e = Pl \sin q .$$

При регулярній прецесії власна вісь обертання дзиги  $Oz$  описує бічну поверхню кругового конуса, оскільки обертається навколо вертикальної осі  $Oz_1$  з кутовою швидкістю прецесії  $w_2$ . Отже, швидкість точки  $A$

$$U = w_2 O_1 A = OA \sin q \cdot w_2 = K_o w_2 \sin q = J_{z_1} w_2 w_1 \sin q .$$

Прирівнюючи значення швидкості  $U$ , отримаємо:

$$w_2 = \frac{Pl}{J_z w_1} = \frac{2mgl}{m \left( \frac{d}{2} \right)^2 w_1} = \frac{8gl}{d^2 w_1} = \frac{8 \cdot 981 \cdot 20}{30^2 \cdot 80} = 2,18 \text{ рад/с} .$$



## 13 ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ДИНАМІЧНІ РЕАКЦІЇ ПРИ ОБЕРТАННІ ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

Розглянуті в попередніх розділах методи розв'язання задач ґрунтувалися на законах Ньютона або загальних теоремах динаміки, які можна вважати наслідками із цих законів. Наряду з цим існують інші загальні положення (так звані принципи механіки), на основі яких можна одержати закони руху або умови рівноваги матеріальних об'єктів, знайти більш ефективні методи розв'язання задач динаміки. Одним із них є принцип Даламбера (метод кінетостатики), який встановлює єдиний підхід до руху будь-якої механічної системи незалежно від характеру накладених на цей рух умов. При цьому динамічним диференціальним рівнянням руху надається вигляд статичних рівнянь рівноваги.

Сучасний вираз принципу Даламбера не відрізняється за змістом від рівнянь руху матеріальної точки, але для багатьох задач він більш зручний.

### 13.1 Принцип Даламбера для матеріальної точки

Принцип Даламбера для вільної матеріальної точки еквівалентний основному закону динаміки. Для невольної точки він еквівалентний основному закону разом з аксіомою в'язей.

Розглянемо рух відносно інерціальної системи відліку невольної матеріальної точки  $M$  масою  $m$  під дією активних сил, рівнодіюча яких дорівнює  $\bar{F}$  (рис. 113). Позначивши через  $\bar{N}$  силу реакції, з якою в'язь обмежує рух точки  $M$ , запишемо основне рівняння динаміки точки:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}.$$

Перенесемо член  $m\bar{a}$  у праву частину рівняння:

$$\bar{F} + \bar{R} - m\bar{a} = 0,$$

і введемо до розгляду вектор

$$\bar{F} = -m\bar{a}. \quad (211)$$

Який має розмірність сили. Цей вектор називається *даламберовою силою інерції*, або просто *силою інерції* матеріальної точки. Отже, сила інерції – це вектор, який дорівнює добутку маси точки на її прискорення та напрямлений протилежно прискоренню точки.

Тоді основне рівняння динаміки запишеться у вигляді

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{F} = 0. \quad (212)$$

Сили  $\bar{F}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{F}$  створюють збіжну систему сил і рівняння (212) виражає умови рівноваги цієї системи:

$$(\bar{F}, \bar{R}, \bar{F}) \sim 0, \quad (213)$$

У кожен момент руху матеріальної точки діючі на неї активні сили, реакції накладених на точку в'язей та умовно прикладена до точки сила інерції створюють зрівноважену систему сил.

Під умовним прикладанням сили інерції розуміється те, що на рухому точку сила інерції фактично не діє, до неї прикладені сили  $\bar{F}$  і  $\bar{R}$ , під дією яких вона рухається з прискоренням. Тому можна говорити тільки про умовну рівновагу прикладених до неї сил, і рівняння (212) не є умовою рівноваги.

Згідно з поширеною серед вчених-механіків точкою зору сила інерції вважається прикладеною не до рухомої точки, а по частинах до тих тіл і в'язей, які надають розглядуваній точці прискорення (див. рис. 113).

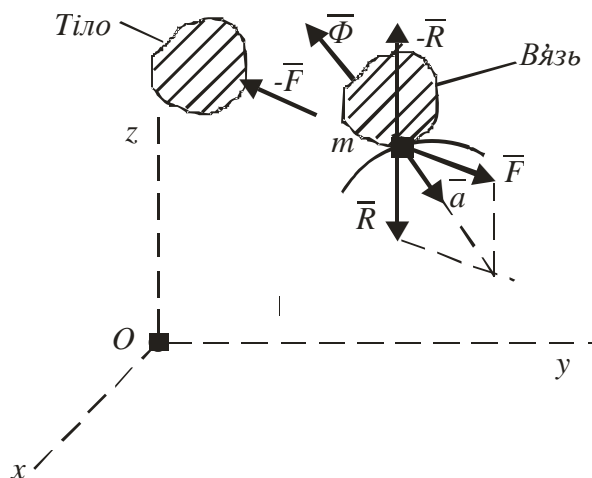


Рисунок 113

Справедливість цієї точки зору підтверджується дослідом при спробі підняти з опорної поверхні тіло вагою  $\bar{P}$  за допомогою прив'язаної до цього тіла нитки (рис. 114,а), здатної витримати навантаження такої сили.

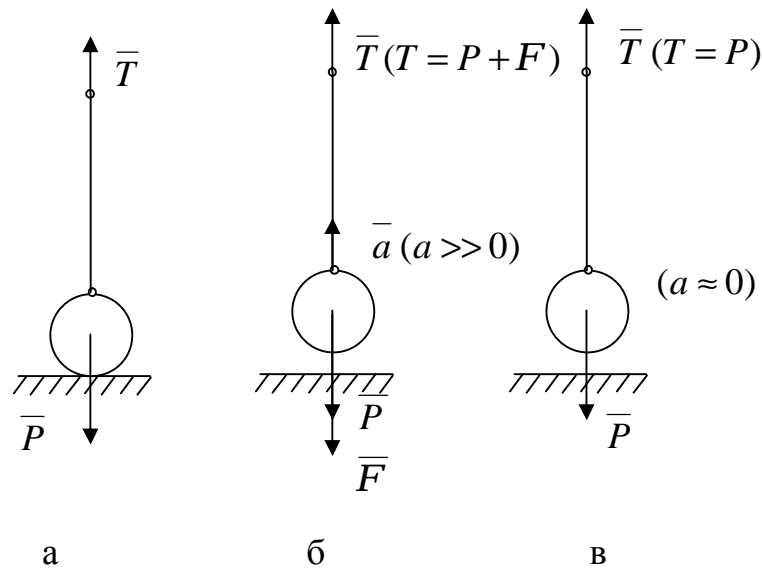


Рисунок 114

Якщо, смикаючи за нитку, намагатися надати тілу певне прискорення  $\bar{a}$  (рис. 114,б), то нитка розірветься.

При статичному прикладенні сили, коли тіло підіймають з невеликим, близьким до нуля, прискоренням (рис. 114, в), нитка витримає навантаження і не розірветься.

Розрив нитки при динамічному підйомі пояснюється тим, що в цьому випадку згідно з принципом Даламбера (212) сила натягу  $\bar{T}$  нитки буде складатись із сили ваги та сили інерції:

$$T = P + F .$$

З рівняння (212) у проекціях на координатні осі одержуємо три умови рівноваги сил:

$$\begin{cases} F_x + R_x + \Phi_x = 0; \\ F_y + R_y + \Phi_y = 0; \\ F_z + R_z + \Phi_z = 0. \end{cases} \quad (214)$$

У рівнянні (214) сила інерції  $\bar{F}$  розкладена на складові вздовж декартових осей координат так, що

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z.$$

Силу інерції можна також розкласти на дотичну  $\bar{F}_t$  та нормальну (відцентрову)  $\bar{F}_n$  складові:

$$\bar{F} = \bar{F}_t + \bar{F}_n; \tag{215}$$

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t; \quad \bar{F}_n = -m\bar{a}_n,$$

де  $\bar{a}_t, \bar{a}_n$  – відповідно дотичне та нормальне прискорення точки.

### 13.2 Принцип Даламбера для системи матеріальних точок

Розглянемо систему  $N$  матеріальних точок. До кожної точки системи у загальному випадку прикладені рівнодіюча  $\bar{F}_k$  активних сил і рівнодіюча  $\bar{R}_k$  реакцій в'язей (які разом складають зовнішні  $\bar{F}_n^e$  та внутрішні  $\bar{F}_k^e$  сили). Під дією цих сил кожна точка рухається відносно інерціальної системи відліку з прискоренням  $\bar{a}_k$ . Вводячи для кожної точки силу інерції  $\bar{F}_k = -m_k \bar{a}_k$ , складемо рівняння основного закону динаміки у вигляді (212)

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \Phi_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N.), \tag{216}$$

що відповідає умовам зрівноваженості цієї системи сил:

$$\{\bar{F}_k, \bar{R}_k, \bar{F}_k\} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N.).$$

Сукупність  $N$  рівнянь (216) виражає принцип Даламбера для

механічної системи матеріальних точок: якщо в кожен момент руху механічної системи до діючих на точки системи активних сил (зовнішніх і внутрішніх) і реакцій в'язей (зовнішніх і внутрішніх) умовно прикласти відповідні сили інерції, то одержана система сил буде зрівноваженою, і до неї можна застосувати всі рівняння статyki.

