

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

О. Г. Ровенська

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для студентів
нематематичних спеціальностей

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № від 2017

Краматорськ
ДДМА
2017

УДК 517.981(075.8)
Р 58

Рецензенти:

Власенко К. В., д-р пед. наук, професор кафедри вищої математики Донбаської державної машинобудівної академії;

Чумак О. О., к. п. н., доцент кафедри інженерної підготовки Донбаської національної академії будівництва й архітектури.

Ровенська, О.Г.

Р 58 Функціональний аналіз : навч. посіб. для студентів нематематичних спеціальностей / О. Г. Ровенська. – Краматорськ : ДДМА, 2017. – 89 с.
ISBN

Навчальний посібник «Функціональний аналіз» містить у стислому вигляді основний теоретичний матеріал з курсу функціонального аналізу, практичні вправи та методичні матеріали щодо організації самостійної роботи й комплексного контролю знань студентів. Призначений для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за технічними та іншими нематематичними спеціальностями.

УДК 517.981(075.8)

© О. Г. Ровенська, 2017

© ДДМА, 2017

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ПОНЯТТЯ МНОЖИНИ. ВИДИ МНОЖИН. ПОТУЖНІСТЬ.....	5
1.1 Поняття множини.....	5
1.2 Поняття відображення множин.....	6
1.3 Потужність множин.....	7
2 МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ.....	9
2.1 Поняття метричного простору.....	9
2.2 Відображення просторів.....	11
2.3 Класифікація точок метричного простору.....	11
3 ВІДКРИТІ Й ЗАМКНЕНІ МНОЖИНИ.....	13
3.1 Збіжність.....	13
3.2 Щільні підмножини.....	13
3.3 Замкнені та відкриті множини.....	14
3.4 Структура відкритої і замкненої множини на прямій. Канторова множина.....	16
4 ПОВНІ Й КОМПАКТНІ МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ.....	17
4.1 Повні метричні простори.....	17
4.2 Компактні множини.....	17
5 ПРИНЦИП СТИСКАЛЬНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ.....	19
5.1 Теорема Банаха.....	19
5.2 Найпростіші застосування принципу стискальних відображень.....	21
6 ЛІНІЙНІ Й НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ.....	23
6.1 Поняття лінійного простору.....	23
6.2 Лінійна залежність та незалежність елементів простору.....	24
6.3 Нормовані простори.....	25
7 ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ.....	27
7.1 Означення евклідових просторів.....	27
7.2 Ортогональні та ортонормовані системи.....	29
8 ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ.....	31
8.1 Поняття та приклади гільбертового простору.....	31
8.2 Ряд Фур'є в евклідовому (гільбертовому) просторі.....	31
9 ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ В ЛІНІЙНИХ НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ.....	34
9.1 Поняття лінійного функціонала. Приклади.....	34
9.2 Норма лінійного функціонала.....	34
9.3 Узагальнені функції.....	36
10 ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ.....	37
10.1 Означення та приклади лінійних операторів.....	37
10.2 Норма оператора.....	38
10.3 Обернений оператор. Резольвента. Спектр.....	39

11 ПОНЯТТЯ МІРИ.....	41
11.1 Міра обмеженої відкритої множини.....	41
11.2 Міра обмеженої замкнутої множини.....	42
11.3 Зовнішня й внутрішня міра обмеженої множини.....	42
11.4 Вимірні за Лебегом множини.....	43
12 ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ.....	44
12.1 Найпростіші властивості вимірних функцій.....	44
12.2 Подальші властивості вимірних функцій.....	46
13 ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА ВІД ОБМЕЖЕНОЇ ФУНКЦІЇ.....	48
13.1 Недоліки інтеграла Рімана.....	48
13.2 Означення інтеграла Лебега.....	49
13.3 Властивості інтеграла Лебега.....	50
14 ПРОСТОРИ СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ.....	52
14.1 Простір $L_{q;b}$	52
14.2 Простір L_2	53
15 РЯДИ ФУР'Є В ПРОСТОРИ L_2	56
15.1 Ортонормовані системи. Тригонометричний ряд Фур'є.....	56
15.2 Інші ортогональні системи простору L_2	58
16 ВПРАВИ ДО РОЗДІЛІВ КУРСУ.....	59
16.1 Вправи до розділу «Поняття множини. Види множин. Потужність».....	59
16.2 Вправи до розділу «Метричні простори».....	62
16.3 Вправи до розділу «Відкриті та замкнені множини».....	65
16.4 Вправи до розділу «Повні та компактні метричні простори».....	66
16.5 Вправи до розділу «Принцип стискальних відображень».....	67
16.6 Вправи до розділу «Лінійні та нормовані простори».....	70
16.7 Вправи до розділу «Евклідові простори».....	71
16.8 Вправи до розділу «Гільбертові простори».....	72
16.9 Вправи до розділу «Лінійні функціонали в лінійних нормованих просторах».....	74
16.10 Вправи до розділу «Лінійні оператори».....	74
16.11 Вправи до розділу «Поняття міри».....	74
16.12 Вправи до розділу «Вимірні функції».....	76
16.13 Вправи до розділу «Інтеграл Лебега від обмеженої функції».....	78
16.14 Приклади завдань підвищеної складності.....	80
17 КОНТРОЛЬ ЗНАНЬ.....	82
17.1 Контроль теоретичного матеріалу.....	82
17.1.1 Базова частина.....	82
17.1.2 Основна частина.....	85
17.3 Контроль матеріалу практичної частини.....	85
17.3.1 Приклади завдань контрольної роботи 1.....	85
17.3.1 Приклади завдань контрольної роботи 2.....	86
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	88

ВСТУП

Функціональний аналіз виник на рубежі 19-го й 20-го століть у працях Гільберта (теорія операторів у нескінченновимірних евклідових просторах), Фреше, Хаусдорфа (теорія топологічних і метричних просторів), Фредгольма (теорія інтегральних рівнянь), Лебега (теорія інтеграла й міри), Рісса, Банаха (теорія лінійних нормованих просторів) та ін. Для функціонального аналізу характерний загальний абстрактний підхід, при якому досліджуються не окремі функції й рівняння, а різні простори й оператори в цих просторах. Цей підхід дозволив з єдиної точки зору розглядати, наприклад, питання розв'язування диференціальних і інтегральних рівнянь, граничних задач для рівнянь у частинних похідних, систем диференціальних рівнянь. Наразі загально визнаною є об'єднуюча роль функціонального аналізу. Його мова, ідеї й методи використовуються в теорії диференціальних рівнянь та математичній фізиці, у теорії чисельних методів, у математичній економіці, у теорії управління та інших теоретичних і прикладних дисциплінах.

Вивчення студентами курсу «Функціональний аналіз» є необхідною умовою для засвоєння навичок і вмінь математичного модулювання технічних та економічних процесів і систем.

Навчальне видання

РОВЕНСЬКА Ольга Геннадіївна

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для студентів
нематематичних спеціальностей

Редагування О. О. Дудченко
Комп'ютерне верстання О. П. Ордіна

130/2017. Підп. до друку . Формат 60 × 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. . Обл.-вид. арк. .
Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 1633 від 24.12.03