Принцип Даламбера для системи за своїм змістом не відрізняється від рівнянь руху точок системи.

Подамо прикладені до кожної точки системи рівнодіючі активних сил і реакцій в'язей розкладеними на внутрішню  $\bar{F}_k^i$  і зовнішню  $\bar{F}_k^e$  сили:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}.$$

Тоді принцип Даламбера для системи можна подати в іншій формі:

$$\bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} + \bar{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (217)$$

Із принципу Даламбера для системи у формі (216) або (217) можна одержати слідства у вигляді шести умов рівноваги для сил, які діють на точки системи, і сил інерції.

Для кожної матеріальної точки сума моментів цих сил відносно будь-якого центра також дорівнює нулю, тобто

$$\bar{M}_0(\bar{F}_k) + \bar{M}_0(\bar{R}_k) + \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (218)$$

або

$$\bar{M}_0(\bar{F}_k^e) + \bar{M}_0(\bar{F}_k^i) + \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (219)$$

Додаючи всі  $N$  рівнянь системи (216) та  $N$  рівнянь системи (218), одержимо:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k = 0. \quad (220)$$

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0.$$

Проводячи подібне додавання рівнянь системи (217) і (219), матимемо:

$$\sum_{k=1}^N \overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^N \overline{F}_k^i + \sum_{k=1}^N \overline{F}_k = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N \overline{M}_0(\overline{F}_k^e) + \sum_{k=1}^N \overline{M}_0(\overline{F}_k^i) + \sum_{k=1}^N \overline{M}_0(\overline{F}_k) = 0.$$

Але за властивостями внутрішніх сил системи їх головний вектор  $\sum_{k=1}^N \overline{F}_k^i = 0$  і головний момент  $\sum_{k=1}^N \overline{M}_0(\overline{F}_k^i) = 0$ , тому

$$\sum_{k=1}^N \overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^N \overline{F}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N \overline{M}_0(\overline{F}_k^e) + \sum_{k=1}^N \overline{M}_0(\overline{F}_k) = 0, \quad (221)$$

тобто головний вектор і головний момент відносно будь-якого центра прикладених до системи зовнішніх сил та сил інерції всіх її точок дорівнюють нулю.

Проеціюючи рівняння (221) на осі координат, одержимо аналітичні залежності:

$$\sum_{k=1}^N \overline{F}_{kx}^e + \sum_{k=1}^N \overline{F}_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^N M_x(\overline{F}_k^e) + \sum_{k=1}^N M_x(\overline{F}_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^N \overline{F}_{ky}^e + \sum_{k=1}^N \overline{F}_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^N M_y(\overline{F}_k^e) + \sum_{k=1}^N M_y(\overline{F}_k) = 0 \quad (222)$$

$$\sum_{k=1}^N \overline{F}_{kz}^e + \sum_{k=1}^N \overline{F}_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^N M_z(\overline{F}_k^e) + \sum_{k=1}^N M_z(\overline{F}_k) = 0$$

Особливістю умов рівноваги сил у формі рівнянь (221) і (222) є відсутність у них внутрішніх сил, що робить їх особливо зручними при рішенні багатьох задач динаміки системи.

### 13.3 Головний вектор і головний момент сил інерції

При практичному використанні рівнянь (220), (221) частіш за все немає потреби прикладати сили інерції до кожної точки системи;

достатньо застосувати готові вирази головного вектора  $\overline{F} = \sum_{k=1}^N \overline{F}_k$  та

головного моменту  $\overline{M}_0^F = \sum \overline{M}_0(\overline{F}_k)$  сил інерції механічної системи.

Із першого рівняння (221) випливає, що головний вектор сил інерції

$$\overline{F} = \sum_{k=1}^N \overline{F}_k = - \sum_{k=1}^N \overline{F}_k^e. \quad (223)$$

Враховуючи, що згідно з теоремою про рух центру мас системи головний вектор зовнішніх сил системи дорівнює

$$\sum_{k=1}^N \overline{F}_k^e = M \cdot \overline{a}_c,$$

де  $M$  – маса системи,

$\overline{a}_c$  – прискорення центра мас, одержимо

$$\overline{F} = -M \overline{a}_c, \quad (224)$$

тобто *головний вектор сил інерції механічної системи дорівнює добутку маси системи сил та прискорення центра мас і спрямований протилежно напрямку цього прискорення.*

Із другого рівняння (221) знаходимо, що головний момент сил інерції відносно довільного центра  $O$  дорівнює

$$\overline{M}_0^F = \sum_{k=1}^N \overline{M}_0(\overline{F}_k) = - \sum_{k=1}^N \overline{M}_0(\overline{F}_k^e). \quad (225)$$

Але за теоремою про зміну кінетичного моменту маємо

$$\sum_{k=1}^N \overline{M}_0(\overline{F}_k^e) = \frac{d\overline{k}_0}{dt},$$

і тому

$$\overline{M}_0^F = -\frac{d\overline{k}_0}{dt} \quad (226)$$

і

$$M_z^F = -\frac{dk_z}{dt}, \quad (227)$$

тобто головний момент сил інерції системи відносно деякого центра  $O$  чи осі  $z$  дорівнює взятій з від'ємним знаком похідній за часом від кінетичного моменту системи відносно того ж центра або тієї ж осі.

У випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої осі  $Oz$ , як відомо,

$$K_z = J_z \omega.$$

Підставляючи це значення  $K_z$  у рівняння (227), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^N M_z(\overline{\Phi}_k) = -\frac{dK_z}{dt} = -J_z \frac{d\omega}{dt} = -J_z \mathbf{e},$$

або

$$L_z^{(\Phi)} = \sum_{k=1}^N M_z(\overline{\Phi}_k) = -J_z \mathbf{e}. \quad (228)$$

За формулою (228) обчислюють момент сил інерції відносно осі обертання при обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі. Цей момент створюють дотичні сили інерції, тому що нормальні сили інерції для кожної точки тіла перетинають вісь обертання і моменту не створюють.



### 13.4 Сили інерції твердого тіла в окремих випадках його руху

**Поступальний рух.** Якщо тверде тіло рухається поступально, то прискорення його точок однакові. Сили інерції цих точок становлять систему паралельних сил, спрямованих в один бік. Така система сил приводиться до рівнодіючої сили  $\bar{\Phi}^*$ , що дорівнює головному вектору, тобто

$$\bar{\Phi}^* = \bar{\Phi} = -M\bar{a}_C. \quad (229)$$

Лінія дії рівнодіючої сили інерції в цьому випадку проходить через центр мас.

**Обертання навколо нерухомої осі.** Якщо вибрати за центр приведення сил інерції точку  $O$  (рис.115) на осі обертання  $Oz$ , то в цій точці одержимо головний вектор і головний момент сил інерції:

$$\bar{F} = -M\bar{a}_c; \quad \bar{M}_0^F = \frac{-d\bar{K}_0}{dt}.$$

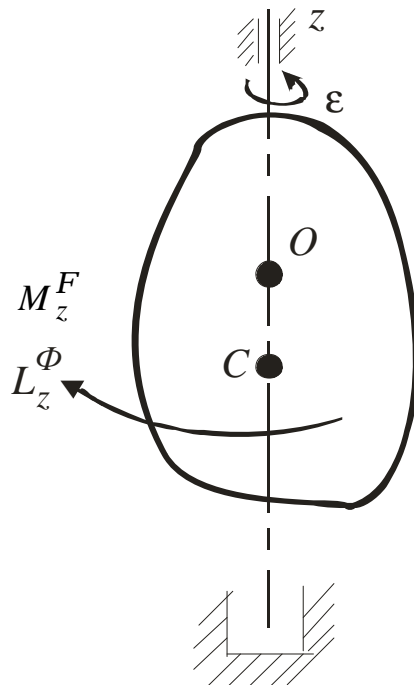


Рисунок 115

Якщо центр мас перебуває на осі обертання, то  $\bar{\Phi} = 0$ . Проекції головного моменту сил інерції на нерухомі осі координат у загальному випадку можна обчислити за формулами:

$$\begin{cases} M_x^F = \frac{-dK_x}{dt} \neq 0; \\ M_y^F = \frac{-dK_y}{dt} \neq 0; \\ M_z^F = \frac{-dK_z}{dt} = -J_z \mathbf{e}. \end{cases} \quad (230)$$

Моменти сил інерції  $M_x^F$  й  $M_y^F$  дорівнюють нулю, якщо вісь  $Oz$  є головною віссю інерції для точки  $O$ .

**Плоский рух.** Вибравши за центр приведення сил інерції центр мас, одержимо в цій точки головний вектор і головний момент сил інерції. Для головного вектора сил інерції маємо

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C.$$

Для головного моменту сил інерції щодо центра мас  $C$ , який є точкою, що рухається, при плоскому русі тіла, одержимо формули, аналогічні формулі (226), виведеної для нерухомої точки  $O$ .

Згідно зі слідством із принципу Даламбера (220), головний момент сил інерції щодо центра мас задовольняє умові

$$\sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{F}_k^e) + \bar{M}_C^F = 0.$$

З іншого боку, з теорем про зміну кінетичного моменту щодо центра мас для абсолютного й відносного рухів маємо:

$$d\bar{K}_C / dt = \sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)}), \quad d\bar{K}_C^{(r)} / dt = \sum_{k=1}^N \bar{M}_C(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Із цих співвідношень витікає, що

$$\overline{M}_c^F = -\frac{d\overline{K}_c}{dt} = -\frac{d\overline{K}_c^{(r)}}{dt}.$$

Проекції  $M_{cx}^F$ ,  $M_{cy}^F$  на осі координат з початком у центрі мас відповідно будуть дорівнювати:

$$M_x^F = -dK_{Cx}^{(r)} \neq 0;$$

$$M_y^F = \frac{-dK_{Cy}^{(F)}}{dt} \neq 0;$$

$$M_z^F = \frac{-dK_{Cz}^{(r)}}{dt} = -J_z \mathbf{e}.$$

де вісь  $Cz$  перпендикулярна до площини, паралельно якій здійснюють рух точки тіла.

Моменти сил інерції  $M_{cx}^F$  й  $M_{cy}^F$  обчислюються так само, як і при обертанні тіла навколо нерухомої осі. Вони дорівнюють нулю, якщо вісь  $Cz$  є головною віссю інерції для точки  $C$ . Це, зокрема, виконується, якщо тіло має площину симетрії, що проходить через центр мас і паралельна площині руху тіла.

### **13.5 Динамічні реакції підшипників при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі**

Із раніше розглянутого прикладу (див. підрозд. 13.1) про розривання зв'язаної з тілом нитки при прискореному його підйманні з опорної поверхні можна зробити висновок, що реакції в'язей під час динамічного навантаження тіла можуть значно відрізнятись від відповідних реакцій при статичному навантаженні. Отже повні реакції в'язей рухомого тіла можна розподілити на дві складові: статичні та динамічні.

До статичних реакцій відносять ту частину повних реакцій, які врівноважують прикладені до тіла активні сили.

Динамічні реакції – це частини повних реакцій, які врівноважують сили інерції точок тіла.

Визначимо динамічні реакції тіла, що обертається навколо осі, закріпленої в під'ятнику А і в підшипнику В (рис. 116) під дією заданих сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N$  тіло в деякий момент часу має кутове прискорення  $\epsilon$  та кутову швидкість  $\omega$ .

Зв'яжемо з тілом осі координат  $A_{xyz}$  так, щоб вони обертались разом з тілом; тоді координати центра мас тіла та моменти інерції у відношенні до цих осей будуть величинами постійними. Замінімо дію в'язей їх реакціями  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$  і додаємо до всіх діючих на тіло активних сил і реакцій в'язей сили інерції точок тіла. Виділимо точку  $M_k$ , яка знаходиться на відстані  $\bar{r}_k$  від осі обертання, має координати  $x_k, y_k, z_k$  та масу  $m_k$ . Ця сила лежить в площині, перпендикулярній осі обертання, і розкладається на дотичну  $\bar{F}_{kt}$  та нормальну (відцентрову)  $\bar{F}_{kn}$  сили інерції (див. рис. 116), величини яких визначаються залежностями:

$$F_{kt} = m_k r_k \epsilon, F_{kn} = m_k r_k \omega^2 \quad (231)$$

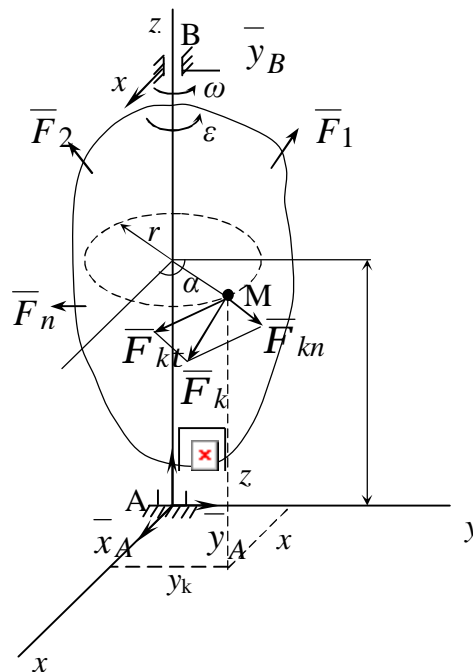


Рисунок 116

Складемо, згідно з принципом Даламбера, рівняння рівноваги одержаної системи сил.

$$\begin{aligned}
 x_A + x_B + \sum F_{kx} + \sum F_{kx} &= 0, \\
 y_A + y_B + \sum F_{ky} + \sum F_{ky} &= 0, \\
 z_B + \sum F_{kz} &= 0, \\
 -y_B \cdot h + \sum M_x(\bar{F}_k) - \sum F_{ky} \cdot z_k &= 0, \\
 -x_B \cdot h + \sum M_y(\bar{F}_k) - \sum F_{kx} \cdot z_k &= 0, \\
 \sum M_z(\bar{F}_k) - \sum F_{kt} \cdot r_k &= 0.
 \end{aligned} \tag{232}$$

Як видно на рисунку 117, де зображено поперечний перетин тіла через точку  $M_k$ , проекції сил інерції на осі координат, з врахуванням (231), визначаються залежностями:

$$F_{kx} = (F_{kt})_x + (F_{kn})_x = m_k e \cdot r_k \sin a_k + m_k w^2 r_k \cos a_k = e m_k y_k + w^2 m_k x_k, \tag{233}$$

$$F_{ky} = (F_{kt})_y + (F_{kn})_y = -m_k e \cdot r_k \cos a_k + m_k w^2 r_k \sin a_k = -e m_k x_k + w^2 m_k y_k.$$

Використаємо (233) для знаходження залежностей сил інерції в рівняннях (232):

$$\begin{aligned}
 \sum F_{kx} &= e \sum m_k y_k + w^2 \sum m_k x_k = e M_{y_c} + w^2 M_{x_c}, \\
 \sum F_{ky} &= -e \sum m_k x_k + w^2 \sum m_k y_k = e M_{x_c} + w^2 M_{y_c}, \\
 \sum F_{ky} z_k &= -e \sum m_k x_k z_k + w^2 \sum m_k y_k z_k = -e J_{xz} + w^2 J_{yz}, \\
 \sum F_{kx} z_k &= e \sum m_k y_k z_k + w^2 \sum m_k x_k z_k = e J_{yz} + w^2 J_{xz}, \\
 \sum F_{kt} \cdot r &= e \sum m_k r_k^2 = e J_z,
 \end{aligned} \tag{234}$$

де  $M$  – маса всього тіла,

$J_{xz}, J_{yz}$  – відцентрові моменти інерції,

$J_z$  – момент інерції тіла відносно осі обертання.

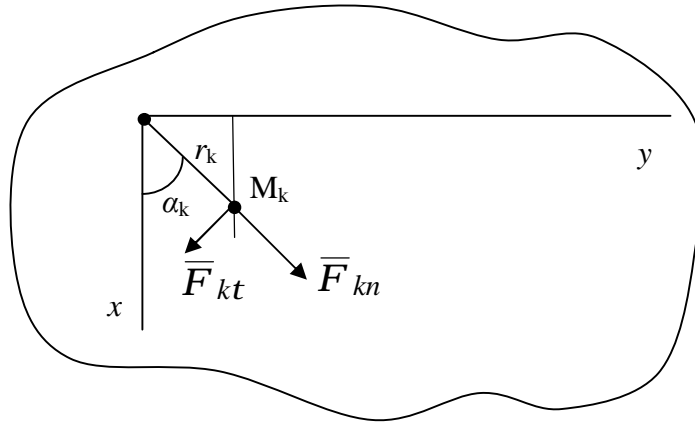


Рисунок 117

З урахуванням одержаних в (234) залежностей виділимо із (232) тільки ту частину повних реакцій підшипників, які врівноважують сили інерції точок тіла, без врахування дії активних сил. Тоді динамічні реакції визначаються із рівнянь:

$$\begin{aligned}
 X_A^D + X_B^D + eM_{y_c} + w^2 M_{x_c} &= 0, \\
 Y_A^D + Y_B^D + eM_{x_c} + w^2 M_{y_c} &= 0, \\
 -Y_B^D \cdot h + eJ_{xz} - w^2 J_{yz} &= 0, \\
 X_B^D \cdot h + eJ_{yz} - w^2 J_{xz} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{235}$$

і будуть відрізнятись від відповідних статичних реакцій  $\overline{X}_A^{CT}, \overline{X}_B^{CT}, \overline{Y}_A^{CT}, \overline{Y}_B^{CT}, \overline{Z}_A^{CT}$ , які обчислюються із рівнянь (232) без врахування сил інерції (при значеннях  $\varepsilon=0$  та  $\omega=0$ ).

Аналізуючи рівняння (235), можна дійти до висновку: для того, щоб обертання тіла не спричиняло появи додаткових динамічних навантажень на підшипники, повинні виконуватись умови:

$$x_C = 0, \quad y_C = 0; \tag{236}$$

$$J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0. \tag{237}$$

Це досягається у випадку, якщо центр мас тіла знаходиться на його осі обертання, і вісь обертання є головною віссю інерції тіла для початку координат (точки А). При одночасному виконанні цих двох умов вісь обертання буде головною центральною віссю інерції тіла.

Цей висновок залишається справедливим і у випадку рівномірного обертання тіла, коли додаткові динамічні реакції пропорційні квадрату кутової швидкості  $\omega$ .

У сучасних машинах, де елементи механізмів, деталі обертаються з великими кутовими швидкостями, додаткові динамічні реакції підшипників можуть значно перевищувати статичні реакції. Тому проблема усунення додаткових динамічних навантажень на підшипник залишається однією із найважливіших в машинобудуванні. Для її розв'язання сили інерції тіл при обертанні повинні урівноважуватись.

### 13.6 Статична та динамічна урівноваженість тіл, що обертаються

Тіло з нерухомою віссю обертання вважається статично урівноваженим, якщо центр мас цього тіла знаходиться на осі обертання, тобто коли виконуються рівняння (236). З перших двох рівнянь системи (235) випливає

$$x_A^D + x_B^D = 0, \quad y_A^D + y_B^D = 0, \quad (238)$$

тобто проекції динамічних реакцій підшипників утворюють пари сил, приймаючи значення:

$$x_A^D = -x_B^D = \frac{eJ_{yz} + w^2 J_{xz}}{h}; \quad y_B^D = -y_A^D = \frac{eJ_{xz} + w^2 J_{yz}}{h}. \quad (239)$$

Отже при статичному урівноваженні тіл динамічні реакції підшипників не зникають, досягаючи величини

$$R_A^D = R_B^D = \frac{1}{h} \sqrt{(e^2 + w^4)(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)}. \quad (240)$$

Ці реакції в кожному з підшипників рівні одна одній, протилежно напрямлені і обертаються разом з рухомими осями координат. При цьому підшипникові опори будуть зазнавати динамічні навантаження циклічно-змінної дії, що може призвести до їх руйнування від втомлюваності та вібрацій.

Динамічні реакції підшипників будуть нульовими при динамічній урівноваженості тіла, коли одночасно виконуються умови рівнянь (236) і (237). Такого стану досягають при динамічному урівноваженні тіла на спеціальних балансувальних пристроях, роблячи вісь обертання головною центральною віссю інерції.

При виконанні цієї операції керуються положенням про те, що будь-яку проведену в тілі вісь можна перетворити на головну центральну вісь інерції, приєднуючи до тіла два точених тіла.

Щоб зробити динамічно урівноваженим тіло масою  $M$ , для якого величини  $x_c, y_c, J_{xc}, J_{yz}$  відомі і не нульові, необхідно в результаті приєднання до нього мас  $m_1$  і  $m_2$  в точках з координатами  $(x_1, y_1, z_1)$  та  $(x_2, y_2, z_2)$  забезпечити виконання рівнянь:

$$\begin{aligned} M x_c + m_1 x_1 + m_2 x_2 &= 0 \\ M y_c + m_1 y_1 + m_2 y_2 &= 0 \\ J_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 &= 0 \\ J_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 &= 0 \end{aligned} \quad (241)$$

Для цього із восьми невідомих параметрів приєднаних мас треба наперед задати величинами чотирьох із них, а інші чотири визначити із рівнянь (241).

Для новоствореного таким чином тіла координати його центра мас  $x'_c = y'_c = 0$  і відцентрові моменти інерції  $J'_{xz} = J'_{yz} = 0$ , тобто вісь  $z$  стане головною центральною віссю інерції.

Такий метод динамічного урівноважування знайшов широке застосування в техніці для виключення додаткових навантажень підшипників роторів турбін та інших деталей, які здійснюють обертальний рух в робочих машинах.



### 13.7 Методика і приклади розв'язання задач

Розв'язуючи задачі динаміки системи за допомогою принципу Даламбера, треба дотримуватися такого порядку:

- 1) виділити матеріальні точки або тверді тіла, рух яких вивчається;
- 2) визначити в'язі, накладені на матеріальні точки або тверді тіла, рух яких вивчається;
- 3) застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, умовно відкинути в'язі і замінити їх дію на матеріальні точки або тверді тіла реакціями в'язей;
- 4) визначити напрямок і величину сил інерції;
- 5) скласти схему всіх сил, що діють на матеріальні точки або тверді тіла системи (у тому числі й сили інерції);
- 6) записати і розв'язати рівняння їх рівноваги, що відповідають діючим на матеріальні точки або тверді тіла системи сил.

**Приклад 52.** *Вантаж 1 вагою  $\bar{P}_1$  рухається вниз вздовж грані призми вагою  $P$  і надає рух вантажу 2 вагою  $\bar{P}_2$  за допомогою нитки, перекинutoї через нерухомий блок 3. Підлога, грані призми і вантажі 1 і 2 – гладенькі.*

*Визначити тиск призми на підлогу і виступ, який не дає змоги призмі переміщуватися вздовж підлоги, а також визначити натяг нитки.*

#### Розв'язання

Розглянемо механічну систему, що складається з двох вантажів, з'єднаних ниткою, і призми (рис. 118).

На систему накладені в'язі з боку виступу і підлоги. Відкидаємо ці в'язі і замінюємо їх реакціями підлоги  $\bar{N}_y$  і виступу  $\bar{N}_x$ .

Застосуємо для розв'язання задачі принцип Даламбера. Напрямок прискорень вантажів обираємо довільно, припускаючи, що вантаж 1 рухається вниз. Тоді сили інерції будуть мати напрямок, протилежний прискоренням. Обчислимо величини сил інерції.

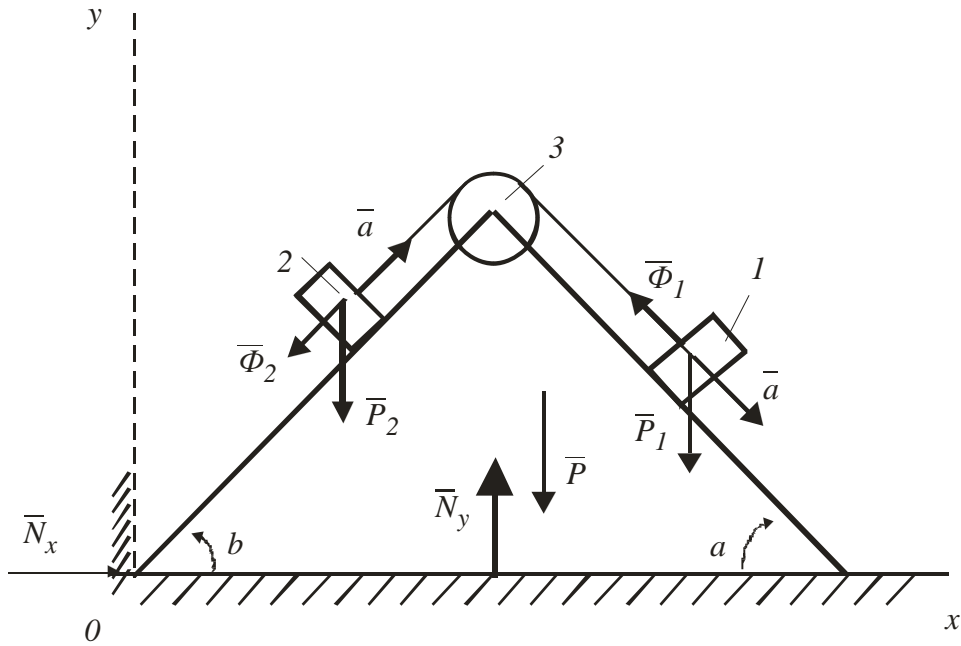


Рисунок 118

Для абсолютних значень сил інерції вантажів будемо мати:

$$\Phi_1 = \frac{P_1}{g} a; \quad \Phi_2 = \frac{P_2}{g} a.$$

Напрямок сил інерції  $\bar{\Phi}_1$  і  $\bar{\Phi}_2$  показано на рисунку 118 ( $\bar{\Phi}_1$  і  $\bar{\Phi}_2$  спрямовують протилежно прискоренню  $\bar{a}$ ).

Складаючи умови рівноваги зовнішніх сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}, \bar{N}_y, \bar{N}_x$  і сил інерції  $\bar{\Phi}_1$  і  $\bar{\Phi}_2$  в проекціях на координатні осі  $Ox$  і  $Oy$ , отримаємо відповідно:

$$\text{- для осі } Ox - \sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{kx} + \sum R_{kx} + \sum F_{kx} = 0;$$

$$N_x - \frac{P_1}{g} a \cdot \cos a - \frac{P_2}{g} a \cdot \cos b = 0;$$

$$\text{- для осі } Oy - \sum F_{ky} = 0;$$

$$N_y - P_1 - P_2 - P + \frac{P_1}{g} a \cdot \sin a - \frac{P_2}{g} a \cdot \sin b = 0.$$

Звідси

$$\begin{cases} N_x = \frac{a}{g}(P_1 \cos a + P_2 \cos b); \\ N_y = P_1 + P_2 + P - \frac{a}{g}(P_1 \sin a - P_2 \sin b) \end{cases} \quad (\text{a})$$

Для визначення сили натягу нитки  $\bar{T}$  і прискорення вантажів знову застосуємо принцип Даламбера і складемо умови рівноваги зовнішніх сил і сил інерції в проекціях на напрямок нитки для кожного вантажу окремо. Отримаємо:

- для вантажу 1 (рис. 119)

$$T + \frac{P_1}{g}a - P_1 \sin a = 0, \quad (\text{б})$$

- для вантажу 2 (рис. 120)

$$T - \frac{P_2}{g}a - P_2 \sin b = 0 \quad (\text{в})$$

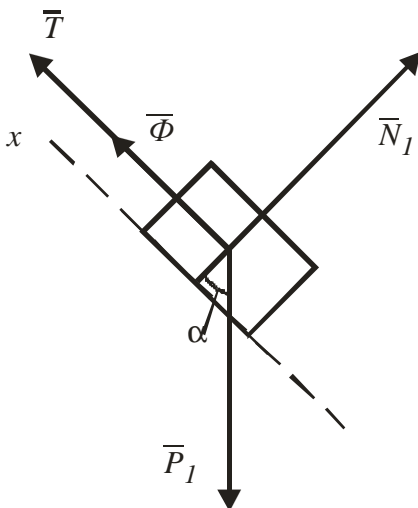


Рисунок 119

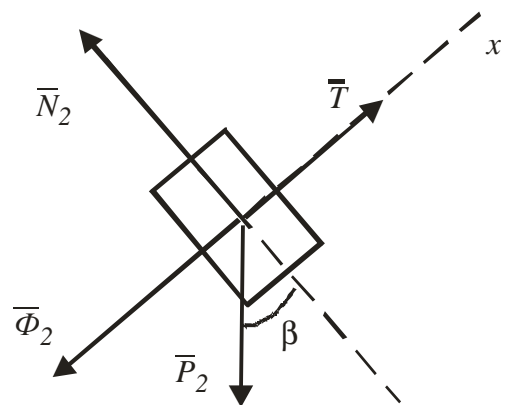


Рисунок 120

Виключивши з рівнянь (б) і (в)  $T$ , знайдемо прискорення  $a$ :

$$a = g \frac{P_1 \sin a - P_2 \sin b}{P_1 + P_2}. \quad (\text{г})$$

Зрозуміло, що для того, щоб вантаж 1 рухався вниз, повинна виконуватись умова

$$P_1 \sin a - P_2 \sin b > 0.$$

Використовуючи значення прискорення, знаходимо натяг нитки:

$$T = \frac{P_1 P_2 (\sin a + \sin b)}{P_1 + P_2}. \quad (\text{д})$$

Підставляючи значення прискорення у рівняння (а) послідовно отримаємо:

$$F = \frac{(P_1 \cos a + P_2 \cos b)(P_1 \sin a - P_2 \sin b)}{P_1 + P_2}; \quad (\text{е})$$

$$N = P_1 + P_2 + P - \frac{(P_1 \sin a - P_2 \sin b)^2}{P_1 + P_2}. \quad (\text{ж})$$

Аналіз рівнянь (е) і (ж) свідчить, що у випадку

$$P_1 \sin a - P_2 \sin b = 0$$

тиск призми на виступ буде відсутнім, а її тиск на підлогу буде дорівнювати силам ваги призми і вантажів.

Отримані результати (г), (д), (е), (ж) дають змогу також аналізувати поведінку механічної системи при змінних кутах  $a$  і  $b$ . Наприклад, при кутах  $a$  або  $b$ , які будуть дорівнювати  $90^0$ , призма стає прямокутною, що значно змінює поведінку механічної системи в цілому.

Із наведеного прикладу видно, що принцип Даламбера дає змогу

визначати не тільки реакції в'язей накладених на механічну систему, а і визначити кінематичні характеристики руху окремих її тіл.

**Приклад 53.** Електродвигун, встановлений на горизонтальній балці, піднімає за допомогою троса вантаж маси  $m$ . Радіус барабана, укріпленого на осі двигуна, дорівнює  $r$ , а момент інерції барабана разом з ротором дорівнює  $J$ . Нехтуючи вагою троса, визначити динамічні реакції опор  $A$  і  $B$  балки, якщо вантаж піднімається з прискоренням  $\bar{a}$ . Лінійні розміри зазначені на рисунку 121. Передбачається, що площина рисунка є площиною матеріальної симетрії частин, що рухаються.

Розв'язання

Вантаж піднімається з прискоренням  $\bar{a}$ . Його сила інерції, яка за модулем дорівнює  $m\bar{a}$ , спрямована вниз. Кутове прискорення частин, які обертаються, спрямовані за годинниковою стрілкою, отже, головний момент сил інерції спрямований проти ходу годинникової стрілки і дорівнює за модулем  $J\epsilon$  (на рисунку 121 знак мінус у сили інерції вантажу й у моменту сил інерції барабана не показаний, тому що їхні напрямки зазначені на рисунку).

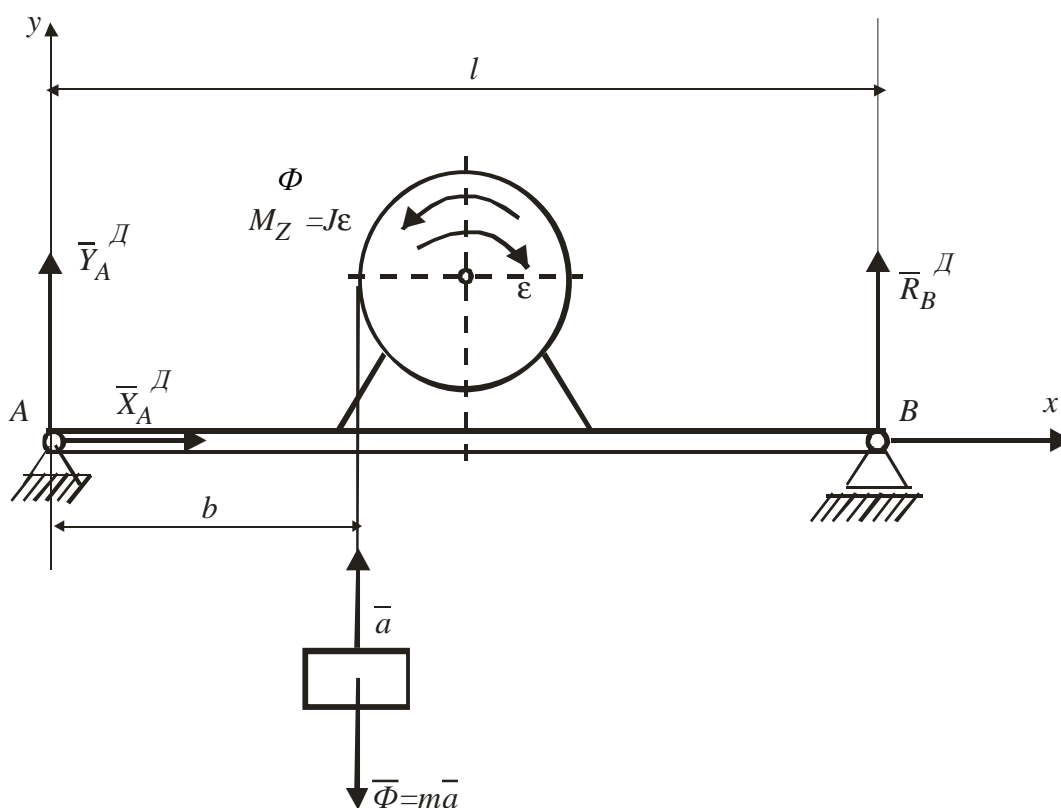


Рисунок 121

Головний вектор сил інерції барабана дорівнює нулю, тому що його центр мас нерухомий. Зобразимо динамічні реакції опор. Активні сили не враховуємо і вважаючи умовно барабан і вантаж нерухомими, складаємо рівняння рівноваги для сил інерції і додаткових динамічних реакцій.

Складемо два рівняння моментів (головний момент сил інерції можна розглядати як момент деякої пари) і одне рівняння проекцій сил на вісь  $x$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= 0, & J\epsilon + R_B^D b - tab &= 0, \\ \sum M_{iB} &= 0, & J\epsilon - Y_B^D b + ma(l-b) &= 0, \\ \sum F_{ix} &= 0, & X_A^D &= 0. \end{aligned}$$

З огляду на те, що  $e = a/r$ , знайдемо:

$$X_A^D = 0, \quad Y_A^D = \left[ \frac{J}{r} + m(l-b) \right] \frac{a}{l}, \quad R_B^D = \left( mb - \frac{J}{r} \right) \frac{a}{l}.$$

**Приклад 54.** *Визначити опорні реакції підп'ятника  $A$  і підшипника  $B$  поворотного крана (рис. 122) при підніманні контейнера  $E$  масою 3000 кг з прискоренням  $0,5g$ . Маса крана дорівнює 2000 кг, а його центр мас розташований у точці  $C$ . Маса візка  $D$  дорівнює 500 кг. Кран і візок не рухомі.*

#### Розв'язання

Розглядатимемо рух однієї точки  $E$ . В'язями є підп'ятник  $A$  і циліндричний підшипник  $C$ , а реакціями –  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  і  $\bar{X}_B$ .

Прискорення матеріальної точки  $E$  (контейнера)  $a_E = 0,5g$ . Величина сили інерції точки  $E$   $\Phi_E = 0,5gm_E = 0,5g \cdot 3000 = 1500g$ .

Отже, на кран діятиме система сил  $\bar{P}, \bar{G}, \bar{Q}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B$  і  $\bar{\Phi}_E$ . На підставі принципу Даламбера ці сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил.

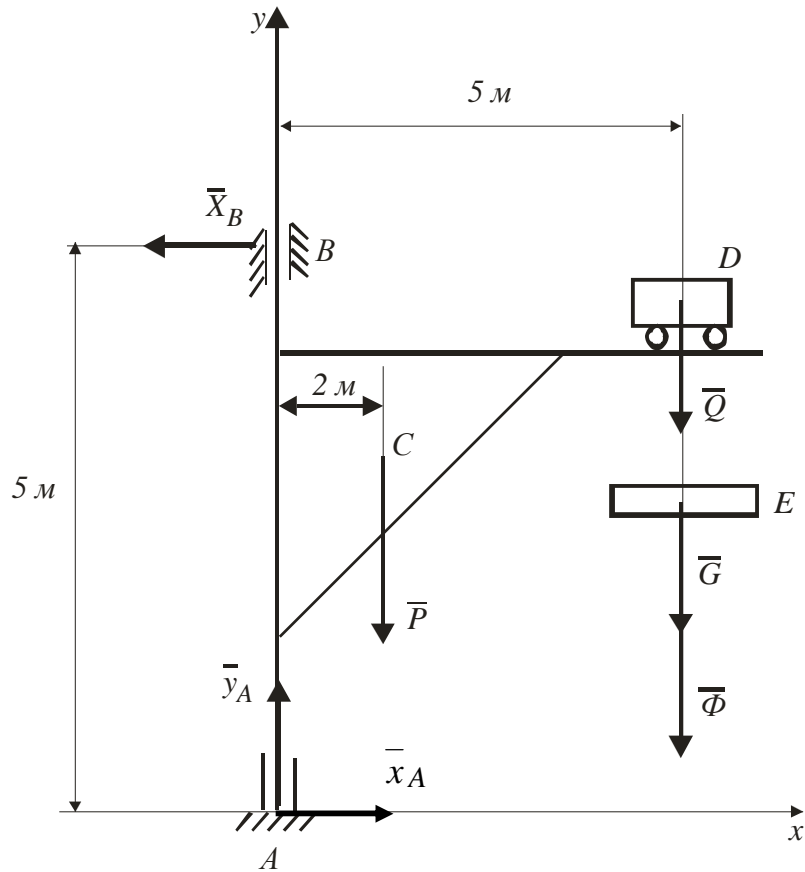


Рисунок 122

Складемо рівняння рівноваги цієї системи сил:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0; \quad X_A - X_B = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - P - Q - G - \Phi = 0; \\ \sum M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad X_B \cdot 5 - P \cdot 2 - (Q + G + \Phi) \cdot 5 = 0. \end{aligned} \quad (a)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (а), дістанемо:

$$\begin{aligned} X_B = \frac{2P + 5(Q + G + \Phi)}{5} = \frac{9,81[2 \cdot 2000 + 5 \cdot (500 + 3000 + 1500)]}{5} = 56,9 \text{ кН}; \\ Y_A = 9,81(2000 + 500 + 3000 + 1500) = 68,7 \text{ кН}; \\ X_A = X_B = 56,9 \text{ кН}. \end{aligned}$$

**Приклад 55.** Стрижень  $AB$  завдовжки  $2l$ , на кінцях якого містяться вантажі однакової ваги  $P$ , обертається рівномірно з кутовою швидкістю навколо вертикальної осі  $Oz$ , що проходить через середину стрижня. Відстань точки  $D$  від підшипника  $C$  дорівнює  $a$ , а від підп'ятника  $O$  –  $b$ . Кут між стрижнем  $AB$  і віссю  $Oz$  зберігає сталу величину  $\alpha$  (рис. 123). Нехтуючи вагою стрижня і розмірами вантажів, визначити реакції підшипника  $C$  і підп'ятника  $O$  у той момент, коли стрижень розташований у площині  $yOz$ .

#### Розв'язання

Розглянемо рух матеріальних точок  $A$  і  $B$ . В'зявши є підп'ятник  $O$  і циліндричний підшипник  $C$ , а їх реакціями в площині  $yOz$  –  $\bar{Y}_0, \bar{Z}_0$  і  $\bar{Y}_C$ .

Прискореннями матеріальних точок  $A$  і  $B$  є відповідно  $\bar{a}_A^n$  і  $\bar{a}_B^n$ . Дотичні прискорення дорівнюють нулю:  $a_A^t = \bar{a}_B^t = 0$ , оскільки обертання стрижня  $AB$  відбувається зі сталою швидкістю ( $a^t = eR; e = 0$ ).

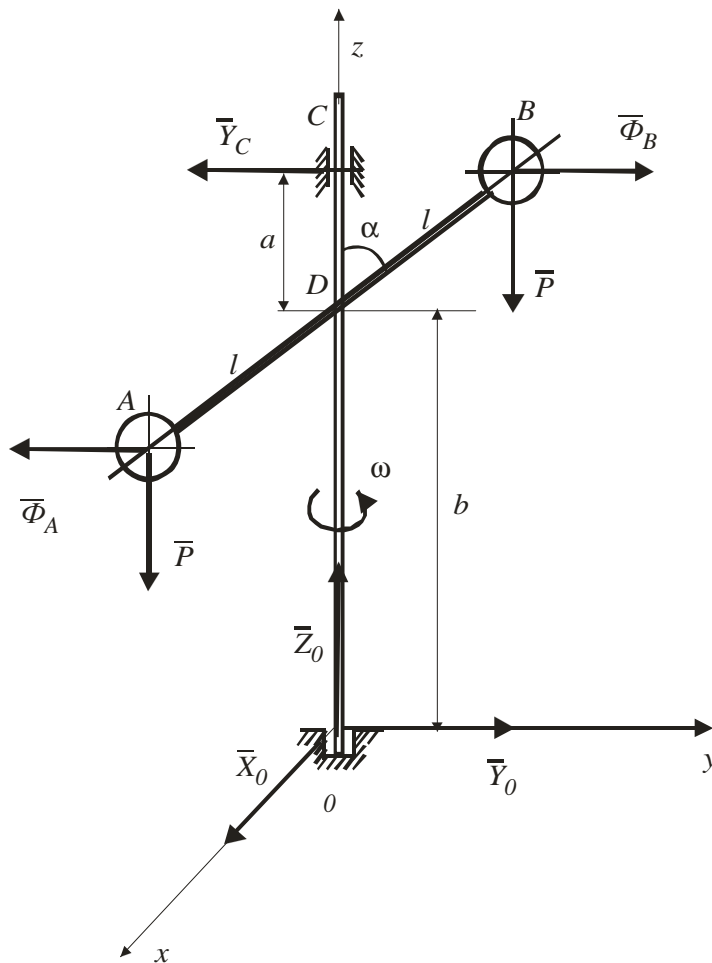


Рисунок 123



## Модулі сил інерції

$$\Phi_A = \Phi_B = \frac{P}{g} l w^2 \sin a .$$

Сили  $\bar{P}, \bar{\Phi}_A, \bar{\Phi}_B, \bar{Y}_C, \bar{Y}_0$  і  $\bar{Z}_0$  утворюють довільну плоску систему сил ( $x_0 = 0$ ). Відповідно до принципу Даламбера складемо для довільної плоскої системи сил рівняння, що відповідають рівнянням (218) і (219), у такому вигляді:

$$\sum_{n=1}^N F_{ky} = 0; \quad -Y_C + \Phi_B - \Phi_A + Y_0 = 0;$$

$$\sum_{n=1}^N F_{kz} = 0; \quad -2P + Z_0 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N M_D(\bar{F}_k) = 0; \quad Pl \sin a - Pl \sin a + Y_C \cdot a + Y_0 \cdot b - \Phi_A l \cos a - \Phi_B l \cos a = 0.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, дістанемо (враховуючи, що  $\Phi_A = \Phi_B$ ):

$$Y_0 = Y_C;$$

$$Y_C = \frac{2\Phi_A l \cos a}{a + b} = \frac{2Pl^2 v^2 \sin a \cos a}{g(a + b)} = \frac{Pl^2 w^2 \sin 2a}{g(a + b)};$$

$$Z_0 = 2P .$$

При обертанні стрижня  $AB$  реакції  $\bar{Y}_0$  і  $\bar{Y}_C$  обертаються разом з ним.

**Приклад 56.** Вертикальний вал (рис. 124) довжиною  $3a$  ( $AB = BD = DE = a$ ), закріплений під'ятником  $A$  і підшипником  $D$ , обертається з постійною кутовою швидкістю  $w$ . До вала жорстко прикріплений у точці  $E$  ламаний однорідний стрижень масою  $m$  і довжиною  $10b$ , що складається з двох частин 1 і 2, а в точці  $B$  прикріплений невагомий стрижень довжиною  $l = 5b$  із точкою масою  $m_3$  на кінці; обидва стрижні лежать в одній площині.

Дано:  $w = 8 \text{ c}^{-1}$ ,  $m = m_1 + m_2 = 10 \text{ кг}$ ,  $m_3 = 2 \text{ кг}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $b = 150^\circ$ ,  
 $\gamma = 60^\circ$ ,  $a = 0,3 \text{ м}$ ,  $b = 0,1 \text{ м}$ .

Визначити: реакції підп'ятника  $A$  і підшипника  $D$ , нехтуючи вагою вала.

#### Розв'язання

Зображаємо вал і прикріплені до нього в точках  $B$  і  $E$  стрижні. Маса і ваги частин 1 і 2 ламаного стрижня пропорційні довжинам цих частин і відповідно дорівнюють:

$$m_1 = 0,6 \text{ т}, \quad m_2 = 0,4 \text{ т}, \quad P_1 = 0,6 \text{ тг}, \quad P_2 = 0,4 \text{ тг}, \quad P_3 = m_3 g.$$

Для визначення невідомих реакцій розглянемо рух заданої механічної системи і застосуємо принцип Даламбера. Проведемо координати осі  $A_{xy}$  (вони обертаються разом з валом) так, щоб стрижні лежали в площині  $xy$ , і зобразимо діючі на систему сили: активні сили – сили ваги  $P_1, P_2, P_3$  і реакції зв'язків – складові реакції підп'ятника  $X_A, Y_A$  і реакцію циліндричного підшипника  $R_D$ .

Відповідно до принципу Даламбера, приєднаємо до цих сил інерції елементів однорідного ламаного стрижня і вантажу, вважаючи його матеріальною точкою.

Так як вал обертається рівномірно, то елементи стрижня мають тільки нормальні прискорення  $a_{nk}$ , спрямовані до осі обертання, а чисельно

$$a_{nk} = w^2 h_k,$$

де  $h_k$  – відстань елементів від осі обертання. Тоді сили інерції  $\bar{\Phi}_k$  будуть спрямовані від осі обертання, а чисельно

$$\Phi_k = \Delta m_k a_{kn} = \Delta m_k w^2 h_k,$$

де  $\Delta m_k$  – маса елемента.

Якщо всі  $\bar{\Phi}_k$  пропорційні  $h_k$ , то епюри цих нормальних сил інерції стрижня утворять для частини 1 трикутник, а для частини 2 – прямокутник (див. рис. 124).

Кожну з отриманих систем нормальних сил інерції замінимо її рівнодіючою, яка дорівнює головному вектору цих сил.

$$R_1^u = m_1 a_{c1}, \quad R_2^u = m_2 a_{c2}.$$

Сила інерції матеріальної точки маси 3 повинна бути спрямована у бік, протилежний її прискоренню, і чисельно дорівнює:  $\Phi_3 = m_3 a_3$ .

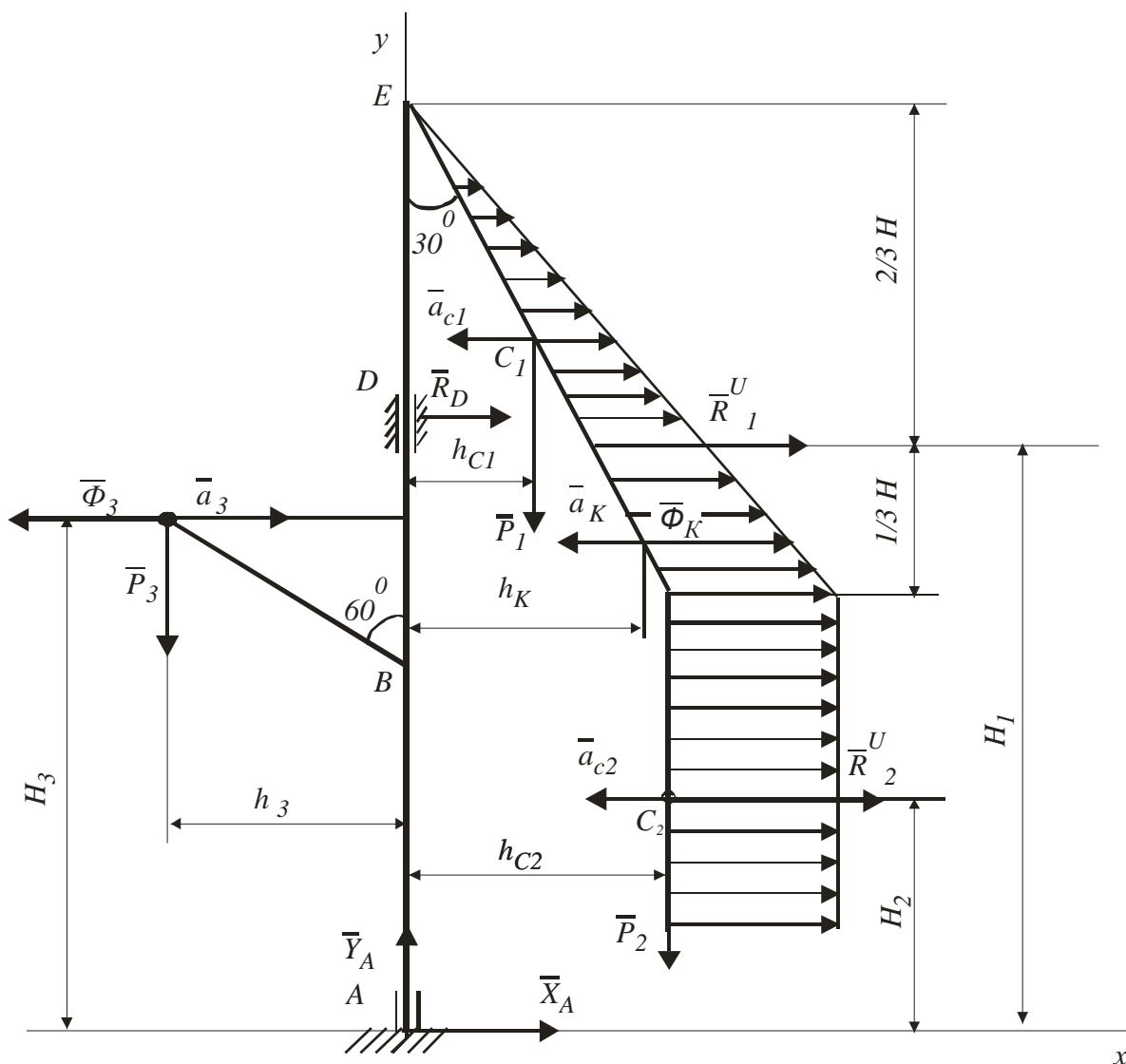


Рисунок 124

Прискорення центрів мас частин 1 і 2 стрижня вантажу 3 дорівнюють:

$$a_{c1} = w^2 h_{c1}, \quad a_{c2} = w^2 h_{c2}, \quad a_3 = w^2 h_3,$$

де  $h_{c1}, h_{c2}$  – відстань центрів мас частин стрижня від осі обертання, а  $h_3$  – відповідна відстань вантажу:

$$\begin{aligned} h_{c1} &= 3b \sin 30^\circ = 0,15\text{ м}, \\ h_{c2} &= 6b \sin 30^\circ = 0,3\text{ м}, \\ h_{c3} &= l \sin 60^\circ = 5b \sin 60^\circ = 0,43\text{ м}. \end{aligned}$$

Одержимо числові значення  $R_1^u, R_2^u$  і  $\Phi_3$ :

$$\begin{aligned} R_1^u &= 0,6mw^2 h_{c1} = 57,6\text{ Н}, \\ R_2^u &= 0,4mw^2 h_{c2} = 76,8\text{ Н}, \\ \Phi_3 &= m_3 w^2 h_3 = 55,0\text{ Н}. \end{aligned}$$

При цьому лінії дії рівнодіючих  $\bar{R}_1^u$  і  $\bar{R}_2^u$  пройдуть через центри ваги відповідних епюр сил інерції. Так лінія дії сили  $R_1^u$  пройде на відстані  $2/3 H$  від вершини трикутника  $E$ , де  $H = 6b \sin 60^\circ = 0,52\text{ м}$ .

Згідно з принципом Даламбера, прикладені зовнішні сили (активні і реакції в'язей) і сили інерції утворюють урівноважену систему сил.

Для отриманої плоскої системи сил складемо три рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; \quad X_A + R_D + R_1^u + R_2^u + \Phi_3 = 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0; \\ \sum M_A(\bar{F}_y) &= 0; \quad -R_D 2a - P_1 h_{c1} - P_2 h_{c2} + P_3 h_3 - R_1^u H_1 - R_2^u H_2 - \Phi_3 H_3 = 0. \end{aligned}$$

де  $H_1, H_2, H_3$  – відповідно плечі сил  $\bar{R}_1^u, \bar{R}_2^u, \bar{\Phi}_3$  відносно точки  $A$ , які дорівнюють:

$$H_1 = 3a - (2/3)H = 0,55\text{ м};$$

$$H_2 = 3a - (H - 2b);$$

$$H_3 = a + l \cos 60^\circ = 0,55\text{ м}.$$

Підставляючи у рівняння рівноваги відповідні величини із рівностей і вирішуючи цю систему рівнянь, знайдемо невідомі реакції.

**Розв'язок:**  $X_A = -33,7\text{ Н}; Y_A = 117,7\text{ Н}; R_D = 45,7\text{ Н} .$

### 13.8 Приклади завдань для самоперевірки знань

#### Варіант 1

- 1 Викласти формулу для визначення кінетичної енергії твердого тіла при обертальному русі.
- 2 Записати формулу аналітичного виразу елементарної роботи сили.
- 3 Записати формулу для визначення роботи сили тертя ковзання і пояснити її рисунком.
- 4 Записати формулу для визначення кінетичної енергії системи матеріальних точок.
- 5 Записати та сформулювати теорему про змінення кінетичної енергії системи в інтегральній формі.

#### Варіант 2

- 1 Доказати та сформулювати теорему про змінення кінетичної енергії точки у диференціальній формі.
- 2 Записати формулу для визначення елементарної роботи сили  $\vec{F}$  на переміщенні  $d\vec{S}$ .
- 3 Записати формулу для визначення роботи лінійної сили пружності.
- 4 Записати формулу для визначення кінетичної енергії системи тіл.
- 5 Записати формулу та сформулювати, чому дорівнює робота сили ваги.

### Варіант 3

- 1 Викласти формулу для визначення кінетичної енергії твердого тіла при його плоскому русі.
- 2 Записати формулу для визначення елементарної роботи сили  $\vec{F}$ , якщо положення точки задається радіус-вектором  $\vec{r}$ .
- 3 Записати формулу для визначення кінетичної енергії точки.
- 4 Записати формулу для визначення роботи моменту опору кочення.
- 5 Записати та сформулювати, чому дорівнює робота внутрішніх сил твердого тіла.

### Варіант 4

- 1 Викласти формулу для визначення роботи моменту сили при обертальному русі.
- 2 Записати формулу для визначення елементарної роботи сили  $\vec{F}$ , прикладеної до точки, яка рухається зі швидкістю  $\vec{V}$ .
- 3 Записати формулу для визначення кінетичної енергії твердого тіла при поступальному русі.
- 4 Записати формулу для визначення роботи лінійної сили пружності.
- 5 Записати і сформулювати теорему про змінення кінетичної енергії точки в інтегральній формі.

### Варіант 5

- 1 Довести та сформулювати теорему про змінення кінетичної енергії системи в диференціальній формі.
- 2 Записати одну із формул для визначення повної роботи сили.
- 3 Записати формулу для визначення роботи сил тертя ковзання.
- 4 Записати формулу для визначення кінетичної енергії твердого тіла при його обертальному русі.
- 5 Записати та сформулювати, чому дорівнює робота моменту опору коченню.

## Варіант 6

- 1 Записати формулу для визначення роботи сили ваги.
- 2 Записати формулу для визначення потужності сили.
- 3 Записати формулу для визначення кінетичної енергії тіла при плоскому русі.
- 4 Записати формулу для визначення кінетичної енергії тіла при плоскому русі.
- 5 Записати та сформулювати теорему про змінення кінетичної енергії точки у диференціальній формі.

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Вектор головний
- сил інерції 291
  - кількості руху 47, 48
  - внутрішніх сил 10, 12
- Втрата кінетичної енергії при непружному ударі двох тіл 208
- Гіроскоп 268
- вільних 269
  - симетричних 274
- Гюйгенса теорема 22
- Динаміка твердого тіла 227
- Даламбера принцип 286
- Довжина приведенного фізичного маятника 237
- Закон
- збереження кінетичного моменту 86, 87
  - руху центра мас системи 64
  - кількості руху 52, 53
  - механічній енергії 187, 188
- Зрівноваженість динамічна 297, 301
- Імпульс сили 47
- елементарний 48
  - ударний 191
  - повний 47
- Карно теорема 207
- Кінетична енергія 137
- точки 137
  - системи 138
  - твердого тіла 139
  - при поступальному русі 139
  - обертальному русі 140
  - плоскому русі 140
- Кількість руху системи 49, 51
- рух точки 44
- Коливання маятника 232
- Коефіцієнт відновлення при ударі 198
- Маятник
- математичний 228
  - фізичний 230
- Момент
- гіроскопічний 277
  - головних сил інерції 292
  - внутрішніх сил 11, 12
  - кінетичний 77
  - точки 80
  - системи 89, 86, 82
  - відносно осі обертання 82
  - кількості руху системи 81
  - статичний 14
- Момент інерції 15
- відносно точки 15
  - відносно осі 17
  - відносно осей координат 17
  - відцентровий 19
  - суцільних тіл 21
  - однорідних тіл 23
  - стриження 22, 23
  - прямокутної пластина 24
  - круглого диска 25
  - тонкого кільця 27
  - прямокутного трикутника 27
  - круглого циліндра 29
  - кулі 30
  - кругового конуса 31
- Поле силове 176
- потенціальне 177
  - тяжіння 184
- Вісь інерції



- головна 21
- головна центральна 21
- Потужність 116
- Принцип Даламбера 286
  - для точки 287
  - для системи 286, 287
- Поверхні рівняння 179
- Період коливань 234
  - малих коливань 235
  - математичного маятника 234
  - фізичного маятника 235
- Радіус інерції 17
- Рівняння руху 42
  - системи диференціальні 43, 44
  - твердого тіла
    - диференціальне 227
  - поступального 227
  - обертального навколо осі 231
  - плоского 252
  - обертального навколо точки 263
  - динамічні Ейлера 268
  - вільного тіла 274
- Робота
  - внутрішніх сил 125
  - тертя 132
  - сили ваги 118
  - сили 114
  - сили при обертанні тіла 121
  - елементарна 115
  - повна 114
  - пружної сили 119
- Реакції динамічні, які діють на тіло, що обертається 296
- Реакція динамічна 296
- Сила
  - внутрішня 10
  - зовнішня 9
  - даламберова 286, 287
  - потенційна 121
  - непотенційна 189
- Система 8
  - механічна 8
  - незмінна 8
- Тиск на підшипники 300
  - статичний 300
- Теорема
  - Гюйгенса – Штейнера 21, 22
  - Карно 199
  - Кельвіна 193, 197
  - про рух центра мас системи 63, 64
  - при ударі 195
  - про зміну кількості руху точки 47
  - про зміну кількості руху системи 45
  - про зміну кінетичного моменту 77, 80
  - точки 81
  - системи 78, 83
  - для відносного руху 92
  - кінетичної енергії 145
  - точки 147
  - системи 154
  - окремі випадки 156
  - Резаля 93, 96
  - Кьоніга 141
- Теорема динаміки загальні 47
- Удар 190
  - абсолютно пружній 200
  - абсолютно не пружній 200
  - пружний 200
  - косою (не прямий) 202

- по тілу, що обертається 198
- прямий 199
- центральний 207
- тіла о нерухому  
перешкоду 199
- центральний двох тіл 208

#### Центр

- хитань Фізичного  
маятника 237
- мас 13,

#### Час удару 190

Швидкість втрачена при  
ударі 206

#### Енергія потенційна 176, 182

- системи кінетична 141

- тіла кінетична 143
- точки кінетична 141

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Короткий довідник з теоретичної механіки: навч. Посібник / І.П.Смерека [та ін.]. – Львів : Інтеллект–Захід, 2001. – 240 с.
- 2 **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики : учебник для вузов / С.М.Тарг. – 12 изд., стер. – М. : Высш.шк., 2002. – 416 с.
- 3 Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для тех. вузов / под ред. А.А. Яблонского.– 7-е изд., испр. – М. : Интеграл-Пресс, 2002. – 384 с.
- 4 **Павловський, М.А.** Теоретична механіка : підручник / М.А.Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
- 5 **Павленко, Ю.Г.** Лекции по теоретической механики : учебник. – 2-е изд., перераб. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 392 с.
- 6 **Аркушу, А.И.** Руководство к решению задач по теоретической механике : учебное пособие. – 5-е изд., испр. – М. : Высш.шк., 2002. – 336 с.
- 7 **Божидарнік, В.В.** Методика розв'язання і збірник задач з теоретичної механіки : навч. посіб. / В.В.Божидарнік, Л.Д.Величко. – Луцьк : Надстир'я, 2003. – 496 с.
- 8 **Мещерский, И.В.** Задачи по теоретической механике : учеб. пособие / под ред. В.А.Пальмова, Д.Р.Меркина. – Спб. : Лань, 2003. – 448 с.
- 9 **Бондаренко, А.А.** Теоретична механіка: підручник у 2-х частинах. Ч.2 / А.А.Бонбаренко, О.О.Дубінін, О.М.Переяславцев. – К. : Знання, 2004. – 590 с.
- 10 **Токар, А.М.** Теоретична механіка. Динаміка. Методи й задачі : навчальний посібник. – К. : Либідь, 2006. – 440 с.

*Навчальне видання*

**ВОДОЛАЗСЬКА Олена Георгіївна  
ПОДЛЕСНИЙ Сергій Володимирович  
ІСКРИЦЬКИЙ В'ячеслав Михайлович**

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА  
ДИНАМІКА**

**Динаміка механічної системи та твердого тіла**

Навчальний посібник

Редактор

І.І.Дьякова

Комп'ютерна верстка

О.С.Орда

377/2008. Підп. до друку

Формат 60x84/16.

Папір офсетний. Ум. друк. арк. 17,9. Обл.-вид. арк. 12,41.

Тираж

прим. Зам. №

Донбаська державна машинобудівна академія  
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру серія  
ДК № 1633 від 24.12.2003